

Universidad de Salamanca
Departamento de Didáctica de la Expresión Musical,
Plástica y Corporal
Máster en Música Hispana



**La teoría de la armonía de las esferas en el libro
quinto de *Harmonices Mundi*
de Johannes Kepler**

Autor: **Rubén García Martín**

Tutor: **Amaya S. García Pérez**

2009

...nada me retiene ya, y me complazco en permitirme el furor sagrado, y asaltar insolente a los mortales con la franca confesión de haber hurtado los cálices áureos de los egipcios, para construir con ellos el tabernáculo de mi Dios lejos de los confines de Egipto. Si me lo pasáis por alto, me alegraré; si os inflama la ira, lo soportaré. Aquí lanzo los dados, escribo el libro, que lo lean los presentes o los venideros, nada importa; espere a sus lectores cien años, si Dios mismo se ha prestado a esperar seis mil a quien lo contemplara.

KEPLER, Johannes. *Las armonías del mundo*, libro V, Proemio.

ÍNDICE

1 INTRODUCCIÓN	5
1.1 La armonía de las esferas: el caso de Kepler.....	5
1.2 Objetivos.....	7
1.3 Estado de la cuestión.....	7
1.3.1 La ciencia de la música y el problema de la consonancia en la revolución científica: el caso de Kepler.....	8
1.3.2 La armonía de las esferas en <i>Harmonices Mundi</i> de Kepler.....	10
1.3.3 Resumen.....	14
1.4 Metodología y fuentes.....	14
2 KEPLER: ASTRONOMÍA Y MÚSICA ANTES DE <i>HARMONICES MUNDI</i>	16
2.1 ¿Qué es la <i>armonía de las esferas</i> ?.....	16
2.2 El cosmos de Kepler.....	18
2.2.1 Johannes Kepler: datos biográficos y obra.....	18
2.2.2 Cómo entiende Kepler el cosmos.....	23
2.3 Teoría de Kepler sobre la consonancia musical.....	32
3 LIBRO V DE <i>HARMONICES MUNDI</i>: LA ARMONÍA DE LAS ESFERAS	41
3.1 La búsqueda de la consonancia astronómica.....	42
3.2 Los cantos duro y blando	53
3.3. Los modos.....	57
3.4. La armonía de los planetas.....	61
3.5. Analogías con las cuatro voces.....	66
4. CONCLUSIONES	69

5. APÉNDICE.....	72
6. BIBLIOGRAFÍA.....	73
7. ANEXO: TABLAS ORIGINALES DE <i>HARMONICES MUNDI</i>.....	75

1 INTRODUCCIÓN

1.1 La armonía de las esferas: el caso de Kepler

Los pitagóricos fueron los primeros en considerar que el movimiento de los astros alrededor de la Tierra debía atender a un tipo de proporción similar a la que se daba en la música. Pitágoras consideraba que las propiedades de los números gobernaban la naturaleza; había descubierto que la consonancia sonora tenía su causa en ciertas fracciones sencillas de números enteros, y esto le llevó a pensar que la armonía del cosmos también debía corresponder a esta proporción. La teoría de la música de las esferas -como se ha venido llamando después- es por tanto un producto del misticismo numérico pitagórico, y nace en un momento en que música y astronomía, relacionadas a través de las matemáticas, se ocupan del estudio de la parte expresable de un mismo hecho: la armonía del cosmos.

Esta teoría, adoptada por Platón y reinterpretada después por los filósofos cristianos se incorpora de lleno al pensamiento medieval europeo. También la doctrina astronómica ptolemaica, vigente durante el largo periodo que va desde el siglo II hasta la revolución científica, asume la existencia de la música de las esferas. El hecho de que el movimiento de los planetas produce consonancias armónicas será admitido por la astronomía medieval, y estará presente también en los tratados sobre música. Esta música, perceptible para muchos sólo a través del intelecto, y no de los oídos, se convierte en la manifestación en el ámbito astronómico del orden divino subyacente en todas las cosas.

Ya a caballo entre el siglo XVI y XVII Johannes Kepler, inspirado por las *Armónicas* de Ptolomeo, retoma esta tradición y la incorpora a la nueva astronomía que está naciendo en ese momento. Las nuevas observaciones de su tiempo apuntan a un Universo muy distinto del ptolemaico: el heliocentrismo copernicano sitúa al Sol en el centro del mundo, y las nuevas tablas astronómicas revelan que las órbitas planetarias se alejan mucho de la equidistancia anteriormente supuesta, trazando en su recorrido -como descubrirá el mismo Kepler- elipses. Ante este nuevo Universo, en el que parece reinar el desorden, los presupuestos ptolemaicos se desmoronan, y la supuesta armonía cosmológica se aleja cada vez más del entendimiento humano.

En ese momento Kepler, un hombre de profundas convicciones religiosas, entiende que su deber como cristiano es intentar revelar al mundo las causas formales del cosmos, el arquetipo divino de la Creación. Como tantos otros científicos y filósofos naturales, Kepler se propone, aglutinando diferentes aspectos de la naturaleza, extraer el orden que se oculta detrás de las manifestaciones diversas. Ese orden posee para Kepler una raíz matemática, pero es, además, la llave que permitirá al hombre desvelar el plan del Creador.

Esta búsqueda de las causas formales del cosmos, que fue constante durante toda su vida, se materializa finalmente en *Harmonices Mundi*. En el libro V del que sería uno de sus últimos tratados retoma la teoría de la música de las esferas –ningún astrónomo de su época la tenía ya en cuenta- y halla en ella las razones armónicas del aparentemente desordenado movimiento planetario. Descubre en las velocidades angulares de los astros las mismas proporciones que existen en la consonancia musical, tal como pensaban los antiguos, y encuentra además en el movimiento planetario una condición estructural semejante a la que opera en la que para él es la música más elevada de su tiempo, la polifonía renacentista; ello le hace pensar que, en la conjunción de astronomía y música, ha logrado revelar al mundo el secreto mismo de la Creación.

Kepler nos dice que esta música de las esferas no es audible, pues los planetas no producen sonido con su movimiento, sino que es una armonía que se percibe a través del intelecto, tal como apuntaba Ptolomeo. Solamente desde un punto del Universo, desde el Sol, se podrían percibir de un modo visual las consonancias del movimiento planetario, pues sólo desde allí se pueden comparar en su justa medida los arcos diarios aparentes del movimiento de los planetas, o, lo que es lo mismo, sus velocidades angulares, magnitud en la que se expresa este orden divino. La música de las esferas, es, pues, una música solamente comprendida por el raciocinio, fuera del alcance de los sentidos humanos.

Finalmente, como sucede tantas veces en ciencia, la astronomía posterior a Kepler demostró que las razones de que los movimientos planetarios sean los que son no se encontraban en una armonía de tipo musical, sino que éstos respondían a la Teoría de la Gravitación Universal expuesta por Newton. Sin embargo, el interés para nosotros de *Harmonices Mundi* no está en las verdades astronómicas que pueda contener, sino en la simbiosis única que se da en este tratado entre los aspectos musicales y estéticos del s. XVI con la formulación científica de la nueva astronomía del XVII.

1.2 Objetivos

Los objetivos del presente trabajo son:

1. Estudiar y comprobar de manera detallada la teoría astronómico-musical expuesta en el libro quinto de *Harmonices Mundi* de Johannes Kepler.
2. Averiguar si hay relaciones entre el planteamiento astronómico kepleriano y la práctica y teoría musicales que este autor conocía.
3. Averiguar si las teorías astronómicas tienen en Kepler una influencia sobre las teorías musicales, en el caso particular de la teoría de la consonancia.

1.3 Estado de la cuestión

Cualquier aproximación a la teoría astronómico-musical de Kepler no puede –ni debe– pasar por alto la reciente incorporación de aspectos musicales a la historia de la ciencia en el periodo de estudio que comúnmente es denominado como la revolución científica. Es ya normal admitir que algunas de las primeras leyes físico-matemáticas de los siglos XVI y XVII surgen de investigaciones de naturaleza experimentalista que tienen la música como objeto. Y es que los estudios de Benedetti, Vincenzo Galilei, o Mersenne sobre el sonido poseen una clara componente musical. Es por ello que los historiadores de la ciencia han ido incorporando en las últimas décadas todas estas cuestiones que habían sido obviadas hasta hace relativamente poco. Véase al respecto la siguiente cita de C. Calderón:

En la mayoría de científicos del s. XVII se produce esta confluencia de saberes y el intento de conciliar diversos intereses y mantenerlo en una misma esfera se hizo difícil para las historiografías de cuño positivista. Así, la música kepleriana, los experimentos musicales de Galileo, los paralelismos entre óptica y música newtonianos –al igual que la alquimia, cronologías, astrologías, etc.- quedaron de lado como distracciones, misticismos o accesos de misantropía. En este sentido, la moderna bibliografía de historia de la ciencia y la música en el s. XVII ha llevado la discusión a un nivel mucho más amplio y los debates ya no giran en torno a la legitimidad de estas reflexiones sino a la capacidad de ofrecernos un cuadro más vívido de este periodo histórico.¹

¹ CALDERÓN, Carlos. *Experiencia estética y formulación científica: el caso de Harmonice Mundi*. Inédito. Trabajo de investigación en el doctorado interuniversitario en historia de las ciencias UB-UAB-UPF, 2005. p. 21.

De este modo, la moderna historia de la ciencia se ve en la obligación de abordar todo el conjunto de problemas musicales que se investigan en muchos de los tratados de filosofía natural escritos durante la revolución científica. Las reflexiones sobre el discurso científico de la época, pues, ya no se pueden limitar a los aspectos físicos, astronómicos, etc. que supongan verdades para la ciencia actual –véase las leyes de Kepler- sino que se deben ampliar al contexto global en el que esas “verdades” astronómicas o físicas surgen, un contexto, como se verá en la teoría del libro V de *Harmonices Mundi*, en el que la ciencia de la música tiene una relevancia muy especial.

1.3.1 La ciencia de la música y el problema de la consonancia en la revolución científica: el caso de Kepler

En los siglos XVI y XVII la ciencia de la música se enfrenta a un problema fundamental: la consonancia. Son múltiples los teóricos y filósofos naturales que se aproximan a ella bajo la perspectiva de la nueva ciencia naciente. Como recopilación de todos estos planteamientos destaca el trabajo de H. F. Cohen, titulado *Quantifying Music*², donde muestra, y explica, en mayor o menor medida, los principales estudios en este campo durante este periodo.

Dentro de las diferentes categorías (experimentalista, mecanicista, etc.) en que este autor clasifica las aproximaciones científicas al problema de la consonancia, es la matemática, nos dice, dentro de la cual encontraremos a Kepler. Cohen habla del pensamiento fundamentalmente geométrico de Kepler, de cómo aborda el problema de la consonancia y de cómo se relacionan estos aspectos con la teoría del libro V de *Harmonices Mundi*. No obstante, y estamos de acuerdo, Calderón reprocha al libro de Cohen un enfoque exclusivamente científico en el que se obvia toda consideración estética en un problema, el de la consonancia, que surge necesariamente de una experiencia estética.³

Por otra parte, la aproximación que hace Cohen a la teoría del libro V de *Harmonices Mundi*, que tanto interesa para el presente trabajo, es en *Quantifying Music* muy superficial. No parece encontrarse entre sus objetivos el sumergirse en los detalles, cálculos ni el dar

² COHEN, H. Floris. *Quantifying Music: The Science of Music at the First Stage of the Scientific Revolution, 1580-1650*. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1984.

³ CALDERÓN, *op. cit.* p. 24.

explicaciones demasiado precisas sobre el funcionamiento de la armonía astronómica. Si encontramos, sin embargo, una explicación más detallada sobre el fenómeno de la consonancia en Kepler, hecho que no sorprende pues, como se ha dicho, es éste el campo de estudio principal del libro. Será este aspecto el que mayor utilidad dé al presente trabajo, en tanto que la aproximación a la armonía de las esferas kepleriana pasa inevitablemente por la comprensión de su teoría sobre la consonancia.

Además hay una cuestión fundamental en la obra de Cohen que será de gran utilidad para esta investigación, y es el papel que este autor otorga a la música dentro de los avances científicos de la ciencia del siglo XVII. Para él, la música es el principal motor en el nacimiento de las primeras leyes experimentalistas. El problema de la consonancia no es un problema más del que se ocupe la ciencia de los siglos XVI y XVII, que no sería poco, sino que será el problema del que se extraigan algunas de las primeras leyes físico-matemáticas, hecho que por fuerza ha de señalar un punto relevante en la historia de la ciencia. En cierto modo se puede llegar a decir que el nacimiento de la revolución científica está profundamente ligado a una serie de problemas originados en la ciencia de la música.

Por otro lado, en el capítulo cuarto del libro *El concepto de consonancia en la Teoría Musical*⁴, dedicado a las teorías de la consonancia en el renacimiento, A. García señala aspectos interesantes en la revolución científica y la ciencia del sonido. Las teorías de Benedetti, Galileo Galilei o Mersenne se presentan como las aproximaciones científicas más relevantes al estudio de la consonancia durante este periodo. Encontramos en este trabajo, y es éste el punto de mayor interés para nosotros, consideraciones sobre los aspectos estéticos que envuelven estas teorías, y aunque no se tratan con detalle los planteamientos de Kepler, sí se aborda una idea de especial relevancia para nuestro trabajo: el interés metafísico del problema de la consonancia, presente en los autores principales anteriores al nacimiento de la ciencia del sonido, se prolonga tras la aparición de ésta, siendo Kepler uno de sus exponentes principales.

⁴ GARCÍA, Amaya. *El concepto de consonancia en la Teoría Musical. De la Escuela Pitagórica a la Revolución Científica*. Salamanca, Universidad Pontificia de Salamanca, 2006.

Por su parte, J. James trata la teoría de la consonancia musical en el libro *The Music of the Spheres*⁵, explicando con cierto detalle el caso de Kepler y su teoría sobre la consonancia basada en los sólidos y polígonos regulares expuesta en *Mysterium Cosmographicum*, acompañada de reflexiones sobre el pitagorismo que según este autor empapa todo el pensamiento kepleriano.

1.3.2 La armonía de las esferas en *Harmonices Mundi* de Kepler

El caso de Kepler es protagonista habitual siempre que se habla de la armonía de las esferas, mas son pocos los casos en los que su teoría astronómico-musical se presenta como verdadero objeto de estudio. Encontrar referencias a esta teoría que sobrepasen la simple exposición de sus principales conclusiones se hace realmente difícil. Son comunes las reflexiones estéticas, filosóficas, o incluso teológicas sobre esta teoría, pero rara vez quienes escriben sobre ella se internan en los entresijos de los cálculos; con frecuencia, se limitan a enunciar el *canto*⁶ planetario, sin comprobar los procedimientos de los que éste se deriva.

En este sentido tenemos el caso de J. Godwin, que en *Armonía de las esferas*⁷, una recopilación de extractos de textos que van desde Platón o Ptolomeo a Kepler o Newton, recorre la historia de esta teoría a lo largo de sus principales autores. Para el caso que nos interesa, el de Kepler, contamos en este libro con un brevísimo comentario sobre los aspectos musicales presentes en el esquema teórico kepleriano de dos de sus principales tratados: *Mysterium Cosmographicum* y *Harmonices Mundi*.

Con escaso detalle aborda también J. James en el ya mencionado libro *The Music of the Spheres* esta cuestión. En el capítulo titulado *Kepler Pythagorizes* James se adentra en la teoría geométrica de la consonancia musical, como se ha señalado con anterioridad, explicando la búsqueda kepleriana en los sólidos y polígonos regulares, y estableciendo las vinculaciones pertinentes con la teoría astronómica principal de *Mysterium Cosmographicum*. Sin embargo, cuando su mirada se traslada a *Harmonices Mundi*, no encontramos más que

⁵ JAMES, Jamie. *The Music of the Spheres. Music, Science and The Natural Order of The Universe*. New York, Copernicus, 1995.

⁶ Ponemos en cursiva *canto* porque no nos referimos a un concepto musical, sino armónico en el sentido kepleriano: se trata de recorridos que hacen los planetas cuyos extremos se relacionan a través de ciertas proporciones armónicas. Se explicará más adelante con mayor detenimiento esta cuestión.

⁷ GODWIN, Joscelyn. *Armonía de las esferas*. Girona, Atalanta, 2009. Trad. al castellano de María Tabuyo y Agustín López.

descripciones de la teoría en la que no se analizan –ni mucho menos comprueban- las proposiciones de Kepler. Tanto es así que, cuando James describe lo que sucede en el capítulo sexto del libro V, donde Kepler, a través de la comparación de los arcos diarios aparentes desde el Sol⁸ establece los *cantos* planetarios, asigna a Mercurio el recorrido Do-Mi cuando Kepler le otorga La-Do. No sabemos si se trata de un error de James en la lectura motivado por una confusión de claves, pero el caso es que este mismo error se repite en la traducción⁹ del libro quinto que hace Arántegui Tamayo publicada en *A hombros de gigantes*¹⁰.

En *Number to Sound*¹¹, P. Gozza presenta una recopilación de doce artículos de algunos de los principales autores que han vinculado la musicología con la historia de la ciencia, entre ellos algunos de Cohen presentes en el ya mencionado *Quantifying Music*. Problemas de la consonancia y la ciencia de la música en general de los siglos XVI y XVII se presentan en este volumen bajo la doble perspectiva de historiadores de la ciencia y musicólogos. Entre estos artículos resultan de especial interés para nuestro trabajo los de M. Dickreiter y D. P. Walker.

Dickreiter nos habla en *The Structure of Harmony in Johannes Kepler's Harmonice Mundi (1619)*¹² sobre el concepto de armonía que se maneja en *Harmonices Mundi*. Este artículo es la traducción al inglés de *Die Klassifikation der Harmonie*, capítulo II A de su libro *Der Musiktheoretiker Johannes Kepler* (Bern und München, Francke Verlag, 1973). No hemos podido acceder al libro original, y es preciso señalar que su consulta hubiera sido de gran interés para el presente trabajo.

En cualquier caso, el artículo mencionado trata el concepto –o conceptos- de armonía a lo largo de los libros de *Harmonices*; para el caso que nos interesa, expresiones como *proporciones orbium coelestium*, *harmonia coelorum*, o *harmonia in coelorum motibus* dan cuenta del tipo de concepto armónico que se maneja en el libro V. Dickreiter, por último,

⁸ Véase en el presente trabajo **3.3 Los modos**.

⁹ KEPLER, Johannes. *Las armonías del mundo*. Trad. de J. L. Arántegui Tamayo, en HAWKING, Stephen. *A hombros de gigantes. Las grandes obras de la física y la astronomía*. Barcelona, Crítica, 2005. pp. 561-642.

¹⁰ HAWKING, Stephen. *A hombros de gigantes. Las grandes obras de la física y la astronomía*. Barcelona, Crítica, 2005. Trad. al castellano de David Jou, J. L. Arántegui Tamayo, Carlos Mínguez, Mercedes Tesal, Carlos Solís, Javier Sábada, Eloy Rada y Javier García.

¹¹ GOZZA, Paolo. (ed.) *Number to Sound: The Musical Way to the Scientific Revolution*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 2000.

¹² DICKREITER, Michael. “The Structure of Harmony in Johannes Kepler's *Harmonice Mundi* (1619)”, en GOZZA, Paolo (ed.). *Number to sound. The Musical Way to the Scientific Revolution*. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 2000. pp. 173-188.

pone en relación las diferentes acepciones de la armonía kepleriana en *Harmonices Mundi* con la tradición medieval boeciana y la triple división de la música por una parte, la posición filosófica de Kepler –fundamentalmente platónica- en cuanto al mundo sensible y su relación con los arquetipos formales que rigen su funcionamiento por otra y, por último, con los conceptos de música teórica y música práctica presentes en la teoría musical de la época.

Por su parte, D. P. Walker hace en *The Harmony of the Spheres*¹³, artículo originalmente publicado en *Studies in Musical Science in the Late Renaissance* (London, The Warburg Institute/University of London, an Leiden, 1978), un recorrido cronológico por la tradición de la *Harmonía de las esferas*, poniéndola en vinculación con aspectos como la numerología, o misticismo numérico, por una parte, y la ciencia de la música y la búsqueda del ideal matemático del Universo por otra. Será en relación a estos dos últimos conceptos donde podremos ubicar el pensamiento de Kepler sobre la consonancia y su teoría astronómico-musical.

También sobre el *Harmonices Mundi* trata el trabajo de investigación de C. Calderón *Experiencia estética y formulación científica*¹⁴, elaborado dentro del Doctorado interuniversitario en historia de las ciencias de UB-UAB-UPF. Se trata de uno de los trabajos más completos sobre aspectos musicales en el *Harmonices Mundi* que hemos podido encontrar. Calderón aborda el *Harmonices Mundi* evidenciando los intentos de Kepler por poner en relación la teoría musical, expuesta en el libro III, con la astronómica. Esto le lleva a pensar que música y astronomía son en Kepler la base de un único arquetipo geométrico: la armonía. Por otra parte, Calderón investiga el interés del astrónomo por la música de sus contemporáneos, o, más bien, la música del s. XVI, y establece relaciones entre la práctica musical de este periodo y las propuestas teóricas de Kepler. De este modo, dice Calderón, “una experiencia estética musical [...] permitió a Kepler configurar el marco de verdades –la geometría, la armonía y la polifonía contemporánea- sobre el que formuló y contrastó sus teorías”¹⁵.

¹³ WALKER, Daniel P. “The Harmony of the Spheres”, en GOZZA, Paolo (ed.). *Number to sound. The Musical Way to the Scientific Revolution*. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 2000. pp. 67-77.

¹⁴ CALDERÓN, *op. cit.*

¹⁵ *Ibidem*. p. 1.

¿*Harmonice Mundi* o *Harmonices Mundi*?

