ISSN: 0214-3402

FUNCIONES: TRADUCCIÓN ENTRE REPRESENTACIONES[1]

Functions: translation between representations

Modesto SIERRA VÁZQUEZ, M.ª Teresa GONZÁLEZ ASTUDILLO y Carmen LÓPEZ ESTEBAN.
Departamento de Didáctica de la Matemática y Didáctica de las Ciencias Experimentales. Facultad de Educación. Universidad de Salamanca

RESUMEN: La traducción entre diferentes formas de representación es un aspecto esencial en la enseñanza y en el aprendizaje de las funciones, ya que permite que el alumno capture el comportamiento de una función desde diversos ángulos enriqueciendo su comprensión. En este trabajo se expone el concepto de representación en matemáticas, su evolución histórica referida al concepto de función, la traducción entre diferentes representaciones y se proponen actividades didácticas para el trabajo en el aula.

Palabras clave: función, representación, traducción, enseñanza-aprendizaje.

ABSTRACT: The translation between differents systems of representation is an important aspect in the teaching and learning of functions, because it allows the student to acquire the behaviour of functions from differents points of view, enriching its understanding. In this paper, we expose the concept of representation in Mathematic Education, its historic evolution in relation with the concept of function, the translation between different forms of representation and we propose didactical activities for the work in the classroom.

Key words: function, representation, translation, teaching and learning.

INTRODUCCIÓN

Este artículo es una parte de los proyectos de investigación que hemos desarrollado en los tres últimos años. Los objetivos han sido los siguientes:

- Elaborar unidades didácticas para la enseñanza del Análisis Matemático en el Bachillerato, utilizando recursos como calculadoras gráficas, programas informáticos y situaciones didácticas.

1. Este trabajo es parte de proyectos de investigación financiados por la Junta de Castilla y León en el programa de Apoyo a la Investigación 1997 y la Dirección General de Educación Superior (D.G.E.S. PB98-1200) en el Programa Nacional de Promoción General del Conocimiento.

– Determinar si la enseñanza de los conceptos del Análisis utilizando estos recursos producen un aprendizaje significativo en los alumnos.
– Hacer propuestas para la configuración de un currículo propio de Bachillerato en el campo del Análisis Matemático en la Comunidad de Castilla y León.
– Mantener y reforzar las relaciones de colaboración entre profesores universitarios y profesores de Bachillerato ya iniciadas en el marco del Convenio de colaboración entre el MEC y la Universidad de Salamanca.

En consecuencia, se han diseñado, experimentado y evaluado unidades didácticas que abarcan los conceptos de función, sucesión, límite, derivada e integral.

Las investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos del Análisis Matemático en el periodo 14-18 años, se enmarcan en lo que se viene conociendo como Pensamiento Matemático Avanzado, que se refiere a los aspectos matemáticos y psicológicos de los procesos de enseñanza-aprendizaje de conceptos matemáticos complejos, su estructura e interrelación, por ejemplo: El Bouazzoui (1998), Azcárate (1992, 1996), Cornu (1981, 1983), Robinet (1983), Orton (1983), Sierpinska (1985, 1988). Han puesto de manifiesto que en la enseñanza del Análisis hay un énfasis en el aspecto algebraico a expensas de los aspectos geométrico y analítico, como consecuencia de lo cual los alumnos se convierten en manipuladores competentes que a menudo tienen dificultades para realizar interpretaciones geométricas y que sólo tienen vagas nociones analíticas.

Las investigaciones referidas al concepto de función (entre otras Tall y Vinner, 1981; Dreyfus y Vinner, 1989) han mostrado que aunque los estudiantes son capaces de reproducir la definición formal de función *(concept definition)* utilizan sin embargo sus propias imágenes o esquemas conceptuales *(concept image)* para resolver tareas o problemas. Esto es así, porque la definición formal de función oculta la verdadera naturaleza de este concepto donde «lo fundamental es la idea de función como una relación entre magnitudes variables. Si esto no se ve así, representaciones como ecuaciones y grafos pierden su significado y llegan a ser conceptos aislados... Introducir funciones a estudiantes por su definición moderna es un error didáctico, una inversión antididáctica» (Sierpinska, 1988). Entonces más que tratar con definiciones formales que contienen elementos no familiares para el aprendiz es preferible intentar encontrar una aproximación que construya un concepto que tenga el papel dual de ser familiar al alumno y provea de las bases para un desarrollo matemático posterior.

Un aspecto esencial en la enseñanza-aprendizaje de las funciones es la traducción entre diferentes formas de representación. Estas traducciones pueden hacer que el alumno capture el comportamiento de una función desde diversos ángulos enriqueciendo de esta manera su comprensión.

En este trabajo se comienza planteando brevemente la idea de representación, se hace un recorrido histórico que muestra las diferentes representaciones utilizadas, se sintetizan los distintos tipos de representación y se diseñan actividades para trabajar la traducción entre representaciones en 4.º curso de ESO.

