

EL INDUCTIVISMO ARITMÉTICO Y SU INFLUENCIA EN LA ENSEÑANZA DEL NÚMERO

Arithmetic inductivism and its influence in the teaching of the concept number

Alfonso ORTIZ COMAS y José Luis GONZÁLEZ MARÍ

Universidad de Málaga

RESUMEN: En este artículo presentamos las características de una corriente epistemológica y matemática que hemos denominado inductivismo aritmético. Exponemos dos hechos fundamentales para la Educación Matemática, como son la confirmación de la influencia del inductivismo en los manuales de aritmética publicados en España desde el siglo XVI y su repercusión en la enseñanza de la aritmética del número natural. Además, exponemos algunas consideraciones inductivistas sobre las series y sucesiones de números naturales.

Palabra clave: epistemología, aritmética, educación, inducción, razonamiento, serie, sucesión.

ABSTRACT: Arithmetic Inductivism is an epistemological approach to Arithmetic with specific characteristics which are analysed in the present paper. Additionally, the two following fundamental facts for Mathematics Education are also explained: Firstly, the influence of inductivism trend on arithmetical concepts as it can be appreciated by examining the books published in Spain since the XVIth century to now; secondly, its influence on teaching and learning natural numbers and school arithmetic. Finally, some remarks about inductive reasoning related to natural numbers series are included.

Key words: epistemology, arithmetic, education, induction, reasoning, series.

INTRODUCCIÓN

La inducción es clave tanto en las teorías que se proponen explicar el origen del número natural como en aquellas otras que atienden a su justificación formal. Su importancia en la fundamentación del conjunto de los números naturales se ha mantenido hasta nuestros días en donde, desde un planteamiento axiomático (Aparicio y Payá, 1985), se ha caracterizado el conjunto \mathbb{N} como el mínimo conjunto inductivo de \mathbb{R} . El inductivismo matemático es una corriente epistemológica que se propone explicar inductivamente la naturaleza de los números, a partir de la experiencia. Según hemos podido comprobar, la matemática española ha estado bajo su influencia desde el siglo XVI. Fue criticado seriamente por Frege desde un punto de vista lógico y posteriormente por Piaget desde un punto de vista evolutivo.

Hemos constatado que los planteamientos inductivistas han tenido un arraigo considerable en la aritmética escolar, encontrándose sólidamente instalados en el currículo y en la práctica docente. Nuestra hipótesis es que esta corriente continúa vigente en la enseñanza de la aritmética, a pesar de los planteamientos conjuntistas que se incorporaron al currículo de las matemáticas escolares en España a partir de los Programas Renovados del año 1970. La enseñanza de la aritmética basada en la fundamentación conjuntista no pudo desterrar las prácticas y procedimientos inductivistas. Una revisión sobre libros de texto publicados en España en el periodo 1900-1990, pone de manifiesto que la enseñanza y aprendizaje de la aritmética escolar se ha realizado en un contexto inductivista.

En sucesivos apartados de este artículo caracterizaremos la fundamentación inductivista del origen del número natural, revisaremos las interpretaciones inductivistas sobre su enseñanza y presentaremos la influencia del inductivismo en el currículo de la aritmética escolar.

INDUCTIVISMO ARITMÉTICO

Es conocido el problema planteado y aún abierto a discusión sobre el origen del número natural y por tanto de la aritmética. Según Prior (1976, p. 185), Frege llegó a la conclusión de que es probable que la aritmética tenga un status analítico a priori; punto de vista que le coloca en oposición a Kant, que mantuvo que las proposiciones de la aritmética eran sintéticas a priori, y en oposición a Mill, que las consideró como generalizaciones inductivas.

Es de especial importancia analizar las ideas de Mill en relación con la aritmética del número natural, puesto que en ellas está el núcleo del planteamiento que vamos a denominar inductivista. A él se deben los primeros estudios sobre los métodos de la investigación inductiva en la conexión causal, el perfeccionamiento de las tablas de Bacon y la búsqueda del principio de inferencia mediante el cual se puede pasar de afirmaciones particulares comprobadas al establecimiento de una ley general.

La obra de Mill es anterior a la crisis de fundamentos de la matemática y en su época se está configurando una nueva ciencia formal que es la lógica moderna, que para Prior (1976) comienza con la obra «conceptografía» de Frege, a diferencia de la lógica matemática o matemática de la lógica cuyo origen es el álgebra de la lógica de Boole, álgebra que la considera como una parte de la matemática.

Según Mill (1917, p. 280):

«Las inducciones en Aritmética son de dos especies:

- Las definiciones de diferentes números: uno y uno hacen dos, dos y uno hacen tres, etc.
- Los dos axiomas siguientes:
 - Las sumas de cantidades iguales son iguales.
 - Las diferencias de cantidades iguales, son iguales».

Del mismo modo, hace referencia a la abstracción de la igualdad de cantidades en los siguientes términos (p. 235):

«Para inferir la igualdad tenemos, entre otras, las formulas siguientes:

1. Las cosas que aplicada la una con la otra coinciden, son iguales.
2. Las cosas iguales a una misma cosa, son iguales.
3. El todo y la suma de sus partes, son iguales.
4. Las diferencias de cosas iguales, son iguales.

Para inferir la desigualdad tenemos las siguientes:

1. Un todo y sus partes son desiguales.
2. Las sumas de cosas iguales y de cosas desiguales, son desiguales.
3. Las diferencias de cosas iguales y de cosas desiguales, son desiguales».

El hecho de identificar la cantidad «tres», con independencia de la disposición espacial o constelación, es una verdad adquirida inductivamente sobre la que se funda la ciencia de los números:

«Tres piedras en dos partes separadas y tres piedras en un solo montón no hacen la misma impresión sobre nuestros sentidos, y la aserción de que las mismas piedras pueden, por un cambio de orden y de lugar, excitar la una y la otra sensación, no es una proposición idéntica. Es una verdad adquirida por una antigua y constante experiencia, una verdad inductiva, y sobre estas verdades se funda la ciencia de los números.

Todos los métodos perfeccionados de la enseñanza de la Aritmética a los niños proceden del conocimiento de este hecho» (p. 279).

«Podemos definir tres como “dos y uno”, pero los cálculos establecidos sobre esta proposición no se siguen de la definición misma, sino de un teorema aritmético que en ella está presupuesto; a saber: hay colecciones de objetos que impresionan los sentidos de esta manera: 000 y pueden ser separados en dos como ésta: 00 / 0».

Para Mill (p. 586), las verdades elementales o primitivas en la ciencia de los números son los axiomas comunes sobre la igualdad: «*dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí*» y «*cantidades iguales añadidas a cantidades iguales, dan sumas iguales*»,

con lo que se debe llegar a la definición de los diversos números que dichos axiomas comprenden. Las palabras dos, tres, etc., denotan fenómenos físicos y connotan propiedades físicas de estos fenómenos, de manera que dos manzanas son diferentes de tres manzanas o 100 y 101 objetos pueden colocarse de forma que se puedan apreciar sus diferencias; lo que connota el nombre de un número es la manera en la que están agrupados los objetos para formar esta colección particular:

«Alguna propiedad perteneciente al agregado de cosas que designamos con este nombre, y esta propiedad no es otra cosa que la manera característica como las partes de este agregado están allí reunidas y en las que puede ser dividido» (p. 588).

Afirma que toda proposición aritmética o enunciado del resultado de una operación aritmética es el enunciado de uno de los modos de formación de un número dado (Decir que el cubo de 12 es 1.728 equivale a decir que 1.728 es un agregado de doce docenas de docenas). Estos modos son innumerables, pero, cuando conocemos o elegimos uno de ellos, podemos determinar todos los demás. Y puesto que el entendimiento percibe y retiene más fácilmente cosas uniformes y, por esto mismo, simples, hay una ventaja evidente en escoger un modo de formación que sea el mismo para todos los números, es decir, fijar la connotación de los nombres del número según un principio uniforme.