Observamos en la bibliografía consultada la falta de consenso ortográfico en el título original en latín de *Harmonices Mundi*. Tanto Cohen¹⁶, Walker¹⁷, Rioja y Ordóñez¹⁸ como Calderón¹⁹ escriben en sus textos *Harmonice Mundi*, mientras que Eloy Rada en *El secreto del Universo*²⁰ y Godwin en *Armonía de las esferas*²¹ optan por *Harmonices Mundi*. Dickreiter²² por su parte usa *Harmonice Mundi* en el título de su artículo mientras que en el cuerpo de texto escribe *Harmonices Mundi*. Esta dualidad no es reciente en absoluto: Godwin, en otro libro suyo titulado *Armonías del Cielo y de la Tierra*²³ aporta la siguiente cita bibliográfica: Kepler, Johannes, *Harmonice Mundi*, en *Gesammelte Werke*, Munich, Caspar, vol. VI, 1940, mientras que en una cita de Dikreiter podemos leer: Johannes Kepler, *Harmonices Mundi Libri V*, in Kepler, *Gesammelte Werke*, ed. Max Caspar et al. (Munich: C.H. Beck, 1938-). Desestimada cualquier posibilidad de que se refieran a tratados distintos, podríamos pensar ante tanta confusión que cierta preponderancia de la versión sin *s* estaría indicando la forma más adecuada para la escritura. Sin embargo observamos que en la edición primera de 1619 de Linz el título es *Harmonices Mundi*. Teniendo en cuenta que Max Caspar es el principal biógrafo de Kepler y que sus escritos aparecen en casi todas las bibliografías de los trabajos consultados, se podría pensar que estuviera en él el origen del error, dado que en 1938 escribe *Harmonices* y en 1940 *Harmonice*. Para averiguarlo habría que ir hasta las ediciones originales y las fuentes anteriores a Caspar y no lo hemos hecho. Tampoco podemos asegurar si esta variabilidad ortográfica es realmente un error o se debe a otras causas; no obstante, nosotros utilizaremos la ortografía de la edición original de 1619, es decir, *Harmonices Mundi*.

¹⁶ COHEN, *op. cit.*

¹⁷ WALKER, *op. cit.*

¹⁸ RIOJA, Ana. y ORDÓÑEZ, Javier. *Teorías del Universo. Volumen I: de los pitagóricos a Galileo*. Madrid, Síntesis, 1999.

¹⁹ CALDERÓN, *op. cit.*

²⁰ KEPLER, Johannes. *El secreto del Universo*. Madrid, Alianza, 1992. Trad., introducción y notas de E. Rada.

²¹ GODWIN, *La armonía...*

²² DICKREITER, *op. cit.*

²³ GODWIN, Joscelyn. *Armonías del Cielo y de la Tierra. La dimensión espiritual de la música desde la antigüedad hasta la vanguardia*. Barcelona, Paidós, 2000. Trad. al castellano de Ramadés Molina y César Mora.

1.3.3 Resumen

Por último, y como resumen del estado de la cuestión, se puede decir que si bien la teoría de la consonancia de Kepler ha sido tratada en la bibliografía de un modo más o menos exhaustivo, tanto lo expuesto en *Mysterium Cosmographicum* (Cohen y James) como lo dicho en el libro III de *Harmonices Mundi* (Calderón), la teoría astronómico-musical del libro V no ha sido suficientemente estudiada. En ninguno de los textos encontrados hemos hallado una descripción y comprobación, a partir de las tablas de datos de Kepler, de esta teoría. Abundan, eso sí, las reflexiones sobre las consecuencias de esta teoría, reflexiones que ponen en relación la concepción armónica kepleriana con los discursos científicos de los siglos XVI y XVII (Cohen) o con la tradición de la armonía de las esferas (Walker), reflexiones sobre el mapa conceptual armónico (Dickreiter) o que se centran más en aspectos estéticos y relacionan la teoría de Kepler con las prácticas musicales de la época (Calderón).

1.4 Metodología y fuentes

Como se ha apuntado, los objetivos del presente trabajo pasan necesariamente por la comprobación y análisis de la teoría astronómico-musical del libro V de *Harmonices Mundi* de Kepler. De los diez capítulos de los que consta el libro, hemos decidido centrarnos en los números 4, 5, 6, 7, y 8. La razón es que son esos en los que se expone esta teoría, tratando los restantes capítulos cuestiones astronómicas y geométricas que sobrepasan los objetivos del presente trabajo.

Nuestra fuente principal es la primera edición de 1619 de *Harmonices Mundi*²⁴. Para ello se ha consultado la digitalización del libro V, titulado *De Harmonia perfectissima motuum coelestium, ortuque ex iisdem Eccentricitatibus, Semidiametrorumque & Temporum periodicorum*, presente en <http://posner.library.cmu.edu/> así como la traducción al castellano desde el original latino de J. L. Arántegui Tamayo publicada en *A hombros de gigantes*²⁵.

²⁴ KEPLER, Johannes. *Harmonices Mundi*. Linz, 1619. en: http://posner.library.cmu.edu/Posner/books/pages.cgi?call=520_K38PI&layout=vol0/part0/copy0 (Consultado el 11-10-2009)

²⁵ KEPLER, Johannes. *Las armonías del mundo, libro V*. Trad. de J. L. Arántegui Tamayo, en HAWKING, Stephen. *A hombros de gigantes. Las grandes obras de la física y la astronomía*. Barcelona, Crítica, 2005. pp. 561-642.

Para la comprobación de los cálculos numéricos se han utilizado los valores que aparecen en el documento original de *Harmonices*. A este respecto, algunas de las tablas elaboradas en este trabajo tienen como base las tablas originales de Kepler. Cuando es así, se reproducen las originales en el apéndice. Sin embargo, para el cuerpo del texto se ha utilizado la traducción de Arántegui. En este sentido, todas las citas de *Harmonices Mundi* se hacen en castellano y proceden de dicha traducción.

Por otro lado, la exposición de la teoría de la consonancia en el capítulo 2 del presente trabajo, asunto de segundo orden pero necesario para nuestros objetivos, se hace a partir de varias fuentes: por una parte se usa el capítulo XII de *El secreto del Universo*²⁶, traducción al castellano de E. Rada de *Mysterium Cosmographicum*, motivados por el hecho de que esta traducción contiene los textos originales de la primera edición (Tubinga, 1596) más las notas que Kepler añadió a la segunda edición (Frankfurt, 1621) y de esta manera este documento da acceso a las dos teorías sobre la consonancia de Kepler: la primera, la de los sólidos regulares, la segunda, posterior a la publicación de *Harmonices Mundi* (1619), la de los polígonos regulares; por otra parte se usan para la explicación de la teoría de la consonancia las referencias que encontramos en Cohen, James o Calderón. No nos remitimos en ningún caso a la fuente original, en tanto que este tema está suficientemente tratado –a nuestro juicio- y su estudio pormenorizado no es objetivo de este trabajo.

La fuente principal para la obtención de datos biográficos de Kepler es la sección titulada *Johannes Kepler (1571-1630). Vida y obra*²⁷ del libro de Hawking *A hombros de Gigantes*.

Para aclarar cuestiones de terminología y otros asuntos relacionados, dentro de las citas textuales de Kepler incorporamos entre corchetes [] algunos comentarios nuestros. La razón de hacerlo así es que a veces encontramos entre paréntesis () notas del traductor, que en ningún caso queremos confundir con las nuestras. Por otra parte, la omisión de parte del texto en las citas se indica nuevamente con corchetes rellenos de puntos: [...].

²⁶ KEPLER, *El secreto del Universo*.

²⁷ HAWKING, *op. cit.* pp. 555-560.

2 KEPLER: ASTRONOMÍA Y MÚSICA ANTES DE *HARMONICES MUNDI*

2.1 ¿Qué es la *armonía de las esferas*?

No es fácil definir con precisión lo que es la armonía de las esferas, en tanto que es un término que se ha entendido de diferentes maneras a lo largo del tiempo, adquiriendo importantes matices según quiénes sean los que hablan de él. Sin embargo, en todos los casos encontraremos una idea común que podemos resumir de la siguiente manera: el movimiento de los astros en el firmamento obedece a las mismas proporciones armónicas que la música. Lo fundamental entonces es que se está hablando de un planteamiento metafísico en el que se conecta el fenómeno de la consonancia sonora con el movimiento de los cielos.

El término *armonía de las esferas* está originariamente ligado a una visión del cosmos en la que los astros están contenidos en esferas concéntricas que giran alrededor de la Tierra, siendo el movimiento de estas esferas el que o bien produce sonidos consonantes, o al menos se ajusta determinadas proporciones armónicas. En relación a esto, y aunque la *armonía de las esferas* se atribuye tradicionalmente a la escuela pitagórica, pues ya Aristóteles en *De Coelo* explica que algunos pensadores -refiriéndose a esta escuela- suponían que el movimiento de los cielos debería producir algún sonido y que éste guardaría la misma proporción que los sonidos musicales²⁸, A. García señala que esta atribución se trata de un anacronismo, en tanto que el planteamiento cosmológico asociado (en el que los astros se sitúan en esferas concéntricas) no aparece por vez primera hasta Eudoxo.²⁹ En cualquier caso, y a pesar de la falta de exactitud del término, nos referiremos de ahora en adelante con esta expresión de *armonía de las esferas* o *música de las esferas* a la idea de que ciertas combinaciones sonoras, que resultan consonantes, derivan de las mismas proporciones que aquellas con las que está construido el Universo y que, en un sentido inverso, el movimiento de los astros responde a esas consonancias musicales, independientemente de si los autores a los que nos referimos usan o no dicho término.

Platón, que desarrolló ampliamente esta idea, describe en el diálogo “Timeo” cómo el Demiurgo forjó el Alma del Mundo dividiendo la sustancia primordial de acuerdo a intervalos armónicos. En dicho diálogo intenta asociar proporciones matemáticas y sonidos musicales al

²⁸ ARISTÓTELES. *De Coelo*, libro II, capítulo 9. Trad. de Diego Reina en <http://www.mercaba.org/Filosofia>.

²⁹ GARCÍA, *El concepto de la consonancia...* p. 48.

movimiento celeste³⁰, mas en ningún momento nos hace notar que estos sonidos sean audibles. Multitud de autores han recogido estas ideas y, bajo diversos puntos de vista, han compartido una misma intuición: hay algo musical en el cosmos y algo cósmico en la música³¹. “El mito de Er”, en *La República* de Platón nuevamente, “El sueño de Escipión”, en *De Republica* de Cicerón, o “la visión de Timarco” en *Sobre el demon de Sócrates* de Plutarco contribuyen al afianzamiento del concepto en el pensamiento clásico³².

También Boecio, que se convertiría en el principal difusor de la filosofía griega en el mundo medieval, menciona la tradición pitagórico-platónica de la existencia de una música astronómica, una música que él llama *mundana*. El hecho de que los hombres no puedan escucharla se debe, en palabras de A. García, a que el alma humana se halla “encerrada en un cuerpo imperfecto incapaz de captar esta verdad absoluta”³³. Al igual que Platón, Boecio sostiene que los astros y la música están vinculados como imágenes audibles de una dimensión invisible de la existencia, haciéndose perceptibles a través de los sentidos, capaces de captar su materialización imperfecta. Asimismo, la división triple de la música hecha por Boecio, en *mundana*, *humana* e *instrumental*, se propagará por toda la Edad Media bajo diversas denominaciones, siendo la primera de ellas la mencionada *música de las esferas* o *armonía de las esferas*.

En el campo de la astronomía resulta de especial relevancia la figura de Ptolomeo, pues se trata de una de las mayores autoridades científicas desde el siglo II y durante toda la Edad Media. Su modelo astronómico, el ptolemaico, geocéntrico, tuvo vigencia hasta la revolución copernicana. Las *Armónicas* de Ptolomeo son un conjunto de libros en el tercero de los cuales se habla de la armonía cósmica, en lo que supone el acercamiento práctico anterior a Kepler más importante a la armonía de las esferas. Sin embargo, Ptolomeo no se detiene en los cálculos y no los justifica: simplemente expone una teoría que parece derivarse más de una concepción cosmológica previa que de la observación celeste, hecho que por otra parte no es inhabitual en la astronomía antigua.³⁴

³⁰ *Ibidem*, p. 68.

³¹ GODWIN, *Armonía de las esferas*. p. 15.

³² *Ibidem*, p. 15.

³³ GARCÍA, Amaya. *El número sonoro. La matemática en las teorías armónicas de Salinas y Zarlino*. Salamanca, Caja Duero, 2003. p. 28.

³⁴ PTOLOMEO, Claudio. *Armónicas*, libro III, cap. 10-16, pp. 166-177. Málaga, Miguel Gómez Ediciones, 1999. Trad. al castellano y notas de Demetrio Santos.

Por otro lado la armonía de las esferas sigue apareciendo en los principales tratadistas del renacimiento. Así, Zarlino mantiene la división boeciana, y sigue hablando de la música mundana³⁵. Asimismo, Salinas, en su división de la música, nos habla de una música captada sólo por el entendimiento, sosteniendo que ésta se percibe a través de las relaciones numéricas, y no en la combinación de sonidos, lo que la convierte para él en una música propia de filósofos y astrónomos.³⁶

De esta manera, tenemos que la tradición pitagórico-platónica de la música de las esferas está presente desde la Grecia Antigua y durante el periodo medieval. También permanece en la teoría musical al menos hasta el renacimiento. Igualmente son abundantes los casos posteriores en los que esta teoría está presente de uno u otro modo: además de Kepler, Newton, Rameau, o incluso autores del s. XX³⁷. Sin embargo, no se van a tratar aquí por ser posteriores al *Harmonices Mundi*, objeto de este trabajo.

2.2 El cosmos de Kepler

Resulta imprescindible para la comprensión del contenido de *Harmonices Mundi* conocer dos aspectos fundamentales en la obra Kepler. Por una parte, sus datos biográficos y obras principales, dentro de las cuales tienen aquí especialmente importancia las que presentan teorías de tipo musical, esto es, *Mysterium Cosmographicum* y *Harmonices Mundi*. Por otra, e inevitablemente ligada a la anterior, su concepción cosmológica, imprescindible para comprender la teoría astronómico-musical expuesta en el libro V de *Harmonices*. A lo largo de los siguientes apartados se abordarán estas cuestiones, de modo quizá excesivamente entrelazado, pero siempre orientadas al mencionado objetivo final.

2.2.1 Johannes Kepler: datos biográficos y obra

Johannes Kepler buscó durante toda su vida la precisión más absoluta. Esta búsqueda, a veces obsesiva, que le llevó incluso a medir la duración de su propia gestación con precisión de minutos, le condujo también a recopilar los datos astronómicos más precisos de su tiempo. De esta obstinación por la medida surgen entonces las más completas observaciones hechas

³⁵ GARCÍA, *El número sonoro*. pp. 29-30.

³⁶ *Ibidem*, p. 30.

³⁷ GODWIN, *Armonía de las esferas*. pp. 15-22.

hasta el momento, unas tablas astronómicas capaces de reflejar unos datos que conducían inevitablemente a la aceptación del sistema heliocéntrico que tanto defendió.³⁸

Si el clérigo Copérnico³⁹ se había propuesto como meta comprender el mundo y desvelar los arquetipos de la Creación, Kepler, un hombre también de grandes convicciones religiosas, había considerado que en su deber como cristiano debía descubrir las causas formales del Universo. Y a ello dedicó toda su vida de un modo incesante.⁴⁰ Toda ella estuvo caracterizada por la escasez económica, hecho que le obligó a ganarse la vida como astrólogo, elaborando horóscopos, calendarios y similares, consiguiendo cierta fama local. En el plano personal, tampoco le resultaron las cosas fáciles: varios de sus hijos murieron prematuramente, y su madre, a la que tuvo que defender ante los tribunales acusada de brujería, estuvo a punto de morir en la hoguera.⁴¹

Resulta llamativa la tormentosa relación entre Kepler y Tycho Brahe⁴². Este controvertido personaje, que poseía una gran fortuna, dio trabajo a Kepler para que le ayudara a interpretar sus observaciones sobre la órbita que más había confundido a los astrónomos durante años: la de Marte. Kepler interpretó que los datos de Tycho correspondían a una órbita elíptica, hecho que dio una gran credibilidad matemática al sistema copernicano.⁴³ Sin embargo, el celo con que Brahe guardaba sus tablas astronómicas impidió a Kepler poder estudiarlas hasta que el primero falleció. Sus tres leyes⁴⁴, el más famoso de sus logros, han perdurado hasta hoy, pues siguen siendo válidas y se enseñan en las clases de física; sin embargo, existen otros interesantísimos trabajos poco conocidos cuya validez astronómica resulta caduca, pero a los que no se puede negar una originalidad y amplitud de miras realmente deslumbrantes, como la teoría de los sólidos regulares de *Mysterium cosmographicum* o la armonía de las esferas en *Harmonices mundi*.

³⁸ HAWKING, *op. cit.* p. 555.

³⁹ Nicolás Copérnico (1473-1543), matemático y clérigo polaco considerado comúnmente como el creador de la astronomía moderna. Su modelo de universo –copernicano- heliocéntrico rompió con una tradición de siglos de aceptación del modelo ptolemaico.

⁴⁰ HAWKING, *op. cit.* p. 555.

⁴¹ *Ibidem*, p. 555.

⁴² Tycho Brahe (1546-1601), astrónomo danés que dedicó muchos años de su vida a catalogar y medir los cuerpos celestes. Sin embargo, sus aptitudes analíticas y matemáticas no eran suficientes para comprender el verdadero movimiento planetario que revelaban sus precisas observaciones.

⁴³ HAWKING, *op. cit.* p. 556.

⁴⁴ Véase en este trabajo **2.2.2. Cómo entiende Kepler el cosmos.**

Johannes Kepler nació el 27 de diciembre de 1571 en la ciudad de Weil der Stadt, en Württemberg, en la actual Alemania en el seno de una familia luterana. Vivió con su madre -pues su padre abandonó su familia muy temprano- en la taberna de su abuelo durante su infancia. Sus limitaciones físicas –era miope y tenía las manos deformes- y sus escasas posibilidades económicas hicieron del sacerdocio la única alternativa para el joven Kepler.⁴⁵

En el año 1577 Kepler observó “el gran cometa”, mostrado por su madre, Ketherine, que apareció ese año en el cielo, una experiencia que, como recordaría Kepler más tarde, marcó su vida para siempre. A la edad de 16 años inició su carrera sacerdotal, cuando se matriculó en la Universidad de Tubinga. Allí estudió teología, filosofía, aritmética, geometría, música y astronomía. En esa época se hizo un apasionado partidario de la aún no aceptada teoría heliocéntrica copernicana. Unos años después abandonaría sus estudios para trabajar como profesor de matemáticas en una escuela protestante de Graz (Austria).⁴⁶

Su primer gran trabajo, *Mysterium cosmographicum*, aparece en 1596. En este tratado astronómico expone una teoría geométrica para la explicación de las disposiciones de las órbitas planetarias⁴⁷. Kepler pasó toda su vida intentando obtener la demostración matemática que justificara esta teoría y explicar así las observaciones de que se disponían. Actualmente, la idea de los poliedros de Kepler parece insostenible, pero aunque la premisa de *Mysterium cosmographicum* era equivocada, la precisión de sus conclusiones resultaba sorprendente.⁴⁸

Poco después se trasladó a Praga, donde Tycho Brahe desarrollaba su labor investigadora. La tormentosa relación de ambos acaba pronto, cuando el danés muere y Kepler ocupa la plaza de Matemático Imperial. Una vez tenido acceso a los datos de Tycho, Kepler pudo concluir que las órbitas planetarias eran elipses y publicar así sus dos primeras leyes en *Astronomia nova* (1609).⁴⁹ Durante aquella época, Kepler también desarrolló un interesante trabajo en el ámbito de la óptica, como queda reflejado en la publicación de *Dioptrices* en 1611. Sin embargo, las revueltas religiosas hicieron al poco tiempo peligrar su

⁴⁵ HAWKING, *op. cit.*, p. 556.

⁴⁶ *Ibidem*, p. 556.

⁴⁷ Véase en este trabajo **2.2.2. Cómo entiende Kepler el cosmos.**

⁴⁸ HAWKING, *op. cit.* p. 557.

⁴⁹ *Ibidem*, p. 558.

estancia en Praga, y tuvo que regresar al Linz, donde en 1613 se casó con Susanna Reutinger.⁵⁰

Ya en Linz, empezó a trabajar en *Harmonices mundi*, que concluyó en 1618. En esta serie de cinco libros, extendió su teoría de la armonía en la música, la astrología (a la que nunca llegó a renunciar totalmente), la geometría y la astronomía. Además, en él se enuncia la tercera ley de los movimientos planetarios⁵¹. *Harmonices mundi* es una obra valiente, arriesgada, con una carga teológica muy notable, y que constituye la mayor empresa astronómica que Kepler abordó en su vida. El orgullo que siente su autor por el descubrimiento hecho queda patente cuando dice:

Ahora ya, luego que dieciocho meses atrás rayara la primera luz, luciera entera hace tres, y el pleno Sol de la contemplación hace poquísimos días, nada me retiene ya, y me complazco en permitirme el furor sagrado, y asaltar insolente a los mortales con la franca confesión de haber hurtado los cálices áureos de los egipcios, para construir con ellos el tabernáculo de mi Dios lejos de los confines de Egipto. Si me lo pasáis por alto, me alegraré; si os inflama la ira, lo soportaré. Aquí lanzo los dados, escribo el libro, que lo lean los presentes o los venideros, nada importa; espere a sus lectores cien años, si Dios mismo se ha prestado a esperar seis mil a quien lo contemplara.⁵²

Tras la guerra de los Treinta Años, iniciada en 1618, Kepler se vio obligado a abandonar Linz y a establecerse en Sagan, en Silesia. Allí escribe una novela de ficción, *Somnium seu Astronomia Lunari*, en la que se explica al protagonista cómo podría viajar a la Luna. El libro, más allá de las consideraciones literarias, comúnmente se interpreta como un documento de apoyo a la teoría copernicana.⁵³

A la edad de cincuenta y ocho años, en 1630, tuvo un acceso de fiebre y murió. Aunque su fama nunca alcanzó las cotas de otros astrónomos como Galileo, la obra de Kepler resultó extraordinariamente útil para los filósofos naturales posteriores, que, como Newton, encontraron en los detalles y precisión keplerianos las claves de la nueva ciencia astronómica. Johannes Kepler buscó con todas sus fuerzas el orden cósmico y la armonía estética, y todos sus descubrimientos estuvieron entrelazados con su visión de Dios. El epitafio que él mismo

⁵⁰ *Ibidem*, p. 559.

