ISSN: 0214-3402

# NÚMEROS RACIONALES POSITIVOS: REFLEXIONES SOBRE LA INSTRUCCIÓN

## *Rationals positive numbers: reflections about the teaching*

José MARÍA GAIRÍN
*Departamento de Matemáticas. Universidad de Zaragoza*

RESUMEN: Es intención de este trabajo ofrecer puntos de anclaje desde los que construir una propuesta didáctica para la enseñanza de los números racionales en Educación Primaria. Las reflexiones vertidas en este artículo se sustentan en dos ideas principales: la primera, es que los números racionales deben presentarse en el contexto de la medida de magnitudes, puesto que así los escolares podrán reelaborar la idea de número que construyeron en un contexto tan diferenciado como el del recuento; la segunda, es que los sistemas simbólicos habituales, notación fraccionaria y notación decimal, deben conectarse, conceptual y procedimentalmente, a partir del significado de la fracción como cociente partitivo.

*Palabras clave*: fracción, número decimal, modelo de aprendizaje, Educación Primaria, relaciones, operaciones, medida de magnitudes, cociente partitivo, técnicas de reparto.

ABSTRACT: This paper intends to offer connecting links in order to construct a didactic proposal for the teaching of rational numbers in Primary Education. The reflections which appear in this paper are based on two main ideas: the first one is that rational numbers must be shown into the context of magnitude measure, thus schoolchildren will be able to reconstruct the idea of number that they constructed in a context so different from the one related to recount; the second one is that usual symbolic systems, fractional and decimal notations, must be linked in a conceptual and procedural way, starting from the meaning of the fraction as partitive division.

*Key words*: fraction, decimal number, learning pattern, Primary Education, relations, operations, magnitude measure, partitive division, distribution techniques.

## INTRODUCCIÓN

La presencia de los números racionales en el currículum de matemáticas es una constante que podemos detectar, ininterrumpidamente, en la historia de la enseñanza de las matemáticas en España en los últimos 200 años (Vallejo, 1821; Avendaño, 1859; Llinares y Sánchez, 1988). En esta dilatada historia se han producido varias reformas curriculares que sustancialmente no han afectado a los contenidos, aunque sí que han afectado al modo de presentación de dichos contenidos. En todo caso, el estudio de los números racionales constituye una parte importante de la aritmética escolar, porque ello permite comprender los fenómenos del mundo real asociados a las actividades de medir y de comparar, actividades que exigen desarrollar en los estudiantes una importante diversidad de competencias cognitivas (Streefland, 1991; Thompson, 1995). Aunque como todo objeto de conocimiento, el estudio de esta estructura numérica también plantea problemas de comprensión y de aprendizaje (Rico y Sáenz, 1982; Kerslake, 1986; Bezuck y Bieck, 1993; Mack, 1993; Kieren, 1993).

Es propósito de este trabajo ofrecer algunas reflexiones en torno a la instrucción sobre los números racionales, reflexiones que se limitan a la Educación Primaria, a aquellos cursos en los que los alumnos toman los primeros contactos con esta estructura numérica; en el trabajo hay una preocupación subyacente por justificar los aspectos esenciales de una propuesta didáctica que persigue dos objetivos principales: provocar en los niños una ruptura con la idea de número forjada en el estudio de los números naturales, y potenciar las conexiones conceptuales de los escolares entre las notaciones fraccionaria y decimal. Con estas consideraciones, nos vemos obligados a precisar los límites en los que nos moveremos:

### *i. Solamente se hace referencia a los números racionales positivos*

El cuerpo ordenado de los números racionales se presenta en los textos de matemáticas como un conocimiento explícito y bien delimitado, formalmente estructurado, coherente en su fundamentación lógica y necesario para dar solución a determinados problemas numéricos, geométricos y algebraicos (Feferman, 1989). Pero en los procesos habituales de enseñanza las ideas y conceptos numéricos no se pueden presentar de acuerdo con la estructuración formal de la matemática, hay que hacerlo en sintonía con las capacidades de los alumnos; por ello, hay que estudiar los números racionales positivos antes de afrontar el tema de la negatividad, puesto que el aprendizaje de los números racionales positivos se alcanza con procesos de abstracción a partir de la manipulación de objetos físicos, mientras que la negatividad no está presente en el mundo del escolar y debe aparecer en un contexto algebraico que no corresponde a esta etapa educativa.

### *ii. Los números periódicos quedan al margen de este trabajo*

Las ideas sobre los números racionales que se presentan en este trabajo se construyen a partir de modelos de aprendizaje, en los que las ideas sobre los números racionales se construyen desde la noción de medida. Pero dada la edad de los escolares, 9-12 años, nos parece más interesante que centren su aprendizaje en procesos finitos, quedando las ideas sobre la continuidad de la medida, así como los procesos infinitos de medida, para etapas posteriores en las que estos escolares hayan alcanzado un mayor grado de abstracción.

*iii. No se abordan las fracciones con significado de razón*

A pesar de que la razón y la proporción son tópicos adecuados para aplicar las fracciones a la resolución de problemas, en este trabajo vamos a respetar los diseños curriculares en los que figura un estudio separado de las fracciones y de las razones y proporciones. Esta realidad no responde al desarrollo histórico, ni está justificada didácticamente; más bien responde a la idea de mantener la tradición de quienes, a principios de siglo, decidieron tratar separadamente teoría y práctica y, en consecuencia, la razón y la proporción se alejaron de las fracciones.

A continuación aparece una secuencia de argumentaciones para construir una propuesta de enseñanza sobre los números racionales positivos; la ordenación de las argumentaciones no es caprichosa, encierra una idea de secuenciación en dos cursos escolares, situando la separación de dichos cursos en el punto 8, en la introducción de la fracción con significado de cociente.

1. ASOCIAR LOS NÚMEROS RACIONALES A LA MEDIDA DE MAGNITUDES

En nuestro sistema educativo la primera estructura numérica que se presenta a los escolares es la de los naturales; y es a través de las actividades de recuento como los niños forjan sus ideas abstractas sobre el número. Pero esta idea sirve para dar respuesta a la pregunta ¿cuántos hay? y, por tanto, las características, propiedades y usos de este conjunto numérico deben limitarse al contexto concreto en el que han surgido. Si el escolar tiende a trasladar esta idea de número a otros contextos, se dificulta la comprensión de los números racionales en aspectos esenciales:

— Las fracciones decimales tienen aspecto discreto al considerar numerador y denominador como entes numéricos diferenciados, pero tienen aspecto continuo al considerar la fracción como un solo ente numérico, y es este aspecto continuo de las fracciones el que resulta de difícil comprensión para los escolares (Wearne, Hiebert y Taber, 1991).
— Las notaciones fraccionaria y decimal son sistemas simbólicos paralelos que representan los mismos conceptos; para el alumno es una idea difícil de asimilar el que cualquier concepto, especialmente un número, pueda tener más de un símbolo (Owens y Super, 1993).
— El orden de los números naturales interfiere el orden de las fracciones decimales (Resnick et al., 1989). Los errores en el orden de las expresiones decimales están asociados a la aparente simetría alrededor de la coma decimal y a las dificultades de distinción de los nombres de los números naturales y decimales; estas dificultades provocan la alta tendencia de los niños a aplicar reglas de los

números naturales para comparar las fracciones decimales, dando lugar a técnicas de comparación como la regla del número entero, la regla de la fracción o la regla del cero (Owens y Super, 1993).

Parece que el origen de estos errores hay que situarlo en la inexistencia de una ruptura en la idea de número que tiene el escolar, pues traslada significados de los números naturales a los números racionales. Conviene, por tanto, presentar a los escolares situaciones en las que los números naturales se muestren ineficaces, situaciones que sugieran la necesidad de construir un nuevo sistema de representación; de este modo, los escolares asociarán los números naturales a los usos y características propias del contexto en el que aparecen y, en consecuencia, ampliarán su idea de número a otros contextos diferentes.