Mill (p. 589) interpreta que nuestro sistema actual de numeración presenta la ventaja mencionada anteriormente, además de la posibilidad de indicar a la vez dos de los modos de formación de un número, es decir:

- Cada número se considera formado por la adición de una unidad al número inmediatamente anterior, lo que viene indicado por el *lugar que ocupa en la serie*.
- Cada número se considera formado por la adición de un número de unidades inferior a diez y de un número de agregados iguales a una de las potencias sucesivas de diez; segundo modo de formación que es expresado por el *nombre del número y por su signo numérico*. Es lo que en las aritméticas de la época se entiende por numeración hablada y escrita.

LA COMPLEMENTARIEDAD DE JEVONS

Jevons (1873), a diferencia de Mill, intenta fundamentar la matemática a partir de la lógica de la época en contra de las tesis de Boole, que es la contraria (la matemática fundamenta la lógica). Según esta aproximación, la igualdad es la relación fundamental de todo razonamiento cuantitativo y, por tanto, de la aritmética y la geometría (Euclides). Por otra parte, la lógica (Aristóteles) se fundamenta en la relación de identidad, que es más general que la relación de igualdad, de lo que resulta que la lógica es más general y fundamental que la aritmética. Con estas ideas Jevons intenta trasladar los axiomas sobre cantidades al campo lógico:

«Cualquiera que sea la relación en que una cantidad está con respecto a otra, está en la misma relación con toda cantidad igual a aquélla». En este axioma hemos reunido un número grande de axiomas que han sido enunciados más o menos detalladamente por los matemáticos» (p. 146).

Las consideraciones inductivistas de Jevons quedan en evidencia en las múltiples alusiones a las generalizaciones inductivas en aritmética, como la siguiente:

«Los grupos de unidades son los que realmente tratamos en aritmética. El número cinco es realmente $1+1+1+1+1$ y por razones de concisión el signo más sencillo 5 o la palabra cinco. Esos nombres se imponen arbitrariamente de alguna manera y luego surgen relaciones entre ellos en variedad infinita, relaciones que no tienen nada de arbitrarias. Si definimos cuatro como $1+1+1+1$, se sigue que cinco = cuatro + uno; pero sería igualmente posible tomar esta última cantidad como definición y, en ese caso, una de las igualdades anteriores se transformaría en una inferencia (Necesaria). Todo número mayor o igual que siete pertenece a la clase $m + 7$. Todo número es la mitad de algún otro. Y así sucesivamente. Existe una cantidad ilimitada de generalizaciones sucesivas de jerarquía creciente» (p. 150).

En su obra, Jevons pretende obtener una interpretación lógica de la aritmética sin que ésta pierda su status inductivo para lo que procura modificar la conceptualización de inducción intentando darle un status lógico. De esta manera si la inducción se puede interpretar desde la lógica queda demostrado que la aritmética es una parte de la lógica.

Los intentos de fundamentar la matemática en la lógica tuvieron su primer escollo en el concepto de unidad matemática, basada en la igualdad. Esta dificultad se pone de manifiesto ante las leyes de absorción e idempotencia de la disyunción, que no se cumplen en aritmética (si bien $[p \vee p]$ es equivalente a p , no es cierto que $1 + 1 = 1$):

«Se ha dicho a menudo que las unidades son unidades en el sentido de ser perfectamente similares entre sí; pero, aunque pueden ser perfectamente similares en algunos aspectos deben ser diferentes, por lo menos en uno, de otro modo no serían susceptibles de pluralidad» (p. 139).

«La abstracción numérica consiste en abstraer el carácter de la diferencia de la cual surge la pluralidad limitándonos a conservar el hecho».

Estas afirmaciones ponen de manifiesto en estos planteamientos la necesidad de distinguir entre números concretos y números abstractos:

«En la proporción en que especificamos los caracteres lógicos de los objetos numerados, los hacemos concretos. En el número abstracto tres no se afirma nada respecto de los aspectos en los cuales concuerdan los tres objetos; pero en tres monedas o tres caballos no solamente aparecen los objetos numerados sino que se limita su naturaleza. El número concreto, por tanto, implica la misma conciencia de la diferencia que el número abstracto, pero está mezclado con un fundamento de similitud expresado mediante los términos lógicos. Existe identidad, en tanto que intervienen los términos lógicos; y la diferencia en tanto que los términos se mantienen solamente numéricos» (p. 141).

Lo que le lleva a la consideración o justificación de la llamada «ley de homogeneidad», que afirma que en todo cálculo aritmético la naturaleza lógica de los objetos numéricos debe permanecer inalterada.

CARACTERIZACIÓN DEL INDUCTIVISMO

Desde las consideraciones del origen del número natural podemos caracterizar el inductivismo aritmético por las siguientes afirmaciones:

- 1.- El origen del número natural es inductivo.
- 2.- La aritmética no es un sistema deductivo sino inductivo.
- 3.- Los números se dicen de las cosas y no de los conceptos (según Frege los números no se dicen de las cosas, sino de las clases).
- 4.- El punto de partida de la aritmética son los axiomas sobre cantidades, basado en el principio empirista: «el todo es igual a la suma de las partes».

En cuanto a la caracterización inductivista de la aritmética destacamos los siguientes aspectos puntuales:

- 1.- Los diferentes números se definen y la definición de los mismos son inducciones.
- 2.- Los números se definen como agregados de unidades iguales aunque no idénticas.
- 3.- Todos los números han de ser números de unidades iguales lo que lleva a la distinción entre números concretos y abstractos (existe identidad, en cuanto intervienen los términos lógicos; y la diferencia en tanto que los términos se mantienen solamente numéricos).
- 4.- El nombre de un número indica la manera en la que agrupamos los objetos para poder diferenciar distintas cantidades.
- 5.- Distinguen la numeración hablada de la numeración escrita.
- 6.- La operación de dividir necesita, para ser realizada, un conocimiento previo de la de multiplicar.
- 7.- Ley de homogeneidad: en todo cálculo aritmético la naturaleza «lógica» de los objetos numéricos debe permanecer inalterada.
- 8.- Toda proposición aritmética o enunciado del resultado de una operación aritmética, es el enunciado de uno de los modos de formación de un número dado.

EL CONVENCIONALISMO ARITMÉTICO

En filosofía el convencionalismo es una concepción según la cual las leyes y teorías científicas son convenciones que dependen de la libre elección entre varios modos alternativamente posibles de describir el mundo natural. La aparición de un convencionalismo sistemático en el dominio cognoscitivo se verifica sólo a finales del siglo XIX, después del descubrimiento de la posibilidad de geometrías no euclidianas, al desaparecer el carácter evidente de los axiomas geométricos. En el ámbito de la matemática se considera a Poincaré como un gran teórico del convencionalismo (Blanche, 1973, p. 86).

El convencionalismo trae también consecuencias importantes para el aprendizaje de la matemática y, en concreto, para la enseñanza del número. Según Helmholtz (1887):

«Podemos considerar los números como una serie de signos arbitrarios elegidos, pero a los cuales le aplicamos un modo determinado de sucesión a título de sucesión regular o, conforme a la expresión habitual, de sucesión natural. El orden de los signos numéricos es tan convencional como el orden de las letras en las diversas lenguas; orden que, una vez adoptado y empleado de una manera constante, toma igualmente una apariencia normal y regular». (Cita referenciada por Brunshvicg en su obra: *Las etapas de la filosofía matemática* p. 398).

«Se evita la noción de número cardinal y la idea de unidad. La serie ordinal basta para constituir el número» (Brunshvicg, 1929).

