UNIVERSIDAD DE SALAMANCA
DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA Y DIDÁCTICA DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES

TESIS DOCTORAL

DESARROLLO CONCEPTUAL DE LOS MÉTODOS ITERATIVOS EN LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES NO LINEALES: UN ENFOQUE DIDÁCTICO

Flor Monserrat Rodríguez Vásquez

Director: Dr. Modesto Sierra Vázquez

Salamanca 2010

UNIVERSIDAD DE SALAMANCA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA Y

DIDÁCTICA DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES

Dr. Modesto Sierra Vázquez, Profesor Titular de Universidad del Departamento de Didáctica de la Matemática y Didáctica de las Ciencias Experimentales de la Universidad de Salamanca

HACE CONSTAR:

Que la presente Memoria titulada **“Desarrollo conceptual de los métodos iterativos en la resolución de ecuaciones no lineales: un enfoque didáctico”** ha sido realizada bajo mi dirección por Flor Monserrat Rodríguez Vásquez y constituye su Tesis para optar al Grado de Doctor.

Y para que conste y tenga los efectos oportunos ante el Departamento de Didáctica de la Matemática y Didáctica de las Ciencias Experimentales de la Universidad de Salamanca, firmo el presente documento.

Salamanca, a de de 2010

Fdo.: Dr. Modesto Sierra Vázquez

A mis hijas
Xochiquetzal y Yoloxóchitl

A Alβan:

Con el apoyo del programa ALβAN, programa de becas de alto nivel de la Unión Europea para América Latina, No. de identificación E03D21720MX.

Agradecimientos

Agradezco a mi tutor y asesor, Dr. Modesto Sierra Vázquez, por su invaluable dedicación, apoyo y paciencia durante el desarrollo de esta investigación. Asimismo, por haber depositado su confianza en mi como estudiante.

También quiero agradecer a la Dra. María Teresa González Astudillo, por sus indicaciones y consejos que ayudaron a enriquecer mi trabajo de tesis.

Del mismo modo, agradezco a mi asesor de tesis de maestría, Dr. Ricardo Cantoral Uriza, por sus consejos, opiniones y reflexiones acerca de esta investigación, así como por su apoyo incondicional en el transcurso de la misma.

Les doy las gracias a mi turma de generación, Isabel, Ademir, Jesús, Pedro Luis, Ana Elisa, Martha, María José, Jeannette, Manolo, Ana, Domingo y Juan por brindarme su amistad incondicionalmente.

Agradezco a mi familia por ser la fuente de mi existir. En especial a mi mamá Luisa† y a mi papá Luis. Y claro, a mis otras mamás que tanto adoro.

También quiero agradecer a cuatro personas muy especiales, pues sin su ayuda me hubiera sido muy difícil la estancia en Salamanca, la querida Tita, como le llaman mis hijas, mi tía Sharai, Ale e Iván.

Asimismo gratifico a mis colegas de trabajo por su apoyo e impulso académico para concluir la tesis.

Finalmente pero no menos importante, le doy gracias a mi esposo, Jesús Romero Valencia, por su amor, su comprensión y su impulso para seguir con ánimo y terminar esta investigación.

Resumen

Este trabajo de investigación, centra su atención en la problemática didáctica de los saberes, al considerarlos como objetos constituidos sin precedente histórico. En particular nos enfocamos en el desarrollo histórico epistemológico de un saber matemático específico, a saber, los métodos iterativos en la resolución de ecuaciones no lineales.

Como referentes teóricos, principalmente enmarcamos a la investigación en la perspectiva histórica epistemológica como línea de investigación, y en la transposición didáctica. En consecuencia, hemos recurrido al análisis de libros antiguos y contemporáneos que nos han permitido mirar una perspectiva de la evolución del saber matemático antes mencionado.

Para el desarrollo del trabajo, nos basamos para las consideraciones metodológicas esencialmente en Ruiz Berrio (1976), y en cuanto a estructura, nos fue de gran importancia la tesis doctoral González (2002) y los trabajos de Sierra, M., González, M.T. y López, C. (1999; 2003). Del primer trabajo, retomamos las etapas del método histórico en la investigación histórica: heurística, la crítica, la hermenéutica y la exposición. Del segundo, retomamos el modelo de análisis de libros históricos que permite caracterizar la información, estructura y (en nuestro caso) el tratamiento de los métodos iterativos. Y del tercer y cuarto trabajo, extrajimos la valiosa metodología para el análisis de libros modernos.

Fundamentalmente nuestro interés es mostrar el tratamiento de dichos métodos, a partir del estudio de su desarrollo conceptual, con el objetivo de profundizar sobre su epistemología y de esta forma tener una visión más amplia de su introducción en la enseñanza, tanto teórica como metodológica.

Abstract

This research work focuses its attention on the didactic problems of knowledge, when they are considered as objects formed without historical precedent. In particular we focus on the historical epistemological development of a specific mathematical knowledge, namely, the recursive methods in the resolution of non-linear equations.

As theoretical referents, we mainly base our research on the historical epistemological perspective line of research, and on didactic transposition. Accordingly, we have resorted to the analysis of old and current books, which have allowed us to look at the perspective of the evolution of mathematical knowledge mentioned above.

For the development of the work, we based our methodological considerations essentially on Ruiz Berrio (1976), and in terms of structure, it was of great importance to us the doctoral thesis González (2002) and Sierra, M., González, M.T. y López, C. (1999; 2003) researches. From the first work, we retook the stages of the historical method in the historical research: heuristic, criticism, the hermeneutics and exposure. From the second, we retook the analysis model of textbooks to characterize the information, structure and (in our case) the treatment of the iterative method. And from the third and fourth work, we extracted the valuable methodology for the analysis of modern books.

Our main interest is to show the treatment of such methods, from the study of conceptual development, with the aim to further its epistemology, and in this way, to have a broader vision of its introduction in education, both theoretical and methodological.

Índice general

Anexos en DVD

Anexo A

- **Isacc Newton.** *De Analysi Per quationes numero terminorum infinitas.* pp. 2-22.
- **Derek Thomas Whiteside.** *The mathematical papers of Isaac Newton. Tomo I.* pp. 78-83/476-481/489-491.
- **Isacc Newton.** *Excerta ex epistolis D. Newton I. Ad methodum fluxionum, et serierum infinitarun spectantibus.* pp. 24-33.

Anexo B

- **Joseph Louis Lagrange.** *Oeuvres de Lagrange. Tomo VIII.* pp. 19-60/159-175.

Anexo C

- **Willian Snow Burnside y Arthur Willian Panton.** *Theory of equations.* pp. 64-67/231-234 .

Anexo D

Índice de cuadros

Índice de figuras

Introducción

La Matemática es una disciplina del conocimiento que plantea una gran cantidad de problemas al momento de ser enseñada, las problemáticas derivadas de su enseñanza son sistemáticamente estudiadas en el campo de la Didáctica de la Matemática o Matemática Educativa. La enseñanza de la matemática cubre todos los niveles educativos y una gran variedad de especialidades, puesto que fundamenta muchas de las herramientas que los escolares ocuparán en sus estudios superiores e incluso en las actividades de su mismo entorno aunque, muchas veces, de manera implícita.

Desafortunadamente existen múltiples dificultades que conllevan a un aprendizaje no favorable preocupando a los distintos actores educativos, lo que conduce a una amplia investigación para conocer los factores que podrían ocasionar tales dificultades. En la disciplina Matemática Educativa algunos investigadores han reportado que esas dificultades provienen del proceso de conceptualización de los estudiantes, otras de su mal manejo por parte del profesor, otras por la epistemología misma del concepto, etc. Ejemplos particulares de temáticas son: el concepto de límite, el concepto de derivada, el concepto de infinito, el concepto de logaritmo, por mencionar algunos dentro de la literatura del Cálculo.

Actualmente, se está dando a conocer una de las ramas de investigación en Didáctica de la Matemática que permite el acceso de forma distinta a las problemáticas en este ámbito, a saber la *Investigación Histórica*, línea de investigación en la que se enmarca esta tesis.

Al seno de esta línea de investigación, nos damos la tarea de indagar sobre el tópico de los *métodos iterativos en la resolución de ecuaciones no lineales de una variable*, temática que se plantea para resolver algunos problemas que no tienen una solución exacta, y que son base de los sistemas numéricos. En este sentido, optamos por realizar un análisis de libros para mirar la evolución que ha sufrido nuestro objeto de estudio.

El desarrollo de la investigación la hemos plasmado en cinco capítulos, los cuales son:

- Capítulo 1. Marco teórico.
- Capítulo 2. Diseño de la investigación.
- Capítulo 3. Libros históricos.
- Capítulo 4. Libros de texto. Ecuaciones no lineales de una variable en la enseñanza contemporánea.
- Capítulo 5. Conclusiones.

En el primer capítulo, mostramos las bases teóricas que fundamentan la investigación realizada. Como eje de nuestro trabajo, reportamos a la Investigación Histórica en Didáctica de la Matemática, posteriormente identificamos el enfoque de la transposición didáctica, como una teoría que plantea el esquema de transformación de los saberes, desde el contexto de su génesis hasta el contexto de su enseñanza en el aula.

Reportamos los diferentes enfoques que se tiene de Pensamiento Matemático Avanzado, ya que uno de los aspectos que le atañen, es el estudio histórico epistemológico de los contenidos matemáticos, lo cual ligado al punto anterior, implica estudiar la transposición didáctica del saber matemático al saber escolar.

Como parte de los referentes teóricos, también nos apoyamos en la visualización como un medio propicio en los procesos de construcción de conocimiento y, finalmente, recurrimos a la tecnología como herramienta fundamental para el tratamiento de los métodos iterativos para ecuaciones no lineales.

Asimismo, como inicio del estudio histórico se hace necesario reportar los antecedentes de dichos métodos.

En el segundo capítulo, documentamos los antecentes de investigaciones al respecto de los métodos iterativos, en nuestro campo disciplinar, planteamos el problema, los objetivos y las hipótesis de investigación. Además describimos los elementos metodológicos que usamos para el desarrollo de la investigación.

Con base en la metodología descrita en el capítulo dos para realizar una investigación de corte histórico, en el capítulo tres reportamos el análisis de libros denominados históricos, acuñando la definición de fuentes históricas dada por Bernheim (citado en Topolsky (2007) y González (2002)) para el que son los "resultados de la actividad humana que por su destino o su propia existencia u otras circunstancias, son particularmente adecuados para informar sobre los hechos históricos y para comprobarlos".

El capítulo cuarto, esta dedicado al estudio de los métodos iterativos en los libros de texto de la enseñanza contemporánea. Schubring (1987) señala que los libros de texto son base teórica y práctica de los agentes didácticos (estudiante-saber-profesor). En este sentido, el estudio de dichos textos nos permite conocer su estructura didáctica. El análisis de estos textos se enfocó en señalar los diferentes tratamientos (geométrico, gráfico y numérico) en los que se presentan los métodos iterativos.

Finalmente en el capítulo cinco, mostramos las conclusiones de la investigación, tanto generales como desde las perspectivas de conocimiento, epistemológico y didáctico.

Al final de los capítulos se incluyen las referencias bibliográficas que han influido directamente en el trabajo, entre ellas, tesis, libros, y artículos que han sido estudiados.

Asimismo incluimos la sección de Anexos en el disco DVD adjunto, en ellos se muestran las reproducciones de los apartados de los libros históricos que fueron analizados; y una breve sección dedicada a la tecnología que actualmente puede ser usada en el tratamiento de los métodos iterativos ya sea desde su forma operativa o desde su implementación en la enseñanza.

Capítulo 1

Marco teórico

Introducción

En este capítulo, mostramos los referentes teóricos que sustentan esta investigación. Es decir, mostraremos las bases teóricas que soportan el tipo de problema a investigar, y al mismo tiempo damos sentido a la investigación misma.

Hemos dividido el capítulo en seis apartados, que involucran los diferentes ámbitos con los que se relaciona esta investigación.

En el primer apartado explicamos la relación del trabajo con la Investigación Histórica en Didáctica de la Matemática. En este sentido, mostramos diferentes corrientes que abarcan dicha línea de investigación. Fundamentalmente nos basamos en los trabajos de Sierra y González[1] y Goméz[2], quienes, en nuestra opinión, son algunos de los investigadores más destacados en esta área.

Posteriormente, describimos a la transposición didáctica como un enfoque teórico que plantea la transición de un conocimiento en su forma original hasta un conocimiento en su forma tangible en el aula. Dicha teoría, fomenta que los libros merecen un estudio más objetivo, en consecuencia, justificamos parte del análisis de libros y retomamos las ideas de Gónzalez (2002), en cuanto a considerar a la transposición didáctica desde el punto de vista de la historia de la educación matemática, es decir, estudiaremos la evolución de un determinado concepto a lo largo del tiempo.

[1]Departamento de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales. Universidad de Salamanca.

[2]Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Valencia.

En este sentido, el PMA, también forma parte de este capítulo, puesto que comprende al análisis histórico epistemológico, bajo la perspectiva de estudiar la evolución de los contenidos matemáticos.

En el siguiente apartado, reportamos a la visualización en educación matemática, como un medio que permite la coordinación de diferentes factores para la adquisición de conocimientos. En esta dirección, mostramos algunas de las investigaciones más recientes que plantean a la visualización como un aspecto presente en la enseñanza de algunos tópicos matemáticos.

En el quinto apartado, enfatizamos el papel que tiene la tecnología en la enseñanza de la matemática, asumimos que ésta, si se trabaja de manera adecuada, podría ayudar en la adquisión de los conceptos matemáticos.

Finalmente, en el apartado seis, reportamos los antecedentes históricos de los métodos iterativos en la resolución de ecuaciones, con la finalidad de enmarcarnos en parte del estudio epistemológico de dicho contenido.

1.1. La Investigación Histórica en Didáctica de la Matemática

Hoy día dentro de la actividad de la investigación en Didáctica de la Matemática, vemos reflejado con gran auge que la línea de Investigación Histórica crece de manera considerable. Los diversos artículos, libros y demás publicaciones en esta dirección tienen una fuerte influencia en el ámbito educativo. En palabras de Goméz (2003):

"... como la mayor parte de la investigación en Didáctica, su objetivo final es el de esclarecer problemas educativos, abordándolos de una manera científica. En otras palabras, desde esta perspectiva se busca encontrar fundamentos para sustentar hipótesis que ayuden a resolver los problemas observados en las matemáticas en situación escolar, en este caso, a la luz que arroja la historia de las ideas."

Según el grupo de investigación en Historia de la Educación Matemática (HEM) de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), esta línea de investigación nace con el giro teórico que sufrió la investigación didáctica en los años 70, al constatarse que: "no deberíamos comenzar desde una teoría del aprendizaje general y neutral respecto del contenido, y derivar de ella una teoría del aprendizaje matemático..., [más bien deberíamos] empezar [desde] procesos de aprendizaje específicos de un contenido" (Bauersfeld y Skowronek, 1976, cit. Gómez, 2003. p. 79).

Bajo este enfoque, surgieron líneas de investigación que incorporaron elementos de la epistemología genética y de la historia de los conceptos matemáticos a fin de poder identificar las principales dificultades y obstáculos didácticos de la construcción de un determinado concepto (Rojano, 1994, p. 46). La evolución ha sido hacia lo que actualmente denominamos el análisis histórico-epistemológico en la investigación didáctica. Este tipo de investigación es un tipo de análisis que toma elementos de la génesis histórica y de la epistemología, a través de la historia de las ideas, para el provecho de la didáctica de las matemáticas. (Filloy, 1999, cit. Gómez, 2003. p. 79)

Ahora bien, al realizar un estudio desde la perspectiva de la génesis histórica, se pone de manifiesto que para un mismo concepto matemático se han ido sucediendo una diversidad de puntos de vista sobre el mismo, que en su momento, fueron considerados como correctos y posteriormente fueron rechazados o revisados. Asimismo, la epistemología auxilia en el establecimiento de la configuración de los elementos constitutivos de la significación de un determinado concepto, analizando los diferentes sentidos con los que ha podido aparecer y su adaptación a la resolución de los distintos problemas.

Con base en lo anterior, tomamos conciencia de que este tipo de investigación se está haciendo cada vez más presente en investigaciones en relación al medio educativo.

1.1.1. Corrientes en la investigación histórico-epistemológica

La perspectiva histórica en la enseñanza

El estudio histórico conceptual en el ámbito educativo podría incrementar a profundidad su entendimiento teórico y práctico, es decir, en sus aspectos y aplicaciones experimentales. Pajus (2000) señala la importancia de que el contenido cultural de las matemáticas podría no sólo reducirse a sus aspectos técnicos. En específico, los textos y referencias históricas, permiten la interacción entre problemas matemáticos y la construcción de conceptos, y conllevan al eje central del cuestionamiento científico en el desarrollo teórico de la matemática. Además, ello prueba que las ciencias, y la matemática en particular, están en continua evolución.

En nuestro caso, podrímos pensar que la asignatura *métodos numéricos* podría suministrar tal propiedad, ya que al ser una materia "práctica" los estudiantes podrían interesarse en su devenir. Como bien sabemos, a través de la historia podemos conocer el marco general en el que se desarrolló algún conocimiento, este es nuestro caso, y nuestro fin es indagar en la evolución de un concepto.

Otra investigación que se apoya en la historia de la matemática, es la de Man-Keung (2000), quien refiere cuatro categorías o niveles de su uso en el salón de clase, las cuales son:

1. Por anécdotas;
2. para ampliar el medio;
3. por contenido;
4. para perfeccionar las ideas matemáticas.

Su conclusión es que usando la historia de las matemáticas en el salón de clase no necesariamente hace que los estudiantes tengan altos niveles de calificación en la materia, pero eso puede hacer que el aprendizaje en matemáticas sea una experiencia animada y significativa. Además menciona que cuidar la evolución en los aspectos de la matemática puede hacer a un profesor más paciente, menos dogmático, más humano, menos meticuloso, y que esto podría reflejarse en que el profesor fuera más reflexivo, más ansioso por aprender y enseñar con un compromiso más intelectual.

Por otra parte Swetz (2000) hace hincapié en que el contenido histórico nos puede informar sobre el desarrollo del conocimiento matemático y sus procedimientos, la utilidad de las matemáticas, y los tipos de problemas que fueron importantes para sus precursores. Por lo que señala que haciendo un reconocimiento y análisis didáctico con tendencia en material histórico, se pueden tener varias direcciones como:

a) La organización de material; el orden secuencial de tópicos y problemas específicos.

b) El uso de instrucciones discursivas y técnicas de motivación contenidas dentro del discurso.

c) El uso de recursos visuales; diagramas, ilustraciones y colores, para ayudar en la comprensión de conceptos por parte del estudiante.

d) El empleo de tácticas de ayuda para clarificar un concepto matemático.

Y finalmente, aunque no menos importante para nuestros propósitos, menciona que los libros antiguos de matemáticas, reflejan un decidido y secuencial orden de tópicos y problemas permitiendo al estudiante construir su propio edificio de entendimiento.

Este acercamiento a la investigación histórico epistemológica, está orientado a la importación al aula de episodios históricos o problemas del pasado para que los estudiantes los discutan o resuelvan. Esta corriente busca enseñar matemáticas desde una perspectiva histórica y su mayor impacto ha sido en un sector del profesorado. Algunas investigaciones que se enmarcan en esta corriente son: Maz (1999); Meavilla (2000); Ortega (2000); Sierra, et al. (1999); González, et al. (2004); Sierra (1997); Sierra, et al. (2002); Castañeda, (2006); Castañeda y Cantoral (2001).

Cabe mencionar que en este ámbito, uno de los trabajos más importantes consiste en el estudio y recuperación de textos clásicos originales. En este sentido, algunas aportaciones pioneras se originaron en el grupo Inter- IREMs de Historia de las Matemáticas; los trabajos firmados por Dhombres (1978, 1992); el número monográfico de la revista For the learning of mathematics (vol. 11. n 2. Junio, 1991); e incluso, la publicación del NCTM, *Historical topics for the mathematical Classrom* (1969).

Otro de los aspectos dentro de esta corriente, es el tratamiento de la historia de las matemáticas por el profesorado, ya que se ha hecho buen uso de la investigación histórica en la formación de profesores. Algunas investigaciones al respecto son: Furinghetti (1997, 2005); Bagni (2000); Dennis y Confrey (2000).

El enfoque de los obstáculos epistemológicos

Otro acercamiento a la investigación histórico-epistemológica, es el que intenta determinar concepciones y obstáculos ligados al desarrollo de una noción matemática, como una herramienta útil para el análisis didáctico de las concepciones y obstáculos que se pueden presentar en los alumnos. Este acercamiento permite diseñar modelos didácticos de situaciones que tengan en cuenta todas las condiciones pertinentes para la construcción de los saberes, tomando en consideración que hay diferencias entre el desarrollo histórico de un concepto y su aprendizaje escolar. Esta corriente fue inicialmente trabajada por el área francófona: Brousseau (1981, 1983); Glaeser (1981); El Bouazzaoui (1988); Sierpinska (1985, 1989, 1992), y de aquí se ha dado pie para otras investigaciones, entre ellas la de Farfán (1993).

Brousseau (1983, p. 173) define a los obstáculos epistemológicos como aquellos identificados en la génesis histórica de un concepto, son obstáculos que tienen su origen en la propia constitución del conocimiento y se les puede encontrar en la propia historia del concepto.

El enfoque del modelo teórico-local

Goméz (2003) menciona que este tercer acercamiento utiliza el análisis histórico epistemológico para hacer un análisis de problemas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y después poner a prueba los hallazgos teóricos en los Sistemas Educativos, de tal forma que después de esta experimentación y con base en resultados prácticos, se tenga una visión de la problemática de la historia de las ideas que corresponda a los resultados didácticos. En este enfoque, el análisis histórico se utiliza en la componente formal del modelo, para la que es prioritario el conocimiento de las matemáticas actuales, y en su uso actual, que se completa con una fenomenología histórica. En esta corriente merecen destacarse los trabajos realizados por Rojano (1985), Puig (1994, 1998), Gómez (1995).

Desde esta perspectiva se han logrado resultados conocidos en el campo del álgebra elemental.

El análisis de los libros de texto

Desde este enfoque, el investigador en didáctica de las matemáticas tiene en los libros de texto históricos una fuente privilegiada de información. El investigador puede buscar en ellos información sobre las relaciones del desarrollo de los contenidos de enseñanza con el desarrollo científico y social, sus antecedentes y su proyección en el futuro, o, puede indagar para determinar la importancia de las mentalidades nacionales específicas y de las filosofías y epistemologías en el progreso de un concepto.

Asimismo puede buscar información sobre el desarrollo curricular y pedagógico: los contenidos seleccionados para la enseñanza; los aspectos conceptuales, actividades, problemas y ejercicios que se enfatizan; sus secuenciaciones, y en definitiva, sus acercamientos metodológicos.

Algunos de los trabajos principales en esta dirección, intentan caracterizar aspectos de la evolución de la enseñanza de una determinada temática, a través del análisis de manuales históricos, al mismo tiempo de indagar si es factible su incorporación a los libros de texto actuales. Algunos de los trabajos realizados en esta dirección son: Bruno y Martinón (2000); Maz (2000); Sierra, González y López (1999, 2003); González (2002); Gómez (2001).

El enfoque de la reproducción en los estudiantes de las etapas en la historia

Bajo este enfoque, se considera que el desarrollo de una noción matemática atraviesa etapas bien definidas, y que los estudiantes también atraviesan en su proceso de aprendizaje por estas etapas. En esta corriente, son elementos decisivos de la investigación, la determinación y caracterización de las etapas así como los mecanismos que explican la transición de una a otra. Algunas investigaciones en esta dirección son: Waldegg y Moreno (1991); Waldegg (1997).

El enfoque socio cultural

Este enfoque se basa en la idea de que el conocimiento está profundamente arraigado y conformado por su contexto socio cultural. Algunas investigaciones en esta dirección son las de: Radford (1996); Cantoral (1990); Farfán (1993)

1.1.2. La didáctica a partir de la historia y el análisis de textos

Freudenthal (1981) considera tres preguntas fundamentales, que nos permiten reflexionar sobre el papel de la historia de las matemáticas:

- ¿Debe un profesor de matemáticas saber algo sobre la historia de ellas?
- ¿Cuál puede ser el uso de la historia de las matemáticas?
- ¿Qué saben los matemáticos sobre la historia de su ciencia?

Al respecto, en el trabajo de Maz (1999) encontramos un acercamiento a posibles respuestas, mostrando una compilación de lo que significa la historia de la matemática en el salón de clase. En primer lugar, menciona que el proceso de enseñanza-aprendizaje contiene terminología que muchas veces el profesor no puede explicar al alumno con las palabras concisas que se requieren, y probablemente el alumno no sea capaz de descodificar lo que el profesor le quiere decir, de tal forma que el profesor debe buscar estrategias y recursos que le permitan expresar de manera comprensible lo que desea enseñar. En consecuencia menciona que la historia de las matemáticas es un buen recurso para ello.

Sin embargo, como menciona Sierra (1997) la implementación de la historia de las matemáticas en clase, debe estar en un nivel didáctico y no como objeto mismo de la enseñanza, esto es, como un elemento motivador, que permita a los estudiantes conseguir una mejor comprensión y entendimiento de las matemáticas, pero teniendo claro que esto no las hará más "fáciles".

Aún así, el uso de la historia de las matemáticas en la enseñanza, ha motivado en los últimos tiempos un inusitado interés, lo cual se ve reflejado en el incremento de artículos e investigaciones hacia este aspecto.

En la misma dirección Furinghetti y Somaglia (1997) nos indican que el trabajo con la historia de las matemáticas en el aula, permite mostrar su origen multicultural y la naturaleza interdisciplinaria de las matemáticas, y de qué manera es relevante en aspectos de la vida humana tales como el arte, la música, la arquitectura, la economía, etc.

Otro aspecto mencionado en Maz (1999), es que la utilización de la historia de las matemáticas permite mostrar que los conocimientos matemáticos no siempre han llevado un desarrollo lineal y rápido, sino que estos se han producido por medio de estancamientos, o retrocesos en muchos casos.

En síntesis, Fauvel (1991) menciona algunas de las razones por las cuales usar la historia de la matemática en la enseñanza:

1. ayuda e incrementa la motivación para el aprendizaje;
2. muestra el aspecto humano de las matemáticas;
3. cambia en los alumnos la percepción de las matemáticas;
4. ayuda al desarrollo de un acercamiento multicultural;

5. provee la posibilidad de un trabajo interdisciplinario con otros maestros;
6. el desarrollo histórico ayuda a ordenar la presentación de los tópicos en el currículo;
7. indica como los conceptos fueron desarrollándose, ayudando esto a su comprensión.

Cabe mencionar que nosotros vertiremos el sentido de la investigación, en mirar sobre la evolución que han sufrido los métodos iterativos para encontrar soluciones de ecuaciones no lineales, a partir de un análisis de libros históricos y de libros contemporáneos, en los cuales algún apartado esté dedicado a este tópico matemático.

Continuando con la reflexión de la historia de la matemática en la enseñanza, Heffer (2004) menciona que la historia conceptual de las matemáticas proporciona un amplio material para la ensenãnza y conduce a una comprensión mejor de las matemáticas y de nuestro conocimiento mismo. El ejemplo que muestra está motivado por la relevancia epistemológica de la historia de las matemáticas y su objetivo es probar que la historia de las matemáticas está llena de oportunidades para ilustrar la pluralidad de métodos y las dinámicas de los conceptos en matemáticas. También menciona que integrar hilos del desarrollo de conceptos de matemáticas en el salón de clase contribuye a la atención filosófica del estudiante.

El trabajo de Heffer muestra cómo a través de la historia de 3000 años se puede aprender algún concepto, en particular, él trabaja con el álgebra simbólica y a partir de este trabajo su conclusión es que, en algunos puntos de la historia hubo un cambio dramático sobre el camino, en que los problemas aritméticos fueron resueltos. Observa que para la segunda mitad del siglo XVI, los problemas algebraicos resueltos llegaron a ser la manipulación sistemática de ecuaciones simbólicas y que el concepto de una ecuación, como la entendemos hoy día, no existe antes de ese tiempo.

Dennis y Confrey (2000) mencionan que una investigación histórica invariablemente va más allá de su descripción original. Ellos reportan que realizaron algunas entrevistas, apoyados en la historia, que les llevó a formular propuestas alternativas para el desarrollo curricular e instruccional.

Asimismo obtuvieron nuevas perspectivas para la formación del profesor, pues consideran que a través de la exploración de un ejemplo histórico, se puede ayudar al profesor a profundizar tanto su conocimiento del contenido, como la perspectiva sobre el mismo. Y lo más importante para ellos fue que, su trabajo histórico los llevó a *reconceptualizar las creencias sobre la epistemología de las matemáticas*.[3]

Argumentan que lo cíclico en la frase "Nuestro trabajo histórico afecta nuestra perspectiva epistemológica, y ésta influye en la manera en la que nos involucramos e interpretamos la historia" (p. 6.), no es una debilidad sino una necesidad. Y al igual que Sierra, et al. (2002), destacan que el trabajo histórico sirve para informarnos sobre el presente, pues muchas de nuestras suposiciones actuales salen a la luz del trabajo histórico. De tal forma que utilizando los textos originales (cuando sea posible) y localizando el trabajo dentro de un contexto socio-cultural e histórico y asumiendo una historia pluralista, podemos intentar entenderla desde la perspectiva de sus creadores.

En el sentido de Confrey (1992) veremos la historia de las matemáticas como la coordinación y contraste entre diversas formas de representación, por ejemplo, qué formas de representación fueron más influyentes para un matemático, por un periodo de tiempo y cómo el matemático se movía a lo largo de estas representaciones para crear, modificar y extender la actividad matemática. En este caso, los autores conducen la investigación histórica considerando cuidadosamente cómo el uso de la geometría y la razón iluminan el desarrollo del pensamiento matemático, buscando evitar enmascarar distinciones en una descripción algebraica genérica.

En la misma dirección, Bagni (2000) nos dice que varios investigadores han mostrado que el uso de la historia de las matemáticas puede influenciar sobre el profesor en la manera de presentar algún tópico matemático para beneficiar a los estudiantes. Y por consiguiente, el papel de la historia de las matemáticas en la enseñanza es legítimamente considerada una parte de la investigación en educación matemática.

De hecho él plantea que se debería considerar el uso educacional de la historia de la matemática en diferentes niveles. Por ejemplo, de acuerdo a la concepción de la educación matemática como transferencia del pensamiento, el principal propósito de la investigación en educación es mejorar la enseñanza. Así que la presentación de tópicos matemáticos usando referencias históricas es consistente con esta aproximación. De hecho, la eficacia de la introducción de la historia podría juzgarse con respecto al aprendizaje de los alumnos.

[3]Las cursivas son de nosotros.

La característica principal de la investigación de Bagni, es su enfoque sobre procesos de transferencia de pensamiento para mejorar su calidad, con lo que se deducen algunas reacciones, especialmente aquellas que son plausibles de las mentes de los estudiantes. En consecuencia propone un ejemplo dentro de la esfera histórica, de tal forma que los estudiantes aprendan en esta esfera, pero de modo que lo alcanzado no sea confinado al ámbito histórico sino que sea necesario estudiar la evolución de diferentes esferas.

Sin embargo, considera que un límite de la eficacia de la educación matemática como transferencia de pensamiento, puede darse cuando se opere solamente sobre la enseñanza, puesto que se cuestiona sobre si esta evolución influirá en los estudiantes. Entonces examina el comportamiento de los estudiantes para responder a un experimento comparativo de enseñanza realizado con dos muestras de estudiantes de nivel secundaria. Con la primera muestra se cotizan las reglas "básicas de Bombelli, y con la segunda una tabla de Cayley. Y lo que se desea es descubrir si las cuatro características usadas en la definición de grupo (cerradura, asociatividad, identidad e inverso) son adquiridas por los estudiantes.

A partir de su estudio exploratorio, concluye que la consideración de ejemplos relevantes de la historia de las matemáticas realmente ayuda en la introducción de tópicos importantes.

Cabe mencionar dos referencias a Dubinsky, E. et al. (1997) hechas en Bagni:

> "... History is certainly a part of our methodology, but we are influenced not only by the record of who proved what and when, but also with the mechanisms by which mathematical progress was made."

> "...there is a close connection between historical and individual development at the level of cognitive mechanism"

Concluye también que la principal limitación de la noción de educación matemática como transferencia del pensamiento se encuentra en la incertidumbre acerca de efectos reales (acerca del aprendizaje) de la selección de maestros. De aquí que es muy importante y necesario controlar el proceso de investigación educativa por verificación experimental: esto puede afectar profundamente la delineación de la investigación y darle importancia, particularmente en el estatus epistemológico.

Esencialmente se puede observar de estas investigaciones, su profundo interés por considerar los precedentes históricos de los saberes matemáticos, como una fuente consolidada de conocimientos, que puede y debe ser parte, de la culturización en el aula, no sólo por los profesores y estudiantes sino también por el sistema educativo actual. En consecuencia, ello nos lleva a reflexionar, que la enseñanza de las matemáticas debe robustecerse con dichos precedentes como parte constitutiva de los conocimientos, ya sea en el sentido cultural o en el sentido de la construcción social de conocimientos matemáticos.

1.2. La transposición didáctica

Dedicamos esta sección al proceso por el que un saber sabio o saber científico se convierte en un saber objeto de enseñanza, o dicho de otra manera al proceso por el cual ciertos contenidos seleccionados como aquellos que se deben enseñar en un tiempo y lugar dados, son transformados en contenidos enseñables: La transpoción didáctica. Esta terminología fue acuñada por Chevallard (1985) y es definida como la transformación del saber científico o saber sabio en un saber posible de ser enseñado.

$\longrightarrow$ Objeto de Saber $\longrightarrow$ Objeto a Enseñar $\longrightarrow$ Objeto de Enseñanza

A partir de la definición, se desprende la noción de existencia de un objeto de saber que es sometido a un proceso de transformación que tiene como resultado la existencia de un objeto de enseñanza. Para tal transformación es necesario operar un doble proceso de descontextualización y recontextualización, que transforma el contenido inicial en un contenido con fines pedagógicos.

La transposición didáctica puede tener dos interpretaciones diametralmente opuestas. La primera de ellas más cercana y fiel a los preceptos positivistas del creador del concepto, y la segunda inserta en el enfoque socioconstructivista, el que a su vez abre una mirada distinta ante las consecuencias que acarrea situar la transposición didáctica en este enfoque epistemológico.

Desde la primera interpretación, el objeto de saber en lugar de ser transpuesto didácticamente, es trasladado didácticamente desde el espacio de su identificación-conocimiento (actividad inherente al científico) hasta el espacio pedagógico de su enseñanza (actividad inherente al docente), ya que al existir en la realidad ubicada allá afuera, el objeto de saber es trasladado desde la disciplina que lo conoce hasta la disciplina que lo enseña, y por ende, no es afectable en un proceso de transformación, por lo tanto, el objeto del docente debe ser idéntico al objeto del científico, de no ser así, lo que enseña uno no corresponde a lo que conoce el otro. Desde esta perspectiva los mecanismos que posibilitan la transposición didáctica no existen, pues no hay transformación, como lo señala Chevallard, y el rol de la didáctica se restringe sólo al desarrollo de técnicas que le permitan al docente facilitar la tarea de aprendizaje de este objeto a sus alumnos.

Desde la visión socio constructivista de la ciencia (Candela, 1999), la realidad es un espacio construido socialmente por quienes interactúan en ella, las características de dicha construcción tiene directa vinculación con la dimensión cultural que perfila a los sujetos interactuantes y socio - constructores de su realidad, por ende el conocimiento constitutivo de esta construcción social se corresponde con la dimensión cultural de la que emerge. El acto epistemológico se encuentra permeado por la experiencia cultural del sujeto conocedor haciendo que el objeto de su conocimiento "herede" en su emergencia de objeto conocido el sustrato experiencial del sujeto.

Esta perspectiva abre la posibilidad de reinterpretar la transposición didáctica de una forma distinta, dado que la socio-construcción del conocimiento del objeto de saber reconocido intersubjetivamente en el ámbito científico, permite la transposición de éste a través de su socio-construcción en el ámbito pedagógico, estableciéndose en la interacción profesor alumno una nueva pretensión de validez intersubjetiva que sea coherente con la ya establecida en el ámbito de su origen (Díaz, 2003).

La transformación que es llevada a cabo en el proceso de transposición didáctica, podemos interpretarla como el cambio que sufre el objeto de saber al ser reconstruido en el aula tanto por el profesor (quien domina los conocimientos de su disciplina) y sus alumnos. El objeto de enseñanza que resulta, ya no es exactamente el mismo del cual se origina, pero mantiene las cualidades que lo distinguen como tal y que permiten su validación por aquellos sujetos del ámbito educativo que lo reconstruyen.

En consecuencia, la labor de la didáctica necesariamente debe distinguir dos aspectos: las características culturales de la disciplina desde donde se origina un objeto de saber; y las características de la cultura escolar en donde se efectuará la transposición didáctica de dicho objeto de saber en objeto de enseñanza.

Ahora bien, pasar del conocimiento científico a los procesos de aprendizaje, requiere que la didáctica busque los mecanismos por medio de los cuales se facilite la socio-construcción del objeto de saber que se pretende transformar en objeto de enseñanza en la relación profesor-alumno, es decir, en palabras de Díaz, se debe facilitar la transposición didáctica desde el ámbito científico entendido como el espacio de realidad socio-histórico-cultural de interacciones entre investigadores en el que emerge el objeto de saber, hasta el ámbito educativo comprendido como el espacio de realidad socio-histórico-cultural de interacciones entre el docente y sus alumnos en el que el objeto de saber se reconstruye como objeto de enseñanza.

McLaren (1989) (Citado en Díaz (2003)) menciona:

> "El conocimiento, desde este punto de vista, es una construcción social que significa que el mundo que habitamos como individuos, es simbólicamente construido por la mente (y el cuerpo) a través de la interacción social, y es excesivamente dependiente de la cultura, del contexto, de las costumbres y de la especificidad histórica"

Una característica de la interpretación histórico-cultural de la transposición didáctica y su vinculación con la epistemología, el lenguaje, el discurso matemático escolar, el ambiente mismo en el que se desarrolla, es que, ello repercute en los diseños curriculares que se hagan bajo la interpretación mencionada, ya que los procesos de selección, organización y comunicación del conocimiento escolar a través de los cuales se encuentra respuesta al ¿qué?, ¿cómo?, ¿cuándo?, ¿para qué? y ¿para quién? enseñar, deben ser tratados a partir de una perspectiva diferente, que sea coherente con las visiones epistemológicas del conocimiento específico a enseñar y a aprender, con la didáctica y con la transposición que ella connota. En este sentido, Díaz menciona que un diseño y práctica curricular que no se ajuste a tales apreciaciones no se articulará adecuadamente al entendimiento socio constructivo y creador del acto educativo.

Hasta el momento hemos descrito parte del vínculo de la epistemología y la transposición didáctica. Ahora bien, otro factor por el que hemos dedicado este apartado a ésta última, es que para operar la problemática de la transposición didáctica de una noción se deben desarrollar tres sistemas de análisis: para la noosphera, para los libros de texto, para los trabajos y las prácticas del maestro (Tavignot, 1993).

Nuestro caso particular se enmarca en el segundo sistema de análisis, puesto que justamente tiene como base la realización de análisis de libros. Aún más, nos interesa conocer la evolución de un cierto contenido matemático, que como ya hemos dicho, se trata de los métodos iterativos para encontrar raíces de ecuaciones no lineales.

Tavignot, refiere tres momentos en el análisis del proceso de transposición didáctica, los cuales retomaremos como un referente en nuestra investigación:

- Primera fase de la transposición didáctica y el impacto de la noosphera. Esta fase se divide en tres momentos: El reconocimiento de los grandes ejes de la evolución de la noción en los saberes de referencia, la presentación de la evolución de éstos en el saber a enseñar y el impacto de la noosphera.

  La localización de los grandes ejes de la evolución de la noción en los saberes de referencia y la presentación de la evolución de éstos en el saber a enseñar toman en cuenta los trabajos existentes en didáctica de las matemáticas y los programas.

  Lo que se propone es efectuar el análisis del impacto de la noosphera a partir de documentos de grupos que producen las propuestas precisas de los programas, después los documentos generados del medio ambiente en el sentido del sistema de enseñanza como una asociación. Este análisis permite descubrir a partir de documentos de grandes categorías de representaciones de los grupos concernientes por las reformas y deducir a partir de semi-directivos de la enseñanza categorías ligadas con representaciones del mismo grupo.

- Segunda fase, los manuales escolares. Se propone realizar el análisis en dos etapas. La primera etapa se centra en los aspectos generados del manual (la organización de los capítulos, las páginas, etc.) y la segunda etapa concierne a los capítulos dedicados a la noción estudiada.

- Tercera fase, las prácticas de la enseñanza. En primer lugar se hace la observación, de que en esta fase no se apoyan en la observación de la enseñanza en clase, puesto que observaron diferentes puntos de vista de la noción misma de estudio y el modo de transmisión prevista, con una entrevista previa y un cuestionario escrito.

Estas tres fases caracterizan el método tridimensional que permite una colección importante de hechos.

Como podemos observar, la transposición didáctica es de alguna manera una evolución "estructurada" del contenido matemático con fines didácticos, lo que nos lleva a la hipótesis de que el proceso de transposición didáctica es un medio para un fin, a saber la reconstrucción de conocimientos.

1.3. Pensamiento Matemático Avanzado (PMA)

En 1985, se forma un grupo de trabajo con el objetivo de estudiar la naturaleza del Pensamiento Matemático Avanzado y en particular de los procesos de enseñanza y aprendizaje de temas relacionados con el cálculo infinitesimal en el congreso del grupo Psychology of Mathematics Education (Tall, 1991).

Azcárate y Camacho (2003) mencionan que lo anterior fue consecuencia de que en esos años, la Didáctica de la Matemática tendía a considar la problemática del aprendizaje de la matemática en términos de procesos cognitivos, y no como simple adquisición de competencias y de habilidades. Asimismo se amplió el campo de los problemas investigados a cuestiones relacionadas con el pensamiento matemático propio de los currículos de los útimos años de bachillerato y primeros cursos universitarios. Además, el desarrollo de la investigación acerca de la enseñanza y el aprendizaje de temas relacionados con el análisis matemático, incluyendo los procesos asociados de definición, prueba y demostración, enriquecieron los modelos que sirven para describir los procesos cognitivos de aprendizaje de los estudiantes.

Algunos de los modelos que se utilizan en la investigación de los procesos cognitivos implicados en el aprendizaje de los conceptos matemáticos complejos, son distintas formas teóricas de describir la naturaleza del conocimiento de los estudiantes y de los procesos de construcción del mismo. Por ejemplo, una de tales formas considera *la definición de un concepto* matemático como una secuencia de palabras o una definición verbal del concepto, fruto de su evolución histórica. En este sentido, se puede distinguir entre las definiciones *formales*, convenidas y aceptadas por la comunidad científica de los matemáticos en un momento dado, las cuales se pueden encontrar escritas en los libros, y las definiciones *personales* que utilizan las personas como interpretación, construcción o reconstrucción de una definición formal.

Azcárate y Camacho, mencionan que una de las razones de la complejidad del conocimiento matemático superior es que, en su mayoría, los conceptos del pensamiento matemático avanzado pueden jugar el papel de procesos y de objetos, según la situación planteada o el nivel de conceptualización del estudiante. En este sentido, Sfard (1991) distingue dos tipos de concepciones de un mismo concepto matemático: las *operacionales*, cuando se tratan las nociones matemáticas como procesos dinámicos, algoritmos y acciones; y las *estructurales*, cuando se consideran los conceptos matemáticos como objetos abstractos estáticos.

Otro aspecto relevante a considerar en relación al PMA, es el papel de las definiciones. Vinner (1991) citado en Azcarate y Camacho (2003), expresa un conflicto diciendo que las definiciones crean un problema muy serio en el aprendizaje de las matemáticas, que representa el conflicto entre la estructura de las matemáticas, tal como la conciben los matemáticos profesionales, y los procesos cognitivos de la adquisición de conceptos. Al respecto, Azcárate y Camacho, deducen que los autores de texto y muchos profesores dan por supuesto que se produce el aprendizaje a partir de las definiciones y que en la resolución de problemas y la realización de tareas son éstas las que se activan en la mente del estudiante y controlan el proceso.

Al respecto del PMA, en España se intenta profundizar en el estudio de diferentes aspectos como son:

- Los procesos cognitivos implicados en el aprendizaje de las matemáticas y que van adquiriendo una progresiva importancia en los cursos superiores: abstraer, analizar, categorizar, conjeturar, representar, conceptualizar, inducir y visualizar, definir, demostrar, formalizar, generalizar y sintetizar, procesos todos ellos que tienen una componente psicológica.

- El estudio histórico y epistemológico de los contenidos matemáticos, con especial referencia a los conceptos fundamentales del Análisis, lo cual implica estudiar la transposición didáctica del saber matemático al saber escolar.

- El papel que juegan los ordenadores y las calculadoras gráficas y simbólicas en la enseñanza y aprendizaje de algunos conceptos importantes del Análisis Matemático.

En el segundo aspecto es donde situamos el presente trabajo, puesto que nos basamos en el estudio histórico epistemológico de un contenido matemático específico, apoyados en el análisis de libros de texto y libros de autores clásicos del análisis matemático entre otros elementos a considerar.