⁵¹ *Ibidem*, p. 559.

⁵² KEPLER, *Las armonías del mundo*. pp. 178-179.

⁵³ HAWKING, *op. cit.* p. 560.

redactó dice: “Medí los cielos; ahora mediré las sombras de la tierra. Mi alma era del cielo, pero la sombra de mi cuerpo reposa aquí”.⁵⁴



Figura 1. Retrato de Johannes Kepler en el Museum der Sternwarte Kremsmünster (Austria).

⁵⁴ *Ibidem*, p. 560. La cita es de Hawking.

2.2.2 Cómo entiende Kepler el cosmos

Kepler era un realista copernicano: creía firmemente en el carácter heliocéntrico del mundo, y además lo hacía muy lejos de una posición meramente instrumentalista –cuestión que no estaba en absoluto admitida por los astrónomos de su época⁵⁵- mientras que mantenía también unas fuertes convicciones religiosas. Su planteamiento del Universo y los enunciados de sus leyes cambiaron para siempre el devenir de la astronomía, pues sentaron las bases sobre las que Newton construyó su Teoría de la Gravitación Universal. Pero su contribución va todavía más allá de todo eso, pues sus consideraciones sobre la armonía del cosmos suponen una de las muestras más tardías –desde el punto de vista histórico- de la fusión milenaria entre música, astronomía, aritmética y geometría.

En este contexto resulta necesario dedicar una sección de este trabajo a explicar brevemente aspectos sobre la naturaleza del cosmos de Kepler; intentar comprender cómo era su universo y conocer qué reglas dictaban su comportamiento, para lograr asimilar en los capítulos posteriores la relación que tenían éstas con la música.

Breves consideraciones sobre el platonismo en Kepler y su concepción armónica

Platón había planteado en el *Timeo* el problema de cómo obtener conocimientos verdaderos acerca del mundo observable. Las cosas que se perciben cambian constantemente, y, sin embargo, se pretende obtener de ellas algún conocimiento permanente.⁵⁶ Se quiere de alguna manera hacer inteligible el ámbito de lo sensible. La respuesta platónica, que influyó profundamente en el pensamiento de Kepler, consiste en sostener que un orden inalterable, presente en los objetos siempre cambiantes, se esconde en el seno de lo sensible, convirtiéndolo en inteligible. De este modo, el orden del mundo es obra de un artífice divino que opera sobre la materia primigenia de acuerdo a un plan o a un modelo previamente determinado. El que las cosas se hagan inteligibles se debe a que poseen la condición de copia o imitación de la perfección del mundo; de este modo lo sensible se convierte en algo armonioso, proporcionado, simétrico, y por tanto inteligible.⁵⁷

⁵⁵El mismo Tycho Brahe, uno de los mayores astrónomos europeos del momento, como ya se ha dicho en este trabajo, era partidario de un Universo geocéntrico, que era el pensamiento mayoritario.

⁵⁶RIOJA y ORDÓÑEZ, *op. cit.* p. 188.

⁵⁷*Ibidem*, p. 188.

De acuerdo con lo anterior, la actitud observadora no es suficiente para obtener conocimiento de las cosas, sino que es necesario atender muy especialmente y descubrir el modelo original del que éstas se desprenden. Ello hace que la investigación se deba orientar al terreno de las causas formales. Preguntarse por dichas causas, por su modelo original, conduce a la verdadera comprensión de los hechos. De este modo, Kepler se interrogará por qué los planetas son seis, por qué guardan unas distancias determinadas, por qué son ocho las consonancias, etc.⁵⁸

Con esa búsqueda de simetrías, armonías u otras regularidades -orden, en definitiva- que se esconden en los fenómenos observados, lo que se pretende finalmente es dirigir el pensamiento hacia las relaciones invariantes que subyacen a los datos empíricos, relaciones que en el caso de Kepler se expresarán a través de las matemáticas, y especialmente a través de la geometría y la música. La interpretación del Universo supone, en un sentido platónico, dar cuenta del orden contenido bajo los aparentemente confusos movimientos planetarios, lo que tiene poco que ver con una mera interpretación instrumentalista, que tendría como objetivo único la predicción de los hechos futuros.⁵⁹

En el *Timeo* de Platón encontramos lo fundamental del pensamiento armónico de Kepler. Por una parte, la importancia de las proporciones armónicas musicales en la disposición del orden del mundo, explicado brevemente en **2.1 ¿Qué es la armonía de las esferas?** Por otra, el papel de la geometría: Platón sostiene en el *Timeo* que los cinco sólidos regulares (tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro), considerados por los matemáticos de la época como cuerpos perfectos, poseen un significado cosmológico, y mantiene que el mundo está construido sobre ellos. Esas proporciones, recomendables para el arte, se toman también de aquellas figuras planas, como el triángulo equilátero, a partir de las cuales están contruidos algunos de estos sólidos⁶⁰, como el tetraedro, el octaedro y el icosaedro. Esta idea es precisamente la misma que encontraremos en todas las teorías cosmológicas y de consonancia musical de la obra de Kepler, como se verá en las siguientes secciones de este trabajo.

⁵⁸ *Ibidem*, p. 188.

⁵⁹ *Ibidem*, p. 190.

⁶⁰ TATARKIEWICZ, Wladyslaw. *Historia de la estética. I. La estética antigua*. Madrid, Akal, 2000. Trad. al castellano de Danuta Kurzyca, Rosa Mª Mariño y Fernando García. pp. 123-124.

En este sentido, hay que tener en cuenta que el concepto de armonía de Kepler forma parte de la disciplina matemática. No se trata de un concepto meramente musical, aunque éste tenga también sus consecuencias en el plano artístico, como se verá más adelante. Kepler hablará de *harmonia coelorum*, *harmonia un motuum coelestium*, *proportiones orbium coelestium* o *harmonia celestes* en un sentido matemático.⁶¹ No se refiere por tanto a una armonía audible, sino una armonía perceptible a través del intelecto, vinculada a conceptos de orden geométrico y proporción.

Por otro lado, en el pensamiento kepleriano, de profundas convicciones religiosas, el artífice de esta armonía, u orden de las cosas, es Dios creador, en el que residen desde toda la eternidad los modelos o arquetipos; lo que eran las *Ideas* para Platón. De este modo, para él comprender los objetos sensibles que nos rodean exige ir más allá de lo que se observa y captar las razones estructurales que constituyen la huella terrenal del Creador.⁶²

Resumiendo, esta *Idea* del mundo tiene en la tradición pitagórico-platónica en que se sitúa Kepler características predominantemente geométricas y musicales.⁶³ Además, la razón de su descubrimiento supera con creces la simple utilidad, pues lo que se busca en ella es, ante todo, la *verdad*, una verdad que nos acerca a Dios. Su descubrimiento, por último, es la tarea que se encomienda a la ciencia, disciplina que tiene por objetivo -más aún en el caso de la Astronomía- colmar la aspiración humana a desentrañar los misterios del cosmos.

La teoría de los sólidos regulares y las órbitas planetarias

Kepler se propuso desde un primer momento probar con nuevos argumentos la verdad del sistema copernicano⁶⁴, sobre el que tenía profundas convicciones⁶⁵, tal como nos cuenta en el primer capítulo de *El secreto del Universo*. En este sentido, para él, la acción de desvelar el arquetipo que fundamentaba los movimientos planetarios significaba poner en conocimiento de la humanidad el secreto de la Creación.

⁶¹ DICKREITER, *op. cit.* p. 184.

⁶² RIOJA y ORDÓÑEZ, *op. cit.* p. 191.

⁶³ *Ibidem*, p. 191.

⁶⁴ Sin entrar en consideraciones más exhaustivas, resulta imprescindible recordar al lector que el sistema copernicano es heliocéntrico, es decir, sitúa al Sol en el centro del universo -con ciertos matices- y a los planetas alrededor de él girando en órbitas circulares. Es un sistema que confronta directamente con el defendido por Ptolomeo, enunciado en el s. II y que tuvo absoluta vigencia hasta el siglo XVI, caracterizado fundamentalmente por la defensa de la posición central de la Tierra en el Universo.

⁶⁵ KEPLER, J. *El secreto del universo*. pp. 75-84.

Algunos de los logros de Kepler en este sentido se han incorporado con un puesto relevante en la historia de la ciencia, como las famosas tres leyes sobre el movimiento de los planetas. Otros, sin embargo, han pasado casi desapercibidos, a pesar del mucho orgullo que sentía por ellos su autor. Son los casos de la teoría de los sólidos regulares y de la armonía del cosmos, que con frecuencia se mencionan de forma anecdótica en los tratados, y que no obstante fueron obras de gran envergadura, tal y como demuestra el hecho de que en la elaboración de *Mysterium cosmographicum* y *Harmonices Mundi*, que contienen ambas teorías, empleara su autor los frutos de los mayores esfuerzos de su vida.

En *El secreto del Universo* lo que hará Kepler será plantearse tres preguntas fundamentales: ¿por qué son seis⁶⁶ los planetas? ¿Por qué las distancias medias de éstos al Sol son las que son? ¿Por qué la proporción o disposición de los planetas es la que conocemos y no otra?⁶⁷

El origen de la principal teoría de *El secreto del Universo*, la de los sólidos regulares, es la siguiente, según James: el 9 de julio de 1595, mientras Kepler dibujaba un triángulo inscrito en un círculo, y circunscrito a su vez a otro círculo concéntrico de menor radio, se percató de que la proporción entre ambos círculos coincidía con la que existía entre las órbitas de Saturno y Júpiter⁶⁸:

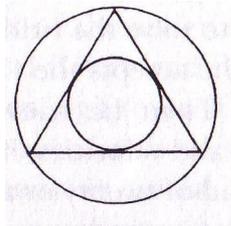


Figura 2. Triángulo equilátero inscrito y circunscrito a dos circunferencias concéntricas. Figura tomada de JAMES, *op. cit.* p. 144.

La anécdota, contada por el propio Kepler en el prefacio de *El secreto del Universo*, dice así:

⁶⁶ Los planetas conocidos por la astronomía de aquel momento son Mercurio, Venus, La Tierra, Marte, Júpiter y Saturno, es decir, los seis primeros del Sistema Solar.

⁶⁷ RIOJA y ORDÓÑEZ, *op. cit.*, p. 195.

⁶⁸ JAMES, *op. cit.*, p. 144.

Así pues, el día 9/19 de julio de 1595 [...] inscribí muchos triángulos [...] en el mismo círculo, de modo que el fin de uno era el comienzo de otro. [...] La proporción de un círculo con otro parecía a primera vista casi igual a la que hay entre Júpiter y Saturno⁶⁹

A partir de este descubrimiento, intentó comparar las órbitas de los demás planetas con otros polígonos regulares⁷⁰, sin encontrar respuesta satisfactoria. Sin embargo, esto le sugirió que quizá serían los sólidos y no los polígonos regulares los que determinaban las proporciones de las órbitas.⁷¹ Influido seguramente por el carácter cosmológico que pensadores antiguos como Platón le habían dado a los cinco sólidos, e impulsado por el hecho de que su número sea cinco y seis los planetas, Kepler concluyó que las órbitas debían encajar de alguna manera en los poliedros.

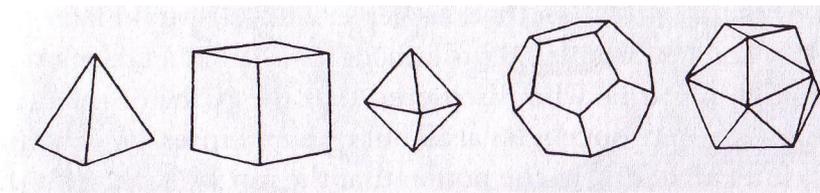


Figura 3. Representación de los cinco sólidos regulares: tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro. Figura tomada de JAMES, *op. cit.* p. 145.

Teniendo en cuenta las excentricidades de las órbitas, asignó a cada planeta tres circunferencias: una interior, cuyo radio es la distancia al Sol en el perihelio⁷², la mínima de la órbita, una circunferencia media, que representaría la distancia media del planeta al Sol, y una exterior, cuyo radio sería la distancia máxima al sol, dada por el afelio⁷³ de la órbita. A cada una de esas circunferencias correspondería una esfera de igual radio, cuyas circunscripciones e inscripciones en los poliedros regulares harían encajar los tamaños de las diferentes órbitas. Tras diversos intentos, logró concluir lo siguiente: a continuación de un Sol inmóvil en el centro, se sitúa la órbita de Mercurio, cuya esfera exterior (en el afelio) queda inscrita en un

⁶⁹ KEPLER, *El secreto del universo*. p. 68.

⁷⁰ Intentó inscribir en las órbitas –circulares todavía– diferentes polígonos regulares (triángulos, cuadrados, pentágonos...) intentando comprobar si las circunferencias inscritas a éstos podían albergar algún parentesco con las órbitas de otros planetas.

⁷¹ KEPLER, *El secreto del universo*. pp. 66-69.

⁷² El perihelio es el punto de la órbita en la que el planeta se encuentra más cerca del Sol.

⁷³ El afelio es el punto de la órbita en la que el planeta se encuentra más lejos del Sol.

octaedro⁷⁴; a su vez la esfera interior de Venus (la esfera en el perihelio de Venus) circunscribe a dicho octaedro, mientras que la esfera exterior de Venus (dada por el afelio) se inscribe en un icosaedro⁷⁵; El icosaedro, a su vez, está inscrito en la esfera interior (en el perihelio) de la Tierra, cuya esfera exterior (afelio) se inscribe en un dodecaedro⁷⁶; la esfera interior de Marte (dada por su perihelio) circunscribe al dodecaedro, mientras que la esfera exterior se inscribe en un tetraedro⁷⁷; circunscrita al tetraedro está la esfera interior de Júpiter, cuya esfera exterior se inscribe en un cubo, al que, por último, se circunscribe la esfera interior de Saturno, último de los planetas.

La comprobación de esta hipótesis requería datos sobre las distancias interplanetarias muy precisos, y los que Kepler había tomado de Copérnico no encajaban a la perfección con la hipótesis.⁷⁸ Lejos de ceder en su intento, Kepler reelaboró los cálculos de los que se derivaban las distancias entre los planetas considerando que el centro del Universo no debía ser el *Sol medio*⁷⁹ sino el *Sol real*. Con estos nuevos resultados, las distancias interplanetarias se acercaban a lo descrito por su teoría de los poliedros regulares, lo que sin duda le empujó a seguir trabajando en ella. Sin embargo, existía un pequeño margen que impedía que la teoría coincidiera con los resultados. No obstante, Kepler se dio cuenta de que los datos que manejaba contenían errores, y que debido a esa imprecisión no podía comprobar con exactitud la veracidad de su teoría.⁸⁰

Por último, resulta necesario añadir que esta teoría de los sólidos regulares tuvo una importante influencia en la explicación de Kepler del fenómeno de la consonancia, como se verá en **2.3 Teoría de Kepler sobre la consonancia musical**, de ahí que se le dé más importancia en el presente trabajo que a otros logros del mismo autor en el campo de la astronomía.

⁷⁴ Poliedro regular cuyas caras son ocho triángulos equiláteros.

⁷⁵ Un icosaedro es un poliedro regular cuyas caras son veinte triángulos equiláteros.

⁷⁶ Poliedro regular cuyas caras son doce pentágonos regulares.

⁷⁷ El tetraedro está formado por cuatro triángulos equiláteros.

⁷⁸ RIOJA y ORDÓÑEZ, *op. cit.* p. 198.

⁷⁹ El Sol medio es un punto imaginario situado en el centro de la órbita terrestre. Los copernicanos consideraban que era el centro del Mundo, de ahí que quepa hablar de ciertos matices en su heliocentrismo. Sin embargo Kepler asignó ese lugar al Sol real, que no ocupa exactamente ese centro de la órbita, sino uno de los focos de la elipse que ésta traza.

⁸⁰ RIOJA y ORDÓÑEZ, *op. cit.* p. 199.

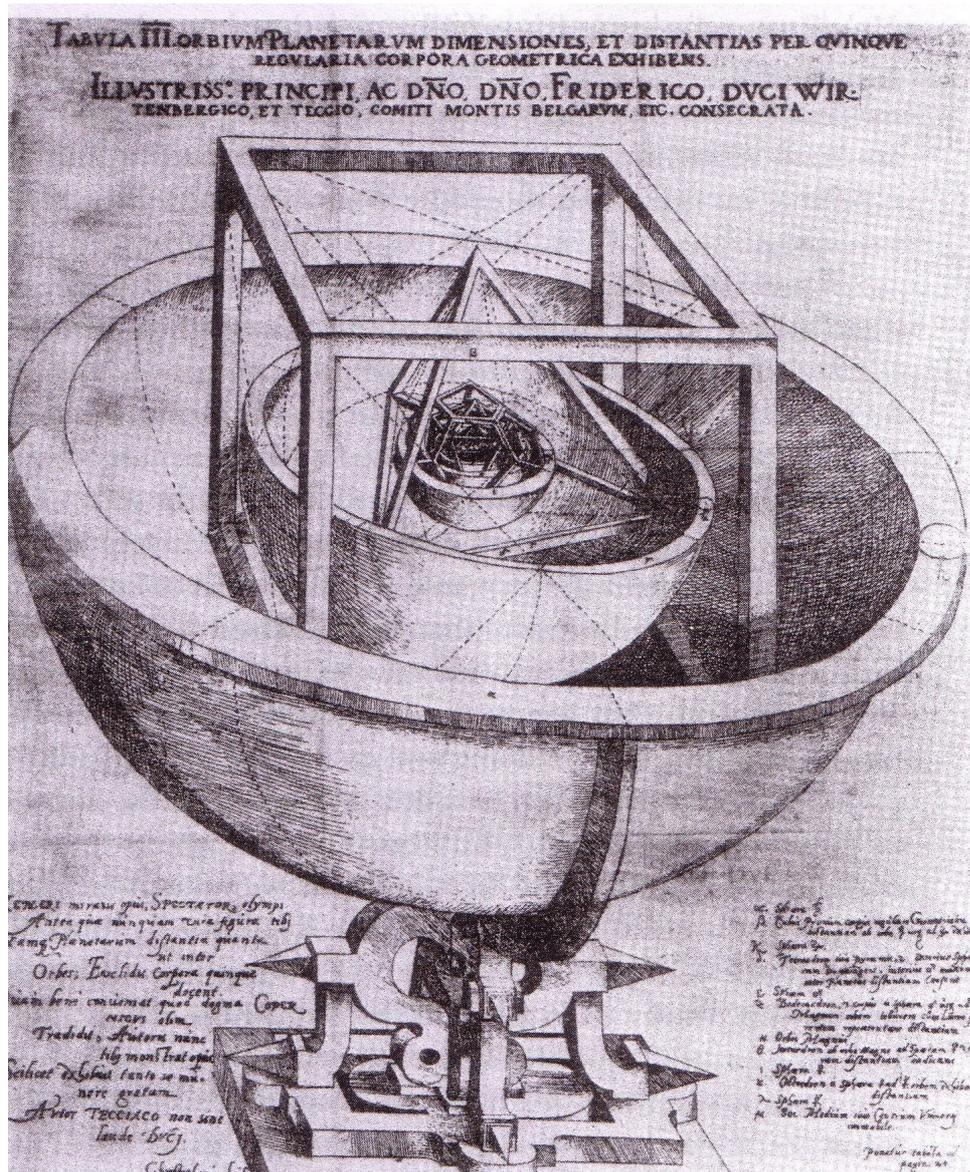


Figura 4. Lámina de la primera edición (1596) de *Mysterium Cosmographicum*. Se trata del diseño de una maqueta en la que se representan las esferas planetarias inscritas y circunscritas a los cinco sólidos regulares.

Las leyes sobre el movimiento de los planetas

Cuando Kepler logra por fin acceso total a los datos de Tycho Brahe consigue estudiar con profundidad el comportamiento de la órbita terrestre. Dado que la observación de los astros se hace desde la Tierra, el conocimiento de su movimiento era de suma importancia para la comprensión del del resto de los planetas⁸¹. Una vez estudiado con precisión el resto

⁸¹ RIOJA y ORDÓÑEZ, *op. cit.* p. 203.

de órbitas, concluye que *las áreas barridas en tiempos iguales por el radio vector*⁸² *que une un planeta con el Sol son iguales*. Es su segunda ley (la primera, enunciada después, dice que las órbitas de los planetas son elipses y que el Sol ocupa uno de sus focos⁸³). Ello tiene consecuencias directas sobre el movimiento de los planetas: éstos no se mueven igual a lo largo de su recorrido, sino que lo hacen más rápidamente en el perihelio y más lentamente en el afelio, lo que influirá en el cálculo de la armonía de las esferas, como se verá más adelante. Además, se observa que los planetas más cercanos al Sol se mueven con una velocidad angular mayor, lo que lleva a Kepler a atribuir al Sol la causa del movimiento planetario. Todo lo anterior queda expuesto en *Astronomia nova*.⁸⁴

Las armonías del cosmos

Tras todos los descubrimientos enunciados con anterioridad, Kepler se propone encontrar una causa final que explique el movimiento de los planetas en *Harmonices mundi*, y será precisamente a través de la música –en el sentido armónico– la manera en que lo logre. En este sentido, la lectura de las *Armonías* de Ptolomeo jugará un papel importantísimo en esta obra, tal y como desvela el propio autor:

...las lecturas de Ptolomeo, que hízome [sic] llegar manuscritas Johann Georg Herward, canciller de la Baviera [...] en las que vine a dar, con admiración suma y más allá de toda expectativa, con su libro tercero, casi por entero consagrado a idéntica contemplación de las armonías celestes, mil quinientos años antes. Verdad es que mucho faltaba por crecer a la Astronomía hasta hoy; y puede que a Ptolomeo, intentando el negocio sin fortuna, aún se le ofreciera otra desesperación, como alguien que más pareciera haber contado [...] un dulce sueño de pitagóricos antes que ayudar a la filosofía.⁸⁵

⁸² El radio vector es una línea imaginaria móvil que une el Sol con el planeta. El área barrida en un intervalo de tiempo es la comprendida entre el radio vector inicial, el radio vector final y el arco correspondiente de la órbita.