Para los convencionalistas, la adición entra en el marco de la enumeración puramente ordinal; por ejemplo: por $a + b$ designo el número de la serie sobre el que caigo si cuento uno para $a + 1$, dos para $a + 2$, etc., hasta que haya contado hasta b . Según Brunshvicg (op. citada), Helmholtz fundamenta la teoría de las operaciones aritméticas sin recurrir a la intuición ni tener en cuenta la idea de colección de unidades homogéneas. Así, si suponemos que estamos en presencia de un grupo de términos distintos, podemos hacer corresponder un signo de nuestra serie ordinal a cada uno de dichos términos. Siempre que no haya laguna ni repetición obtendremos el mismo número, sea cual sea el orden que se le asigne a los términos del grupo. La *acción de contar* es la base de todos los cálculos.

Con los planteamientos convencionalistas, según Brunshvicg, la aritmética renuncia definitivamente a todo valor de ciencia, puesto que la ciencia pretende al menos alcanzar la verdad. El convencionalismo rebate por tanto al inductivismo en esta pretensión, encontrándonos ante dos posturas antagónicas pero no contradictorias.

La importancia de la consideración epistemológica del convencionalismo es incuestionable por una razón obvia: independientemente de las perspectivas epistemológicas subyacentes a distintos planteamientos curriculares para el aprendizaje de la aritmética, en el desarrollo didáctico de todos ellos tiene una gran importancia la acción de contar. Más adelante haremos un análisis de la importancia de la acción de contar en distintos planteamientos didácticos del número natural.

Las tesis convencionalistas tienen éxito debido al reduccionismo en las tesis de Mill, ya que el origen del número no es sólo la cantidad sino, también, la repetición o la combinación, por citar algunos ejemplos. La repetición es temporal pero secuencial; podemos hablar de momentos distintos, de cantidades de tiempo y de frecuencias, de tal manera que, aunque sean idénticas, podemos diferenciar en el tiempo las oscilaciones de un péndulo y contarlas; la repetición nos lleva a contar. Las unidades son totalmente idénticas y sólo se diferencian en su distribución temporal. Aquí podemos decir que *la repetición y la acción de contar están en íntima relación*. En lo que se refiere a la combinación, no hay duda de que las posibles combinaciones de unos dígitos representan un número. En estos casos los axiomas de extensión son de dudosa aplicación: ¿Qué se entiende por diferencia entre una combinación y otra?; ¿qué puede significar sumar combinaciones u oscilaciones?

LA PERSPECTIVA GENÉTICA Y LA INDUCCIÓN EN ARITMÉTICA

Se plantea el hecho de que toda teoría en psicología del aprendizaje está en relación con un marco epistemológico, llegando a distinguir dos paradigmas bien diferenciados en investigación psicológica: el conductismo y el constructivismo.

Dentro del constructivismo distinguimos el constructivismo operatorio piagetiano que está sustentado en una interpretación evolutiva del desarrollo psicológico del individuo además de un planteamiento estructuralista de la inteligencia humana con influencias racionalistas. El marco epistemológico que le corresponde al constructivismo operatorio es el de la epistemología genética desarrollado por Piaget.

La perspectiva genética del conocimiento es una perspectiva evolutiva de estados de conocimiento más que de conocimientos en sí mismos. Desde un punto de vista ontogénico los conocimientos evolucionan en los sujetos pasando por diferentes estados que manifiestan competencias operatorias cada vez más completas mediante equilibraciones sucesivas de las estructuras cognitivas. El sujeto pasa de unos estados de conocimiento más primitivos a otros más evolucionados debido a una progresión hacia una completitud de sus estructuras: pasa de no poder establecer relaciones con cierta complejidad lógica o matemática a poder establecerlas. La evolución genética individual la podemos caracterizar desde un punto lógico-matemático como un pasaje de no poder establecer una relación a un poder establecer esa relación.

Las posturas empiristas, aprioristas y convencionalistas sobre la naturaleza del número natural no satisfacen a Piaget (1987, p. 128):

«Desde las acciones iniciales, las relaciones entre el sujeto y los objetos es un testimonio de un fenómeno mucho más complicado de lo que dejan suponer las interpretaciones empiristas, aprioristas o convencionalistas. La acción de enumerar no puede estar determinada únicamente por los objetos, puesto que ella los estructura en función de un esquema operatorio, que es asimilación de las cosas al doble acto de reunir y ordenar, y puesto que asimilar significa agregar a los objetos caracteres nuevos que no estaban incluidos anteriormente a la acción del sujeto: así la reunión elemental $1 + 1 = 2$ añade a cada uno de los objetos contados como unidades 1, 1, la nueva propiedad de constituir un todo 2.

Para Piaget, en la evolución de la aritmética son importantes las aportaciones de las acciones intencionadas que realiza el sujeto sobre los objetos que presentan la doble vertiente de la adaptación cognitiva: asimilación y acomodación.

Desde la epistemología genética el razonamiento en matemáticas presenta dos componentes básicos que son la inductiva y la deductiva: el razonamiento matemático presenta la originalidad de ser a la vez una generalización gradual y una deducción enteramente rigurosa: se parece pues a la inducción por su carácter generalizador, pero sin compartir su falta de rigor, y se parece al silogismo por su carácter de necesidad interna, sin conocer no obstante su infecundidad.

Piaget para reforzar la importancia del razonamiento inductivo en aritmética se apoya en Russell, quien define los números naturales desde la perspectiva inductiva como sigue:

«Definimos los “números naturales” como aquellos que se pueden establecer gracias a la inducción matemática, es decir que poseen todas las propiedades inductivas» (Cita referenciada por Piaget, 1987, p. 272).

Según Piaget, esta definición de Russell se basa en las clases «hereditarias» y en los conceptos de sucesor, predecesor, cero, «posterior a cero», etc. Russell retoma y precisa los primeros conceptos de Peano para reducir el número entero a las clases, lo que equivale a decir que el principio de inducción matemática se origina en la misma construcción de los números enteros:

«Tanto cuando se admite la reducción de los cardinales a las clases lógicas como cuando nos limitamos, como hace Peano, a agregar el axioma de inducción a los que determinan la sucesión de los números, el razonamiento por recurrencia se convierte así en la expresión de la construcción de los enteros finitos» (Piaget, 1987, p. 272).

Desde la perspectiva genética se admite por tanto la importancia de la inducción en la construcción del número natural, pero desconocemos su papel elaborador en dicha construcción, lo que sólo se puede resolver desde un planteamiento evolutivo, ya que:

«El problema de la naturaleza de los entes matemáticos sólo puede ser resuelto en función de su desarrollo» (Piaget, 1987, p. 295).

Según la epistemología genética disponemos de dos métodos para investigar la naturaleza de los entes matemáticos en función de su desarrollo: el análisis histórico-crítico y los análisis psicogenéticos. Distinguiendo una sociogénesis de los conocimientos, relativa a su desarrollo histórico en el seno de las sociedades y a su transmisión cultural, y una psicogénesis de las nociones y de las estructuras operatorias elementales que se constituyen en el transcurso del desarrollo de los individuos (Piaget, 1979, p. 64).

La psicogénesis de la inducción en aritmética es lo que nosotros hemos denominado desarrollo evolutivo del razonamiento inductivo numérico al considerar este problema desde la Didáctica de la matemática y no desde la psicología.