1.4. La visualización en educación matemática

Implícitamente la visualización ha sido desde tiempos antiguos una herramienta utilizada para generar ideas, en nuestra disciplina, asumimos que el ser humano cuenta con la capacidad de darle diferente cognotación a un mismo hecho matemático, de tal manera que esto le ayude a enriquecer su percepción al respecto de ese hecho. En este sentido, la visualización esta presente como un medio para alcanzar un fin.

En esta sección, se mostrarán algunas de las acepciones del vocablo visualización, en el sentido de indagar en su momento, sobre las distintas representaciones del proceso iterativo en la resolución de ecuaciones de una variable.

> "La visualización ofrece un método para ver lo oculto. Enriquece el proceso del descubrimiento científico y fomenta penetraciones profundas e inesperadas. En muchos campos ya está revolucionando la manera en que los científicos hacen ciencia" (Zimmermann y Cunningham, 1990)

El vocablo visualización aparece en el diccionario con varias acepciones como las siguientes: es la acción y efecto de visualizar, es decir, es la acción de imaginar con rasgos visibles algo que no se ve; es la formación en la mente de la imagen visual de algo abstracto; es la representación con imágenes ópticas de fenómenos de otro carácter. Si visualizar es todo ello, se puede percatar la existencia de diversas formas de dar significación a lo que es la visualización.

Investigadores en educación matemática se han interesado en torno a este tópico y aunque hay diversidad de opiniones al respecto, todos ellos coinciden en que la visualización no sólo se refiere al acto de ver u observar las distintas representaciones de un cierto objeto matemático. Una clasificación que he escrito en Rodríguez-Vásquez (2003) al respecto de lo qué es visualización es la siguiente:

1. *La visualización, puede ser el medio que sirve de enlace entre la intuición y el razonamiento.*

Para entender el término visualización en este sentido, referimos el trabajo de Davis (1993), él expone algunos teoremas de geometría elemental y de cálculo, en los cuales se puede hacer uso de la visualización para estimular el entendimiento de los conceptos involucrados en dichos teoremas por parte de los estudiantes. El artículo fue escrito para tratar de redirigir el desequilibrio que el autor observó sobre el énfasis que algunos matemáticos han incrementado en matemáticas sobre visualización y demostración. Él refiere que el término *teorema visual* puede darnos una escasa o amplia definición sobre el contenido matemático. En este último caso, el autor concluye que:

a) Los resultados del plano cartesiano y de la geometría plana parecen ser intuitivamente obvios.

b) Los teoremas del cálculo (o de las disciplinas superiores en matemáticas) tienen una base intuitivamente geométrica o visual.

c) Las gráficas (a mano o de otra forma) se despliegan de la certeza de las conclusiones de la matemática pura o aplicada que pueden ser derivadas a través de la inspección.

d) Los resultados gráficos de programas de computación son organizados coherentemente hacia un camino de certeza.

Para ejemplificar lo dicho en b), menciona que un teorema visual podría ser: *El máximo o mínimo local de una función suave ocurre donde la derivada es cero.*

Al respecto de d), Davis señala que los gráficos resultantes de programación computacional, los cuales a través de la visión son instituidos racionalmente, inspiran hacia el entendimiento de algunas cuestiones matemáticas, por ejemplo, en cuestiones como los gráficos de un fractal, él comenta que el interés visual de esos objetos es considerado por la mayoría de entes como un arte. Sin embargo, aunque los aspectos de las figuras pueden leerse fuera de ser teoremas visuales éstos no pueden concluirse a través de los dispositivos matemáticos no computacionales.

El artículo finaliza con tres acontecimientos principales:

i. El robustecimiento de la componente visual en matemáticas debería reintegrarse a la palabra teorema.

ii. La componente visual, podría reintegrarse al estatus para los procesos de descubrimiento en la enseñanza.

iii. Se vería afectada seriamente a la educación matemática, en particular a los más altos niveles. Además se permitirían establecimientos en la educación matemática para llegar a términos de aspectos matemáticos que son requeridos por físicos, ingenieros, etcétera.

Se puede observar que Davis da cuenta de la investigación a partir de hacer un ligamento, de la intuición visual que se genera a partir del perfil de un teorema con el razonamiento matemático, lo cual refleja como visualización. Por lo tanto argumenta que en la educación matemática podría considerase la inclusión de lo que llama teoremas visuales, los cuales son producto de la intuición *visual* y del razonamiento matemático.

2. *La visualización como la capacidad de articulación dentro de un conjunto de representaciones de un mismo objeto para darle significación a él. Es decir, se favorece la formación de imágenes mentales.*

Un estudio donde la visualización es modelada en este sentido, se ejemplifica por Hodgson (1996). Su ejemplo muestra que la visualización podría provocar dificultades en el entendimiento matemático, sin embargo, se reporta que el suministro de un tratamiento pertinente al formato del contenido enseñado y tomando en cuenta el habitad en el cual se llevó a cabo la experimentación se pudo lograr que los estudiantes, mediante la representación múltiple de un mismo objeto matemático, le pudieran dar la significación correcta.

También el trabajo de Zimmermann y Cunningham (1991) muestra a la visualización en esta dirección, y la refieren como en la siguiente definición:

> "Mathematical visualization is the process of forming images (mentally, or with pencil and paper, or with the aid of technology) and using such images effectively for mathematical discovery and understanding"

En el mismo sentido, mencionamos una definición propuesta por Miguel de Guzmán en su libro *El rincón de la pizarra*:

> "La visualización en matemáticas es una forma de actuar con atención explícita a las posibles representaciones concretas en cuanto desvelan las relaciones abstractas que al matemático interesan"

Sobre esta clasificación, se da prioridad en la visualización a las diferentes imágenes mentales y sus conexiones, entendido esto como un proceso para obtener un entendimiento de las nociones matemáticas.

3. *La visualización como la acción del individuo para conectar diferentes representaciones del objeto matemático.*

En este sentido un ejemplo del tratamiento de visualización se muestra en Duval (1988), él trabajó con un sistema semiótico de representación gráfica que permite definir una regla de codificación: a un punto le corresponde una pareja de números. Sin embargo esta regla de codificación no es suficiente para cambiar de registro (gráfico, algebraico, figuras, escritura simbólica, lengua natural, etc.) Esta dificultad no radica solamente en el hecho de que uno de los registros sea la lengua natural. Pues de la misma manera surgen dificultades en la conversión entre la escritura algebraica de relaciones y su representación gráfica.

Se observa a partir de los resultados, que la conversión del registro de representación algebraico al gráfico exige que se discriminen bien las unidades significantes propias de cada registro. Es decir, es necesario identificar bien en el registro gráfico las variables visuales pertinentes con sus diferentes valores y, en la escritura algebraica de una relación, las diferentes posiciones paradigmáticas que dan una significación no solamente a un objeto sino también a los símbolos utilizados.

Otro ejemplo del tratamiento de visualización reflejado en Duval (1999), es el trabajo con unidades significantes en el registro de los gráficos, éstas son determinadas por ocho valores visuales correspondientes a la asociación de tres variables visuales pertinentes para el registro de los gráficos cartesianos: el sentido de inclinación de una la recta, la posición de la intersección con el eje de las ordenadas, y su posición en relación con un reparto simétrico de los cuadrantes opuestos. Estos ocho valores cualitativos no son separables visualmente.

4. *La visualización como un proceso mental que habilita para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual.*

Cantoral y Montiel (2001) reportan el papel que juega la visualización en la formación de conceptos y procesos matemáticos, específicamente analizan las funciones reales de variable real a través de sus gráficas, y a la par diseñan una serie de actividades didácticas, cuyo objetivo radica en que tanto profesores como estudiantes fortalezcan su propio juicio de comprensión y entendimiento de los conceptos matemáticos relativos a las funciones reales.

En uno de sus apartados, hacen referencia al método de tabulación como una forma humana de organizar información. El objetivo es analizar, entender y utilizar dicha información en otros contextos, tanto científicos como sociales. El análisis que hacen toma lugar en la exploración numérica que admite conjeturar sobre la forma de la función, como por ejemplo, cuando aún no haya quedado claro el valor de los coeficientes de la función lineal $y = mx + b$.

De las actividades que proponen, se observa que los autores construyen la noción de función enfatizando el papel que juega cada parámetro en una función lineal. Se observa también, que la idea subyacente es la de inclinación de la recta, lo cual se ve reflejado en las imágenes que resultan en el desarrollo de la actividad.

En la misma dirección Hershkowitz (citado en Arcavi y Hadas (1998)) afirma que:

> "La visualización no sólo organiza datos a mano en estructuras con sentido, sino que también es un factor importante para guiar el desarrollo analítico... Los ambientes dinámicos no sólo habilitan a los estudiantes para la construcción de figuras con ciertas propiedades y de esta forma visualizarlas, sino que también permiten al usuario transformar en tiempo real aquellas construcciones."

En nuestra opinión, el aspecto visual ofrece la posibilidad de analizar la evolución de los procesos en el tiempo; a partir de la localización de representaciones visuales no sólo como el resultado final de un proceso sino como la evolución del proceso mismo.

1.5. Utilización de recursos tecnológicos en la educación matemática

Esta sección será muy corta debido a que sólo documentamos parte del papel que juega la tecnología en el campo educativo con el propósito de abrir expectativas a futuras investigaciones. Ya que no podremos realizar una investigación sobre la evolución de los métodos iterativos de manera profunda hasta el contexto tecnológico por la amplitud que ello implica, sí queremos enfatizar que sería muy enriquecedor para nuestra disciplina realizarlo. En consecuencia, dedicamos a esta sección el Anexo D en el que reportamos algunas de las tecnologías que se utilizan para el tratamiento de los métodos iterativos para la resolución de ecuaciones no lineales.

La tecnología es parte de los nuevos dispositivos que han causado furor en las últimas investigaciones en lo que a educación se refiere, no sólo como una ventaja en las metodologías de enseñanza, sino también como una dificultad para el desarrollo del raciocinio. En el contexto de la tecnología, se han encontrado investigaciones que enfatizan, que el conjunto de técnicas que son tratadas adecuadamente en una situación de enseñanza pueden favorecer al aprendizaje, sin embargo, se reconoce que ello no siempre es así.

Trouche (2000) se refiere a que una calculadora graficadora llega a ser una herramienta didáctica hasta que el sujeto llega a reconocer sistemáticamente las potencialidades del artefacto tecnológico, sus propios conocimientos y habilidades, todo ello en los esquemas[4] de acción organizados. En el mismo sentido, Berger (1998) hace referencia al medio tecnológico como herramienta didáctica, él distingue entre dos caminos primarios en los cuales la calculadora con capacidad gráfica podría funcionar como mediadora de procesos de aprendizaje: distinción entre los efectos de amplificación de tecnología y los efectos de la reorganización cognitiva de la tecnología. En síntesis, ambos refieren a la tecnología como una herramienta didáctica.

Sin embargo, otras investigaciones reportan a la tecnología como un artefacto puramente técnico, por ejemplo en Quesada (2001) a partir de los resultados de un estudio experimental cuyo objetivo radicó en establecer modelos lineales y no lineales de ajuste de datos con calculadora, se encontró que éstas permiten almacenar y analizar datos con un mínimo de esfuerzo y tiempo.

Por otra parte, en un sentido más amplio de la utilidad de dispositivo con capacidad gráfica, De Faria (2001), con el uso de la tecnología, muestra cómo el teorema que expresa que: *si los puntos de trisección de los lados de cualquier triángulo son conectados a los vértices opuestos, la razón entre el área del triángulo y el área del hexágono resultante es 10*, puede ser generalizado al teorema que expresa que, *cada lado del triángulo es dividido*

[4]Trouche, se refiere a esquema en el sentido de Vernaud.

en n segmentos congruentes, con n par. En sus conclusiones reporta que la tecnología puede apoyar la acción del agente didáctico que es influyente en el funcionamiento del sistema didáctico. Los resultados que obtuvo De Faria nos refleja que el dispositivo tecnológico es un factor determinante en los alcances y limitaciones del tratamiento de un contenido matemático.

En el mismo sentido, Castro (2001) hace hincapié en que con el uso adecuado de la calculadora graficadora en la enseñanza de las matemáticas, tal tecnología permite desarrollar en los estudiantes: la capacidad de análisis, el pensamiento lógico, el proceso dialéctico concreción o abstracción, capacidad de síntesis y creación.

Otra perspectiva, la conjuncíon de las ideas de la calculadora como un artefacto técnico y como una herramienta viable en la organización de los conocimientos, García, M. et al. (2001) observan que las experiencias con la calculadora graficadora funcionan como "facilitadoras" de la formación de conexiones entre los elementos de diferentes registros de representación, de la misma forma, Foster (1999) en su estudio reporta que la utilización de las calculadoras graficadoras es un modo de facilitar la comprensión del concepto de recta tangente integrado con el concepto de derivada de una función en un punto y ello es debido a que estas herramientas permiten la visualización, por lo que el hacer uso de la calculadora graficadora es un soporte a la visualización que a su vez facilita la comprensión de un concepto.

En nuestra opinión la utilización de la tecnología, puede estimular el desarrollo del pensamiento matemático del estudiante. Como ha podido observarse, sólo hemos hecho referencia a algunos dispositivos como son las calculadoras, sin embargo, el tema matemático que estamos tratando es abordado con mucha más frecuencia con algunos softwares de ordenador como son el Maple, Derive, Mathematica, por mencionar algunos. El potencial de estos softwares radica en que el alumno puede explorar el contenido matemático de tal forma que lo lleva a tomar nuevas decisiones y a ver cómo progresa su comprensión y su habilidad para resolver las situaciones planteadas.

Ahora bien, los programas utilizados con más frecuencia hoy día para la enseñanza de las matemáticas pertenecen a lo que en la disciplina llamamos CAS (*Computer Algebra System*), uno de sus potenciales es que permite a los estudiantes examinar el contenido y tener el control sobre las estrategias a implementar en alguna actividad propuesta.

Las posibilidades simbólicas, numéricas y gráficas que ofrecen este tipo de programas están provocando numerosos cambios en la enseñanza y aprendizaje de la Didáctica de la Matemática. De Guzmán (1992), indica que estos cambios giran en torno a dos aspectos básicos de la enseñanza de las Matemáticas: ¿qué destrezas básicas se deberían enseñar en el aula? y ¿cuál sería la forma más adecuada de enseñarlas? A este fin, enfatiza en que para incorporar un CAS en el aula de matemáticas, es necesario diseñar un planteamiento metodológico que evite los peligros asociados al uso de este tipo de sistemas, tales como la pérdida del sentido crítico y la confusión entre manipulación matemática y conocimiento matemático y facilite un aprendizaje experimental que ayude al alumno a progresar en niveles superiores del pensamiento formal.

1.6. La noción de métodos iterativos

1.6.1. Preliminares históricos de los métodos iterativos en la resolución de ecuaciones

El enfoque de nuestra investigación nos exige realizar un estudio de la génesis de los métodos iterativos para aproximarnos a la solución de ecuaciones no lineales, de tal forma que nos de pie a las dificultades de las concepciones de su tratamiento en la enseñanza contemporánea y asimismo obtener una visión más amplia del tema tanto en el contexto histórico como en el social en el cual se desarrollaron. Retomaramos la historia a partir del siglo XVII, puesto que es por esta época que los métodos iterativos entran con fuerza en la Europa Occidental, sin olvidar claramente, que los métodos iterativos ya eran utilizados en la Antigua Grecia por pensadores como Eudoxio, en la antigua Babilonia y por los árabes como Al-Kashi.

Uno de los conceptos ampliamente ligado a los métodos iterativos es el de ecuación diferencial. La literatura muestra que el interés por las ecuaciones diferenciales surge de la necesidad de encontrar nuevos métodos con los que abordar viejos problemas geométricos que consideraron personajes como Leonardo da Vinci (1452-1519), Galileo (1564-1642) o Descartes (1596-1650). Mas tarde con Newton (1642-1727) y Leibniz (1646-1716) inicia el primer periodo (último cuarto del siglo XVII y el siglo XVIII) de la historia de las ecuaciones diferenciales. Algunos problemas que influyeron en el desarrollo de la matemática y los cuales fueron base del enriquecimiento de la teoría de ecuaciones fueron:

- El cálculo de ángulos bajo dos curvas que se intersecan (Descartes)

- La construcción de telescopios (Galilei)
- La construcción de relojes (Huygens-1673)
- La búsqueda de máximos y mínimos de una función (Fermat-1638)
- Encontrar la velocidad y aceleración de un movimiento (Galilei-1638, Newton-1686)
- En astronomía, verificar la Ley de Gravitación (Kepler, Newton)

También en esa época se desarrollaron estudios sobre la dinámica puntual y de los cuerpos rígidos, así como ciertos tipos de problemas geométricos, los cuales conducían a ecuaciones de primer y segundo orden. No obstante el problema principal se centraba en encontrar la pendiente de la tangente a una curva, la tangente o la normal de la curva. (Haireer y Waigner, 1996)

Otro fenómeno que se estudió en el siglo XVII en relación con la tangente o la normal de la curva fue el llamado problema de inversión de la tangente, con este método se trata de hallar una curva a partir de una propiedad dada de sus tangentes, y esta propiedad debe expresarse bajo la forma de una ecuación en la que intervienen las diferenciales[5]. (De Guzmán, 1975)

Leibniz fue uno de los que trabajaron en el problema inverso de las tangentes, dicho problema conduce a la búsqueda de una función $y = f(x)$ que verifique una relación en la que intervengan, a la vez esta función desconocida (la ecuación de la curva buscada), la variable x (abscisa de un punto arbitrario de la curva buscada) y la derivada de la función (pendiente de la tangente de esta curva), y tal relación se llama Ecuación Diferencial, resolverla significa hallar todas las funciones $y = f(x)$ que la verifican idénticamente. Estas funciones constituyen las integrales de la ecuación diferencial y se llaman así ya que la resolución de tales ecuaciones se realiza, generalmente, mediante cuadraturas.

Precedente al trabajo de Leibniz, con la teoría de fluxiones de Newton aparecen dos problemas fundamentales del cálculo infinitesimal:

- Dada una relación entre los fluentes (corresponde a funciones) hállese la relación que satisface las fluxiones (corresponde a derivadas respecto del tiempo).

[5]En la época de Descartes se referían con diferenciales a lo que hoy conocemos como Ecuaciones Diferenciales.

- Dada una ecuación, que contiene fluxiones, hállese una relación entre las fluentes.

  Lo que términos modernos significa: *Dada la ecuación diferencial hallar su solución.*[6]

Newton define cantidades fluentes como cantidades que varían con respecto al tiempo y fluxión como la velocidad de cambio de una cantidad fluyente con respecto al tiempo. Y se destaca que fue él quien introdujo la notación punteada para las fluxiones. El método general empleado por Newton fue el **método de aproximaciones sucesivas**, lo cual era natural pues tenía en cuenta que la solución por cuadraturas conducía a funciones a menudo trascendentes no bien conocidas.

Sin embargo, fue Leibniz el primero[7] en introducir el término "ecuación diferencial" y junto con Jacob Bernoulli (1654-1705) y Johann Bernoulli (1667-1748) introdujeron los fundamentos para la clasificación de las ecuaciones diferenciales y de los métodos generales para la reducción de ecuaciones diferenciales a cuadraturas. Ellos lograron determinar métodos para resolver ecuaciones de primer orden mediante variables separables, ecuaciones homogéneas, y encontraron el método del factor integrante (Nápoles y Negrón, 2002).

Posteriormente se refleja una avance en el desarrollo de la matemática cuando Newton, Leibniz y Johann Bernoulli descubren de manera independiente que la integración es la operación inversa de la diferenciación, así se estudiaron problemas en los que se pedía encontrar la primitiva de una función $f(x)$ dada, es decir, que se encontrara una función $y(x)$ satisfaciendo $y'(x) = f(x)$. Esto condujo a estudiar problemas más difíciles en donde se consideraba una función f dependiente de una función desconocida $y(x)$, lo cual se traduce en encontrar una función $y(x)$ tal que $y'(x) = f(x, y(x))$ para toda x en un cierto intervalo[8]. En Gutiérrez (2006), encontramos los siguientes ejemplos de este tipo de problemas:

---

[6]En este contexto Ecuación Diferencial = Ecuación Fluxional.

[7]Nápoles y Negrón (2002), mencionan que existen historiadores que afirman la imposibilidad de ser precisos, por ejemplo, mientras Ince en su libro *Ordinary Differential Equation* (1936), afirma que fue Leibniz quien explícitamente habló primero de ecuaciones diferenciales, Kline en *Mathematical Thought From Ancient to Modern Times* (1972) afirma que fue Huygens en el *Acta Eruditorum* de 1693, e incluso en una fecha distinta dada por Ince.

[8]Ecuaciones diferenciales ordinarias.

La Isócrona de Leibniz. Este problema fue propuesto por Leibniz en 1686, consistía en encontrar una curva $y(x)$ tal que cuando un cuerpo es deslizado a lo largo de la curva, su velocidad vertical $\frac{dy}{dx}$ es siempre igual para una constante dada $-b$, es decir, la determinación de la curva descrita por un móvil que desciende con velocidad constante. La primera solución a este problema fue dada por Leibniz en 1689, y un método general para encontrar la solución con la ayuda del cálculo diferencial moderno, fue publicado por Jacob Bernoulli en 1690.

La Tractrix. El problema fue propuesto por el anatomista y arquitecto Claude Perrault (1613-1688), la pregunta fue: ¿Para cuál curva es la tangente en cada punto P, de longitud constante a entre P y el eje x? Leibniz publicó su solución en 1693.

La Catenaria. Es la curva que se obtiene del problema de determinar la forma que adopta una cuerda, flexible y homogénea, fijada por sus extremos, sometida tan sólo a la acción de su propio peso. La solución de este problema, por Leibniz y Johann Bernoulli fue un enorme éxito para el nuevo cálculo.

La Braquistócrona. El problema consiste en considerar dos puntos A y B dados en un plano vertical y una partícula M que empieza su recorrido en A descendiendo sólo bajo la influencia de su peso. Se quiere encontrar la trayectoria AMB para la cual el recorrido de M hasta B es mínimo. Es decir, se debía encontrar la curva descrita por un cuerpo que se mueve, entre dos puntos fijos, situados a distinta altura, desde el más alto al más bajo, sometido solamente a la acción gravitatoria. Los hermanos Bernoulli dieron solución al problema, sin embargo, la solución de Jean fue mucho más elegante ya que hizo una analogía al principio de Fermat.

Los antecedentes de este problema se remontan a Galileo, él estudiaba el movimiento de los cuerpos a lo largo de planos inclinados y se preguntó, dados dos puntos a distinta altura y situados en verticales distintas, cuál de las dos trayectorias conectándolos, la recta o la circular, sería recorrida antes por una bola que se moviera a lo largo de ella por efecto de la gravedad. Galileo postuló entonces que la bola caería más rápidamente por la trayectoria circular. Posteriormente en 1696, Jean Bernoulli planteó el problema más general, imaginó una trayectoria en forma de curva arbitraria y formuló la cuestión siguiente: ¿qué curva de entre todas las posibles logra un descenso más rápido de la bola?

Los problemas anteriores fueron resueltos a partir del cálculo integral y aún más, lo que se planteaba era la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias. Los métodos que implícitamente se estudiaron y que pueden ser resueltos por el cálculo de integrales son: ecuaciones con variables separables, ecuaciones lineales homogéneas, ecuaciones lineales no homogéneas.

Posteriormente en el siglo XVIII el problema de la cuerda vibrante fue el punto de partida para el estudio de las ecuaciones diferenciales parciales, las cuales fueron introducidas en primer lugar por problemas de física y más tarde por problemas de geometría diferencial y de hidrodinámica. En este periodo contribuyeron al desarrollo de la teoría matemáticos como Euler (1707-1783), Clairaut (1713-1765), D'Alembert (1717-1783) y Lagrange (1736-1813).

Euler utilizó la teoría de ecuaciones diferenciales en varios problemas de mecánica, geometría y análisis. Y es aquí donde la teoría de ecuaciones diferenciales se transforma en una disciplina independiente, con sus dos grandes ramas, ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales. En 1743, presentó el método clásico de solución de la ecuación diferencial ordinaria lineal con coeficientes constantes y demostró que la solución general de la ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes de orden n es una combinación lineal de n de sus ecuaciones particulares, así, introdujo por primera vez los términos "solución particular" y "solución general". 10 años después (1753) publicó un método para la solución de ecuaciones lineales no homogéneas de coeficientes constantes, mediante la reducción sucesiva del orden.

Asimismo los problemas de mecánica celeste, en particular el estudio de los movimientos lunares, motivaron el desarrollo de procedimientos de aproximación para resolver ecuaciones diferenciales. (De Guzmán, 1975)

La teoría de ecuaciones diferenciales, a finales del siglo XVIII llegó a ser una de las disciplinas de la matemática más importante convirtiéndose en instrumento principal en el estudio científico.

Durante el siglo XIX, las nuevas ideas y métodos del análisis ejercieron un impresionante influjo sobre la teoría de ecuaciones diferenciales. Entre estas ideas están: el concepto de límite, infinitésimo, continuidad, diferencial, etc., los cuales recibieron una formulación exacta en términos aritméticos; la integral, que era interpretada como un valor particular de una función primitiva, se definió como el límite de una suma; se comenzó a considerar la convergencia de las series infinitas; el concepto de función tomó su forma moderna; aparecieron los problemas de existencia de los objetos introducidos por medio de procesos infinitos, como son, límites de sucesiones, integral definida de una función continua, función primitiva, etc.

De esta forma, se preparó el camino para la construcción de una teoría general de función de una variable compleja. Los matemáticos destacables en esta época para el desarrollo del análisis fueron, A. Cauchy (1789-1857), C. F. Gauss (1777-1855), B. Bolzano (1781-1848), B. Riemann (1826-1866), K. Weiertrass (1815-1897), entre otros.

A diferencia de los matemáticos del siglo XVIII quienes partían de la creencia de que siempre existían soluciones generales, Cauchy hizo notar el papel que desempeñan las integrales que aparecen en física y geometría (entre éstas las integrales de ecuaciones diferenciales), muestra que las constantes y las funciones arbitrarias que intervienen en ellas han de ser siempre definidas, es decir, que intuitivamente era claro que tales ecuaciones tenían soluciones. De esta manera se originaron los llamados problemas de Cauchy, cuestiones de la existencia y unicidad de soluciones de las ecuaciones diferenciales. Su método creado entre 1820 y 1830 y aplicable a la ecuación $y' = f(t, y)$ consiste en *aproximar la solución a través de una apropiada sucesión de funciones poligonales*. Cauchy requería que f y $\frac{df}{dy}$ fuesen continuas. Sin embargo en 1876 Lipschitz (1832-1903) debilitó la hipótesis reemplazando la continuidad por la condición que lleva su nombre, la cual se enuncia como sigue:

Sean $D \subset \Re^{n+1}$ y $f(t, y)$ una función $f : D \to \Re$. Decimos que f es lipschitziana (respecto a la variable y) en D si existe una constante $L > 0$ (o constante de Lipschitz) tal que si $(t, y_1), (t, y_2) \in D$ entonces $\| f(t, y_2) - f(t, y_1) \| \leq L \| y_2 - y_1 \|$

Los teoremas de existencia tuvieron importancia no sólo desde un punto de vista puramente teórico, en cuanto que justificaron la aplicación de los métodos de la teoría de ecuaciones diferenciales a problemas de física. Y sirvieron de fundamento para los diversos procesos de integración numérica de ecuaciones diferenciales que fueron elaborados a lo largo del siglo XIX.

También a Cauchy se debe la idea fundamental del método de aproximaciones sucesivas, que en forma más moderna y general fue presentado en 1890 por E. Picard (1856-1941). En la segunda mitad del siglo XIX y principios del XX, se obtienen estudios a partir de las ecuaciones diferenciales ligados con aspectos dinámicos como son la teoría cualitativa y el problema general de la estabilidad de sistemas y que se fundamentaron con los trabajos de Euler, Cauchy, Picard y más tarde con Poincaré. Otros matemáticos destacables es esta época son F. Klein (1849-1925), S. Lie (1842-1899), Lyapunov (1857-1918) y G. D. Birkhoff (1884-1944), este último desarrolló una teoría cualitativa abstracta de los llamados sistemas dinámicos, los cuales aparecen en conexión con las ecuaciones diferenciales de primer orden.

Asimismo la teoría de las ecuaciones diferenciales se vio perfeccionada con el **método de las aproximaciones sucesivas**, método que demuestra que bajo condiciones muy generales, un problema de valores iniciales tiene solución, y que esa solución es, además, única.

1.6.2. Métodos iterativos para resolver ecuaciones de una variable

En una primera revisión general de libros de texto en la enseñanza de los métodos iterativos para encontrar soluciones de ecuaciones de una variable, se considera que los estudiantes conozcan al menos 5 o 6 métodos "elementales" para su resolución, entre ellos:

1. Método de iteración simple o Método de iteración de punto fijo o Método de la sustitución sucesiva.
2. Bipartición de un intervalo.
3. Método de la secante.
4. Método de la falsa posición y método de la falsa posición modificada.
5. Método de Müller.
6. Método de Newton-Raphson.
7. Método de Bairstow.

Al respecto, Nakamura (1997) enfatiza que los estudiantes deben aprender los pros y los contras de cada método, en particular de las dificultades y familiarizarse con los métodos mediante la práctica de la computadora.

El problema principal consiste en resolver ecuaciones de la forma:

$$f(x) = 0 \tag{1.1}$$

en donde $f(x)$ puede ser una ecuación algebraica no lineal en la variable x, es decir, puede tener la forma de un polinomio en x de grado n

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots a_n = 0 \tag{1.2}$$

donde $a_i, i = 1, 2, 3, 4, \cdots, n$ son constantes y podrían ser reales o complejos.

O también, puede ser una ecuación trascendental, es decir, una ecuación en la que se incluyan formas trigonométricas o exponenciales como por ejemplo $xtanx - coshx = 0$

Ahora bien, se dice que una solución de la ecuación (1.1) es un valor de x el cual hace $f(x)$ igual a cero. En general hay n valores de x los cuales satisfacen (1.2). Los valores de x que satisfacen (1.1) son llamados raíces de la ecuación.

Algunos problemas donde podemos encontrar ecuaciones algebraicas no lineales son: problemas de encontrar las frecuencias naturales de sistemas libres de varios grados, cargas de estabilidad de estructuras y frecuencias oscilantes en circuitos eléctricos, por mencionar algunos. En general, se considera que los polinomios de grado mayor que tres y las ecuaciones trascendentales deberían ser resueltos por algún método de aproximación. Estos métodos son esquemas iterativos basados sobre la mejora sucesiva de alguna aproximación inicial a la raíz. En lo que sigue expondremos el procedimiento que sigue cada uno de ellos.

1. **Método de iteración simple o Método de sustitución sucesiva o Método de iteración de punto fijo**

   Este método es presentado en primer lugar por su importancia histórica y para ilustrar el procedimiento básico iterativo. El método generalmente se usa para resolver ecuaciones del tipo (1.1). El algoritmo para la iteración simple es obtenida escribiendo la ecuación (1.1) como

   $$f(x) = x - F(x) = 0 \tag{1.3}$$

   y resolviendo para x,

   $$x = F(x) \tag{1.4}$$

   la ecuación (1.4) es la fórmula iterativa para mejorar una aproximación inicial a la raíz. Si $x = x_0$ es la aproximación inicial, x_0 se coloca en el lado derecho de (1.4) para dar el primer valor de la iteración. Sea este valor x_1

   $$x_1 = F(x_0) \tag{1.5}$$

La función $F(x)$ es entonces evaluada en $x = x_1$ para dar la segunda iteración. Este proceso continua acordado por

$$x_{k+1} = F(x_k) \tag{1.6}$$

hasta una aproximación satisfactoria hecha o hasta que se establece que el proceso no es convergente a una raíz.

Un ejemplo gráfico y su interpretación verbal son los siguientes:

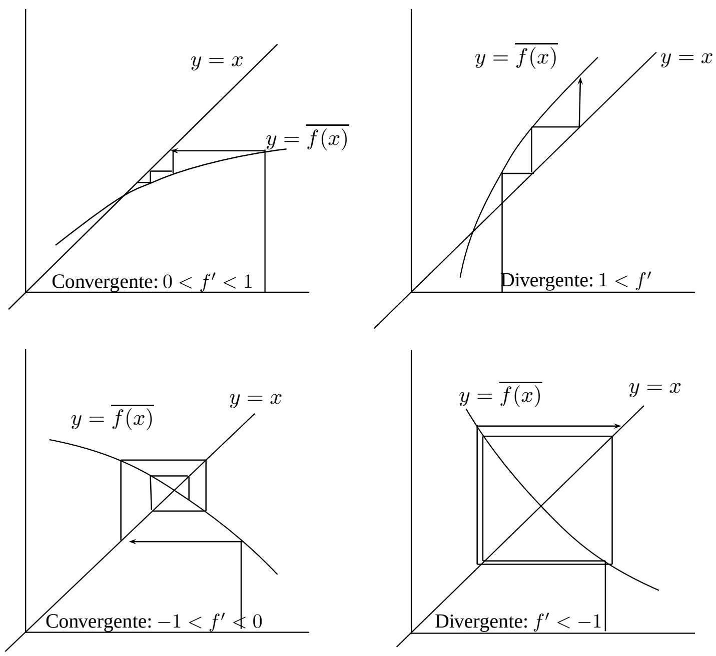


Figura 1.1: Método de punto fijo.

Es decir, en un mismo plano se traza $y = x$ y $y = F(x)$. Leyendo horizontalmente, de las dos primeras gráficas se observa que en la de la izquierda $F(x)$ tiene una inclinación menor pronunciada que la gráfica de $y = x$ y a su vez que la gráfica $F(x)$ de la derecha. La intersección de las dos curvas en cada figura define un valor de x que es igual a $F(x)$ y por lo tanto una raíz de $f(x) = 0$. Para iniciar la iteración de punto fijo, se debe elegir un valor inicial x_0. El valor de $F(x_0)$ da para el punto sobre la curva $F(x)$ en $x = x_0$, el valor x_1. En $x = x_1$, obtenido gráficamente por proyección sobre la línea $y = x$, el valor de $F(x_1)$ es obtenido. Esto da x_2, y el proceso continua para valores siguientes en la secuencia.

El comportamiento de los procedimientos en las figuras son completamente diferentes. En el primer caso, la sucesión $x_1, x_2, x_3, \cdots$ converge al punto de intersección, mientras en el segundo caso, la sucesión diverge y por lo tanto este método no puede ser usado para encontrar la raíz.

Algunos autores como Beckett y Hurt (1967) hacen la observación de que el factor crítico en el comportamiento del método es la inclinación (pendiente) de la función $F(x)$ en la vecindad de la intersección, es decir, si la pendiente de $F(x)$ es menor que 1 en valor absoluto el proceso convergerá a la raíz. Será absolutamente lento si $\mid F'(x) \mid$ es levemente menor que 1. Si $\mid F'(x) \mid > 1$ la sucesión diverge.

Nakamura resume que la sustitución sucesiva es una clase amplia de esquemas iterativos para encontrar una raíz de una función, la cual incluye como casos especiales al método de Newton y al método de la secante.

2. **Bipartición de un intervalo**

   El método de bipartición está basado en encontrar un intervalo dentro del cual la curva cruza el eje y entonces repetidamente se divide por 2 el intervalo en el cual ocurre la intersección.

   Algunos autores coinciden en que este método, es el más simple, el más seguro y el más sólido para encontrar una raíz en un intervalo donde se sabe que existe dicha raíz. Su única ventaja es que funciona para funciones no analíticas. Su interpretación gráfica puede verse en la siguiente figura:

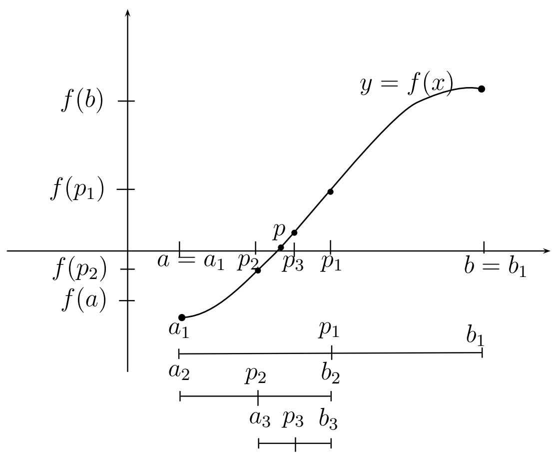


Figura 1.2: Método de bisección.

No es difícil intuir el procedimiento a partir de la figura.

Burden (2001) enfatiza que este método es claro desde el punto de vista conceptual, sin embargo uno de sus inconvenientes es que puede converger muy lentamente e inadvertidamente podemos desechar una buena aproximación intermedia. **La importante propiedad de este método es que siempre converge en una solución.**

Otro inconveniente, según Nakamura, es que éste método puede atrapar singularidades como si fueran raíces, pero aclara que ese problema se puede evitar verificando si $\mid f(b) - f(a) \mid$ converge a cero cuando se está llevando a cabo el método de bisección.

En resumen, las características principales de este método son:

- El método de bisección encuentra una raíz de una función si se sabe que la raíz existe en un intervalo dado.
- El método de bisección encuentra una raíz aún cuando la función no sea analítica.
- Se puede atrapar una singularidad como si fuera una raíz, debido a que el método no distingue entre raíces y singularidades.
- Se debe realizar antes de aplicar el método de bisección es encontrar un intervalo que contenga a la raíz. La búsqueda de raíces se

puede llevar a cabo listando una tabla de valores o graficando la función en la pantalla.

3. **Método de la secante**

   Este método se basa en la aproximación a la curva en la vecindad de una raíz por una línea recta. El valor de la variable x que podría hacer la función lineal igual a cero es la aproximación a la raíz y forma las bases para el algoritmo del método de la secante. En el caso de las raíces reales la aproximación a la raíz es el valor de x en el cual la línea recta cruza el eje x.

   Este método es muy similar al de Newton, la diferencia es que con éste, f' se aproxima tomando dos valores de iteraciones consecutivas de f, lo cual elimina la necesidad de evaluar tanto a f como a f' en cada iteración. En consecuencia, este método es más eficiente particularmente cuando f es una función en la que se invierte mucho tiempo en evaluarla. El método está muy relacionado con el método de la falsa posición, ya que ambos se basan en la fórmula de interpolación lineal, el primero utiliza extrapolaciones y el segundo interpolaciones.

   Así, el método de la secante es una variación del método de Newton, pero desde el punto de vista computacional es más eficiente que éste. Y debe considerarse muy importante que si dos aproximaciones sucesivas están demasiado cercanas, pueden aparecer errores de redondeo.

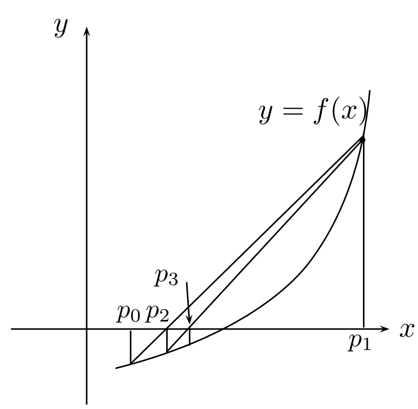


Figura 1.3: Método de la secante.

Los valores de x en x_0 y x_1 son usados para empezar la secuencia iteración. El valor de los valores iniciales son evaluados en la función, se pasa una recta a través de los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_1, f(x_1))$, la cual tiene por ecuación

$$\frac{x - x_1}{f(x) - f(x_1)} = \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} \tag{1.7}$$

La intersección de esta línea con el eje x es la aproximación a la raíz y se obtiene haciendo $f(x) = 0$ en (1.7), lo cual da la fórmula de iteración básica para el método de las secantes

$$x = x_1 - \frac{(x_1 - x_0)(-f(x_1))}{f(x_1) - f(x_0)} \tag{1.8}$$

La aproximación obtenida en (1.8) es el valor x_2, el cual es usado con x_1 para obtener una nueva aproximación de línea a la curva que pasa por los puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$. La intersección de la línea con el eje x da la siguiente aproximación a la raíz designada por x_3. El procedimiento continua hasta que se encuentra un valor satisfactorio o hasta que se establece que el procedimiento es divergente.

Beckett y Hurt hacen la observación de que este método podría no converger a una raíz en la vecindad de los valores iniciales y que cuando esto pasa es algunas veces suficiente alternar los valores iniciales x_0 y x_1 para iniciar la iteración. El método de las secantes se adapta tanto a raíces reales como a imaginarias. Especialmente se usa en las formas no polinomiales donde los métodos de Newton-Raphson y Lin-Bairstow no pueden ser usados.

4. **Método de la falsa posición y método de la falsa posición modificada**

   Este método esta basado en la interpolación lineal, es análogo al método de la bisección, puesto que el tamaño del intervalo que contiene a la raíz se reduce mediante iteración. La diferencia es que en vez de bisectar, se utiliza una interpolación lineal ajustada a los puntos extremos para encontrar una aproximación de la raíz. En consecuencia, si la función está bien aproximada por la interpolación lineal, entonces las raíces estimadas tendrán una buena precisión y la convergencia se dará más rápido que con el método de bisección.

Es decir, dado un intervalo $[a, c]$ contenga a la raíz, la función lineal que pasa por $(a, f(a))$ y $(c, f(c))$ se describe como

$$y = f(a) + \frac{c-a}{f(c)-f(a)}(y - f(a))$$

o despejando x

$$x = a + \frac{c-a}{f(c)-f(a)}(y - f(a))$$

La coordenada x en donde la línea intersecta al eje x se determina al hacer $y = 0$ en la ecuación anterior, es decir,

$$b = a - \frac{c-a}{f(c)-f(a)} f(a)$$

Luego de encontrado b, el intervalo $[a, c]$ se divide en $[a, b]$ y $[b, c]$. Si $f(a)f(b) \leq 0$ la raíz se encuentra en $[a, b]$. En caso contrario está en $[b, c]$. Así los extremos del nuevo intervalo se renombran y el procedimiento de interpolación se repite hasta que las raíces estimadas convergen.

Una de las dificultades que presenta el método es que pueden aparecer extremos fijos y esto implica la convergencia más lenta y por un sólo lado, sin embargo, el método de la falsa posición modificada elimina esta dificultad. En este método, el valor de la función f en un extremo se divide entre dos si no se mueve de inmediato. Las figuras siguientes ilustran ambos procedimientos.

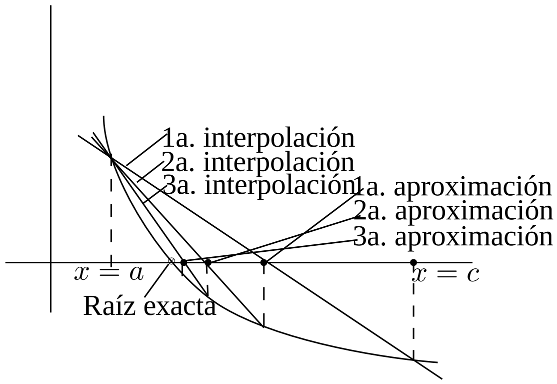


Figura 1.4: Método de la falsa posición.

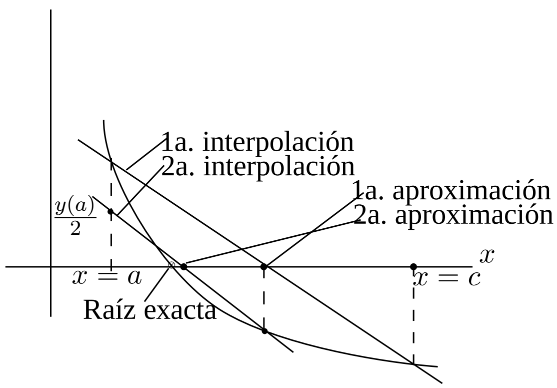


Figura 1.5: Método de la falsa posición modificada.

5. **Método de Müller**

   El método de Müller es similar en concepto al método en el cual la curva $f(x)$ es remplazada por una forma simple. En este método la aproximación es una ecuación cuadrática, lo cual generalmente converge más rápido que el método de la secante y por lo tanto da una aproximación aceptable a la raíz en pocas iteraciones.

   A continuación describimos el método. Sean x_1, x_2 y x_3 tres puntos en una vecindad de la raíz buscada. Sea x_3 una aproximación a la raíz, entonces,

$$x_2 = x_3 + \delta; x_1 = x_3 - \delta \tag{1.9}$$

   donde δ es una estimación del máximo error en x_3. (Si no hay información acerca de los valores iniciales se sugiere $x_3 = 0, x_2 = 1, x_1 = -1.$) Se calcula el valor de $f(x)$ en cada valor inicial y se construye la cuadrática que pasa por estos 3 puntos y que tiene por ecuación:

$$\begin{aligned} y(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} f(x_1) \\ + \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} f(x_2) \\ \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} f(x_3) \end{aligned} \quad (1.10)$$

La ecuación (1.10) es una aproximación a $f(x)$ en la vecidad $x = x_3$. Se asume que las raíces de $y(x)$ serán aproximaciones a las raíces de $f(x)$ en la región de aproximación. En particular la raíz de $y(x) = 0$ que es la mas cercana a x_3 es elegida como la nueva aproximación de $f(x) = 0$. Esta raíz se denomina x_4 y es usada en lugar de x_1 en una nueva aproximación cuadrática a $f(x)$. La nueva cuadrática se resuelve para la raíz más cercana a x_4 y el procedimiento se repite una y otra vez. Se continua hasta obtener una aproximación satisfactoria.