⁸³ Los puntos de una elipse cumplen la condición de que la suma sus distancias a dos puntos fijos denominados focos es siempre la misma. Según la segunda ley de Kepler el Sol se sitúa en uno de esos focos, y no en el centro de la elipse, que es el punto medio de los dos focos. Cuando los focos son muy cercanos se dice que la elipse es poco excéntrica, hasta el punto de que si los dos focos ocupan el mismo punto la elipse se transforma en una circunferencia. Esto ocurre con algunas órbitas, como la de la Tierra, cuya excentricidad es tan pequeña que la imprecisión en la medida de los datos podría hacer pensar que se trata de una circunferencia, como así se pensaba antes de que Kepler publicara *Astronomia nova*.

⁸⁴ RIOJA y ORDÓÑEZ, *op. cit.* p. 205.

⁸⁵ KEPLER, *Las armonías del mundo, libro V.* p. 562.

Encontramos en el anterior texto una idea fundamental: Kepler reconoce que la armonía de Ptolomeo, como ya se ha apuntado en el capítulo 2.1. **¿Qué es la armonía de las esferas?** del presente trabajo, no satisface en modo alguno el rigor matemático que él se impone en *Harmonices*.

En *Harmonices Mundi* encontramos las mismas inquietudes intelectuales que inspiraron *El secreto del Universo*: mas si en este tratado Kepler se interrogaba por el secreto del mundo, el tamaño de las órbitas y sus movimientos periódicos (a lo que respondió con la teoría de los sólidos regulares), en *Harmonices*, sin embargo, intentará dar respuesta a los hallazgos encontrados en *Astronomia nova*: las órbitas son excéntricas (primera ley) y la velocidad angular es variable (segunda ley). Se busca la causa formal, la razón arquetípica por la que el mundo no es tan inmutable como las figuras de la geometría. La teoría de los poliedros proporciona algo así como el criterio de distribución general de los cuerpos, pero no la explicación de su variabilidad, por lo que Kepler se empeña en buscar alguna fórmula que ligue los tiempos de revolución (periodos) de los planetas con el tamaño de sus órbitas, encontrando respuesta en su tercera ley, según la cual *los cuadrados de los periodos orbitales de los planetas son proporcionales a los cubos de sus distancias medias al Sol*.⁸⁶

Por otra parte, a la pregunta de por qué cada planeta gira a distinta velocidad Kepler encuentra repuesta en la armonía. A través del estudio de los arcos diarios aparentes desde el Sol⁸⁷ en diferentes momentos del recorrido orbital, Kepler descubre la armonía que subyace en las velocidades angulares de los planetas⁸⁸, y por tanto en las características de su giro. La particularidad es que ésa es precisamente la misma clase de armonía que estructura la música de su tiempo. Todo esto se explicará más adelante en **3 LIBRO V DE HARMONICES MUNDI: LA ARMONÍA DE LAS ESFERAS**. De este modo, como si de una vuelta a Pitágoras se tratara, el marco general del estudio del comportamiento de los astros se convierte de nuevo en la música.

Kepler considera finalmente que en este mundo cambiante de los planetas, la armonía no puede ser exclusivamente geométrica, dado que ésta tiene un carácter fundamentalmente

⁸⁶ RIOJA y ORDÓÑEZ, *op. cit.* pp. 221-224.

⁸⁷ El arco diario aparente desde el Sol es el ángulo que gira respecto al Sol un planeta en el transcurso de un día. Este ángulo viene dado por el avance del radio vector del planeta (definido en 2.2.2.3) en el periodo de un día.

⁸⁸ La velocidad angular es la velocidad de giro del planeta, o el ángulo barrido por unidad de tiempo. En relación a esto, el arco diario aparente desde el Sol equivale a la velocidad angular media de un planeta en el periodo de un día.

estático; de ahí que los planetas en la teoría de Kepler recorran “escalas” con su movimiento, generando así la música celestial.

Conviene recordar, por último, que para Kepler la música de los planetas no es audible, esto es, no es un sonido real. Él mismo insiste en que el tipo de armonía que se da en los cielos no es estrictamente sonora, pues atañe a magnitudes que se perciben con el raciocinio, y acaso se pueda percibir con los ojos en tanto que es una armonía dada por velocidades angulares, pero no con los oídos:

Ahora bien, sonidos no existen en los cielos, ni es tan turbulento el movimiento que suscite estruendo el roce en el hálito etéreo. Queda la luz.⁸⁹

Como se ha dicho, esta clase de armonía posee el mismo carácter que la armonía de la música, y es en este punto donde confluyen toda la serie de paralelismos entre una y otra que se explicarán más adelante, de tal manera que bien se podría decir que ambas, armonía de los cielos y armonía musical, fueran diferentes expresiones de un mismo arquetipo, o de una misma idea formal, concebida -en el pensamiento de Kepler- en la mente del Creador.

2.3 Teoría de Kepler sobre la consonancia musical

En los siglos XVI y XVII conviven varios tipos de teorías sobre la consonancia. Por una parte las teorías de tipo aritmético, como la del *senario* de Zarlino⁹⁰. En ellas, el pensamiento teórico está vinculado a la numerología y a la especulación, en tanto que no se extraen de bases físicas, sino de lo que Walker llama misticismo numérico⁹¹. Además, este modelo numérico de Zarlino (*el senario*) presentaba algunas irregularidades⁹². Por otra parte, comienzan a aparecer teorías que, basándose en el hecho físico del sonido, explican la

⁸⁹ KEPLER, *Las armonías del mundo, libro V*. p. 583.

⁹⁰ Zarlino expone en *Institutioni Harmoniche* (1558) una teoría para explicar el fenómeno de la consonancia musical: el *senario*. Zarlino añade a las consonancias pitagóricas (quinta, cuarta y octava) los intervalos de sexta y tercera, que son ya en el s. XVI utilizados en la polifonía como consonancias (GOZZA, *Number to sound*, Introduction, p. 6). La teoría, expuesta aquí de forma simplificada, considera al número 6 como número armónico, número generador de la consonancia. De esta manera, las ratios consonantes se justifican porque se forman a partir de los 6 primeros números naturales: 1/2, 2/3, 3/4, 5/6, etc... excepto un intervalo, el de sexta menor (5/8) (COHEN, *op. cit.* pp. 3-10).

⁹¹ WALKER, *op. cit.* p. 67.

⁹² De alguna manera, la teoría de Zarlino no es más que una ampliación de la explicación de la consonancia a partir de las relaciones superparticulares ($n/(n+1)$) y, en todo caso, es una teoría de tipo aritmético, en contraste con la teoría kepleriana, de tipo geométrico.

consonancia a partir de la coincidencia de pulsos: será el caso de Descartes, Galileo Galilei y Huygens.⁹³

Kepler sin embargo se sitúa en una categoría totalmente diferente: en contraste con las teorías de tipo aritmético, él trata de buscar una alternativa geométrica al problema de la consonancia. Para Walker se trata de un caso único, pues no se conocerá ninguna teoría similar hasta mediados del siglo XVIII, cuando Guiseppe Tartini proponga una nueva explicación geométrica a este problema de manera independiente.⁹⁴

La teoría de la consonancia de Kepler atraviesa diversas etapas, como se verá a continuación. El primer intento para explicar el fenómeno, el que se nos presenta en la edición primera de *El secreto del Universo* de 1596, sienta sus bases en la geometría tridimensional. Influido por su propia teoría que explicaba los tamaños de las órbitas planetarias a partir de los cinco sólidos regulares, intentó, tal y como nos cuenta en el capítulo XII del citado tratado aplicarla al estudio de la consonancia. Sin embargo, motivado por los importantes desajustes de esta traslación, en *Harmonices Mundi* (1619) y en la segunda edición de *El secreto* (1621) Kepler dirige su mirada a los polígonos regulares, es decir, a las figuras planas, encontrando en ellas finalmente la causa de la consonancia. Así, las ratios numéricas generadoras de la consonancia residen en la partición de la circunferencia que hacen los polígonos regulares inscritos en ella. De este modo la consonancia ya no proviene de un número escogido de un modo casi arbitrario, como sucedía en Zarlino y otras teorías numérico-místicas, sino de las proporciones previamente existentes en ciertas figuras geométricas. Este tipo de teoría encaja mejor con el modo de entender el Universo que tenía Kepler, en el que los aspectos geométricos primaban sobre los aritméticos.⁹⁵

Kepler aborda el problema partiendo de cero: él consideraba que los pitagóricos habían prestado poca atención al juicio auditivo para discriminar qué intervalos eran consonantes⁹⁶ y haber obviado de este modo la condición consonante de terceras y sextas. Por este motivo él mismo experimentó con el monocordio para reconocer las consonancias. Y sus

⁹³ WALKER, *op. cit.* pp. 76-77.

⁹⁴ *Ibidem*, p. 77.

⁹⁵ COHEN, *op. cit.* p. 17.

⁹⁶ *Ibidem*. p. 15.

investigaciones verificaron los mismos intervalos que Zarlino había considerado⁹⁷: unísono (1/1), octava (1/2), quinta (2/3), cuarta (3/4), tercera mayor (4/5) y menor (5/6) y sextas mayor (3/5) y menor (5/8).

Kepler consideraba obvio que los números no podían explicar la distinción entre disonancia y consonancia. Para él, el estatus ontológico de la aritmética estaba subordinado al de la geometría, y en esa ordenación la aritmética no era más que la parte expresable de la geometría⁹⁸. De ahí que considerara que la discreción de los números no servía para explicar el mundo, cuya naturaleza era claramente continua. Es entendible, por tanto, que buscara también en la geometría la explicación del fenómeno musical⁹⁹.

Según H. F. Cohen, para Kepler la música ocuparía un lugar diferente dentro del *cuadrivium* al que tenía en la tradición medieval. Este autor propone el siguiente esquema que lo explica¹⁰⁰:

ESQUEMA TRADICIONAL:

Cantidades discretas	Cantidades continuas
<i>Aritmética</i> <i>Música</i>	<i>Geometría</i> <i>Astronomía</i>

ESQUEMA DE KEPLER:

Cantidades discretas	Cantidades continuas
<i>Aritmética</i>	<i>Música</i> <i>Geometría</i> <i>Astronomía</i>

En el capítulo XII de *El secreto del Universo* Kepler explica el fenómeno de la consonancia a partir de la geometría: primero a través de los cinco sólidos regulares, al igual que lo había hecho con las órbitas planetarias en esa misma obra, y después a través de las figuras planas, como ya se ha dicho. En las siguientes líneas se expondrá cómo lo hace.

⁹⁷ Cohen considera que Kepler pudo tener acceso a la teoría de Zarlino, aunque quizá por medios indirectos (COHEN, *op. cit.* p. 16).

⁹⁸ COHEN, *op. cit.* p. 17.

⁹⁹ La altura de un sonido es una magnitud continua, del mismo modo que lo es la frecuencia de vibración o la longitud de la cuerda o tubo sonoro.

¹⁰⁰ COHEN, *op. cit.* p. 18.

Por una parte, dice cómo obtener los sonidos concordantes y que es el oído el que dicta cuáles son esos sonidos:

Supongamos una cuerda cuyo sonido es la nota \hat{O} . En tal caso, el número de notas desde \hat{O} a la octava concordante con \hat{O} es el número de veces, y no más, que puedes dividir la cuerda en fracciones racionales de modo que las partes divisas de la cuerda sean consonantes entre sí y con la cuerda entera. Además es el oído el que nos dice cuántas son tales notas.¹⁰¹

Esto revela un modo de pensar en parte experimentalista, en tanto que la consonancia no se detecta por la combinación armónica de longitudes, sino por la experimentación. En este sentido la extracción del modelo matemático o el arquetipo por el que se rige la consonancia es algo que se debe deducir con posterioridad. Sin embargo en este planteamiento aparentemente objetivo subyace una razón estética: ciertos intervalos consueñan, mientras que otros disueñan, es decir, resultan agradables o desagradables al oído. Además, ese criterio está condicionado por la práctica musical del momento. Como señala Calderón, Kepler basa su esquema armónico-astronómico en la armonía de finales del s. XVI.¹⁰²

A la hora de clasificar las consonancias halladas, Kepler asimila las dos clases de terceras y de sextas como pertenecientes a un mismo grupo, debido a su gran afinidad:

La primera y segunda consonancias¹⁰³ tienen alguna afinidad, lo mismo que la quinta y la sexta¹⁰⁴. Pues, aunque son todas imperfectas, sin embargo se concentran de dos en dos, una dura y otra suave, de modo que en cierta manera equivalen a consonancias perfectas. Y tampoco son grandes sus diferencias. Pues $1/6$ y $1/5$ ¹⁰⁵ son entre sí como $5/30$ y $6/30$ que distan entre sí $1/30$. De igual modo $3/8$ y $2/5$ son entre sí¹⁰⁶ como $15/40$ y $16/40$.¹⁰⁷

Una vez hecha esta clasificación, los tipos de consonancias se reducen a cinco: tres consonancias perfectas (octava, quinta y cuarta) y dos imperfectas (terceras y sextas). Ello

¹⁰¹ KEPLER, *El secreto del Universo*, cap. XII, p. 132.

¹⁰² CALDERÓN, *op. cit.* p. 171.

¹⁰³ Tercera menor ($5/6$) y tercera mayor ($4/5$). Kepler ordena las consonancias de menor a mayor, eliminando el unísono. De este modo la primera consonancia es la tercera menor, después vendrían la tercera mayor, la cuarta, la quinta, la sexta menor, la sexta mayor y por último la octava, la séptima consonancia.

¹⁰⁴ Sexta menor ($5/8$) y sexta mayor ($3/5$).

¹⁰⁵ Aquí Kepler estudia la fracción de cuerda restante. Es decir, $1/6$ es la longitud sobrante de la tercera menor respecto al sonido original ($1 - 5/6$) y $1/5$ la de la tercera mayor ($4/5$).

¹⁰⁶ Kepler realiza el mismo cálculo en las sextas que el que había hecho en las terceras.

¹⁰⁷ KEPLER, *El secreto del Universo*. p. 133.

parece estar de acuerdo con la teoría musical de la época. Además, esta clasificación promete encajar a la perfección con la teoría de los sólidos regulares.

Así, hablando con propiedad, en Música sólo tenemos cinco consonancias, en acuerdo con los cinco sólidos. [...] exactamente como si las consonancias perfectas procediesen del cuadrado y del triángulo, del Cubo, del Tetraedro y del Octaedro, mientras que las imperfectas procediesen del decágono de los otros dos sólidos¹⁰⁸. [...] Pero, puesto que desconocemos las causas de este parentesco, es difícil adecuar cada consonancia a cada sólido. [...] Y también vamos a ver que hay dos clases de consonancias, tres simples perfectas y dos dobles imperfectas, al igual que los tres sólidos primarios y los dos secundarios;¹⁰⁹ [...] Por tanto las consonancias perfectas han de ser acomodadas al Cubo, a la Pirámide y al Octaedro, y las imperfectas, al Dodecaedro y al Icosaedro.¹¹⁰

Asimismo, Kepler apunta ciertas observaciones sobre cómo podría encontrarse la consonancia en las diferentes particiones del círculo, siempre relacionándolo con los cinco sólidos, pero no logra dar por el momento una solución completamente satisfactoria, como muestra el siguiente texto¹¹¹:

...consideremos a la cuerda no como a una línea recta, sino como un círculo. Por tanto la división requerida para la consonancia mencionada [la quinta, 2/3] dará un triángulo, en el cual el ángulo se opone a un lado, al igual que en la Pirámide [tetraedro] el vértice se opone a un plano. Quedan pues para el Cubo y el Octaedro las consonancias llamadas de octava y cuarta, tercera y séptima en orden. ¿Pero qué consonancia corresponde a cada uno de ellos? ¿Diremos acaso que las consonancias secundarias se ajustan a las descritas por líneas, mientras que las primarias a las descritas por figuras? En tal caso al Cubo correspondería la llamada cuarta (3/4). Pues si hacemos de la cuerda un círculo y trazamos una recta de una cuarta parte de cuerda, seguida de otras hasta que regresemos al punto de partida, obtendremos un cuadrado igual al plano del Cubo. Por el contrario, al Octaedro le correspondería la de octava (1/2), que es la mitad de la cuerda. Pues en el círculo, extendida la cuerda por la mitad y vuelta hasta el punto de partida, sólo genera una línea recta. De este modo, al Dodecaedro habrá que atribuir la primera consonancia doble imperfecta [terceras, 4/5 y 5/6]. Puesto que trazando quintas y sextas partes del círculo resulta un pentágono y un hexágono. Y quedará para el

¹⁰⁸ Se refiere al dodecaedro y al icosaedro.

¹⁰⁹ Los cinco sólidos regulares, descritos por Euclides, son el tetraedro, el cubo, el octaedro (sólidos primarios), y el dodecaedro y el icosaedro (sólidos secundarios).

¹¹⁰ KEPLER, *El secreto del Universo*. p. 133.

¹¹¹ Se insertan aclaraciones entre corchetes para facilitar la comprensión.

Icosaedro la segunda consonancia doble imperfecta, [sexta mayor, 3/5] puesto que trazando repetidamente líneas de dos quintos hasta regresar al punto de partida sólo generan líneas. Al igual que trazando con líneas de tres octavos¹¹². ¿Acaso será preferible atribuir al Octaedro la consonancia de cuarta, porque éste subtiende doce veces al cuadrante del círculo?¹¹³ Así quedaría la octava, la consonancia más perfecta para el Cubo, igual que él es el sólido más perfecto. Y tal vez resulte más conveniente dejar para el Icosaedro la primera consonancia imperfecta [terceras, 4/5 y 5/6], por el hexágono, que es más afin a la base triangular¹¹⁴ que a la base pentagonal¹¹⁵, y atribuir, en cambio, al Dodecaedro la división de ocho, porque el número ocho, porque el número ocho es cúbico y el cubo es inscribible en el Dodecaedro. Estas son cuestiones abiertas, hasta que alguien encuentre las causas¹¹⁶

En la segunda edición de *Mysterium cosmographicum*, de 1621, Kepler matiza las proposiciones anteriores, añadiendo una serie de notas al capítulo XII, en las que dice que el parentesco de la consonancia con los sólidos regulares no es tal, sino lo que él denomina “pura afinidad”¹¹⁷. Se refiere al hecho de que realmente las consonancias están más emparentadas con cómo seccionan el círculo los polígonos regulares que con las figuras sólidas. Es decir, que son realmente las figuras planas (triángulo, cuadrado y pentágono) las que determinan las consonancias, y no los sólidos regulares formados a partir de ellas:

Es agradable contemplar los primeros pasos, aunque equivocados, hacia un descubrimiento. He aquí que yo tenía entre las manos las verdaderas y arquetípicas causas de las consonancias, que buscaba angustiosamente, y como si estuviera ciego, como si no estuviera allí. Las figuras planas son las causas de las consonancias por sí mismas, no en cuanto que son superficies de las figuras sólidas.¹¹⁸

No es casual que esta reflexión tenga lugar en un momento en el que Kepler no ha podido comprobar su teoría de los cinco sólidos regulares para explicar el Universo, pues parece lógico que tuviera también que replantearse la validez de la misma teoría a la hora de explicar el fenómeno de la consonancia. Recuérdese que en *Harmonices Mundi* (1621) la

¹¹² Kepler se refiere con la expresión de “sólo generan líneas” a que la partición del círculo en secciones de dos quintos genera una estrella, no un polígono regular. Esto se debe a que 2/5 no es una partición entera.

¹¹³ Cada arista del octaedro subtiende un cuadrante de un círculo máximo de una esfera circunscrito al octaedro. Kepler dice “doce veces” porque doce son las aristas del octaedro.

¹¹⁴ Las caras del icosaedro son triángulos.

¹¹⁵ Anteriormente había atribuido las terceras (4/5 y 5/6) al dodecaedro, por ser sus doce caras pentágonos.

¹¹⁶ KEPLER, *El secreto del Universo*, cap. XII, p. 134.

¹¹⁷ *Ibidem*, nota a la 2ª edición nº 14, p. 134.

¹¹⁸ *Ibidem*, nota a la 2ª ed. nº 13, p. 141.

explicación de los tamaños y formas de las órbitas no reside ya en las figuras sólidas como ocurría en *Mysterium*.

Habiendo renunciado a la utilización de los sólidos regulares para explicar la consonancia, Kepler se ve en la necesidad de justificar por qué las proporciones armónicas derivan del triángulo, el cuadrado, pentágono, hexágono y octógono, y sin embargo no del heptágono, u otros polígonos¹¹⁹. La explicación, sin duda ingeniosa, es que sólo admite los polígonos que se pueden construir con regla y compás. Esta condición no es tan arbitraria como parece, sino que deriva de profundas consideraciones metafísicas. Los lados de estos polígonos regulares “inconstructibles”, descritos con la expresión latina *inscibilia inefabilia nonentia*, son inconmensurables con los diámetros de los círculos en los que se inscriben¹²⁰. Debido a ello son “desconocidos”, en el sentido de que no se pueden construir a partir de la esfera, y por esa causa Kepler considera que no podrían ser usados en ninguna parte de la Creación.