ARITMETISMO Y SERIES NUMÉRICAS

Hemos comprobado cierta similitud entre los planteamientos inductivistas y la aritmética desarrollada en los libros de divulgación matemática consultados y difundidos en España con anterioridad al siglo XX (tabla 1). Podemos decir que las interpretaciones epistemológicas inductivistas de la aritmética tienen un desarrollo matemático concreto. Al hablar del aritmetismo nos referimos a esta manera particular de desarrollar la aritmética por los matemáticos de la época, y que dieron lugar a las síntesis inductivistas sobre el origen y naturaleza de la aritmética del número natural. Por aritmetismo entendemos el tratamiento de la aritmética en base a las consideraciones inductivistas del número natural.

AUTOR	TÍTULOS	AÑO
Pérez de Moya, J.	Aritmética práctica y especulativa	1562
Caramuel, J.	Mathesis biceps. Vetus, et nova	1670
Altieri, L.	Elementa philosophie	1785
Cerdá, T.	Lecciones de matemáticas	1816
Bailis, B.	Elementos de matemáticas	1816
Boccherine, F.	Aritmética	1849
Cortázar, J.	Aritmética	1862
Fernández y Cardin, J. M.	Elementos de matemáticas	1862
Briot	Álgebra	1879
Lasala Martínez, A.	Elementos de matemáticas	1919
Llardent Esmet, A.	Aritmética y geometría	1925
Mataix, C.	Aritmética general y mercantil	1942
Salina y Angulo, J.	Aritmética	1943

Tabla 1.- Autores y obras consideradas para el estudio del aritmetismo en España

Su influencia en España ha durado más de cuatro siglos perdurando incluso en la primera mitad del siglo XX a pesar de los cambios producidos en la matemática del siglo XIX, que dentro de unos planteamientos lógicos culminan con la axiomatización de la aritmética. Sus consideraciones no están en relación con la lógica permaneciendo al margen de la revolución axiomática del número natural y por consiguiente, al margen del progreso matemático. A lo más que llegan es al concepto generalizado de magnitud física en un intento de considerar la magnitud como aspecto general a partir del cual se definen los números. (Hemos dicho magnitud física para no confundir con magnitud algebraica en el contexto conjuntista).

De estos autores, el único que se aparta de la corriente aritmetista es Caramuel (1670), que expone algunas consideraciones idealistas o racionalistas al respecto del número natural en la presentación de su obra *Mathesis biceps. Vetus, et nova* aunque luego desarrolle su obra con un contenido aritmetista.

Ante el problema de la esencia de los números y de su existencia, se sitúa en la línea de considerar el número como una creación del ser humano. Su argumentación se basa en una afirmación de Aureolo:

«El número proviene de la numeración, y la numeración del numerante (Aureolo)»; Caramuel concluye: «Luego, si no hay numerante, tampoco habrá numeración; y, si no hay ninguna numeración, no habrá número. La forma del número es, por lo tanto, una denominación extrínseca recayente sobre las unidades, que proviene del intelecto numerante. De propósito he dicho “numerante”, pues una cosa es reconocer los objetos al mismo tiempo y otra numerarlos. Me explicaré. Hablaba fulano en sueños, y, al dar el reloj las cuatro, dijo: “una, una, una, una. Este reloj delira dio cuatro veces la una”. Fulano, pues, numeró cuatro veces una campanada, y no numeró cuatro campanadas. Y, simultáneamente, concebía en el pensamiento cuatro veces el uno, pero no concebía el cuatro. Por lo tanto, numerar es algo distinto de concebir simultáneamente en el pensamiento una pluralidad de cosas. Pues, si tengo cuatro relojes de pared en la biblioteca y todos dan la una, no habrá que decir que dieron las cuatro, sino cuatro veces la una. Esta diferencia no reside en las cosas, independiente de la operación de la mente: luego depende de la mente del que numera. El intelecto, pues, no encuentra, sino que, hace los números, concibiendo en el pensamiento diversas cosas como separadas en sí mismas y como unidades intencionalmente» (p. XLIII).

En estas alusiones, el autor deja claro los aspectos ordinal y cardinal del número natural y rechaza la numerología como ciencia de los números. En cuanto a la representación, podemos leer:

«Mas una vez inventada la sucesión de los números que tienden al infinito, el PROARITHMETES (aquel que por primera vez quiso gobernar los números por leyes) se encontró en una bifurcación; pudo seguir dos vías, a saber: la recta o la circular. 1) Bien la recta, que proyectada al infinito nunca volviera al comienzo. 2) Bien la circular, en la que se traza un círculo y, una vez agotado, se recorre de nuevo en fases cada vez mayores pero proporcionales, y siempre, al final, volviendo al comienzo» (p. XLIV).

Quedan de esta manera expuestos los aspectos verbales, gráficos y simbólicos de los números naturales, justificando el uso de los sistemas de numeración posicional relativos. Los sistemas de numeración dan lugar a las diferentes aritméticas: Binaria, Ternaria, etc., según la base de numeración considerada.

Caramuel se refiere a la aritmética como la ciencia del numerar y establece la diferencia entre cantidad discreta y continua y unidad determinada e indeterminada, siendo en esta última en la que se sitúan las *relaciones* multiplicativas de doble, mitad, etc.

Para Pérez de Moya (1562):

«Aritmética es Ciencia, que trata de Números, dicha por los Filósofos, cantidad discreta. Finalmente es un Arte, que nos muestra perfectamente contar».

El fundamento de la aritmética es la unidad, al igual que lo es el punto para la geometría. Distingue dos aspectos fundamentales en el número: el concepto de número y cómo se engendra; el primero se estudia en la aritmética teórica y el cálculo con números en la aritmética práctica. Para definir el concepto de número, toma la definición

de Euclides (multitud de unidades) y compara la obtención de una línea a partir del movimiento de un punto con la obtención de un número a partir de un allegamiento de unidades. Igualmente llega a diferenciar los números dígitos, los números artículos y los compuestos¹.

En cuanto a las relaciones numéricas, en concreto las que determinan series aritméticas o geométricas, Pérez de Moya engloba relaciones aditivas y multiplicativas bajo el término *proporcionalidad*, que la define como una similitud de proporciones y distingue tres tipos diferentes: harmónica, aritmética y geométrica. Tanto la proporcionalidad aritmética como la geométrica las clasifica en continuas y discontinuas, según que el término medio sea común o no a las proporciones.

En la obra de Laurentino Altieri, *Elementa Philosophie*, publicada en el año 1785 en Venecia, se observan los mismos planteamientos. Considera la unidad como principio del número y sólo tiene en cuenta las proporciones geométricas, lo que no ocurre en las obras consultadas y editadas en España hasta avanzado el siglo XIX.

En el siglo XIX se intenta fundamentar la Aritmética a partir de unos principios generales de la Matemática que estén al margen de las disquisiciones filosóficas. Estos principios, al ser comunes para la Aritmética y la Geometría, se basan en el concepto generalizado de magnitud, tal y como queda reflejado en la definición de Matemáticas dada por Tomás Cerdá, en su libro *Lecciones de Matemáticas o Elementos de Aritmética y Álgebra* publicado en 1816:

«La Mathemática en común es una Ciencia, que trata de la Magnitud, y Extensión. Por nombre de Magnitud se entiende todo aquello, que es capaz de aumento, y disminución».