Estas situaciones se producen en el contexto de la medida de cantidades de cualquier magnitud medible; en efecto, los números naturales se mostrarán ineficaces para expresar el resultado de la medida de cantidades de magnitud si la unidad de medida no está contenida un número entero de veces en la cantidad a medir. Para dar respuestas a estas situaciones hay que definir un nuevo conjunto numérico, el de los números racionales positivos, que permiten expresar el resultado de la medida de cualquier cantidad de magnitud.

Bien es cierto que los números racionales positivos también se podrían presentar como entes que permiten expresar la relación entre cantidades de magnitud, como la razón de medidas; pero nos parece recomendable no comenzar en este contexto porque la idea de razón resulta conceptualmente más compleja que la de medida: la idea de invarianza subyacente a la razón es un constructo mental, mientras que la idea de la medida se construye desde percepciones visuales. Ítem más, mientras que el significado de las operaciones y la construcción de algoritmos de cálculo se facilita en el contexto de la medida, hay serias dificultades para hacerlo desde la idea de razón.

## 2. COMENZAR LA INSTRUCCIÓN POR LAS FRACCIONES

Una idea esencial para la comprensión de los números racionales es la del fraccionamiento o partición de la unidad en un número finito de partes iguales. Esta idea aparece cuando la unidad de medida es mayor que la cantidad a medir, cuando se necesita establecer una subunidad de medida que quepa un número entero de veces en la cantidad a medir.

Ahora bien, en nuestras experiencias con escolares hemos constatado que la idea de fraccionamiento no aparece de forma innata: los niños tienden a realizar aproximaciones de la medida con expresiones como «un poco menos», «un trozo más pequeño»... Por tanto, y de forma similar a como se adiestró a los niños en las técnicas de contar, la presentación de los números racionales debe venir precedida de un trabajo previo de entrenamiento de los escolares en las técnicas de medir. De este modo, los escolares admitirán la necesidad de crear una subunidad de medida cuando la situación lo requiera, admitirán que dicha subunidad debe provenir del fraccionamiento de la unidad de medida en partes iguales, y admitirán que el resultado de la medida tiene que expresarse con la unidad de medida preestablecida.

Situados en el contexto de la medida, y ante la necesidad de fraccionar la unidad, parece conveniente que el número racional se presente con la notación fraccionaria. En efecto, la notación fraccionaria exige una sola partición de la unidad, la creación de una única subunidad de medida. El tamaño de esta subunidad, que depende del número de partes en que se ha fraccionado la unidad, viene reflejado en el denominador de la fracción; mientras que el número entero de subunidades que contiene la cantidad a medir viene reflejado en el numerador de la fracción.

Si se optase por presentar el número racional a partir de la notación decimal, habría que utilizar una técnica de medida más compleja: el proceso de medida se realiza en varias fases, en la primera de las cuales la unidad se fracciona en 10 partes iguales, pero si con esta subunidad no se ha logrado realizar la medida hay que efectuar un nuevo fraccionamiento, en 10 partes iguales, de la subunidad considerada en la primera fase; y así se prosiguen realizando sucesivas fases hasta efectuar la medida. Evidentemente el proceso es mucho más complejo y también es más complejo el modo de expresar el resultado de la medida, puesto que hay que hacer intervenir aspectos esenciales del sistema de numeración como el principio del valor relativo de las cifras, o como que tal simbolización considera implícita la suma de los valores relativos de las cifras.

### 3. Introducir las fracciones con el significado de medida

Los números racionales positivos, y en particular las fracciones positivas, admiten distintos significados. Así, Behr, Harel, Post y Lesh (1993, p. 14) citan los de parte-todo, cociente, razón, operador y medida, mientras que Kieren (1993, p. 57) no considera el significado de relación parte-todo puesto que lo incluye en los de cociente y de medida.

En nuestro sistema escolar el significado de relación parte-todo es el que se usa de manera prioritaria, es la idea con la que se inicia al escolar en la noción de número racional, aunque esta práctica educativa tenga serios inconvenientes:

- Hay dificultades para definir el todo: *cuando una unidad, objeto o figura, la partimos en trozos iguales y nos referimos a uno o varios de esos trozos utilizamos las fracciones* (Lamadrid, 1987, p. 67).
- La propia indefinición del todo provoca errores entre los estudiantes a quienes se les presentan tareas de comparación de áreas utilizando *todos* del mismo tamaño. Esto produce que los alumnos desatiendan el tamaño de los *todos* de los que provienen las partes (Armstrong-Novillis, 1995, p. 16) y que, en consecuencia, se limiten a la comparación de partes que proceden de divisiones de unidades de distinto tamaño.
- La ocultación de la unidad de medida obstaculiza la identificación de las fracciones del tipo a/a con la unidad, pues los estudiantes tienden a señalar que ese tipo de fracciones representa el todo, o que han tomado a elementos, pero no pueden indicar que vale la unidad puesto que no se les ha presentado como tal.

- La propia instrucción provoca obstáculos de interpretación de las llamadas fracciones impropias, pues al ocultar la unidad en las tareas de medida se crea en el alumno el significado exclusivo de la fracción con el numerador menor que el denominador.

En orden a superar estas deficiencias postulamos que la fracción a/b debe presentarse como el resultado de una medida, como la expresión del número a de subunidades —de tamaño 1/b de unidad—, que corresponde a la cantidad de magnitud medida. Esta decisión viene avalada por las siguientes razones:

- Porque permite presentar una ruptura entre los números naturales y los racionales a partir de sus diferentes usos. Contar y medir son acciones de diferente naturaleza que demandan técnicas diferenciadas y, en consecuencia, sistemas de representación distintos.
- Porque el trabajo con este significado exige un aprendizaje activo, ya que es el propio estudiante quien tiene que decidir la elección de la subunidad de medida necesaria para efectuar la medida.
- Porque el hecho de que en la cantidad a medir no quepa la unidad de medida un número entero de veces posibilita introducir la idea del fraccionamiento de la unidad en un número de partes iguales, facilita la idea de crear subunidades de medida.
- Porque el uso de fracciones para expresar cantidades de magnitud introduce, de forma natural, las fracciones con numeradores mayores, menores o iguales que el denominador, sin más que proponer la medida de cantidades mayores, menores o iguales a la unidad.
- Porque la utilización de dos técnicas de medida distintas posibilita la introducción de las notaciones fraccionaria y decimal de los números racionales positivos: medir con una sola subunidad, medir en una sola fase; o medir con subunidades de la unidad o de partes de la unidad, medir en varias fases.
- Porque este significado permite justificar las relaciones de equivalencia y orden entre fracciones mediante la comparación de cantidades de magnitud.
- Porque posibilita la conceptualización de las operaciones entre fracciones desde el trabajo con cantidades de magnitud; asimismo permite justificar los algoritmos de cálculo.

### 4. Utilizar modelos de aprendizaje

Una construcción del concepto de número racional positivo cognitivamente efectiva exige de un proceso lento de dominio e integración de nuevos significados, que deben articularse con los ya existentes sobre los números naturales; también supone la incorporación de nuevas especificidades simbólicas, operatorias, estructurales, relacionales y de representación, que hay que acomodar a esta variedad de nuevos significados; e igualmente supone fortalecer las conexiones entre los distintos sistemas de representación considerados. Además, hay que asimilar los cambios estructurales —algebraicos y topológicos— del conjunto de los números racionales respecto al de los naturales, partiendo de dos ideas complejas: la existencia de inverso respecto a la multiplicación, y la noción de densidad respecto del orden.

Para afrontar todas esas exigencias, y teniendo en cuenta que la construcción de las ideas sobre los números racionales comienza a edades tempranas (10-11 años), el diseño de la instrucción debe adaptarse a la naturaleza de la mente humana, en el sentido de asociar los conceptos a situaciones del mundo que nos rodea, pues *pensamos mejor con lo familiar, perceptible y manipulable, que con lo abstracto, no representable y desconocido* (Castro, 1994, p. 13).