El número de lados de los polígonos regulares susceptibles de ser construidos con regla y compás estaba limitado en la geometría que usaba Kepler a múltiplos de potencias de dos de los polígonos de dos, tres y cinco lados¹²¹. Aunque el resultado es un número infinito de polígonos, sólo se toman los primeros, pues los demás se consideran réplicas de las consonancias fundamentales y por tanto se eliminan.¹²²

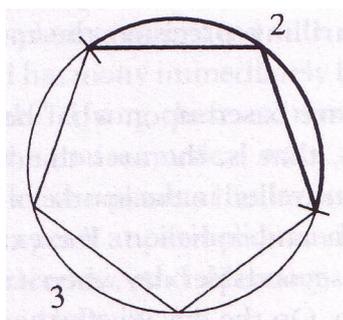


Figura 5. Representación geométrica de la quinta (2/3) en un pentágono inscrito en una circunferencia. Figura tomada de JAMES, *The Music of the Spheres*, p. 151.

Con esta estrategia, Kepler elimina de un modo justificado las proporciones creadas a partir del siete, el nueve u otros números que no producen consonancia. Cohen señala que la

¹¹⁹ COHEN, *op. cit.*, pp. 20-22.

¹²⁰ JAMES, *op. cit.* p. 151.

¹²¹ El número de lados de estos polígonos regulares sería $L_1 = 2 \cdot 2^n$, $L_2 = 3 \cdot 2^n$ y $L_3 = 5 \cdot 2^n$, es decir, 2, 4, 8, 16, 32 etc. para el grupo L_1 , 3, 6, 12, 24 etc. para el grupo L_2 y 5, 10, 20, 40, 80, etc. para el grupo L_3 .

¹²² COHEN, *op. cit.* p. 21.

sección del círculo genera proporciones consonantes si y solo si ninguna de las proporciones puede ser expresada a partir de los polígonos inconstructibles.¹²³ La eliminación del siete se extiende y afecta también a la proporción 7/8, en tanto que su residuo 1/7, disonante también, procede del heptágono, polígono no considerado.¹²⁴

El procedimiento consiste en tomar para cada polígono un número de lados denominado *parte*, y compararlo con el número de los lados restantes, llamado *resto*, así como con el total; de ahí se obtiene la consonancia justificada geoméricamente, del modo que muestra la *Tabla 1*.

Tipo de consonancia	Partición de la circunferencia	Resto	Parte que se toma	Número de lados	Resultado consonante	Resultado disonante
Octava	Diámetro	1	1	2	1/2	-
Quinta	Triángulo	1	2	3	2/3	-
Cuarta	Cuadrado	1	3	4	3/4	-
Octava	Cuadrado	2	2	4	2/4 = 1/2	-
Tercera M	Pentágono	1	4	5	4/5	-
Sexta M	Pentágono	2	3	5	3/5	-
Tercera m	Hexágono	1	5	6	5/6	-
Quinta	Hexágono	2	4	6	4/6 = 2/3	-
Octava	Hexágono	3	3	6	3/6 = 1/2	-
-	Heptágono	1	6	7	-	6/7
-	Heptágono	2	5	7	-	5/7
-	Heptágono	3	4	7	-	4/7
-	Octágono	1	7	8	-	7/8
Cuarta	Octágono	2	6	8	6/8 = 3/4	-
Sexta m	Octágono	3	5	8	5/8	-
Octava	Octágono	4	4	8	4/8 = 1/2	-

Tabla 1. Tabla de las consonancias admitidas por Kepler.

¹²³ *Ibidem*, p. 21.

¹²⁴ CALDERÓN, *op. cit.* p. 185.

Dado que, según la definición de consonancia de Kepler, si de una cuerda, tomando una sección, obtenemos un sonido consonante con la fundamental, también lo será con la sección restante¹²⁵, en la tabla se eliminan los cálculos de los *restos*. Es decir, si por ejemplo se sabe que 4/5 proporciona una consonancia, el resto 1/5 ($1/5 = 4/5 \cdot 1/2 \cdot 1/2$) también lo hará, de ahí que no se tengan en cuenta, aunque la comprobación resulta inmediata.

Con esta última propuesta, la de los polígonos, Kepler logra una explicación geométrica aparentemente definitiva a la consonancia¹²⁶. Sin embargo, él mismo es consciente de que la vinculación de la cuerda en vibración y la circunferencia en la que se inscriben los polígonos no deja de ser arbitraria: un artefacto del ingenio para la explicación de un fenómeno, el sonoro, que se produce en un ámbito que no es el de los polígonos regulares, sino en el plano de una recta. Esta idea se percibe claramente cuando al final del capítulo XII de *El secreto del Universo* añade:

...la división de la cuerda ni ocurre en el círculo, ni utiliza ángulos, si no que se produce sobre el plano en línea recta. No menos, sin embargo, pueden tener consonancias y aspectos tener algo en común que produzca las mismas cosas en ambos, como se ha dicho... Pero esto lo dejo para la ingeniosa investigación de otros¹²⁷

En definitiva, Kepler no aporta una solución integral al problema de la consonancia, pues finalmente se limita a enunciar las proporciones y reflexionar sobre ellas asemejándolas a los poliedros primero y a los polígonos regulares después, sin deducir una teoría completa sobre el fenómeno del sonido en la realidad física de la cuerda en vibración, trabajo que deja para futuros investigadores.

¹²⁵ Véase en este mismo capítulo la cita en que Kepler explica cómo obtener las consonancias.

¹²⁶ Esta nueva explicación de la consonancia es válida a los ojos de Kepler, pero no se justifica desde un punto de vista matemático, pues existen otro tipo de polígonos regulares que se pueden construir con compás y regla, como demostró Gauss (1777-1855) casi dos siglos después, en 1796.

¹²⁷ KEPLER, *El secreto del Universo*, cap. XII, p. 136.

3 LIBRO V DE *HARMONICES MUNDI*: LA ARMONÍA DE LAS ESFERAS

Johannes Kepler se propuso en *Harmonices Mundi* dar una explicación integradora para los fenómenos astronómicos observados que abarcara también lo descrito en cuanto a las características de las órbitas en *Astronomia nova*. En su búsqueda de la causa formal del movimiento de los planetas, reveladora del orden divino dispuesto por el Creador a través de las reglas que rigen el cosmos, tomó la tradición boeciana de la música de las esferas de la Grecia Antigua, y el modelo astronómico-musical ptolemaico, encontrando en ellos la solución al problema que había ocupado toda su vida.

Logró explicar a través de la música por qué las excentricidades de las órbitas son las que son y qué causa armónica hay entre ellas. Y precisamente halló la respuesta en la velocidad angular de los diferentes planetas: a través de la comparación de los distintos arcos diarios aparentes en los momentos extremos de las órbitas, consiguió descubrir las relaciones armónicas que subyacían en ellos, unas relaciones que eran las mismas que gobernaban la música.

Sin embargo, para Kepler esos sonidos del cielo no son audibles, pues “no existen en los cielos”¹²⁸ ; no son otra cosa, nos dice, que polifonía, percibida por el intelecto, “por el raciocinio”¹²⁹, lo que entronca con el modo de pensar de otros teóricos anteriores¹³⁰. La armonía del cosmos es, por tanto, una manifestación divina no perceptible por los sentidos. Y si lo fuera, sólo sería posible apreciarla desde el Sol, pues sólo desde ese punto se podrían percibir con la vista los arcos diarios en su verdadera proporción. Esta contemplación, imposible para el hombre, hace que el único medio de acceso a la armonía universal sea el intelecto. No hay que olvidar que este concepto armónico en Kepler no es estrictamente musical, dado que, en palabras de Dickreiter, “we cannot equate *harmonia* with *musica*, since he understands *musica* only in the narrow sense as confined to the sound quality”¹³¹.

Hoy sabemos que no hay causa armónica (en el sentido kepleriano) real en el movimiento de los planetas. Sin embargo Kepler, aún sin conocer las características del

¹²⁸ KEPLER, *Las armonías del mundo*, libro V, cap. IV, p. 583.

¹²⁹ *Ibidem*, p. 583.

¹³⁰ Véase en el presente trabajo 2.1 ¿Qué es la armonía de las esferas?

¹³¹ DICKREITER, *op. cit.* p. 178. Trad. al castellano: “no podemos hacer equivaler *armonía* con *música*, en tanto que Kepler solamente entiende *música* en términos de cualidad sonora.” (La trad. es nuestra).

fenómeno físico del sonido, equipara magnitudes iguales al comparar las velocidades angulares planetarias con la altura de los sonidos, pues ambas se expresan como inversos de tiempo, en lo que constituye una idea en absoluto carente de interés y sobre la que sin embargo no hemos encontrado referencias en la bibliografía consultada. Esta manera de pensar no es original de Kepler, pues ya en la escuela peripatética existía la idea de que los sonidos más agudos correspondían a impulsos más frecuentes, mientras que los graves se debían a impulsos menos frecuentes.¹³² Asimismo, en el siglo XVI, filósofos naturales como Benedetti habían hecho equivaler la altura de un sonido a la frecuencia de vibración¹³³, idea compartida por Galileo Galilei, y que se confirma definitivamente cuando Mersenne logra establecer la ecuación que relaciona la longitud, la sección y la frecuencia de vibración en una cuerda vibratoria. Se puede decir que Kepler, aún sin conocer la ecuación de Mersenne, comparte la intuición de Benedetti y Galileo, y supone que un movimiento más veloz –en su caso referido a los planetas- corresponde a un sonido más agudo. En cualquier caso esta equivalencia de magnitudes –inversos de tiempo- añade una importante dosis de consistencia a la teoría kepleriana.

3.1 La búsqueda de la consonancia astronómica

El capítulo cuarto del quinto libro de *Harmonices Mundi* lleva por título *En qué cosas tocantes al movimiento de los planetas hállanse expresadas por el creador las proporciones armónicas, y de qué modo*.¹³⁴ A lo largo de él Kepler explica en qué aspectos comenzó a buscar dentro del movimiento de los planetas relaciones armónicas que desvelaran la música de las esferas, describiendo los aciertos y errores de esta búsqueda.

Así, nos dice, las dos primeras magnitudes que tiene en cuenta en este cálculo son los tiempos periódicos de los planetas, esto es, el tiempo que emplean cada uno de los planetas en dar una vuelta completa al Sol, y los ángulos medios recorridos diariamente, es decir, los arcos diarios medios (*Arcos D.M.* en la *Tabla 2*), que son la división de los 360 grados de una revolución completa entre los días empleados en recorrerla.

¹³² GARCÍA, *El concepto de consonancia...* p. 85.

¹³³ *Ibidem*, p. 267.

¹³⁴ Título original: *Quibus in rebus ad motus planetarum pertinentibus, expressae fint a Creatore proportiones Harmonicae, & quomodo?* (KEPLER, *Harmonices Mundi*, liber V, p. 192)

	Periodo (días)	(escrúpulos de día ¹³⁵)	Arcos D.M. (escrúpulos primeros ¹³⁶)	(segundos)	(terceros)
Saturno	10.769	12	2	0	27
Júpiter	4.332	37	4	59	8
Marte	686	59	31	26	31
Tierra	365	15	59	8	11
Venus	224	42	96	7	39
Mercurio	87	58	245	32	25

Tabla 2. Tabla con los tiempos periódicos y los arcos medios de jornada diaria. Véase en 7. **Anexo** la tabla original equivalente (*Tabla original 2.*)

Kepler observa que en estos tiempos periódicos, los indicados en las dos primeras columnas de la *Tabla 2*, no hay proporción armónica aparente:

... lo que se echa de ver fácilmente si los periodos mayores se parten de continuo por la mitad y los mayores se duplican de continuo de suerte que, disimulados los intervalos de diapason (octava) [1/2], podamos descubrir aquellas que se encuentran dentro de una octava. [...] Tome, en efecto, el número de días de Marte, 687, la medida 120, que es el número de divisiones del acorde; con esta medida vendrá a ser el de Saturno más pequeño que 117 por una parte sedécima (1/16); el de Júpiter menor que 95 por una parte octava; el de la Tierra menor que 64; el de Venus más que 78 por el doble; y el de Mercurio, el cuádruplo, más 61. Y no forman proporción armónica alguna con 120 esos números, sino vecinos suyos, 60, 75, 80 y 96. [60 sería la octava, 1/2, 75 la sexta menor, 5/8, 80 la cuarta, 3/4 y 96 tercera mayor, 4/5] [...] no se desprende aquí, por tanto, haber querido Dios Creador introducir proporciones armónicas entre estas demoras sumadas en los tiempos periódicos.¹³⁷

Resulta interesante en este punto resaltar el hecho de que la reducción a la octava de los intervalos, lo que equivale a multiplicar o dividir los valores estudiados por potencias de dos con el objetivo de comprimir las proporciones y situarlas dentro del intervalo [0 – 1/2], va

¹³⁵ Los escrúpulos de día son una partición del día en 60 partes, es decir, 24 minutos.

¹³⁶ Los escrúpulos primeros, también llamados minutos, parten en 60 cada uno de los 360 grados en que se puede dividir una revolución completa. Son una medida de ángulos, por tanto, no de tiempos. De un modo semejante, 60 segundos suman un escrúpulo primero, y 60 terceros un segundo. Se trata de un sistema sexagesimal de medida.

¹³⁷ KEPLER, *Las armonías del mundo*, libro V, cap. 4, p.577.

a ser una práctica constante en *Harmonices Mundi*. Sobre esta cuestión, perfectamente justificable en música pero quizá no tanto en astronomía, Calderón hace algunas observaciones que merece la pena señalar:

Sin embargo, consideramos que con este acto de simplificar o doblar la octava, Kepler violenta toda la observación astronómica realizada. Es claro que descender o elevar en una octava es una operación estrictamente musical que permite considerar a los sonidos como “equivalentes” dada su condición de consonancia perfecta. Pero también es claro que hacer esta operación musical equivale, astronómicamente hablando, a desacelerar o acelerar un planeta y con esto salta en pedazos todo el sistema Kepleriano.¹³⁸

Calderón se refiere aquí al estudio de las velocidades angulares, de ahí que hable de acelerar y desacelerar un planeta cuando se multiplican o dividen esos valores por potencias de dos, pero esta idea se hace extensible a cualquier otro valor astronómico en los que Kepler aplica la mencionada reducción a la octava.

En defensa del procedimiento de Kepler cabe decir que la consonancia planetaria, a menudo formada por un determinado intervalo más varias octavas, es perfectamente válida sin que se aplique la reducción a la octava. Es decir, que la reducción a la octava no es más que un procedimiento para simplificar el intervalo musical, y al que por tanto no hay por qué buscar sentido en su traslación a valores astronómicos.

Tras este inciso, y volviendo de nuevo al capítulo cuarto, encontramos que Kepler tampoco halla proporciones armónicas en los tamaños de los globos planetarios:

Y como quiera que sea conjetura probabilísima [...] que la mole de los cuerpos de los planetas esté en proporción a los tiempos periódicos, de suerte que el globo de Saturno sea en torno al trigécuplo (30 veces)¹³⁹ del globo de la Tierra, el de Júpiter, duodécuplo (12 veces), el de Marte, menos del duplo, y el de la Tierra, sequialtero (vez y media: 3/5) mayor del globo de Venus y cuádruplo del de Mercurio, tampoco serán, pues, armónicas las proporciones de los cuerpos.¹⁴⁰

¹³⁸ CALDERÓN, *op. cit.* p. 111.

¹³⁹ Las anotaciones entre paréntesis son del traductor.

¹⁴⁰ KEPLER, *Las armonías*.... p.578.

Sin embargo, Kepler sigue convencido de que existe armonía en el movimiento de los planetas, y será entre los intervalos extremos de las órbitas donde comience a acercarse a ella.

Dada la excentricidad de las órbitas que recorren los astros¹⁴¹, se denomina *afelio* a la parte de la órbita más lejana del Sol y *perihelio* a la más cercana, como ya se explicó en **2.2.2. Cómo entiende Kepler el cosmos**. Kepler conocía que en el perihelio los planetas se movían más rápidamente, mientras que en el afelio, la zona opuesta de la órbita, lo hacían más lentamente¹⁴². Por tanto, un mismo arco recorrido en el afelio requería un tiempo mayor que el mismo arco recorrido en el perihelio. Para un mismo planeta, la proporción existente entre arcos recorridos en tiempos iguales, demoras en arcos iguales¹⁴³ y lo remoto de los arcos al Sol entre dos zonas distintas de la órbita es la misma¹⁴⁴, nos dice. Y añade:

Y por ser todo ello variable en los planetas, no puede haber duda alguna de que si alguna pulcritud geométrica les cupiera en suerte [se refiere a las tres magnitudes descritas anteriormente], por el certero consejo del Sumo Artífice la habrían recibido en los extremos, como intervalos en afelio y perihelio, y no en los intervalos medios interpuestos. Pues dadas las proporciones entre intervalos extremos, no es menester ya deliberación para que las proporciones intermedias se adapten a número fijo; pues síguense por sí solas de la necesidad de movimiento del planeta¹⁴⁵

Sin embargo, nuevamente lo que encuentra no son más que proporciones no armónicas, pues, salvo los casos de Marte y Mercurio, en el resto de órbitas no existen las proporciones buscadas. En la *Tabla 3* se expresa numéricamente la falta de proporción citada, aunque ya se atisban las proporciones entre los semidiámetros¹⁴⁶ en perihelios y afelios de

¹⁴¹ Los movimientos de los planetas describen elipses, como había enunciado el mismo Kepler en su primera ley, en *Astronomía nova*. Los puntos de la elipse cumplen la condición de que la suma de distancias a dos puntos fijos denominados focos es siempre la misma. De esta manera, en una parte del recorrido a lo largo de la elipse el planeta estará más cerca de uno de los focos, donde se encuentra el Sol, y en otra más lejos.

¹⁴² El cómo sucede esto queda descrito en su segunda ley.

¹⁴³ La proporción entre arcos barridos en el perihelio y en el afelio en un mismo intervalo de tiempo y los intervalos de tiempo empleados en barrer los mismos arcos es evidentemente inversa, pero Kepler las considera equivalentes, pues va a extraer de ellas armonías, y éstas tienen un carácter recíproco. Conviene recordar que Kepler considera que, por ejemplo, 4/5 genera la misma armonía que 5/4, lo que equivale en música a comparar un intervalo ascendente con el mismo intervalo descendente.

¹⁴⁴ Esto se deriva de la segunda ley. Dado que las áreas barridas en igual intervalo de tiempo son iguales, para un intervalo de tiempo dado mayor sea el arco recorrido menor será la distancia del planeta al foco de la elipse y viceversa, pues, siendo el producto de ambas magnitudes constante, arcos y distancias se relacionan mediante proporción inversa.

¹⁴⁵ KEPLER, *Las armonías...* p. 578. Nótese que en este texto subyace la idea de que la armonía no es un fenómeno constante en el movimiento planetario, sino un fenómeno puntual, asunto que se tratará más adelante.

¹⁴⁶ Se estudian aquí las distancias al Sol.

planetas distintos, indicando los intervalos musicales (cuarta columna) con los que Kepler compara las relaciones numéricas.

Saturno	En afelio $A_1=10.052$	En perihelio $B_1=8.968$	Menos de un tono menor
Júpiter	En afelio $A_2=5.451$	En perihelio $B_2=4.949$	Ninguna proporción concordante, pero casi la discordante 11/10, disminuida de la armónica 6/5
Marte	En afelio $A_3=1.665$	En perihelio $B_3=1.382$	Se acerca a la armónica $6/5=1665/1338$ y a $5/4=1665/1332$
Tierra	En afelio $A_4=1.018$	En perihelio $B_4=982$	Diesis $25/24=1020/980$
Venus	En afelio $A_5=729$	En perihelio $B_5=719$	Menos de una sesquicoma ¹⁴⁷
Mercurio	En afelio $A_6=470$	En perihelio $B_6=307$	Más de una quinta, menos que la armónica 8/5

Tabla 3. Proporciones de semidiámetros (distancias al Sol) en los afelios y perihelios de cada uno de los planetas, asignando el valor 1.000 a la distancia media Tierra-Sol. Se recomienda consultar en **5. Apéndice** los intervalos considerados por Kepler. Véase asimismo la tabla original en **7. Anexo**

La anterior tabla de intervalos al Sol, o semidiámetros, apunta ya ciertas armonías entre planetas distintos, como señala Kepler en las siguientes líneas:

Mas si comparas entre sí los intervalos extremos de varios planetas, comienza ya a refulgir alguna luz de armonía. Pues los extremos divergentes de Saturno y Júpiter [se refiere a la

¹⁴⁷ No sabemos a qué se refiere con sesquicoma, mas el intervalo se aproxima mucho a la comma de Dídimo (80/81).

comparación del afelio de Saturno con el perihelio de Júpiter, $10.052/4.949$ ¹⁴⁸] forman algo más de una octava; y los convergentes un promedio entre sextas mayor y menor [el perihelio de Saturno con al afelio de Júpiter, $8.968/5.541$]. Así los intervalos extremos divergentes de Júpiter y Marte [$5.451/1.382$] abrazan casi un disdiapasón (doble octava); y los convergentes [$4.949/1.665$] mas o menos un diapente con diapasón (una quinta con una octava). Mas los extremos divergentes de la Tierra y Marte, un tanto más de sexta mayor, los convergentes, un diatesarón holgado (cuarta aumentada). En la siguiente cópula, de la Tierra con Venus, de nuevo hay entre los convergentes la misma cuarta aumentada [$1.018/719$], mas entre los divergentes [$982/729$] nos defrauda toda proporción armónica: pues, en efecto, es menor que una semioctava [se refiere a un tritono] –si se me permite la expresión-, esto es, menor que la raíz cuadrada de 2:1.¹⁴⁹ Por último, entre los divergentes de Venus y Mercurio [$729/307$] hay poco menos que un compuesto de octava y tercera menor; entre los convergentes [$719/470$], una quinta escasamente holgada [casi una quinta aumentada].¹⁵⁰

Sin embargo, estos cálculos con los intervalos al Sol, dado que son distancias que no reflejan el movimiento real, no convencen a Kepler, que cree que no ha de estar ahí la consonancia astronómica:

...en tanto en cuanto esos intervalos son longitudes sin movimiento, no se prestan adecuadamente a examen que persiga proporciones armónicas, por ser el movimiento más habitual sujeto de armonía a causa de celeridad y tardanza.¹⁵¹

Por otra parte, el hecho de hacer los cálculos a partir de los intervalos en los afelios y los perihelios (extremos de las órbitas) parecen indicar la buena dirección en la búsqueda armónica. Motivado por ello se centra en el estudio de las jornadas de los planetas, es decir, en las distancias recorridas diariamente. Kepler compara los valores de esta magnitud –que no hemos incorporado a nuestras tablas porque sus datos no serán relevantes- pero tras una interesante reflexión que reproducimos a continuación, reconoce que no tiene sentido buscar ahí las armonías, en las distancias, debido a que esa armonía sería imperceptible:

¹⁴⁸ El afelio corresponde al momento de la órbita en que el planeta está más lejos del Sol, es decir, el exterior de la órbita y al perihelio por tanto el interior. Dado que la órbita de Júpiter está dentro de la de Saturno, el afelio de Saturno y el perihelio de Júpiter son divergentes, mientras que el perihelio de Saturno y el afelio de Júpiter son convergentes.