1. Concepto de representación

La noción de representación posee una gran riqueza de sentidos e interpretaciones, muchos de los cuales son importantes para las actuales líneas de investigación en Educación Matemática, ya que por un lado la Matemática está caracterizada por diferentes representaciones inherentes a ella y por otro lado el uso de dichas representaciones mejora la comprensión.

El concepto de representación «da por supuesto la consideración de dos entidades relacionadas, pero funcionalmente separadas». Uno de estos entes se denomina *objeto representante* y el otro *objeto representado.* De esta manera «cualquier especificación particular de la noción de representación debería describir al menos cinco entidades:

1. Los objetos representados.
2. Los objetos representantes.
3. Qué aspectos del mundo representado se representan.
4. Qué aspectos del mundo representante realizan la representación.
5. La correspondencia entre ambos mundos o conjuntos.

En buena parte de los casos importantes uno o ambos mundos pueden ser entidades hipotéticas e incluso abstracciones» (Kaput, 1987).

En general, tanto el mundo representante como el representado son entidades abstractas y por lo tanto la representación es formalmente independiente de los caracteres externos que se utilizan. Sin embargo, estos caracteres (letras, cifras, gráficos, etc.) juegan un papel esencial en la representación y es un tema básico del aprendizaje su conocimiento y manejo correcto, ya que su forma externa ha sido pulida por la historia y la cultura humana.

El conjunto de signos, símbolos y reglas que se utilizan para expresar o representar una estructura matemática ha recibido diferente denominación en la Educación Matemática, así, Skemp (1980) utiliza simplemente el término *símbolos,* Kieran y Filloy (1989) enfatizan el carácter sistémico de este conjunto y lo denominan sistemas matemáticos de signos, Kaput (1992) se refiere a él como *sistemas de notación,* Duval (1993) se centra en los aspectos lingüísticos hablando de *sistemas semióticos* y más recientemente Castro y otros (1997) lo generalizan mediante la expresión *sistemas de representación.*

En Educación Matemática se considera que los conceptos matemáticos están conectados con la actividad mental de las personas que determina los diferentes significados y usos y por lo tanto también sus representaciones. Hay que distinguir por ello entre *representaciones internas* u objetos de pensamiento, ubicadas en las mentes de cada uno de los sujetos y *representaciones externas* de carácter semiótico y formadas por signos, símbolos, gráficos que constituyen la manifestación más tangible de los conceptos. En la práctica ambos tipos de representación no se pueden separar, forman un bloque en el que los diferentes elementos del plano de expresión y del contenido junto con los códigos se interrelacionan. El dominio adecuado de las representaciones externas potencia la comprensión de los conceptos matemáticos que a su vez permite crear nuevas relaciones que puedan expresarse utilizando nuevos modos de representación o generando aplicaciones distintas de aquellas en las que surgieron dichos conceptos.

Los sistemas de representación matemáticos están formados por una colección de caracteres o símbolos (alfabéticos, numéricos, gráficos,...) unas condiciones sobre las configuraciones permitidas de dichos símbolos y una estructura formada por reglas de combinación de caracteres, redes de transición permitidas en una configuración, relaciones entre la colección de configuraciones, operaciones..., todo ello de una manera consistente. Una colección de estos caracteres junto con las reglas para identificarlos y combinarlos se llama *Esquema Simbólico* y no posee significación, sólo pertenece al plano de la expresión, necesita ponerse en contacto con el plano del contenido para servir a los fines comunicativos del lenguaje matemático. Así llegamos a la noción de *Sistema Simbólico* constituido por un Esquema Simbólico E, junto con un Campo de Referencia F y una Correspondencia entre ellos c: S={E, F, c}. Aunque exista una distinción conceptual entre Esquema Simbólico y Sistema Simbólico, en la práctica ocurre que la sintaxis de un Esquema Simbólico dado está coordinada con su Campo de Referencia con el fin de que la correspondencia que se pueda establecer entre ellos preserve ciertos atributos. Además ciertos caracteres y reglas pueden participar de diferentes Sistemas Simbólicos y por lo tanto tener diferentes significados. Esta situación es responsable de una gran cantidad de errores en el uso de los símbolos matemáticos.

El uso de los sistemas de representación en la Educación Matemática es doble, ya que sirven tanto para la comunicación de conceptos, función en la cual el sujeto puede actuar o bien como receptor que debe leer e interpretar unos determinados símbolos, o bien, como emisor que tiene que ajustarse a ciertas reglas, pero también sirven para desarrollar la propia habilidad cognitiva del pensamiento ya que manipulando sintácticamente los símbolos o elaborando semánticamente referentes de dichos símbolos se construyen nuevas relaciones y se profundiza en los conceptos representados incrementando el número de conexiones dentro de un concepto o entre varios conceptos, enriqueciéndolos y aumentando su conocimiento de ellos.