Surge así la idea de modelo de aprendizaje como entorno físico con el que se esquematiza y recrea una parte del mundo real, con variables bien definidas, estable frente a interacciones con el mundo exterior, y en el que pueden actuar los sujetos (Gairín, 1999, p. 15). Los modelos de aprendizaje así caracterizados tienen una doble utilidad: por una parte, sirven para representar las ideas matemáticas mediante objetos tridimensionales y, por otra parte, facilitan la resolución de situaciones problemáticas cuando éstas se formulan en términos del modelo.

En el proceso instructivo sobre los números racionales positivos, y desde la óptica de los escolares, la utilización de modelos de aprendizaje se hace necesaria por diversas razones: porque permiten la aprehensión sensorial de los conceptos, de los hechos y de las relaciones matemáticas mediante la manipulación de objetos físicos; porque facilitan la construcción de sistemas simbólicos mediante los cuales se expresan los resultados de las actuaciones en el modelo; porque a través del modelo se delimitan las normas sintácticas que caracterizan a los dos sistemas simbólicos habituales: la notación fraccionaria y la notación decimal; porque los modelos permiten que los niños puedan certificar, a través de los sentidos, la certeza o falsedad de resultados matemáticos expresados mediante expresiones simbólicas; y porque posibilitan que los escolares trasladen al modelo situaciones problemáticas, que las resuelvan en dicho modelo, y que trasladen sus resultados al contexto en que se formuló el problema.

Desde la posición del profesor el modelo constituye la herramienta que se proporciona al escolar con una clara intencionalidad educativa: dotarle de un entorno físico sobre el que pueda actuar y reflexionar para que, mediante esta interacción, avance en la construcción del conocimiento cuyo aprendizaje se promueve. En el caso concreto de los números racionales positivos, la propia intencionalidad del recurso didáctico obliga al profesor a utilizar aquel modelo de aprendizaje que haga explícitos los aspectos relevantes de la estructura numérica que se quiere enseñar.

Tanto desde la posición del alumno como desde la del profesor, resulta evidente la necesidad de promover el aprendizaje de los números racionales positivos utilizando los modelos adecuados; de este modo, las ideas matemáticas estarán fuertemente vinculadas al modelo en el que se construyeron —como así se constata cuando los adultos recurren a tartas o barras de helado para expresar sus ideas sobre las fracciones—, y los conocimientos conceptuales y procedimentales se conectarán mediante las percepciones sensoriales. Pero si las ideas no se construyeron en un modelo de aprendizaje, como hemos constatado en maestros en formación con respecto a las expresiones decimales (Gairín, 1999), resulta que los sujetos tienden a priorizar el conocimiento procedimental, mientras que desatienden el conocimiento conceptual, y no se preocupan de establecer conexiones entre ambos.

Finalmente indiquemos que la utilización de modelos de aprendizaje es una decisión que corresponde exclusivamente al profesor. Por tanto, la elección de cualquier modelo de aprendizaje exige de dicho profesor tomar, cuando menos, dos cautelas: de una parte, delimitar cuáles son los aspectos del concepto que explicita el modelo y cuáles son los que oculta u obstaculiza; y, de otra parte, cómo transmitir al alumno una caracterización del modelo que garantice su correcta utilización.

## 5. Trabajar con las magnitudes más adecuadas

Puesto que existe una relación entre el modelo de aprendizaje utilizado y la noción de fracción que se promueve en quien lo utiliza, para dotar de significado a las fracciones como expresiones de cantidades de magnitud hay que utilizar modelos definidos por tres variables (Gairín, 1999):

- *una magnitud medible,* pues un número racional positivo expresa la medida de una cantidad de dicha magnitud,
- *unos objetos,* puesto que a través de ello el aprendiz puede percibir una cierta cantidad de la magnitud considerada,
- *unas acciones,* puesto que la generación de las ideas matemáticas se produce al observar las variaciones de las cantidades de magnitud que se producen con la manipulación de los objetos.

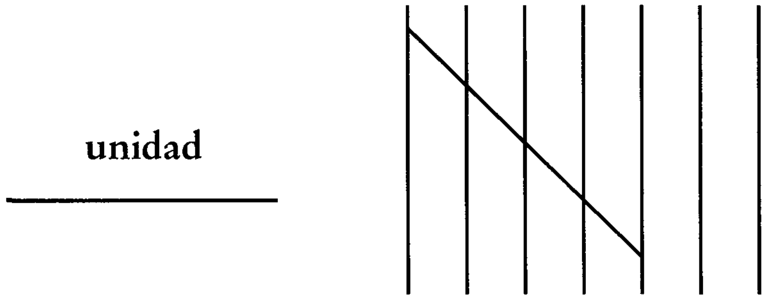
Ahora bien, si nos preguntamos ¿qué magnitud resulta más adecuada para la instrucción?, la respuesta viene dada al considerar que la simbolización del resultado de la medida es un aspecto esencial de la instrucción sobre fracciones. En efecto, la respuesta será la de priorizar la longitud frente a otras magnitudes medibles, y ello porque la sencillez de la técnica de medida —desplazar la unidad sobre la longitud a medir—, permite al escolar dirigir sus esfuerzos a expresar el resultado de la medida; mientras que en el trabajo con otras magnitudes, como la capacidad o la masa, las dificultades técnicas de la medida acapararían toda la atención del escolar. Además, para que los niños trabajen con la longitud se pueden utilizar objetos, como listones de madera o pajas de plástico, que se manipulan con facilidad, que no crean problemas de limpieza, y que tienen un tacto agradable; mientras que el trabajo con otras magnitudes exige la manipulación de aparatos más complejos (como la balanza de dos platillos), o provocan problemas de limpieza (como en la medición de líquidos).

Otra idea esencial en la instrucción sobre los números racionales es la del fraccionamiento; por tanto, al elegir una magnitud para iniciar la enseñanza de las fracciones conviene aplicar el criterio de facilitar el fraccionamiento. En este sentido cabe decir que resulta sencillo el fraccionamiento de cualquier segmento en partes de igual longitud;

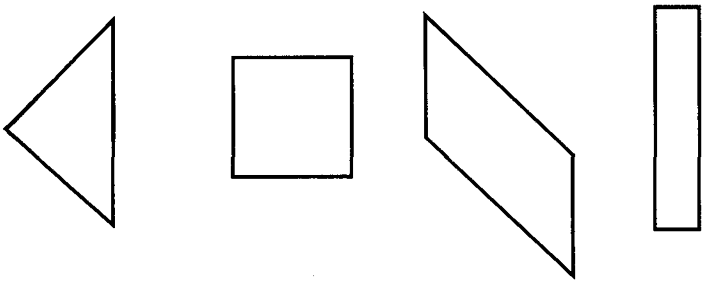
 

mientras que existen serias dificultades para fraccionar, utilizando una balanza de dos brazos, una bola de plastilina en 3 o más partes de igual masa.

En el caso de la longitud conviene recurrir al teorema de Thales y colocar en el aula un tablero con segmentos paralelos equidistantes entre sí. El alumno que quiera fraccionar un segmento en un número determinado de partes de igual longitud, tan sólo tiene que colocar dicho segmento de forma que abarque tantas líneas como el número de partes deseadas, tal y como se ejemplifica gráficamente el fraccionamiento de una unidad en 4 partes iguales:




Cierto es que el alumno debe trabajar con otras magnitudes medibles, pero nos parece importante que los primeros contactos con las fracciones se hagan con la longitud, pues así le resulta al alumno más sencillo el fraccionamiento de la unidad y la comprobación de que las partes son de igual tamaño. Obsérvese que el uso de otras magnitudes podría obstaculizar este proceso instructivo inicial en aspectos tan esenciales como el fraccionamiento en partes que contengan igual cantidad de la magnitud considerada; así por ejemplo, en el caso de la superficie la igualdad de las partes significa igualdad de superficie, no igualdad de formas, y este hecho puede focalizar el trabajo en garantizar la igualdad de las partes: supongamos que los escolares tienen la tarea de fraccionar una unidad de superficie en 4 partes iguales, ¿qué ocurre si los niños dan estas respuestas?



pues ocurrirá que ante una situación como ésta, la atención de los niños se focalice en la comprobación de la igualdad de la superficie de estas figuras; en consecuencia, la actividad ha perdido su valor para las ideas sobre fracciones (posiblemente las respuestas de los escolares constituyan una buena actividad para el trabajo sobre ideas geométricas).