¹⁴⁹ Este intervalo no forma parte de los temperamentos habituales de la época, pues no es ni una 4ª aumentada ($32/45$) ni una 5ª disminuida ($45/64$).

¹⁵⁰ KEPLER, *Las armonías...* p.579.

¹⁵¹ *Ibidem.*, p.580.

Y en efecto, si sopesamos la cosa sensatamente con mejor diligencia [se refiere al hecho de haber buscado en las jornadas medias planetarias las proporciones armónicas], es harto inverosímil haber procurado armonía el Creador Sapiéntísimo especialmente a esas jornadas planetarias. Pues si son armónicas las proporciones de sus jornadas, serán todas las restantes que los planetas tengan, coaccionadas por su jornada y atadas a ella, de suerte que no haya otro lugar en que procurar armonías si así placiere. Mas ¿a qué bien serviría haber armonías entre jornadas?, o ¿quién habría de percibir las? Dos cosas son las que nos hacen patentes armonías entre las cosas de la naturaleza: o la luz, o el sonido; recibida aquella por los ojos, o por ocultos sentidos análogos a ojos, éste [el sonido], por los oídos [...] ahora bien, los sonidos no existen en los cielos, ni es tan turbulento el movimiento [de los planetas] que suscite estruendo el roce con el hálito etéreo. Queda la luz.¹⁵²

En la cita anterior explica por qué no es sensato el buscar armonía en las jornadas, y la respuesta es sencilla: esa armonía no se percibiría. La clase de armonía en los planetas tiene que mostrarse entonces a través de los sentidos capaces de captarla, a saber: el oído y la vista. Dado que Kepler no cree en la existencia de un sonido celestial como tal, la armonía planetaria ha de ser perceptible para la vista. Sin embargo, la armonía en las jornadas de los planetas no se puede ver a simple vista desde ningún punto del sistema solar. A la explicación de Kepler cabría añadir que, dado que las jornadas son longitudes, su tamaño aparente y por tanto la percepción instantánea de su armonía depende de la distancia con que se mire, y ésta es forzosamente variable, debido al movimiento relativo de los planetas¹⁵³. De este modo la armonía solamente se puede conocer a través de la deducción que se hace de los ángulos observados, es decir, a través del raciocinio. Por tanto, Kepler no la buscará finalmente en los periodos, tampoco en las jornadas, sino en los arcos diarios aparentes desde el Sol, es decir, en las velocidades angulares, como se verá a continuación:

Así pues, reducido todo a una cosa, despachadas ya las verdaderas jornadas de los planetas por el hálito etéreo, concluí correctamente que sería oportuno volver los ojos a los arcos diarios aparentes, y aparentes todos desde un lugar fijo en insigne en el mundo, claro es, desde el cuerpo solar, fuente del movimiento de todos los planetas; habiéndose de ver no cuán alto respecto al Sol esté un planeta cualquiera, ni por cuánto espacio transita en un día, que esto es cosa de astronomía y raciocinio, y no del instinto, sino cuánto ángulo subtienda en el cuerpo

¹⁵² *Ibidem*, p.582.

¹⁵³ La verdadera proporción entre jornadas planetarias, si la hubiere, sólo se percibiría desde un punto infinitamente lejano, pues los movimientos relativos de los planetas impiden que se puedan observar todos desde la misma distancia, percibiendo sus recorridos reales y poder así contemplar las armonías que hubiera entre ellos.

del Sol un movimiento diario cualquiera, o cuánto arco parezca recorrer en un día cualquiera en un círculo común descrito desde el Sol, como la eclíptica¹⁵⁴, de suerte que tal apariencia, por benéfica acción de la luz trasladada hasta el Sol, pueda influir así directamente mediante la luz misma en las criaturas.¹⁵⁵

De este modo, Kepler busca ahora los arcos aparentes diarios medidos desde el Sol, es decir, el ángulo de giro barrido por los planetas a lo largo de un día. Esta magnitud es equivalente -en tanto que es proporcional- a la velocidad angular media en el intervalo de un día. Los datos con los que cuenta Kepler, los observados por Tycho Brahe, le permiten elaborar una tabla bastante precisa con los intervalos que surgen al comparar los arcos aparentes en el afelio y en el perihelio de cada uno de los planetas, y a su vez cada planeta con su precedente y antecedente a través del cálculo de lo que denomina armonías *divergentes* (afelio del planeta exterior y perihelio del planeta interior) y *convergentes* (afelio del planeta interior y perihelio del exterior). Véase la *Tabla 4*.

Nótese que las diferencias entre las consonancias propuestas por Kepler y los valores reales frutos del cálculo, siempre hechos con los datos de las tablas de *Harmonices Mundi*, difieren hasta en un 5 % en algunos casos¹⁵⁶. Se trata, por tanto, de aproximaciones.

Además, a este cálculo Kepler incorpora la Luna, de la que observa que su movimiento horario¹⁵⁷ en el apogeo, que es la parte de su órbita en que más lejos está de la Tierra, es tres cuartas partes del movimiento en el perigeo¹⁵⁸, de lo que se deduce el intervalo de cuarta justa. Y añade: "... nota que en ninguna otra parte viene a darse con esa armonía, la cuarta justa, entre movimientos aparentes: y nota también la analogía entre la cuarta en las armonías y el cuarto en las fases"¹⁵⁹

¹⁵⁴ En la concepción ptolemaica o geocéntrica era el plano de la órbita del Sol; por el contrario, en la teoría heliocéntrica la eclíptica es el plano de la órbita terrestre.

¹⁵⁵ KEPLER, *Las armonías...* p.584.

¹⁵⁶ El caso más extremo es la armonía divergente entre Júpiter y Marte, cuyo valor, 0,1184, difiere en más de un cuarto de tono con la consonancia 1/8 propuesta por Kepler (cuádruple octava).

¹⁵⁷ Movimiento en el periodo de una hora.

¹⁵⁸ Parte de la órbita lunar más cercana a la Tierra.

¹⁵⁹ KEPLER, *Las armonías...* p.585.

	Arcos aparentes diarios desde el Sol en afelio (en escrúpulos y segundos)	Arcos aparentes diarios desde el Sol en perihelio (en escrúpulos y segundos)	Armonías generadas internamente (afelio y perihelio de un mismo planeta)	Armonía divergente (afelio planeta exterior y perihelio del planeta interior)	Armonía convergente (afelio del planeta interior y perihelio del exterior)
Saturno	1'46''	2'15''	0,7852 3 ^a M (0,8 = 4/5)	0,3212 8 ^a + 5 ^a (0,333=1/3)	0,5 8 ^a (0,5 = 1/2)
Júpiter	4'30''	5'30''	0,8181 3 ^a m (0,833 = 5/6)	0,1184 8 ^a x 4 (0,125=1/8)	0,2097 8 ^a x 2 + 3 ^a m (0,2083=5/24)
Marte	26'14''	38'1''	0,6901 5 ^a (0,666 = 2/3)	0,4279 8 ^a + 3 ^a m (0,416=5/12)	0,6663 5 ^a (0,666=2/3)
La Tierra	57'03''	61'18''	0,9307 Semitono (0,937=15/16)	0,5844 6 ^a M (0,6 = 3/5)	0,6464 6 ^a m (0,625 = 5/8)
Venus	94'50''	97'37''	0,9715 Diesis (0,96 = 24/25)	0,2470 8 ^a x 2 (0,25=1/4)	0,5953 6 ^a M (0,69=3/5)
Mercurio	164'0''	384'0''	0,4271 8 ^a + 3 ^a m (0,412=5/12)	-	-

Tabla 4. Arcos aparentes desde el Sol en el afelio y en el perihelio de las órbitas planetarias, y su proporción armónica entre planetas contiguos y entre sí mismos. En las columnas 4, 5 y 6 se introducen los resultados del cálculo en primer término (siempre a partir de los datos de las tablas de *Harmonices Mundi*) seguidos de los intervalos propuestos por Kepler, para dar cuenta de que estos últimos casi nunca coinciden con exactitud con los valores reales. En negrita cuando el resultado es exactamente consonante. Véase asimismo la tabla original en 7. **Anexo.**

Asimismo, Kepler comprueba que también existe armonía entre otras combinaciones de planetas. Por ejemplo, entre los arcos en el perihelio de Saturno y Júpiter existe proporción doble ($5^{\circ}30''/2^{\circ}15''$ octava, esta vez exacta), y entre los afelios hay casi proporción triple ($4^{\circ}30''/1^{\circ}46''$ octava más quinta). También observa proporción entre Júpiter y Marte (triple octava en el afelio y doble octava más tercera entre los perihelios). Entre la Tierra y Marte se da una quinta en los afelios, a las que se añaden las anteriormente señaladas en la *Tabla 4*.

Con estos datos, Kepler se convence de que la armonía de las esferas está realmente en los arcos aparentes, y esto se nota cuando dice: “Éstas son, pues, las armonías distribuidas de los planetas; y no hay ni una de las principales comparaciones (a saber, de movimientos extremos convergentes y divergentes) que no venga con ello a ser próxima a alguna armonía de tal suerte que, si así fueren tensadas cuerdas, le sería sobremanera difícil al oído discernir la imperfección...”¹⁶⁰

Y no es fácil averiguar hasta qué punto le falta o no razón, pues la armonía que menos se aproxima a las consonancias propuestas por Kepler, la que se da en la divergencia entre Júpiter y Marte, difiere de una cuádruple octava (intervalo propuesto por Kepler) en casi un semitono; bien es cierto que en los demás casos las diferencias son bastante menores. No obstante, Kepler, consciente de esto, insiste en lo perfecto de las armonías convergentes y divergentes, y en el único caso en que no es así, repito, el que se da entre Júpiter y Marte, que no crean armonía, logra encontrar armonía comparando sus arcos en el afelio y sus arcos en el perihelio, como resume en las siguientes líneas:

Viénesse a dar, pues, con estas armonías perfectas: octava entre los convergentes de Saturno y Júpiter; doble octava casi con tercera menor, entre los de Júpiter y Marte; quinta entre los de la Tierra y Venus en afelio, sexta mayor, y en perihelio, sexta menor; entre los conversos extremos de Venus y Mercurio, sexta mayor, y entre los divergentes o también en perihelio, doble octava; con que sin prejuicio de la astronomía construida sobre las observaciones de Brahe, la más sutil de todas, parecen poderse desechar las tan exiguas discrepancias restantes [...] Ahora bien, habrás de notar que sólo allí donde hay armonía mayor perfecta, como entre Júpiter y Marte, se desprendió para mí la interposición casi perfecta de una de las figuras sólidas¹⁶¹, como en la distancia de Júpiter en el perihelio, que es triple aproximado de la de

¹⁶⁰ KEPLER, *Las armonías...* p.586.

¹⁶¹ Véase en este trabajo el capítulo **2.2.2. Cómo entiende Kepler el cosmos** en lo referente a la teoría de los sólidos regulares descrita en *Mysterium cosmographicum*.

Marte en afelio, de suerte que esta pareja procure con ahínco en sus intervalos la armonía perfecta que no tienen en movimientos.¹⁶²

Por último, Kepler asimila la armonía producida por un mismo planeta a la que se produce en aquello que él denomina música *coral*, es decir, a la monodia generada por un grupo de voces cantando al unísono. En ella, los intervalos armónicos no se producen simultáneamente, sino melódicamente, del mismo modo que la armonía generada entre el afelio y el perihelio de un planeta no es simultánea, pues corresponde a momentos opuestos de su órbita. Por el contrario, el canto *figurado*, expresión referida al canto a varias voces o polifonía, equivale para él a las armonías generadas entre distintos planetas, pues es posible que en un momento determinado un planeta se sitúe en su afelio, mientras que otro discurre por su perihelio, generando así de un modo simultáneo las armonías expresadas en los párrafos anteriores. El primer tipo de armonías lo asigna Kepler a la música de “los antiguos”, refiriéndose con ello a la música griega, de carácter fundamentalmente monódico, mientras que relaciona la armonía “interplanetaria” a la polifonía del s. XVI, en la que se presuponen la superposición de diversas líneas melódicas.¹⁶³

Calderón constata el conocimiento e interés de Kepler por la música de Orlando di Lasso, dos de cuyos motetes incluso son mencionados en *Harmonices Mundi*, compositor que será para el astrónomo un importante referente musical. También nos dice que estos referentes musicales, no sólo en la práctica musical, sino también en el campo teórico, serán del s. XVI y no del XVII, hecho que no se debe obviar si se pretenden comprender los aspectos estéticos de la armonía del cosmos.¹⁶⁴

En otro orden de cosas, encontramos en el planteamiento armónico de Kepler una idea importante: la armonía astronómica no es continua, sino que corresponde a momentos determinados en el tránsito de los planetas. Es decir, sería posible atribuir al movimiento planetario cualidades del discurso musical, en tanto que se mueve desde la disonancia a la consonancia y viceversa.

¹⁶² KEPLER, *Las armonías...* 587.

¹⁶³ CALDERÓN, *op. cit.* p. 5.

¹⁶⁴ *Ibidem*, p. 159.

3.2 Los cantos duro y blando

En el capítulo anterior se había encontrado la causa de la consonancia planetaria en los arcos diarios aparentes desde el Sol en los perihelios y afelios de las órbitas. Sin embargo, esas mediciones, por lo dispar de los movimientos planetarios generan consonancias que superan con mucho el ámbito de la octava. Para organizar esos valores, Kepler divide los ángulos encontrados por diferentes potencias de dos, lo que equivale a descender varios intervalos de octava, para ordenar en el ámbito de una sola octava las armonías producidas en el movimiento de los planetas¹⁶⁵. En la *Tabla 5* se exponen los resultados obtenidos.

Movimiento (arcos diarios)		Escrúpulos primeros	Segundos
Mercurio en perihelio	Dividido por 2^7	3	0
Mercurio en afelio	Dividido por 2^6	2	34
Venus en perihelio	Dividido por 2^5	3	3
Venus en afelio	Dividido por 2^5	2	58
Tierra en perihelio	Dividido por 2^5	1	55
Tierra en afelio	Dividido por 2^5	1	47
Marte en perihelio	Dividido por 2^4	2	23
Marte en afelio	Dividido por 2^3	3	17
Júpiter en perihelio	Dividido por 2	2	45
Júpiter en afelio	Dividido por 2	2	15
Saturno en perihelio		2	15
Saturno en afelio		1	46

Tabla 5. Arcos diarios aparentes desde el Sol en los afelios y perihelios de las órbitas reducidos al ámbito de la octava.

¹⁶⁵ Sobre la equivalencia astronómica de este proceso véase en el presente trabajo **3.1 La búsqueda de la consonancia astronómica**.

El capítulo V se titula *Cómo están expresadas en las proporciones de los movimientos planetarios las notas de la escala musical, o lugares del sistema, y los modos de la armonía, mayor y menor*.¹⁶⁶ En él, a partir de los datos expuestos en la *Tabla 5*, y asignando al movimiento de Saturno en el afelio (1'46'') el sonido *Sol*, Kepler sostiene que de la comparación de dicho valor con los arcos diarios aparentes de otros planetas en afelios y perihelios surge casi por completo la escala de canto duro:

Con que todas las notas del canto duro (exceptuada la nota A, que no se señala por división armónica [...]) son señaladas en una octava por todos los movimientos extremos de los planetas, excepto en movimiento en el perihelio de Venus y la Tierra.¹⁶⁷

De esta manera, Kepler obtiene la siguiente escala de canto duro: *Sol* (Saturno en el afelio), *La* (sonido vacante), *Si* (Saturno en el perihelio y Júpiter en el afelio), *Do* (Marte en perihelio), *Do #* (Mercurio en el afelio), *Re* (Júpiter en el perihelio), *Mi* (Mercurio en perihelio y Venus en afelio), *Fa #* (Marte en afelio) y *Sol* (Tierra en afelio). En esta relación, como apunta Kepler en la cita anterior, faltan los movimientos en el perihelio de Venus y la Tierra y el del afelio de Mercurio. La escala que aparece en *Harmonices Mundi* es la que aparece en la *Fig. 6*.



Figura 6. KEPLER, *Harmonices Mundi*, liber V, p. 204

¹⁶⁶ Título original *In proportionibus motuum planetariorum apparentium (ex Sole veluti spectantibus) expressa esse Loca Systematis, seu Claves Scalae Musicae, & genera cantus, Duri & Mollis.* (KEPLER, *Harmonices Mundi*, liber V, p. 202.)

¹⁶⁷ KEPLER, *Las armonías*... p.590.

En la *Tabla 6* se indican los valores reales, es decir, los que se derivan de los cálculos hechos a partir de los valores astronómicos de Kepler (tercera columna), y se comparan con los intervalos musicales propuestos por Kepler (segunda columna):

Saturno en afelio	(Sol) Prop.: 1 = unísono	Prop. real : 1
(vacante)	(La) $8/9 = \text{tono M} = 0,889$	Prop. real : (vacante)
Saturno en perihelio	(Si) $4/5 = 3^a \text{ M} = 0,8$	Prop. real : 0,7852
Júpiter en afelio	(Si) $4/5 = 3^a \text{ M} = 0,8$	Prop. real : 0,7852
Marte en perihelio	(Do) $3/4 = 4^a = 0,75$	Prop. real : 0,7413
Mercurio en afelio	(Do#) $32/45 = 4^a \text{ A} = 0,711$	Prop. real : 0,6883
Júpiter en perihelio	(Re) $2/3 = 5^a = 0,667$	Prop. real : 0,6424
Mercurio en perihelio	(Mi) $3/5 = 6^a \text{ M} = 0,6$	Prop. real : 0,5889
Venus en afelio	(Mi) $3/5 = 6^a \text{ M} = 0,6$	Prop. real : 0,5955
Marte en afelio	(Fa #) $8/15 = 5^a + 3^a \text{ M} = 0,533$	Prop. real : 0,5381
Tierra en afelio ¹⁶⁸	(Sol) $1/2 = 8^a = 0,5$	Prop. real : 0,4953

Tabla 6. Armonías del canto duro y sus correspondientes valores reales.

De la misma manera, asignando al movimiento de Saturno en el perihelio (2'15'') el sonido *Sol*, se obtendrían casi por completo los sonidos del canto blando, como apunta Kepler:

Convenido esto, todas las notas en una octava de canto blando, exceptuada *f* (Fa), se expresarían por movimientos en afelio y perihelio de más de un planeta, principalmente aquellas que antes estaban omitidas¹⁶⁹

Los sonidos obtenidos, nos dice, de esta otra manera son: *Sol* (Saturno en perihelio), *La* (Mercurio en afelio), *Si b* (Júpiter en perihelio), *Do* (Mercurio en perihelio y Venus en perihelio), *Re* (Marte en afelio), *Mi b* (la Tierra en perihelio), *Mi* natural (casi la Tierra en perihelio)¹⁷⁰, *Fa* (vacante) y *Sol* (Júpiter en afelio).

¹⁶⁸ Aquí se usa la 16ª parte del valor del arco en el afelio de la Tierra, es decir, 3'34''.

¹⁶⁹ KEPLER, *Las armonías...* p.591. Esto no es exactamente así, pues no son pocos los movimientos comunes al canto duro y al blando: Saturno en perihelio, Júpiter en afelio, Mercurio en afelio, Júpiter en perihelio, Mercurio en perihelio y Marte en afelio.

¹⁷⁰ En su intento de cuadrar la armonía planetaria al canto blando, Kepler incorpora el sonido *mi* natural, aproximando hacia abajo el valor del arco de la Tierra en el perihelio. Conviene recordar que la diferencia entre estas dos armonías, sexta menor (*Mib*) y sexta mayor (*Mi*) es de una parte entre cuarenta.