Cerdá, define la aritmética como la Ciencia que trata de los Números y que nos da reglas para inferir unas cantidades de otras que el autor reduce a las cuatro operaciones de la aritmética elemental. Entiende el número como la unidad, el complejo de muchas unidades o alguna parte de la unidad, distinguiendo, por tanto, los enteros de los quebrados. En cuanto a las razones y proporciones las considera como una doctrina que hace posible discurrir en matemáticas al combinar unas cantidades con otras:

«Razón de una cantidad a otra, es el modo, con que una cantidad sea respecto de otra de la misma especie, en orden a la magnitud, esto es, si le es igual, mayor o menor y cuanto. De ahí se ve que podemos buscar dos cosas cuando cotejamos una cantidad con otra de su misma especie: la primera, precisamente si una cantidad es mayor que otra, en orden a su diferencia o exceso, y se llama razón aritmética y la segunda, en orden a cuántas veces una cantidad contiene a otra, o más en general, cuál es el cociente de una cantidad dividida por la otra, y en tal caso, se llama razón Geométrica. La razón Aritmética se conoce por el restar y la razón Geométrica por el dividir. La razón Geométrica toma diferentes nombres: se llama razón multiplíce, cuando el antecedente contiene muchas veces al consiguiente; en particular se llama dupla, tripla, etc. La igualdad de razones se llama proporción, distinguiendo las Aritméticas y las Geométricas. Una proporción es continua, si el consiguiente de una es el antecedente de la otra. En caso contrario, se le llama discreta» (resumen utilizando la terminología del autor).

LAS SERIES NUMÉRICAS

Según Smith (1958), la palabra «serie» comenzó a utilizarse por los autores británicos del siglo XVII, al escribir «series infinitas» en conexión con las secuencias infinitas utilizadas por los algebristas. Según el mismo autor, en el ámbito latino se utilizó la palabra progresión que se ha mantenido hasta nuestros días.

En los textos consultados y publicados en España, la palabra serie aparece por primera vez en la obra *Aritmética* de Fernando Boccherini, publicada en 1849. En la página 199 dice textualmente:

«Cuando se tienen tres o más razones iguales, se dice que se tiene una serie de razones iguales, ya por diferencia o ya por cociente, según sean las razones que entren a componer la serie».

«Se llama progresión aritmética o por diferencia, a toda serie de razones iguales aritméticas tales que el consecuente de la primera sea igual al antecedente de la segunda, el consecuente de ésta igual al antecedente de la tercera y así sucesivamente. Es una proporción continua Aritmética continuada indefinidamente. De todo lo anterior se deduce que también se puede decir que progresión Aritmética es una serie de términos tales, que cada uno lleva al que le precede o sigue la misma cantidad, la cual se llama razón» (p. 201).

De modo análogo define las progresiones geométricas o por cocientes, distinguiendo las series crecientes y decrecientes.

Según la bibliografía consultada, tal y como se puede constatar en las referencias citadas anteriormente, se incluyen las progresiones aritméticas dentro del estudio de la proporcionalidad. A partir de mediados del siglo XIX, se utiliza el término proporcionalidad exclusivamente para las progresiones geométricas, por lo que, a partir de entonces, los términos razón y proporción se refieren a la comparación numérica por cocientes. En la *Aritmética* de Juan Cortázar, publicada en 1862, podemos leer:

«Otra de las reformas introducidas en 1846 es la supresión de las razones y proporciones aritméticas: ésta ha sido adoptada por el Gobierno francés, según puede verse en los programas modernos franceses. Nosotros conocíamos su completa inutilidad, y antes de ver los referidos programas, teníamos la intención de detenernos en demostrarla; más actualmente la mejor demostración es el hecho citado» (p. IV del prólogo).

Los manuales de matemáticas que proponen un planteamiento más amplio y especializado de las disciplinas matemáticas, incluyen el álgebra como una de las partes a desarrollar. Según Fernández y Cardín (1862):

«El Álgebra es una ciencia que trata de las propiedades generales de la cantidad, expresada por símbolos en que se prescinde de todo valor numérico. Se llama, por esta razón, Aritmética Universal» (p. 6). «El Álgebra es la ciencia de las fórmulas» (p. 8).

«La generalización de la Aritmética es el Álgebra». «El Álgebra es la máxima expresión de la generalización».

La inclusión del álgebra modifica el tratamiento dado anteriormente en algunos apartados aritméticos. Así, el estudio de las progresiones aritméticas y geométricas se

independiza del estudio de la proporcionalidad. No obstante este avance, es posible encontrar textos de Aritmética más recientes que mantienen el planteamiento clásico, fundado en el aritmetismo. Éste es el caso de A. Llardént Esmet, que en su libro *Aritmética y Geometría*, publicado en 1925, divide la Aritmética en cuatro partes. La cuarta parte se dedica al estudio de la comparación de unos números con otros, a partir de la cual define las proporciones y las progresiones:

«Comparar dos cantidades en Aritmética es examinarlas para ver cuál es su diferencia o cuál es su cociente» (p. 17).

En el aritmetismo más clásico la palabra serie se ha utilizado al hacer referencia a la igualdad de tres o más razones iguales ya sea por diferencias o por cocientes. A las series por diferencias se les denominó progresiones aritméticas y a las series por cocientes progresiones geométricas. En un principio las progresiones estaban incluidas en el estudio de la proporcionalidad, entendiendo ésta como el estudio de la comparación entre números. En álgebra se consideran las progresiones como un tema independiente de la proporcionalidad que queda reducida al estudio de la comparación de razones por cocientes.

Con la teoría de conjuntos desaparece el término serie en el sentido de progresión o de regularidad numérica que le damos en este trabajo y queda sustituido por el de sucesión. Se definen las sucesiones como conjuntos numerables. Así, en el libro de Carlos Mataix Aracil *Aritmética General y Mercantil*, publicado en 1942, podemos leer las siguientes definiciones:

«Se llaman conjuntos numerables o sucesiones aquellos que quedan caracterizados por las siguientes condiciones:

- 1) Cada elemento del conjunto M tiene un siguiente y sólo uno.
- 2) Existe un primer elemento, único, que no sigue a ningún otro.
- 3) Todo conjunto que contenga al primer elemento de M y también al siguiente de cada elemento que contenga de M , contiene a todo el conjunto».

«La parte más abstracta de la Matemática es la Aritmética, que es la ciencia que tiene por objeto el estudio de los números, es decir, el estudio de las propiedades de los conjuntos coordinables entre sí».

Este autor, a pesar de avanzar desde el positivismo lógico en la construcción de la aritmética, incluye las progresiones aritméticas y geométricas en la proporcionalidad. Esta situación se da en otros textos de la época, como en la *Aritmética* de Salinas y Angulo publicada en 1943.

Para algunos pensadores de renombre universal, como Whitehead, el sentido aritmético del número natural se pierde con el álgebra y con la teoría de conjuntos. En su obra *An introduction to Mathematics*, publicada en 1919, podemos leer en la página 12:

«Esta continua eliminación de números definidos por acumulación sucesiva de parámetros, hace que la cantidad de Aritmética empleada por los matemáticos sea extremadamente pequeña. Muchos matemáticos sienten aversión por los cálculos numéricos y no tienen mayor práctica en ellos. El campo de la Aritmética termina donde comienza el dominio de las ideas de las “variables y de la forma algebraica”».

INFLUENCIA DEL INDUCTIVISMO EN LA ENSEÑANZA DEL NÚMERO

Se ha realizado una revisión de textos escolares, manuales de aritmética y de Didáctica de la matemática publicados en España durante el periodo 1900-1990. En dicha revisión, efectuada desde la perspectiva histórica de la enseñanza de la Matemática, hemos constatado la existencia de dos periodos fundamentales, y que hemos denominado aritmetista (1900-1970) y conjuntista (1970-1990). La clave de estos periodos se encuentra en la introducción de la matemática moderna en la escuela:

«Antes del año 70 se utilizan técnicas de recuento de objetos para dar paso a la sucesión de términos numéricos y a la simbolización. A partir del año 70, aparecen los conjuntos y el cardinal como expresión de su “numerosidad” o de “tener tantos elementos como” cualquier conjunto coordinable. Esta diferencia es importante, ya que el modelo elegido sirve para presentar y justificar las operaciones aritméticas y enfatiza ciertos aspectos del número. Antes del año 70 tenían mayor importancia los aspectos ordinales, el contar progresiva y regresivamente; desde el año 70 han dominado los aspectos cardinales» (Castro y Rico, 1987, p. 76).