Para facilitar las operaciones se hace un cambio de variable:

$$\lambda = \frac{x-x_3}{x_3-x_2}$$
$$\lambda_1 = \frac{x_3-x_2}{x_2-x_1}$$
$$\delta_1 = \frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}$$

Y entonces (1.10) se transforma en la cuadrática en λ:

$$\begin{aligned} \lambda^2\lambda_1\delta_1^{-1}[\lambda_1 f(x_1) - \delta_1 f(x_2) + f(x_3)] \\ + \lambda\delta_1^{-1}[\lambda_1^2 f(x_1) - \delta_1^2 f(x_2) \\ + (\lambda_1+\delta_1) f(x_3)] + f(x_3) = y(\lambda) \end{aligned} \quad (1.11)$$

La ecuación (1.11) se resuelve para $\frac{1}{\lambda}$ y entonces invirtiendo el resultado se obtiene:

$$\lambda = \frac{-2\delta f(x_3)}{g_1 \pm \sqrt{g_1^2 - 4\delta_1 C_1 f(x_3)}} \quad (1.12)$$

donde,

$g_1 = \lambda_1^2 f(x_1) - \delta_1^2 f(x_2) + (\lambda_1 + \delta_1) f(x_3)$ y $C_1 = \lambda_1[\lambda_1 f(x_1) - \delta_1 f(x_2) + f(x_3)]$

El signo en la ecuación (1.12) se elige para que λ tenga el mínimo valor absoluto. La nueva aproximación a la raíz es

$$x = x_3 + \lambda(x_3 - x_2) \tag{1.13}$$

Si x es una raíz aproximada se siguen los pasos, si no, para la nueva iteración x_2 se reemplaza x_1, x_3 podría reemplazar x_2 y la nueva aproximación a la raíz en (1.13) reemplazará a x_3. Se hace otra iteración utilizando las ecuaciones (1.12) y (1.13).

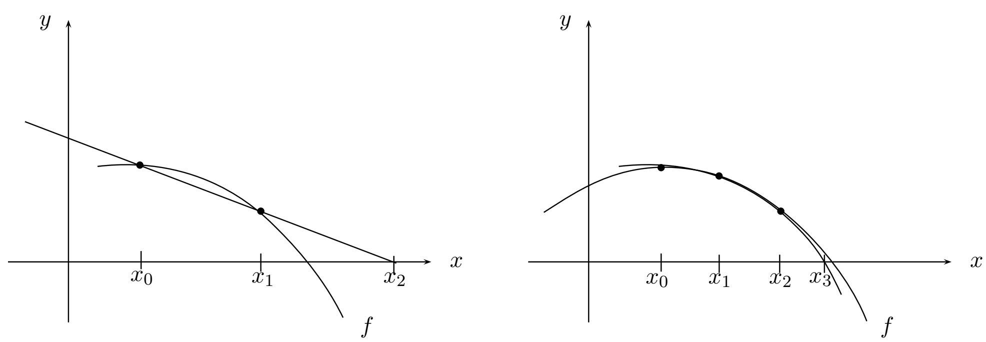


Figura 1.6: Método de Müller.

6. **Método de Newton-Raphson**

Este método es ampliamente aceptado como uno de los mejores métodos para resolver ecuaciones del tipo $f(x) = 0$. La excelencia de los resultados que son obtenidos con el método y su simple rutina operativa justifican su popularidad. El método se aplica tanto a raíces complejas como a reales y la iteración converge rápidamente probando la estimación inicial para una raíz suficientemente cercana.

El algoritmo para el método de Newton-Raphson se obtiene de la expansión en series de Taylor de $f(x)$ alrededor de una aproximación a la raíz. Sea $x = x_0$ una estimación a la raíz α. Entonces,

$$f(x) = f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(\xi) \tag{1.14}$$

donde x_i está en el rango de x_0 a $x_0 + h$

Si $x_0 + h$ es igual a α entonces

$$f(\alpha) = 0 = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(\xi) \tag{1.15}$$

Una estimación del valor de h se puede hacer usando los primeros dos términos en la ecuación (1.15), denomínese a esta estimación h_1,

$$h_1 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

La fórmula básica para la iteración en el método de Newton-Raphson se obtiene anexando h_1 a la estimación x_0. Esta nueva aproximación se designa por x_1.

$$x_1 = x_0 + h_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \tag{1.16}$$

La $(k+1)-$ésima aproximación a la raíz es obtenida usando la $k-$ésima aproximación en el lado derecho de la ecuación (1.16)

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \tag{1.17}$$

La siguiente gráfica ilustra el procedimiento.

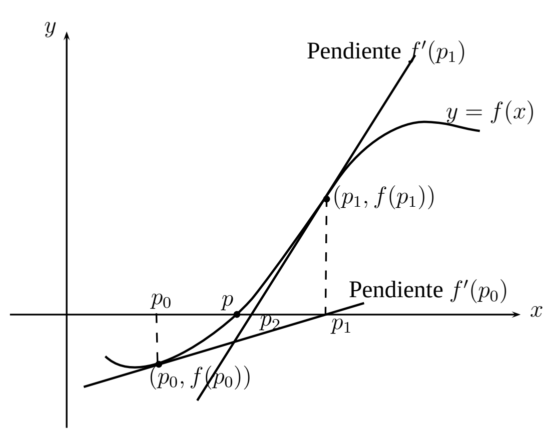


Figura 1.7: Método de Newton.

7. **Método de Bairstow**

El método de Bairstow es un esquema iterativo para encontrar un factor cuadrático de un polinomio en cada aplicación sin que tenga ningún conocimiento previo. Al aplicar varias veces el método de Bairstow a los polinomios reducidos, se pueden calcular todos los factores cuadráticos de un polinomio.

Una desventaja de este método es que la precisión de los resultados suele ser pobre, al respecto, Nakamura aconseja que la precisión de las raíces calculadas se deben verificar o mejorar por algún otro medio, como por ejemplo el de Newton.

El procedimiento es el siguiente: Cualquier polinomio de orden n, escrito como,

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdot + a_nx^n$$

se puede escribir en la forma,

$$y = (x^2 + px + q)G)(x) + R(x)$$

donde p y q son valores arbitrarios, $G(x)$ es un polinomio de orden $n-2$ y $R(x)$ es el residuo, que es un polinomio de orden 1, es decir, a lo más una función lineal. Ahora si p y q se eligen de manera que el residuo se anule, entonces $(x^2 + px + q)$ es un factor cuadrático y para resolverla se puede utilizar la fórmula ya conocida por

$$\frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

El polinomio de orden $n-2$ el residuo pueden escribirse como sigue:

$G(x) = b_2 + b_3x + b_4x^2 + \cdot + b_nx^{n-2}$
$R(x) = b_0 + b_1x$

Ahora bien, los valores de b_0 y b_1 dependen de los valores elegidos de p y q, por lo que se pueden considerar como funciones de p y q:

$$b_0 = b_0(p, q)$$

$$b_1 = b_1(p, q)$$

La finalidad del algoritmo es hallar factores cuadráticos.

Las características principales de este método son:

- El método de Bairstow encuentra un factor cuadrático de un polinomio, a partir del cual se calcula una pareja de raíces.
- Puesto que las raíces complejas siempre aparecen como una pareja de complejos conjugados (cuando todos los coeficientes de un polinomio son raíces), se pueden calcular las raíces complejas sin álgebra compleja.
- Al repetir la aplicación del método al polinomio reducido, se pueden hallar todos los factores cuadráticos.
- Los errores de los polinomios reducidos y los factores cuadráticos aumentan al aplicar el método repetidamente.
- La precisión de las raíces encontradas puede ser pobre, por lo que ésta debe mejorarse mediante otro método.
- La iteración tal vez no converja para ciertos problemas.

La importancia del estudio de estos métodos radica por una parte en las aplicaciones prácticas, en la interpretación para modelar problemas de fenómenos físicos (por mencionar un ejemplo) y además de que en el sentido de su enseñanza, éstos son ignorados en la enseñanza de los niveles medio y medio superior, sin considerar que ellos son la continuación (por decirlo de alguna manera) de la solución de ecuaciones lineales. Lo cual según algunos autores como Vilenkin, esto podría ser la causa de que muchos profesionistas al enfrentarse a este tipo de problemas encuentren fracaso en la aplicación de sus conocimientos acerca de la resolución de ecuaciones lineales.

Ahora bien, aunque no es el propósito de esta tesis investigar acerca de las dificultades a las que se enfrentan los estudiantes, sí se hace necesario hacer investigación al respecto de los métodos que podemos utilizar para la resolución de ecuaciones no lineales de una variable, pues son escasos en la investigación en Didáctica de la Matemática, siendo que dichos métodos son la base para una de las ramas de estudio de la matemática, a saber, los métodos numéricos.

Capítulo 2

Diseño de la investigación

Introducción

Interesados en problemáticas que surgen del ámbito educativo, abordamos una de ellas desde una perspectiva que ha reflejado ser competente en dicho ámbito, a saber, la investigación histórica en didáctica de la matemática. Como se ha mencionado en el capítulo anterior, la investigación histórica tiene por objetivo esclarecer problemas educativos abordándolos de una manera científica. Particularmente nuestra investigación se enmarca en la corriente del análisis de libros.

Cantoral et al. (2000) nos plantean que la matemática se ha construido socialmente en ámbitos no escolares, que su introducción al sistema de enseñanza le obliga a una serie de modificaciones que afectan directamente su estructura y su funcionamiento, y por lo tanto este proceso de incorporación de los saberes al sistema didáctico define una serie de problemas tanto teóricos como prácticos que precisan de acercamientos metodológicos y teóricos adecuados.

Nuestra convicción es que la historia nos permitirá el acercamiento al proceso evolutivo en la temática de los métodos iterativos hasta nuestros días.

En este sentido realizamos en primer lugar, un análisis de la naturaleza del tema a estudiar a través de los "libros históricos" [1]. Desde la investi-

[1] Al igual que en González (2002), nos basamos en la definición de Bernheim para fuentes históricas, donde éstas son los "resultados de la actividad humana que por su destino o su propia existencia u otras circunstancias, son particularmente adecuados para informar sobre los hechos históricos y para comprobarlos". Las fuentes se clasifican en primarias, que son todos aquellos documentos elaborados por los participantes en los hechos, y que en

gación histórica, en palabras de Gascón (1993), estudiaremos la evolución de los conocimientos matemáticos para ser enseñados y los modelos del saber matemático que son construidos antes de que dicho saber es incluido en un proceso didáctico.

Además, consideramos esencial hacer un análisis de libros de texto que sin duda son base teórica y práctica de los agentes didácticos: estudiante-saber-profesor. Schubring (1987) señala que el análisis de ellos hace posible conocer los sistemas educativos imperantes en la época y el contexto cultural y social que subyace. Por ende, los libros de texto incitan e invitan a un estudio del contexto social, del conocimiento escolar y del funcionamiento del sistema para la transmisión del conocimiento.

Por otra parte, Otte (1986) centra la atención en lo que transmite el texto, las relaciones entre el conocimiento y su representación textual así como en las diversas interpretaciones. De aquí que un estudio de estos, de acuerdo con González (2002), aporte gran información acerca de las concepciones matemáticas y del proceso educativo con el que están relacionadas.

nuestro caso serán los *libros históricos* (originales), y fuentes secundarias, que son aquellas que introducen una cierta distancia entre el fenómeno y su registro como, por ejemplo, los libros de historia, las enciclopedias, etc. Inicialmente, partimos de estas fuentes secundarias para indagar acerca de los escritos realizados por los eruditos en relación con el nacimiento del cálculo.

2.1. Antecedentes

El cálculo numérico es una rama de la matemática, con el objetivo de diseñar algoritmos para simular procesos matemáticos más complejos aplicados a procesos del mundo real, a través de números y reglas matemáticas simples. Específicamente en este trabajo se tratará con aquellos métodos numéricos del cálculo numérico que sirven para obtener aproximaciones a las soluciones de un tipo de ecuaciones de las que no es posible obtener respuestas exactas con métodos algebraicos.

En estos métodos, generalmente se utiliza la iteración, la cual se refiere a la acción de repetir una serie de pasos un cierto número de veces. En nuestro caso particular, nos referiremos al proceso de iteración de una función o a las técnicas que se usan en métodos iterativos para la resolución de problemas numéricos.

Un ejemplo particular de la iteración es la recursividad, la cual juega un papel clave en nuestro entorno, de hecho, aparece a cada momento. Para fijar ideas, considérense los siguientes ejemplos:

1. Alguien cuenta un cuento, en el transcurso del cual uno de los personajes cuenta, a su vez, un cuento. Es un cuento que aparece dentro de un cuento.

2. Dentro de un texto aparecen paréntesis, notas a pie de página, oraciones de relativo, etc. que "interrumpen" el texto principal para luego retomarlo. Son textos acerca de textos.

La recursividad consiste en pasar de un nivel (del cuento o del texto, en general) a otro nivel inferior pero que también es un cuento/un texto. En este sentido la recursividad aparece como una "incrustación".

Otra interpretación de recursividad nos la ofrecen las siguientes frases conocidas:

"¡Prohibido prohibir!"; "¡Nunca digas ¡nunca!!"; "Aprender a aprender", etc.

La recursividad aparece como reflexión en el espejo. En efecto, el imperativo de "prohibir", el enunciado "Nunca!" o la noción de "aprender" se vuelven sobre sí mismos como si se reflejaran en un espejo. Las dos maneras de "entrar" en la recursividad -como incrustación y como reflexión especular- son reducibles la una a la otra. Es decir, remiten a la misma operación.

Puede que una de las primeras operaciones recursivas en la historia de la humanidad fuera la creación de útiles que servían para crear otros útiles. Es el caso de hacer un martillo (de piedra o de metal) para, a su vez, laminar una hoja de metal y conseguir un cuchillo. Lo cual se puede expresar, en abstracto, así:

$G1[u]$ es construir un útil de aplicación inmediata.

$G2[G1[u]]$ es construir un útil para construir un útil de aplicación inmediata.

$G3[G2[G1[u]]]$ es construir un útil para construir un útil para construir un útil de aplicación inmediata.

...

Siempre que un elemento-medio se transforma en un fin en sí hay recursividad. La recursividad consiste en aplicar una función/operación sobre sí misma: f [f (x)]

2.1.1. Investigaciones en nuestro campo acerca de los métodos iterativos

Hemos realizado una búsqueda de investigaciones en nuestra disciplina que tuvieran que ver con el tema matemático en cuestión, de esta forma contribuimos en la disciplina con el planteamiento de la singularidad de nuestro trabajo. Para fijar ideas, reportamos por una parte las investigaciones de corte histórico y por otra parte las investigaciones que dirigen hacia el ámbito educativo:

▲ Investigaciones con orientación histórica-epistemológica

Varona (2002) nos muestra un estudio de los métodos iterativos para encontrar raíces de ecuaciones no lineales, en particular cuando $f(x) = 0$ y $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, en contraste con sus representaciones gráficas (fractales) con el fin de comparar regiones de convergencia de los métodos y su rapidez.

En primer lugar, expresa de manera general el método de Newton, es decir:

Sea f una función, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y ζ una raíz de f, es decir, $f(\zeta) = 0$, eligiendo a un x_0 cercano a ζ, bajo ciertas condiciones (que no explica) el método de Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

genera una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ que converge a ζ.

Varona reconoce que las ideas originales de Newton sobre el tema, alrededor de 1669, fueron considerablemente más complicadas, sin embargo, señala que se realizó un estudio sistemático y una versión simplificada del método debido a Raphson en l690, esquema iterativo que es conocido como el método de Newton-Raphson. (También como el método de la tangente, de su interpretación geométrica.)

Posteriormente menciona que en 1879, Cayley intentó de usar el método para encontrar raíces complejas de funciones complejas $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$. Es decir, considerando $z_0 \in \mathbb{C}$ e iterando

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.1}$$

Cayley observó condiciones bajo las cuales la sucesión $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a una raíz. En particular, si se denomina la *attraction basin* de una raíz ζ como el conjunto de todos los $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que el método converge a ζ, se puede decir que Cayley se interesó en identificar la *attraction basin* para cualquier raíz.

Así que resolvió el problema cuando f es un polinomio cuadrático, y para polinomios cúbicos, después de varios años de intentar encontrar soluciones a polinomios de grado mayor, finalmente rechazó continuar. Varona comenta que ahora se conoce la naturaleza fractal del problema y se puede entender que el fallo de Cayley para hacer cualquier progreso real en ese tiempo era inevitable.

Por ejemplo, para $f(z) = z^3 - 1$, el conjunto de Julia (esto es, los puntos donde el método de Newton fracasa para converger) tiene dimensión fraccional y coincide con la frontera de las *attraction basins* de las tres raíces complejas $e^{2k\pi i/3}, k = 0, 1, 2$. Por la complejidad que aparece para graficar este tipo de funciones, el autor enfatiza en el uso de las herramientas computacionales, y menciona que el aspecto computacional de los métodos iterativos se enfoca en dos caminos:

a) actualmente para encontrar raíces de ecuaciones no lineales, estudiando también la precisión y estabilidad de los algoritmos numéricos;

b) para probar la belleza de las imágenes que pueden ser generadas con la ayuda de computadoras. El primer punto de vista se cubre con análisis numérico.

A continuación exponemos algunos métodos iterativos $z_{n+1} = \phi(z_n)$ para resolver $f(z) = 0$ para una función compleja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, de los cuales Varona nos da una breve descripción y algunas características. En todos estos métodos, se toma un punto inicial $z_0 \in \mathbb{C}$, y en cada caso, se da la hipótesis que asegura convergencia y el correspondiente orden de convergencia.

- Método de Newton: Este es el método iterativo más conocido y el más usado, puede ser encontrado en cualquier libro de análisis. Su orden de convergencia es 2.

- Método de Newton para raíces múltiples:

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)f'(z_n)}{f'(z_n)^2 - f(z_n)f''(z_n)}$$

  De hecho el método de Newton tiene orden 2 cuando la raíz de f que es encontrada es una raíz simple. Puede ser deducido como sigue: si f tiene una raíz de multiplicidad $m \geq 1 \in \zeta$, es fácil checar que $g(z) = \frac{f(z)}{f'(z)}$ tiene una r aíz simple en ζ. Entonces, sólo se necesita aplicar el método ordinario de Newton a la ecuación $g(z) = 0$

- Aceleración convexa del método de Whittaker:

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{2f'(z_n)}(2 - L_f(z_n))$$

  con

$$L_f(z) = \frac{f(z)f''(z)}{f'(z)^2}$$

  El método de Whittaker (también conocido como el método de la cuerda-paralela, de su interpretación geométrica para funciones $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$) es una simplificación del método de Newton en el cual, para evitar cálculos de derivada, se hace la aproximación $f'(z) \approx 1/\lambda$ con λ una constante. Se trata de elegir el parámetro λ de tal forma que $F(z) = z - \lambda f(z)$ es una función contractiva, así que un punto fijo puede obtenerse mediante el teorema del punto fijo (es claro que un punto fijo para F es una raíz para f). Este es un método de orden 1. La aceleración convexa es un método de orden 2.

- Doble aceleración convexa del método de Whittaker:

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{4f'(z_n)}(2 - L_f(z_n) + \frac{4 + 2L_f(z_n)}{2 - L_f(z_n)(2 - L_f(z_n))})$$

Esta es una nueva aceleración convexa para los procesos iterativos previos. Tiene orden 3.

- El método de Halley:

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} \frac{2}{2 - L_f(z_n)} = z_n - \frac{1}{\frac{f'(z_n)}{f(z_n)} - \frac{f''(z_n)}{2f'(z_n)}}$$

Este fue presentado alrededor de 1694 por Edmund Halley, quien es conocido por su primer cálculo de la órbita del cometa Halley. De su interpretación geométrica para funciones reales, es también conocido como el método de hipérbolas tangentes. Alternativamente, puede ser interpretada como la aplicación del método de Newton a la ecuación $g(z) = 0$ con $g(z) = f(z)/\sqrt{f'(z)}$. Su orden de convergencia es 3.

- El método de Chebyshev:

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}(1 + \frac{L_f(z_n)}{2})$$

También conocido como el método de Euler-Chebyshev o, de su interpretación geométrica para funciones reales, el método de parábolas tangentes. Tiene orden 3. (Este método y el previo son probablemente los mejor conocidos de orden 3 para resolver ecuaciones no lineales.)

- Aceleración convexa del método de Newton o el súper método de Halley:

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{2f'(z_n)} \frac{2 - L_f(z_n)}{1 - L_f(z_n)} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}(1 + \frac{\frac{1}{2}L_f(z_n)}{1 - L_f(z_n)})$$

Este es un método de orden 3.

Un grupo de procedimientos para resolver ecuaciones no lineales son los métodos de punto fijo, los cuales se utilizan para resolver $F(z) = z$. El mejor conocido de estos métodos es el que itera $z_{n+1} = F(z_n)$; es un método de orden 1.

Un método de orden 2 para resolver una ecuación $F(z) = z$ es el método del punto fijo de Stirling. Inicia en un punto z_0 adecuado e itera

$$z_{n+1} = z_n - \frac{z_n - F(z_n)}{1 - F'(F(z_n))}$$

Si lo que se quiere es resolver una ecuación $f(z) = 0$, se le puede transforma en una ecuación de punto fijo. Para hacer esto, se toma $F(z) = z - f(z)$. Entonces es claro que $F(z) = z \Leftrightarrow f(z) = 0$, así que se puede usar un método de punto fijo para F. Pero este no es el único camino: por ejemplo, se toma $F(z) = z - \lambda f(z)$ con $\lambda \neq 0$ una constante (en este camino, aparece el mencionado método de Whittaker), o $F(z) = z - \varphi(z) f(z)$ con φ una función no desvaneciente. También se puede aislar z en la expresión $f(z)$ de diferentes maneras, por ejemplo, si se tiene $z^3 - z + \tan(z) = 0$, podemos aislar $z^3 + \tan(z) = z$ o $\arctan(z - z^3) = z$. De hecho, resultan muchas ecuaciones diferentes de punto fijo $F(z) = z$ para la misma ecuación original $f(z) = 0$.

Aún más, cuando se trata de resolver $f(z) = 0$ por medio de un método iterativo $z_{n+1} = \phi(z_n)$, como se ha visto, y $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a ζ, es claro que ζ es un punto fijo para ϕ (pidiendo que ϕ sea una función continua y tomar límites en $z_{n+1} = \phi(z))$, sin notarlo, se está profundizando en los métodos de punto fijo.

Es interesante observar qué pasa si meramente usamos el camino más simple y tomamos $F(z) = z - f(z)$ sin preocuparnos acerca de las hipótesis. En este sentido se tiene:

- El método de Stirling (cambiado):

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n - f(z_n))}.$$

Es de orden de convergencia 2.

En todos los métodos que se han visto, la función f o sus derivadas son evaluadas, en cada paso del método, para un punto singular. Hay otras técnicas para resolver ecuaciones no lineales que requieren la evaluación de f o de sus derivadas en más de un punto en cada paso. Estos métodos iterativos son conocidos como métodos multipuntos. Son usualmente empleados para incrementar el orden de convergencia sin calcular más derivadas de la función involucrada. El autor nos menciona algunos métodos multipuntos.

- El método de Steffensen:

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{g(z_n)}$$

con $g(z_n) = \frac{f(z+f(z))-f(z)}{f(z)}$. Este es uno de los más simples métodos multipuntos. La función iterativa es generada por una estimación derivada: en el método de Newton, para $h = f(z)$ suficientemente pequeño, estimamos $f'(z) \approx \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = g(z)$. Esto permite calcular la derivada de f. Este es un método de orden 2 (observe que preserva el orden de convergencia del método de Newton).

- El método del punto medio:

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n - \frac{f(z_n)}{2f'(z_n)})}$$

Este es un método de orden 3.

- El método de Traub-Ostrowski:

$$z_{n+1} = z_n - u(z_n)\frac{f(z_n - u(z_n)) - f(z_n)}{2f(z_n - u(z_n) - f(z_n)}$$

con $u(z) = \frac{f(z)}{f'(z)}$. Su orden de convergencia es 4.

- El método de Jarratt:

$$z_{n+1} = z_n - \frac{1}{2}u(z_n) + \frac{f(z_n)}{f'(z_n) - 3f'(z_n - \frac{2}{3}u(z_n))}$$

- El método inverse-free de Jarratt:

$$z_{n+1} = z_n - u(z_n) + \frac{3}{4}u(z_n)h(z_n)\left(1 - \frac{3}{2}h(z_n)\right),$$

con $u(z) = \frac{f(z)}{f'(z)}$ y $h(z) = \frac{f'(z-\frac{2}{3}u(z))-f'(z)}{f'(z)}$. También es un método de orden 4.

La comparación gráfica y numérica que nos muestra Varona, es respecto a la función $f(z) = z^3 - 1$ en un rectángulo R_b.

En síntesis, el artículo de Varona nos muestra una confrontación las ventajas y desventajas de los métodos de aproximación expuestos. De esta investigación nos parece importante el uso de los software para la graficación de funciones de este tipo, pues la complejidad de hacerlo con lápiz y papel se reduce en cuestiones técnicas y se fomenta la probabilidad de utilizar procesos de visualización. En este caso, el autor las utiliza como representaciones que permiten visualizar las regiones de convergencia[2] de los métodos.

Otro artículo de investigación que reporta sobre métodos de aproximación para ecuaciones no lineales es el de Laubenbacher, McGrath y Pengelley (2001), ellos presentan una revisión del trabajo de J. L. Lagrange, *Traité de la Résolution des Equationes Numériques de Tous Les Degrés* (1879), en esta obra Lagrange publicó ampliamente sobre la resolución de ecuaciones numéricas, ellos enfatizan sobre el desarrollo de un sistema general algorítmico hecho por Lagrange, para encontrar de forma singular la aproximación de todas las raíces reales y complejas de una ecuación polinómica con coeficientes reales, con una presición arbitraria, método que a diferencia del método de Newton garantiza la convergencia. Discuten algunas de las ideas y métodos de Lagrange que posteriormente fueron usadas en geometría y en álgebra abstracta. Asimismo nos muestran una técnica para la aceleración a la convergencia y cálculo de la expanción en fracciones continuas de raíces.

Los autores distinguen que el trabajo de Lagrange se divide en dos partes, una relativa a las soluciones numéricas y otra a las soluciones algebraicas:

> "The solution of every determinate problem, in the final analysis, reduces to the solution of one or more equations, whose coefficients are given in numbers, and which one can call *numerical equations*...
> One should distinguish the solution of numerical equations from that which one calls in Algebra the general solution of equations. The first is, properly speaking, an arithmetic operation, justified, indeed, on the general principles of the theory of equations, but whose results are only numbers, where one no longer recognizes the first numbers that served as the rudiments, and which retain no trace of the particular different operations which produced them. The extraction of square and cube roots is the simplest operation of this sort: it is the solution of numerical equations of the second and third degree, in which all intermediate terms are lacking ... (Lagrange (1808))."

[2]Para detalles ver Varona (2002)

Estas dos técnicas que usa Lagrange desarrollaron en geometría lo que se llama transfomaciones de Möbius y en álgebra a lo que se llama anillos cociente. Una conclusión importante de los autores es la observación de que el método algorítmico de Lagrange para resolver ecuaciones numéricas no se discute en literatura de análisis numérico y que no se ha encontrado un detallado análisis de su eficiencia y comparación con otros métodos comúnmente usados.

Finalmente mencionan que un avance significativo en la Matemática fue el método de fracciones continuas sobre, por ejemplo, el método de Newton que no asegura la convergencia a una raíz.

Parte de lo descrito en el artículo podremos observarlo en el siguiente capítulo en el apartado dedicado a la obra de Lagrange. Es importante notar que la investigación que realizamos sí contrasta el método dado por Lagrange con otros métodos, pues es objeto de estudio de la misma.

En la revista *British Journal for History of Science*, encontramos un artículo escrito por Kollerstrom, N. (1992), acerca de la polémica entre el método de aproximación de Newton, Raphson y Simpson, este escrito nos describe de manera suscinta la evolución de este método.

Kollerstrom menciona que el interés de recurrir al método de aproximación de Newton para encontrar raíces de ecuaciones, es su carácter repetitivo y mecánico. Señalan que el método de Newton que conocemos hoy día, tiene dos características vitales: es iterativo, y se emplea en expresiones diferenciales. Esto último se refiere a la derivada $f'(x)$ de una función $f(x)$, al asemejarse a la fluxión newtoniana basada sobre la teoría de límites pero no conceptualmente idéntica con ella. El método usa la ecuación fundamental $\alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$ repetitivamente, insertando en cada paso una solución más precisa.

En contraste con nuestra investigación, el documento de Kollerstrom argumenta que ni una de esas características se aplica a el método de aproximación desarrollado por Newton en el *De Analysi*[3].

Por otra parte, mencionan que el método publicado por Joseph Raphson en su *Analysis aequationum universalis* (1960) era iterativo, pero no expresado en derivadas o términos fluxionales. El argumento que justifica que el método no emplea cálculo fluxional, es que éste fue esencialmente una versión

[3]Kollerstrom, toma el *De Analysi* del *De methodis fluxionum et serierum infinitorum.*

mejorada del procedimiento expuesto por Viète y simplificado por Oughtred. Otra observación que hacen es que en la primera edición del *Algebra* de Jonh Wallis, se expuso el método como un logro Británico.

Del método como tal sólo se hace referencia a la famosa ecuación[4]:

$$y^3 - 2y - 5 = 0$$

La polémica de este método radica en quién inventó el método, al respecto, los autores describen el siguiente pasaje histórico: cuando Raphson anunció el método a la *Royal Society* en 1690, se enfatizaba sobre la naturaleza de su innovación, Halley relataba que Raphson había inventado un método para resolver todas la ecuaciones..., incluso para no pecar de plagio, Raphson citó en su prefacio a Newton (entre otros matemáticos), y declaró que su método era similar al que había dado éste, sin embargo, por las diferencias que había, Raphson cambió su prefacio cuando publicó el método en su libro de 1697 y sólo refirió a Viète como el antecesor del método, más adelante refirió a Harriot y Oughtred y solamente hasta el apéndice refirió a Newton en relación al teorema binomial.

Otro personaje que disputa el derecho de autor fue Thomas Simpson, quien en 1740 describió "un nuevo método para la solución de ecuaciones", no hizo referencia a algún predecesor y afirmó que el método era más general que cualquier otro dado. Su idea general era: "Take the fluxion of the given equation..." de donde deviene una versión de la regla $\alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$, usando fluxiones.

Kollerstrom menciona que un obstáculo de Simpson, fue su creencia acerca de que el método de fluxiones siendo una de las más recientes ramas de la matemática no podría ser adecuadamente aplicado al álgebra común. Lo que indica que él creyó que era innovador en la aplicación del método en esta área de matemáticas. La realidad es que el uso de una fluxión, se parece mucho a la formulación moderna.

W. Frend (1796) (citado en Kollerstrom), respecto a la simplicidad y concepción del método de Newton y el método de Raphson concluye los siguiente:

> "...with respect to the simplicity and conception of the two methods, Mr Raphson's method seems to be preferable to Sir Isaac

[4]El lector podrá darse cuenta porque califica mos de famosa a dicha ecuación.

> Newton's; because the former always refers back to the original equation $x^3 - 2x = 5$, whereas the latter method refers to the preceding transformed equation $10z + 6z^3 = 1$, which has more terms and larger coefficients than the original equation... I consider Mr Raphson's method of resolving them [equations] as, upon the whole, more convenient than that of Sir Isaac Newton."

Del escrito retomamos la idea trascendental de que Lagrange introdujo su tratado (*Traité de la résolution des équations numériques*) como parte de su fundación algebraica del cálculo, basada sobre la expansión de $f(x+h)$ en potencias de h y definiendo estas funciones de los coeficientes de las potencias. Esta fue su propia versión del cálculo diferencial para remplazar el de Newton y el de Leibniz. Un siglo antes, al igual que Raphson, Lagrange trató los métodos de aproximación sólo en términos algebraicos. Por ende, el autor concluye que en efecto el método de Simpson fue muy innovador al aplicar la técnica fluxional dentro del contexto algebraico.

Una línea histórica de aquellos que trabajaron con el método, según el autor es la siguiente:

- A principios del siglo XIX, Joseph Fourier presentó el método en términos de la ahora universal notación de cálculo $f'(x)$ describiéndolo como el método newtoniano.
- Los matemáticos británicos Burnside y Panton también trabajaron el método en el sentido de Newton y Lagrange, sin mencionar a Raphson.
- Al mismo tiempo en Alemania, Runge dió el método en forma Leibnizciana, atribuyéndolo a Newton.
- Moritz Cantor estudió los métodos de Newton, Raphson, Halley y de Lagny, describiendo a Raphson como un admirador e imitador de Newton, cuyo método de aproximación era muy parecido al de Newton.

Posteriormente en 1911, Florian Cajori concluyó que el método debería llamarse método de Newton-Raphson, nombre que sale al pensar que si r es la aproximación a obtener, entonces Newton utiliza un divisor que en nuestra notación moderna tiene la forma $f'(r)$.

Finalmente, una apreciación del autor acerca de los métodos actualmente es:

> “It is actually Raphson’s simpler (and therefore superior) method, not Newton’s, that lurks inside millions of modern computer programs’. In support of this argument it presented the familiar claim that Raphson’s method involved “calculation of the first derivative”, quoting the differential-based equation given $\alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$. The historical record hardly supports such a viewpoint. The method of approximation inside computer programs is surely that of Simpson.”

Este artículo nos ha brindado un línea a seguir en nuestra investigación, hemos conocido que ya de facto existe una problemática entre el reconocimiento de la invención del método y de manera sucinta los diferentes tratamientos que se le han dado.

Otra investigación relevante para nuestro trabajo es la de Guicciardini (2003), él plantea algunas de las contribuciones novedosas de Newton y Leibniz, contribuciones que están caracterizadas bajo tres aspectos de sus respectivos trabajos matemáticos: problema-reducción, el cálculo de áreas por inversión de procesos para el cálculo de tangentes, la creación de un algoritmo. Guicciardini concluye que la “invensión del cálculo” puede por lo tanto ser concebida como consistente de estas tres contribuciones.

Su investigación se enfoca en general en el Cálculo de Newton y de Leibniz y no en específico de los métodos iterativos como las investigaciones anteriores, en consecuencia retomaremos las ideas que desde nuestro trabajo son importantes epistemológicamente. Por ejemplo, el autor menciona que Newton y Leibniz trabajaron en una gama de problemas acerca del cálculo de centros de gravedad, áreas, volúmenes, tangentes, longitud de arco, radio de curvatura, superficies, etc., todos ellos consecuencia de dos problemas básicos que resultaron ser inversos uno del otro, esto es, el “Teorema Fundamental del Cálculo”. Con este descubrimiento, entendieron la solución de los problemas mencionados anteriormente y gracias a esas contribuciones Newton y Leibniz transformaron las matemáticas.

En el escrito identificamos algunos pasajes históricos relacionados directamente con el método de aproximaciones de Newton, por ejemplo, Guicciardini menciona que algunos de los grandes descubrimientos científicos de Newton fueron hechos durante los años 1665-1667, cuando la Universidad de Cambridge fue cerrada por la peste. Durante esos *Anni Mirables*, Newton hizo experimentos con prismas, convenciéndose él mismo de la composición natural de la luz blanca. Formuló el Teorema Binomial para potencias fraccionarias, descubrió el cálculo de fluxiones y especuló acerca del movimiento de la luna.

Por otra parte, cabe mencionar que el interés matemático de Newton probablemente inició en 1664, cuando leyó los trabajos de François Viète (1646), la *Géométrie* de Descartes (1637) (la 2a. Ed. en latín) (1659-1661) con comentarios de Frans Van Shooten y la regla de Hudde), la *Clavis Mathematicae* (1631) de William Oughtred, y la *Arithmetica Infinitorum* (1656) de Wallis. Estas fueron lecturas de un grupo seleccionado de trabajos matemáticos en "análisis moderno" en donde Newton aprendió la mayoría de descubrimientos interesantes de geometría analítica, álgebra, problemas de tangente, cuadraturas y series. Muñoz (1999) menciona que después de varios meses de auto-instrucción Newton fue capaz, en el invierno de 1664-1665, de realizar su primer descubrimiento matemático: el "Teorema Binomial" para potencias fraccionarias. Afirmó (por decirlo de alguna manera, en notación modernizada) lo siguiente:

$$(a+x)^{m/n} = a^{m/n} + \frac{m}{n}a^{m/n-1}x + \frac{1}{1\cdot 2}\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)a^{m/n-2}x^2\cdots . \tag{2.2}$$

Guicciardini señala que Newton obtuvo este resultado generalizando el método "inductivo" de Wallis para la cuadratura del círculo unitario. Y con el proceso de interpolación con el cual Newton determinó los coeficientes binomiales obtuvo lo siguiente:

$$1x - \frac{1}{2}\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{8}\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{16}\frac{1}{7}x^7 - \frac{5}{128}\frac{1}{9}x^9\cdots . \tag{2.3}$$

como una serie para el área bajo la curva $(1-x^2)^{1/2}$, un resultado que nos permite calcular el área del círculo. Después observó que, el área bajo x^n, sobre el intervalo $[0,x]$ es $x^{x+1}/(n+1)$, y extendió los resultados para obtener:

$$(1-x^2)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \frac{5}{128}x^8\cdots . \tag{2.4}$$

Trabajando directamente en ejemplos similares, Newton obtuvo la ley general de la formación de los coeficientes binomiales para potencias fraccionarias (ver (2.2)). Después extrapoló (2.2) para potencias negativas. El caso $n=-1$,

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots . \tag{2.5}$$

es particularmente relevante. Debido a que la prueba de la serie binomial descansó sobre el procedimiento "inductivo" (inestable) de Wallis, Newton tuvo la necesidad de verificar la concordancia de las series obtenidas aplicando (2.2) por procedimientos algebraicos y numéricos. Por ejemplo, aplicó técnicas estándar de extracción de raíces a $(1-x^2)^{1/2}$ y técnicas estándar de "division" a $(1+x)^{-1}$, y en consecuencia obtuvo las series (2.4) y (2.5). También mostró que el área bajo $(1+x)^{-1}$ sobre el intervalo $[0,x]$ o el área negativa de esto si $-1 < x < 0$, es $\ln(1+x)$. Por lo tanto expresó $\ln(1+x)$ como una serie de potencias integrando término a término (2.5):

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots . \tag{2.6}$$

Una conclusión importante de la investigación de Guicciardini, es la observación de que el razonamiento de Newton actualmente sería inesperado, pues primero obtuvo (2.6) vía extrapolación, y entonces obtuvo (2.5) por diferenciación. Además la serie (2.6) permitió a Newton calcular $\ln(1+x)$, para $x \approx 0$ e hizo los cálculos numéricos para más de 15 lugares decimales.

Guicciardini enfatiza tres aspectos del trabajo de Newton sobre la serie binomial.

- Primero: que Newton siguiendo las sugerencias de Wallis, introdujo exponentes negativos y fraccionarios. Sin esta notación innovadora ($x^{a/b}$ para $\sqrt[b]{x^a}$) podría no haber sido posible interpolar o extrapolar el teorema binomial de enteros positivos a racionales.

- Segundo: Newton obtuvo un método para representar una clase amplia de curvas por una serie de potencias. Por lo tanto para él las curvas dadas no son sólo ecuaciones algebraicas finitas (como para Descartes) sino también son series infinitas (preferentemente series de potencias) entendidas por Newton y por sus contemporáneos como ecuaciones infinitas.

- Tercero: Fue hasta 1665 que las matemáticas empezaron a apreciar la utilidad de series infinitas como representación para curvas "difíciles". Las curvas trascendentales, tales como la curva logarítmica, puede por lo tanto ser dada en representación analítica, pero ellas fueron generalmente definidas en términos geométricos. Nótese que Newton tuvo la intuición del concepto de convergencia. Por ejemplo, hizo que la serie binomial (2.2) pudiera ser aplicada cuando x es "pequeño". Sin embargo, Newton desarrolló un tratamiento no riguroso de la convergencia.

Ahora bien, de acuerdo a este autor, el primer extenso sistemático matemático de Newton arriva el título *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas.* Newton empezó este corto resumen de sus descubrimientos con la enunciación de tres reglas[5], para la última Newton mostró una prueba basada en el teorema fundamental. La serie binomial resultó ser una herramienta importante implementando la regla tres. En muchos casos, sin embargo, la serie binomial no puede ser aplicada. En los años 1669-1671 Newton concibió varias técnicas hábiles para obtener una serie $z = \sum(b_i x^i)$, i racional, de una "función" implícita $f(x, z) = 0$. También obtuvo un método para "revertir" series. Esto es, dado $z = \sum b_i x^i$ obtuvo un **método de aproximaciones sucesivas** de donde sale $x = \sum a_i z^i$. Es decir, convirtiendo la expansión de la serie de potencias de $z = \ln(1 + x)$ (fórmula (2.6)) obtuvo la serie para $x = e^z$. El resultado más general concerniente a la cuadratura de curvas (i.e., "integración") es el teorema fundamental del cálculo descubierto por Newton en 1665.

Newton desarrolló pensamientos geométricos de un nivel superior. Realizó una versión geométrica del método de fluxiones en los 1670's, llamado "método sintético de fluxiones" en oposición al "método analítico". Newton empleó el método sintético especialmente en dinámica. Afirmaba que el método sintético era más riguroso y que en realidad fundaba y justificaba los procedimientos empleados en el método analítico. Esta fundación y justificación dependía de dos factores. El primero de todos es el método geométrico de fluxiones que ofrecía un modelo en el cual el método analítico podía ser interpretado. En el método geométrico las fluentes y las fluxiones eran exhibidas para la visión. En segundo lugar, Newton concibió su método geométrico de fluxiones como una generalización del método de exhausión de los "Geómetras de la Antigüedad".

El método de Newton fue concebido con "fluxiones y series", su tratado de expansión de series contiene un aspecto altamente analítico en los trabajos fluxionales Newtonianos, la expansión de series de potencias como las expansiones de Taylor preparaban el terreno para una interpretación geométrica o cinemática de los términos sucesivos (e.g., como posición, velocidad, aceleración, variación de la aceleración, etc.).

Como hemos visto, el artículo de Guicciardini nos indica muchas de las bases histórico epistemológicas del conocimiento de Newton, es importante

[5]Reglas que serán enunciadas en el próximo capítulo en la sección dedicada al *De Analysi.*

notar que los métodos de aproximación fueron en este sentido más bien un medio que permitió el uso de la serie binomial, al respecto veremos esto detalladamente en el capítulo siguiente, en la sección dedicada a la obra de Newton el *De Analysi*.

▲ Investigaciones con orientación didáctica-cognitiva

Referente a los métodos iterativos y más particularmente referente a la técnica de punto fijo, encontramos una investigación realizada por Montero, et al. (2003), básicamente su estudio es de corte didáctico, pues la finalidad es promover un ambiente interactivo, de reflexión y experiencias que dan lugar al aprendizaje significativo.

Ellos parten de la problemática que reporta, que los alumnos tienen dificultad para comprender la esencia del análisis numérico debido a que es una asignatura que tiene características propias que la diferencian de otras en la carrera de matemáticas. Una de ellas es que en el análisis numérico no existen siempre "verdades" aplicables a todas las situaciones y la pertinencia o no de utilzar distintas herramientas para resolver un problema depende fuertemente del contexto en el cual se va a utilizar. En consecuencia mencionan que, deben desarrollarse otras habilidades para resolver problemas, es decir, heurísticas diferentes a las que el alumno está acostumbrado.

Entonces, plantean la introducción de la tecnología derive con la finalidad de que proporcione a los estudiantes un recurso importante para observar gráficamente el comportamiento de los métodos, con sus correspondientes interpretaciones geométricas y analíticas, además de que el recurso permitirá realizar distintas experiencias en un tiempo relativamente corto abarcando la mayor cantidad de casos posibles.

Los objetivos de los investigadores, apuntaron a que el estudiante fuera capaz de:

En lo general:

- Realizar el análisis de problemas de situaciones concretas de dificultad media.
- Llevar la situación a un modelo matemático.
- Elegir un método adecuado para su resolución.

En lo particular:

- Incorporar técnicas iterativas que conducen a la solución de la ecuación $f(x) = 0$ trabajando con su ecuación equivalente $g(x) = x$.
- Analizar la convergencia y divergencia de cada transformación o despeje y efectuar comparaciones con sentido crítico.
- Analizar las condiciones de convergencia.
- Discernir sobre las ventajas y desventajas de la aplicación del método.

Respecto a la metodología, los estudiantes con quienes desarrollaron la experiencia cursaban el segundo año de las carreras de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Nacional de Mar del Plata. La diferencia estuvo principalmente en el ambiénte de las clase, pues éstas se dictaron en un laboratorio de informática. Se recurrió a la dinámica de trabajo a partir de la resolución de problemas con una modalidad de discusión e intercambio, promoviendo en los alumnos el aprendizaje por descubrimiento. Además cabe resaltar que el tema se presentó de tal forma que promoviera en los estudiantes la intuición a través de la visualización gráfica en computadora, en consecuencia, se analiza desde el punto de vista teórico las propiedades de la convergencia y, desde el punto de vista práctico la eficiencia computacional.