Hechas las precisiones precedentes, nuestra propuesta para la introducción de las fracciones es la de utilizar un modelo de aprendizaje con las características siguientes:

— una magnitud medible: *la longitud*
— unos objetos: *listones de madera o pajas de refresco*
— unas acciones: *medir, comparar longitudes, unir objetos...*

## 6. SIGNIFICAR LAS RELACIONES Y OPERACIONES ENTRE FRACCIONES. JUSTIFICAR LOS ALGORITMOS DE CÁLCULO

Una vez presentadas las fracciones con significado de medida, conviene que los escolares hagan transiciones entre el modelo y las expresiones simbólicas: que expresen la longitud de un segmento mediante una fracción, y que dada una fracción sepan construir el segmento que tiene como longitud dicha fracción. Cuando ya estén familiarizados con los nuevos entes numéricos se afrontará la instrucción sobre las relaciones y operaciones entre fracciones de forma significativamente cognitiva; de este modo se evitará que la mayoría de los estudiantes no establezcan conexiones entre el conocimiento conceptual que tienen de los números racionales y los procedimientos que utilizan en la manipulación de símbolos (Hiebert y Wearne, 1986). Seguidamente hacemos unas breves consideraciones sobre este modo de instruir a los escolares en las relaciones y operaciones entre fracciones:

— Desde una correcta evaluación semántica de los símbolos correspondientes los niños están en disposición de comparar fracciones de igual denominador, bien sea a través de comparaciones visuales de las longitudes de los segmentos que representan dichas fracciones, bien sea mediante argumentaciones sustentadas en el significado de las fracciones a comparar.
— La equivalencia de fracciones surge de la constatación de la igualdad de longitudes de dos segmentos expresados por fracciones con numeradores y denominadores distintos. Es una idea de vital importancia para establecer relaciones y operaciones entre fracciones, aunque los escolares ofrecen cierta resistencia a admitir que un número esté representado por más de un símbolo; ello obliga a que las ideas sobre equivalencia no se agoten en unas pocas sesiones de clase, antes bien, hay que revisar este significado cada vez que vaya a utilizarse: para la equivalencia de fracciones de distinto denominador, para la suma de fracciones, etc.

  En todo caso, interesa priorizar el objetivo instruccional en los aspectos conceptuales, pues una instrucción que acentúe los aspectos procedimentales conseguirá que los niños sustituyan el significado de la equivalencia por alguna técnica asociada: asumirán que dos fracciones son equivalentes si «son iguales sus productos en cruz», pero perderán el significado de la equivalencia.
— Las nociones de suma y resta de fracciones surgen en situaciones problemáticas que impliquen la agregación o disgregación de cantidades de longitud. Será a través del modelo como los estudiantes den significado a estas operaciones y como los niños puedan interpretar los algoritmos de cálculo asociado; conviene que estos aprendizajes comiencen por fracciones del mismo denominador y

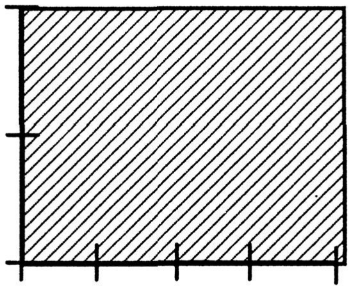
que, para el caso de fracciones de distinto denominador, se presente la necesidad de realizar la medida con la misma subunidad, lo que implica la búsqueda de fracciones equivalentes con el mismo denominador.

— Posteriormente, el escolar estará en condiciones de interpretar el producto de un número natural por una fracción, n x c/d, como una suma reiterada, como la longitud del segmento obtenido por agregación de n segmentos de longitud c/d. E igualmente estará en condiciones de justificar el correspondiente algoritmo de cálculo.
— Las ideas sobre el cociente entre una fracción y un número natural, a/b ÷ n, surgen en el modelo con problemas que exijan el fraccionamiento del segmento a/b en n partes iguales. La necesidad de fraccionar la subunidad 1/b en n partes iguales conducirá al algoritmo de cálculo usual.
— El producto de fracciones se tiene que presentar con sentido combinatorio, como el producto de dos cantidades de longitud; el resultado vendrá determinado por la superficie, medida con respecto al cuadrado de la unidad de longitud, del rectángulo que tiene por longitudes las de las fracciones que se multiplican. Esta situación requerirá de una buena representación gráfica y de una secuencia de actuaciones que permitan la realización de la medida de superficie correspondiente al resultado, tal y como se ejemplifica en el caso del producto 4/5 x 2/3.

• Definir un segmento como unidad de medida.

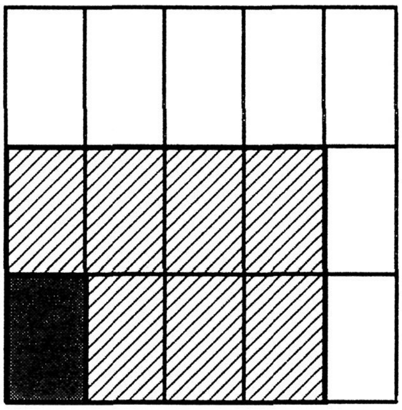
• Construir los segmentos de longitudes 4/5 y 2/3 de unidad.


• Construir un rectángulo que tenga por lados los segmentos anteriores.



• Definir la unidad de medida de superficie como la superficie del cuadrado que tiene por lado la unidad de longitud preestablecida.

- Medir el área del rectángulo con la unidad de superficie, para lo que habrá que establecer una subunidad de medida que esté contenida un número entero de veces en la superficie a medir; para ello basta elegir un rectángulo cuyos lados midan 1/5 y 1/3 de unidad.



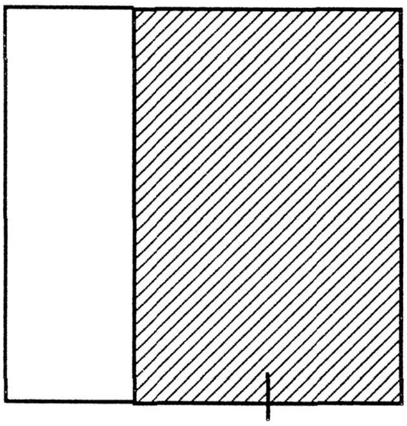
unidad de superficie

Puesto que para construir la unidad hacen falta exactamente 5 x 3 = 15 de estos rectángulos, la subunidad elegida es 1/15 de la unidad de superficie, y en el rectángulo a medir caben exactamente de 4 x 2 = 8 de dichas subunidades. Por tanto, la medida de dicho rectángulo será 8/15 de unidad de superficie; en consecuencia, 4/5 x 2/3 = (4 x 2)/(5 x 3) = 8/15.

Al generalizar este resultado se llega a que a/b x c/d = (a x c)/(b x d), haciendo notar que el denominador del resultado (b x d), indica el número de subunidades que contiene la unidad de superficie, $u^2$; mientras que el numerador (a x c), indica el número de subunidades que hay en el rectángulo que se mide.