2. Funciones y su representación a lo largo de la historia

La historia de la Matemática puede utilizarse en la enseñanza para ilustrar la presentación de un concepto motivando el aprendizaje de los alumnos, pero hay otra manera de utilizar esta historia. Esta otra manera trata de encontrar en la historia los sucesivos estados de la evolución de un concepto, los problemas que surgieron, los errores que cometieron los matemáticos, los «obstáculos» que hubo que superar. Este conocimiento puede ser útil para tratar de diseñar secuencias didácticas, empeño que persiguen en la actualidad algunos grupos de investigadores, pero también para comprender los procesos de pensamiento de los estudiantes en la adquisición de un concepto determinado. No se trata por consiguiente de que el profesor de Bachillerato sea un experto en la historia de las matemáticas, sino esencialmente de poner esa historia al servicio de la didáctica.

Hay una cierta unanimidad en considerar cinco grandes periodos:

I. Edad Antigua, caracterizada por las primeras representaciones gráficas y la búsqueda de regularidades.
II. Edad Media, donde destacan las aportaciones de Nicolás de Oresme.
III. Siglos XV, XVI y XVII, con el desarrollo del concepto en las obras, entre otros, de Descartes, Newton y Leibniz.
IV. Siglo XVIII, con la consideración del concepto de función como central en matemáticas, en las obras de Bernoulli y Euler.
V. Siglos XIX y XX, con la generalización del concepto de función.

A continuación vamos a recorrer de forma necesariamente breve cada uno de los periodos en lo que atañe a la representación de funciones, aunque en los primeros momentos es difícil distinguir entre el concepto y su representación.

Edad Antigua

Se consideran las civilizaciones mesopotámicas de la Antigüedad que de forma genérica conocemos como babilónicas (2000 a. C.-600 a. C.) y la civilización griega.

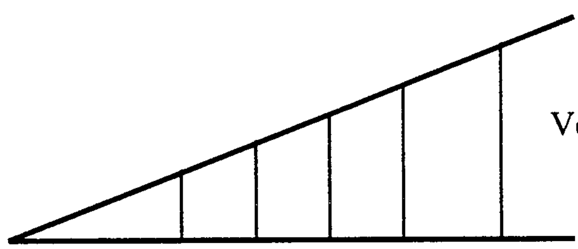
Sobre el concepto de función en la matemática babilónica hay dos posiciones encontradas. Mientras que Pederson (1974) afirma que poseían un cierto sentido de la funcionalidad, Youschkevich (1976) sostiene que en la Antigüedad no existió una idea general del concepto de función. La postura de Pederson se sostiene sobre el hecho de que matemáticos babilónicos utilizaban *tablas* que solían estar dispuestas en dos columnas para anotar los datos de las observaciones astronómicas, no limitándose a una simple tabulación de datos empíricos sino que también trabajaron con interpolaciones tanto lineales como geométricas, buscando regularidades.

En la matemática griega la distinción entre el número y magnitud dificultó ir hacia el concepto de función, ya que la idea de magnitud variable no podía expresarse mediante números más que en ciertos casos particulares impidiendo la relación entre números y magnitudes. Por otro lado, el papel preponderante de las proposiciones que los griegos establecían siempre de modo homogéneo, comparando longitudes con longitudes, áreas con áreas y volúmenes con volúmenes les impidió igualmente ir hacia el concepto de función. No obstante, encontramos tablas astronómicas en el *Almagesto* de Ptolomeo (85-165) y una cierta introducción de coordenadas en las *Cónicas* de Apolonio (262-190 a. C.) con la consideración sistemática de un par de diámetros conjugados que son equivalentes a un sistema de coordenadas oblicuas.

Edad Media

La primera idea de función aparece en las escuelas de Filosofía de Oxford y París, las traducciones de las obras de Aristóteles (384-322 a. C.) (en particular de la Física) y los estudios de Arquímedes (287-212 a. C.) pusieron de actualidad el estudio del cambio en general. En el Merton College de Oxford se dedujo una *fórmula* de la velocidad de cambio conocida como *regla de Merton* que equivale a la ecuación del espacio en función del tiempo en el movimiento uniformemente acelerado.

Hay que señalar las aportaciones destacadas de Nicolás de Oresme (1323-1382) con la introducción temprana de coordenadas preocupado por la representación de la velocidad de un móvil a lo largo del tiempo, para lo cual traza un segmento horizontal cuyos puntos representan los sucesivos instantes de tiempo (longitudes) y para cada instante traza un segmento particular (latitud) cuya longitud representa la velocidad en aquel instante.



Según Azcárate y Deulofeu (1990) con este tipo de representaciones, que nos recuerda mucho a lo que llamamos la representación gráfica de una función sobre unos ejes cartesianos, Oresme pretende que se entienda más fácil y más rápidamente la naturaleza de los cambios, ya sean cuantitativos o cualitativos, de forma que sea posible dar una representación de todos ellos.