El ambiente permitió que los estudiantes resolvieran de forma individual el problema planteado y posteriormente discutieran lo obtenido por cada uno de ellos para realizar una comparación de los resultados. El papel del profesor fue el de organizar el trabajo de la clase de tal forma que se favoreciera el análisis, la confrontación y la vinculación con los conceptos teóricos.

En nuestra opinión es importante mostrar el ejemplo que proponen, pues en efecto la habilidad visual es algo sobresaliente:

Para iniciar, se les hacen notar a los alumnos que la resolución de una ecuación del tipo $f(x) = 0$ es equivalente a resolver la ecuación $x = g(x)$ despejando x de la ecuación original.

Luego les presentan el método de la iteración de punto fijo explicando el algoritmo y bajo qué condiciones este método permite hallar la raíz de la función $f(x)$.

Una observación de los autores, es que cuando se determina $g(x)$, los estudiantes aplican el algoritmo de manera mecánica. En consecuencia, proponen una forma de trabajo que sin la ayuda de la computadora sería muy tedioso o casi imposible de resolver.

El ejemplo que proponen consiste en resolver $f(x) = x^2 - 3x - 4$, entonces se sugiere el despeje $x = \sqrt{3x+4}$. A continuación se pide que grafiquen las tres funciones involucradas con el objetivo de que los estudiantes adviertan que la raíz de $f(x)$ coincide con el valor de x en la intersección entre la recta $y = x$ y la función $g(x)$

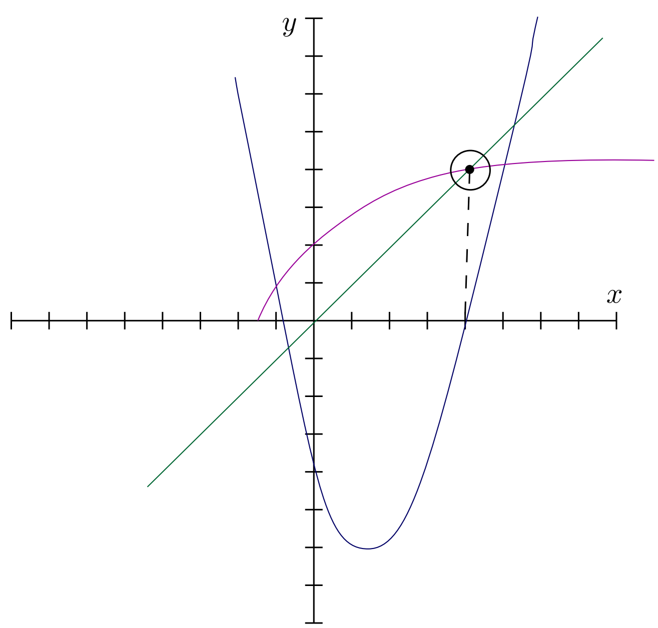


Figura 2.1: Ejemplo: $f(x) = x^2 - 3x - 4$

Lo que se desprende, es ver cómo se genera la sucesión aproximante y qué significa gráficamente, y qué pasaría con otros despejes para la misma función $f(x)$, con la finalidad de que observen que no todas la alternativas conducen a que el método sea convergente, se espera que los estudiantes se cuestionen sobre las condiciones que deben darse para obtener una solución.

Su conclusión es que promover un ámbito de trabajo basado en la discusión, la reflexión y la visualización gráfica y potencialidad para el cálculo que ofrece la computadora, posibilita la obtención de logros muy difíciles de conseguir en clases tradicionales.

Con respecto a los alcances con los estudiantes, mencionan que no les resulta intuitivo interpretar que se basa en la solución de una ecuación lineal determinando la intersección de las funciones $y = x$ y $y = g(x)$. Otra dificultad es la selección conveniente de la función $g(x)$ y determinar la convergencia de la sucesión que se genera para cada una. En consecuencia, los investigadores observan que lo anterior requiere cierta habilidad, ingenio y un claro conocimiento conceptual del método y por sobre todo del comportamiento de las funciones. En este sentido, el uso de la tecnología ayudó a que, en la medida que logran analizar gráficamente cada una de las situaciones, les resulta mucho más sencillo interpretar el método conceptualmente y desarrollar análisis teóricos.

En nuestra opinión, esta correlación que se plantea entre el uso de la tecnología con el análisis formal, y la práctica de la resolución de problemas, abre la posibilidad de que en efecto los estudiantes desarrollen aún más su habilidad visual. Sin duda, esta investigación propone una cualidad en cuanto al estudio de estos métodos, pues proporciona a los estudiantes una forma diferente en su tratamiento que los lleva a plantearse cuestiones cuyas respuestas se obtiene por descubrimiento en un ambiente interactivo y reflexivo.

También encontramos un estudio realizado por Miguel de Guzmán al respecto de nuestro tópico en cuestión. En su libro *El rincón de la pizarra matemática. Ensayos de visualización en análisis matemático.* En el capítulo *Métodos visuales de exploración de algunos tipos de sucesiones* y en el capítulo *Iteración de funciones. Caos matemático*, se observa que los métodos iterativos son parte consustancial del tratamiento de las sucesiones recurrentes así como de la búsqueda de raíces, el objetivo principal de De Guzmán es mostrar que la habilidad visual puede ser desarrollada para favorecer procesos de entendimiento para ciertos conceptos.

Respecto a las sucesiones recurrentes $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, donde(a_{n+1} = G(a_n)$, las cuales son parte de las técnicas iterativas que mostraremos en el capítulo 4, menciona que las principales propiedades de estas sucesiones se exploran a través del estudio de la función $y = G(x)$ y de su gráfica. Su objetivo en esta sección es mostrar algunas cualidades que se deben *observar* para poder responder a cuestiones típicas como la acotación, monotonía y convergencia. Entonces, él menciona que para ello debe presentarse muy bien a $y = G(x)$

y a $y = x$, y observar cómo se van obteniendo $a_2, a_3, \ldots$ (ver figura siguiente):

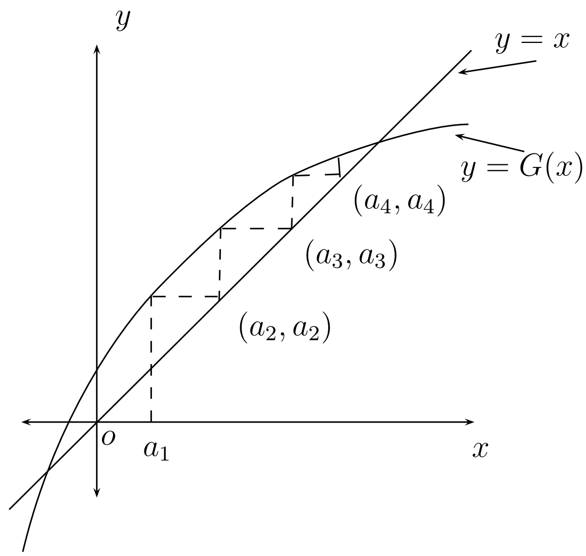


Figura 2.2: Representación gráfica de $a_2, a_3 \cdots$

En palabras lo expresa de la siguiente manera:

> Para hallar a_2 elevamos la vertical por el punto $(a_1, 0)$ y miramos la ordenada del punto de intersección con $y = G(x)$, es decir, del punto $(a_1, G(a_1)) = (a_1, a_2)$, entonces para hallar, a_3 habría que colocar esta ordenada a_2 sobre el eje Ox, levantar la vertical por $(a_2, 0)$ y mirar dónde corta a $y = G(x)$. Pero más eficaz es trazar por (a_1, a_2) la horizontal hasta cortar $y = x$ en el punto (a_2, a_2) y a continuación trazar la horizontal por este punto hasta cortar $y = G(x)$ en $(a_2, G(a_2)) = (a_2, a_3)$. Es decir,

Lo que significa que los términos sucesivos $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ se obtienen mirando las ordenadas de los puntos sobre la curva $y = G(x)$ obtenidos por el siguiente proceso a partir de $(a_1, 0) = (\alpha, 0)$:

> vertical hasta la curva
> horizontal hasta la bisectriz
> vertical hasta la curva
> horizontal hasta la bisectriz

Si realizamos muchos pasos de esta naturaleza, visualmente, obtenemos una red de iteraciones con el cual se puede anticipar el comportamiento de las iteraciones. Incluso se pueden observar casos en los que hay caos matemático.

De Guzmán menciona cuando se presentan los casos en que la función G tiene un punto atractor o cuando tiene un punto repulsor, es decir, se pregunta qué pasa con $G(\alpha)$ cuando α está cerca de un punto γ tal que $G(\gamma) = \gamma$. Entonces, analiza que cuando se tiene al menos una derivada continua. Si $\alpha = \gamma + h$, entonces

$$\mid G(\alpha) - G(\gamma) \mid = \mid G(\alpha + h) - G(\alpha) \mid = \mid h \mid\mid G'(\gamma + \theta h) \mid$$

con $0 < \theta < 1$, por el teorema del valor medio.

Ahora si $\mid G(\gamma + h) - G(\gamma) \mid \leq k \mid h \mid$ con $k < 1$ y por tanto, $G^n(\gamma + h) \to G(\gamma)$, es decir γ es un punto fijo atractor para los puntos próximos a γ.

Y si $\mid G'(\gamma) \mid > 1$ entonces sucede lo contrario, un punto próximo a γ se aleja de γ por la acción de G. Es decir, γ es un punto fijo repelente.

La propuesta cuando se tiene $\mid G'(\gamma) \mid = 1$, es hacer un estudio más fino.

La relación que se muestra entre la iteración de funciones con las funciones recurrentes es que el elemento n-*ésimo* de la sucesión se obtiene sin más que iterar una cierta función asociada a la sucesión. En este sentido, De Guzmán refleja la importancia de estudiar las iteraciones de funciones debido a que la iteración misma es un proceso que en ciertos casos lleva a resolver el problema de hallar un punto fijo para la función, además de que el estudio de los sistemas dinámicos discretos, que está presente en gran parte de las aplicaciones, es el estudio de las iteraciones de una función.

Un teorema que está estrechamente con nuestra investigación y del cual se trata de dar un énfasis visual en su tratamiento es el siguiente:

> Teorema de la función contractiva. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función contractiva con constante de contracción $l < 1$. Entonces existe un único punto fijo p para f. Este punto fijo se obtiene por iteración de f a partir de un punto cualquiera x_0 de $\mathbb{R}$, es decir,
>
> $$p = \lim_{x \to 0} f^n(x_0)$$
>
> Además, se puede estimar la aproximación obtenida cuando comenzando con x_0 nos paramos en $f^k(x_0)$. Se tiene
>
> $$\mid p - f^k(x_0) \mid \leq (L^k/(1-L)) \mid x_0 - f(x_0) \mid$$

La demostración visual es la siguiente:

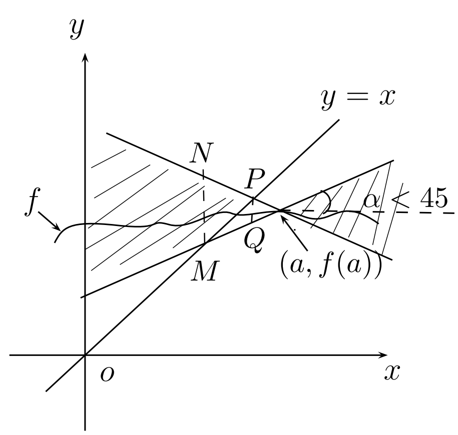


Figura 2.3: Representación gráfica de la existencia del punto fijo

Para la obtención del punto fijo, el argumento formal es el siguiente: como p se mantiene fijo por las iteraciones y f acerca x_0 a p al menos en una proporción fija, resulta que $p = \lim_{x \to 0} f^n(x_0)$. Además como $\mid f^k(x_0) - p \mid = \mid f^k(x_0) - f^k(p) \mid \leq L^k \mid x_0 - p \mid$, para estimar $\mid f^k(x_0) - p \mid$ basta estimar $\mid x_0 - p \mid$:

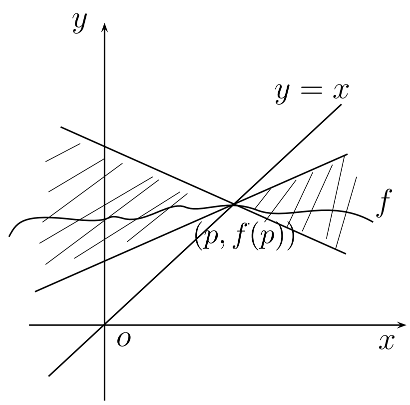


Figura 2.4: Representación gráfica de la unicidad del punto fijo

$$\begin{aligned}|\, x_0 - p \,| &\leq |\, x_0 - f(x_0) \,| + |\, f(x_0) - p \,| \\ &= |\, x_0 - f(x_0) \,| + |\, f(x_0) - f(p) \,| \\ &\leq |\, x_0 - f(x_0) \,| + L \,|\, x_0 - p \,|\end{aligned}$$

De donde resulta:

$$|\, x_0 - p \,| \leq (1/(1-L)) \,|\, f(x_0) - x_0 \,|$$

y por lo tanto,

$$|\, p - f^k(x_0) \,| \leq (L^k/(1-L)) \,|\, x_0 - f(x_0) \,|$$

Sabiendo entonces cuál es el comportamiento de una función contractiva, el autor hace la reflexión de ¿cómo sería la sucesión $f^n(a)$ y cómo serán las funciones f^n? al considerar a f no contractiva.

Con lo anterior, De Guzmán busca en primer lugar argumentar visualmente la demostración del teorema, no así formal pero si en el sentido de habilitar el pensamiento visual. Además de dar elementos complementarios para el tratamiento formal de este tipo de teoremas. La intuición sin duda es parte de lo que el autor quiere 'habilitar' bajo el ensayo visual que genera la lectura e interpretación de los temas presentados, e incluso como el autor menciona la intención es transmitir las intuiciones visuales que en muchos casos han dao origen a los conceptos y procesos matemáticos más básicos e importantes.

En este sentido se observa que la importancia de la iteración evoluciona hacia conceptos como límite, convergencia, divergencia, etc.

Otra investigación en la dirección de reconocer a la visualización como un recurso en el tratamiento de conceptos como iteración y convergencia, además de, como un medio para construir conocimiento matemático, es la tesis de maestría *Convergencia, recursividad y visualización* de Rodríguez-Vásquez (2003). Este trabajo tuvo como objetivo explorar las formas en que estudiantes universitarios de niveles avanzados hacen uso de recursos visuales para determinar, anticipadamente, convergencia de funciones iteradas en el marco de una particular interpretación del teorema del punto fijo. Se parte del supuesto de que la visualización es una forma de desarrollar el pensamiento matemático, de tal manera que, el objeto didáctico radica en proporcionar al estudiante un medio para dirigirlo hacia el significado de convergencia a partir de situaciones del tipo $x_n = f(x_{n-1})$. En general se pretende favorecer las acciones de enseñanza para generar aprendizajes más significativos.

La investigación surge de la convicción de que la investigación sobre fenómenos didácticos es una necesidad urgente, en virtud de que se quieren alcanzar logros tanto científicos como tecnológicos que hoy por hoy son prioritarios.

Asi, la problemática general planteada es que desde la antigüedad se han favorecido los métodos exactos en detrimento a aquellos en que la aproximación resulte pertinente, sin embargo, algunas veces es necesario acudir a estos últimos para la resolución de ecuaciones no lineales que no pueden resolverse con métodos exactos, entre ellos están el de Newton, secantes, bipartición y aproximaciones sucesivas que tratan con funciones del tipo $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, es decir, con sucesiones recurrentes, y con ello se genera un proceso iterativo.

La cuestión central entonces es:

¿Cómo los estudiantes podrían predecir la convergencia o divergencia de una sucesión recurrente utilizando estrategias de visualización? Para contestar a la pregunta, la tecnología juega un rol substancial en el desarrollo de procesos de visualización dentro de la temática abordada.

Específicamente el estudio descansó sobre el tópico de las funciones recursivas analizando regularidades en el tratamiento de nociones como convergencia y divergencia desde una perspectiva dinámica, concentrando la atención en el teorema del punto fijo[6]. En este sentido, se plantea la hipótesis de que a pesar del dominio de la noción de pendiente de una recta e "inclinación"de una curva que se tiene en las clases de cálculo diferencial e integral, no existe una sistematización de los contextos en los cuáles se les puede vincular.

Por lo anterior, se realizó el diseño de una secuencia de actividades cuyo objetivo fue priorizar la construcción de conocimiento en interacción con los actores didácticos (estudiante, profesor y saber) de tal manera que la predicción, como una práctica social, le permitiera a los estudiantes reconocer cuándo una sucesión es convergente o no, mediados por fenómenos de visualización. Respecto a las referencias teóricas, la investigación se apoya tanto en la teoría de situaciones fundamentales adaptada a la matemática avanzada como en una aproximación que incorpora elementos epistemológicos, didácticos, cognitivos y sociológicos del saber matemático escolar.

En particular se consideró a la visualización como un medio para predecir la convergencia de una sucesión que proviene de una función iterada, y aunque en los teoremas y ejemplos de los textos escolares, lo anterior se explicita ya sea con la condición de Lipschitz o con el criterio de la derivada, no se pone suficiente énfasis en la visualización de tales condiciones. Con base en el análisis de los resultados de las actividades, se pudo constatar que la visualización es un fenómeno que radica en todo momento de acción, formulación y validación de un saber matemático.

En la experiencia didáctica, se reflexionó sobre los procesos que de alguna manera obstaculizan al estudiante a desarrollar su capacidad de visualización, y se observó que tales obstáculos no sólo se deben a que en la enseñanza tradicional no se procede alguna práctica que la enfatice, sino también se deben al contexto en el cual los estudiantes estén situados.

---

[6]**Teorema del Punto Fijo.** Sea F una función continua definida en algun intervalo $a \leq x \leq b$, tomando sus valores adentro del mismo intervalo, es decir, $a \leq F(x) \leq b$. Supongase que para alguna constante $K < 1$ se tiene,

$$| F(x) - F(y) | \leq k \mid x - y \mid$$

para todo $y, x \in [a, b]$. Entonces F tiene un único punto fijo z. Este punto fijo se puede calcular como el límite,

$$\lim_{n \to \infty} x_n = z$$

donde, $x_{n+1} = F(x_n)$ empezando con cualquier punto entre a y b como el valor inicial de la iteración.

Con base en el análisis de las dimensiones en la construcción de conocimiento se observó que aunque se haya trabajado en diversos contextos (gráfico, algebraico y numérico) la condición de derivabilidad para decisión de convergencia o divergencia de una sucesión, se ve debilitada en el momento de enfrentarse a casos en los cuales no hay una función "amable" en el sentido de calcular su derivada, asimismo se ve debilitada cuando el contexto no les permite concluir de manera formal algún proceso de razonamiento, esto es, que en efecto los argumentos que nos presentan son válidos bajo la codificación que utilizan en su medio, pero fuera de ello, a pesar de visualizar cada consecuencia con base en sus formalizaciones, ellos mismos reflejan la limitación para seguir a sus respuestas "intuitivas" basadas en su propia visualización.

Se observaron algunos fenómenos didácticos que se presentan en el ámbito escolar, entre ellos se constató que:

- Existen tres tipos de noción de punto fijo: refiriéndolo como la intersección de la recta identidad con una curva (gráficamente), como el punto estático que una función al ser iterada establece, y como la solución de un sistema lineal de ecuaciones.
- Las nociones de convergencia y divergencia, se ven favorecidas por el contexto en el cual se está trabajando. Es decir, los argumentos en sus respuestas reflejan nociones de aproximación, tanto numéricamente como gráficamente.
- El concepto de derivada, se registra visualmente como la recta tangente a una curva en algún punto y no propiamente como una magnitud.

La última observación permitió reafirmar una vez más la no utilización de la derivada como un ente sistemático en diversos contextos. De tal forma que en efecto aunque los estudiantes dominaron técnicas para decidir convergencia de funciones iteradas, el uso sistemático de la derivada se ve truncado bajo los conocimientos habituales que se tienen de la noción.

Se infiere que a pesar de existir una serie de dificultades y obstáculos en el uso sistemático de los conceptos matemáticos, específicamente el de la derivada de una curva, las acciones, formulaciones y validación de su aplicación (con base en el diseño de la secuencia de actividades), exige de heurísticas y procesos de visualización que constantemente se observaron persistentes en la solución de actividades y sin embargo se vieron debilitadas al dar un resultado propio de evaluación, es decir, señalamos que la predicción que se generó en las actividades de validación no descarta a la visualización como un medio para la toma de sus decisiones, lo cual hace de ésta un fenómeno que podría estimular el pensamiento matemático en las prácticas educativas.

A diferencia de la literatura anteriormente reportada, en el libro *Understanding Mathematics* de Sierpinska (1996) encontramos un apartado referente a nuestro tópico en cuestión, pero con un enfoque mucho más cognitivo. En general el libro trata acerca del entendimiento en matemáticas, y en el capítulo 3 denominado 'Processes of Understanding', menciona que los ejemplos juegan un papel en la explicación de algún tópico, en particular, menciona que un ejemplo obtenido por especificación de variables podría ser usado como una razón de la cual el objeto es derivado por inducción y por lo tanto un ejemplo podría llegar a ser una base para el entendimiento del objeto.

El problema que plantea es que antes de tener un campo del dominio del conocimiento que se está aprendiendo, no se es capaz de decir un ejemplo paradigmático desde uno no paradigmático. De tal forma que se tienen errores, malas elecciones, malas generalizaciones, etc. Sin embargo como el ejemplo es presentado en un determinado medio, se pueden tener errores de las características de la representación por las características de la noción ejemplificada. En este sentido, muestra un ejemplo de una situación en la que participan un par de estudiantes de 16 años, en donde estudia los procesos de entendimiento de los estudiantes acerca de las nociones de iteración de una función y de punto fijo atractor. Al respecto, una reflexión que hace es que, los estudiantes sin tener en cuenta todas las definiciones, basan su entendimiento en la exploración de los primeros ejemplos que encuentran.

Ella menciona que el punto fijo de un mapeo es definido por el profesor como un punto que no cambia bajo el mapeo, dando ejemplos de puntos fijos en a simetría axial, homotecia y funciones lineales, pero entonces cuando se les muestra la representación gráfica de una sucesión iteración de una función $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de la cual se explica que el punto fijo queda representado por la intersección de la gráfica con la recta $y = x$, los estudiantes *abrevian* la definición como 'el punto de intersección es el punto fijo'.

Una dificultad que observa es la siguiente: cuando el profesor muestra la representación gráfica de la iteración de una función en partes (ver figura siguiente), un estudiante exclama: 'allí no, hay dos funciones!', lo cual según la investigadora se debe a las explicaciones suscitadas por el maestro de que

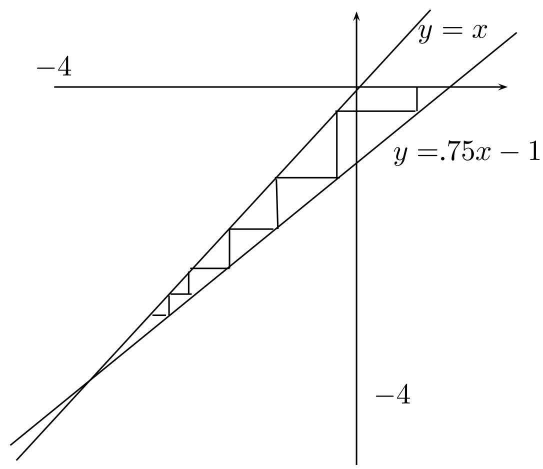


Figura 2.5: Representación gráfica de la iteración de una función lineal

una función no necesariamente es sóla fórmula en el total del dominio. Entonces la afirmación dada por el estudiante es un indicio de comprensión, en este caso, de la noción de función, sobre la base de ejemplos que de definiciones.

Posteriormente se les pidió a los estudiantes encontrar una función que arrojara una secuencia periódica de iteración $2, 3, 2, 3, 2, \cdots$ y que tuviera un punto fijo atractor en el intervalo $(2, 3)$. Una respuesta a esto fue una función definida en trozos, pues un estudiante no dejó de creer que la condición de iteración de funciones es sólo válida para el tipo de funciones en trozos (como en el ejemplo que se les había dado antes), además también creyó por un momento que el punto fijo era la intersección de las partes lineales de la función, sin embargo, la investigadora menciona que fue fácil para él hacer cambios en su mente debido a que era un estudiante muy inteligente, de lo cual ella infiere que el entendimiento sobre la base de ejemplos no es sólo del dominio de los estudiantes menos capaces o más lentos.

En el inicio del experimento para estudiar el entendimiento de 5 estudiantes, la iteración de una función fue solo una actividad de dibujar pequeños segmentos de línea entre la gráfica de la función y la línea auxiliar $y = x$, una dificultad que se encontró es que no supieron desde donde empezar, además de que no fueron capaces de reproducir las acciones del maestro debido a que no pusieron atención a la relación entre la secuencia iterativa y la actividad de representarla gráficamente, no obstante fue predominante la sola imagen. En consecuencia, la representación visual de la iteración persistió por un largo

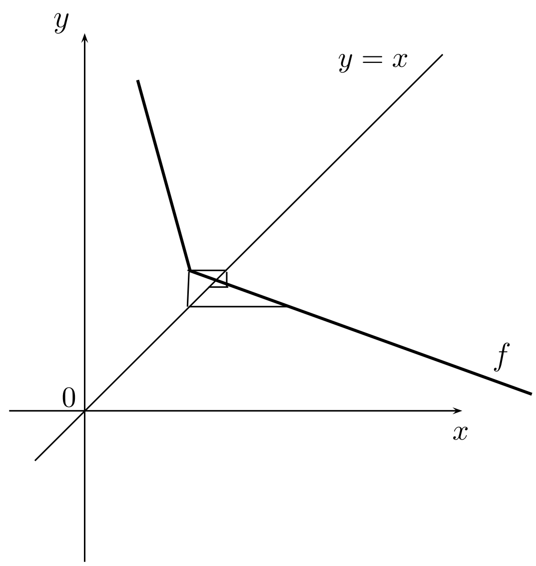


Figura 2.6: Representación gráfica del punto fijo de una función en trozos

tiempo en el entendimiento de los estudiantes, sin embargo su entendimiento llegó a ser cada vez más analítico.

La iteración fue entendida por la mayoría de ellos como un tipo de transformación de un punto de la gráfica de la función, de la siguiente manera:

> $(x, f(x))$ es transformada en $(f(x), ff(x))$ la cual es transformada en $(ff(x), fff(x))$, etc.

También se reporta que la noción de punto fijo no fue identificada como un objeto *per se* al menos al principio, sino que los estudiantes hablaban de punto atractor y repulsor. En consecuencia, cada estudiante pasó através del periodo de concebir el punto fijo como el punto de intersección de la gráfica de f y $y = x$ y entonces la representación visual se mantuvo en sus conceptos analíticos de punto fijo. Al respecto menciona que dos estudiantes mantuvieron el nombre de punto fijo para la intersección, y el argumento x tal que $f(x) = x$ fue llamada la coordenada x del punto fijo, de donde los estudiantes tuvieron problemas para aislar la noción de punto fijo desde el contexto de las iteraciones.

La conclusión de lo anterior, es que aprender por ejemplos es una propiedad de nuestras mentes, y en consecuencia el método de ejemplos paradigmáticos no es realmente un método de enseñanza, sino es más bien un camino donde los conceptos se forman, pues los ejemplos no pueden ser transmitidos de la mente del maestro a la mente de los alumnos. Los ejemplos son, para la comprensión de conceptos abstractos, la propiedad indispensable y el obstáculo necesario.

En el marco de la investigación histórica con dirección hacia la implementación de la historia de las matemáticas en el aula, encontramos la investigación de Pajus (2000), en ella se reporta en primera instancia la reforma (1995) que hubo en el nivel preparatoria en el sistema francés, reforma que se propone reducir la importancia de las matemáticas mismas relacionándolas muy cercanamente con las ciencias físicas y la ingeniería, así como también desarrollar el espíritu de la iniciativa en los estudiantes. En particular se propone que la educación matemática debería simultáneamente desarrollar la intuición, la imaginación, el razonamiento y el rigor.

Concerniente a la historia de la matemática, la reforma refiere que:

> "It is important that the cultural content of mathematics should not be simply sacrificed to its technical aspects. In particular, historical texts and references allow the analysis of the interaction between mathematical problems and the construction of concepts, and bring to the fore the central role played by scientific questioning in the theoretical development of mathematics. Moreover, they show that the sciences, and mathematics in particular, are in perpetual evolution and that dogmatism is not advisable"

También se considera en relación a lo siguiente:

> "The study of a subject brings an increasing depth of theoretical understanding together with experimental aspects and applications as well as the application of computing methods. It may include an historical dimension."

De donde, se desprende un proyecto que se lleva a cabo en algunas escuelas y que consiste en que los estudiantes eligen libremente una temática en un marco amplio de conocimiento y luego entregan un resumen y hablan 20 minutos ante dos evaluadores acerca de sus trabajos.

Lo que hace Pajus en estos proyectos es introducir la historia de la matemática, entonces elige trabajos originales que los estudiantes puedan trabajar. Uno de los principios básicos para que los estudiantes realicen ese proyecto es que cualquier estudio histórico debe incluir al menos un extracto de un texto original, pero ya que es generalmente difícil de leer para ellos, las fuentes secundarias deben estar también disponibles. Particularmente la investigadora trabaja acerca de algoritmos, por las siguientes razones:

- El tópico mismo permite cruzar siglos y civilizaciones, además de conocer problemas que aún siguen abiertos.

- La cuestión que se examina es clara: es fácil para los estudiantes comparar la eficiencia de procedimientos, que pueden responder usando la computadora, y por lo tanto ven la utilidad de conceptos teóricos cuya profundidad y generalidad que de otro modo es difícil de evaluar por la falta de una visión general teórica. Por ejemplo, los métodos iterativos para la solución de sistemas lineales implica la topología de espacios de matrices. Y es digno de mención, que los primeros estudios al respecto de este tema surgieron de la astronomía y la geodesia.

- Los estudiantes pueden ver cómo las necesidades técnicas dirigen hacia la construcción de nuevos conceptos y algunas veces los inspiran.

- Se puede escribir un algoritmo en un lenguaje computacional, lo cual implica el esfuerzo de liberarse a partir de las restricciones de un lenguaje específico a un conjunto de ideas particulares. Esto es similar al esfuerzo necesitado para entender un texto histórico.

- Hay otras ventajas relacionadas con el curso, tales como la conexión con el tema de sistemas dinámicos.

Entre los ejemplos que muestra bajo la perspectiva histórica en la enseñanza, está un estudio relacionado con el método de Newton, del cual menciona que también es conocido como el método de la tangente o el método de Newton-Raphson aunque ni Newton ni Raphson hablaron de tangentes e incluso ni de geometría en este contexto. Mas aún, pasó un siglo antes de que Lagrange viera que ellos habían llegado al mismo método.

Menciona también que el método fue propuesto antes de la invención de las fluxiones, y en consecuencia no usa derivadas, sino sólo la idea de que algunas cantidades son insignificantes con respecto de otras, además que el cálculo de aproximaciones no es hecho en la forma explícita de una relación de recurrencia, a diferencia de lo que aparece en Raphson, sin embargo, los escritos de Raphson son más dificiles de leer. Su opinión es que Euler da una explicación mucho más clara de ello, pues trata casos particulares en los cuales aparece una relación de recurrencia aunque no usa la derivada explícitamente en sus escritos.

Ella considera que el método expuesto por Newton es muy fácil de manipular con un software simbólico, así que, la tarea de los estudiantes es entrar en el proceso lógico de un matemático del siglo XVII o XVIII y traducir sus métodos en sus propios lenguajes de programación, pidiendo además que justifiquen el hecho de que los dos métodos llevan a la fórmula con la derivada.

La autora menciona que este aspecto histórico, refuerza la idea de que la derivada permite hacer una aproximación de primer orden o que permite sustituir una función por su expansión de primer orden.

El extracto histórico al respecto del método de Newton que utilizó con sus estudiantes fue:

(a) Extract of "The method of fluxions," *The mathematical papers of Isaac Newton*, vol III, Whiteside ed, Cambrige University Press, 1969, pp. 43-47. [Written between 1964 and 1671, published in 1736, and explained by Wallis in his *Treatise of Algebra* in 1685.]

When, however, affected equations are proposed, the manner in which their roots might be reduced to this sort of series should be more closely explained, the more so since their doctrine, as hitherto expounded by mathematicians in numerical cases, is delivered in a roundabout way (and indeed with the introduction of superfluous operations) and in consequence ought not to be brought in to illustrate the procedure in species. In the first place, then, I will discuss the numerical resolution of affected equations briefly but comprehensively, and subsequently explain the algebraical equivalent in similar fashion.

Let the equation $y^3-2y-5=0$ be proposed for solution and let the number 2 be found, one way or another, which differs from the required root by less than its tenth part. I then set $2+p=y$, and in place of y in the equation I substitute $2+p$. From this there arises the new equation $p^3+6p^2+10p-1=0$, whose root p is to be sought for addition to the quotien. Specifically, (when p^3+6p^2 is neglected because of its smallness) we have $10p-1=0$, or $p=0.1$ narrowly approximates the truth. Accordingly, I write 0.1 in the quotient and, supposing $0.1+q=p$, I substitute this fictitious value for it as before. There results $q^3+6.3q^2+11.23q+0.061=1$. And since $11.23q+0.061=0$ closely approaches the truth, in other words very nearly $q=-0.0054$ (by dividing 0.061 by 11.23, that is, until there are obtained as many figures as places which, excluding the bounding ones, lie between the first figures of this quotient and of the principal one-here, for instance, there are two between 2 and 0.005), I write -0.0054 in the lower part of the quotient seeing that it is negative and then, supposing $-0.0054+r$ equal to q, I substitute this value as previously. And in this way I extend the operation at pleasure after the manner of the diagram appended.

	$+2{,}10000000$ $\underline{-0{,}00544852}$ $2{,}09455148[=y]$	
$2+p=y$	y^3 $2y$ -5	$+8+12p+6p^2+p^3$ $-4-2p$ -5
	Total	$-1+10p+6p^2+p^3$
$0{,}1+q=p$	p^3 $6p^2$ $10p$ -1	$0{,}001+0{,}03q+0{,}3q^2+q^3$ $0{,}06+1{,}2p+6p^2$ $1+10p$ -1
	Total	$0{,}061+11{,}23q+6{,}3q^2+q^3$
$-0{,}0054+r=q$	q^3 $6{,}3q^2$ $11{,}23q$ $0{,}061$	$-0{,}000000157464+0{,}00008748r-0{,}0162r^2+r^3$ $0{,}000183708-0{,}06804r+6{,}3r^2$ $-0{,}060642+11{,}23r$ $0{,}061$
	Total	$0{,}0005416+11{,}162r$
$-0{,}00004852+s=r$		

La autora concluye diciendo que bajo esta perspectiva, ha tratado de estimular la intuición y la imaginación, ofreciendo varios puntos de vista del mismo objeto matemático, además de que ha luchado contra el dogmatismo, demostrando que el proceso de creación matemática es acumulativa pero no lineal, que cada época construye sus métodos, conceptos y pruebas con un rigor apropiado a su sistema intelectual. Además con esta perspectiva prueba que no hay jerarquía entre la matemática pura y la aplicada, los conceptos teóricos y sus aplicaciones, e incluso para los futuros ingenieros de la matemática no es solamente un servicio de la disciplina, sino también un éxito maravilloso del pensamiento humano.

Finalmente queremos reportar el artículo escrito por Dance, Jeffers, Nelson y Reinthaler (1992), artículo que tiene que ver con nuestro tema matemático en cuestión, pero cuyo enfoque es desde el punto de vista de su aplicación y el uso de las calculadoras en la educación. Este artículo, pertenece a las publicaciones del NCTM y su principal objetivo es mostrar un estudio relacionado al uso de las calculadoras graficadoras para investigar un modelo de crecimiento de población.

Los autores piensan que el uso de las calculadoras graficadoras en las matemáticas asociadas con problemas del mundo real, es accesible para estudiantes de nivel superior, debido a que esa tecnología permite la investigación de sistemas dinámicos através de representaciones simbólicas y gráficas de ecuaciones en diferencias y recursión sin la monotonía que ha sido obstáculo en el pasado. Además de que ello, según los investigadores, puede desarrollar las bases intuitivas del concepto de límite y proveer antecedentes para un estudio más profundo en un curso de cálculo.

Se les mostró a los estudiantes una nota del Washington Post acerca de controlar la población de ciervos en tres reservas en Maryland, los estudiantes se convencieron de que el crecimiento de la población en cualquier año depende de la población en el año anterior y no es necesario considerar todas las variables, como por ejemplo los suministros de alimentos o los depredadores, que influyen en la dependencia. El modelo al que llegaron fue:

$$A(n+1) = (1+r)A(n)$$

o

$$A(n+1) = r(A)n + A(n)$$

donde $A(n+1)$ es la población en el año $n+1$, y r es el radio de crecimiento y $A(n)$ es el tamaño de la población en el año n.

Y la solución a la ecuación planteada es:

$$A(k) = A(0)(1+r)^k$$

Con el uso de la calculadora los estudiantes exploraron dicho modelo, y llegaron a la conclusión de que el modelo no era del todo fiable pues la población no puede crecer siempre de manera exponencial, por lo cual hicieron modificaciones a la ecuación y plantearon otra que modelara más cercanamente el problema:

$$A(n+1) = r(1 - A(n)/L)A(n) + A(n)$$

La exploración con la calculadora les permitió a los estudiantes que ese nuevo modelo se comportaba como lo esperaban, es decir, para pequeñas poblaciones el crecimiento es más rápido, el crecimiento cerca de L, es lento y la curva de crecimiento es acotada por el valor de L para valores pequeños de r. En consecuencia, una particular población puede ser modelada asignando valores a las constantes. Considerando un ambiente con una cantidad inicial de ciervos de $A(0) = 150$ y el radio de crecimiento $r = 0.5$, que puede mantener a una población de $L = 2000$, entonces la ecuación será:

$$A(n+1) = 0{,}5(1 - A(n)/2000)A(n) + A(n)$$

Se observa que el modelo de población de ciervos puede ser interpretado como la iteración de una función, es decir, como la composición de la función en ella misma. En consecuencia, la iteración de funciones permite a los estudiantes predecir el crecimiento de una población después de un tiempo n.

Ahora bien, usando la iteración de la nueva función, se les plantea a los estudiantes una nueva pregunta: ¿Bajo qué circunstancias la población del ciervo alcanza el equilibrio? es decir, se establece y mantiene. A lo que ellos reponden que cuando el "input" es igual al "output", lo que puede ser visualizado como el punto donde la función $A(n+1) = f(A(n))$ intersecta a la función $A(n+1) = A(n)$.

Los autores mencionan que lo anterior puede ser fácil de enteder en la notación algebraica convencional: una función $y = f(x)$ tiene un punto fijo bajo la composición con ella misma donde su gráfica intersecta a la gráfica de $y = x$.

Al respecto se les pide que exploren las funciones $f(x) = \cos x$ y $f(x) = \frac{x+7}{3}$, de donde obtienen la representación gráfica del proceso iterativo, llamado "cobweb" siguiendo los pasos para el primer ejemplo:

1. Elige una salida inicial, x_0
2. Coge a $y = \cos x_0$
3. Localiza el punto cuya primer coordenada es el valor que obtuviste en la recta $y = x$ (moviéndolo horizontalmente)
4. Encuentra el valor de la función para este nuevo valor moviéndolo verticalmente
5. Repite el paso 3
6. Repite el paso 4
7. Repite el paso 3
8. Repite el paso 4 y continua

Los autores mencionan que es importante enfatizar la relevancia de la línea $y = x$ en la gráfica de la recursión, ya que refuerza su significado para funciones inversas bajo la operación de composición.

Para el segundo ejemplo, los estudiantes encuentran la siguiente "cobweb", geométricamente es totalmente diferente a la "cobweb" de la función $f(x) = \cos x$, aunque el proceso es el mismo.

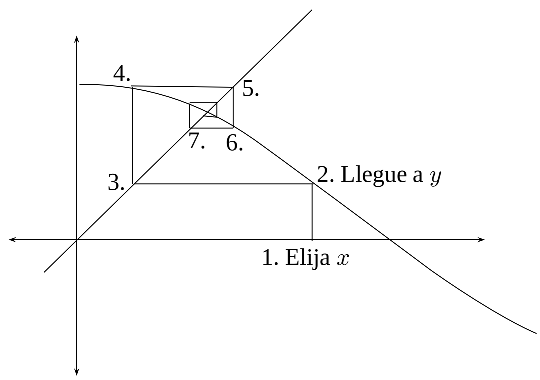


Figura 2.7: Proceso *cobweb* de la función $f(x) = cosx$

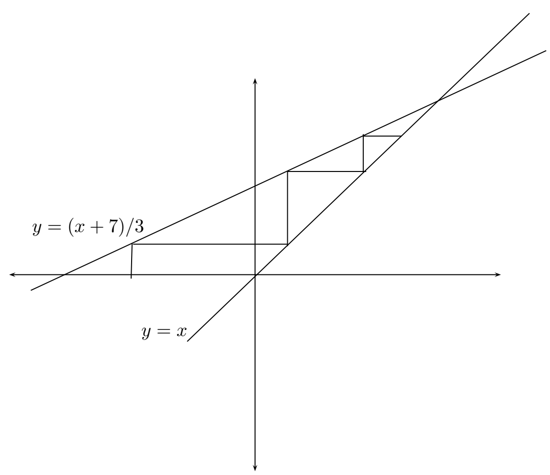


Figura 2.8: Proceso *cobweb* de la función $f(x) = (x+7)/3$

En consecuencia, los estudiantes notan la categorización para puntos fijos en dos diferentes tipos: puntos fijos atractores y puntos fijos repelentes. Los autores mencionan que la exploración suficiente probablemente dirigiría a los estudiantes a la siguiente conjetura: (1) cuando la pendiente, m, de la gráfica es negativa, la cobweb es una espiral y cuando m es positiva es una escalera; (2) cuando $\mid m \mid < 1$, el punto fijo es atractor, pero cuando $\mid m \mid > 1$ el punto fijo es repelente.

Ahora bien, con estos ejemplos ellos pueden simplificar su función modeladora en:

$$y = f(x) = -0{,}00025x^2 + 1{,}5x$$

Cuya gráfica es una parábola y cuyos ceros son $x = 0$ y $x = 6000$ es su vértice en el punto $(3000, 2250)$, y por aproximación con el procedimiento anterior pueden calcular el punto donde $A(n + 1) = A(n)$.

En conclusión, los autores mencionan que la aplicación del concepto de equilibrio en el problema de crecimiento de población de ciervos proporcionó una experiencia para construir una ecuación que modelara una situación real. Y además que las aplicaciones de las iteraciones en el mundo real abundan, por ejemplo, en problemas relacionados con la amortización, la desintegración radiactiva, el método de Newton para encontrar raíces de una ecuación, y los fractales.

Otro resultado importante es que a través de las "cobwebs" se desarró tanto visualmente e intutivamente el entendimiento de los límites.

Como puede observarse, las investigaciones que encontramos en relación a nuestro tema en cuestión, tienen enfoques diferentes entre sí, e incluso diferente al enfoque de la nuestra, sin embargo, comparten la importancia de hacer estudios en relación a éste con la finalidad de enriquecer hacia su entendimiento ya sea desde la perspectiva de lo teórico, desde la perspectiva de su enseñanza-aprendizaje, o desde la perspectiva de su aplicación en contexto.

Cabe mencionar que, en la búsqueda de información acerca de los antecedentes, nos percatamos que aunque existen muchas investigaciones al respecto del tema en cuestión, en nuestro campo de estudio, la didáctica de la matemática, realmente son muy pocas. Y aunque nos encontramos ante la insuficiencia de información después de haber realizado una búsqueda exhaustiva de ella, consideramos que las investigaciones que hemos revisado nos han orientado favorablemente en el seguimiento de nuestro trabajo, pues en efecto, nos han brindado un amplio panorama acerca de cuál es el estatus de nuestro objeto de estudio, en dicho campo.

2.2. El problema de investigación

La meta principal, radica en realizar un estudio de corte histórico-epistemológico encausado en el desarrollo de los métodos de aproximación a raíces, de tal forma que mediante un análisis de libros, esbocemos la evolución que ha sufrido fundamentalmente el tratamiento de dicho tópico hasta nuestros días, con el uso de la tecnología. La pregunta conductora para el seguimiento de esta investigación está formulada como sigue:

> ¿Cómo evoluciona un saber didáctico del análisis matemático desde el punto de vista de su tratamiento escolar: de los libros[7] a la perspectiva con recursos tecnológicos?

El argumento para el tratamiento hasta los sistemas de tecnología avanzada es que no analizamos los medios sino las comunicaciones matemáticas, es decir, contemplaremos cómo se lleva a cabo esta comunicación entre los medios.