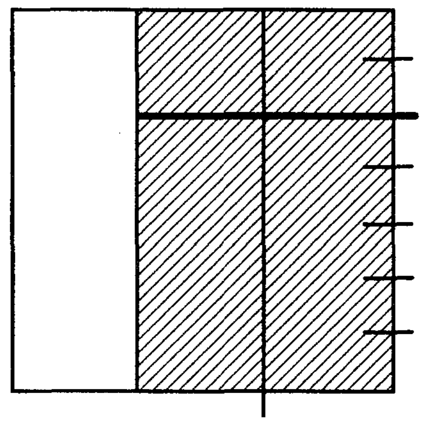
— El cociente de dos fracciones se tiene que presentar con sentido combinatorio, como la longitud de uno de los lados de un rectángulo del que se conocen la superficie y la longitud del otro lado. La justificación del algoritmo de cálculo exige de una buena representación gráfica en la que se plasmen las transformaciones necesarias para lograr el objetivo propuesto. El siguiente desarrollo del cociente 2/3 ÷ 5/7 sirve para ejemplificar el proceso de construcción del correspondiente algoritmo:

- Se representa un rectángulo cuya superficie sea la dada, 2/3 de $u^2$.

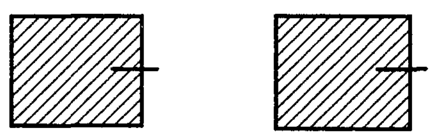


2/3 $u^2$

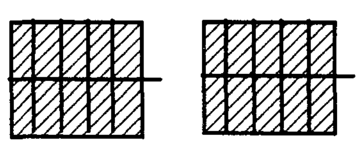
- Sobre uno de los lados del rectángulo se toma la longitud 5/7 que constituirá la longitud de uno de los lados del rectángulo que se busca.



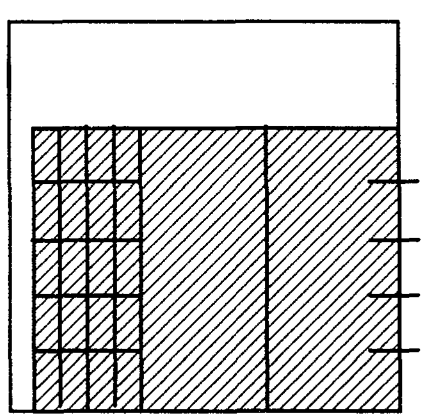
- Ahora hay que construir un rectángulo de la misma superficie, 2/3 de $u^2$, pero con la condición de que su altura sea 5/7 de u. En consecuencia, hay dos partes, situadas por encima de la línea más gruesa, que hay que trasladar; se trata de dos rectángulos de tamaños 1/3 de u y 2/7 de u.



- Estos rectángulos hay que fraccionarlos para obtener la forma rectangular deseada; para ello, basta tener en cuenta que cada uno de estos rectángulos tiene de altura 2 subunidades de tamaño 1/7 de unidad y el rectángulo buscado tiene de altura 5 de dichas subunidades, lo que obliga a subdividir cada uno de ellos en 5 partes iguales, y así se tendrán 20 rectángulos de base 1/5 de 1/3 de unidad (1/15 de unidad) y de altura 1/7 de unidad.



- Con estos 20 rectángulos se construye el rectángulo buscado apilándolos en 4 bloques de 5 alturas cada uno.



- Ahora ya se puede obtener la longitud de la base de este rectángulo, 14/15, con lo que se alcanza el resultado del cociente de las fracciones dadas: $\frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{14}{15}$

En esta expresión, el denominador, 15, viene dado por la necesidad de fraccionar la subunidad 1/3 en tantas partes como subunidades tiene la altura del rectángulo buscado, de fraccionar 1/3 en 5 partes iguales; es decir, 15 procede de multiplicar 3 x 5, producto que indica el fraccionamiento que hay que hacer para determinar el tamaño de la subunidad con la que se mide la base del rectángulo buscado.

El numerador, 14, indica el número de subunidades, de tamaño 1/15, que contiene la base del rectángulo buscado. Al medir una parte de la base con la subunidad 1/15 se observa que está contenida 5 veces en 1/3 de la unidad; y, por tanto, *2 x 5* veces en 2/3 de subunidad. Falta por medir otra parte de la base que se hará teniendo en cuenta el modo en que se ha construido:

- Inicialmente hay que «recolocar» 2 rectángulos de tamaño 1/3 x 2/7.
- Cada uno de esos rectángulos se fracciona en 2 x 5 rectángulos de tamaño 1/15 x 1/7; en total habrá 2 x (2 x 5) rectángulos de tamaño 1/15 x 1/7.
- Estos rectángulos hay que agruparlos de 5 en 5, por lo que la base del rectángulo buscado tendrá 2 x (2 x 5) / 5 = *2 x 2* de dichos rectángulos.
- Por tanto, la parte de la base que falta por medir contendrá *2 x 2* subunidades de tamaño 1/15.
- El numerador del resultado, 14, procede de la suma

$$2 \times 5 + 2 \times 2 = 2 \times (5 + 2) = 2 \times 7$$

En resumen: en el denominador, b x c, del cociente a/b ÷ c/d indica las subdivisiones que deben efectuarse en el lado que quiere medirse: cada subunidad inicial, que mide 1/b de u, se subdivide en c partes iguales, así se obtienen subunidades que miden 1/bc de la unidad. El numerador del resultado, a x d, expresa el número de subunidades de tamaño 1/bc que mide la longitud del lado desconocido.

Es evidente que la enseñanza de la multiplicación y de la división de fracciones con escolares de 10-11 años resulta compleja por los contenidos geométricos que se ponen en juego; por tanto, habría que posponer la instrucción sobre estas operaciones a cursos posteriores.

## 7. Introducir la fracción con significado de operador

Situados en el modelo de la medida, y presentadas las operaciones producto de un número natural por una fracción y de cociente entre una fracción y un número natural, conviene introducir la fracción a/b como composición de los operadores multiplicar por a y dividir por b.

El introducir este nuevo significado de la fracción viene justificado por razones como las siguientes:

- Es necesario que los escolares fortalezcan sus conocimientos sobre los diferentes significados de la fracción y que establezcan conexiones entre los mismos, puesto que si los niños aprenden solamente una interpretación de las fracciones tienen serias limitaciones para una sólida comprensión del número racional (Kerslake, 1986).
- En este concepto de fracción se parte de un número o figura dadas y mediante tratamientos operativos se transforma en un segundo número o figura; por tanto, la fracción aparece como una *función de cambio* (Behr et al., 1993, p. 13).
- El trabajo con operadores conecta las fracciones con propiedades algebraicas de multiplicación inversa y de identidad de elementos; y también con propiedades del análisis como es la composición de funciones (Kieren, 1993).
- La fracción con significado de operador introduce el producto de fracciones como parte de parte, como el resultado de aplicar un operador a una cantidad de magnitud o a un número. Este significado es de gran importancia porque exige de los escolares la comprensión de la división partitiva y cuotitiva, y porque permite dar soluciones a la enorme diversidad de situaciones problemáticas en las que este significado está implicado. Este significado puede plantearse a los escolares de 10-11 años, siempre y cuando hayan recibido instrucción previa sobre la multiplicación de una fracción por un número natural, y del cociente entre una fracción y un número natural.
- A través de la idea de operador es posible justificar la construcción formal del cuerpo conmutativo de los números racionales, puesto que así se elude tener que evidenciar la existencia del opuesto y del inverso de cada número desde la manipulación de magnitudes extensivas.

La presentación de las fracciones con significado de operador no implica que se realice una revisión completa de las relaciones y operaciones entre estos entes numéricos. Basta con utilizar aquellos aspectos conceptuales que son necesarios para incrementar la comprensión de los escolares sobre las fracciones y, en consecuencia, no somos partidarios de reelaborar el mapa conceptual de los niños desde el significado de operador (Dienes, 1972), puesto que los conocimientos de los escolares no presentan diferencias significativas al potenciar el significado de parte-todo, aunque sí que encuentran mayores dificultades en el aprendizaje (Oliveras, 1976).