No obstante, no podemos considerar las representaciones de Oresme como la expresión de una dependencia en el sentido actual; ello sería posible si nos centrásemos en la «línea superior o de intensidades» como tal, o todavía mejor con su derivada, es decir, en la forma como varía, pero analizando el trabajo de Oresme se ve cómo esta línea no aparece aislada sino que el fenómeno se representa a través de toda la figura, por su forma y por la superficie que queda bajo la curva.

Parece ser que la influencia de Oresme en Galileo (1564-1642) y Descartes (1596-1650) fue importante de modo que estos dos últimos autores retomarán las ideas de Oresme en un momento en que la evolución de los conceptos matemáticos permitía aplicarlas de forma efectiva.

Siglos XV, XVI y XVI

La obra de Vieta (1540-1603) con la creación del Álgebra Simbólica y la de Galileo con el establecimiento de las leyes del movimiento abrieron vías para poder establecer relaciones funcionales, pero es Descartes quien habla explícitamente de relaciones funcionales manifestando por vez primera el hecho de que una ecuación en x e y es una forma para expresar una dependencia entre dos cantidades variables de manera que a partir de ella es posible calcular los valores de una variable que corresponden a determinados valores de la otra. Descartes afirmará que «cuando una ecuación contiene dos cantidades desconocidas, hay un lugar correspondiente y el punto extremo de una de estas cantidades describe una línea recta o una línea curva» (citado en Boyer, 1986, p. 437).

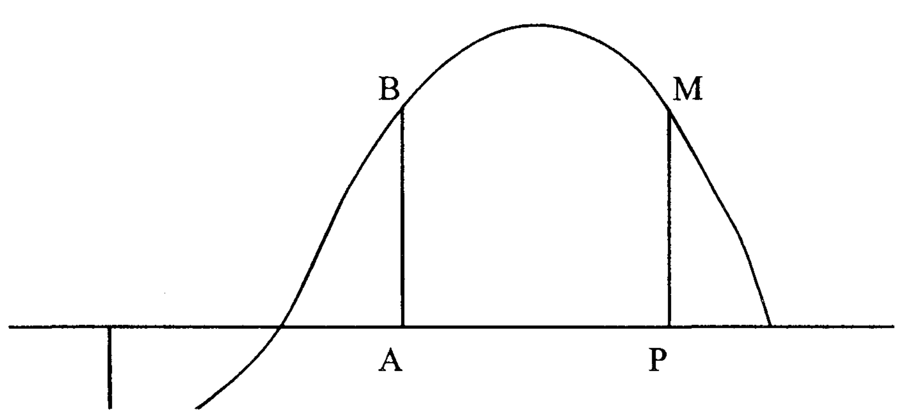
De este modo se pueden representar curvas o superficies por medio de ecuaciones. Las funciones consideradas por Descartes eran sobre todo expresiones algebraicas definidas por curvas geométricas simples. Con Newton (1643-1727) y Leibniz (1646-1716) se llega a la representación de funciones en series infinitas de potencias, lo que hizo posible la representación analítica de la mayoría de las funciones que se utilizaban en esa época.

Siglo XVIII

En los matemáticos posteriores a Descartes surgió la idea de que los métodos de la Geometría Analítica eran válidos no solamente para todas las funciones elementales sino que se podían aplicar también a las funciones algebraicas generales. Se pone entonces el énfasis en la representación de una función mediante su expresión algebraica. Esta idea aparece por primera vez según Boyer en un artículo de J. Bernoulli (1667-1748) en 1718: «llamamos función de una magnitud variable a una cantidad compuesta de cualquier manera que sea de esta magnitud variable y de constantes» (citado en Boyer, 1986, p. 531).

Con Euler (1713-1783) el concepto de función se convertirá en *objeto,* es decir, se estudiarán las funciones en sí mismas y más concretamente sus formas de representación. En su *Introductio in Analysis Infinitorum,* Euler define una función como «una expresión analítica formada de cualquier manera a partir de una cantidad variable y números o cantidades constantes». Observemos la restricción que supone la consideración de «expresión analítica». Esta restricción desaparecerá en sus *Institutiones Calculi Differentialis* de 1755 en el que aparece una nueva definición: «si x es una cantidad, entonces toda cantidad que dependa de x de cualquier manera o que esté determinada por aquélla se llama una función de dicha variable».

Para representar gráficamente las funciones, Euler se valía de un eje horizontal, de tal forma que si en dicho eje elegimos un punto fijo A, si x es una cantidad variable, los sucesivos valores de x se representan por distintos intervalos que se llaman abcisas. A la derecha de A las abcisas son positivas y a la izquierda negativas.



Si y es una función de x, y toma un determinado valor para cada uno de los valores de la abcisa; si x=AP es la abcisa, dibujamos por P un segmento PM que corresponde al valor de y que se llama ordenada ortogonal o simplemente ordenada. Los pares de abcisa y ordenada se denominan coordenadas ortogonales.