La justificación de dicho estudio, radica en que los procesos de aproximación son una de las herramientas más utilizadas por miembros biólogos, economistas, ingenieros, etc., por mencionar algunos. Y asimismo el método de iteración es el prototipo de todos los métodos numéricos para abordar el problema de ecuaciones (no lineales) con una o varias variables (Henrici, 1977)

Cabe mencionar que Sierra et al. (1999, 2002) consideran que uno de los fundamentos de la enseñanza de las matemáticas se basa en la génesis misma de los conocimientos matemáticos. La perspectiva histórica permite mostrar, entre otras cosas, que la matemática es un conjunto de conocimientos en evolución continua y que dicha evolución desempeña a menudo un papel de primer orden, su interrelación con otros conocimientos y la necesidad de resolver determinados problemas prácticos. Asimismo, la traducción entre diferentes formas de representación es un aspecto esencial en la enseñanza y en el aprendizaje de algunos conceptos, puesto que se ofrece una perspectiva que enriquece su comprensión.

2.2.1. Objetivos de la investigación

De manera particular, nos propusimos realizar un estudio de corte histórico epistemológico relacionado con los métodos iterativos en la resolución

[7] Históricos y contemporáneos.

de ecuaciones no lineales desde el nacimiento del Cálculo hasta su implementación didáctica con las nuevas tecnologías. Para fijar ideas nos centraremos en los diferentes tratamientos didácticos, atendiendo a las distintas representaciones (geométrica, algebraica y numérica) que se les ha dado a dichos métodos.

Las interrogantes que nos hemos planteado son:

- ¿Qué tipo de concepciones sobre las matemáticas predominaban entre los matemáticos de los siglos XVII, XVIII y XIX en relación a los métodos de aproximación para encontrar una solución a una ecuación?

- ¿Qué tipo de problemas intentaban resolver los matemáticos de los siglos XVII, XVIII y XIX en general?

- ¿Cómo han variado los métodos iterativos para la resolución de ecuaciones al introducirlos como objeto de estudio en la enseñanza?

- ¿Cómo han variado los métodos iterativos para la resolución de ecuaciones no lineales al introducir las nuevas tecnologías en su enseñanza?

- ¿Qué similitudes existen en los métodos iterativos plasmados en los libros de texto con los expuestos por las nuevas tecnologías?

Estás preguntas nos incitan a plantear los siguientes objetivos para la investigación:

- Identificar y clasificar, a lo largo de la historia, los diferentes tratamientos de los métodos iterativos para encontrar raíces de ecuaciones no lineales.

- Analizar cómo han variado los métodos iterativos para la resolución de ecuaciones al introducirlos como objeto de estudio en la enseñanza.

2.2.2. Hipótesis de la investigación

En relación a los objetivos hemos planteado las siguientes hipótesis:

- Los procesos iterativos para la resolución de ecuaciones han evolucionado con base al tratamiento de la derivada a lo largo de la historia.

- El tipo de conceptualización matemática en cada periodo, viene marcada por el tipo de problemas que se intentan resolver en él.

- Los tratamientos geométrico, algebraico y numérico de los procesos iterativos no son independientes totalmente uno de otro.

- Las nuevas tecnologías vinculan los distintos tratamientos didácticos haciendo que la visualización entre mucho más en juego en la resolución de ecuaciones.

Cabe mencionar que el hilo conductor tanto de las preguntas como de los objetivos de investigación, fue el meollo de indagar sobre el desarrollo conceptual de los métodos iterativos, tomando como fundamento teórico, en esencia, a la investigación histórica-epistemológica.

Ahora bien, en función de los objetivos, fue necesario planificar la investigación en dos direcciones, por un lado el análisis de libros históricos y por otro el análisis de libros contemporáneos, lo cual nos llevó a considerar metodologías adecuadas a cada tipo de análisis respectivamente, así en la sección siguiente, explicamos cómo usamos cada una de ellas para alcanzar nuestros fines.

2.3. Metodología

Al ser este trabajo de corte histórico, hemos seguido una metodología que se corresponde fielmente con ella; en principio nuestro plan de trabajo consiste en seguir el método histórico[8] sugerido por Ruiz Berrio (1976) el cual está determinado por las siguientes fases:

- *Heurística:* localización y clasificación de los documentos.
- *Crítica histórica:*

  Crítica externa.- determinación de la autenticidad de las fuentes según sus características formales, las circunstancias en que ha llegado a ser posible su conocimiento y el modo de llegar a las manos del investigador.

  Crítica interna.- comprensión e interpretación del contenido de los documentos.
- *Hermenéutica:* interpretación histórico-pedagógica de los hechos.
- *Exposición:* explicaciones convenientes del trabajo histórico.

Siguiendo dicho método, hemos considerado tres periodos históricos significativos para nuestros objetivos: un primer periodo marcado por el nacimiento del cálculo (mediados del siglo S. XVII-S. XVIII), un segundo periodo a partir del nacimiento de los sistemas dinámicos (finales del S. XIX - mediados del S. XX) y un tercer periodo dado por la incorporación de nuevas tecnologías al ámbito educativo (mediados del siglo XX hasta nuestros días).

Con esta organización, pretendemos realizar un estudio de la evolución del tratamiento de los métodos iterativos bajo tres modalidades:

1) Análisis de libros históricos, que ciertos pensadores relevantes (Newton, Lagrange, etc.) han dedicado al Cálculo Diferencial e Integral.

   El análisis de estos libros nos permitirá descubrir los usos de los métodos de aproximación para calcular raíces de ecuaciones de primer orden.

[8] Sierra (1989) en un resumen que hace del método anterior, expresa que el primer paso debe ser la selección del tema y reducir cuanto se pueda los límites de la investigación, escogiendo conjuntos históricos representativos. Una vez hecho esto, se debe de programar el desarrollo de la investigación, realizando un estado de la cuestión, sondear los fondos documentales existentes, elaborar una hipótesis o campo de hipótesis como punto de partida, búsqueda exhaustiva de los documentos intentando buscar siempre fuentes primarias, realizar una crítica externa e interna de los documentos, estructuración definitiva del trabajo y, finalmente reportar las conclusiones.

2) Análisis de libros de texto de educación superior, que sean de mayor uso en la enseñanza contemporánea de los métodos de aproximación. (Burden, Vilenkin, Henrici, etc.)

   Estos libros seguramente nos permitirán hacer el estudio de las trasformaciones que han sufrido las representaciones expuestas en los libros históricos.

3) Análisis de los métodos iterativos en cada periodo de evolución, desde las dimensiones del conocimiento:

- Epistemológico: explicaciones acerca del fundamento y organización del contenido matemático en juego.

- Didáctico: nivel descriptivo que incluye todo aquello que particulariza la situación de enseñanza y de aprendizaje del objeto de análisis; en nuestro caso, se considera sólo el análisis de los libros de texto que atienden en uno de sus particulares los métodos de aproximación para la resolución de ecuaciones.

Selección de las fuentes.

Como hemos dicho en el capítulo anterior, retomamos la definición de fuentes históricas plasmada en González (2002), así entenderemos que éstas son los "resultados de la actividad humana que por su destino o su propia existencia u otras circunstancias, son particularmente adecuados para informar sobre los hechos históricos y para comprobarlos".

Además clasificaremos a las fuentes de la forma más conocida: en *fuentes primarias*, que son todos aquellos documentos elaborados por los participantes en los hechos, y que en nuestro caso serán los libros de texto originales, y en *fuentes secundarias*, que son aquellas que introducen una cierta distancia entre el fenómeno y su registro. Partiremos de éstas últimas para indagar acerca de los escritos realizados por los matemáticos en relación con la génesis de la teoría de las ecuaciones diferenciales y en particular con los métodos de aproximación para la resolución de ecuaciones.

A continuación mostramos tres tablas en donde indicamos algunas características (autor, título del escrito, ubicación) tanto de fuentes primarias (libros históricos, libros de texto contemporáneos) como de fuentes secundarias. En la primera tabla señalamos las fuentes secundarias revisadas; la segunda tabla plasma a las fuentes históricas indicando las obras de algunos autores sobresalientes en el primer y segundo periodo mencionados; y finalmente, en la tercera tabla se muestran algunos libros universitarios actuales, en donde se puede hallar el tema de los métodos iterativos en la resolución de ecuaciones no lineales.

Las fuentes secundarias fueron:

Autor	Año	Título	Localización
Boyer, C. B.	1986	H*istoria de la Matemática.* Traducción de Mariano Martínez Pérez. *A history of mathematics.* Alianza Editorial, S. A.	8121.503 Biblioteca Fac. Educación Universidad de Salamaca.
Cajori, F.	1969	*An introduction to the theory of equations*. New York: Dover, 1969.	AZ/517.9 CAJ int. Biblioteca Abraham Zacut Universidad de Salamanca.
Grattan-Guinnes, I.	1980	*Del Cálculo a la Teoría de Conjuntos*, 1630-1910. *Una Introducción Histórica*. Traducción de: Mariano Martínez Pérez. *From the Calculus to Set Theory*, 1630-1910. A*n Introductory History.*	8121.477 Biblioteca Fac. Educación Universidad de Salamanca.
Hairer, E. y Wanner, G.	1996	Analysis by Its History. Springer Verlag. New York.	8121.575 Biblioteca Fac. Educación Universidad de Salamanca.
de Guzmán, M.	1975	*Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Teoría de Estabilidad y Control.* Alambra. Madrid.	8121.003 Biblioteca Fac. Educación Universidad de Salamanca.
Struik, D.	1998	*Historia Concisa de las Matemáticas.* Traducción de: Pedro Lezama y Noriega. *A Concise History of Mathematics.* Instituto Politécnico Nacional. México.	ISBN 968-7001-35-6 Biblioteca personal.
Delachet, A.	1973	*Análisis Matemático.* Traducción de: Jaime Tortella Casares. *L'analyse mathématique.* Editorial Tecnos. Madrid.	8121.345 Biblioteca Fac. Educación Universidad de Salamanca.
Simmons, G.	1991	*Ecuaciones diferenciales: con aplicaciones y notas históricas.*	UP/VZ.i/004.12 SIM ecu Univ. Pont.

		(Con un capítulo sobre métodos numéricos de John S. Robertson; traducción Lorenzo Abellanas Rapún. Mc. Graw- Hill. 2a. Ed.	Universidad Pontificia de Salamanca.
Moreno, Ma. Del M.	2000	El profesor universitario de matemáticas: Estudio de las concepciones y creencias acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. Estudio de casos. Tesis Doctoral.	Biblioteca personal. Dr. Modesto Sierra. Salamanca, España.
Aaboe, A.	1954	Al-Kashi's iteration method for the determination of sin 1. *Scripta Math* **20** p. 24-29	Biblioteca Personal.
Kollerstrom, N.	1992	Thomas Simpson and method of aproximation. *British Journal for the History of Science* **25** p. 347-354	Biblioteca Personal.
Christensen, C.	1996	Newton's Method for Resolving Affected Equations. *College Mathematics Journal* **27** (5) pp. 330-340	Biblioteca Personal.
Cajori, F.	1910	Historical note on the Newton Raphson method of approximation *Amer. Math. Monthly* **18** pp. 29-33	No localizado.
Dhombres, J.	1985	Review of the origins of Cauchy's rigorous calculus by Judith, V. Grabiner en *Historia Mathematica* **12** pp. 86-90	No localizado.
Romero, J. et al.	1999	Algoritmos iterativos para la computación de raíces de sistemas de ecuaciones. *SUMA* **31** pp. 51-54	Biblioteca personal.
Varona, J.	2002	Graphic and numerical comparison between iterative methods. *The mathematical Intelligencer* **24** (1) pp.37-45	Biblioteca personal.
Cerasoli, M.	2001	Dall algoritmo babilonese al frattale di Mandelbrot. *Bolletino dei docente di Matematica* **43** p. 17-22	Biblioteca personal.
Cantoral, R. y Rodríguez-	2005	*Recursividad, Convergencia y Visualización.* Cuadernos	Biblioteca personal.

Vásquez, F.		didácticos. Edición especial CASIO.	
Cantoral, R. y Reséndiz, E.	2001	Aproximaciones Sucesivas y Sucesiones. Grupo Editorial Iberoamérica. México.	Biblioteca personal.

Cuadro 2.1: Fuentes secundarias

Las libros históricos fueron:

Autor (nacimiento-fallecimiento)	Título de la obra	Fecha de publicación	Referencia	Nota personal
Isaac Newton (1642-1727)	*Algebra.*	1685	BG/13258 T.1 Biblioteca General de la Universidad de Salamanca.	Explicación del teorema binomial.
	Philosophiae naturalis principia mathematica.	1687	BG/13259 T.2. Biblioteca General de la Universidad de Salamanca.	Primera exposición del cálculo impresa. Tratado científico más admirado de todos los tiempos. En las primeras secciones clarifica las ideas de Galileo sobre el movimiento. Contiene los fundamentos del cálculo y la Ley de la gravitación.
	El movimiento de los cuerpos.	1742-1760	BG/13260 T.3 pt.1. Biblioteca General de la Universidad de Salamanca.	
	El movimiento de los cuerpos en medios resistentes.		BG/13261 T.3 pt.2. Biblioteca General de la Universidad de Salamanca.	
	El sistema del mundo		Biblioteca General de la Universidad de Salamanca.	
	De cuadratura curvarum.	1704	Biblioteca General de la Universidad de Salamanca.	Tercera exposición del cálculo. Método de la primera y última razón.

	De analysi per aequationes numero terminorum infinitas.	1711	Biblioteca personal.	Primera exposición sistemática del cálculo. Obra incluida en las *Opera quae existant omnia* (1779-1785) Método de Newton para la resolución aproximada de ecuaciones.
	Methodus fluxionum et serierum infinitorum.	1742		Explicación de su método de fluxiones. Segunda explicación del cálculo. Fluentes y fluxiones.
Gottfried Leibniz (1646-1716)	*Acta Eruditorum.*	1684	Acta Eruditorum: anno MDCLXXXIV publicata Signaturas: 6/4250 Final del formulario 1686-1700. Biblioteca Nacional de Madrid.	Exposición de su cálculo diferencial. Especie de revista científica mensual.
	Acta Eruditorum.	1686	Acta eruditorum: anno MDCLXXXVI publicata Signaturas: 6/4250 1686-1700. Biblioteca Nacional de Madrid.	Exposición de su cálculo integral. Especie de revista científica mensual.
Jacob Bernoulli (1654-1705)	*Acta Eruditorum.*	1690	Acta eruditorum: anno MDCXC publicata Signaturas: 6/4250 1686-1700. Biblioteca Nacional de Madrid.	El problema de determinar la Isócrona, lo cual equivale a resolver una ecuación diferencial no lineal de primer orden.

Johann Bernoulli (1654-1705)	*Opera omnia, tam antea sparsim edita quam hactenus inedita.*	1742	BG/1251-4 T1-T4 BG/40403/04/05 T1-T3 BG/45936 T4. Biblioteca General de la Universidad de Salamanca.	Apareció su texto sobre cálculo integral (50 años después de haber sido escrito)
Brook Taylor (1685-1731)	*Methodus incrementorum directa et inversa.*	1715		Temas familiares al cálculo como fórmulas que relacionan las derivadas de una función con las derivadas de una función inversa. (Soluciones singulares de ecuaciones diferenciales). Intento de hallar la ecuación de la cuerda vibrante.
Leonhard Euler (1707-1783)	*Methodus inveniendi Lineas Curvas. Maximi minimive proprietata gaudentes ...*	1744		
	Opera Omnia: Vol 8,9 Introductio in analysis infinitorum.	1748	Signaturas: 2/46718-19, 3/549-50. Biblioteca Nacional de Madrid.	
	Opera Omnia: Vol 10 Institutiones calculi differentiatis.	1755	BNE. Signaturas: 2/20540-41. Biblioteca Nacional de Madrid. Biblioteca de la Dra. Ma. Teresa González Astudillo.	

	Opera Omnia: Vol 11-13 Institutiones calculi integralis.	1755	BNE. 2/20542-44. Biblioteca Nacional de Madrid.	
Jean le Rond D'Alembert (1717-1783)	*Encyclopedie o Dictionaire raisonné des sciences, des arts et des metiers.* *Memoirs de la Academia de Berlin.*	1751-1772 1747	Signaturas: R/34752-79. Biblioteca Nacional de Madrid.	 Problema de la cuerda vibrante.
Joseph Louis Lagrange (1736-1813)	*Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés.*	1808	AZ/51 LAG oeu T8. Biblioteca Abraham Zacut. Universidad de Salamanca.	Sobre la resolución numérica de ecuaciones. Algebraicamente.
August Cauchy (1789 -1857)	*Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique.* *Resumé des leçons sur le calcul infinitesimal.* *Leçons sur le calcul differentiel.* *Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy.*	1821 1823 1839 1887	Biblioteca Personal. AZ/51 CAU oeu Ser. 2a. T. 3-9. Biblioteca Abraham Zacut. Universidad de Salamanca.	Sobre la resolución numérica de ecuaciones.
W. S. Burnside & A. W. Panton (1852-1927/?)	*The theory of equations.*	1918	61.154. Biblioteca General de la Universidad de Salamanca.	Varios métodos de aproximación a raíces (Newton, Lagrange y Horner).

Jules Henri Poincaré (1854-1912)	*Les Méthodes nouvelles de la mécanique céleste.*	1892-1899	Signaturas: F/1448-50. Biblioteca Nacional de Madrid.	En ellas elaboró la teoría de los desarrollos asintóticos, estudió la estabilidad de las órbitas e inició la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales no lineales.
Emile Picard (1856 - 1941)	*Leçons sur quelques types simples d'equations aux dérivées partielles avec des applications à la Physique mathématique.*	1927	Signaturas: 2/89133, 2/89454. Biblioteca Nacional de Madrid.	Uso el método de aproximaciones sucesivas para probar la existencia de soluciones a ecuaciones diferenciales ordinarias resolviendo el problema de Cauchy para ellas.

Cuadro 2.2: Libros Históricos

Los libros de texto contemporáneo fueron:

Autor	Año de publicación	Título	Localización
Baker, G. & Gollub, J.	1990	*Chaotic Dynamics. An introduction.* Cambridge University Press.	FV/517.91 BAK cha Biblioteca Francisco de Vitoria. Universidad de Salamanca.
Devaney, R.	2003	*Chaos, Fractals and Dynamics.Computer experiments in mathematics.* 2a. Ed. Boulder (Colorado): Westview Press.	FV/517.96 DEV int. Biblioteca Francisco de Vitoria. Universidad de Salamanca.
Henrici, P.	1972	*Elementos de análisis numérico.* Traducción, Federico Velasco Coba; revisión técnica, Emilio Lluis Riera. México: Trillas.	AZ/519.6 HEN ele. Biblioteca Francisco de Vitoria. Universidad de Salamanca.
Zill, D.	1988	*Ecuaciones diferenciales con aplicaciones.* Traductores, Eduardo M. Ojeda Peña, Álvaro Cofré Matta; revisores técnicos Francisco Paniagua Bocanegra[et al.] 2a. Ed. México D. F. Grupo Editorial Iberoamérica.	CR/517.9 ZIL ecu. Biblioteca Claudio Rodríguez. Universidad de Salamanca.

Jiménez, V.	2000	*Ecuaciones Diferenciales: cómo aprenderlas, cómo enseñarlas. Murcia: Universidad de Murcia Servicio de Publicaciones*	AZ/P1/517.9 JIM ecu. Biblioteca Abraham Zacut. Universidad de Salamanca.
Simmons, G.	1991	*Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Con aplicaciones y notas históricas.* Traducción por Lorenzo Abellanas Rapun. Mc. Graw Hill	UP/VZ.i/004.12 SIM ecu. Universidad Pontificia de Salamanca.
Burden, R. y Faires, J.D	2002	*Análisis Numérico* 7a. Ed. Thomson Learning.	Biblioteca personal.
N. Ya. Vilenkin.	1984	*Método de las aproximaciones sucesivas.* 2a. Ed. Editorial Mir. Moscu.	AZ/519.6 VIL met. Biblioteca Abraham Zacut. Universidad de Salamanca.
Beckett, R. & Hurt, J.	1967	*Numerical calculations and algorithms.* McGraw-Hill, Inc. USA.	AZ/519.6 BEC num. Biblioteca Abraham Zacut. Universidad de Salamanca.
Conte, S. & de Boor, C.	1980	*Elementary numerical analysis. An Algorithmic Approach.* McGraw-Hill Book Company.	FV/519.6 CON ele. Biblioteca Francisco de Vitoria. Universidad de Salamanca.
Nakamura, S.	1992	*Métodos numéricos aplicados con software.* Traducción por Oscar Alfredo Palmas. Prentice Hall Hispanoamericana, S. A.	Biblioteca personal.
Carnahan, B., Luther, H. & Wilkes, J.	1969	*Applied numerical methods.* John Wiley & Sons, Inc. New York.	Biblioteca Jerzy Plebanski. Cinvestav-IPN.
Kincaid, D. & Cheney, W.	1990	*Numerical Analysis.* Books/Cole Publishing Company.	Biblioteca Jerzy Plebanski. Cinvestav-IPN.
Johnston, R.	1982	*Numerical methods. A software approach.* John Wiley & Sons, Inc. New York.	Biblioteca Jerzy Plebanski. Cinvestav-IPN.
Kahaner, D., Moler, C. & Nash, S.	1989	*Numerical methods and software.* Prentice Hall, New Jersey.	Biblioteca Jerzy Plebanski. Cinvestav-IPN.
Atkinson, K.	1978	*An introduction to numerical analysis.* John Wiley & Sons, Inc. New York.	Biblioteca Jerzy Plebanski. Cinvestav-IPN.
Hildebrand, F. B.	1974	*Introduction to numerical analysis.* 2a. Ed. McGraw Hill Book Company, Inc.	Biblioteca Jerzy Plebanski. Cinvestav-IPN.

Hamming, R. W.	1973	*Numerical methods for scientists and engineers.* McGraw Hill, N. Y.	Biblioteca Jerzy Plebanski. Cinvestav-IPN.
Fröberg, C.E.	1977	*Introducción al análisis numérico.* Traducción de Mariano Gasca González. VICENS universidad.	Biblioteca Jerzy Plebanski. Cinvestav-IPN.
Shampine, L. & Allen, R. Jr.	1973	*Numerical computing:an introduction.* W. B. Saunders Company.	Biblioteca Jerzy Plebanski. Cinvestav-IPN.

Cuadro 2.3: Libros de texto contemporáneo

2.3.1. Metodología para el análisis de libros históricos y libros de enseñanza contemporánea

Uno de los principales ejes para dirigir este tipo de investigación, es que a través de un seguimiento en la evolución de un saber nos debe servir para identificar el problema que nos atañe y asimismo iluminar nuestra actuación en el momento actual. Sierra (1987) indica que algunas funciones que desempeña la investigación histórica son:

- Laboratorio del desarrollo curricular.
- Antídoto contra el formalismo y el aislamiento del saber matemático.
- Antídoto contra una concepción abstracta y absoluta de modelos didácticos aislados.
- Como modelo para que el profesor comprenda mejor el objeto de su actividad profesional.
- Restitución a las matemáticas y su enseñanza, de su doble dimensión cultural y educativa.

Pensando entonces en la importancia de la investigación histórica, seguimos la idea de Schubring (1987), por ende partimos del hecho de que la práctica de la enseñanza no está tan determinada por los decretos y órdenes ministeriales como por los libros de texto utilizados para enseñar, por lo tanto se llega a la necesidad de un análisis de dichos libros de texto.

Para organizar el trabajo y como se ha dicho, con base en el método de Ruiz Berrio (1976) y González (2002), planteamos los siguientes campos de estudio para los libros históricos:

- *Ficha de referencia de la obra*, la cuál nos permite enmarcar la obra en el momento en el que fue escrita.
- *Contexto y propósitos de la obra y del autor*, que en función de los hechos que influyeron para su divulgación, nos lleva entre otras cosas, al estudio del contexto histórico-cultural de las matemáticas en general, de la estructura del material, de la secuenciación de los contenidos de la obra, de sus objetivos y de las innovaciones introducidas por el material.
- *Tipo de proceso utilizado en la resolución de ecuaciones*, desde la perspectiva de los marcos geométrico, algebraico y numérico.
- *Conclusiones*, haciendo hincapié en las componentes de conocimiento, epistemológico y socio-cultural.

En la siguiente tabla planteamos las categorías de análisis a considerar para los libros históricos.

Campo de Análisis	Unidades de Análisis		Categorización	Descripción general de los propósitos
Ficha de referencia de la obra	• Nombre del autor • Fechas de nacimiento y fallecimiento del autor • Primera edición • Edición analizada • Localización del manual utilizado		**CP1**	Nos permite enmarcar la obra en el momento en el que fue escrita.
Contexto y propósitos de la obra y del autor	• Momento histórico y lugar en que fue escrita la obra		**CP1**	Contextualización y caracterización de la obra en función de los sucesos que influyeron para su divulgación.
	• Contexto histórico-cultural de las matemáticas en general		**CP2**	
	• Formación del autor		**CP3**	
	• Estructura general del material	-Extensión y estructura del material -Secuenciación de los contenidos de la obra -Tipografía de la obra	**CP4**	
	• Objetivos generales de la obra		**CP5**	
	• Innovaciones introducidas por el material		**CP6**	
	• Otras obras publicadas		**CP7**	
Tipo de proceso utilizado en la resolución de ecuaciones	• Geométrico (G)	-Ejemplos de problemas -Tipos de expresiones utilizadas -Conceptos involucrados -Gráficas empleadas	**PG**	Explicación del tratamiento didáctico en que los periodos uno y dos se le dio a los procesos iterativos.
	• Algebraico (A)	-Ejemplos de problemas -Tipos de expresiones utilizadas -Conceptos	**PA**	

		involucrados		
	• Numérico (N)	-Ejemplos de problemas -Tipos de expresiones utilizadas -Conceptos involucrados	**PN**	

Cuadro 2.4: Categorías para el análisis de libros históricos.

Ahora bien, para el análisis de los libros de texto contemporáneos, fundamentalmente nos basamos en las etapas[9] sugeridas por Sierra, Gónzalez y López (1999), haciendo algunas adaptaciones para nuestro tema matemático en cuestión:

Etapa 1. Fichas bibliográficas con los datos fundamentales del libro: Título, autor(es), editorial, edición analizada.

Etapa 2. Bosquejo general del texto: objetivos del(os) autor(es), objetivo del libro en general, la importancia del estudio de los métodos iterativos.

Etapa 3. Dimensiones de análisis:

a) Análisis conceptual. Se refiere a cómo se define y organiza el concepto a lo largo del texto, representaciones gráficas utilizadas, tipo de problemas y ejercicios resueltos o propuestos, así otras características que determinan el tratamiento del concepto.

b) Análisis didáctico-cognitivo. Se refiere tanto a la explicitación de los objetivos que los autores quieren conseguir como al modo en el que se intenta que el alumno desarrollo ciertas capacidades cognitivas.

[9]Las etapas que proponen Sierra, González y López (1999) son:

- Primera etapa. Elaboración de fichas bibliográficas con los datos fundamentales del libro: título, autor/es, editorial, año de edición, plan de estudios y resumen del contenido de los capítulos relacionados con el límite.
- Segunda etapa. Tablas comparativas que incluyen: Modo de introducción del concepto (formal, heurístico o constructivo); Tipo de definición (topológica, métrica, geométrica o por sucesiones); Secuenciación (listado de definiciones y propiedades relacionadas con el límite, numerándolas según su orden de aparición.)
- Dimensiones de análisis: Análisis conceptual; Análisis didáctico-cognitivo; Análisis fenomenológico.

c) Análisis fenomenológico. Se caracteriza por los fenómenos que se toman en consideración con respecto al concepto en cuestión.

Ya que nuestra finalidad fue investigar sobre el desarrollo conceptual de los métodos iterativos, estás dimensiones de análisis nos permitieron estudiar entre otras características el tipo de lenguaje, el papel de los ejercicios y la influencia didáctica que se ha tenido presente en la enseñanza de los métodos iterativos para la resolución de ecuaciones no lineales, así como la relación existente de la visualización en las formas de representación como un proceso de comprensión. En la siguiente tabla planteamos las categorías de análisis a considerar.

Campo de análisis	Unidades de análisis		Categorización	Descripción general de los propósitos
Ficha de referencia del texto	•Nombre de los autores •Título del texto •1ra. Edición (año) y editorial •Edición analizada y editorial •Localización del texto analizado		**FRT**	El propósito es conocer la ubicación del libro y el contexto en general.
Análisis Conceptual	•Conocimientos previos		**ACCP**	Definición y organización del concepto, tipo de representación, función de los problemas y ejercicios resueltos o propuestos.
	•Conceptos	•Formal	**ACCF**	
		•Heurístico	**ACCH**	
		•Constructivo	**ACCC**	
	•Ejemplos y Ejercicios	• De aplicación o argumentación de las definiciones o conceptos	**ACEEA**	
		•De la técnica de demostración de teoremas o corolarios	**ACEET**	
	•Representación del algoritmo iterativo	• Gráfico	**ACRG**	
		• Algebraico	**ACRA**	
		• Numérico	**ACRN**	
Análisis Didáctico	•Objetivos e intenciones del (os) autor (es)		**ADOA**	La finalidad es mostrar los objetivos que el autor pretende alcanzar. Así como la influencia didáctica actual.
	•Corriente didáctica subyacente		**ADCD**	
	•Capacidades y habilidades que se quieren desarrollar		**ADCH**	
Análisis Fenomenológico	•En torno a la matemática misma		**AFTM**	La finalidad es mostrar los fenómenos que se toman en consideración con respecto al concepto en cuestión.
	•En torno a otras ciencias		**AFOC**	
	•Fenómenos contextualizados		**AFFC**	

Cuadro 2.5: Categorías para el análisis de libros de texto.

Respecto a la muestra original para el estudio, consistió de tres libros históricos que fueron elegidos por su amplio contenido acerca de los métodos iterativos, y porque de acuerdo a las fuentes secundarias, los autores que elegimos destacaron con dicho método en la historia, finalmente otra consideración que hicimos fue la disponibilidad del material. Asimismo, se eligieron cinco libros de texto de nivel superior de acuerdo al siguiente criterio: los libros de texto estuvieron destinados para grados universitarios; contuvieron referencias para el tema de las soluciones numéricas de sistemas de ecuaciones no lineales, graficación de las soluciones, tablas, dibujos o relaciones; asimismo elegimos los libros que en varias universidades sugieren como libro base de la materia de análisis numérico y en este sentido, de alguna manera los más utilizados; finalmente nos fijamos en que la editorial tuviera impacto con el número de ediciones del libro. Los libros elegidos fueron los siguientes:

Libros históricos:

- Newton, I. (1711). *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas.* Editado por William Jones.
- Lagrange, J. L. (1808). *Traité de la Résolution des équations numériques de tous les degrés.* De L'Ecole Polytechnique.
- Burnside, W. y Panton, A. (1881). *The theory of equations.* Dublin University press series.

Libros contemporáneos:

- Atkinson, K. (1978). *An introduction to numerical analysis.* John Wiley & Sons, Inc. New York.
- Burden, R. I. y Faires, J. D. (2002). *Análisis Numérico.* Thomson Learning.
- Carnahan, B., Luther, H. & Wilkes, J. (1969). *Applied numerical methods.* John Wiley & Sons, Inc. New York.
- Conte, S. D. y Boor, C. (1980). *Elementary numerical analysis. An Algorithmic Approach.* McGraw-Hill Book Company.
- Fröberg, C.E. (1977). *Introducción al análisis numérico.* Traducción de Mariano Gasca González. VICENS universidad.
- Hamming, R. W. (1973). *Numerical methods for scientists and engineers.* McGraw Hill, N. Y.
- Henrici, P. K. (1972). *Elementos de Análisis Numérico.* Trillas, México.
- Hildebrand, F. B. (1974). *Introduction to numerical analysis.* 2a. Ed. McGraw Hill Book Company, Inc.

- Johnston, R. (1982). *Numerical methods. A software approach.* John Wiley & Sons, Inc. New York.
- Kahaner, D., Moler, C. & Nash, S. (1989). *Numerical methods and software.* Prentice Hall, New Jersey.
- Kincaid, D. & Cheney, W. (1990). *Numerical Analysis.* Books/Cole Publishing Company.
- Nakamura, S. (1992). *Métodos numéricos aplicados con software.* Prentice Hall Hispanoamericana, S. A.
- Shampine, L. & Allen, R. Jr. (1973). *Numerical computing:an introduction.* W. B. Saunders Company.

A continuación en el capítulo tres, mostramos los datos obtenidos de los libros históricos y posteriormente en el capítulo cuatro los datos de los libros de texto contemporáneos, en función de nuestros objetivos.

Capítulo 3

Libros históricos

Introducción

En este apartado plasmamos el análisis realizado de los libros históricos de texto, que como ya hemos dicho, fueron elegidos para su estudio debido a su aporte significativo en la teoría de la resolución de ecuaciones, asimismo los autores de dichos libros han sido pensadores destacados en el desarrollo mismo de la matemática, y su influencia en los contenidos actuales de la matemática sin duda está presente.

Al realizar un estudio de este tipo de fuentes se enriquece el fundamento epistemológico del conocimiento estudiado, al respecto, en la actualidad existe una amplia red de investigadores en esta dirección dado que se contempla cada vez más, que la epistemología de un saber es fundamental para la construcción del conocimiento. A propósito de esto, uno de los fundamentos en la reforma de la enseñanza de la matemática, es la concepción que parte respecto a la naturaleza del conocimiento matemático y en este sentido, la perspectiva histórica permite mostrar, entre otras cosas, que la matemática es un conjunto de conocimientos en evolución continua, de donde puede observarse su interrelación con otros conocimientos y la necesidad de resolver determinados problemas prácticos.

Nápoles y Negrón (2002) mencionan que parece difícil de negar, el hecho de que las diversas interpretaciones epistemológicas acerca del estatus científico de las matemáticas, tienen una influencia decisiva en la consideración de su historia y su enseñanza. Por ende, veamos a continuación el desarrollo en cuanto a la producción y uso de los métodos iterativos en los libros históricos que fueron elegidos para analizar por su profundidad en dicha temática. En primer lugar daremos una breve biografía del autor de manera que nos involucremos en su contexto, luego, describimos momentos retomados de sus libros en donde se halla explícito algún indicio y propiamente el uso del método iterativo en la resolución de ecuaciones. A lo largo de la exposición de cada sección analizada, se va haciendo referencia a cada una de las categorías establecidas en el capítulo anterior, para ir haciendo "explícito" el análisis y aventajar al respecto de las conclusiones.

3.1. *De análysi per æquationes numero terminorum infinitas*

3.1.1. El autor

Isaac Newton nació[1] el 4 de Enero de 1643 en Woolsthorpe, Inglaterra, posteriormente estudió en la Free Grammar School de Grantham y realizó estudios universitarios en el Trinity College en Cambridge. Algunas fuentes que influyeron en el desarrollo de sus estudios fueron: *Logicae artis compendium* (1618) de Robert Sanderson (1587-1663), *Los Elementos de Euclides* (1482) de Euclides de Alexandria (325 a. C-265 a. C), *La géométríe* (1637) de René Descartes (1596-1650), la *Clavis Mathematicae* (1631) de William Oughtred (1574-1660), la *Arithmetica Infinitorum* (1655) de John Wallis (1616-1703), la miscelánea *Exercitationum Mathematicarum Libri quinque* (1657) de Frans van Schooten (1615-1660) y las enseñanzas que recibió de Isaac Barrow (1630-1677).(**CP3**)

En general fueron tres los aspectos fundamentales de la obra de Newton (Muñoz, 1999): en primer lugar abordó el tema de la luz y los colores.[2]; en segundo lugar, Newton estudió el tema de la gravedad, y comprobó que los satélites y planetas se mantienen unidos por esa fuerza, que depende de la distancia y de las masas de los cuerpos que se atraen. De aquí que enunció la Ley de la Gravitación Universal que se puede aplicar a todos los cuerpos en movimiento; por último, investigó en aspectos importantes del Cálculo[3]; cuadraturas, aspectos de los movimientos como por ejemplo la velocidad de un móvil, cantidades que cambiaban como si estuvieran influidas por un flujo (fluxiones), trabajó sobre series infinitas, etc.(**CP2**)

Sobre esta época en la que afloraron muchos de sus descubrimientos se le ha denominado los *annus mirabilis* de Newton, él mismo escribe al respecto:(**CP2**)

[1] Nació el 24 de diciembre de 1642 y murió el 20 de marzo de 1727 según el calendario en uso en la época. Nació el 4 de enero de 1643 y murió el 31 de marzo de 1727 según el calendario gregoriano, el cual fue adoptado en Inglaterra hasta 1752.

[2] En este tiempo se pensaba que los colores eran deformaciones de la luz blanca, pero sus experimentos mostraron que los colores primarios del arco iris formaban la luz blanca y que ésta podía descomponerse al hacerla pasar por un cristal. Por muy perfecta que sea la lente siempre hay rayos de luz que se desvían y no llegan exactamente al lugar que se desea, esto llevó a Newton a construir telescopios especiales para poder ver a grandes distancias y estudiar los planetas.

[3] No hay que confundir con el manejo de los números y sus operaciones, que es lo que estudia la Aritmética.

> “A principios del año 1665 hallé el método de series aproximativas y la regla para deducir cualquier dignidad de cualquier binomio a tales series[4]. El mismo año en mayo hallé el método de las tangentes de Gregory y Slusius, y en noviembre obtuve el método directo de fluxiones, y el año siguiente, en enero, conseguí la teoría de los colores y en mayo siguiente tuve entrada al método inverso de las fluxiones. Y en el mismo año empecé a pensar en la gravedad extendiéndose hasta el orbe de la Luna, y habiendo encontrado cómo estimar la fuerza con la cual un globo girando dentro de una esfera, presiona la superficie de la esfera a partir de la regla de Kepler de los tiempos periódicos de los planetas, como hallándose en proporción sesquialterada de sus distancias de los centros de sus órbitas; deduje que las fuerzas que mantienen a los planetas en sus órbitas deben ser recíprocas a los cuadrados de sus distancias de los centros en torno a los que giran; en consecuencia, comparé la fuerza necesaria para mantener a la Luna en su órbita con la fuerza de la gravedad en la superficie de la Tierra, y hallé las respuestas muy parecidas. Todo esto ocurrió en los dos años de la peste de 1665 y 1666. Porque en estos días me hallaba yo en mi época más fecunda de invención y pensaba en las matemáticas y en la filosofía mucho más que en ninguna otra época desde entonces.”

La época en la que vivió Newton fue la de la Revolución Científica caracterizada porque en este lapso se crearon instituciones como las primeras sociedades científicas realmente significativas y estables. Por ejemplo, entre las primeras academias está la Academia dei Lincei de Roma (1601-1630), La Academia del Cimento de Florencia (1657-1667), La Royal Society de Londres (1662), La Académie des Sciences de París (1666) o la Academia de Berlín fundada por Leibniz (1646-1716) en 1700.(**CP2**)

Estas sociedades que comenzaron a proliferar en la mayoría de los países europeos durante el siglo XVII, permitieron crear foros de debate para presentar resultados, contrastar hipótesis e intercambiar experiencias. Uno de los vínculos de comunicación fundamental en la divulgación de los resultados fueron las revistas científicas, por ejemplo en 1665 aparece *Philosophical Transactions* (inicialmente trabajo de Henry Oldenburg[5](1619-1677)), *Journal des savans* publicada por la Académie Royale des Sciences, y en 1682 en Leipzig se comienza a publicar las *Acta Eruditorum.* (**CP2, CP7**)

Newton fue elegido titular de la cátedra *lucasiana*[6] de matemáticas que hasta entonces había sido ocupada por Barrow, quien deslumbrado por los

[4]Newton se refiere al desarrollo del teorema binomial o expansión de $(a+b)^c$.

[5]Nombrado en 1662 secretario de la Royal Society y entre otras cosas encargado del intercambio de información con otros países.

[6]Cátedra de Cambridge habitualmente ocupadas por directores del Trinity, la pieza más valorada en Cambridge, creada en 1663.

conocimientos de Newton dejó la cátedra en sus manos. Los estatutos de la universidad exigían a aquellos que la ocuparan que impartieran al menos una clase por semana cada trimestre sobre Geometría, Astronomía, Geografía, Óptica, Estática y alguna otra disciplina matemática, y que entregaran el texto escrito de sus clases anuales a la biblioteca de la Universidad.(**CP2**)

Las principales obras[7] de Newton, en las que expuso muchos de los avances para la ciencia fueron:(**CP7**)

* (1687) *Philosophiae naturalis principia mathematica.* Londres.
* (1704) *Opticks: or a treatise of the reflexions, refractions, inflexions and colours of light. Also two treatises of the species and magnitudes of curvilinear figures.* Londres.
* (1711) *Analysis per quantitatum series, fluxiones, ac differentias; cum enumeratione linearum tertii ordinis.* Editado por William Jones. Londres.

Isaac Newton asimiló lo esencial del conocimiento matemático de tal forma que fue capaz de resolver problemas que cambiarían completamente la faz del análisis en particular y de la matemática en general. Descubrió la joya suprema del cálculo: la derivación y la integración. (Sánchez, 2003)(**CP6**)

Para 1689, Newton tomó posesión del puesto de Warden del Mint, es decir, Guardián de la Casa de la Moneda Inglesa por lo cual tuvo que trasladarse a Londres, en 1700 ascendió a Master, el puesto supremo del Mint, con estos puestos renunció totalmente a su cátedra en 1701, y en 1703 fue elegido presidente de la Royal Society. Con el paso del tiempo la salud de Newton se fue deteriorando, a tal grado que en 1693 tuvo un desequilibrio mental pasajero, y luego de otros problemas de salud finalmente falleció el 20 de marzo a la edad de 85 años[8].(**CP3**)

[7]Una consecuencia de publicar incluso después de que sus hallazgos eran superados por otras publicaciones de sus contemporáneos fue la disputa sobre el origen del cálculo por mencionar un caso en particular, ya que por un lado Leibniz realizó estudios para desarrollar la teoría de sumas y diferencias de cantidades infinitesimales(**CP6**), que correspondían con el cálculo integral y diferencial, publicando su método de cálculo para 1684, aunque ya lo tenía completo en 1680, sin embargo, Newton publicó su método hasta 1711, que como había redactado desde 1669, les hizo entrar en debate sobre quién era el verdadero creador del cálculo.(**CP1**)

[8]Con el tiempo se erigió un monumento en la tumba, en el que aparecía Newton reclinado, junto a una mujer que representaba a la Astronomía, como la reina de las ciencias, sentada y llorando, y una inscripción: “Let Mortals rejoice that there has existed duch and so great and Ornament to the Human Race”.

3.1.2. El *De Analysi*

Autor	Isaac Newton
Fecha de nacimiento y fallecimiento del autor	1643-1727
Título	*De analysi per æquationes numero terminorum infinitas.*
Año, editorial y lugar de la primera edición[9]	1711, Ex officina Pearsoniana, Londres.
Año, editorial y lugar de la edición consultada	2003, Facsímil Editado por SAEM THALES. RSME, España.
Localización del manual utilizado	Biblioteca General de la Universidad de Salamanca/Biblioteca personal.

Cuadro 3.1: Ficha de referencia de la obra. El *De Analysi*

La fuente que se analiza es un facsímil de un ejemplar de la primera edición publicada en 1711, que se conserva en la Biblioteca del Real Instituto y Observatorio de la Armada de San Fernando.

Alrededor de 1708, el *De Analysi* como suele abreviarse, fue adquirido por William Jones (1675-1749) en un lote de documentos de John Collins (1625-1683), era una copia manuscrita por el mismo Collins, pero, Jones descubrió que Newton era el autor (entonces presidente de la Royal Society) y le pidió autorización para publicarlo, Newton accedió y le prestó el original para cotejar con el manuscrito. Asimismo dio autorización de publicar otros tratados relacionados, como son fragmentos de cartas que atañen a la relación entre cuadraturas[10] y series infinitas, dos de estos fragmentos corresponden a la *Epistolae prior* y *posterior*[11](**CP7**), también decidió incluir los tratados *De Cuadratura curvarum, Enumeratio Linearum tertii ordinis* y *Methodus differentialis* (método inédito donde se usó el método de diferencias finitas de Newton) (**CP7**), a todo el compendió le dio el título de *Analysis per quantitatum series, fluxiones, ac differentias; cum enumeratione linearum tertii ordinis*, esto es, *Análisis de cantidades mediante series, fluxiones y diferen-*

[10]Cuadratura es la acción y efecto de cuadrar una figura geométrica, esto es, consiste en construir un cuadrado de área igual a la figura geométrica de la que se quiere hallar el área. En el contexto actual en matemáticas, significa integración.

[11]Cartas en las que Newton exponía a Leibniz parte del contenido del *De Analysi* y del *De Methodis* sobre desarrollos en serie. Se creó una gran disputa entre ellos a causa de quién era el autor del cálculo.

cias con una enumeración de las líneas de tercer orden.

Nosotros estudiaremos el primer tratado del compendió que como se dijo, suele abreviarse el *De Analysi*, el cual es el primer tratado sobre cálculo infinitesimal que Newton hizo público, fue redactado en junio de 1669 y apareció publicado hasta 1711[12]. El tratado **contiene el método general del análisis enseñando cómo resolver ecuaciones finitas en infinitas para resolver todos los problemas (referentes a cuadraturas)(CP5)**. Pueden distinguirse 5 secciones, en las que muestra 3 reglas con las cuales fundamenta su cálculo, que esto es, el método de cuadraturas.(**CP4, CP5**)

Un esquema de la obra es el siguiente(**CP4**):

- Cuadraturas de curvas simples[13]

    - Ejemplos

- Cuadraturas apartir de las simples, de las compuestas[14]

    - Ejemplos

- Cuadraturas de todas las demás[15]

    - Ejemplos dividiendo
    - Ejemplos extrayendo raíz
    - Ejemplos mediante resolución de ecuaciones afectadas[16]

        * Resolución numeral[17] de las ecuaciones afectadas

[12]En 1668 Nicolás Mercator, publicó su libro *Logarithmotechnia*, el cual contiene la expansión en serie de $\log(1+x)$, lo que motivó a Newton para componer el *De Analysi.*

[13]Con curvas simples se refiere a las generadas por una sola ordenada $x^{\frac{m}{n}}$ erigida en ángulo recto, donde m y n son números enteros.