El aritmetismo en la enseñanza, si bien participa de las concepciones inductivistas de la cantidad en cuanto a la construcción del concepto de número, presenta un desarrollo didáctico convencionalista. En cuanto a la relación con el inductivismo decir que se utilizan conceptos del número natural tales como considerar la unidad como principio del número y la diferenciación entre números concretos y abstractos, haciendo recaer el contenido de la enseñanza del número natural en la numeración escrita y hablada. En cuanto a su transmisión escolar se incide en contar y numerar sin entretenerse en presentar la significación del sistema posicional que se acepta por su operatividad.

En el periodo aritmetista y para la escuela elemental, algunos autores tienen en cuenta planteamientos psicológicos para la enseñanza y el aprendizaje de la aritmética, como es el caso de María Montessori, que en su obra *Psico-Aritmética*, publicada en España en 1934, intenta desarrollar la aritmética a partir de un «*material científicamente determinado*». Asimismo, de acuerdo con la psicología de la época, concede una doble importancia a la aritmética: como «*medio de desarrollo mental*» y «*necesaria y elemental cultura*» (p. 5). A partir de aquí, en los años cincuenta y sesenta, prolifera el material didáctico para la enseñanza del número y de la aritmética dentro de una gran obsesión por encontrar el Método Ideal. Se dan a conocer los materiales de los números en color con las regletas de Cuisenaire (material introducido en España por Gategno) y matemáticos ilustres, como Puig Adam, recomiendan el uso del material en la enseñanza del número.

La vinculación de María Montessori con el aritmetismo es que en sus propuestas intenta en primera instancia conseguir en el niño la idea de *aumento y disminución de unidades* con la originalidad de diferenciar las unidades sensorialmente, utilizando unos bastones para que el niño percibiera más claramente el esquema de sucesión uniforme de uno en uno (diez bastones correspondientes a los diez primeros números

naturales; cada bastón dividido en unidades pintadas de azul y rosa alternativamente). En principio el niño debe trabajar con bastones del mismo color para percibir el aumento uniforme de las longitudes de unidad en unidad. Una vez que el escolar supera esta etapa debe trabajar la *acción de contar* en el sentido de recuento acumulativo:

«En cada bastón se puede contar la suma de las unidades que van sucediéndose una a otra hasta el extremo del bastón. La última palabra a la que se llega, se refiere a la suma de las unidades contenidas en el bastón, e indica el total. Esta palabra puede convertirse en un nombre que indica el bastón. Los bastones representan cantidades que se llaman» (p. 12).

En las propuestas didácticas secuenciadas de Monchamp (referenciado en Hamaide, 1931)² el autor distingue las siguientes etapas por las que pasa el niño antes de adquirir las nociones de los números:

- 1.º Noción de la presencia y ausencia.
- 2.º Facultad de diferenciar y de identificar.
- 3.º Etapa de repetición.
- 4.º Noción de la unidad y de la pluralidad; noción del 2.
- 5.º Noción del 3.
- 6.º Facultad de la cantidad o tamaño continuo. Etapa de la síntesis.
- 7.º Noción del 4 (etapa de análisis y síntesis).
- 8.º Noción del 5 (primera idea de la fracción).

En ellas podemos observar aspectos inductivistas como el de unidad, las definiciones de los diferentes números a partir de unidad y pluralidad así como la repetición, que podemos interpretar como la adquisición de un hábito, lo que está más en relación con un convencionalismo en el sentido de llegar a la adquisición de una creencia.

Centrándonos en España destacamos por su amplitud e influencias la obra de Junquera Muné (1960):

«Se llega a la idea de número a través de la generación ordenada de las cantidades a que se refiere. Es antes la idea de 4 que la de 5, y no es posible ésta sin aquella» (p. 42).

«Para idear el número, es superior el proceso del contar sucesivo, seguido del inverso de descontar» (p. 42).

«La observación del crecimiento y decrecimiento regulares delimitan la idea de cantidad y la correlativa numérica» (p. 42).

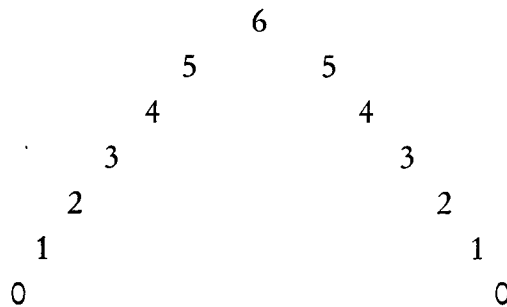
Se manifiesta el origen inductivista del número a partir de la cantidad así como que la numeración es una organización de las cantidades y que no puede existir la idea de un número sin la idea de los que le son inferiores. La observación del crecimiento y decrecimiento la podemos relacionar con los principios inductivistas de aumento y disminución.

En la introducción de las primeras cifras se busca explícitamente la distinción entre cantidad, número y cifra, mediante la utilización de círculos o cuadrados que representan unidades y, a veces, se confunde el número con el numeral (ver Junquera Muné, p. 69).

En el periodo aritmetista y desde el punto de vista didáctico se refuerza el aprendizaje mediante exposiciones netamente inductivas, basadas en un proceso paso a paso que comienza por las cantidades más pequeñas y se repite escrupulosamente para el resto de las cantidades. En el proceso siempre hay una serie ascendente y otra descendente de cantidades, las series ascendente y descendente de las cifras correspondientes y la serie de los numerales. Este proceso y las exposiciones inductivas a que nos referimos se pueden apreciar claramente en el texto de Junquera Muné (op. citada), del que citamos a continuación, a modo de ejemplo, un pequeño detalle.

o	uno	1	o o o o o o.....	seis.....	6
o o.....	dos.....	2	o o o o o.....	cinco	5
o o o	tres.....	3	o o o o	cuatro	4
o o o o	cuatro	4	o o o	tres.....	3
o o o o o.....	cinco	5	o o	dos.....	2
o o o o o o ...	seis.....	6	o	uno.....	1

Serie natural: 1, 2, 3, 4, 5, 6
 Serie descendente: 6, 5, 4, 3, 2, 1



Además de la serie por agregados de una unidad, la serie de las cantidades puede considerarse creciendo por conjuntos de dos o más elementos (Procesos mediatos de contar. Junquera, p. 117).

En las propuestas didácticas de este periodo son importantes las distribuciones regulares de cantidades según ciertos patrones de aumento y disminución.

En España durante el periodo aritmetista ha habido un predominio del inductivismo aritmético aunque las propuestas didácticas se basan en la repetición y no en favorecer un desarrollo inductivo de la aritmética, prevaleciendo la acción de contar como una repetición continuada en el aprendizaje de los diferentes números, lo que en definitiva supone situar al alumno en una expectativa convencionalista.

Desde un punto de vista general, la mayor parte de los autores coinciden en definir la cantidad como aquello que puede aumentar o disminuir, la unidad como aquella cantidad con la que comparamos otra cantidad, el número como el resultado de la comparación de una cantidad con su unidad y la aritmética como la ciencia que tiene

por objeto el estudio de los números. Así, José Dalmau Carles en su manual *Lecciones de aritmética* define la cantidad a partir del número y, posteriormente, el número a partir de la cantidad:

«Cantidad es todo lo que se puede representar por números, exacta o aproximadamente, como la distancia, el dinero, el tiempo, etc.» (p. 28).

«Unidad es el uno de todas las cosas, como un libro, una mesa, un niño (*Aclaración del autor: Consideramos que esta definición de la unidad es rigurosamente científica y la que ofrece menos duda a la débil inteligencia del niño)».