La definición general de función dada por Euler se fue implantando progresivamente como se puede ver en los textos de Condorcet (1743-1794), Lacroix (1765-1843) y Lobatchevsky (1792-1856).

Siglos XIX y XX

El concepto de función se fue convirtiendo poco a poco en el concepto clave del nuevo Análisis refinándose progresivamente este concepto. Cauchy (1789-1857) en su definición utiliza los términos variable independiente y variable dependiente: «cuando unas cantidades variables están ligadas entre ellas de tal manera que, dando el valor de una de ellas se puede deducir el valor de las otras, concebimos de ordinario estas diversas cantidades expresadas por medio de una que toma el nombre de variable independiente y las otras cantidades expresadas por medio de la variable independiente son las que llamamos, funciones de esta variable» (Cauchy, *Cours d'Analysis*). En este libro de Cauchy no aparecen representaciones gráficas al estilo de las de Euler.

Será Dirichlet (1805-1859) el que defina, en 1837, el concepto de función tal y como lo utilizamos actualmente: «si una variable y está relacionada con otra variable x de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a x hay una regla según la cual queda determinado un único valor de y, entonces se dice que y es una función de la variable independiente x» (Boyer, 1986, p. 687).

La definición de función dada por Dirichlet se ha refinado utilizando elementos de la teoría de conjuntos. La que aparece con más frecuencia en los libros de texto es la dada por Godement (1971):

«Se llama función a la terna f={G, X, Y}, en donde G, X, Y, son conjuntos que cumplen las condiciones siguientes:

1) $G \subset XxY$
2) Para todo $x \in X$ existe un y, y sólo un $y \in Y$, tal que $(x, y) \in G$. G es la gráfica de la función».

3. Tipos de representación. Traducción entre representaciones

Los tipos de representación utilizados para las funciones son: descripción verbal, tablas, gráficas y expresiones algebraicas.

- *Descripción verbal*, es un enunciado en el que se describe el comportamiento de un fenómeno natural, social, matemático, etc., que implica una relación entre dos o más variables.

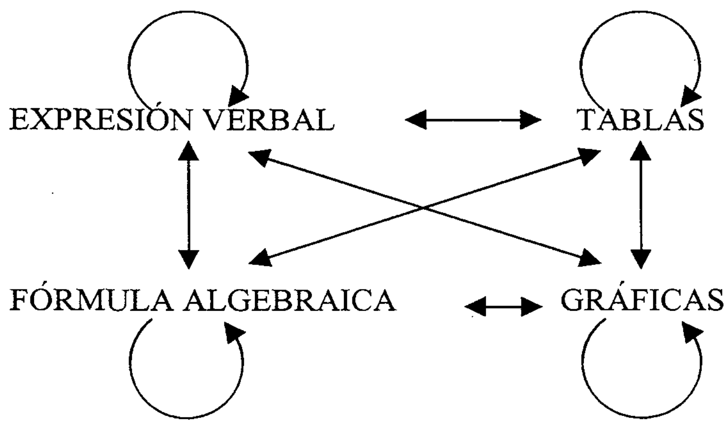
- *Tablas*, es un listado organizado en dos filas o columnas (de ahí la denominación de tabla) de valores de la variable independiente y los correspondientes de la variable dependiente.
- *Gráficas*, es la representación en el plano mediante una línea recta o curva de la relación entre variables.
- *Expresiones algebraicas*, son fórmulas que relacionan las dos variables que intervienen en una función.

Diversas investigaciones han mostrado el abismo existente entre las definiciones dadas por los alumnos y los criterios utilizados en las tareas de reconocimiento de objetos funcionales o de clasificación de funciones y no funciones dadas en registros diferentes (Tall y Vinner, 1981), por lo que parece necesario dotar a los alumnos de la máxima riqueza de representaciones de este concepto a la vez que se realiza la traducción de unas representaciones a otras. Janvier (1987) esquematiza en el siguiente cuadro ya clásico los distintos procesos de interacción-traducción entre sistemas de representación.

	Descripción verbal	Tablas	Gráficas	Expresiones algebraicas
Descripción verbal		Medida	Croquis	Modelo
Tablas	Lectura de relaciones numéricas		Dibujo	Ajuste numérico
Gráficas	Lectura de relaciones gráficas	Tabulación		Ajuste gráfico
Expresiones algebraicas	Lectura de relaciones simbólicas	Tabulación	Croquis	

4. ACTIVIDADES

De acuerdo con lo dicho anteriormente se han diseñado actividades en las que se pide a los alumnos la traducción entre diferentes sistemas de representación:



- De la expresión verbal a tablas, gráficas, expresión algebraica y nueva expresión verbal.
- De gráficas a expresión verbal, tablas, expresión algebraica y nueva gráfica.
- De tabla a gráficas, expresión algebraica, expresión verbal y nueva tabla.
- De la expresión algebraica a gráficas, expresión verbal, tablas y nueva expresión algebraica.