[14]Con curvas compuestas se refiere a curvas en las que la ordenada está compuesta de dos o más ordenadas tomadas con sus signos $+$ o $-$. Funciones compuestas de sumas, restas, divisiones o multiplicaciones de funciones simples.

[15]Por todas las demás (curvas) se refiere a las fracciones, raíces y raíces afectadas (ver nota siguiente)

[16]Entenderemos por ecuaciones afectadas a aquellas a las que Newton aplica el procedimiento para la determinación aproximada de las raíces de una ecuación, de tal forma que las reduce a una sucesión infinita.(**CP6**)

[17]Se refiere a la resolución numérica de ecuaciones, en este caso, en encontrar la aproximación sucesiva de la solución x de $f(x)$. (**CP6**)

- Ejemplos

  * Resolución literal[18] de las ecuaciones afectadas

- Ejemplos
- Otros modos de resolver lo mismo
- Aplicación de lo anteriormente explicado a otros problemas del mismo tipo

  [-]Dar con la longitud de curvas

  [-] Dar con la inversa de lo anteriormente explicado

  [-] Hallazgo de la base a partir de un área dada

  [-] Hallazgo de la base a partir de la longitud dada de la curva

- Aplicación de lo anteriormente explicado a curvas mecánicas[19]

  [-] Ejemplos

▪ Demostración de la cuadratura de curvas simples en la regla primera

- Preparación para demostrar la regla primera
- Demostración
- Hallazgo de curvas que pueden cuadrarse

▪ Demostración de curvas que pueden cuadrarse

[18] Con ecuación literal se refiere a una ecuación implícita como actualmente llamamos, en términos de x, y. Su resolución es el desarrollo de y en serie de potencias de x, aplicando el método de aproximación que ejemplifica con la resolución numérica de ecuaciones. (**CP6**)

[19] Newton usa la clasificación de Descartes: llama curvas geométricas a aquellas que son precisas y exactas; y mecánicas a las que no lo son. Esta nomenclatura fue después corregida por Leibniz, que llamó algebraicas a las geométricas y trascendentes a las mecánicas.(**CP6**)

Ahora bien, en primer lugar explica el tipo de cálculo que realizará con las tres reglas:

"SI AB Curvæ alicujus AD, fit Applicata BD perpendicularis: Et vocetur $AB = x, BD = y$, & fint a, b, c, &c. Quantitates datæ, & m, n Numeri Integri. Deinde,

Curvarum Simplicium Quadratura.
REGULA I.
Si $ax^{\frac{m}{n}} = y$, ser $\frac{a}{n+m}x^{\frac{m+n}{n}}$ = área ABD"

Esto es, se toma a x como abscisa de una curva, m y n son números, y $x^{\frac{m}{n}}$ la ordenada erigida en ángulo recto (lo cual se traduce en términos actuales $y = x^{\frac{m}{n}}$), entonces el área de la figura será $\frac{n}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}$.(**PG**)

Luego muestra la aplicación de la regla I a 6 ejemplos. Y enseguida enuncia la Regla II. (Anexo A. p. 2)

Compositarum Curvarum Quadratura ex Simplicibus.
REGULA II.
"Si valor ipsius y ex pluribus iftiusmodi Terminis componitur, Area etiam componetur ex Areis quæ a singulis Terminis emanant."(**PG, PA**)

Es decir, para la cuadratura a partir de las simples, de las curvas compuestas enuncia la REGLA II:

Si el valor de y se compone de varios términos de este género, compondráse el área, asimismo, de las áreas que dimanan de los términos singulares.

Que significa que la ordenada estará compuesta de dos o más ordenadas del tipo como en la regla I, tomadas con sus signos $+$ y $-$, y por lo tanto el área estará compuesta de dos o más áreas tomados sus signos $+$ o $-$ respectivamente.

Para la cuadratura de todas las demás, enuncia la REGLA III[20]:

"*Aliarum Omnium Quadratura.*
REGULA III.
Sin valor ipsius y, vel aliquis ejes Terminus sit præcedentibus magis compositus, in Terminos Simpliciores reducendus est; operando in Literis ad

[20]Prácticamente los desarrollos en serie que Newton obtiene, se pueden calcular usando el Método de coeficientes indeterminados.(**CP6**)

eundem Modum quo Arithmetici in Numeris Decimalibus dividunt, Radices extrahunt, vel affectas Æquationes solvunt; ex istis Terminis quæsitam Curvæ Superficiem, per præcedentes Regulas deinceps elicies."

Esto es,

Si no es que el valor de y o de alguno de sus términos sea más compuesto que los precedentes, que entonces ha de reducirse a términos más simples, operando en las letras de idéntico modo que en los números decimales los aritméticos dividen, extraen raíces o resuelven las ecuaciones afectadas, y de esos términos obtienes finalmente la superficie de la curva requerida mediante las reglas precedentes.

La tercera regla se traduce en cómo reducir fracciones, raíces y raíces afectadas de ecuaciones en series convergentes, cuando la cuadratura no se pueda resolver en otra forma y, usando la primera y segunda reglas, cuadrar la curva cuyas ordenadas son los términos de la serie. (**CP5, PG, PA**)

Fijaremos nuestra atención en esta última regla, ya que precisamente allí aplica el método para aproximar raíces de ecuaciones. Como se observa en el esquema de materias, Newton muestra ejemplos para encontrar la cuadratura de curvas dadas por una división, ejemplos para curvas que tienen por ecuación una raíz, y ejemplos mediante la resolución de las ecuaciones afectadas. Para fijar ideas nos centraremos en el análisis de estos últimos, los cuales subdivide en dos: *Resolución numeral de las ecuaciones afectadas* y *Resolución literal de ecuaciones afectadas*, se ha mencionado ya que la primera de éstas se refiere a encontrar la aproximación sucesiva de la solución de x de $f(x)$, y que la segunda a la resolución de una ecuación $f(x, y)$ desarrollando y en serie de potencias de x, aplicando el método de aproximación que ejemplifica con la resolución numérica de ecuaciones.

En los ejemplos que propone en lo que denomina resolución *numeral* de las ecuaciones afectadas, Newton expone la resolución de ecuaciones por el método que hoy conocemos como método de Newton-Raphson[21](**CP6**), el cual consiste en la aproximación sucesiva de la solución x de $f(x) = 0$ mediante las iteraciones $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$[22]. El método es una mejora del publicado an-

[21]El método de Newton apareció publicado por primera vez en los *Principia* donde el escolio de la proposición XXXI del libro I explicó cómo aplicarlo a la ecuación de Kepler $y - eseny - N = 0$

[22]El antecedente más antiguo se remonta al matemático árabe Al-Kashi (1380-1429)

teriormente por Viète[23] en 1600 y posteriormente simplificado por Oughtred en su *Clavis Mathematicae* de 1647[24]. El método lo utilizaron mucho antes en la Babilonia antigua para la extracción de raíces cuadradas. Posteriormente Newton volvió a usar su método para la realización de sus tablas de raíces cuadradas, cúbicas y cuartas de los primeros 10.000 números, impulsado por la ayuda que dio al calculista John Smith. (Durán, 2003)(**CP2**)

> "Sea A el número y B su raíz cuadrada o cúbica o cuarta extraída por logaritmos hasta 5 decimales, entonces $\frac{1}{2}(B+\frac{A}{B})$, $\frac{1}{3}(2B+\frac{A}{B^2})$ y $\frac{1}{4}(3B+\frac{A}{B^3})$ será la aproximación deseada para la raíz cuadrada, cúbica o cuarta respectivamente."

Para fijar ideas, antes de continuar la exposición del apartado de la resolución numeral de las ecuaciones afectadas, hagamos un paréntesis para ilustrar numéricamente el procedimiento para hallar la raíz cuadrada[25] que como se ha dicho, era ya utilizado en la Babilonia antigua: supongamos por ejemplo que se necesita extraer una raíz cuadrada para el número 28. Elegimos primero algún valor aproximado de esta raíz, por ejemplo, $x_1 = 5$. Designemos por α_1 el error que se comete con esta aproximación, es decir, hagamos $\sqrt{28} = 5 + \alpha_1$. Para determinar el valor de α_1, elevamos al cuadrado los dos miembros de esta igualdad y obtendremos,

$$28 = 25 + 10\alpha_1 + {\alpha_1}^2 \tag{3.1}$$

arreglando los términos de manera conveniente resulta,

$${\alpha_1}^2 + 10\alpha_1 - 3 = 0 \tag{3.2}$$

obtenemos, de este modo, una ecuación cuadrática para α_1.

La siguiente consideración viene a ayudarnos. El error α_1 del valor aproximado $x_1 = 5$ no es significativo; pues de antemano se sabe que es menor que

quien usó un esquema parecido para resolver la ecuación cúbica $a = 3x - 4x^3$, el interés por la resolución proviene de que para la ecuación corresponde a la fórmula del ángulo triple. (Aaboe, 1954) Estos cómputos los redescubrió Henry Briggs (1561-1630) en su *Trigonometría Británica* que los extendió para la fórmula del ángulo quíntuple. Posteriormente fue aplicado por Viète y Oughtred. (Whiteside, 1967) Ver Anexo A. p. 476-481.

[23] Viète (1540-1603) el llamado "matemático francés más importante del siglo XVI" fue también abogado, miembro del Parlamento y consejero particular del rey Enrique IV de Francia, pero dedicaba sus horas libres a las matemáticas. Viète fue quien empezó a utilizar vocales para representar las incógnitas, y a las consonantes para representar magnitudes o números dados o supuestamente conocidos como los parámetros. (**CP2**)

[24] Ver Anexo A. p. 78-83.

[25] Para detalles ver (Cantoral y Reséndiz, 2001; Cantoral y Rodríguez, 2005)

1. Por ello, es menor aún el número ${\alpha_1}^2$. Hallemos entonces el valor aproximado de α_1, despreciando en la igualdad 3.1${\alpha_1}^2$. En este caso, para α_1 se obtiene la ecuación aproximada $10\alpha_1 - 3 \approx 0$ (de ella se deduce que $\alpha_1 \approx 0{,}3$ o bien es ${\alpha_1}^2 = 0$).

Luego, el valor aproximado de la corrección α_1 lo tenemos. Puesto que $\sqrt{28} = 5 + \alpha_1$ la segunda aproximación para x_2 tiene por expresión $x_2 = 5 + 0{,}3 = 5{,}3$. Repitamos el procedimiento descrito con el fin de hallar una mejor aproximación para $\sqrt{28}$.

Designemos con α_2 el error del valor $x_2 = 5{,}3$, es decir, hagamos $\sqrt{28} = x_2 + \alpha_2$. Elevamos ambos miembros de esta desigualdad al cuadrado y despreciamos el pequeño sumando ${\alpha_2}^2$. Obtendremos:

$$28 \approx {x_2}^2 + 2{x_2}^2\alpha_2$$

y por lo tanto

$$\alpha_2 \approx \frac{28 - {x_2}^2}{2x_2}$$

Esto significa que la tercera aproximación para $\sqrt{28}$ se expresa mediante la fórmula,

$$x_3 = x_2 + \frac{28 - {x_2}^2}{2x_2} = \frac{28 + {x_2}^2}{2x_2}$$

Puesto que $x_2 = 5{,}3$, de aquí se infiere que $x_3 = 5{,}2915 \cdots$ De la misma manera partiendo del valor aproximado $x_3 = 5{,}2915$, encontramos la siguiente aproximación x_4 expresada mediante la fórmula

$$x_4 = \frac{28 + x_3^2}{2x_3} = 5{,}2915$$

En general, una vez hallado el valor aproximado x_n para $\sqrt{28}$, la aproximación siguiente tendrá por expresión

$$x_{n+1} = \frac{28 + x_n^2}{2x_n} = 5{,}2915$$

Análogamente se extrae la raíz cuadrada de cualquier número positivo A. Calculando $\sqrt{A}$, elegimos alguna aproximación inicial x_1, y luego determinamos las aproximaciones siguientes valiéndonos de la fórmula

$$x_{n+1} = \frac{A + x_n^2}{2x_n}$$

Si escribimos la fórmula anterior como

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{A}{x_n}\right)$$

tendremos que el valor x_{n+1} de la iteración será el promedio de los valores x_n y $\frac{A}{x_n}$, los cuales están a uno y otro lado de la raíz comprendida A.

Ahora bien, el método de Viète (que como se dijo sería utilizado después por Newton) consistía en lo siguiente: dada una estimación A de la raíz $\sqrt{N}$ y denotando por E al error, se tiene $\sqrt{N} = A + E$, entonces

$$N - A^2 = (A + E)^2 - A^2 = 2AE + E^2 \approx 2AE$$

de donde

$$E \cong \frac{N - A^2}{2A}$$

Si A es una buena estimación de $\sqrt{N}$ entonces E^2 es pequeño comparado con $2AE$. Esto provee las bases para el cálculo de aproximaciones sucesivas para $\sqrt{N}$, como sigue. Empezando con una estimación inicial X_1 de $\sqrt{N}$, definida por

$$X_{n+1} = X_n + \frac{N - X_n^2}{2X_n} = X_n + e_n$$

donde

$$e_n = \frac{N - X_n^2}{2X_n}$$

Se sigue de lo anterior que,

$$N - X_{n+1}^2 = (N - X_n^2) - 2X_n e_n - e_n^2$$

así el numerador de e_{n+1} es obtenido por sustracción del numerador de e_n.

El paréntesis anterior nos dará claridad en los cálculos que siguen.

Resolución *numeral* de las ecuaciones afectadas

En esta sección que Newton denomina "NUMERALIS ÆQUATIONUM AFFECTARUM RESOLUTIO" se exponen dos ejemplos, en el primero de ellos se aplica el método para encontrar numéricamente la mejor aproximación a la raíz real de la ecuación, y en el segundo se muestra cómo se hace el cambio de "variable" en la ecuación original dada para hallar una nueva ecuación con la cual trabajar. En principio, parece ser que con el siguiente párrafo Newton nos comunica que hay ejemplos que ya no podrían ser abordados de una manera aritmética, (**PA**)

> "Quia tota difficultas in Resolutione latet, modum quo ego utor in Æquatione Numerali primum illustrabo"

que significa: Pues toda dificultad reside en la resolución, ilustraré primeramente el modo que uso en una ecuación numeral.

Ejemplo 1. Explica el método de aproximar raíces, con la ecuación $y^3 - 2y - 5 = 0$. Esto es,

Sea la ecuación a resolver

$$y^3 - 2y - 5 = 0 \tag{3.3}$$

y sea 2 un número que difiere en menos que su décima parte de la raíz buscada[26], es decir, 2 es la mejor aproximación entera a la raíz buscada, ya que la diferencia entre la raíz verdadera y 2 es menor o igual que $0,1$.

Se hace una mejor aproximación

$$\begin{aligned} y^3 - 2y - 5 &= 0 \\ \to (2+p)^3 - 2(2+p) - 5 &= 0 \\ \to 8 + 12p + 6p^2 + p^3 - 4 - 2p - 5 &= 0 \\ \to p^3 + 6p^2 + 10p - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Con lo cual resulta la nueva ecuación

[26] En efecto, el polinomio tiene un cambio de signo entre 2 y $2,1$. La localización de raíces de polinomios por cambio de signo había sido sistematizado por Stevin en 1594, sin embargo, fue hasta principios del siglo XIX cuando esta sistematización en la búsqueda de raíces de ecuaciones por cambio de signo fue demostrada analíticamente. La demostración fue obra de Bolzano, que probó el resultado para funciones continuas y tuvo entonces que definir qué se entendía por continuidad. (Durán, 2003)(**CP6**)

$$p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0 \tag{3.4}$$

cuya raíz p se requiere extraer a fin de añadir a la primera aproximación 2. Concretamente como hemos dicho que p debe ser menor o igual a $0,1$, en la ecuación (3.4) se desprecian los términos $p^3 + 6p^2$ por su menudencia, de donde se obtiene que $10p - 1 = 0$, o lo que es igual $p = 0,1$, que se acerca a la raíz verdadera p. Ahora para obtener una mejor aproximación a la raíz p, se supone ésta como $0,1 + q = p$, y como antes, se sustituye en 3.4, esto es,

$$\begin{aligned}
p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0\\
\to (0,1+q)^3 + 6(0,1+q)^2 + 10(0,1+q) - 1 = 0\\
\to 0,001 + 0,03q + 0,3q^2 + q^3 + 0,06 + 1,2q + 6q^2 + 1 + 10q - 1 = 0\\
\to q^3 + 6,3q^2 + 11,23q + 0,061 = 0
\end{aligned}$$

de donde aparece la ecuación

$$q^3 + 6,3q^2 + 11,23q + 0,061 = 0 \tag{3.5}$$

Y por la misma razón que antes, se considera sólo $11,23q + 0,061$, que se acerca mucho a la verdad, o lo que es igual, q sea casi $= -0,0054$ (dividiendo hasta que se obtengan tantas figuras[27] cuantos lugares distan la primera figura de éste y la del cociente principal $\frac{0,061}{11,23}$), se escribe $-0,0054$, ya que es negativa.

Se supone ahora una mejor aproximación para q, $-0,0054 + r = q$, y se sustituye en la ecuación 3.5. Y así sucesivamente hasta donde se quiera. De la misma forma si se desea continuar la operación hasta dos veces tantas figuras aparecen en el cociente menos una (es decir 9 cifras numéricas), se sustituye q por $-0,0054+r$ en la ecuación $6,3q^2+11,23q+0,061$ cuyo término primero q^3 se desprecia a causa de su menudencia: y resulta la ecuación $6,3r^2 + 11,16196r + 0,00004853 = 0$, de donde despreciando también $6,3r^2$, se obtiene $r = -\frac{0,000541708}{11,16196}$ poco más o menos. Y finalmente se sustraen las partes negativas de las positivas de los cocientes que se han obtenido, esto es:

Cocientes positivos: $2 + 0,1 = 2,1$

Cocientes negativos: $-0,0054 + (-0,00004853) = -0,0054853$

Raíz buscada: $2,1 - 0,0054853 = 2,09455147$

Por lo tanto se obtiene el cociente buscado $2,09455147$[28].

---

[27] Era común en los textos castellanos de matemáticas del Renacimiento, el Barroco y la ilustración utilizar la expresión figura para indicar las cifras.

[28] El cuadro 3.2, ilustra lo que se acaba de operar analíticamente.

En seguida refiere:

> "Æquationes plurium dimensionum nihilo fecius resolvuntur, & operam fut fine, ut hic factum fuit lavabis, fi primos ejus terminos gradatim omiferis"

lo cual expresa que cuando se tienen ecuaciones de varias dimensiones (refiriéndose a una ecuación con exponentes de mayor grado) pueden ser resueltas de modo que se puede utilizar el mismo método, operando hasta el final para encontrar una solución, si en cada paso se omite el primero de sus términos.

Podemos notar de aunque el método se aplica a ecuaciones de varias dimensiones, hasta este momento falta justificación en la convergencia a la raíz buscada, sin embargo, Newton es consciente de que el método podría fallar y lo justifica desde el principio del tratado:

> "Methodum generalem, quam de curvarum quantitate per Infinitam terminorum Seriem mensuranda, olim excogitaveram, in sequentibus breviter explicatam potius quam accurate demonstratam habes."

Es decir, aclara en primer lugar que lo escrito en el *De Analysi* está brevemente explicado antes que demostrado con toda diligencia, y que lo que muestra es un método general que cavilará un día para medir la cantidad de las curvas mediante una serie de términos infinitos. (**PG, PA**)

Lo anterior puede deberse a que en efecto los matemáticos de este siglo (y también en el siglos XVIII y parte del XIX) estaban interesados, sobre todo en descubrir y no tanto en demostrar sus hallazgos en forma impecablemente lógica, como lo hacían los griegos (**CP2**). De aquí que Newton estuviera más interesado por descubrir que por demostrar. En el mismo sentido la frase:

> "Præterea notandum est quod in hoc ejemplo, si dubitarem an veritati fatis accederet, pro $10p-1=0$, finxiffem $6p^2+10p-1=0$ & ejus radicis primam figuram in Quotiente fcripfiffem$\cdots$"

en la opinión de Cajori (1960), lo anterior refleja que Newton era consciente de que su método podía fallar. Siendo esto una constatación más de que el interés de los matemáticos de la época se inclinaban más por el descubrimiento que por la fundamentación rigurosa de lo descubierto (**CP2**). Cabe mencionar que Newton no sabía si existían antecedentes del método en el sentido que aquí aplica, por lo que quizá sea esta una de las razones por las que se le dio el crédito total. En relación a esto menciona:

h

$y^3-2y-5=0$		$+2{,}10000000$ $-0{,}00544853$ $+2{,}09455147=y$
$2+p=y$	y^3 $+2y$ -5 suma	$+8+12p+6p^2$ $-4-2p$ -5 $-1+10p+6p^2+p^3$
$0,1+q$	p^3 $+6p^2$ $+10p$ -1 suma	$+0{,}001+0{,}03q+0{,}3q^2+q^3$ $0{,}06+1{,}2+6{,}0$ $+1+10$ -1 $+0{,}061+11{,}23q+6{,}3q^2+q^3$
$-0{,}0054+r=q$	$+6{,}3q^2$ $+11{,}23q$ $+0{,}061$ suma	$0{,}000183708-0{,}06804r+6{,}3r^2$ $-0{,}060642+11{,}23$ $+0{,}061$ $+0{,}000541708+11{,}16196r+6{,}3r^2$
-0.00004854+s=r		

Cuadro 3.2: Resolución numeral de las ecuaciones afectadas.

> "Hæc Methodus resolvendi Æquationes pervulgata an sit nefcio, certe mihi videtur præ reliquis simples, & usui accommodata. Demonstratio ejes ex ipso modo operando patet, unde cum opus sit, in memoriam facile revocatur"

Lo que significa que ignoraba si el método había sido divulgado, que le parecía un método muy simple y de uso cómodo. Que la demostración es similar a la forma de operar el método y por lo tanto que es fácil de recordar cuando es necesario.

La siguiente tabla, que en nuestra opinión también refleja un pensamiento numérico-algebraico, está plasmada justo después de realizar las operaciones que se han puesto arriba:

Como puede observarse las iteraciones hechas, manifiestan el método de Newton: sustituyendo en la ecuación $f(x)=0$ el valor x de la raíz por la aproximación $x+p$, de manera que $f(x+p)=0$, desarrollando en potencias de p : $f(x+p)=f(x)+f'(x)p+\frac{f''(x)p^2}{2!}+\cdots$, y eliminando las potencias $p^2,p^3,\cdots$, resulta $0=f(x)+f'(x)p$, de donde, $p=-\frac{f(x)}{f'(x)}$

De aquí que se obtiene la fórmula de recurrencia actualmente conocida para la aplicación del método (**CP6**)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Consideramos importancia señalar que al momento no hemos encontrado evidencia geométrica de x_{n+1} como punto de corte con el eje de las abscisas de la tangente a $y = f(x)$ en $x = x_n$, en el desarrollo del contenido, lo que nos hace pensar que el método propiamente como objeto de estudio fue una innovación que nace de su operatividad misma.

Newton hace referencia a que el método se aplica casi con igual facilidad a ecuaciones en las que falte alguno o ninguno de sus términos. Ya que la ecuación inicial podría descomponerse en otra ecuación realizando sustituciones de cantidades[29] por otras, plantea que ello puede hacerse de diferentes maneras y que el siguiente ejemplo es el más expedito.

Ejemplo 2. Sustitución de unas cantidades por otras. (**PA**)
Sea $p+3$, que ha de sustituir a y en la ecuación

$$y^4 - 4y^3 + 5y^2 - 12y + 17 = 0. \tag{3.6}$$

Como quiera ésta puede resolverse en esta forma $\overline{\overline{\overline{y-4}\times y+5}\times y-12}\times y+17=0$ [30], o lo que es igual, en términos actuales la ecuación (3.6) puede agruparse en la forma,

$$(((y-4)y+5)y-12)y+17=0 \tag{3.7}$$

Lo que hace Newton es realizar la sustitución $p+3$ iniciando por la agrupación $(y-4)y$, ésto es,

$$\begin{aligned}(y-4)y &= (p+3-4)(p+3)\\ &= (p-1)(p+3)\\ &= p^2+2p-3\end{aligned}$$

[29]Newton utiliza el término cantidad en dos sentidos: cantidades fijas y cantidades que varían, que en términos actuales serían constantes y variables, sin embargo, en el *De Analysi* Newton todavía no usó ni el calificativo fijo, ni el calificativo varían.

[30]Los superrayados indican paréntesis, fue Van Schooten (1615-1660) quien difundió el uso de los superrayados para indicar lo que quedaba afectado por la correspondiente operación. Euler (1707-1783) con el uso habitual de los paréntesis contribuyó finalmente a su implantación. La expresión en forma actual equivale a $(((y-4)y+5)y-12)y+17$ (Durán, 2003).

a continuación (3.7) indica que hay que sumar 5 a esta última ecuación,

$$\begin{aligned}((y-4)y+5) &= p^2+2p-3+5\\ &= p^2+2p+2\end{aligned}$$

y a esta última ecuación hay que multiplicar por y, o sea por $p+3$

$$\begin{aligned}((y-4)y+5)y &= (p^2+2p+2)(p+3)\\ &= p^3+2p^2+2p+3p^2+6p+6\\ &= p^3+5p^2+8p+6\end{aligned}$$

luego hay que restar 12

$$\begin{aligned}(((y-4)y+5)y-12) &= p^3+5p^2+8p+6-12\\ &= p^3+5p^2+8p-6\end{aligned}$$

como puede verse (3.7) indica que hay que multiplicar por $y=p+3$, ésto es

$$\begin{aligned}(((y-4)y+5)y-12)y &= (p^3+5p^2+8p-6)(p+3)\\ &= p^4+8p^3+23p^2+18p-18\end{aligned}$$

finalmente hay que sumar 17 a esta última ecuación,

$$\begin{aligned}(((y-4)y+5)y-12)y+17 &= p^4+8p^3+23p^2+18p-18+17\\ &= p^4+8p^3+23p^2+18p-1\end{aligned}$$

Así obtenemos que la nueva ecuación a resolver será

$$p^4+8p^3+23p^2+18p-1=0$$

Hemos observado cómo aplica el método numéricamente, es decir, hemos hallado una aproximación numérica de la raíz real de una ecuación de una variable (**PN**). Ahora veremos en la sección siguiente cómo Newton usa el mismo procedimiento en una ecuación de la forma $f(x,y)=0$ para desarrollar y en potencias de x y finalmente emplear las reglas de cuadratura[31] I y II. (**PG, CP6**)

[31]El uso que hizo Newton de las series de potencias para el cálculo de áreas pudo tener su origen en Wallis. Durán menciona una nota textual de Westfall (1983), en la

Resolución literal de las ecuaciones afectadas

En esta sección Newton explica cómo desarrollar y en serie de potencias de x, aplicando el método de aproximación que utilizó en el ejemplo 1 del apartado anterior, con lo que comienza el estudio del desarrollo de las soluciones de un polinomio en series de potencias de los coeficientes, que culminaría Puiseux[32] a mediados del siglo XIX. Inicia con el siguiente enunciado:

> "His in numeris fic oftenfis: Sit Æquatio literalis $y^3 + a^2y - 2a^3 + axy - x^3 = 0$, resolvenda."

Lo que quiere decir,
esto mostrado con números: sea la ecuación literal a resolver

$$y^3 + a^2y - 2a^3 + axy - x^3 = 0 \tag{3.8}$$

Y procede la resolución como sigue:

Se busca primeramente el valor de y cuando x sea nula, es decir que se obtiene la raíz de la ecuación,

$$y^3 + a^2y - 2a^3 = 0$$

Resulta ser esta $+a$. La comprobación es evidente.

Por lo que la primera aproximación es el cociente $+a$. Ahora se supone una nueva aproximación $+a + p = y$, y se sustituye y en la ecuación (3.8),

---

que señala lo siguiente: "...Wallis había usado series para calcular áreas. Las cuadraturas de Wallis habían sido todas calculadas entre límites fijos; sus series habían sido series de números que evaluaba por comparación con otras series... Cuando Newton estudió esto, se dio cuenta de que el método de Wallis era más flexible de lo que Wallis mismo había imaginado. No es siempre necesario comparar áreas bajo una curva con el área del mismo cuadrado fijo. En el caso de las potencias $(y = x, x^2, x^3, \cdots)$, por ejemplo, cualquier valor de x suministra una base que puede ser dividida en un infinito número de segmentos que con el correspondiente valor de y define implícitamente un rectángulo con el que el área bajo la curva puede ser comparada... Así, aceptando los resultados de Wallis, Newton pudo extender el método para construir series de un tipo completamente diferente. Haciendo variable el límite superior de una cuadratura pudo componer series constituidas por potencias de la variable"

[32] A los desarrollos en serie que se obtienen aplicando el método de Newton, se les suele hoy llamar series de Puiseux. Víctor Puiseux (1820-1883) demostró en 1850 que el punto clave para la demostración del teorema fundamental del Álgebra, radicaba precisamente en el desarrollo en serie infinita para las soluciones. (**CP6**)

$$\begin{aligned} y^3 + a^2y - 2a^3 + axy - x^3 = 0 \\ \to (a+p)^3 + a^2(a+p) - 2a^3 + ax(a+p) - x^3 = 0 \\ \to 4a^2p + 3ap^2 + p^3 + a^2x + axp - x^3 = 0 \end{aligned}$$

Que ordenados en términos de p, se escribe $+p^3 + 3ap^2 + 4a^2p, \&c.$, de esta se toman los términos $+4a^2p + a^2x$, donde p y x por separado son de la mínima dimensión. (Más adelante veremos la razón de coger estos términos.)

Supónganse casi iguales a nada, esto es,

$$\begin{aligned} +4a^2p + a^2x = 0 \\ \to p = -\frac{a^2x}{4a^2} \\ \to p = -\frac{x}{4} \end{aligned}$$

De donde se hace una nueva aproximación $p = -\frac{1}{4}x + q$, que se sustituye en la última ecuación,

$$\begin{aligned} +p^3 + 3ap^2 + 4a^2p + axp + a^2x - x^3 = 0 \\ \to (-\frac{1}{4}x+q)^3 + 3a(-\frac{1}{4}x+q)^2 + 4a^2(-\frac{1}{4}x+q) + ax(-\frac{1}{4}x+q) + ax^2 - x^3 = 0 \\ \to -\frac{65}{64}x^3 + \frac{3}{16}x^2q - \frac{3}{4}xq^2 + q^3 - \frac{1}{16}ax^2 - \frac{1}{2}axq + 3aq^2 + 4a^2q = 0 \end{aligned}$$

De esta última ecuación tómese las cantidades $+4a^2q - \frac{1}{16}ax^2$, en que q y x por separado son de la mínima dimensión, de nuevo como antes sea esta cantidad casi nula, de donde,

$$\begin{aligned} +4a^2q - \frac{1}{16}ax^2 = 0 \\ \to q = \frac{+\frac{1}{16}ax^2}{4a^2} = \frac{xx}{64a} \end{aligned}$$

es decir que q es aproximadamente $q = \frac{xx}{64a}$. Genérese así una nueva aproximación $q = +\frac{xx}{64a} + r$. Por lo tanto se añade entonces $\frac{xx}{64a}$ en el cociente anterior y se sustituye q, por $q = +\frac{xx}{64a} + r$. Y así sucesivamente hasta donde se quiera.

Como se puede observar, la ecuación,

$$-\frac{65}{64}x^3 + \frac{3}{16}x^2q - \frac{3}{4}xq^2 + q^3 - \frac{1}{16}ax^2 - \frac{1}{2}axq + 3aq^2 + 4a^2q = 0$$

no coincide con los resultados anotados en el Cuadro 3.3, esto se debe a que en el cuadro sólo se está considerando el doble de los términos menos uno del cociente hasta esta ecuación encontrada, es decir, que si se quiere considerar tan sólo el doble de los términos menos uno, hasta el cociente $a - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{64a}$ (esto es 5 términos), deben omitirse en la última ecuación los términos q y $-\frac{3}{4}xq^2$ en donde x es de la misma dimensión que el penúltimo término del cociente. Y en los restantes términos es donde se sustituye $q = +\frac{xx}{64a} + r$.

Verbalmente el cuadro anterior puede descifrarse como sigue:

Si consideramos el Cuadro 3.3 como un arreglo 3×3, en el elemento 1,1 Newton consigna la primera aproximación para $y : y = a + p$, en el elemento 1,2 consigna la función $f(x, y)$ y en el elemento 1,3 consigna la evaluación de f en la primera aproximación: $f(x, a + p)$. Se toma entonces los términos en donde p y x son de la mínima dimensión por separado, esto es, $4a^2p + a^2x = 0$, despejando p se obtiene el cociente $-\frac{x}{4}$. Esto se usa ahora para generar la siguiente aproximación, que da lugar a la segunda fila. (Como puede observarse la recursividad esta presente en el método.)

Así el elemento 2,1 es la aproximación para $p : p = -\frac{x}{4}$, el elemento 2,2 es la evaluación de f en la aproximación anterior: esto es, la operación que se realizó en la casilla 1,3; y el elemento 2,3 será la evaluación de f en la segunda aproximación, esto es, $f\left(x, a + (-\frac{x}{4} + q)\right)$ (para ello se substituye en el elemento 2,2 p por $-\frac{x}{4} + q$). Eliminando ahora todos los términos no lineales en q se obtiene la ecuación $\frac{ax^2}{16} + \frac{65x^3}{64} = \left(4a^2 - \frac{ax}{2} + \frac{3x^2}{16}\right)q$, despejando q y quedándonos con la menor potencia de x en el cociente obtenemos $\frac{x^2}{64}$. Y de nuevo recursivamente se utiliza esto para generar la siguiente aproximación, que da lugar a la tercera fila.

El elemento 1,3 se consigna a la aproximación para $q : q = \frac{x^2}{64} + r$; en la casilla 3,2 se consigna la evaluación de f en la aproximación anterior(esto es lo que se hizo en 2,3, eliminando los términos $-\frac{3xq^2}{4} + q^3$ que no se necesitaran puesto que es la última iteración que hace), así en la casilla 3,3 se consigna la evaluación de f en la tercera aproximación, esto es,

$y^3 + a^2y - 2a^3 + axy - x^3 = 0$ $y = a - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{64a} + \frac{131x^3}{512a^2} + \frac{509x^5}{16384a^3}$ &c.		
$a + p = y$	y^3	$a^3 + 3a^2p + 3ap^2 + p^3$
	$+a^2y$	$+a^3 + a^2p$
	$+axy$	$+a^2x + axp$
	$-2a^3$	$-2a^3$
	$-x^3$	$-x^3$
$-\frac{1}{4}x + q = p$	$+p^3$	$-\frac{1}{64}x^3 + \frac{3}{16}x^2q - \frac{3}{4}xq^2 + q^3$
	$+3ap^2$	$+\frac{3}{16}ax^2 - \frac{3}{2}axq + 3aq^2$
	$+4a^2p$	$-a^2x + 4a^2q$
	$+axp$	$-\frac{1}{4}ax^2 + axq$
	$+a^2x$	$+a^2x$
	$-x^3$	$-x^3$
$+\frac{x^2}{64a} + r = q$	$+3aq^2$	$+\frac{3x^4}{4096a} + \frac{3}{32}x^2r + 3ar^2$
	$+4a^2q$	$+\frac{1}{16}ax^2 + 4a^2r$
	$-\frac{1}{2}axq$	$-\frac{1}{128}x^3 - \frac{1}{2}axr$
	$+\frac{3}{16}x^2q$	$-\frac{3x^4}{1024a} + \frac{3}{16}x^2r$
	$-\frac{1}{16}ax^2$	$-\frac{1}{16}ax^2$
	$-\frac{65}{64}x^3$	$-\frac{65}{64}x^3$
$+4a^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{9}{32}x^2) + \frac{131}{128}x^3 - \frac{15x^4}{4096a}(+\frac{131x^3}{512a^2} + \frac{509x^5}{16384a^3}$		

Cuadro 3.3: Resolución numeral: $y^3 + a^2y - 2a^3 + axy - x^3 = 0$

$f\left(x, a+(-\frac{x}{4}+(\frac{x^2}{64}+r))\right)$ (en otras palabras se substituye en la tercera fila de la segunda columna q por $\frac{x^2}{64}+r$). Eliminando ahora todos los términos no lineales en r se obtiene la ecuación $\frac{131}{128}x^3 - \frac{15x^4}{4096a} = \left(4a^2 - \frac{ax}{2} + \frac{9x^2}{32}\right) r$; despejado r y dividiendo obtenemos $\frac{131}{128}x^3 + \frac{509x^5}{16384a^3}$, que es lo que aparece en la fila que cierra la tabla[33].

Las dificultades del método de Newton quedan ocultas en la sencillez del ejemplo concreto con el que lo ilustra (ejemplo plasmado en el Cuadro 3.2). Ahora bien, en este último ejemplo, al sustituir en la ecuación $y^3 + a^2y - 2a^3 + axy - x^3 = 0$ la aproximación de la raíz, $y = a + p$ se obtiene $p^3+3ap^2+4a^2p+axp+a^2x-x^3 = 0$ de tal forma que cuando se trata de una ecuación numérica, Newton se queda con los términos de menor grado en p: esto es, el término independiente y el término en p, eliminando las potencias de p mayores, no obstante, para determinar con cuáles potencias se debe continuar la iteración Newton recurre en estas aproximaciones a su llamado Polígono de Newton[34] (**CP6, PG**), pues aunque para el ejemplo numérico que dio en su introducción parecía fácil tal determinación (quedándose con los términos de grado 1 en x y p por separado) en este caso como p es una función de x la determinación de exponentes se hace más complicada, ya que podría requerir necesariamente exponentes fraccionarios[35].

Antes de aplicar el polígono de Newton a la ecuación $y^3 + a^2y - 2a^3 + axy - x^3 = 0$, para aclarar con cuales potencias hay que seguir aproximando, veamos cómo se aplica de manera general.

Cabe mencionar que esta explicación, la hace cuando calcula la longitud de la cisoide (**PG**), entonces, lo primero que hace Newton es describir el ángulo BAC y dividir en partes iguales los lados del mismo BA, CA, alzando normales que distribuyen el espacio angular en paralelogramos o cuadrados iguales, que se crean según las dimensiones de dos especies definidas, sean x y y, tales especies. Escríbanse x y y y ascendentes con regularidad desde el

[33]Se ha corregido una errata en el facsímil en el encabezamiento de la tabla donde el sumando $131x^3/512a^2$ consta con signo positivo mientras que en el libro original lo hace con negativo. Ver Anexo A. p. 11.

[34]El polígono de Newton hace referencia al argumento geométrico usado por Newton para hacer explícitas las potencias elegidas en las sucesivas ecuaciones. Ver Anexo A. p. 32.

[35]Cuando Newton envió a Leibniz este método de resolución de ecuaciones afectadas en la Epístola prior, Leibniz pidió más explicaciones sobre la elección de los exponentes, Newton le contestó en la Epístola posterior. Ver Anexo A. p. 23-33.

término A. Donde y denota la raíz a extraer y otra cantidad indefinida de cuyas potencias se confeccionará la serie. (Ver cuadro siguiente.)

B

x^4	x^4y	x^4y^2	x^4y^3	x^4y^4
x^3	x^3y	x^3y^2	x^3y^3	x^3y^4
x^2	x^2y	x^2y^2	x^2y^3	x^2y^4
x	xy	xy^2	xy^3	xy^4
0	y	y^2	y^3	y^4

A C

Cuadro 3.4: Polígono de Newton, forma general.

Después cuando se proponga alguna ecuación, se distingue con alguna notación la correspondencia entre los paralelogramos y cada uno de sus términos, y se dibuja una línea que pasa por 2 o tal vez más de los paralelogramos señalados, se escogen los términos de la ecuación señalados por los paralelogramos en contacto con la regla, y de allí se busca la cantidad a añadir al cociente.

Así para extraer la raíz y de $y^6 - 5xy^5 + \frac{x^3}{a}y^4 - 7a^2x^2y^2 + 6a^3x^3 + b^2x^4 = 0$, señálese con la marca $*$, los paralelogramos correspondientes a los términos de la misma, y aplíquese la regla DE al inferior de los lugares señalados en la columna izquierda. (Ver cuadro siguiente.)

B

$*$						
D $*$				$*$		
		$*$				
					$*$	
						$*$

A EC

Cuadro 3.5: Polígono de Newton, ejemplo 1.

Puede observarse que los lugares alcanzados por la regla corresponden a los términos x^3, x^2y^2, y^6. Y así se busca el valor de a partir de los términos $y^6 - 7a^2x^2y^2 + 6a^3x^3$, tales como si fueran iguales a nada, es decir muy próximos al valor 0. Esta última expresión se puede reducir aún más si así se quiere, haciendo $y = \upsilon\sqrt{ax}$ de donde resulta la ecuación,

$$\upsilon^6 - 7\upsilon^2 + 6 = 0$$

cuyas raíces son $+\sqrt{ax}, -\sqrt{ax}, +\sqrt{2ax}$, y $-\sqrt{2ax}$, de los que vale tomar el que plazca por primer término del cociente, según se haya decidido extraer una u otra de las raíces.

Podemos observar que si se trazan en vez de cuadrados, ejes perpendiculares, tendríamos que la recta que une los puntos coordenados $(0, 3)$ al $(6, 0)$, pasa por el vértice $(2, 2)$. Su pendiente vale $-\frac{1}{2}$, por lo que la serie para y se busca con primer término igual a $\alpha x^{\frac{1}{2}}$, en donde α resulta de sustituir $\alpha x^{\frac{1}{2}}$ en la ecuación reducida $\alpha^6 - 7a^2\alpha^2 + 6a^3$, de donde se obtienen los valores reales $\sqrt{a}, -\sqrt{a}, \sqrt{2a}$ y $-\sqrt{2a}$. Dependiendo de la elección de un valor u otro para α, se estará desarrollando en serie una u otra de las diferentes ramas de la curva $y^6 - 5xy^5 + \frac{x^3}{a}y^4 - 7a^2x^2y^2 + 6a^3x^3 + b^2x^4 = 0$, en el origen.

Ahora bien, regresando al ejemplo $y^3 + axy + a^2y - x^3 - 2a^3 = 0$, en la aplicación del polígono de Newton expresa que esta ecuación se reduce a la ecuación, $-2a^3 + aay + y^3$ y de esta última $y = a$ aproximadamente, así será el primer término p y todos los demás hasta infinito, razón por la que se sustituye $a + p = y$. Y de la misma manera se extraen los términos subsiguientes $q, r, s, \&c$ de las ecuaciones segunda, tercera y restantes.

De aquí que, es importante notar que el llevar el área de curvas al de líneas rectas se lleva a cabo mediante la extracción de raíces afectadas. (**PG, PA**)

Por lo tanto la interpretación del desarrollo de la ecuación anterior haciendo referencia al polígono de Newton, es decir, el desarrollo de la solución y de la ecuación $y^3 + axy + a^2y - x^3 - 2a^3 = 0$ en potencias de x es el siguiente:

El polígono de Newton para esta ecuación tiene por vértices[36]
$(0, 3), (1, 1), (0, 1), (3, 0), (0, 0)$

Se obtiene que la pendiente de la recta que une los puntos $(0, 0)$ y $(0, 1)$ tiene pendiente 0, por lo que el primer término de la serie será αx^0, es decir, que la serie de potencias para y debe comenzar con α. Se determina $alpha$ sustituyendo $y = \alpha$ en la ecuación reducida $y^3 + a^2y - 2a^3 = 0$, ya que son los términos afectados por la recta que une los puntos $(0, 0)$ y $(0, 1)$. Es decir, se

[36]Nótese que la potencia de x se dibuja sobre el eje vertical, mientras que la potencia de y se dibuja sobre el eje horizontal.

*			
	*		
*	*	*	

Cuadro 3.6: Polígono de Newton, ejemplo 2.

eligen las potencias correspondientes a los vértices $(0,0),(0,1)$ y $(0,3)$, que son los que están sobre la recta.

Así tomando entonces $\alpha = a$, el primer término de la serie de potencias será: a. Consecuentemente se escribe $y = a + p$, y se sustituye en la ecuación $y^3 + axy + a^2y - x^3 - 2a^3$, de donde obtenemos:

$$p^3 + 3ap^2 + 4a^2p + axp + a^2x - x^3 = 0$$

Se aplica ahora el polígono de Newton a esta ecuación resultante. Tomando en cuenta que los exponentes de p dan la segunda coordenada y los de x la primera. Así para esta segunda ecuación obtenemos los vértices $(0,3),(0,2),(0,1),(1,1),(1,0),(3,0)$.