## 8. Conectar las notaciones fraccionaria y decimal

Las matemáticas son el estudio de las estructuras y, en particular, el estudio de estructuras numéricas, entendiendo éstas como conjunto de entes numéricos expresados simbólicamente, dotado de unas operaciones y de unas relaciones. Las ideas que determinan estas estructuras numéricas surgen del trabajo con modelos, al dar respuesta a situaciones problemáticas que el escolar resuelve manipulando los objetos, observando el resultado de su acción y describiendo lo acontecido. De este modo, las ideas que aparecen, y que ya no se refieren a los propios objetos, se conforman como entidades abstractas sostenidas por un sistema simbólico, por un sistema de representación, con el que se formulan enunciados y demostraciones. Por tanto, y de acuerdo con Lesh (1997), el aprendizaje de las estructuras matemáticas consiste en la manipulación de símbolos; en interpretar matemáticamente situaciones problemáticas; en cuantificar, visualizar o coordinar sistemas estructuralmente interesantes; y, por supuesto, en utilizar sistemas de representación para desarrollar descripciones.

Por tanto, los sistemas de representación juegan un papel esencial en la comprensión de las ideas matemáticas, hasta tal punto que es necesario el dominio coordinado de dos o más sistemas de representación para alcanzar la comprensión del concepto que se considera (Kaput, 1992; Duval, 1993; Romero, 1995). Es más, algunas dificultades de comprensión se detectan en la falta de coordinación entre diferentes sistemas cuando tratan de expresar los mismos conceptos (Castro, 1994; Duval, 1995).

En nuestro sistema educativo se potencia la utilización de dos sistemas de representación de los números racionales: la notación fraccionaria y la notación decimal. Por tanto, conectar conceptual y estructuralmente dichos sistemas de representación debe ser un objetivo prioritario en la formación de los escolares. Pero esta conexión no se alcanza desde cualquier significado de las fracciones puesto que:

— Desde el significado de relación parte-todo son débiles las conexiones entre las notaciones fraccionaria y decimal, pues el estudiante asocia la fracción a una parte de la unidad compuesta por la unión de partes de igual tamaño, mientras que las expresiones decimales exigen interpretar la fracción como agregación de partes de unidad de diferentes tamaños.
— Desde el significado de la fracción como resultado de la medida de magnitudes se puede abordar la conexión entre las notaciones fraccionaria y decimal, pero se encuentran las dificultades técnicas inherentes a la continuidad de la medida; en efecto, en magnitudes como la longitud o la masa resulta complicado hacer mediciones más allá de la milésima parte de la unidad, pues estas mediciones dependen grandemente de las percepciones visuales.
— Si la conexión entre notaciones fraccionaria y decimal se aborda desde el significado de razón encontramos dificultades para utilizar un mismo modelo en el que asentar el significado de la fracción y el significado de las expresiones decimales. En efecto, hay dificultades conceptuales para justificar cómo la relación entre dos cantidades de magnitud se transforma en una sola relación numérica que expresa el tanto por uno.
— Tampoco resulta adecuado partir del significado de operador de la fracción por cuanto se presentan dificultades si se utiliza un modelo en el que hay objetos discretos, porque las exigencias del operador demandan el fraccionamiento de los objetos; si el modelo utiliza magnitudes continuas las dificultades aparecerían asociadas a la continuidad de la medida; y si se utiliza números no medida el operador exige el trabajo con expresiones decimales, situación que no es aconsejable por cuanto no se produce una conexión entre los significados de la fracción y de la expresión decimal.

Por todo ello, proponemos que la conexión entre las notaciones fraccionaria y decimal se establezca a partir de las fracciones significadas como cocientes partitivos; y justificamos tal decisión con los siguientes argumentos:

- El utilizar el significado de cociente permite, mediante una acción de reparto en varias fases, presentar la fracción como agregación de cantidades de magnitud de diferentes tamaños.
- Al utilizar el cociente con el sentido de reparto igualitario se puede construir un único modelo de aprendizaje para dotar de significado tanto a la fracción como a las expresiones decimales; es decir, se pueden presentar las fracciones y las expresiones decimales como formas distintas de simbolizar el resultado de un mismo reparto.
- El uso de la fracción con significado de cociente permite al escolar construir sus conocimientos por medio de reflexiones mentales, ya que en este caso las representaciones gráficas no son imprescindibles.

## 9. La fracción con significado de cociente

La fracción a/b se interpreta como el resultado de un reparto, como la cantidad de magnitud que recibe uno cualquiera los b participantes entre los que se han repartido a unidad de dicha magnitud; o bien la cantidad de magnitud que resulta de distribuir a unidades en b partes iguales. La fracción, por tanto, tiene el significado de cociente partitivo, y solamente tiene sentido en contextos continuos, en contextos que permiten el fraccionamiento de la unidad en un número cualquiera de partes iguales.

Ciertamente se trata de medir una cantidad de magnitud, pero la fracción como cociente expresa el resultado de un acto que ha de realizar el sujeto; es el individuo el que decide la técnica de reparto a seguir, el que debe llevar el control de la cantidad repartida y la que queda por repartir, el que controla que cada participante recibe la misma cantidad de magnitud, y el que tiene que dar el resultado del reparto contabilizando lo que ha recibido uno cualquiera de los participantes.

Nótese que al expresar la fracción a/b hay una doble evaluación semántica: de una parte indica las condiciones del reparto (se reparten a unidades entre b individuos), y de otra parte indica la cantidad de magnitud que resulta de efectuar dicho reparto, la parte que corresponde a cada uno de los b participantes.

Este significado de fracción exige del alumno un sólido conocimiento de la división partitiva, del sentido que tienen los elementos intervinientes: la cantidad a repartir, el número de participantes y el cociente o resultado del reparto. La idea de la división partitiva es conocida por los niños en el contexto de los números naturales; hay que extender dicha idea a contextos que permitan el fraccionamiento de la magnitud que se trabaja. Por ello, el modelo de aprendizaje estará definido por los siguientes valores:

- una magnitud medible: *la longitud*
- unos objetos: *barras de regaliz, pajas de refresco*
- unas acciones: *repartir, comparar resultados de repartos...*

Concretado el modelo, queda por determinar la técnica o técnicas de reparto que se van a utilizar. Nuestra propuesta es la de presentar las dos técnicas que se detallan puesto que con ello se facilita que los escolares fortalezcan las conexiones entre las notaciones fraccionaria y decimal:

*Técnica I: Reparto en una sola fase*

Cada una de las a unidades se fracciona en b partes iguales y cada individuo recibe una parte de cada una de las a unidades; es decir, cada participante recibe a partes de tamaño 1/b de unidad; por tanto, cada participante recibe a/b de unidad. Así, por ejemplo, para repartir 23 barras de regaliz entre 4 niños se procede del modo siguiente:

- Cada una de las barras de regaliz se fracciona en 4 partes iguales.
- Se tienen 23 x 4 = 102 partes de barra de tamaño 1/4 de barra de regaliz.
- De cada una de las barras se entrega una de las partes a cada uno de los niños; cada niño habrá recibido 23 partes de barra de tamaño 1/4 de barra.
- El resultado del reparto será la cantidad de regaliz que ha recibido uno cualquiera de los 4 niños; será 23 trozos de tamaño 1/4 de barra, que se puede simbolizar como 23/4 de barra.

Si el reparto se hace en una sola fase la fracción aparece asociada a la noción de cociente del numerador entre el denominador, cuando dicho cociente no es entero. La idea que prevalece es la de utilizar el concepto de división entera después de transformar el numerador en un número entero de partes alícuotas de unidad, siendo dicho número múltiplo del denominador. Esta técnica no es sistemática puesto que el fraccionamiento no se hace siempre en el mismo número de partes, varía en cada reparto de acuerdo con el número de participantes.