La traducción entre las distintas formas de representación enriquece las imágenes de los alumnos acerca de cómo una misma situación puede ser representada de modos diferentes, a la vez que se le induce a la reflexión de cuál es la forma de representación más adecuada a cada situación concreta.

ACTIVIDAD 1.— *Área – perímetro de un rectángulo.*

Existen infinitos rectángulos de área 60 cm^2 y diferente perímetro cada uno. Completa la siguiente tabla:

Base	2	3	4	5	6	10	12	15	20	30
Altura										

- Haz la gráfica de la función anterior utilizando el eje de abcisas para representar la base de los rectángulos y el eje de ordenadas para las alturas.
- Escribe la expresión algebraica de las alturas en función de las bases.

Esta actividad involucra los conceptos de área y perímetro de un rectángulo. La comprensión de ambos conceptos tiene dificultades para los alumnos que los confunden o son incapaces de comprender las relaciones que hay entre ellos.

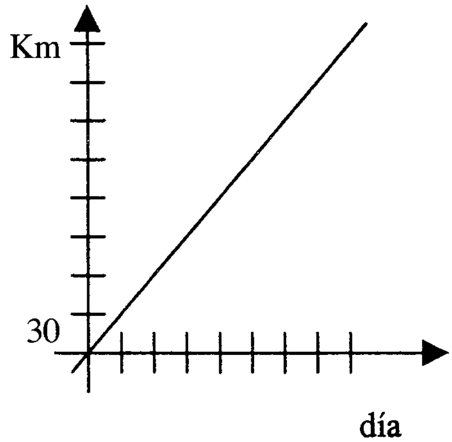
En la actividad, manteniendo fija el área de un rectángulo se trata de que los alumnos calculen la altura de dicho rectángulo a partir de una base dada, y de esta manera aprecien cómo varía el perímetro de dicho rectángulo. Para apreciar esta relación los datos se recogen en forma de tabla.

A continuación se trata de que los alumnos traduzcan esa tabla a una gráfica cartesiana. Es el momento en el que el profesor puede hacer hincapié sobre la forma que tiene dicha gráfica y sobre el paso de una representación discreta a una continua.

Finalmente, se pide a los alumnos la traducción a la expresión algebraica de la altura en función de la base. Se trata aquí de un proceso de generalización de los datos incluidos en la tabla.

ACTIVIDAD 2.— *El peregrino.*

Un peregrino quiere cubrir la distancia de Astorga a Santiago de 240 km. La siguiente gráfica ilustra la progresión después de t días:



- Describe la situación con tus propias palabras.
- ¿Qué distancia ha recorrido durante el primer día y cuánto le falta para llegar a Santiago?
- Ídem para el segundo día.
- Construye una tabla que represente la distancia recorrida cada día.
- ¿Cuánto habrá recorrido después de t días? ¿Cuánto le queda para llegar a su destino?
- Haz un gráfico de la distancia que le queda por recorrer en función de los días.

En esta actividad se parte de una gráfica que representa el espacio recorrido por un peregrino en función del tiempo, se trata de un movimiento uniforme.

Se plantea al alumno que describa verbalmente la situación planteada; esta descripción verbal le debe servir para entender la relación entre el espacio y el tiempo.

A partir de la descripción verbal y fijándose en la gráfica, el alumno debe analizar lo que ocurre en momentos puntuales relativos al desplazamiento del peregrino. Estos momentos deben relacionarse no sólo con el inicio del recorrido sino también con el final para construir las tablas correspondientes y posteriormente la gráfica del camino que queda por recorrer. En esta última tarea, se pone de manifiesto cómo la traducción gráfica-gráfica puede ayudar a enriquecer el conocimiento de un determinado fenómeno.

ACTIVIDAD 3.— *El puesto del rastro.*

Un vendedor de un puesto del rastro se da cuenta de que puede vender 60 cassettes cada domingo si no gana nada, pero las ventas disminuyen cuando aumenta el precio de cada cassette según la tabla siguiente:

Beneficios por cassette en ptas.	*0 10 20 30 40 50 60*
Número de cassettes vendidos	60 50 40 30 20 10 0

- Dibuja el gráfico correspondiente a esta tabla.
- Supongamos que el beneficio por cassette es x. ¿Cuál es el número de cassettes vendidas?
- Haz una tabla que exprese el beneficio total en pesetas según las ventas.

Beneficios por cassette	
Número de cassettes vendidas Beneficios totales	

- Haz la gráfica que represente los beneficios totales en función de los beneficios por cassette.
- Escribe la expresión algebraica del beneficio total en función del beneficio por cassette (llama x al beneficio por cassette).
- Describe la relación entre el beneficio por cassette y el beneficio total. ¿Qué beneficio por cassette elegirías?

Esta actividad propone un fenómeno de tipo económico que relaciona las variables ventas/beneficios en una tabla. Es una situación en la que las dos variables son discretas. Al pedir la gráfica de la función muchos alumnos tenderán a dibujarla de manera continua, por lo que será un buen momento para distinguir los dos tipos de variables.