B

*			
*	*		
	*	*	*

A C

Cuadro 3.7: Polígono de Newton, ejemplo 2(1)

Así la recta que une los puntos $(1,0)$ y $(0,1)$ tiene pendiente -1, por lo que la serie de potencias para p debe comenzar con αx. α se determina sustituyendo $p = \alpha x$ en la ecuación reducida $a^2x + 4a^2p = 0$ (eligiendo las potencias correspondientes a los vértices $(1,0)$ y $(0,1)$ que son los únicos que están sobre la recta.) Esto es,

$$\begin{aligned} a^2x + 4a^2p &= 0 \\ \rightarrow a^2x + 4a^2(\alpha x) &= 0 \\ \rightarrow a^2x + 4a^2\alpha x &= 0 \\ \rightarrow \alpha = -\frac{a^2x}{4a^2x} &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Por lo tanto el segundo término en serie para y es $-\frac{x}{4}$

Para calcular el siguiente término se escribe $p = -\frac{x}{4} + q$, y la sustituimos en $p^3 + 3ap^2 + 4a^2p + axp + a^2x - x^3 = 0$, lo que arroja una tercera ecuación:

$$q^3 + 3aq^2 + \frac{3}{4}xq^2 + 4a^2q - \frac{a}{2}xq + \frac{3}{16}x^2q - \frac{a}{16}x^2 - \frac{65}{64}x^3 = 0$$

El polígono de Newton en esta tercera ecuación tiene por vértices $(0,3),(0,2),(1,2),(0,1),(1,1),(2,1),(2,0),(3,0)$[37]

De estos vértices puede verse que a los únicos que afecta la regla DE son $(2,0)$ y $(0,1)$, por lo que se consideran los términos de la ecuación $4a^2q - \frac{a}{16}x^2$ casi iguales a nada, así, despejando q, se obtiene que $q = -\frac{x^2}{64a}$, que es el tercer término del desarrollo en serie para y, y así sucesivamente

B

*				
D *	*			
	*	*		
	E*	*	*	

A C

Cuadro 3.8: Polígono de Newton, ejemplo 2(2)

Como puede observarse la utilización del polígono de Newton aclara sobre cómo coger las potencias para la búsqueda de la siguiente aproximación a la raíz, y asimismo refleja la operación de inversión de series que realiza (**CP6**). Y así cuando obtiene el desarrollo en serie de una curva, utiliza las reglas de cuadratura mencionadas en un principio.

Finalmente en la última sección demuestra las Reglas[38] dadas en el principio con lo cual Newton muestra la aplicación del Teorema Fundamental del Cálculo, para determinar el valor de una integral (**PG, CP6**), sin embargo cómo se comentó, no existe una justificación del todo apropiada para el funcionamiento del método. Únicamente demuestra para el caso de la cuadratura de curvas simples en la regla primera y justifica para el caso en la resolución

[37] Recordemos que los exponentes de q dan la segunda coordenada y los de x la primera.

[38] Para la demostración de la regla I, en términos actuales, muestra que la derivada de la integral definida de una función es dicha función.

de ecuaciones afectadas, ya que la justificación de la segunda regla la engloba dentro de la demostración de la regla primera por tratarse como se dijo anteriormente, de la linealidad. Veamos enseguida cómo justifica el método para la resolución de las ecuaciones afectadas.

Demostración de la resolución de ecuaciones afectadas:

"Lo otro que hay que demostrar es la resolución literal de ecuaciones afectadas. A saber que como x sea bastante pequeña, cuánto más se prolongue el cociente más se acercará a la verdad, de suerte que su distancia (p, q, r&$c.$) al valor exacto de y venga a ser al cabo menos que cualquier cantidad dada; y proseguido hasta infinito sería igual a y. Lo que se hace patente así:

1. Quoniam ex ultimo termino æquationum quarum $p, q, r,$ &c funt radices, quantitas illa in qua x eft minimæ dimenfionis (hoc eft, plufquam dimidium iftius ultimi termini, fi fupponis x fatis parvam effe) in qualibet operatione perpetuo tollitur: irte ultimus terminus (per I.I0. *Elem.*) tandem evadet minor quavis data quantitate; & prorfus evanescet fi opus infinite continuatur."

Lo que quiere decir con este párrafo, es que para cada operación que realiza para encontrar cada aproximación se suprime el último término de las ecuaciones cuyas raíces son $p, q, r,$ &c, es decir aquella cantidad en que x es de la mínima dimensión. Por lo tanto este último término (por 1,10 *Elem.*)[39] vendrá a ser al cabo menor que cualquier cantidad dada e irá haciéndose infinitamente pequeño si se continua infinitamente la operación. Y en seguida ejemplifica con una ecuación:

Pues justamente si $x = \frac{1}{2}$, x será la mitad de estos términos, $x + x^2 + x^3 + x^4,$ &c, y x^2, de todos éstos, $x^2 + x^3 + x^4 + x^5,$ &c,

Así, si $x < \frac{1}{2}$, será más que la mitad de todos éstos, $x + x^2 + x^3,$ &$c.$ y x^2 más que la mitad de $x^2 + x^3 + x^4,$ &$c.$

Por lo tanto si $\frac{x}{b} < \frac{1}{2}$, x será más que la mitad de $x + \frac{x^2}{b} + \frac{x^3}{bb},$ &$c.$ Y así en lo restante. Y en lo que atañe a los números coeficientes (las cifras de

[39]Se refiere a la proposición primera del libro X de los *Elementos* de Euclides: Dadas dos magnitudes desiguales, si se quita de la mayor una magnitud mayor que su mitad y, de la que queda, una magnitud mayor que su mitad y así sucesivamente, quedará una magnitud que será menor que la magnitud menor dada.(Euclides III, 1956: 16) (Se trata del llamado principio de exhausción.)

cada término del desarrollo de la serie) los últimos decrecen de continuo, o si en algún momento crecieren, tan sólo sería necesario suponer x unas cuantas veces menor.

En el punto 1. Newton nos dice que si $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + R_n(x)$ y $|R_n(x)| \leq 2|a_nx^n|$, entonces $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$; lo cual es falso excepto que se suponga por ejemplo que la serie $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$ es convergente. De tal forma que el intento de demostración es débil desde el punto de vista lógico, lo cual era habitual en los matemáticos de los siglos XVII y XVIII, que como ya se ha dicho, se estaba más interesado en descubrir que en asentar lo descubierto con demostraciones rigurosas. Empero Newton queda satisfecho con el método desarrollado que funciona con los ejemplos concretos que maneja, y que le permite obtener los desarrollos en serie para la exponencial, seno, coseno y para resolver problemas que se planteaban como retos matemáticos como el problema de la cicloide por ejemplo.(**PG**)

Al respecto de la demostración de la resolución de ecuaciones afectadas continua con los siguientes 3 puntos probatorios:

1. Si ultimus terminus alicujus æquationis continuo diminuatur donec tandem evanefcat, una ex ejes radicibus etiam diminuetur donec cum ultimo termino fimul evanefcat.

2. Quare quantitatum p, q, r, &c. unus valor continuo decrefcit donec tandem, cum opus in infinitud producitur, penitus evanefcat.

3. Sed valores iftarum p, q vel r, &c. una cum quotiente aetenus extracta adæquant radices æquationis propofitæ (Sic in refolutione æquationis $y^3 + aay + axy - 2a^3 - x^3 = 0$ fuera oftenfa, percipies $y = a + p = a - \frac{1}{4}x + q = a - \frac{1}{4}x + \frac{xx}{64a} + r$, &c.) Unde fatis liquen propofitum quod quotiens infinite producta eft una ex valoribus de y.

Esto es, el punto 2 indica que si el último término de alguna ecuación disminuye continuamente hasta desvanecerse, una de sus raíces también disminuye hasta que desaparece simultáneamente con el último término, por tal razón, el punto 3 expresa que uno de los valores de las cantidades p, q, r, &c. decrece continuamente mientras la operación se prolonga hasta infinito, hasta desvanecerse por completo. Y finalmente en el punto 4 se indica que la suma del cociente extraído y los valores de las cantidades p, q, r, &c., igualan cada vez más a las raíces de la ecuación propuesta. Y ejemplifica brevemente: Así en la resolución de la ecuación $y^3 + aay + axy - 2a^3 - x^3$, arriba mostrada, te percatas de que $y = a + p = a - \frac{1}{4}x + q = a - \frac{1}{4}x + \frac{xx}{64a} + r, \&c.$

Finaliza enfatizando que estos puntos son suficientes para justificar lo propuesto (el método) y más específicamente que el cociente proseguido hasta infinito es uno de los valores de y.

Por último veamos otras aplicaciones del método de las aproximaciones sucesivas en otro tipo de curvas.

Algunos ejemplos de la aplicación del método a otras curvas. (PG)

El desarrollo de la *función exponencial*, resulta de querer encontrar la base a partir de un área dada, utilizando el teorema del binomio (**CP6**) y el método de aproximación a raíces empleado en la resolución numeral y literal de las ecuaciones afectadas, esto es:

"Hallazgo de la base a partir de un área dada"

Si se desea conocer la base AB a partir del área $ABCD$ de la hipérbola dada $\left(\frac{1}{1+x} = y\right)$ llamada z, extraigo la raíz de esta z(ABCD) (ver Anexo A. p. 16)

$$= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4, \&c.,$$

despreciados aquellos términos en que x es de más dimensiones de las que se desean para z en el cociente (ver Cuadro 3.9). Esto es, que se desprecian los términos en que x está elevado a una potencia mayor que el número de términos que se desean obtener en el desarrollo de la serie de potencias.

Así por ejemplo si se quisiera que z ascienda en el cociente a tan sólo cinco dimensiones, se desecharían todos estos términos, $-\frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{8}x^8, \&c.$, y por lo tanto se extraería tan sólo la raíz de

$$\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - z = 0.$$

Lo que hace Newton es encontrar el desarrollo de la función exponencial en serie de potencias invirtiendo el de $log(1 + x)$[40] (**CP6**)

[40]En el facsímil Durán señala que se ha corregido una errata en la última fila de la tabla donde el sumando $\frac{z^5}{20}$ tiene signo positivo, mientras que el texto original tiene signo negativo.

$x = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5 \&c.$		
$z + p = x$	$+\frac{1}{5}x^5$	$+\frac{1}{5}z^5, \&c.$
	$-\frac{1}{4}x^4$	$-\frac{1}{4}z^4 - z^3p, \&c.$
	$+\frac{1}{3}x^3$	$+\frac{1}{3}z^3 + z^2p + zp^2, \&c.$
	$\frac{1}{2}x^2$	$-\frac{1}{2}z^2 - zp - \frac{1}{2}p^2$
	$+x$	$+z + p$
	$-z$	$-z$
$\frac{1}{2}z^2 + q = p$	$+zp^2$	$+\frac{1}{4}z^5, \&c.$
	$-\frac{1}{2}p^2$	$-\frac{1}{8}z^4 - \frac{1}{2}z^2q, \&c.$
	$-z^3p$	$-\frac{1}{2}z^5, \&c.$
	$+z^2p$	$+\frac{1}{2}z^4 + z^2q$
	$-zp$	$-\frac{1}{2}z^3 - zq$
	$+p$	$+\frac{1}{2}z^2 + q$
	$+\frac{1}{5}z^5$	$+\frac{1}{5}z^5$
	$-\frac{1}{4}z^4$	$-\frac{1}{4}z^4$
	$+\frac{1}{3}z^3$	$+\frac{1}{3}z^3$
	$-\frac{1}{2}z^2$	$-\frac{1}{2}z^2$
$1 - z + \frac{1}{2}z^2)\frac{1}{16}z^3 - \frac{1}{8}z^4 + \frac{1}{20}z^5(\frac{1}{16}z^3 - \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5$		

Cuadro 3.9: Desarrollo de la Función Exponencial.

Dado que el área generada por la hipérbola es el logaritmo, poniendo $AB = x$ tenemos que $z = log(1 + x)$, por lo que los cálculos que Newton realiza para expresar x en términos de z es efectivamente el desarrollo de $x = e^z - 1$ en potencias de z. Así aparece por primera vez en la historia el desarrollo en serie de potencias para la función exponencial (**CP6**). Leibniz, también redescubrió a la función exponencial e incluyó sus resultados en la respuesta a la Epistola prior, por lo cual fue acusado ya que precisamente Newton había incluido el desarrollo en esa carta.

La tabla siguiente muestra el desarrollo operacional, en el que como puede verse se utiliza el método de la resolución literal de las ecuaciones afectadas.

Como se observa en la tabla, el resultado de la parte superior es el desarrollo de la función exponencial, que bien conocemos por fórmula,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Para todo x.

Después de hacer el análisis para la curva plantea dos observaciones:

Primera: señala que en las ecuaciones que hay que sustituir, se omiten siempre los términos que prevé no han de ser utilizados después. Y utiliza la regla de que tras el primer término resultante de una cantidad colateral cualquiera, no añade a la derecha más términos que los disten en menos de la dimensión que se busca.[41] Cuando la raíz a extraer (x) sea de dimensiones pares por doquier, entonces la regla será, que tras el primer término resultante de una cantidad cualquiera colateral a él no añade a la derecha más términos mas que aquellos que tengan una diferencia par del máximo índice de dimensión del primer término. Y cuando (x) sea de dimensión impar por doquier, entonces no añade más que ternas, si las potencias de dimensión igual que x distan por doquier tres unidades entre sí. Y así sucesivamente.

Segunda: menciona que cuando en la última ecuación resultante, p, q, r, &c. sean de tan sólo una dimensión, se busca mediante división el valor de la misma, es decir, directamente se buscan los términos restantes a añadir al cociente.

Otro ejemplo es el de la trocoide, el cual encaja en el apartado que llama, aplicación de lo anteriormente explicado a curvas mecánicas[42].(**PG**)

La *trocoide* es una curva que estuvo de moda durante casi todo el siglo XVII, viene del griego $\tau\rho\chi\sigma$ que significa rueda. Roberval le denominaba así dado que calculó el área encerrada por un arco y la tangente. También es llamada *cicloide*, denominación de Galileo quien la propuso como modelo para los arcos de puentes. Pascal le llamaba *roulette*. La cicloide también es la *tautócrona* (curva por la que una masa desciende hasta el mínimo en igual tiempo sin importar la altura desde donde comience el descenso) o *braquistócrona*.

En 1697, el matemático Bernoulli lanzó dos problemas de desafío para ver quienes eran capaces de resolverlos. Uno de ellos pedía calcular una curva por la que pasaría lo más rápidamente posible un cuerpo pesado, cayendo por

[41] Así en el anterior ejemplo, dónde la máxima dimensión es 5, se han omitido todos los términos posteriores a z^5, y se ha puesto uno sólo tras z^4, y tan sólo dos tras z^3.

[42] Ver pie de página 19. Las funciones algebraicas son aquellas las compuestas sólo mediante operaciones algebraicas, y trascendentes aquellas en que están presentes operaciones trascendentes.

su propio peso desde un punto a otro. A este problema se le conoció como el cálculo de la braquistócrona. Newton resolvió los problemas en un par de horas. Las soluciones fueron publicadas, de forma anónima en las *Philosophical Transactions*, aunque Bernoulli, al ver los resultados supo enseguida que eran obras de Newton pues, como afirmó, podía reconocer al león por sus garras. (Muñoz, 1999)

Newton procede a resolver el problema de la trocoide de la siguiente manera:

"Aplicación de lo anteriormente explicado a curvas mecánicas"

Y baste lo dicho de las curvas geométricas. Y no es que, si la curva es mecánica, ello deseche nuestro método en modo alguno. (**PG**)

Sea ejemplo la trocoide $ADFG$, que tiene por vértice A y por eje horizontal AH, y AKH la rueda por la que es descrita[43]. Se requiere hallar la superficie ABD.

Sean $AB = x$, $BD = y$, como en la figura, y $AH = 1$ se calcula primero la longitud de BD.

Justamente por la naturaleza de la trocoide, $KD = alarcoAK$. Razón por la que $BD = BK + arcoAK$. Así el desarrollo en serie para BK es:

$$BK(=\sqrt{x-xx}) = x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{16}x^{\frac{7}{2}}, \&c$$

$$AK = x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{16}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{40}x^{\frac{5}{2}} + \frac{5}{112}x^{\frac{7}{2}}, \&c,$$

Por lo tanto haciendo la suma obtenemos:

$$BD = 2x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{20}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{56}x^{\frac{7}{2}}, \&c,$$

Finalmente (por la regla 2) el área es:

$$ABD = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{15}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{70}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{252}x^{\frac{9}{2}}, \&c,$$

[43] La rueda que describe la cicloide gira por el eje vertical GH.

De modo similar (Puesto C por centro del círculo y $CB = x$), se obtiene el área $CBDF, \&c$.

En nuestra opinión, hemos observado la aplicación y uso de un método para el cálculo aproximado de raíces de ecuaciones polinómicas en los hallazgos de Newton, lo cual nos revela que la utilidad de dicho método radicaba en las prácticas de la época. Nuestra conclusión, es que el método en esta etapa más bien era tratado como una herramienta que permitía avanzar en los descubrimientos de la ciencia, y no como un objeto propio de estudio. Lo más relevante es que su uso permitió:

- La utilización del Teorema Fundamental del Cálculo.
- Inversión de series. Desarrollando en series la exponencial, arcoseno, arcocoseno, seno, etc.
- El cálculo mediante desarrollo en serie de áreas y longitudes de curvas. Cuadratura de cualquiera curvas.
- Consideraciones implícitas sobre la convergencia del método para desarrollar en serie funciones algebraicas.

En esta obra, lo que Newton nos muestra es realmente el descubrimiento del cálculo infinitesimal, lo que sería una nueva disciplina, pues como se mencionó, se vivía una Revolución Científica y esto fue parte fundamental en el desarrollo de la ciencia.

También pudimos observar el juego entre los distintos tipos de pensamiento en la redacción y estructuración de la obra, siendo predominante el marco geométrico pero siempre en paralelo a un tratamiento algebraico y numérico.

3.2. *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés*

3.2.1. El autor

Joseph Louis Lagrange nació en Turín, Italia, el 25 de enero de 1736. Estudió la carrera de abogado en la Universidad de Turín, su tema favorito era latín clásico. En un principio no tenía ningún entusiasmo por las matemáticas, sin embargo, le surgió interés en ellas al leer un trabajo de Halley (1656-1742) en 1693 sobre el uso del álgebra en la óptica (**CP1**). Para julio de 1754 publicó su primer trabajo en matemáticas en el que esbozó una analogía entre el teorema binomial y los derivados sucesivos del producto de funciones (**CP3**). Antes de escribirlo para la publicación en italiano, envió sus resultados en latín a Euler (1707-1783) que en ese tiempo trabajaba en Berlín. Un mes después de su publicación encontró que los resultados aparecieron en una correspondencia entre Johann Bernoulli (1667-1748) y Leibniz, por lo que Lagrange estuvo perturbado por este descubrimiento y temía ser calificado de plagiador (**CP2**). No obstante, esto sirvió para que Lagrange redoblara sus esfuerzos en sus descubrimientos.

Lagrange inició el trabajo con la tautócrona, y antes de finales de 1754 había hecho algunos resultados importantes con los cuales contribuiría al nuevo tópico del cálculo de variaciones (**CP2**). Sus resultados contenían su método de máximos y mínimos y fueron enviados a Euler, quien le contestó que estaba impresionado por sus nuevas ideas (**CP2, CP3**). A sus 19 años, se convirtió en profesor de matemáticas en la escuela de artillería de Turín. En 1755 apareció una memoria de Euler sobre este tema, y Lagrange observó que el método de Euler tenía “no toda la simplicidad que es deseable en un tema de análisis puro”, por lo que el resultado fue el cálculo analítico puro de variaciones de Lagrange (1760-61) (**CP2**), el cual no solamente está lleno de descubrimientos originales sino también tiene material histórico bien ordenado y comparado (lo cual es una característica de Lagrange) (Struik, 1998)

También envió a Euler en 1756 resultados en la aplicación del cálculo de variaciones a la mecánica, mismos que Euler obtuvo, y consultó a Maupertuis (1698-1759) presidente de la Academia de Berlín, acerca de este destacado matemático. Entonces ofrecieron a Lagrange una posición más relevante en Turín, sin embargo, Lagrange rechazó esta oferta debido a que no buscaba prestigio sino dedicación de su tiempo a las matemáticas. Euler propuso a

Lagrange para ingresar en la Academia de Berlín, y así fue en 1756. Al año siguiente Lagrange fue miembro fundador de una sociedad científica en Turín, llamada Real Academia de Ciencias de Turín, y la cual tenía como uno de sus objetivos publicar *Mélanges* que era una revista científica con artículos en francés y latín, y cuyo primer volumen apareció en 1759, el segundo en 1762 y el tercero en 1766. Los artículos de Lagrange para esta revista fueron sobre el cálculo de variaciones, sobre el cálculo de probabilidades, etc.(**CP2**).

También contribuyó a uno de los problemas clásicos de su época, la teoría de la luna. Dio las primeras soluciones particulares del problema de los tres cuerpos, en 1772. En 1767 apareció su memoria *Sur le resolution des équations numériques* en la que como veremos más adelante, presentó métodos de separación de las raíces reales de una ecuación algebraica y de su aproximación por medio de fracciones continuas. En 1770 publicó, *Réflexions sur la résolution algebraique des équations*, que tratan de la cuestión fundamental de por qué los métodos útiles para resolver ecuaciones de grado $n \leq 4$ no son satisfactorias para $n > 4$. Lagrange también investigó sobre los residuos cuadráticos, con lo cual progresó en la teoría de los números y demostró entre otros muchos teoremas, que todo entero es la suma de cuatro o menos de cuatro cuadrados. (**CP3**)

Lagrange fue invitado por Federico el Grande (1712-1786) a Berlín, acompañando su invitación con un modesto mensaje que decía: “es necesario que el más grande geómetra de Europa, deba vivir cerca del más grande de los reyes”, esto en 1776, cuando Euler dejó Berlín para ir a San Petersburgo. Esta estancia fue hasta 1786 cuando murió Federico y después de ello se marchó a París. Durante la Revolución ayudó en la reforma de los pesos y medidas, mas tarde en 1795 fue profesor de la École Normale y en 1797 de la École Polytechnique. (**CP3**)

Algunas de sus grandes obras fueron:

* (1788) *Mécanique analityque.*

* (1797) *Théorie des fonctions analytiques.*

* (1798) *Résolution des équations numériques*

* (1801) *Lecons sur le calcul des fonctions.*

Los dos libros sobre funciones fueron un intento para dar una fundamentación sólida al cálculo reduciéndolo al álgebra. Lagrange rechazó la teoría de los límites como la dieron a conocer tanto Newton como D'Alambert (1717-1783), ya que no podía entender bien lo que pasaba cuando $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ alcanza su límite. (Struik, 1998) (**CP2**)

El cálculo de variaciones de Lagrange hizo posible la unificación de los variados principios de la estática y de la dinámica, de la estática, por el uso del principio de velocidades virtuales, en dinámica, por el uso del principio de D'Alambert. Así Lagrange fue caracterizado como el primer analista verdadero, quedando totalmente descartado el tratamiento geométrico de Newton. (**PA, CP2, CP3**)

El paso del siglo XVIII al XIX fue marcada por una ruptura en la política, social e industria económica de Europa debido a la Revolución Francesa, que de alguna manera también influyo en el ámbito matemático ya que hubo trasformaciones radicales. En el siglo XVIII los matemáticos persiguieron que sus actividades estuvieran dentro de los límites de las academias, libres de todas sus obligaciones par enseñar y asegurando sus vidas por el patrocinio de príncipes y reyes. Ejemplos de esto fueron la Academia de Berlín, donde Euler trabajó por muchos años y la Academia de St. Petersburgo, donde de nuevo Euler y Daniel Bernoulli (1700-1782) estuvieron trabajando. (Bottazzini, 1986)(**CP2**)

La investigación en matemáticas era inexistente en las universidades, por ello se confió su desarrollo a las academias. Después de la revolución esta situación cambió radicalmente, primero en Francia y luego en el resto de Europa. La primera agitación significante en el estatus de la ciencia en la revolución de Francia ocurrió en 1793, cuando la Convención decretó la supresión de la Académie des Sciences. En un folleto se llegó a llamar a los académicos, "charlatanes modernos" mientras que a los ojos de los Jacobianos la Academia fue una jerarquía de intrigas e intereses personales, de corrupción y servicio a el *ancient régime*. Así, los miembros de la Academia fueron privados de sus privilegios y la Academia fue cerrada. (**CP2**)

En septiembre de 1793 fue aprobada una ley que pedía la detención de todos los extranjeros nacidos en los países enemigos y todas sus propiedades fueran confiscadas. Lavoisier (1743-1794) intervino a nombre de Lagrange, que ciertamente cayó bajo términos de la ley, y le concedieron una excepción. Para mayo 1794 después de un examen por el tribunal revolucionario, éste condenó a Lavoisier, que había salvado a Lagrange de la detención.(**CP2**)

En 1808 Lagrange fue nombrado por Napoleón a la Legión de Honor del

Imperio. Finalmente el 10 de abril de 1813 murió en París, Francia. (**CP2**)

3.2.2. *Sur la Résolution des équations numériques.*

Autor	Giuseppe Lodovico Lagrangia
Fecha de nacimiento y fallecimiento del autor	1736/1813.
Título	*Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés.*
Año, editorial y lugar de la primera edición	1798, París
Año, editorial y lugar de la edición consultada	1808, París
Localización del manual utilizado	Biblioteca Abraham Zacut de la Universidad de Salamanca.

Cuadro 3.10: Ficha de referencia de la obra. *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés*

La fuente que se analiza es justamente el tomo VIII del libro titulado *Ouvres de Lagrange*, editado por Gauthier-Villars. Los editores al inicio del primer capítulo mencionan las fuentes que componen dicho tomo. Las memorias de Lagrange *Sur la résolution des équations numériques et les Additions au Mémoire sur la résolution des équations numériques*, aparecieron inicialmente en las *Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, tomo XXIII, 1769, y tomo XXIV, 1770. Posteriormente Lagrange anexó algunas notas importantes, que son el doble de las memorias y sus adiciones, todo junto se ha reunido en un sólo un volumen titulado *Traité de la résolution des équations numériques.* Los editores respetando la disposición de Lagrange reimprimieron íntegramente el volumen editado en 1808, siendo este el tomo VIII de las *Ouvres de Lagrange.* (**CP1**)

En la introducción, Lagrange menciona que la solución de todo problema determinado se reduce, a la resolución de una o de varias ecuaciones, cuyos coeficientes son números dados, es decir de las llamadas *ecuaciones numéricas.* Por lo que es muy importante tener métodos para resolver completamente estas ecuaciones. El presente tratado contiene el método para ello y asimismo las notas que se anexan contienen sobre los principales puntos de la teoría de ecuaciones algebraicas.(**CP4**)

Lagrange hace la diferencia de la resolución de ecuaciones numéricas de la que se llama en álgebra resolución general de ecuaciones, la primera es propiamente dicha, una operación aritmética fundamentada en los principios generados por la teoría de ecuaciones. La extracción de raíces cuadradas y cúbicas son la operación más simple de este género y asimismo la resolución de ecuaciones numéricas de 2 y $3er$ grado. Señala entonces que se deja a la Aritmética las reglas de la resolución de ecuaciones numéricas y al Álgebra [44] su demostración ya que dependen de la teoría general de ecuaciones. (**CP4**)

Señala que el álgebra en el sentido más amplio, tiene el arte de determinar los factores desconocidos para las funciones de cantidades conocidas; la resolución general de ecuaciones consiste en encontrar, para todas las ecuaciones de un mismo grado, las funciones de los coeficientes de estas ecuaciones quienes pueden representar todas sus raíces. Y menciona la dificultad que existe en los casos de ecuaciones irreducibles. Posteriormente señala que afortunadamente se han encontrado los medios para superarlo en los grados tercero y cuarto, por la consideración de la trisección de ángulos y por la ayuda de tablas trigonométricas, aunque esto que depende de la división de ángulos no es aplicable en los grados más elevados sino sólo a una clase muy limitada de ecuaciones. Por lo que en consecuencia recurre a un método aritmético, el cual, es precisamente objeto del presente tratado. (**CP4, CP5**)

Expresa que fue Viète el primero en ocuparse de la resolución de ecuaciones numéricas de cualquier grado, y que Harriot (1550-1621), Oughtred, Pell (1611-1685), etc., investigaron para facilitar el uso del método presentado por Viète, dieron las reglas particulares para disminuir los ensayos, según los diferentes casos que tienen lugar en las ecuaciones respecto de sus signos y de sus términos, mas la multitud de operaciones que se generan llevan a la incertidumbre del éxito en un gran número de los casos (**CP2**). El método textualmente lo expresa como sigue:

> "A la méthode de Viète a succédé celle de Newton, qui n'est proprement qu'une méthode d'approximation, puisqu'elle suppose que l'on ait déjà la valeur de la racine qu'on cherche, à une quantitè près moindre que sa dixième partie: alors on substitue cette valeur plus une nouvelle inconnue à l'inconnue de l'équation proposée, et l'on a une seconde équation dont la racine est ce qui reste à ajouter à la première valeur pour avoir la valeur exacte de la

[44]Lagrange no está de acuerdo de considerar al Álgebra como la llamaba Newton (Aritmética Universal), ya que aunque la denominación es exacta desde cualquier punto de vista, ello no deja paso a conocer la verdadera diferencia entre Aritmética y Álgebra.

> racine cherchée : mais, à cause de la petitesse supposée de ce reste, on néglige dans la nouvelle équation le carré et les puissances plus hautes de l'inconnue; et l'équation étant ainsi rabaissée au premier degré, on a sur-le champ la valeur de l'inconnue. Cette valeur ne sera encore qu'approchée; mais on pourra s'en servir pour en trouver une autre plus exacte, en faisant sur la seconde équation la même opération que sur la première, et ainsi de suite. De cette manière, on trouve à chaque op ération une nouvelle quantité à ajouter ou à retrancher de la valeur déjà trouvée, et l'on a la racine d'autant plus exacte qu'on pousse le calcul plus loin."

Señala que dicho método es el más comúnmente usado para la resolución de ecuaciones numéricas en un cierto límite de ellas puesto que no es del todo seguro,

> "...De plus, elle n'est pas toujours sure; car, en négligeant à chaque opération des termes dont on ne connaît pas la valeur, il est impossible de juger du degré d'exactitude de chaque nouvelle correction, et il peut arriver, dans les équations qui ont des racines presque égales, que la série soit très-peu convergente, ou qu'elle-même divergente après avoir été convergente. Enfin, elle è encore l'inconvénient de ne donner que des valeurs approchées des racines m'êmes qui peuvent être exprimées exactement en nombres, et de laisser, par conséquent, en doute si elles sont commensurables ou non."

Así Lagrange parte de un problema que expresa como sigue (**PA, CP5**):

> **"Le problème qu'on doit se proposer dans cette partie de l'Analyse est celui-ci: Étant donnée une équation numérique sans aucune notion préalable de la grandeur ni de l'espèce de ses racines, trouver la valeur numérique exacte, s'il est possible, ou aussi approchée qu'on voudra de chacune de ses racines. Ce problème n'avait pas encore été résolu; il fait l'objet des recherches suivantes."**

Esto es: Dada una ecuación numérica sin cualquier noción preliminar del tamaño ni de la especie de sus raíces, encontrar el valor numérico para exigir, si es posible, o tan aproximado como uno deseará cada una de sus raíces. Lo cuál se propone dar a conocer en su tratado.(**CP5**)

El *Traite de la résolution des équations numériques* está formado por seis capítulos, cada uno dividido por secciones y catorce notas sobre la teoría de ecuaciones algebraicas (**CP4**). El índice de ello es el siguiente:

Introducción

- Capítulo I. Método para encontrar en una ecuación numérica cualquiera, el valor entero más aproximado a cada una de sus raíces reales.

- Capítulo II. Sobre la manera de tener las raíces iguales y las raíces imaginarias de ecuaciones.

- Capítulo III. Nuevo método para aproximar raíces de ecuaciones numéricas.

- Capítulo IV. Aplicación de los métodos precedentes a ejemplos cualquiera.

- Capítulo V. Sobre las raíces imaginarias

  - Artículo I. Sobre la manera de reconocer si una ecuación tiene raíces imaginarias.

  - Artículo II. Donde se dan las reglas para determinar en ciertos casos el número de raíces imaginarias en las ecuaciones.

  - Artículo III. Donde se aplica la teoría precedente con ecuaciones de segundo, tercer y cuarto grado.

  - Artículo IV. Sobre la manera de encontrar las raíces imaginarias de una ecuación.

- Capítulo VI. Sobre la manera de aproximar al valor numérico de las raíces de ecuaciones por fracciones continuas.

  - Artículo I. Sobre las fracciones continuas periódicas.

  - Artículo II. Donde se da una manera muy simple de reducir en fracciones continuas las raíces de ecuaciones de segundo grado.

  - Artículo III. Generalización de la teoría de fracciones continuas.

  - Artículo IV. Donde se proponen diferentes maneras para simplificar el cálculo de raíces por fracciones continuas.

- Notas. (Sobre la teoría de ecuaciones algebraicas)

  Note I. Sobre la demostración del teorema I.

  Note II. Sobre la demostración del teorema II.

  Note III. Sobre la ecuación que resulta de la diferencia de las raíces de la ecuación dada, tomadas dos a dos.

  Nota IV. Sobre la manera de encontrar un límite más pequeño que la más pequeña diferencia entre las raíces de una ecuación dada.

  Nota V. Sobre el método de aproximación dado por Newton.

  Nota VI. Sobre el método de aproximación esbozado por series recurrentes.

  Nota VII. Sobre el método de Fointane, para la resolución de ecuaciones.

  Nota VIII. Sobre los límites de raíces de ecuaciones y los caracteres de la realidad de todas sus raíces.

  Nota IX. Sobre la forma de las raíces imaginarias.

  Nota X. Sobre la descomposición de polinomios de un grado cualquiera en factores reales.

  Nota XI. Sobre las fórmulas de aproximación para las raíces de ecuaciones.

  Nota. XII. Sobre la manera de transformar toda ecuación, de suerte que los términos que contienen la incógnita tengan los mismos signos y el término independiente tenga el signo contrario.

  Note XIII. Sobre la resolución de ecuaciones algebraicas.

  Nota XIV. Donde se da la resolución general de ecuaciones con dos términos.

Dado que estamos interesados en los métodos de la resolución de ecuaciones numéricas nos centraremos en el análisis de los capítulos III y IV y asimismo de la nota V, obviamente recurriendo al todo el contenido de la obra cada vez que sea necesario.

A continuación exponemos la teoría del método de Lagrange para la resolución de ecuaciones numéricas[45] que presenta en el capítulo III, como se

[45]Lagrange expresa que una ecuación numérica es una operación aritmética fundamentada en los principios generados por la teoría de ecuaciones. Es decir, una operación aritmética fundamentada en los principios del álgebra. (**PA**)

ha dicho cada capítulo está dividido en secciones por lo que recurriremos al análisis de las secciones que nos sean relevantes para el objeto de esta tesis.

En primera instancia propone una ecuación general de grado m.
Sección 18. (PA) Sea la ecuación

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \cdots + K = 0 \tag{3.9}$$

Y supóngase que se ha encontrado ya por el método[46] precedente el valor entero y aproximado de una de sus raíces reales y positivas, siendo este valor p, de suerte que, $x > p$ y $x < p + 1$ o sea $x = p + \frac{1}{y}$ y sustitúyase este valor en la ecuación propuesta (3.9) en el lugar de x, haciendo operaciones se tendrá que multiplicar toda la ecuación por y^m y ordenar los términos en relación a y, obteniendo una ecuación en la forma,

$$A'y^m + B'y^{m-1} + C'y^{m-2} + \cdots + K' = 0 \tag{3.10}$$

Como por hipótesis se deduce que $\frac{1}{y} > 0$ y < 1, se tiene que $y > 0$, por lo tanto la ecuación (3.10) tendrá necesariamente al menos una raíz real más grande que la unidad. Para encontrar el valor entero aproximado de esta raíz, se realiza el mismo procedimiento del método precedente[47], y como esta raíz debe ser necesariamente positiva, basta considerar y positiva[48].

Así se encuentra el valor entero aproximado de y, que designa por q, de tal forma que se hace entonces $y = q + \frac{1}{z}$ y sustituyendo este valor en la ecuación (3.10), se obtendrá una nueva ecuación en z de la forma,

$$A''z^m + B''z^{m-1} + C''z^{m-2} + \cdots + K'' = 0 \tag{3.11}$$

[46]Se refiere al método de sustituir consecutivamente números naturales de tal suerte que se encuentre un cambio de signo consecutivo, lo que indica que entre esos dos números consecutivos existe una raíz real. ≪Théorème I. Si l'on a une équation quelconque, et que l'on connaisse deux nombres tels qu'étant substitués successivement è la place de l'inconnue de cette équation, ils donnent des résultats de signes contraires, l'équation aura nécessairement au moins une racine réelle dont la valeur sera entre ces deux nombres.≫ (Lagrange, 1808)

[47]Ver nota al pie de página anterior.

[48]≪Comme on peut toujours changer les racines négatives d'une équation quelconque en positives, en changeant seulement le signe de l'inconnue, nous ne considérerons dans la suite, pour plus de simplicité, que les racines positives; ainsi, quand il s'agira d'examiner les racines d'une équation donnée, on considérera d'abord les racines positives de cette équation; ensuite on y changera les signes de tous les termes où l'inconnue se trouvera élevée à une puissance impaire, et l'on considérera de méme les racines positives de cette nouvelle équation; ces racines, prises en moins, seront les racines négatives de la proposée.≫ (Lagrange, op. cit. p.21) Anexo B.

Que por las mismas razones que la anterior tendrá necesariamente al menos una raíz más grande que la unidad, y se podrá encontrar un valor entero aproximado. Este valor aproximado de z se le ha llamado r, esto es, $z = r + \frac{1}{u}$ y sustituyendo se tendrá una ecuación en u, que tendrá al menos una raíz real más grande que la unidad, y así sucesivamente.

Así continuando de esta manera se aproxima más y más al valor de la raíz buscada. Y en el caso de que cualquiera de estos números $p, q, \cdots$ sean una raíz exacta, entonces se tendrá que $x = p$ o $y = q, \cdots$, y la operación estará terminada; en este caso, se encontrará para x un valor conmensurable.

En todos los otros casos, el valor de la raíz será necesariamente inconmensurable, y se podrá solamente aproximar muy cerca al valor verdadero.

Como puede observarse el método propuesto conserva también la característica de ser iterativo, si bien es cierto, por su construcción algebraica en nuestra opinión es más claro que el método de aproximación por series sucesivas que mostramos en el apartado *Resolución numeral de las ecuaciones afectadas* del presente escrito.

Continuemos con el desarrollo de la teoría de ecuaciones de Lagrange:

Sección 19. (PA) Si la ecuación posee varias raíces reales positivas, se podrá encontrar por los métodos expuestos en el capítulo I (ver Anexo B), el valor entero aproximado a cada una de estas raíces; y llamarles $p, p', p''. \cdots$, que se les empleará sucesivamente para aproximarse más al verdadero valor de cada raíz.

Al respecto de este apartado hace 2 indicaciones:

1. Que si los números $p, p', p'', \cdots$, son todos diferentes entre ellos, entonces las transformadas (3.10), (3.11), $\cdots$ del número precedente, cada una no tendrá mas que sólo una raíz real más grande que la unidad; porque, si por ejemplo, la ecuación (3.10) tiene dos raíces más grande que la unidad, y' y y'', se tiene que: $x = p + \frac{1}{y'}$ y $x = p + \frac{1}{y''}$; de suerte que estos dos valores de x tienen el mismo valor entero aproximado a p, contra la hipótesis: *il serait de meme si l'équation (3.11) ou quelqu'une des suivantes abatí deux racines rélles plus grandes que l'unité.*

   De esto se sigue que, para encontrar en este caso los valores enteros aproximados $q, r, \cdots$ de raíces de las ecuaciones (3.10), (3.11), $\cdots$ se tendrá que sustituir sucesivamente en el lugar de $y, z, \cdots$ los números naturales positivos $1, 2, 3, \cdots$ hasta que encontremos dos sustituciones consecutivas que arrojen resultados de signo contrario (**PA**).[49]

2. Que, si hay dos valores de x que tengan un mismo valor entero aproximado p, y utilizamos este valor, la ecuación (3.10) tendrá también dos raíces más grandes que la unidad, y si sus valores enteros aproximados son los mismos, la ecuación (3.11) tendrá otra vez dos raíces más grandes que la unidad, y así se seguirá hasta que se obtenga una ecuación en la cual las dos raíces más grandes que la unidad, tengan dos valores enteros aproximados diferentes, entonces cada uno de estos dos valores dará una sucesión de ecuaciones particulares que no tendrán más que una sola raíz real más grande que la unidad.

   En efecto, puesto que hay dos valores diferentes de x que tienen el mismo valor entero aproximado p, estos dos valores estarán representados por $p + \frac{1}{y}$ de suerte que será necesario que y tenga necesariamente dos valores reales más grandes que la unidad; y si estos dos valores de y tienen el mismo valor aproximado q, se tendrá de nuevo que hacer $y = q + \frac{1}{z}$,z y de nuevo se tendría dos valores diferentes más grandes que la unidad, y así sucesivamente.

   Mas, si los valores enteros aproximados de y son diferentes, entonces, llamando a estos valores q y q' se hará sucesivamente $y = q + \frac{1}{z}$ y $y = q' + \frac{1}{z}$, y está claro que z, en una o en otra de estas dos suposiciones, no tendrá más que un solo valor real más grande que la unidad; De otra manera, los valores de y, en vez de ser dobles solamente, serían triples o cuádruples, etc.

[49]≪Corollaire I. Donc, si dans une équation quelconque on substitue successivement à la place de l'inconnue les nombres en progression arithmétique les résultats correspondants formeront une suite dans laquelle il y aura autant de variations de signes que l'équation proposée aura de racines réelles positives et inégales, mais dont les différences ne seront pas moindres que la différence de la progression; de sorte que, si l'on prend égale ou moindre que la plus petite des différences entre les différences racines positives et inégales de l'équation, la suit dont il s'agit aura nécessairement autant de variations de signes que l'équation contiendra de racines réelles positives et inégales.≫ (Lagrange, op. cit. p.22) Anexo B.

Así, cuando se obtenga una transformada[50] en la cual las dos raíces más grandes que la unidad tengan dos valores enteros diferentes, será seguro que las otras transformadas resultantes de cada uno de estos dos valores no tendrá más que una sola raíz más grande que la unidad.

Lagrange menciona que se puede señalar análogamente sobre el caso donde en la ecuación (3.9) haya tres raíces, o más, que tengan el mismo valor entero aproximado.

El siguiente punto sugiere lo visto anteriormente pero para encontrar raíces negativas y también para encontrar las raíces imaginarias.(**CP6**)

Sección 20. Se ha supuesto en la sección 18 que las raíces buscadas eran positivas; así para encontrar las negativas, sólo hay que poner $-x$ en el lugar de x en la ecuación propuesta (3.9), y se buscarán las raíces positivas en esta última ecuación: que serán las negativas de la propuesta (**PA**).

En cuanto a las raíces imaginarias[51], que son siempre expresadas por $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$ en el capítulo II se dan los medios para encontrar las ecuaciones en donde α y β son las raíces, por lo cual habrá que buscar solamente las raíces reales de estas ecuaciones, y se obtendrá el valor de todas las raíces imaginarias de la ecuación propuesta. (**CP6**)

Lo que ha presentado al momento es necesario para llegar a la sección 22, en la cual presenta el método iterativo con el que muestra la fundamentación para la resolución de ecuaciones, y procede de la siguiente forma:

Sección 22. Sean p, q, r, s, t los valores enteros aproximados a las raíces de las ecuaciones 3.9,3.10, 3.11, $\cdots$, de suerte que se tiene,

$$x = p + \frac{1}{y}, y = q + \frac{1}{z}, z = r + \frac{1}{u}, \cdots$$

Sustituyendo sucesivamente estos valores en el de x, se tendrá,

[50] Por transformada se refiere a la ecuación que resulta al sustituir algún valor en la ecuación propuesta o en la que se actúa.

[51] No haremos mayor referencia a las raíces imaginarias que la que sea necesaria. Para detalles vea Anexo B. p. 37-40.

$$p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{s + \cdots}}}$$

Así el valor de x, es decir de la raíz buscada, será expresada por una fracción continua[52](**CP6**). Al respecto dice lo siguiente:

> "$\cdots$ Or on sait que ces sortes de fractions donnent toujours l'expression la plus simple, et en même temps la plus exacte qu'il est possible, d'un nombre quelconque, rationnel ou irrationnel

Esto es: Sin embargo, se sabe siempre que este tipo de fracciones dan siempre la expresión más simple, y al mismo tiempo la más exacta que es posible, de un número cualquiera, racional o irracional. [53]

A continuación comunicará cómo se realizan los cálculos para encontrar las raíces tomando en cuenta fracciones ordinarias.

Sección 23. Ahora si uno reduce las fracciones continuas (**CP6**)

$$\frac{p}{1}, p + \frac{1}{q}, p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r}}, \cdots$$

en fracciones ordinarias[54], se hace,

$$\begin{array}{ll} \alpha = p & \alpha' = 1, \\ \beta = q\alpha + 1 & \beta' = q\alpha' = q, \\ \gamma = r\beta + \gamma & \gamma' = r\beta' + \alpha', \\ \delta = s\gamma + \beta & \delta' = s\gamma' + \beta', \\ \cdots\cdots & \end{array}$$

[52]Como su nombre lo indica, partiendo de la definición de continuidad en esa época, una fracción continua será entendida como una expresión en fracción que se presenta en una sola función.