Figura 7. KEPLER, *Harmonices Mundi*, liber V, p. 204

De nuevo se muestra una tabla similar en la que se puedan comparar estos valores:

Saturno en perihelio	(Sol) Prop.: 1 = unísono	Prop. real: 1
Mercurio en afelio	(La) $8/9 = \text{tono M} = 0,889$	Prop. real: 0,8766
Júpiter en perihelio	(Sib) $5/6 = 3^{\text{a}}\text{m} = 0,832$	Prop. real: 0,8182
Mercurio en perihelio	(Do) $3/4 = 4^{\text{a}} = 0,75$	Prop. real: 0,75
Venus en perihelio	(Do) $3/4 = 4^{\text{a}} = 0,75$	Prop. real: 0,7584
Marte en afelio ¹⁷¹	(Re) $2/3 = 5^{\text{a}} = 0,667$	Prop. real: 0,6853
Tierra en afelio ¹⁷²	(Mib) $5/8 = 6^{\text{a}}\text{m} = 0,625$	Prop. real: 0,6308
casi la Tierra en perihelio	(Mi) $3/5 = 6^{\text{a}}\text{M} = 0,6$	Prop. real: 0,5870
(vacante)	(Fa) $9/16 = 4^{\text{a}}+4^{\text{a}} = 0,5625$	Prop. real: (vacante)
Júpiter en afelio ¹⁷³	(Sol) $1/2 = 8^{\text{a}} = 0,5$	Prop. real: 0,5

Tabla 7. Armonías de canto blando propuestas por Kepler (segunda columna) y sus correspondientes valores reales calculados a partir de las tablas de *Harmonices Mundi* (tercera columna). En negrita los valores que coinciden con exactitud.

A partir de estos datos Kepler concluye que la creación de la escala ya no es atribuible al hombre:

Ahora pues no te admirará ya haber establecido los hombres un excelso orden sonoro, o grados en un sistema o escala de música, comoquiera que veas ya no haber obrado en este

¹⁷¹ En este cálculo se usa el valor del arco diario aparente en el afelio de Marte dividido por 16, no por 32, es decir, $3'16'' = 1'38'' + 1'38''$.

¹⁷² En este cálculo se usa el valor del arco diario aparente en el perihelio de la Tierra dividido por 16, no por 32, es decir, $3'50'' = 1'55'' + 1'55''$.

¹⁷³ Aquí se usa el valor real del afelio de Júpiter: $4'30''$.

negocio de otro modo sino cual simios de Dios Creador, y representando como en un drama alguna ordenación de los movimientos celestes.¹⁷⁴

Efectivamente, para Kepler el hecho de que el cosmos tenga características musicales da a ésta la condición de universal. Si relacionamos esto con lo dicho sobre el canto figurado y el canto coral, hemos de pensar que para él la música del s. XVI es la más perfecta posible.

Por otro lado, encontramos aquí un buen momento para hacer una reflexión que hasta ahora no ha sido señalada en la bibliografía consultada: la asimilación que hace Kepler de los movimientos extremos de los planetas (en los afelios y perihelios de las órbitas) con los arcos diarios aparentes desde el Sol en esas zonas extremas constituye un error conceptual. Los movimientos mayores y menores de los planetas, o, si se quiere, las velocidades angulares máximas y mínimas, se producen efectivamente en los perihelios y los afelios. Sin embargo, con la medida de arco diario aparente desde el Sol lo que se está calculando es la velocidad angular media en el intervalo de un día en la zona de los afelios y perihelios, y esta velocidad media en ese intervalo es forzosamente menor que la velocidad máxima del planeta en el caso del perihelio y mayor que la velocidad mínima en el caso del afelio.

Sin la herramienta del cálculo infinitesimal, que no tenía Kepler, no es posible calcular con fidelidad esos extremos, mas en ningún momento leemos a Kepler decir en el libro V que los arcos diarios aparentes desde el Sol no constituyan los verdaderos movimientos extremos sino una aproximación más o menos fiel a éstos.

3.3. Los modos

En este nuevo capítulo, el sexto, que se titula *Cómo se hallan expresados cada uno de los tonos o modos musicales en los movimientos planetarios*¹⁷⁵, Kepler retoma lo enunciado en el cuarto referente a las armonías “corales”, es decir, a los intervalos extremos que recorren cada uno de los planetas entre su afelio y su perihelio, creando escalas o modos característicos de cada uno de ellos, como se explica a continuación:

¹⁷⁴ KEPLER, *Las armonías...* p.592.

¹⁷⁵ Título original *In Extremitatibus motuum Planetariorum expressos esse quodammodo Modos seu Tonos Musicos*, KEPLER, *Harmonices Mundi*, p. 206.

De lo antedicho, y sin haber menester de muchas palabras, síguese esto: que cada planeta singular señala de algún modo lugares en el sistema con su movimiento en el perihelio, en tanto en cuanto le es dado a cada uno recorrer cierto intervalo fijo en la escala musical, comprendido entre ciertas notas fijas de ésta o lugares en el sistema, y comenzando a partir de aquella nota o lugar que el capítulo precedente le tocara en suerte [...] Ve cada uno de ellos en las notas usuales. Cierta que no forman articuladamente, como en los extremos, los lugares intermedios que ves aquí completados con notas [se refiere a la representación en pentagrama de los sonidos]: que no se afanan por llegar de un extremo al opuesto a saltos ni por intervalos, sino mediante un continuo de tonos, atravesando en el acto todos los intermedios, infinitos en potencia, -lo que yo no puedo expresar de otro modo que mediante una serie continua de notas intermedias-. Permanece Venus casi en unísono, sin igualar en amplitud de tono ni al mínimo de los intervalos concordantes.¹⁷⁶

Los sonidos que corresponden a cada uno de los afelios de los planetas vienen dados por la relación de éstos con el afelio de Saturno (1'46''), al que se le asigna la nota *Sol*. El cálculo que hace Kepler consiste en comparar con él (el afelio de Saturno) el ángulo de una jornada en el afelio (por ser el menor) de cada uno de los planetas. Por tanto, según él, corresponden a Saturno y La Tierra el sonido *Sol*, *Si* a Júpiter, a Marte *Fa#*, a Venus *Mi* y a Mercurio *La*, en diferentes octavas. Sin embargo, como se verá a continuación, estas notas no encajan con el cálculo en el caso de Mercurio, del que obtenemos un *Reb*, acaso un *Re* natural si se admite un mayor margen de error. Este error de Kepler no ha sido señalado con anterioridad en la bibliografía.

Saturno en afelio	1'46''	Prop.: 1	Sol (unísono)
Júpiter en afelio	4'30''	Prop.: 0,3925	Si ($3^aM + 8^a = 0'4$)
Marte en afelio	26'14''	Prop.: 0,067344	Fa# ($5^a + 3^aM + 8^ax3 = 0,0667$)
Tierra en afelio	57'03''	0,03097	Sol ($8^ax5 = 0,0313$)
Venus en afelio	94'50''	0,01863	Mi ($6^aM + 8^ax5 = 0,01875$)
Mercurio afelio	164'00''	0,01077	Reb ($5^ad + 8^ax6 = 0,01098$)

Tabla 8. Armonías entre los afelios de los planetas. En la tercera columna se indican las proporciones reales, fruto de los cálculos, y en la cuarta los sonidos e intervalos que nosotros atribuimos. Nótese las diferencias entre éstos y los que propone Kepler.

¹⁷⁶ KEPLER, *Las armonías...* p.595. La órbita de Venus es apenas excéntrica, de ahí que no se derive de ella ninguna variación entre sus extremos suficiente para ser audible, según Kepler.

Como se ha dicho, Kepler indica que a Mercurio le corresponde un *La*, mientras que nuestros cálculos demuestran un *Reb*. Para obtener un *La* habría que tomar el afelio de Mercurio (164') y compararlo con el perihelio de Saturno (2'15''), que resulta 0,01372, casi un tono mayor mas seis octavas (0,01389): efectivamente un *La*. Sospechamos que el error de Kepler podría estar ahí. No podemos asegurarlo, pero lo cierto es que no lo explica ni menciona en parte alguna.

Además de este error, existen otras inexactitudes en este capítulo. Por ejemplo, Kepler reconoce que a Júpiter le corresponde un *Si*; sin embargo, le asigna un *Sol*, advirtiéndolo cuando dice que “mas a Júpiter [le corresponde] Si, que puede trasponerse en G”¹⁷⁷. Sin embargo no hallamos ninguna explicación por su parte. Nos atrevemos con la siguiente razón: dado que Kepler va a atribuir al movimiento de Júpiter el primero o segundo modo, su colocación en altura *Si* se convierte en un estorbo, pues no se corresponde con la práctica musical de la época.

Por otro lado, Kepler asigna a Marte el sonido *Fa#* (igual que demuestran nuestros cálculos) pero a la hora de escribirlo lo sitúa en altura *Fa*. Nuevamente carecemos de explicación por parte de Kepler que justifique esta transposición, pero podemos arriesgarnos, al igual que en el caso anterior, y concluir que, dado que Kepler atribuye a Marte los modos quinto y sexto, no le queda otra opción, para mantener un sistema coherente con la práctica musical, que colocar a Marte en altura *Fa*.



Figura 8. Escalas asignadas a cada uno de los planetas. KEPLER, *Harmonices Mundi*, p. 207.

¹⁷⁷ KEPLER, *Las armonías...* p. 593.

Nótese en la *Fig. 8* que el recorrido de Mercurio presenta un movimiento irregular: no sube igual que baja. Una mirada primera excesivamente intuitiva nos podría hacer pensar que con ese modo de escritura Kepler pretende hacer notar la variación de la velocidad en el movimiento planetario. Sin embargo el movimiento en el afelio, la parte más grave, es más lento mientras que en el perihelio, la parte más aguda, es más rápido; por tanto la velocidad crece cuando el planeta se dirige hacia el perihelio y decrece cuando vuelve de él, lo que no encaja con la representación musical de la *Fig. 8*. Calderón opina que quizá Kepler pudo querer representar las múltiples posibilidades de elección de sonidos en los pasos intermedios del recorrido, o que simplemente hubo problemas de composición tipográfica.¹⁷⁸

En relación a esto se hace por tanto necesario recalcar que debido al movimiento continuo que recorren los planetas sería posible crear diferentes tipos de escala en cada uno de ellos. Por eso Kepler da libertad expresa al armonista para utilizar las que mejor convenga, limitando tan sólo los límites del recorrido, es decir los puntos de partida y llegada. Estos límites vienen dados por la armonía interna del propio planeta, detallada en la *Tabla 4*. La elección de los modos es, se insiste, no determinada por el propio sistema, y Kepler reconoce que cualquier otra elección hubiera sido posible. Sin embargo, se nota en esta cuestión una decidida intención por parte de Kepler de establecer analogías con el sistema de los ocho modos. Nótese esto en las siguientes palabras: “De los usados [los modos], yo daría a Saturno el séptimo o el octavo [porque desde un Sol ha de llegar a un Si y es obligado por tanto que sea un modo con tercera mayor; el otro modo con tercera mayor será el que recorra Marte desde Fa], [...] a Júpiter el primero o el segundo [la razón es similar, pero en este caso su ámbito es de tercera menor], a Marte el quinto o el sexto [el más adecuado para la altura Fa], [...] a la Tierra tercero o cuarto [como su recorrido es un semitono sólo le queda esta opción], [...] a Mercurio [...] todos [...]; a Venus [...] ninguno”¹⁷⁹.

Resumiendo: a la Tierra se le asignan los modos tercero y cuarto, pues no queda otra opción debido a su recorrido *Sol-Lab*. Los modos primero y segundo quedan entonces obligatoriamente para Júpiter, dado que recorre una tercera menor. A Saturno le corresponden una pareja de modos con tercera mayor y ¿cuáles mejores que el séptimo y el octavo, los modos de Sol? Quedan para Marte, ya transpuesto a Fa, los modos quinto y sexto. A Venus que no se mueve no se le asigna ninguno, y a Mercurio que se mueve tanto le corresponden

¹⁷⁸ CALDERÓN, *op. cit.* p. 101.

¹⁷⁹ KEPLER, *Las armonías...* p. 594.

todos los modos, dice Kepler. El sistema es perfecto aparentemente, pero nuevamente contiene un error: no es posible atribuir a Mercurio todos los modos, porque su recorrido va desde *La* a *Do* (o desde *Reb* a *Mi*, según nuestros cálculos), una octava más tercera menor, y no cabe por tanto que pueda *cantar* en los modos quinto, sexto, séptimo y octavo, que poseen la tercera mayor. Tampoco hemos encontrado ninguna mención a estos desajustes en nuestra bibliografía.

3.4. La armonía de los planetas

La primera de las consideraciones que hace Kepler en este séptimo capítulo, titulado *Cómo pueden existir contrapuntos o armonías universales de todos los planetas, diferentes cada uno de los demás*¹⁸⁰, referido a las armonías polifónicas, es decir, las que se producen entre diferentes planetas, es que la conjunción de sonidos consonantes entre sí es poco frecuente. Es decir, no es probable que dos planetas se sitúen simultáneamente en el perihelio uno y en el afelio otro para poder así producir determinada consonancia. Así lo explica en el siguiente párrafo:

...mas rarísima vez ocurre que dos [planetas], señaladamente si se cuentan entre los mas tardos [menos aún si esos planetas son de periodos mayores], coincidan simultáneamente en sus intervalos extremos: verbigracia, los ápices de Saturno y Júpiter distan unos 81 grados; por consiguiente, entretanto esta distancia mide el entero zodíaco por saltos fijos de veinte años,¹⁸¹ y aún así, ese salto que coincide el octavo siglo lleva exactamente a los mismos ápices¹⁸²

Sin embargo, ocurren otra clase de armonías parciales durante el recorrido de los planetas, pues no es necesario esperar a los extremos de todos los planetas para hallar alguna clase de consonancia. Son muy comunes, por ejemplo, las armonías derivadas de ciertas conjunciones entre dos y tres planetas (Marte, La Tierra y Mercurio lo hacen con cierta frecuencia), mientras que las armonías de cuatro planetas están ya separadas por siglos, y por milenios las de cinco. Por último, respecto a la armonía de los seis planetas, mucho más difícil, dice Kepler lo siguiente:

¹⁸⁰ Título original: *Harmonias universales omnium sex Planetarum, veluti communia Contrapuncta, quadriformia dari.* (KEPLER, *Harmonices Mundi*, p. 207)

¹⁸¹ Es decir, ya que Saturno y Júpiter tienen una revolución el uno respecto del otro cada veinte años, están distanciados 81 grados cada veinte años, mientras que la posición final de este intervalo de 81 grados atraviesa la eclíptica a saltos, por así decir, y coincide con los ápices aproximadamente una vez cada ochocientos años.

¹⁸² KEPLER, *op. cit.* p.595.

...pero que todos seis concuerden, eso está separado por larguísimos evos, y no sé si sea del todo imposible que vuelva a acontecer por revoluciones exactas; y más puede ser que señalara el principio de un Tiempo del que manara toda la edad del mundo [...] que si una armonía séxtuple puede acontecer, o entre muchas una señalada, ésa sin duda puede tenerse por signo de la Creación.¹⁸³

Dada la dificultad, por tanto, de la búsqueda de una armonía simultánea en la que confluyan los movimientos extremos de todos los planetas, por lo improbable de su existencia, Kepler se propone encontrar armonías intermedias, en las que todos los planetas, sin necesidad de estar transitando por sus perihelios o afelios, produzcan armonía con todos los demás. Debido al recorrido sonoro de cada planeta, descrito en el anterior capítulo, las posibilidades de la formación de grandes acordes celestiales se reducen a lo descrito en las siguientes tablas. Las dos primeras se refieren a armonías universales del modo mayor, es decir, a las combinaciones posibles de armonías concordantes en el canto duro:

Que concuerde con <i>Si</i>	Arcos diarios aparentes	Sonido producido
Mercurio	380'20''	<i>Mi 10</i>
Mercurio	285'15''	<i>Si 9</i>
Mercurio	228'12''	<i>Sol 9</i>
Venus	95'5''	<i>Mi 8</i>
La Tierra	57'3''	<i>Sol 7</i>
Marte	28'32''	<i>Sol 6</i>
Júpiter	4'34''	<i>Si 3</i>
Saturno	2'14''	<i>Si 2</i>
Saturno	1'47''	<i>Sol 2</i>

Tabla 9. Arcos aparentes diarios desde el Sol en diferentes momentos intermedios de las órbitas planetarias concordantes con el sonido *Si* y entre sí y sus equivalentes en sonidos. Primer armonía universal del modo mayor. Acorde producido: ***Mi menor***. Véase en **7 Apéndice** la tabla original.

¹⁸³ *Ibidem.* p.596. Encontramos aquí la idea de la Creación, algo que resulta fácil emparentar con el Big Bang de las teorías del Universo del s. XX.

Que concuerde con <i>Do</i>	Arcos diarios aparentes	Sonido producido
Mercurio	380'20''	<i>Mi 10</i>
Mercurio	304'16''	<i>Do 10</i>
Mercurio	228'12''	<i>Sol 9</i>
Venus	95'5''	<i>Mi 8</i>
La Tierra	57'3''	<i>Sol 7</i>
Marte	28'32''	<i>Sol 6</i>
Júpiter	4'45''	<i>Do 4</i>
Saturno	147''	<i>Sol 2</i>

Tabla 10. Arcos aparentes diarios desde el Sol en diferentes momentos intermedios de las órbitas planetarias concordantes con el sonido *Do* y entre sí y sus equivalentes en sonidos. Segunda armonía universal del modo mayor. Acorde producido: ***Do mayor***. Véase en 7 **Apéndice** la tabla original.

Que concuerde con <i>Si b</i>	Arcos diarios aparentes	Sonido producido
Mercurio	379'20''	<i>Mi b 10</i>
Mercurio	284'32''	<i>Si b 9</i>
Mercurio	237'4''	<i>Sol 9</i>
Venus	94'50''	<i>Mi b 8</i>
La Tierra	59'16''	<i>Sol 7</i>
Marte	29'38''	<i>Sol 6</i>
Júpiter	4'35''	<i>Si b 3</i>
Saturno	1'55''	<i>Sol 2</i>

Tabla 11. Arcos aparentes diarios desde el Sol en diferentes momentos intermedios de las órbitas planetarias concordantes con el sonido *Si b* y entre sí y sus equivalentes en sonidos. Primera armonía universal del modo menor. Acorde producido: ***Mi b mayor***.

Observamos que en estas tablas la armonía es perfecta, pues lo que se hace es tomar valores intermedios de los recorridos. Además, no observamos desajustes ni errores. Nótese por ejemplo que el valor de Mercurio no baja nunca de 164', es decir, que no baja del *Reb* con respecto al afelio de Saturno, como había sucedido en el capítulo anterior.

Que concuerde con <i>Do</i>	Arcos diarios aparentes	Sonido producido
Mercurio	379'20''	<i>Mi b 10</i>
Mercurio	316'5''	<i>Do 10</i>
Mercurio	237'4''	<i>Sol 9</i>
Venus	94'50''	<i>Mi b 8</i>
La Tierra	59'16''	<i>Sol 7</i>
Marte	29'38''	<i>Sol 6</i>
Júpiter	4'56''	<i>Do 4</i>
Saturno	1'55''	<i>Sol 2</i>

Tabla 12. Arcos aparentes diarios desde el Sol en diferentes momentos intermedios de las órbitas planetarias concordantes con el sonido *Do* y entre sí y sus equivalentes en sonidos. Segunda armonía universal del modo menor. Acorde producido: ***Do menor***. Véase en 7 **Apéndice** la tabla original.

Además, Kepler calcula otra clase de armonías de cinco planetas, en las que se elimina Venus, que produce siempre el sonido *Mi* y limita de este modo las posibilidades armónicas. Estas armonías serían de menor consideración que las anteriores, sin embargo, Kepler las tiene muy en cuenta:

Mas si ordenamos silencio a esta charlatana Venus que todo discurso interrumpe, esto es, si consideramos cuáles puedan ser las armonías ya no de todos, pero al menos de cinco planetas restantes, excluido el movimiento de Venus, sigue aún así la Tierra rondando su cuerda g (Sol), sin ascender de ella allende un semitono [...] pues ocupando la Tierra en afelio, no soporta a aquél (Marte en afelio, Fa); pero el movimiento en el perihelio aborrece la concordancia con el de Marte en afelio por una media diesis¹⁸⁴

De este modo, eliminando a Venus de los cálculos, se obtienen diversas consonancias de cinco planetas:

¹⁸⁴ KEPLER, *Las armonías...* p.599.

Que concuerde con <i>Si</i>	Arcos diarios aparentes	Sonido producido
Mercurio	342'18''	<i>Re 10</i>
Mercurio	285'15''	<i>Si 9</i>
Mercurio	228'12''	<i>Sol 9</i>
Marte	35'39''	<i>Si 6</i>
La Tierra	57'3''	<i>Sol 7</i>
Júpiter	5'21''	<i>Si 3</i>
Saturno	2'13''	<i>Si 2</i>
Saturno	1'47''	<i>Sol 2</i>

Tabla 13. Arcos aparentes diarios desde el Sol en diferentes momentos intermedios de las órbitas planetarias concordantes con el sonido *Si* y entre sí y sus equivalentes en sonidos. Armonía de cinco planetas, eliminado Venus, del modo mayor. Acorde producido: ***Sol mayor***. Véase en 7 **Apéndice** la tabla original.

Que concuerde con <i>Si b</i>	Arcos diarios aparentes	Sonido producido
Mercurio	342'18''	<i>Re 10</i>
Mercurio	273'50''	<i>Si b 9</i>
Mercurio	228'12''	<i>Sol 9</i>
Marte	34'14''	<i>Si b 6</i>
La Tierra	57'3''	<i>Sol 7</i>
Júpiter	5'30''	<i>Re 4</i>
Saturno	2'8''	<i>Si b 2</i>
Saturno	1'47''	<i>Sol 2</i>

Tabla 14. Arcos aparentes diarios desde el Sol en diferentes momentos intermedios de las órbitas planetarias concordantes con el sonido *Si b* y entre sí y sus equivalentes en sonidos. Armonía de cinco planetas, eliminado Venus, del modo menor. Acorde producido: ***Sol menor***.