«Número es el resultado de comparar la unidad con la cantidad» (p. 28).

En la Enciclopedia Estudio (1958, p. 289), encontramos el cuadro de la figura 1, en el que podemos ver los aspectos del número que se transmitían en el periodo aritmetista, muy en relación con el aritmetismo matemático y con el inductivismo.

Número	por su formación	entero quebrado mixto
	por el conocimiento de la especie de sus unidades	abstracto concreto
	por la naturaleza de la especie de sus unidades	homogéneo heterogéneo
	por el número de cifras	dígito polidígito

Figura 1. Interpretación del número en el periodo aritmetista

A finales de este periodo hay un gran movimiento renovador en la enseñanza de las matemáticas. La teoría de conjuntos se introduce en el Bachillerato y se plantea su institucionalización en la escuela elemental. Las propuestas didácticas ya no son de cálculo abstracto, es decir, tratan de construir las nociones numéricas a partir de situaciones relacionadas con el entorno. Todo ello fortalece la implementación de la teoría de conjuntos en su faceta intuitiva (contacto con los objetos reales) y con miras hacia la construcción lógica de la aritmética.

Antes de introducir oficialmente la teoría de conjuntos en la enseñanza elemental, proliferaron multitud de propuestas didácticas con respecto al número. Algunas hacen

referencia a la importancia de la comprensión de la naturaleza del número natural desde un punto de vista conjuntista:

«Para saber contar hasta 100, hay que ir, pues, más allá de la enumeración y comprender la naturaleza de los números para persuadir al niño a operar directamente con ellos. Vale decir que no se debe olvidar jamás que el estudio de los números debe relacionarse con la noción de entero cardinal, cualidad de conjunto que posee una colección independiente de la naturaleza, situación o agrupación particular de sus unidades constitutivas, y de entero ordinal que expresa el lugar ocupado por cierta unidad en la enumeración que se haga» (Leif y Dézaly, 1958, p. 21).

Otras estuvieron más en consonancia con un cambio metodológico como es el caso de Mialaret (1967):

«El método pedagógico será intuitivo, inductivo y dará lugar a puestas a punto sucesivas que irán constituyendo etapas de una axiomatización progresiva» (p. 21).

PERIODO CONJUNTISTA 1970-1990

«La introducción de las matemáticas modernas, ha provocado amplias discusiones entre los profesionales, tanto en su inicio como en su frustrante desarrollo» Informe Cockcroft. (1985). Prólogo a la edición española (p. VIII).

Una contradicción de la enseñanza de la aritmética en este periodo es la que se plantea entre el esfuerzo por fundamentar el concepto de número con argumentaciones deductivas y la tradición docente de orientación inductiva:

«Partir de nociones generales e intuitivas, como la noción de conjunto, para definir conceptos particulares como los de número cardinal u ordinal, supone ir de conceptos generales a conceptos particulares, por lo que cabe hablar de un proceso deductivo. Sin embargo, el desarrollo didáctico pretende hacer lo contrario, es decir, llegar a los conceptos generales a partir de situaciones particulares, lo que supone partir de lo concreto con una visión inductivista». Para Godement, (1948):

«Las matemáticas se pueden clasificar de dos maneras: la primera distingue las teorías abstractas de las concretas; la segunda, las teorías modernas de las teorías clásicas. Una teoría abstracta deja de lado la naturaleza de sus objetos para ocuparse solamente de las relaciones lógicas que presentan entre ellos; una teoría concreta, por el contrario, se aplica a entes de naturaleza perfectamente determinada. Por ejemplo, la aritmética tal como se la enseña en las clases secundarias es una teoría concreta» (p. 344 de *Las grandes corrientes del pensamiento matemático*).

Con la matemática moderna se evitan las disquisiciones empíricas sobre el número natural. Con ella desaparecen de los textos las nociones de cantidad, número concreto y abstracto, cantidades homogéneas y heterogéneas, el concepto de unidad integradora, etc., tan importantes en el periodo aritmetista. Ahora no se parte de unos postulados o creencias compartidas sobre la cantidad, sino de nociones generales que pretenden alcanzar conclusiones particulares a través de un recorrido didáctico. Pero, este recorrido debe alcanzar un nivel de aprendizaje del número natural y las operaciones,

lo que resulta complicado mediante un proceso que debe compatibilizar una construcción del número, anterior a la escritura numérica y al margen de la numeración, basada en las nociones de cardinal y ordinal, y unas adquisiciones propiamente numéricas y aritméticas que presentan disfunciones en el seno de la teoría de conjuntos.

El que la lógica pusiera de manifiesto algunas contradicciones de la aritmética no significa que debamos llevar a la escuela una construcción lógico-conjuntista de la misma. En parte, el error de llevar a la escuela la teoría de conjuntos se debió a una interpretación inadecuada de la teoría de Piaget:

«El error que se ha cometido al introducir la teoría de conjuntos en la enseñanza básica se debe en gran parte a una interpretación errónea de la teoría de Piaget acerca del desarrollo intelectual» (Delval, 1984, p. 338).

El gran propulsor de la matemática moderna en la escuela fue Dienes, cuyas propuestas didácticas se condensan en los siguientes principios para el aprendizaje de las estructuras numéricas:

Principio de constructividad: «La construcción precederá siempre al análisis» (p. 31).

Principio de variabilidad perceptiva: «La misma estructura conceptual deberá ser presentada en tantas formas perceptivas equivalentes como podamos» (Dienes, 1964, p. 32).

Principio, este último, que está en íntima relación con la tercera etapa de sus «seis etapas en el aprendizaje de la matemática». Según el autor, en dicha etapa:

«El niño llega a descubrir las conexiones de naturaleza abstracta que existen entre los elementos de un juego y los elementos de otro, de estructuras idénticas. Así, el niño obtiene la estructura común de los juegos y se deshace de los aspectos carentes de interés» (Dienes, 1970, p. 10).

Por otra parte, para trabajar el concepto de sucesión, Dienes considera la conservación del número como aspecto fundamental, que en el caso de cantidades discontinuas se consigue a través de las correspondencias uno a uno.

«Estos ejercicios proporcionarán un criterio no de percepción, sino de la correspondencia uno a uno, para decidir si los conjuntos contienen o no el mismo número de elementos» (Dienes, 1970, p. 37).

«Se puede establecer un orden entre los números, introducidos como propiedades de ciertas clases de conjuntos, tomando como criterio que es imposible establecer una correspondencia elemento a elemento entre conjuntos pertenecientes a clases diferentes» (p. 38).

«La idea de orden no nos da todavía la idea de sucesión o de secuencia. Para introducir la idea de sucesión es necesario introducir la de “uno más”. Los niños pueden aprender a “contar” repitiendo la serie convencional de los adjetivos numerales, de los números cardinales. Pero esta manera de proceder deja completamente separadas la idea de siguiente y uno más» (p. 39).

Tal proceder desliga los aspectos ordinal y cardinal del número, ya que la idea de siguiente es solo ordinal y la de uno más es cardinal en el sentido de acumulatividad y

por tanto el contar convencional es puramente ordinal olvidando el aspecto cardinal, lo que conduce a que la sucesión de los números naturales sea un caso particular de la noción de sucesión en matemáticas. Por otra parte, la regularidad “uno más” es igualmente particular, puesto que, de acuerdo con Piaget, el número es una síntesis de dos estructuras operatorias (intelectuales) como son la clasificación y la seriación, siendo esta última la que regula, en el sentido de “autorregulación”, el aspecto ordinal de la estructura numérica (ver Piaget, 1941).

«Si se aprenden bien las palabras números en el orden correcto, la última palabra número determina el “número cardinal” del conjunto de objetos. Es esto lo que queremos decir cuando hablamos de “contar los elementos de un conjunto”» (Dienes, p. 141).