La expresión algebraica debe construirse a partir de un proceso de generalización de la relación entre las dos variables.

Las tres tareas siguientes suponen un cambio de variable que permite calcular los beneficios obtenidos por el vendedor en forma de tabla, gráfica y expresión algebraica.

Finalmente, igual que ocurre en la realidad, el alumno debe tomar una decisión acerca de la estrategia más ventajosa.

ACTIVIDAD 4.— *Caída libre de un cuerpo.*

La ley de caída libre de los cuerpos viene dada por la fórmula $h(t)= \frac{1}{2} gt^2$, donde g es la constante de gravedad 9,8 m/s^2.

- Construye una tabla para los valores de t entre 0 y 6 segundos.
- Dibuja la gráfica.
- Expresa con tus propias palabras lo que significa esta fórmula.
- Expresa algebraicamente el tiempo en función de la altura.

Esta última actividad se refiere a un fenómeno físico. Se parte de la fórmula de la caída libre de un cuerpo a partir de la cual el alumno debe hacer la traducción a tablas, gráficas, expresión verbal y una nueva expresión algebraica donde se intercambian las variables (función inversa).

5. Introducción de las nuevas tecnologías

Los nuevos programas informáticos y las calculadoras gráficas diseñadas con fines educativos permiten un aprendizaje significativo del Análisis Matemático con el apoyo de la visualización, la intuición y las relaciones con otras ciencias. En cuanto a la visualización permiten investigar, por ejemplo, el comportamiento de gráficas de funciones, lo que sería tedioso utilizando sólo lápiz y papel. Respecto a la intuición permiten aventurar el comportamiento de una función, sus puntos notables, su derivabilidad, en fin, las propiedades que puede tener una función. Por último, la modelización de situaciones se ve favorecida con el uso de calculadoras gráficas ya que permite conjeturar el modelo adecuado al fenómeno que se pretende organizar y por ajustes sucesivos llegar al modelo final, lo cual sería difícil de realizar con lápiz y papel.

Estos instrumentos actualmente incorporan las herramientas necesarias que permiten el trabajo con diferentes tipos de representación y la traducción entre ellos; así, tenemos pantallas gráficas, de tablas o de edición de ecuaciones.

ACTIVIDAD 5.— Con la calculadora gráfica representa las funciones:

a) $y=x^2+q$ con q=1, q=3, q=-7. Completa la tabla siguiente:

	vértice	**eje**
x^2+1		
x^2+3		
x^2-7		

¿Qué conclusiones sacas?

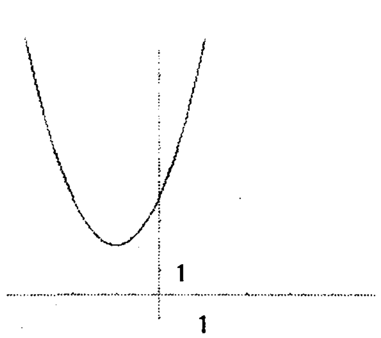
b) $y=(x+p)^2$ con p=2, p=3, p=-5. Completa la siguiente tabla:

	vértice	**eje**
$(x+2)^2$		
$(x+3)^2$		
$(x-5)^2$		

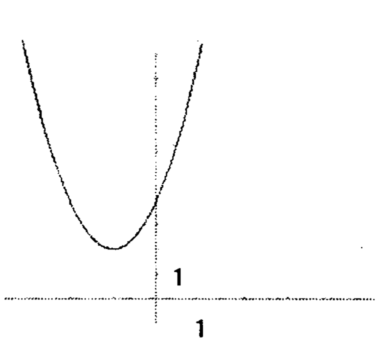
c) Si la parábola es $y=(x+p)^2+q$, ¿cuál es el vértice de la parábola? ¿Cuál es su eje de simetría?

d) Sugiere posibles ecuaciones para las siguientes parábolas y compruébalo con la calculadora gráfica:

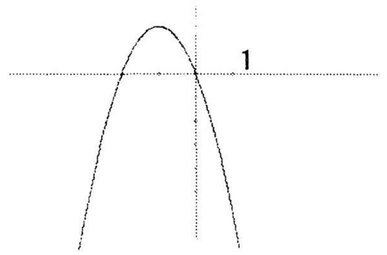
i)



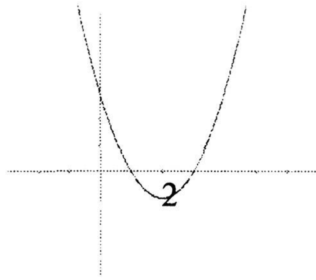
ii)



iii)



iv)



Una de las formas de expresión algebraica relativa a las parábolas es $y=(x+p)^2+q$. Esta forma permite calcular el eje y el vértice de dicha parábolas de una forma sencilla.