Los cálculos se podrían continuar, buscando armonías de cuatro planetas. Kepler lo hace, y, a pesar de que no se van a exponer aquí las correspondientes tablas, resulta interesante mencionar que, siguiendo este mismo procedimiento, se encuentran dos armonías de canto duro entre Mercurio, Marte, Júpiter y Saturno: la formada por los sonidos *Si*, *Re* y *Fa* # (acorde de *Si menor*) y la formada por *La*, *Re* y *Fa* # (acorde de *Re mayor*). A partir de este

punto, las armonías con tres planetas disparan su número, por lo que el interés disminuye, y todavía más si sólo se consideran parejas de planetas.

A partir de lo expuesto en este capítulo podemos concluir lo siguiente: Kepler busca en el movimiento planetario momentos puntuales de consonancia astronómica que se siguen de largos periodos de disonancia. Esas consonancias son de varios tipos, desde la consonancia total entre los seis planetas, que marca el momento de la Creación o cambio de era, a consonancias intermedias, de menor envergadura y que atañen a un número limitado de planetas. Resulta fácil establecer la conexión con el discurso musical de la polifonía renacentista. Los momentos finales se señalan por la mayor consonancia, y en ese punto todas las voces cadencian. Sin embargo, en momentos intermedios algunas voces pueden cadenciar mientras que otras no lo hacen. Por tanto no consideramos arriesgado decir que también en esta ocasión Kepler está estableciendo analogías entre el modelo astronómico y la práctica musical.

3.5. Analogías con las cuatro voces

Por último, Kepler dedica el capítulo octavo, titulado *Hállanse expresados en los planetas los cuatro contrapuntos naturales de las voces: soprano, alto, tenor y bajo*¹⁸⁵, a establecer la vinculación de los movimientos de los planetas con el contrapunto creado por las cuatro voces. En este momento se aleja aparentemente un poco del razonado discurso que había mantenido hasta ese momento; no obstante, reconoce que no hay *sólida causa natural* en este argumento, advirtiendo de ello en las siguientes líneas:

Que si bien son estos vocablos [se refiere a los términos de soprano, contralto, tenor y bajo] para las voces humanas, y no existe en el cielo voz o sonido por la suma tranquilidad de los movimientos¹⁸⁶; y tampoco los sujetos en que aprehendemos armonías quedan comprendidos en el modo del verdadero movimiento, como quiera que consideremos solamente los que parecen desde el Sol; y si bien, por último, no hay en el cielo causa que abogue por un número fijo de voces para hacer armonía, cual es en el canto humano [...] no sé por qué vínculo esta

¹⁸⁵ Título original: *Quis in concordantijs coelsifibus Discanti, quis Alti, quis Tenoris, quis Bassi vicem obeat?* (KEPLER, *Harmonices Mundi*, p. 213)

¹⁸⁶ Nuevamente, Kepler insiste en la ausencia de sonido real en los cielos.

admirable congruencia con el canto humano me hace fuerza de tal suerte que me veo compelido a proseguir también esta parte de la comparación, aún sin sólida causa natural.¹⁸⁷

Debido al carácter y tesituras de los sonidos de cada uno de los planetas, Kepler asigna la voz de bajo a Saturno y a Júpiter, que son los más graves, tenor a Marte, contralto a la Tierra y a Venus y soprano a Mercurio. Queda de este modo dispuesto un sexteto en el que las voces de bajo y contralto aparecen dos veces, mientras que tenor y soprano una. Las razones son las siguientes:

...así como el bajo está opuesto al contralto, así también haya dos planetas que tengan naturaleza de contralto, y dos, de bajo, como en cualquier modo de canto hay de cada lado uno de cada, y de los demás, uno solo por cada voz; y que así como el contralto, casi siempre el superior, está en unas angosturas necesarias por causas naturales [...] así también los planetas íntimos, Tierra y Venus, tengan los más angostos intervalos de movimiento, poco más de un semitono, la Tierra, y Venus, ni una diesis; y que así como el tenor es libre pero no obstante se mueve con moderación, así también Marte, el único exceptuando Mercurio¹⁸⁸, pueda hacer el intervalo máximo, quinta; y así que como el bajo hace saltos armónicos, así también Júpiter y Saturno tengan intervalos armónicos¹⁸⁹, [...] y que así como la voz soprano es libérrima, más que todas las restantes, y ligerísima, así también Mercurio pueda atravesar más de una octava en brevísimo plazo.¹⁹⁰

No resulta fácil desde una perspectiva actual entender por qué un capítulo entero de una obra científica de esta envergadura se dedica a establecer analogías que podrían parecer meras elucubraciones sinsentido. Es fácil realizar un juicio descontextualizado y creer que todas estas conjeturas escapan de cualquier actitud científica. Sin embargo, si se revisa el método científico de Kepler, se observa que hay una voluntad constante en aglutinar todas las observaciones y hacerlas corresponder a un arquetipo único, a una única causa. Esta causa formal, en Kepler, es de tipo geométrico y musical. De la misma manera que había buscado en los sólidos regulares las razones de los tamaños orbitales, Kepler busca en la teoría y prácticas musicales –las de su época, obviamente, que él considera con toda seguridad

¹⁸⁷ KEPLER, *Las armonías...* p. 603.

¹⁸⁸ Recuérdese que Mercurio recorre en su movimiento el intervalo de octava más tercera mayor, mientras que Marte recorre una quinta.

¹⁸⁹ Júpiter y Saturno realizan un movimiento muy similar, de tercera menor el primero y de tercera mayor el segundo.

¹⁹⁰ KEPLER, *Las armonías...* p.604. Mercurio, además de ser el planeta que presenta una mayor excentricidad, y por tanto una mayor amplitud interválica, es también el que más rápidamente se mueve, pues su periodo es de tan solo 87 días. Esto significa que recorre su “escala” más rápidamente que cualquier otro.

universales- el sistema capaz de explicar lo que ocurre en los cielos. Esto atañe a lo puramente numérico, a aspectos cuantitativos como los arcos diarios aparentes de los planetas en los afelios y perihelios, pero también a los aspectos que se podrían considerar cualitativos, como la disposición de las cuatro voces, o incluso la atribución de los modos.

4. CONCLUSIONES

La teoría musical de Kepler está influida por la astronómica

Kepler expone en la primera edición de *Mysterium Cosmographicum* (1596) una teoría que pretende explicar la consonancia a partir de los cinco sólidos regulares, de modo similar a la teoría que explicaba los tamaños de las órbitas. Posteriormente, el abandono de esta teoría cosmológica le hace replantearse la teoría sobre la consonancia, elaborando una nueva a partir de las figuras planas. La teoría musical de Kepler, por tanto, está influida por la astronómica.

El modelo teórico de la astronomía del libro V de *Harmonices Mundi* de Kepler está influido por la teoría y práctica musicales de la época

Kepler busca en el libro V de *Harmonices Mundi* leyes astronómicas que correspondan a una armonía de tipo musical. De esta manera, encuentra en los movimientos extremos de los planetas las mismas consonancias armónicas que manejaba la teoría musical de la época. Asimismo, el movimiento planetario obedece a un discurso que se articula sobre momentos de consonancia y disonancia. Al igual que en la música, los momentos de consonancia más relevantes señalan puntos importantes en el sistema.

Además de las cuestiones puramente armónicas, existe una firme intención de adaptar las explicaciones astronómicas a las reglas del sistema musical. Esto se ve en las reducciones al ámbito de la octava de los diferentes valores astronómicos, o en la analogía del *canto* de los planetas con las cuatro voces. Además, y a pesar de la exactitud que inunda todo el procedimiento, Kepler no duda en realizar pequeñas adaptaciones para ajustar los resultados a su interés, obteniendo así un sistema de mayor coherencia musical, como ocurre en la búsqueda de los cantos duro y blando en el movimiento planetario. Estas adaptaciones de los datos astronómicos se hacen todavía mayores en el caso de los *cantos* de Marte y Júpiter, cuyo transporte únicamente obedece, a nuestro juicio, a la voluntad de Kepler de hacer que a los planetas les correspondan los ocho modos, como se vio en **3.3 Los modos**.

Posibles errores en el libro V de *Harmonices Mundi*

Detectamos una falta de correspondencia en los *cantos* de Marte, Júpiter y Mercurio entre los cálculos hechos por nosotros y los sonidos escritos por Kepler. De los tres, pensamos que el de Mercurio se trata de un error, y que los otros dos son adaptaciones conscientes, como ya se ha apuntado. Por lo expuesto en el capítulo **3.3 Los modos** pensamos que Kepler se equivoca al calcular el sonido que le corresponde al afelio de Mercurio, pues en vez de compararlo con el afelio de Saturno lo hace con el perihelio, obteniendo de ese modo el sonido *La* en vez de el sonido *Reb* que es el que nosotros, haciendo la mencionada comparación, obtenemos.

Otro error que detectamos es la asignación al movimiento de Mercurio de los ocho modos. Observamos que este planeta se mueve en el ámbito de una octava más una tercera menor, dado que no es posible que pueda *cantar* los modos quinto, sexto, séptimo y octavo.

Por último, detectamos un error conceptual en el cálculo del *canto* planetario, o, al menos, una falta de explicaciones por parte de Kepler. En el libro V se asimilan los arcos diarios aparentes desde el Sol en los perihelios y los afelios con los movimientos extremos de los planetas, es decir, con los movimientos más rápidos y más lentos. Esto no es exactamente así, pues los arcos diarios aparentes están relacionados con las velocidades angulares medias a lo largo del intervalo temporal de un día, lo que no es exactamente lo mismo que las velocidades reales de los extremos. Los arcos diarios aparentes desde el Sol medidos en los afelios y los perihelios siempre nos darán movimientos menos extremos que si tomamos como valor la velocidad angular en los puntos exactos del perihelio y el afelio. Para obtener estos extremos es necesaria la herramienta del cálculo infinitesimal (u otros procedimientos indirectos), y Kepler no la tenía. No obstante, echamos en falta alguna explicación en el libro V sobre la inexactitud de atribuir a los movimientos extremos de los planetas los valores de los arcos diarios aparentes en los afelios y perihelios.

Kepler considera que la teoría y práctica musicales de la época son universales

Por lo expuesto en 4.1 y 4.2 podemos deducir que para Kepler música y astronomía son manifestaciones de un mismo arquetipo formal. De la misma manera que busca en la astronomía la armonía musical y las reglas de la música polifónica del s. XVI, persigue

igualmente en la música la armonía astronómica. Esto permite concluir que para él la práctica y teoría musicales de la época tienen un carácter cosmológico y por tanto universal.

Kepler equipara magnitudes iguales al comparar los arcos diarios aparentes y las alturas de los sonidos

Cuando Kepler hace equivaler arcos diarios aparentes y alturas de sonidos está equiparando velocidades angulares con frecuencias, es decir, magnitudes que poseen las mismas dimensiones: inversos de tiempo. La identificación de frecuencia y altura de un sonido no se producirá totalmente hasta que Mersenne enuncie su ley. Sin embargo, Kepler, a pesar de no conocer esta ley, comparte la intuición de Vincenzo Galileo o Benedetti, y considera que el movimiento de giro es de alguna manera equiparable a la vibración de un sonido.

5. APÉNDICE

Ordenados de menor a mayor, se exponen en la siguiente lista los intervalos mencionados por Kepler en el libro V de *Harmonices Mundi*, expresados en fracciones menores que 1, esto es, representando proporciones entre longitudes de cuerda, y no entre frecuencias, pues éste era el modo en que los entendía Kepler:

-1/1 Unísono.

-80/81 Comma (de Dídimo).

-24/25 Diesis.

-15/16 Semitono.

-9/10 Tono menor.

-8/9 Tono mayor.

-5/6 Tercera menor.

-4/5 Tercera mayor.

-3/4 Cuarta justa.

-32/45 Cuarta aumentada.

-2^{1/2} Semioctava.

-45/64 Quinta disminuida.

-27/40 Quinta pequeña.

-2/3 Quinta justa.

-5/8 Sexta menor.

-3/5 Sexta mayor.

-1/2 Octava.

6. BIBLIOGRAFÍA

ARISTÓTELES. *De Coelo*. Trad. de Diego Reina en <http://www.mercaba.org/Filosofia> (Consultado el 20 de septiembre de 2009)

CALDERON, Carlos. *Experiencia estética y formulación científica: el caso de Harmonice Mundi*. Inédito. Trabajo de investigación del Doctorado interuniversitario en historia de las ciencias UB-UAB-UPF, 2005.

COHEN, H. Floris. *Quantifying Music: The Science of Music at the First Stage of the Scientific Revolution, 1580-1650*. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1984.

DICKREITER, Michael. "The Structure of Harmony in Johannes Kepler's *Harmonice Mundi* (1619)", en GOZZA, Paolo (ed.). *Number to sound. The Musical Way to the Scientific Revolution*. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 2000.

GARCÍA, Amaya. *El concepto de consonancia en la Teoría Musical. De la Escuela Pitagórica a la Revolución Científica*. Salamanca, Universidad Pontificia de Salamanca, 2006.

GARCÍA, Amaya. *El número sonoro. La matemática en las teorías armónicas de Salinas y Zarlino*. Salamanca, Caja Duero, 2003.

GODWIN, Joscelyn. *Armonía de las esferas*. Girona, Atalanta, 2009. Trad. al castellano de María Tabuyo y Agustín López.

GODWIN, Joscelyn. *Armonías del Cielo y de la Tierra. La dimensión espiritual de la música desde la antigüedad hasta la vanguardia*. Barcelona, Paidós, 2000. Trad. al castellano de Ramadés Molina y César Mora.

GOZZA, Paolo (ed.). *Number to Sound: The Musical Way to the Scientific Revolution*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 2000.

HAWKING, Stephen. *A hombros de gigantes. Las grandes obras de la física y la astronomía*. Barcelona, Crítica, 2005. Trad. al castellano de David Jou, J. L. Arántegui Tamayo, Carlos Mínguez, Mercedes Tesal, Carlos Solís, Javier Sábada, Eloy Rada y Javier García.

JAMES, Jamie. *The Music of the Spheres. Music, Science and The Natural Order of The Universe*. New York, Copernicus, 1995.

KEPLER, Johannes. *El secreto del Universo*. Madrid, Alianza, 1992. Trad., introducción y notas de E. Rada

KEPLER, Johannes. *Harmonices Mundi Libri V*. Linz, 1619. En: http://posner.library.cmu.edu/Posner/books/pages.cgi?call=520_K38PI&layout=vol0/part0/copy0 (Consultado el 11-10-2009)

KEPLER, Johannes. *Las armonías del mundo, libro quinto*, trad. de José Luis Arántegui Tamayo, en HAWKING, Stephen. *A hombros de gigantes. Las grandes obras de la física y la astronomía*. Barcelona, Crítica, 2005.

PTOLOMEO, Claudio. *Armónicas*. Málaga, Miguel Gómez Ediciones, 1999. Trad. al castellano y notas de Demetrio Santos.

RIOJA, Ana. y ORDÓÑEZ, Javier. *Teorías del Universo. Volumen I: de los pitagóricos a Galileo*. Madrid, Síntesis, 1999.

TATARKIEWICZ, Wladyslaw. *Historia de la estética. I. La estética antigua*. Madrid, Akal, 2000. Trad. al castellano de Danuta Kurzyca, Rosa M^a Mariño y Fernando García.

WALKER, Daniel P. "The Harmony of the Spheres", en GOZZA, Paolo (ed.). *Number to sound. The Musical Way to the Scientific Revolution*. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 2000.

7. ANEXO: TABLAS ORIGINALES DE *HARMONICES MUNDI*

	Diej		Ergò diurni medij		
	Diebus	scrupulis.	Min.	Sec.	Tert.
Saturnus	33769.	12	2.	0.	27.
Iupiter	4332.	37	4.	59.	3.
Mars	686.	59	31.	26.	3).
Tell ^o cū Lunā	365.	15	59.	8.	11.
Venus	224.	42	96.	7.	39.
Mercurius	87.	58	245.	32.	25.

Tabla original 2. (KEPLER, *Harmonices Mundi*, liber V, p. 193.)

Comparata Intervalla cum Harmonicis

<i>Bisiorum</i>		<i>Singularum propr.</i>	
<i>Converg</i> $\frac{a}{d} \frac{2}{1}$	<i>Diverg</i> $\frac{b}{c} \frac{5}{3}$	Saturni Aphel. 10032. a	Plus tono minore $\frac{10000}{9000}$
		Perihelium 8968. b	Min ^o tono majore. $\frac{10000}{8933}$
$\frac{c}{f} \frac{4}{1}$	$\frac{d}{e} \frac{3}{1}$	Iovis Aphelium 5451. c	Nulla concinna proportio
		Perihelium 4949. d	sed serè $\frac{11}{10}$ Inconcinna vel dim. de harmonica $\frac{6}{5}$
$\frac{e}{h} \frac{3}{5}$	$\frac{f}{g} \frac{27}{20}$	Martis Aphelium 1665. e	Hic $\frac{1665}{1388}$ est Harmonica $\frac{6}{5}$
		Perihelium 1382. f	$\frac{1665}{1332}$ est $\frac{5}{4}$
$\frac{g}{i} \frac{100}{7071}$	$\frac{h}{j} \frac{27}{20}$	Terra Aphelium 1018. g	Hic $\frac{1020}{950}$ est diesis $\frac{25}{24}$
		Perihelium 982. h	non possidet ergò diesis
$\frac{i}{m} \frac{12}{5}$	$\frac{k}{l} \frac{243}{160}$	Veneris Aphel. 729. i	Minus quàm sesquicomma
		Perihelium 719. k	plus quàm tertia pars diesis.
		Saturni Aphel. 470. l	Plus quàm diapente abun-
		Perihelium 307. m	dans $\frac{243}{160}$ minus quàm Har-
			monica $\frac{8}{5}$

Tabla original 3. (KEPLER, J., *Harmonices Mundi*, liber V, p. 195.)

<i>Harmonia binorum</i>		<i>Apparentes diurni</i>		<i>Harmonia singulorum propria</i>	
<i>Diſt.</i>	<i>Conſt.</i>		<i>diurni.</i>	<i>Prim.</i>	<i>Sec.</i>
			<i>Prim. Sec.</i>		
a 1	b 1	♃ Aphelius	1.46. a.	Inter 1.48	est $\frac{4}{5}$ Tertia major.
		Perihelius	2.35. b.	& 2.15.	
d 3	c 2	♃ Aphelius	4.30. c.	Inter 4.35.	est $\frac{5}{6}$ Tertia minor.
c 8	d 1	Perihelius	5. 30. d.	& 5.30.	
f 1	e 5	♂ Aphelius	26.14. e.	Inter 25.21.	est $\frac{2}{3}$ Diapente
e 5	f 2	Perihelius	3.81. f.	& 38.1.	
h 12	g 3	Tel. Aphelius	57.3. g.	Inter 57. 28.	est $\frac{15}{16}$ Semitonij
g 3	h 5	Perihelius	61.18. h.	& 61.18.	
k 5	i 8	♀ Aphelius	94.50. i.	Inter 94.50.	est $\frac{24}{25}$ Diesis
i 1	k 3	Perihelius	97.37. k.	& 98.47.	
m 4	l 5	♄ Aphelius	164.0. l.	Inter 164. 0.	est $\frac{5}{12}$ Diapason. cum tertia minore
		Perihelius	384.0. m.	& 394. 0.	

Tabla original 4. (KEPLER, *Harmonices Mundi*, liber V, p. 198.)

Harmonia Planetarum omnium seu Universales Generis Duri					
Ut h concordat		Ut c concordat			
In Tensione	Gravissima.	Acutissima.	In Tensione	Gravissima.	Acutissima.
	Sc. Pr. Sec.	Sc. Pr. Sec.		Sc. Pr. Sec.	Sc. Pr. Sec.
♁	380. 20		♁	380. 20	
♃	285. 15	292. 48.	♃	284. 16	312. 21
♄	228. 22	234. 16	♄	228. 22	234. 16
♅	190. 10	195. 14.	♅	188. 10	195. 14.
Venus ♀	95. 5	97. 37	Venus ♀	95. 5	97. 37
Ter. ♁	17. 5	32. 34	Ter. ♁	17. 3	32. 34
♁	15. 39.	36. 36.	♁	15. 2.	36. 3
♂	18. 31.	29. 17	♂	18. 31.	29. 17.
♃		4. 34	♃	4. 45.	4. 37.
♄	7. 14.		♄	7. 14.	
♅	1. 47.	1. 49.	♅	1. 47.	1. 49.

Tablas originales 9 y 10 (KEPLER, *Harmonices Mundi*, liber V, p. 209.)

**Harmonia Planetarum omnium seu univer-
sals Generis Mollis.**

<i>Ut h concordet.</i>				<i>Ut c concordet.</i>				
In Tensione Gravif- sima.		Acutif- sima.		In Tensione Gravif- sima.		Acutif- sima.		
Sc.	Pr.	Sec	Sc.	Pr.	Sec	Sc.	Pr.	Sec
de Gij		379.20		de Gij		379.20		Sc. pr. Sec
b Gij		284.32	292.56	c Gij		316.5		325.28
g Gij		237.4	244.4	f Gij		237.4		244.4
de Gij		189.40	195.14	de Vi		189.40		195.14
				e Gij				162.43
Ven ^o de G		94.50	97.37	Ven ^o de G		94.50		97.37
Tet. g ⁱⁱⁱ		59.16	62.2	Tet. g ⁱⁱⁱ		59.16		62.2
b ⁱⁱⁱ		35.35	38.57					
g ⁱⁱⁱ		29.38	30.51	Mars g ⁱⁱⁱ		29.38		30.51
Jup. b ^j			4.35	Jup. e ^j			4.35	5.9
b ^G		2.35						
				Saturn. G		2.51		1.58

Rursum hic in tensione media concurrunt Sa. | Et hic extritis a helio Iovis. & perihelio Sa.

Tablas originales 12 y 13. (KEPLER, *Harmonices Mundi*, liber V, p. 210.)