*Técnica II: Reparto en varias fases*

Se describen cada una de estas fases con el apoyo de una situación concreta, la de repartir 23 barras de regaliz entre 4 niños:

- Fase 1: a cada individuo se le entregan tantas unidades como sea posible, se aplica *el principio de la mayor parte* (Gairín, 1999, p. 80). Si quedan unidades para repartir se pasa a la fase siguiente. Como hay 23 barras se entregan 5 a cada uno de los niños y sobran 3 barras.
- Fase 2: ahora el número de unidades a repartir es menor que el número de participantes, por lo que hay que fraccionar cada una de las barras en 10 partes iguales, obteniéndose 30 trozos de tamaño 1/10 de barra. Se reparten estos trozos de barra entre los 4 niños aplicando el principio de la mayor parte; de este modo cada uno de los 4 niños recibirá 7 trozos de tamaño 1/10 de barra, y sobrarán 2 trozos de barra de tamaño 1/10 de barra.

Puesto que quedan partes sin repartir hay que pasar a la fase siguiente.

- Fase 3: como quedan 2 trozos (de tamaño 1/10 de barra), hay que fraccionar en 10 partes iguales cada uno de ellos; así se obtienen 20 partes de tamaño 1/10 de 1/10 de barra, quedan 20 partes de tamaño $1/10^2$ de barra. Aplicando el criterio de la mayor parte, se entrega a cada uno de los 4 niños, 5 partes de tamaño $1/10^2$ y no queda ninguna parte.

El reparto ha concluido.

- El resultado del reparto será la cantidad recibida por cada niño: 5 barras, 7 partes de barra de tamaño 1/10 de barra, y 5 partes de barra de tamaño $1/10^2$ de barra; este resultado se puede expresar de forma abreviada como $5 + 7\,(1/10) + 5\,(1/10^2)$ de barra.

Por tanto, si el reparto se hace en varias fases surge la representación de las cantidades correspondientes a cada individuo como una suma de unidades enteras y partes alícuotas de la unidad cuyos tamaños son las sucesivas potencias de 1/10. Además, resulta fácilmente justificable que cada uno de los niños puede recibir, en cada una de las fases, como máximo 9 partes de tamaño $1/10^i$, y como mínimo 0 partes.

## 10. De la notación fraccionaria a la notación decimal

Una reflexión sobre las actividades de reparto realizadas en el modelo de aprendizaje que se ha propuesto pone de manifiesto que una misma cantidad de magnitud puede expresarse de dos formas distintas:

- como la fracción $a/b$, siendo $b \neq 0$
- como la suma $c + d_1\,(1/10) + d_2\,(1/10^2) + \dots + d_n\,(1/10^n)$, siendo $0 \leq d_1, d_2, \dots, d_n \leq 9$

Estos resultados indican dos formas de expresar una misma cantidad de magnitud, por lo que resulta evidente la igualdad $a/b = c + d_1\,(1/10) + d_2\,(1/10^2) + \dots + d_n\,(1/10^n)$. Esta igualdad muestra que las fracciones se pueden interpretar como la suma de cantidades de magnitud del mismo tamaño (como la agregación de a partes de tamaño 1/b), y como la suma de cantidades de diferentes tamaños (como una expresión de tipo polinómico de potencias de 1/10, y con coeficientes comprendidos entre 0 y 9).

Puesto que la segunda de estas formas les resulta trabajosa de escribir a los niños, se puede introducir un criterio de economía en el sentido de poder simbolizar ese resultado con menor esfuerzo; y con esta intención resultan oportunas las observaciones obtenidas por comparación de dos de dichas expresiones, como pueden ser las siguientes:

$$3 + 4\,(1/10) + 0\,(1/10^2) + 6\,(1/10^3)$$
$$0 + 6\,(1/10) + 8\,(1/10^2) \qquad (1)$$

- En el resultado aparecen unidades enteras y partes de unidad.
- Entre las partes no enteras siempre hay un número entero y una potencia de 1/10.

- Las potencias de 1/10 que aparecen son potencias sucesivas, los exponentes se corresponden con la sucesión de números naturales.
- Los números que acompañan a las potencias de 1/10 están comprendidos entre 0 y 9.

Además, observando las partes no enteras de las dos representaciones anteriores, resulta que los elementos comunes son las fracciones unitarias cuyos denominadores son potencias naturales de 10, y los elementos diferenciadores son los números enteros que preceden a cada una de las fracciones. Podemos, por tanto, introducir una interpretación ordinal de esas potencias de modo que se pueda sustituir su presencia por el lugar que ocupan; y podemos asumir que la colocación de dos cantidades consecutivas debe interpretarse como la suma de ambas; de esta manera podemos abreviar la escritura en la forma siguiente:

$$4\,(1/10) + 0\,(1/10^2) + 6\,(1/10^3) = \mathit{4\ 0\ 6}$$
$$6\,(1/10) + 8\,(1/10^2) = \mathit{6\ 8}$$

E interpretamos la expresión 4 0 6 diciendo que indica 4 unidades decimales de primer orden o partes de tamaño 1/10; 0 unidades de segundo orden o partes de tamaño $1/10^2$; y 6 unidades de tercer orden o partes de tamaño $1/10^3$.

Ahora bien, si la expresión inicial contiene cantidades enteras y no enteras la nueva simbolización induciría a errores por cuanto las partes entera y no entera se simbolizan del mismo modo. Por tanto, se sugiere el uso de una coma (que tradicionalmente se conoce como coma decimal), que separe las partes enteras y no enteras:

$$3 + 4\,(1/10) + 0\,(1/10^2) + 6\,(1/10^3) = \mathit{3\ ,\ 4\ 0\ 6}$$
$$0 + 6\,(1/10) + 8\,(1/10^2) = \mathit{0\ ,\ 6\ 8}$$

Aparece así un nuevo sistema de representación en el que una expresión decimal indica una cantidad de magnitud obtenida como suma de unidades y partes de unidades de tamaños las sucesivas potencias de 1/10. Así, 1,375 indica la cantidad de magnitud formada por la suma de 1 unidad, 3 partes de tamaño 1/10 ó 3 décimas de unidad, 7 partes de tamaño $1/10^2$ ó 7 centésimas de unidad, y 5 partes de tamaño $1/10^3$ ó 5 milésimas de unidad.

Se dispone, por tanto, de dos sistemas de representación con los que se simboliza el resultado de un reparto: mediante una expresión fraccionaria y mediante una expresión decimal. Tales expresiones aparecen al utilizar determinadas técnicas de reparto, pero expresan la misma cantidad de magnitud puesto que el resultado del reparto es único. Por tanto, podemos pasar de la notación fraccionaria a la decimal sin más que aplicar la técnica de reparto apropiada; así, por ejemplo, la fracción 11/8 indica que se reparten 11 unidades entre 8 personas y al hacer el reparto por fases se alcanza como resultado 1,375.

El paso de la notación fraccionaria a la notación decimal se puede algoritmizar mediante una extensión del algoritmo de la división entera; la justificación de cada una de las tareas que comprende dicho algoritmo viene dada por las acciones que se ejecutan en cada una de las fases del reparto.

El paso de la notación decimal a la notación fraccionaria se alcanza mediante la búsqueda de repartos equivalentes, de repartos que den el mismo resultado; así, por ejemplo, el número 1,25 podemos considerarlo como el resultado de un reparto en el que interviene una sola persona; para que en otro reparto reciban la misma cantidad interviniendo 10 personas deben repartirse 12,5 unidades; y si se quiere obtener el mismo resultando interviniendo 100 personas, habría que repartir 125 unidades; luego 1,25 = 125/100.