El trabajo con la calculadora gráfica permite visualizar diferentes parábolas al mismo tiempo y compararlas según los parámetros p y q de sus ecuaciones.

A partir de aquí podemos construir la tabla que relaciona dichos parámetros con las coordenadas del vértice de la parábola y la ecuación de su eje. A continuación se propone una tarea de generalización. Finalmente, se pide a los alumnos la tarea inversa, es decir, dada una representación gráfica ajustar la expresión algebraica adecuada comprobándolo con la calculadora gráfica.

Conclusión

La idea de representación se ha revelado como un instrumento útil para comprender los procesos de enseñanza-aprendizaje en matemáticas por cuanto la adquisición de un concepto depende en gran parte de la capacidad para reconocer, interpretar, utilizar y traducir las representaciones del mismo. El desarrollo histórico ha mostrado cómo se han utilizado diferentes sistemas de representación hasta llegar a la definición actual del concepto de función. Las representaciones han evolucionado paralelamente con el concepto.

Sin embargo, el concepto de función en su última formulación resulta excesivamente abstracto porque oculta la verdadera naturaleza de la función como relación entre variables, por lo que el trabajo con diferentes representaciones se ha mostrado en nuestra investigación como un modo eficaz para una mejor comprensión.

La incorporación de un modo inteligente de las nuevas tecnologías permite que la enseñanza se centre más en los conceptos que en los procedimientos, evitando cálculos engorrosos y posibilitando el trabajo con una gama amplia de funciones, lo cual sería difícil llevarlo a cabo con lápiz y papel.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AZCÁRATE, C. (1992): «Estudio de los esquemas conceptuales y de los perfiles de unos alumnos de 2.° de BUP, en relación con el concepto de pendiente de una recta». *Thales,* 24, 9-13.

— y DEULOFEU, J. (1990): *Funciones y Gráficas.* Madrid: Síntesis.

— y otros (1996). *Cálculo diferencial e integral.* Madrid: Síntesis.

BOYER, C. (1986). *Historia de las Matemáticas.* Madrid: Alianza Editorial.

CASTRO, E. y otros (1997): «Sistemas de Representación y aprendizaje de las estructuras numéricas». *Enseñanza de las ciencias,* 15 (3), 361-371.

CORNU, B. (1981): «Apprentissage de la notion de limite. Modèles spontanés et modèles propres». *Actes du Cinquième Colloque du Groupe Internationale PME.* Grenoble: Université de Grenoble, pp. 322-326.

— (1983): «Quelques obstacles a l'apprentisagge de la notion de limite». *Recherches en Didactiques des Mathematiques,* vol. 4, 236-268.

DREYFUS, T. y VINNER, S. (1989): «Images and definitions for the concept of function». *Journal for Research in Mathematics Education,* 20 (4) 356-366.

DUVAL, R. (1993): «Semiosis et noesis». En, *Lecturas en Didáctica de la Matemática: Escuela Francesa.* México: Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV.

EL BOUAZZOUI, H. (1988): *Conceptions des èleves et des professeurs a propos de la notion de continuité d'une fonction.* Theses du grade de Ph. D. Université Laval.

JANVIER, C. (1987): *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics.* Londres: LEA. Publ.

KAPUT, J. (1987): «Representacion Systems and Mathematics». En C. JANVIER (ed.): *Problems of Representation in the teaching and learning of mathematics.* New Jersey: Hillsdale, pp. 159-195.

— (1992): «Technology and mathematics education». En GROWS. (ed.): *Handbook of Research on the mathematics teaching and learning.* New York: MacMillan Publishing Company.

KIERAN, C. y FILLOY, E. (1989): «El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica». *Enseñanza de las Ciencias,* 7, (3), 229-240.

ORTON, A. (1983): «Student's understanding of integration». *Educational Studies in Mathematics,* 14, 1-18.

PEDERSEN, O. (1974): «Logistics and theory of function». *Archive International d'histoire des sciences,* 24, 94, 29-50.

ROBINET, J. (1983): «Une experience d'ingénierie didactique sur la notion de limite de fonction». *Recherches en Didáctique des Mathèmatiques,* vol. 4.3., 223-292.

RUIZ HIGUERAS, L. (1995): *Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función. Análisis epistemológico y didáctico.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

SIERPINSKA, A. (1985): «Obstacles épistémologiques relatifs a la notion de limite». *Recherches en Didactiques des Mathèmatiques,* vol. 6.1. 5-67.

— (1988): «Epistemological remarks on function». *Proceeding of Twelfth International Conference for the PME.* Vesprem, Hungary, pp. 568-575.

SKEMP, R. (1980): *Understanding in mathematics.* London: Palmer Press.

TALL, D. y VINNER, S. (1981): «Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity». *Educational Studies in Mathematics,* 12, 151-169.

YOUSCHKEVITCH, A. P. (1976): «The concept of function up to middle of the 19th century». *Archive for the history of exact sciences,* 16, 36-85.