Así es como Dienes presenta la integración de los aspectos ordinales y cardinales en la acción de contar.

La influencia de la matemática moderna en la didáctica de la numeración se aprecia en el descenso de las actividades aritmetistas de la época anterior, tales como numerar, escritura numérica, memorización de propiedades, etc., así como en la mayor presencia del orden como relación binaria. La teoría de conjuntos utiliza las clases lógicas y, por tanto, un lenguaje relacional que hace que se llegue a considerar la matemática como un lenguaje que en aritmética adquiere un carácter específico para las relaciones de orden y de equivalencia. Todo ello conduce a poner especial énfasis en las nociones de mayor que, menor que, posterior, anterior, doble-mitad, triple-tercio, etc., mediante unidades didácticas concretas.

En los libros de texto no se contempla de forma adecuada el trabajo sobre el aspecto ordinal del número, proponiéndose algunas actividades de seriación en las primeras unidades de los cursos inferiores (series de figuras, por colores, tamaños, etc.) para olvidar totalmente este aspecto en el resto de unidades. Tampoco se presta atención suficiente a las series numéricas, que únicamente se utilizan para consolidar la secuencia numérica natural o para evaluar las habilidades correspondientes al igual que en el periodo aritmetista y por tanto se cae, en este aspecto, en un inductivismo.

LA ENSEÑANZA DE LA ARITMÉTICA A PARTIR DE 1990

El periodo en el cual nos encontramos en la actualidad, ha sido precedido de un gran debate en la comunidad de educadores matemáticos, cuyas reflexiones, aún en curso, se han materializado en proyectos y trabajos curriculares de diversa índole. Entre los más difundidos en España se encuentra la obra *Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática*, N.C.T.M. (1991), en cuya página 60 se puede leer:

«En los niveles P-4, el currículo de matemáticas debe incluir el estudio de patrones y relaciones para que los estudiantes sean capaces de:

- Reconocer, descubrir y crear una amplia gama de patrones.
- Representar y describir relaciones matemáticas.
- Explorar el uso de variables y expresiones indeterminadas para expresar relaciones».

Igualmente, en la página 80 de la misma obra, se llega a relacionar el descubrimiento de patrones con la resolución de problemas:

«La identificación de patrones constituye una poderosa estrategia para la resolución de problemas. Supone asimismo la esencia del razonamiento inductivo».

Estas afirmaciones constituyen un breve testimonio de la valoración que merece el razonamiento inductivo en los nuevos planteamientos didácticos. Cuestión diferente es su concreción en propuestas prácticas para el aula y en libros de texto, en cuya valoración no vamos a entrar aquí por considerar que puede resultar prematuro emitir un juicio sobre una corriente de muy reciente implantación.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- APARICIO, C. y PAYÁ, R. (1985): *Análisis Matemático I*. Granada: Universidad de Granada.
- BLANCHE, R. (1973): *La epistemología*. Barcelona: Oikos Tau.
- BRUNSCHVICG, L. (1929): *Lés étapes de la philosophie mathématique* (trad. cast. de Icora Ratto de Sadosky: *Las etapas de la filosofía matemática*. Buenos Aires: Lautaro.
- CASTRO, E.; RICO, L. y CASTRO, E. (1987): *Números y operaciones*. Madrid: Síntesis.
- COCKROFT, W. H. (1985): *Las matemáticas sí cuentan*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencias.
- DELVAL, J. (1983): *Creer y pensar. La construcción del conocimiento en la escuela*. Barcelona: Laia.
- DIENES, Z. P. (1964): *Building up mathematics*. Hutchinson Educational LTD (trad. cast. de Alberto Aispun y Amalia Quiñones: *La construcción de la matemática*. Barcelona: Vicens-Vives, 1970).
- DIENES, Z. P. y GOLDING, E. (1966): *Ensembles, nombres et puissances*. Paris. O.C.D.L. (trad. cast.: *Conjuntos, números y potencias*. Barcelona: Teide, 1980).
- JEVONS, W. S. (1873): *Principles of Science* (trad. cast. de Carlos E. Prélat: *Los principios de las ciencias*. Madrid: Espasa Calpe, 1946).
- JUNQUERA, M. (1960): *Didáctica de la Matemática*. Barcelona: Labor.
- LEIF, J. y DÉZALY, R. (1958): *Pédagogie spéciale, deuxième fascicule: L'Enseignement du calcul, leçons de choses et sciences appliquées*. Paris: Delagrave (trad. cast. de Juan Jorge Thomas: *Didáctica del cálculo, de las lecciones de cosas y de las ciencias aplicadas*. Buenos Aires: Kapelusz, 1961).
- LELIONNAIS, F. y colaboradores (1976): *Las grandes corrientes del pensamiento matemático*. Buenos Aires: Eudeba.
- MIALARET, G. (1960): *Pédagogie des debuts du calcul*. Paris: Fernand Nathan (trad. cast. *Pedagogía de la iniciación en el cálculo*. Buenos Aires: Kapelusz, 1962).
- MIALARET, G. (1967): *L'Apprentissage des mathématiques*. Bruselas: Charles Dessart (trad. cast.: *Las Matemáticas cómo se aprenden, cómo se enseñan*. Madrid: Aprendizaje Visor, 1984).

- MILL, J. S. (1843): *System of Logic*. Londres: (trad. cast. de Eduardo Ovejero y Maury: *Sistema de Lógica Inductiva y Deductiva*. Madrid: Daniel Jorro Editor, 1917).
- MONTESSORI, M. (1934): *Psico aritmética*. Barcelona: Garrafe.
- PIAGET, J. (1941): «Le mécanisme du développement mental et les lois du groupement des opérations. Esquisse d'une théorie opératoire de l'intelligence». *Archives de Psychologie*, 28, 215-285 (trad. cast. de J. Delval: «El mecanismo del desarrollo mental». Madrid: Editorial Nacional, 1979).
- (1971): *Essai de logique opératoire*. Paris: Dunod (trad. cast. de M. R. Morales: *Ensayo de lógica operatoria*. Buenos Aires: Guadalupe, 1977).
- (1979): *Naturaleza y Métodos de la Epistemología*. Madrid: Paidós.
- (1987): *Introducción a la epistemología genética*. Tomo 1. El pensamiento matemático. México: Paidós.
- POINCARÉ, H. (1902): *La science et l'hypothèse*. (trad. cast. de A. B. Besio y J. Banfi: *La ciencia y la hipótesis*. Madrid: Espasa-Calpe, 1963).
- PRIOR, A. N. (1976): *Historia de la Lógica*. Madrid: Tecnos.
- PUIG ADAM (1959): «Sobre la enseñanza de la aritmética en la escuela primaria». *Vida Escolar*, revista del Centro de Documentación y Orientación Didáctica de Enseñanza Primaria, n.º 7 y siguientes. En Publicaciones de «Enseñanza Media» n.º 72. Director D. Rodríguez Lesmes.
- RICO, L. (1997): *Fundamentos teóricos para el currículum de matemáticas en secundaria*. Madrid: Síntesis.
- RUSSELL, B. (1912): *Problems of philosophy*. Oxford: University Press (trad. cast. de J. Xirau: *Los problemas de la filosofía*. Barcelona: Labor, 1988).
- SMITH, D. E. (1958): *History of Mathematics» Volume II: «Special Topics of Elementary Mathematics*. New York: Dover Publications.

1. Número dígito es aquel que no llega a diez, número artículo es aquel que es diez o dieces juntos y número compuesto es aquel que participa de dígito y de artículo.

2. «Iniciación de la idea del número en los niños». Primer congreso internacional de Paidología, volumen I, p. 260. «El método Decroly». Librería Beltran. Madrid. p. 87.