## 11. Relaciones y operaciones entre expresiones decimales

El modo en que se ha llegado a la notación decimal permite justificar las relaciones entre expresiones decimales, así como significar las operaciones y justificar los algoritmos de cálculo. Seguidamente señalaremos aquellos aspectos que nos parecen de mayor interés:

– Hay infinitas expresiones fraccionarias que indican la misma cantidad de magnitud, y solamente hay una expresión decimal para simbolizar cada cantidad de magnitud.
– La aplicación del criterio de la mayor parte demuestra que en cualquier expresión decimal a,bcd... son ciertas las desigualdades 1 > 0,bcd; 0,1 > 0,0cd; 0,01 > 0,00d; ...

  Dichas desigualdades son ciertas porque a,bcd indica el resultado del reparto realizado con el procedimiento de la mayor parte; en consecuencia, la parte decimal 0,bcd tiene que ser menor que la unidad, pues si fuese mayor o igual el procedimiento de reparto obligaría a que en la primera fase se hubiesen entregado a+1 unidades a cada uno de los participantes.

  Esta propiedad dice que cualquier unidad de una posición de una expresión decimal representa una cantidad mayor que la suma de todas las cifras situadas a su derecha; por tanto, para comparar dos expresiones decimales basta con ir comparando ordenadamente las cifras que ocupan la misma posición, empezando por las de mayor valor relativo; en el momento que una de las cifras sea mayor, la expresión decimal a la que corresponde es la mayor.

  Además, este resultado permite poner de manifiesto que entre dos expresiones decimales hay otras infinitas y que, en consecuencia, dada una cantidad indicada por una expresión decimal no tiene sentido buscar la siguiente o la anterior. Las expresiones decimales tienen usos diferentes de los números naturales: sirven para medir, pero no sirven para contar ni tienen valor ordinal.
– La cantidad de magnitud, referida a la unidad de medida, que recibe un individuo que participa en dos repartos diferentes puede ser fácilmente asociada a la noción de suma de expresiones decimales. El cálculo del resultado de la suma no ofrece especiales dificultades puesto que cada posición indica el tamaño de las partes y, en consecuencia, basta con sumar las partes del mismo tamaño; en

el supuesto de que dicha suma sea mayor de 10, hay que convertir 10 unidades de un tamaño en 1 unidad de tamaño inmediatamente superior.

- En el caso de la resta de expresiones decimales, y si fuese necesario, una unidad se puede transformar en 10 unidades de orden inmediatamente inferior.
- El modelo utilizado no admite dar significado al producto de expresiones decimales que expresan cantidades de magnitud, pues no tendría sentido «multiplicar barras de regaliz». Habría que considerar que una de las dos expresiones actúa como operador y que, en consecuencia, el producto nos indica una parte de una cantidad de magnitud.

  También se debe instruir sobre el significado combinatorio de la multiplicación (que ya se trabajó con las fracciones que representan longitudes), y analizar el espacio de medida de cada uno de los factores y el del resultado de su producto.

  Para justificar el algoritmo de la multiplicación además de la propiedad distributiva, hay que hacer notar a los escolares que el producto que se realiza no es del tipo «décimas por décimas», sino que se realiza una parte de parte «la décima parte de una décima».
- La división de dos expresiones decimales carece de sentido en el modelo pero, de forma similar a lo expuesto en el producto, se puede afrontar su significado con sentido combinatorio y como operador inverso.

## Referencias Bibliográficas

ARMSTRONG, B. E. y NOVILLIS, C. (1995): «Students' use of part-whole and direct comparison strategies for comparing partitioned rectangles». *Journal for Research in Mathematics Education,* (26), 1.

AVENDAÑO, J. (1859): *Matemáticas.* Madrid: Imprenta de Luis García.

BEZUK, N. S. y BIECK, M. (1993): «Current research on rational numbers and common fractions: summary and implications for teachers». En D. T. OWENS (ed.): *Research ideas for the classroom. Middle grades mathematics.* New York: Macmillan Publishing Company.

BEHR, M. J.; HAREL, G.; POST, T. y LESH, R. (1993): «Rational Numbers: toward a Semantic Analysis. Emphasis on the Operator Construct». En T. P. CARPENTER, E. FENNEMA y T. A. ROMBERG: *Rational Numbers. An integration of Research.* Hillsdale New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

CASTRO, E. (1994): *Exploración de Patrones Numéricos mediante Configuraciones Puntuales. Estudio con escolares de Primer Ciclo de Secundaria (12-14 años).* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

DIENES, Z. P. (1972): *Fracciones.* Barcelona: Teide.

DUVAL, R. (1993): *Semiosis e noesis. Lecturas en didáctica de la Matemática: Escuela francesa.* México: Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN.

— (1995): *Semiosis et pensée humaine.* Bern: Peter Lang, S.A.

FEFERMAN, J. (1989): *The number systems. Foundations of Algebra and Analysis.* New York: Chelsea Publishing Company.

GAIRÍN, J. M. (1999): *Sistemas de representación de Números Racionales positivos. Un estudio con maestros en formación.* Tesis Doctoral. Universidad de Zaragoza.

HIEBERT, J. y WEARNE, D. (1986): «Procedures over concepts: the adquisition of decimals numbers knowledge». En J. HIEBERT (ed.): *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics.* Hillsdale: Erlbaum.

KAPUT, J. (1992): «Technology and Mathematics Education». En D. A. GROUWS. *Handbook of research on Mathematics Teaching and Learning.* New York: Macmillan Publishing Company.

KERSLAKE, D. (1986): *Fractions: Children's strategies and errors.* Windsor (England): NFER-NELSON.

KIEREN, T. (1993): «Rational and Fractional Numbers: From Quotient Fields to Recursive Understanding». En T. P. CARPENTER, E. FENNEMA y T. P. ROMBERG. *Rational Numbers. An Integration of Research.* Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

LAMADRID, C. (coord.) y EQUIPO SIGNO (1987): *Azimut. Matemáticas 6.º E.G.B.* Madrid: Anaya.

LESH, R. (1997): «Matematización: La necesidad "real" de la fluidez en las representaciones». *Enseñanza de las Ciencias,* vol. 15, n.º 3, 377-391.

LLINARES, S. y SÁNCHEZ, M. A. (1988): *Fracciones.* Madrid: Síntesis.

MACK, N. K. (1993): «Learning Rational Numbers with understanding: Case of Informal Knowledge». En T. P. CARPENTER, E. FENNEMA y T. P. ROMBERG. *Rational Numbers. An Integration of Research.* Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

OLIVERAS, M. L. (1976): *Introducción del número racional en E.G.B. mediante el concepto de operador. Análisis comparativo con la introducción tradicional.* Tesina de Licenciatura. Universidad de Granada.

OWENS, D. T. y SUPPER, D. B. (1993): «Teaching and Learning Decimal Fractions». En D. OWENS (ed.): *Research ideas for the classroom. Middle grades mathematics.* Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

RESNICK, L. B.; NESHER, P.; LEONARD, F.; MAGONE, M.; OMNSON, S. y PELED, I. (1989): «Conceptual bases of arithmetic errors: the case of decimal fractions». *Journal for Research in Mathematics Education,* 20, 8-27.

RICO, L. y SÁENZ, O. (1982): «Programación del bloque de las fracciones en el ciclo medio de E.G.B.». En *Actas de las II JAEM,* tomo II, Sevilla: Sociedad Andaluza de profesores de matemáticas Thales.

ROMERO, I. M. (1995): *Introducción del Número Real en Educación Secundaria.* Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Granada.

STREEFLAND, L. (1991): *Fractions in realist mathematics education. A paradigm of developmental research.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

THOMPSON, S. (1995): «Notation, convection and quantity in elementary mathematics». En SOWDER y SCHAPELLE (eds.): *Providing a Foundation for Teaching Mathematics in the Middle Grades.* Albany: State University of New York Press.

VALLEJO, J. M., (1821): *Tratado elemental de matemáticas.* Tercera edición. Barcelona: Imprenta del Gobierno Político Superior.

WEARNE, D.; HIEBERT, J. y TABER, S. (1991): «Four grades' gradual construction of decimal fractions during instruction using different physical representations». *Elementary School Journal,* 91 (4), 321-341.