[53]Lagrange expresa que Huyghens (1629-1695) fue quien señaló primero esta propiedad de las fracciones continuas en su Tratado *De Automato Planetario*, propiedad que usó para encontrar fracciones más simples y al mismo tiempo más aproximadas de una fracción cualquiera dada. También menciona que aunque varios geómetras hábiles desarrollaron más esta teoría e hicieron algunas aplicaciones ingeniosas y útiles, no se había pensado en hacer uso de ellas para la resolución de ecuaciones.

[54]Las suposiciones las hace para eficacia de la construcción del método.

de donde se obtendrá la siguiente serie de fracciones particulares,

$$\frac{\alpha}{\alpha'}, \frac{\beta}{\beta'}, \frac{\gamma}{\gamma'}, \frac{\delta}{\delta'}, \cdots,$$

las cuales serán necesariamente convergentes (**CP6**) al verdadero valor de x, y de las cuales la primera será más pequeña que este valor, la segunda más grande, la tercera más pequeña, y así sucesivamente; de suerte que el valor buscado se encontrará siempre entre dos fracciones consecutivas cualesquiera. Lo cual es fácil de deducir de la naturaleza de la misma fracción continua que aquí ha sido esbozada.

Es fácil ver que los valores de $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ y $\alpha', \beta', \gamma', \cdots$ son siempre tales que $\beta\alpha' - \alpha\beta' = 1, \beta\gamma' - \gamma\beta' = 1, \delta\gamma' - \gamma\delta' = 1, \cdots$ de lo cual se sigue que:

1. Que estas fracciones son ya reducidas a sus mínimos términos; porque si γ y γ', por ejemplo, tienen un común divisor diferente de la unidad, se tendrá, en virtud de la ecuación $\beta\gamma' - \gamma\beta' = 1$ que la unidad es dividida por este mismo divisor;

2. De lo que se tendría,

   $$\frac{\beta}{\beta'} - \frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{1}{\alpha'\beta'}, \frac{\beta}{\beta'} - \frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{1}{\beta'\gamma'}, \frac{\delta}{\delta'} - \frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{1}{\gamma'\delta'}, \cdots,$$

   de suerte que las fracciones

   $$\frac{\alpha}{\alpha'}, \frac{\beta}{\beta'}, \frac{\gamma}{\gamma'}, \frac{\delta}{\delta'}, \cdots$$

   no pueden diferir del verdadero valor de x mas que en una cantidad respectivamente menor que

   $$\frac{1}{\alpha'\beta'}, \frac{1}{\beta'\gamma'}, \frac{1}{\gamma'\delta'}, \cdots,$$

   de aquí que será fácil juzgar la cantidad de aproximación. (**PN**)

   En general, ya que $\beta' > \alpha', \gamma' > \beta', \cdots$ se tendrá que

   $$\frac{1}{\alpha'^2} > \frac{1}{\alpha'\beta'}, \frac{1}{\beta'^2} > \frac{1}{\beta'\gamma'}, \cdots,$$

   de donde uno ve que el error de cada fracción será siempre menor que la unidad dividida por el cuadrado del denominador de la misma fracción. (**PA**)

3. Que cada fracción se aproximará al valor de x no solamente más que cada una de las fracciones precedentes, sino también más que cualquiera otra fracción que tenga un menor denominador. En efecto si la fracción $\frac{\mu}{\mu'}$ por ejemplo, se aproxima más que la fracción $\frac{\gamma}{\gamma'}$, γ' será $> \mu'$, y se tendrá que la cantidad $\frac{\mu}{\mu'}$ se encuentra entre las dos cantidades $\frac{\gamma}{\gamma'}$ y $\frac{\delta}{\delta'}$; por lo tanto

$$\frac{\mu}{\mu'} - \frac{\gamma}{\gamma'} < \frac{\delta}{\delta'} - \frac{\gamma}{\gamma'} < \frac{1}{\gamma'\delta'} > 0;$$

luego

$$\mu\gamma' - \mu'\gamma < \frac{\mu'}{\delta'} < 1 > 0;$$

y esto no se puede ya que $\gamma, \gamma', \mu, \mu'$ son números enteros.

Como se puede observar en lo que se ha mostrado, Lagrange construye la teoría que está detrás de su método para la resolución de ecuaciones numéricas y que emplea como veremos a continuación en la exposición de dos ejemplos. A propósito de ellos, el primero corresponde al dado por Newton.[55]

Ejemplo 1. Ecuación que Newton resolvió por el método de las aproximaciones sucesivas.

Sea

$$x^3 - 2x - 5 = 0 \tag{3.12}$$

Lo primero que hará, será designar cuántas raíces reales tiene la ecuación (3.12), por lo que utiliza las fórmulas presentadas en la **sección 8**, para encontrar una ecuación ν que defina justamente el tipo[56] de raíces, a saber:

De (3.12) se deduce que,

$$m = 3,\ A = 0,\ B = -2,\ C = 5,$$

[55]Ver primer apartado de este capítulo.

[56]En la **sección 8**, se plantea el siguiente problema: "Une équation quelconque étant donnée, trouver une autre équation dont les racines soient les différences entre les racines de l'équation donnée. Siendo la ecuación dada de la forma, $x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} + \cdots = 0$ (Anexo B. p. 24)

donde m es el grado de la ecuación, A es el coeficiente de x^2, B el coeficiente de x y C el término independiente, considerando que la ecuación general alterna sus signos uno a uno.

Ahora el grado de la ecuación en ν que buscamos se obtiene por la fórmula (**PA**),

$$n = \frac{m(m-1)}{2} = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3$$

y para buscar los coeficientes, se requieren los valores,

$$\begin{aligned}
A_1 =& A && \Rightarrow A_1 = 0\\
A_2 =& AA_1 - 2B && \Rightarrow A_2 = 4\\
A_3 =& AA_2 - BA_1 + 3C && \Rightarrow A_3 = 15\\
A_4 =& AA_3 - BA_2 + CA_1 - 4D && \Rightarrow A_4 = 8\\
A_5 =& AA_4 - BA_3 + CA_2 - DA_1 + 5E && \Rightarrow A_5 = 50\\
A_6 =& AA_5 - BA_4 + CA_3 - DA_2 + EA_1 - 6F && \Rightarrow A_6 = 91
\end{aligned}$$

esto es, $A_1 = 0,\ A_2 = 4,\ A_3 = 15,\ A_4 = 8,\ A_5 = 50,\ A_6 = 91$:
y también se requieren los valores definidos por las fórmulas,

$$\begin{aligned}
a_1 = (m-1)A_2 - 2(\frac{A_1^2 - A_2}{2}) \Rightarrow &\qquad a_1 = 12\\
a_2 = (m-1)A_4 - 4(A_1A_3 - A_4) + 6\left(\frac{A_2^2 - A_4}{2}\right) \Rightarrow &\qquad a_2 = 72\\
a_3 = (m-1)A_6 - 6(A_1A_5 - A_6) \Rightarrow &\qquad a_3 = -1497\\
+15(A_2A_4 - A_6) - 20\left(\frac{A_3^2 - A_6}{2}\right) &
\end{aligned}$$

esto es, $a_1 = 12, a_2 = 72, a_3 = -1497$,

Finalmente se calculan los coeficientes de la ecuación en ν

$$\begin{aligned} a = a_1 \Rightarrow & \qquad\qquad a = 12 \\ b = \frac{aa_1 - a_2}{2} \Rightarrow & \qquad\qquad b = 36 \\ c = \frac{ba_1 - aa_2 + a_3}{3} \Rightarrow & \qquad\qquad c = -643 \end{aligned}$$

esto es $a = 12,\ b = 36,\ c = -643$
de suerte que la ecuación buscada será

$$\nu^3 - 12\nu^2 + 36\nu + 643 = 0$$

como esta ecuación no tiene los signos alternadamente positivos y negativos, se concluye que la ecuación propuesta tiene necesariamente dos raíces imaginarias, y por consecuencia una sola raíz real.[57]

Así los números a sustituir en el lugar de x serán los números naturales $0, 1, 2, 3, \cdots$

Hay una forma para buscar los límites entre los que se encuentran los valores de x, en esencia se hace uso de lo siguiente:

> **Scolie I**. Quant à la manière de trouver la limite des racines d'une équation, la plus commode et la plus exacte est celle de Newton, laquelle consiste à trouver un nombre dont, les racines de l'équation proposée étant diminuées, l'équation résultante n'ait aucune variation de signe, car a lors cette équation ne pourra avoir que des racines négatives; par conséquent, le nombre dont les racines de la proposée auront été diminuées surpassera nécessairement la plus grande de ces racines.[58]

Haciendo los cálculos para la ecuación $x^3 - 2x - 5 = 0$
Se sustituye $x + l$ en lugar de x, donde l es el límite entero para buscar la raíz real.

[57] "$\cdots$ par la règle connue, que les signes de cette équation soient alternativement positifs et négatives; de sorte que si cette condition n'a pas lieu, ce sera une sure que l'équation $x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} + \cdots = 0$ a nécessairement des racines imaginaires. (Anexo B, p. 38).

[58] Para más detalles vea Anexo B. p. 31.

$$
\begin{aligned}
&(x+l)^3 - 2(x+l) - 5 = 0\\
\rightarrow &x^3 + 3x^2l + 3xl^2 - 2x - 2l - 5 = 0\\
\rightarrow &x^3 + (3l)x^2 + (3l^2 - 2)x + (-2l - 5) = 0
\end{aligned}
$$

de donde obtenemos las ecuaciones,

$$
\begin{aligned}
P &= -2l - 5\\
Q &= 3l^2 - 2\\
R &= 3l
\end{aligned}
$$

y de $P = -2l - 5$, se coge por $\mu = 2$ y $\nu = 5$, que en efecto son los coeficientes con signi negativo, tomando como ecuación base: $-\mu y^{r-m} + \nu y^{r-n} - \varpi y^{r-p} - \cdots$ así l se coge como la suma de las dos más grandes cantidades $\sqrt[m]{\mu}, \sqrt[n]{\nu}, \sqrt[p]{\varpi}, \cdots$ que en este caso, como $\mu = 2$ y $\nu = 5$ y tomando en cuenta que la ecuación donde se obtuvieron es $P = -2l - 5$, se obtiene la suma $\sqrt{2} + \sqrt[3]{5}$, que como puede comprobarse cumple que $\sqrt{2} + \sqrt[3]{5} < 3$, e indica que 3 será el límite entero buscado, de suerte que se estimará sucesivamente $x = 0, 1, 2, 3$ de los cuales al sustituirlos en la ecuación obtenemos $-5, -6, -1, +16$ respectivamente; por lo que la raíz real de la ecuación propuesta estará entre los números 2 y 3, por lo tanto 2 será el valor entero más aproximado a esta raíz.[59]

Ahora siguiendo el método que se explicó en la **sección 18**, se hace la primera aproximación para $p = 2$, es decir, se hace $x = 2 + \frac{1}{y}$, la cual se sustituye en la ecuación (3.12), de donde resulta

[59] "Corollaire I. Donc, si les nombres p et q ne diffèrent l'un de l'autre que de l'unité ou d'une quantité moindre que l'unité, le plus petit de ces nombres, s'il est entier, ou le nombre entier qui sera immédiatement moindre que le plus petit de ces deux nombres, s'il n'est pas entier, sera la valeur entière la plus approchée d'une des racines de l'équation. Si la différence entre p et q est plus grande que l'unité, alors, nommant $n, n+1, n+2, \cdots$ les nombres entiers qui tombent entre p et q, il est clair que, si l'on substitue successivement, à la place de l'inconnue, les nombres on trouvera nécessairement deux substitutions consécutives que donneront des résultats de signes différents; donc puisque les nombres qui donneront ces deux résultats ne différents entre eux que de l'unité, on trouvera, comme ci-dessus, la valeur entière la plus approchée d'une des racines de l'équation. Anexo B, p. 29.

$$
\begin{aligned}
&x^3 - 2x - 5 = 0 \\
\rightarrow &\left(2 + \frac{1}{y}\right)^3 - 2\left(2 + \frac{1}{y}\right) - 5 = 0 \\
\rightarrow &8 + \frac{12}{y} + \frac{6}{y^2} + \frac{1}{y^3} - 9 - \frac{2}{y} = 0 \\
\rightarrow &y^3 - 10y^2 - 6y - 1 = 0
\end{aligned}
$$

Así por la **sección 19**, la ecuación $y^3 - 10y^2 - 6y - 1 = 0$ tendrá necesariamente una sola raíz más grande que la unidad, de suerte que para encontrar el valor aproximado, se tendrá que sustituir los números $1, 2, 3, \cdots$ hasta que se encuentren dos sustituciones consecutivas que den resultados de signo contrario.

Haciendo varios ensayos se llega a que para $y = 10$, $x = -61$ y para $y = 11$, $x = 54$, de lo cual se concluye que el valor aproximado para y es 10, por lo tanto se hace $q = 10$. Y se tiene que $y = q + \frac{1}{z} = 10 + \frac{1}{z}$, que sustituyéndola en $y^3 - 10y^2 - 6y - 1 = 0$, obtenemos la ecuación

$$61z^3 - 94z^2 - 20z - 1 = 0$$

esto es:

$$
\begin{aligned}
&y^3 - 10y^2 - 6y - 1 = 0 \\
\rightarrow &\left(10 + \frac{1}{z}\right)^3 - 10\left(10 + \frac{1}{z}\right)^2 - 6\left(10 + \frac{1}{z}\right) - 1 = 0 \\
\rightarrow &1000 + \frac{300}{z} + \frac{30}{z^2} + \frac{1}{z^3} - 1000 - \frac{200}{z} - \frac{10}{z^2} - 60 - \frac{6}{z} - 1 = 0 \\
\rightarrow &-61 + \frac{94}{z} + \frac{20}{z^2} + \frac{1}{z^3} = 0 \\
\rightarrow &61z^3 - 94z^2 - 20z - 1 = 0
\end{aligned}
$$

Luego, suponiendo sucesivamente $z = 1, 2, \cdots$ se obtienen los resultados $-54, +71, \cdots$ de donde puede observarse que como hay un cambio de signo, entonces se cogerá $r = 1$. Así haciendo la siguiente aproximación para $z = r + \frac{1}{u} = 1 + \frac{1}{u}$ se obtiene la nueva ecuación transformada,

$$54u^3 + 25u^2 - 89u - 61 = 0$$

esto es:

$$\begin{aligned}
&61z^3 - 94z^2 - 20z - 1 = 0\\
\rightarrow &54\left(1+\frac{1}{u}\right)^3 - 94\left(1+\frac{1}{u}\right)^2 - 20\left(1+\frac{1}{u}\right) - 1 = 0\\
\rightarrow &61 + \frac{183}{u} + \frac{183}{u^2} + \frac{61}{u^3} - 94 - \frac{188}{u} - \frac{94}{u^2} - 20 - \frac{20}{u} - 1 = 0\\
\rightarrow &-54 - \frac{25}{u} + \frac{89}{u^2} + \frac{61}{u^3} = 0\\
\rightarrow &54u^3 + 25u^2 - 89u - 61 = 0
\end{aligned}$$

Y continuando de esta manera se encontrarán los números:

$$2, 10, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 1, 12, \cdots$$

Por lo que la raíz buscada estará expresada por la fracción continua:

$$x = 2 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}}$$

También explica cómo obtener en fracciones ordinarias a las aproximaciones de la raíz[60] y el método para encontrar las otras dos raíces de la ecuación (3.12) ya que como se indicó, le corresponden dos raíces imaginarias[61], expresadas como habitualmente se conoce estas raíces tendrán la forma: $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ (**CP6**).

Con el cálculo de las tres raíces concluye el primer ejemplo, y a continuación expone un segundo ejemplo, en el cual la ecuación propuesta tiene todas sus raíces son reales, por lo que se visualiza mejor el método de fracciones continuas, ya que hay más aplicación de éste.

Ejemplo 2. Sea $x^3 - 7x + 7 = 0$ de quien se quiere encontrar las raíces.

[60] Ver **sección 23**

[61] Para más detalles ver Anexo B. p. 39.

Como en el ejemplo anterior hay que identificar si existen en esta ecuación raíces imaginarias. Utilizando las mismas fórmulas que en el ejemplo 1 y haciendo las operaciones correspondientes, se procede a encontrar la ecuación en ν.

Así para $x^3 - 7x + 7 = 0$, se tiene que $m = 3$, y en consecuencia $n = 3$. Luego se encuentra que,

$$A = 0, ;\ B = -7, ;\ C = -7$$

y de aquí,

$$A_1 = 0, ;\ A_2 = 14, ;\ A_3 = -21, ;\ A_4 = 98, ;\ A_5 = -245, ;\ A_6 = 833$$

y de estos

$$a_1 = 42, ;\ a_2 = 882, ;\ a_3 = 18669$$

por último

$$a = 42, ;\ b = 441, ;\ c = 49$$

de suerte que la ecuación en ν será:

$$\nu^3 - 42\nu^2 + 441\nu - 49 = 0 \tag{3.13}$$

Como los signos de esta ecuación son alternadamente positivos y negativos, significa que sus raíces serán reales[62] y como también esta ecuación no es divisible por ν, se sigue que la ecuación en x no tendrá raíces iguales.[63]

Para encontrar el límite[64] de enteros a sustituir, y encontrar el cambio de signo de la ecuación, hágase $\nu = \frac{1}{y}$ y se sustituye precisamente en (3.13) de donde,

[62] Anexo B, p. 38.

[63] "Nous n'avons considéré, que les racines réelles et inégales de l'équation $x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} + \cdots$; supposons maintenant que cette équation ait des racines égales. Dans ce cas, il faudra que l'équation $\nu^n - a\nu^{n-1} + b\nu^{n-2} - c\nu^{n-3} + \cdots = 0$ soit divisible autant de fois par ν qu'il y au de combinaisons de racines égales deux à deux; par conséquent, il faudra qu'il y ait dans cette équation $\nu^n - a\nu^{n-1} + b\nu^{n-2} - c\nu^{n-3} + \cdots = 0$ autant des derniers termes qui manquent; ainsi on connaîtra par ce moyen combien de racines égales il y aura dans la proposée$\cdots$ Anexo B, p. 37.

[64] Para más detalles ver Anexo B, p. 30.

$$
\begin{aligned}
&\nu^3 - 42\nu^2 + 441\nu - 49 = 0 \\
\rightarrow &\left(\frac{1}{y}\right)^3 - 42\left(\frac{1}{y}\right)^2 + 441\left(\frac{1}{y}\right) - 49 = 0 \\
\rightarrow &1 - 42y + 441y^2 - 49y^3 = 0 \\
\rightarrow &y^3 - 9y^2 + \frac{42}{49}y - \frac{1}{49} = 0
\end{aligned}
$$

El más grande coeficiente negativo[65] es 9, por lo tanto puede tomarse $l = 10$, sin embargo, se puede encontrar un límite más aproximado en la búsqueda del más pequeño número entero. Así para buscar el límite l de la ecuación $y^3 - 9y^2 + \frac{42}{49}y - \frac{1}{49} = 0$, se sustituye $y + l$ en el lugar de y, de lo cual,

$$
\begin{aligned}
&y^3 - 9y^2 + \frac{42}{49}y - \frac{1}{49} = 0 \\
\rightarrow &(y+l)^3 - 9(y+l)^2 + \frac{42}{49}(y+l) - \frac{1}{49} = 0 \\
\rightarrow &y^3 + 3y^2l + 3yl^2 + l^3 - 9y^2 - 18yl - 9l^2 + \frac{42}{49}y + \frac{42}{49}l - \frac{1}{49} = 0
\end{aligned}
$$

de esta última obtendremos 3 ecuaciones en l, ordenando en términos de y, llamémosles,

$$
\begin{aligned}
&P = l^3 - 9l^2 + \frac{42}{49}l - \frac{1}{49} \\
&Q = 3l^2 - 18l + \frac{42}{49} \\
&R = 3l - 9
\end{aligned}
$$

Puede comprobarse que $l = 9$ satisface la condición de que las 3 ecuaciones anteriores sean positivas. Ahora teniendo este valor se procede a encontrar el tamaño Δ de los intervalos en los cuales se buscará el cambio de signo.[66]

[65] "··· Si l'on voulait éviter tout tâtonnement, il n'y aurait qu'à prendre pour le plus grand coefficient des termes négatifs de l'équation augmenté d'une unité···" (Anexo B, p. 31.)

[66] "En général, soit k le nombre entier qui est égal ou immédiatement plus grand que $\sqrt{l}$, et l'on pourra toujours prendre $\Delta = \frac{1}{k}$" (Anexo B, p. 30.)

Sea $k \geq \sqrt{9}$, para fijar ideas sea $k = 3$ y por la fórmula $\Delta = \frac{1}{k}$ entonces $\Delta = \frac{1}{3}$.

En consecuencia hay que sustituir en la ecuación[67] propuesta $x^3 - 7x + 7 = 0$, $\frac{x}{3}$ en el lugar de x, esto es,

$$
\begin{aligned}
&x^3 - 7x + 7 = 0 \\
\rightarrow &\frac{x^3}{27} - \frac{7x}{3} + 7 = 0 \\
\rightarrow &x^3 - 63x + 189 = 0
\end{aligned}
$$

Para encontrar en que intervalos hay cambio de signo se sustituyen consecutivamente $1, 2, 3, \cdots$ de suerte que para $4, 5, 6$ hay dos cambios de signo:

$$
\begin{aligned}
x = 4 \rightarrow \qquad & x^3 - 63x + 189 = 64 - 252 + 189 = 1 > 0 \\
x = 5 \rightarrow \qquad & x^3 - 63x + 189 = 125 - 315 + 189 = -1 < 0 \\
x = 6 \rightarrow \qquad & x^3 - 63x + 189 = 216 - 378 + 189 = 27 > 0
\end{aligned}
$$

Por lo tanto las raíces se encuentran entre $\frac{4}{3}$ y $\frac{5}{3}$; $\frac{5}{3}$ y $\frac{6}{3}$.

De lo cual se concluye que la primera aproximación entera para 2 raíces será 1.

Por otra parte para encontrar las raíces negativas[68] la ecuación propuesta se cambiará por: $x^3 - 7x - 7 = 0$. Igual que anteriormente, hay que sustituir consecutivamente los números $1, 2, 3, \cdots$ de suerte que para la ecuación arroja -1, y para $x = 4$ arroja 29. De aquí que 3 será el valor entero más aproximado a x en la ecuación precedente y por consecuencia de $-x$ en la ecuación original a resolver.

Ya encontrada la primera aproximación tanto para las dos raíces positivas como para la negativa, se procede a calcular las siguientes aproximaciones por el método expuesto en la **sección 18**.

Consideramos primero las raíces positivas, haciendo $x = 1 + \frac{1}{y}$ ya que ambas tienen a 1 como primera aproximación, en la ecuación $x^3 - 7x + 7 = 0$

[67] Para detalles ver el Scolie II del Anexo B. p. 32.

[68] Anexo B, p. 21.

$$
\begin{aligned}
&x^3 - 7x + 7 = 0\\
\rightarrow &\left(1 + \frac{1}{y}\right)^3 - 7\left(1 + \frac{1}{y}\right) + 7 = 0\\
\rightarrow &\frac{1}{y^3} + \frac{3}{y^2} - \frac{4}{y} + 1 = 0\\
\rightarrow &1 + 3y - 4y^2 + y^3 = 0
\end{aligned}
$$

la cual tendrá necesariamente 2 raíces más grandes que la unidad por la **sección** 19 apartado 2. Y como el término $-4y^2$ es negativo se hará la sustitución de enteros hasta que $y^3 \geq 4y^2$, esto sucede justo hasta que $y = 4$. Entonces haciendo $y = 0, 1, 2, 3, 4$, arroja los valores $1, 1, -1, 1, 13$, de lo cual se concluye que las raíces buscadas estarán entre los números 1 y 2, 2 y 3, de suerte que los valores aproximados de y serán 1 y 2.

Continuemos primero en la búsqueda de la raíz, la cual tiene por segunda aproximación 1. Así, haciendo $y = 1 + \frac{1}{z}$ en $1 + 3y - 4y^2 + y^3 = 0$, obtenemos:

$$
\begin{aligned}
&1 + 3y - 4y^2 + y^3 = 0\\
\rightarrow &\left(1 + \frac{1}{z}\right)^3 - 4\left(1 + \frac{1}{z}\right)^2 + 3\left(1 + \frac{1}{z}\right) + 1 = 0\\
\rightarrow &1 + \frac{3}{z} + \frac{3}{z^2} + \frac{1}{z^3} - 4 - \frac{8}{z} - \frac{4}{z^2} + 3 + \frac{3}{z} + 1 = 0\\
\rightarrow &z^3 - 2z^2 - z + 1 = 0
\end{aligned}
$$

Esta última ecuación en z por la misma razón que para la raíz y, no tendrá mas que una raíz real más grande que la unidad, se supondrá entonces consecutivamente $z = 1, 2, \cdots$, hasta que se encuentren dos sustituciones consecutivas que den signos contrarios. Así la siguiente aproximación es para $z = 2$, ya que $z = 2$ arroja -1 y $z = 3$ arroja $+7$. Se hace ahora $z = 2 + \frac{1}{u}$ en $z^3 - 2z^2 - z + 1 = 0$, es decir,

$$\begin{aligned}
& z^3 - 2z^2 - z + 1 = 0 \\
\rightarrow & \left(2 + \frac{1}{u}\right)^3 - 2\left(2 + \frac{1}{u}\right)^2 - \left(2 + \frac{1}{u}\right) + 1 = 0 \\
\rightarrow & 8 + \frac{12}{u} + \frac{6}{u^2} + \frac{1}{u^3} - 8 - \frac{8}{u} - \frac{2}{u^2} - 2 - \frac{1}{u} + 1 = 0 \\
\rightarrow & -1 + \frac{3}{u} + \frac{4}{u^2} + \frac{1}{u^3} = 0 \\
\rightarrow & u^3 - 3u^2 - 4u - 1 = 0
\end{aligned}$$

De la misma manera se encontrará, que el valor entero aproximado para u será 4. Entonces se hará $u = 4 + \frac{1}{w}$, y así sucesivamente.

Ahora continuemos en la búsqueda de la segunda aproximación entera de la segunda raíz que también tiene por primera aproximación 1. Hágase entonces $y = 2 + \frac{1}{z}$ y sustitúyase en la ecuación $1 + 3y - 4y^2 + y^3 = 0$,

$$\begin{aligned}
& 1 + 3y - 4y^2 + y^3 = 0 \\
\rightarrow & \left(2 + \frac{1}{z}\right)^3 - 4\left(2 + \frac{1}{z}\right)^2 + 3\left(2 + \frac{1}{z}\right) + 1 = 0 \\
\rightarrow & 8 + \frac{12}{z} + \frac{6}{z^2} + \frac{1}{z^3} - 16 - \frac{16}{z} - \frac{4}{z^2} + 6 + \frac{3}{z} + 1 = 0 \\
\rightarrow & z^3 + z^2 - 2z - 1 = 0
\end{aligned}$$

La siguiente aproximación se deduce de esta última ecuación, que tendrá una sola raíz real más grande que la unidad, de suerte que se hará $z = 1, 2, 3, \cdots$ y que al sustituir $z = 1$, arroja -1 y $z = 2$ arroja 7. De lo que se puede concluir que 1 es el valor entero aproximado de z.

Hágase entonces $z = 1 + \frac{1}{u}$, que sustituyendo en la ecuación precedente se tendrá:

$$\begin{aligned}
& z^3 + z^2 - 2z - 1 = 0 \\
\rightarrow & \left(1 + \frac{1}{u}\right)^3 + \left(1 + \frac{1}{u}\right)^2 - 2\left(1 + \frac{1}{u}\right) - 1 = 0 \\
\rightarrow & 1 + \frac{3}{u} + \frac{3}{u^2} + \frac{1}{u^3} + 1 + \frac{2}{u} + \frac{1}{u^2} - 2 - \frac{2}{u} - 1 = 0 \\
\rightarrow & u^3 - 3u^2 - 4u - 1 = 0
\end{aligned}$$

y se encontrará de la misma manera, que el valor entero aproximado de u será 4.

Entonces sea $u = 4 + \frac{1}{w}$, y así sucesivamente.

Por lo tanto las dos raíces de la ecuación propuesta $x^3 - 7x + 7 = 0$ serán,

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cdots}}}$$

$$x = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cdots}}}$$

Y como puede observarse, se tendrá dos fracciones convergentes.

Para encontrar ahora el valor aproximado de la raíz negativa, se recurrió a la ecuación $x^3 - 7x - 7$, que como ha de recordarse, se realizaron las operaciones para encontrar la primera aproximación entera a x, y resultó ser 3. Sea entonces $x = 3 + \frac{1}{y}$, que sustituyendo en la ecuación arroja,

$$\begin{aligned}
&x^3 - 7x - 7 = 0\\
\rightarrow &\left(3 + \frac{1}{y}\right)^3 - 7\left(3 + \frac{1}{y}\right) - 7 = 0\\
\rightarrow &27 + \frac{27}{y} + \frac{9}{y^2} + \frac{1}{y^3} - 21 - \frac{7}{y} - 7 = 0\\
\rightarrow &y^3 - 20y^2 - 9y - 1 = 0
\end{aligned}$$

Esta última ecuación no puede más que tener una raíz real más grande que la unidad (sección 19 - apartado 2), por lo que se sustituye $y = 1, 2, 3, \cdots$ hasta encontrar dos números consecutivos que den signos contrarios, resulta de aquí que $y = 20$ y $y = 21$ cumplen tal condición, por lo que 20 será la aproximación entera para y.

Se hace entonces $y = 20 + \frac{1}{u}$ y se sustituye en lugar de y, de donde se obtiene,

$$
\begin{aligned}
&y^3 - 20y^2 - 9y - 1 = 0\\
\rightarrow &\left(20 + \frac{1}{u}\right)^3 - 20\left(20 + \frac{1}{u}\right)^2 - 9\left(20 + \frac{1}{u}\right) - 1 = 0\\
\rightarrow &8000 + \frac{1200}{u} + \frac{60}{u^2} + \frac{1}{u^3} - 8000 - \frac{800}{u} - \frac{20}{u^2} - 180 - \frac{9}{u} - 1 = 0\\
\rightarrow &u^3 - \frac{391}{181}u^2 - \frac{40}{181}u - \frac{1}{181} = 0
\end{aligned}
$$

Y así sucesivamente se siguen encontrando aproximaciones enteras. De esta manera, la raíz negativa de la ecuación propuesta será:

$$x = -3 - \cfrac{1}{20 + \cfrac{1}{3 + \cdots}}$$

Así concluye el ejemplo 2, encontrando las 3 raíces de la ecuación $x^3 - 7x - 7$.

Al respecto de otros capítulos, en el V por ejemplo, se muestran algunas observaciones sobre las raíces imaginarias(cómo reconocerlas en una ecuación, algunas reglas para determinar en ciertos casos el número de raíces imaginarias en las ecuaciones, sobre la generalización de la teoría precedente a ecuaciones de segundo, tercero y cuarto grado y finalmente sobre cómo encontrar las raíces imaginarias de una ecuación); y en el capítulo VI, que en general como su nombre lo indica, trata sobre la manera de aproximar el valor numérico de las raíces de ecuaciones por fracciones continuas, que aunque se mostró la teoría en los capítulos I, II y III, en esta sección generaliza algunas propiedades particulares, como por ejemplo, cuando se tienen fracciones continuas periódicas, sobre una manera muy simple de reducir en fracciones continuas las raíces de ecuaciones de segundo grado, sobre la generalización de la teoría de fracciones continuas, y finalmente sobre algunas maneras para simplificar cálculos de raíces por fracciones continuas. (**CP6**)

En lo que sigue nos concentraremos en la **nota** V, en donde hay algunas indicaciones al respecto del método de aproximación dado por Newton, e intentaremos reflejar cuáles son las ideologías de Lagrange sobre dicho método y el suyo propio.

De forma similar a lo anteriormente escrito, iremos interpretando dicha nota, la cual en el índice de materias está catalogada como referente a la teoría de ecuaciones algebraicas.

3.2.3. NOTA V. Sobre el método de aproximación dado por Newton.

La nota V está dividida en 8 apartados, cuyo objetivo es mostrar la preocupación de Lagrange por reflejar el grado de exactitud a que es susceptible el método de Newton (**CP5**), como él mismo dice:

> "Comme la méthode de Newton pour la résolution approchée des équations numériques est la plus connue et la plus usitée, à cause de sa simplicité, il est important d'apprécier le degré d'exactitude dont elle est susceptible; voici comment on peut y parvenir"

Así que inicia considerando una ecuación general de grado m

$$x^m - Axm - 1 + Bxm - 2 - \cdots = 0 \tag{3.14}$$

de la cual se busca la raíz.

Este método demanda conocer un valor aproximado a la raíz buscada, desígnese este valor por a, o sea $x = a + p$, y se tendrá al sustituir en (3.14), de donde obtenemos una ecuación en términos de p, que al comenzar por los últimos términos será de la forma,

$$X + Yp + Zp^2 + Vp^3 + \cdots + p^m,$$

donde las cantidades $X, Y, Z, \cdots$ serán funciones de a.[69] Esto es,

$$\begin{aligned} &x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - \cdots = 0 \\ \rightarrow &(a+p)^m - A(a+p)^{m-1} + B(a+p)^{m-2} - C(a+p)^{m-3} + \cdots = 0 \end{aligned}$$

desarrollando obtenemos:

[69] Anexo B, p.24.

$$
\begin{aligned}
&a^m + ma^{m-1}p + \frac{m(m-1)}{2!}a^{m-2}p^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}a^{m-3}p^3 + \cdots + map^{m-1} + p^m\\
&- A\left[a^{m-1} + (m-1)a^{m-2}p + \frac{(m-1)(m-2)}{2!}a^{m-3}p^2 + \cdots + (m-1)ap^{m-2} + p^{m-1}\right]\\
&+ B\left[a^{m-2} + (m-2)a^{m-3}p + \frac{(m-2)(m-3)}{2!}a^{m-4}p^2 + \cdots + (m-2)ap^{m-3} + p^{m-2}\right]\\
&- C\left[a^{m-3} + (m-3)a^{m-4}p + \frac{(m-3)(m-4)}{2!}a^{m-5}p^2 + \cdots + (m-3)ap^{m-4} + p^{m-3}\right] + \cdots
\end{aligned}
$$

Agrupando en términos de p:

$$
\begin{aligned}
&a^m - Aa^{m-1} + Ba^{m-2} - Ca^{m-3} + \cdots\\
&+ ma^{m-1}p - A(m-1)a^{m-2}p + B(m-2)a^{m-3}p - C(m-3)a^{m-4}p\\
&+ \frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}p^2 - \frac{A(m-1)(m-2)}{a}a^{m-3}p^2 +\\
&\frac{B(m-2)(m-3)}{2}a^{m-4}p^2 - \frac{C(m-3)(m-4)}{2}a^{m-5}p^2 + \cdots
\end{aligned}
$$

de donde se hace,

$$
\begin{aligned}
X &= a^m - Aa^{m-1} + Ba^{m-2} - Ca^{m-3} + \cdots,\\
Y &= ma^{m-1} - (m-1)Aa^{m-2} + (m-2)Ba^{m-3} - (m-3)Ca^{m-4} + \cdots,\\
Z &= \frac{m(m-1)}{2}a^{m-2} - \frac{(m-1)(m-2)}{2}Aa^{m-3} + \frac{(m-2)(m-3)}{2}Ba^{m-4} - \cdots,
\end{aligned}
$$

Ahora bien, por la hipótesis p debe ser una cantidad bastante pequeña, siendo ésta la diferencia entre la verdadera raíz y el valor supuesto de esta raíz, las potencias $p^2, p^3, \cdots$ serán despreciadas y por consecuencia los términos afectados serán $X + Yp$, ya que los coeficientes $Z, V, \cdots$ no podrán ser demasiado grandes, de tal forma que se reduce toda la ecuación a esos dos términos, de lo cual se tendrá el valor aproximado p, esto es, $p = -\frac{X}{Y}$. Llamando b a este valor aproximado de p, se podrá hacer el mismo razonamiento en la ecuación transformada de p, haciendo la sustitución $b + q$ en el lugar de p, y despreciando en la ecuación transformada en q los términos que contendrán el cuadrado y las potencias más altas de q, esta transformada será reducida a sus dos primeros términos, que de manera análoga tendrá la forma $(X)+(Y)q$, de donde se obtiene $q=-\frac{(X)}{(Y)}$. Esta cantidad será llamada c, y se sustituirá $c+r$ en el lugar de q en la última ecuación transformada, de donde se encontrará una nueva ecuación en r, de la que se encontrará su valor y así sucesivamente.(**PA**)

Como se puede observar, esta es la descripción del procedimiento de las aproximaciones sucesivas que se mostró en la sección relativa a Newton.

Lagrange considera que se puede eximir el hacer continuamente nuevas transformadas, porque, ya que la transformada en p es el resultado de la sustitución de $a+p$ en el lugar de x en la ecuación en x, y que la transformada en q es el resultado de la sustitución $b+q$ en el lugar de p en la transformada en p, se sigue entonces que la transformada en q será el resultado de la sustitución inmediata de $a+b+q$ en el lugar de x de la misma ecuación en x, por consecuencia esto no será mas que otra cosa que la primera transformada en p, cambiando p en q y a en $a+b$, de donde se encuentra una expresión general de p, y también la de q sustituyendo $a+b$ en el lugar de a, y por la misma razón se obtendrá el valor de r sustituyendo $a+b+c$ en el lugar de a, y así sucesivamente.

Así, en general, si en la expresión de p en a, uno sustituye por a, un término cualquiera de la sucesión convergente hacia la raíz buscada, se tendrá la cantidad necesaria para obtener el término siguiente.

Lagrange menciona lo siguiente al respecto de la consideración hecha:

> "La méthode qui résulte de cette considération est, comme l'on voit, plus simple que celle de Newton; c'est celle que Raphson a donnée dans l'Ouvrage intitulé *Analysis aequationum universalis*, imprimé à Londres en 1690 et réimprimé en 1697. Comme la méthode de Newton avait déjà paru dans l'édition anglaise de *l'Algèbre* de Wallis en 1685, et qu'elle a été ensuite expliquée en détail dans l'édition latine de 1793, on peut être surpris que Raphson n'en ait pas fait mention dans son Ouvrage, ce qui porterait à croire qu'il la regardait comme entièrement différente de la sienne; c'est pourquoi j'ai cru qu'il n'était pas inutile de faire remarquer que ces deuz méthodes ne sont au fond que la même présentée différemment."

Es decir, que aunque el método ya había aparecido antes de la publicación de Raphson, éste no hizo mención en su obra debido a que lo consideró completamente diferente del método presentado por Newton. Kollerstrom (1992), hace referencia a que este método tuvo polémica en cuanto a su derecho de autor, puesto que en el contexto en el que se forjó, fueron varios los que trabajaron con el método de diversas formas y se pensó que no era lo mismo.

Lagrange observa que la amabilidad del método depende de la condición de que si a es un valor aproximado a una de las raíces de la ecuación propuesta, $a + p$ será un valor más aproximado a la misma raíz (**PA**). Por lo tanto se dispone a examinar precisamente esta condición.

Es decir, lo que quiere es encontrar las m raíces $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ de la ecuación

$$x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - \cdots = 0 \tag{3.15}$$

pero propone que (3.15) sea escrita de la forma [70]:

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) = 0 \tag{3.16}$$

De la cual examina la elección del valor p, para que en efecto la aproximación $a + p$ sea una mejor aproximación de la raíz buscada α, en términos de la ecuación (3.16), y para ello lo que hace primero es la sustitución $a + p$ en el lugar de x en la ecuación (3.16) y desarrolla los términos en potencias de p para encontrar el término $X + Yp$ y en consecuencia definir quién es p.

Posteriormente expresa una de las condiciones de convergencia del método (**CP6**), esto es,

> "Pour que les valeurs corriges successivement approchent toutes de plus en plus de la vraie valeur de la racine, il faudra prendre pour première valeur approchée une quantité plus grande que la plus grande des racines si c'est celle-ci qu'on cherche, ou plus petite que la plus petite racine si l'on cherche la plus petite; alors toutes les valeurs corrigées successivement seront aussi plus grandes que la plus grande ou plus petites que la plus petite des racines, et la condition nécessaire pour la convergence aura constamment lieu pour toutes ces valeurs, puisque R y $\alpha - a$ seront toujours de même signe, en prenant pour chacune de ces mêmes valeurs"

[70] Théorème II. *Si, dans une équation quelconque qui a une ou plusieurs racines réelles et inégales, on substitue successivement à la place de l'inconnue deux nombres, dont l'un soit plus grand et dont l'autre soit plus petit que l'une de ces racines, et qui diffèrent en même temps l'un de l'autre d'une quantité moindre que la différence entre cette racine et chacune des autres racines réelles de l'équation, ces deux substitutions donneront nécessairement deux résultats de signes contraires.*

Su justificación radica en que cuando todas las raíces de la ecuación son reales, es fácil reconocer si el primer valor aproximado a es más grande o más pequeño que cada una de las raíces, porque, si sustituimos $a+p$ por x, en la ecuación (3.16), obtendremos,

$$(p+a-\alpha)(p+a-\beta)(p+a-\gamma)K=0$$

donde $a-\alpha, a-\beta, a-\gamma, \ldots$ serán, en el primer caso, cantidades positivas, y, en el segundo, todas negativas; así, en el primer caso, se tendrá una transformada en p con todos los términos positivos, y en el segundo caso, esta transformada tendrá sus términos alternadamente positivos y negativos.

De tal forma que si los términos de la transformada en p son todos positivos, es evidente que no habrá algún valor positivo de que satisfaga a la ecuación, por consecuencia, los valores reales de p serán necesariamente negativos, así las raíces de la ecuación en p serán $\alpha-a, \beta-a, \gamma-a, \ldots$ por lo tanto estas cantidades serán todas negativas o imaginarias, y será necesariamente más grande que cada una de las raíces reales de la ecuación, lo mismo se tendrá para las raíces imaginarias.

De la misma manera prueba que, si los términos de la transformada en p son alternadamente positivos y negativos, la cantidad a será necesariamente más pequeña que cada una de las raíces reales.

Finalmente, Lagrange procede con base en su fundamentación examinar la ecuación en la que Newton aplicó su método (y que se ha resuelto ya en este documento tanto por el método de Newton como por el método de las fracciones continuas) de la siguiente manera:

Newton aplicó su método a la ecuación

$$x^3-2x-5=0$$

Como se dijo, se requiere una primera aproximación a la raíz, supóngase la primera aproximación $a=2$ y sustitúyase $2+p$ en el lugar de x en la ecuación precedente, esto es,

$$\begin{aligned} x^3-2x-5&=0\\ (2+p)^3-2(2+p)-5&=0\\ 8+12p+6p^2+p^3-4-2p+5&=0\\ p^3+6p^2+10p-1&=0 \end{aligned}$$

por lo tanto hemos obtenido la ecuación transformada en p,

$$p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$$

la cual siguiendo el método expuesto en la primera sección de esta nota se considera sólo la parte $10p - 1 = 0$, que arroja un valor para p de $\frac{1}{10}$, esto es, $p = \frac{1}{10} = 0{,}1$, por lo que se hace la segunda aproximación, es decir, $p = 0{,}1 + q$, que sustituida en la ecuación en p, obtenemos:

$$\begin{aligned} p^3 + 6p^2 + 10p - 1 &= 0 \\ (0{,}1 + q)^3 + 6(0{,}1 + q)^2 + 10(0{,}1 + q) - 1 &= 0 \\ q^3 + 6{,}3q^2 + 11{,}23q + 0{,}061 &= 0 \end{aligned}$$

y por la misma razón anterior sólo se considera $11{,}23q + 0{,}061 = 0$, que arroja $q = -\frac{0{,}061}{11{,}23} = -0{,}0054K$ y se continua haciendo $q = -0{,}0054 + r$ que al sustituir en la ecuación $q^3 + 6{,}3q^2 + 11{,}23q + 0{,}061 = 0$, resulta la nueva ecuación transformada,

$$r^3 + 6{,}3r^2 + 11{,}16196r + 0{,}000541708 = 0$$

de donde se deduce $r = -\frac{0{,}000541708}{11{,}16196} = -0{,}00004853K$ Y así sucesivamente.

De donde se concluye que los valores convergentes de x serán,

$$2,\ 2{,}1,\ 2{,}0946,\ 2{,}09455147, \ldots$$

En este caso la serie es, como puede verse, convergente(**PN, CP6**). Se puede, en efecto, asegurar a priori, por lo que se ha demostrado en las secciones anteriores, que ésto debe ser así. Y utiliza su método para verificar que en efecto la primera aproximación, 2,1 está más cerca de la raíz verdadera y que las demás aproximaciones serán más exactas, lo que refleja una prueba de prueba de convergencia para la serie que resulta al buscar una raíz de alguna ecuación.

En nuestra opinión es realmente interesante la construcción y tratamiento del método expuesto por Lagrange, pues lo que refleja es la susceptibilidad a un planteamiento puramente algebraico sobre lo geométrico a diferencia del primer periodo estudiado, y además con eso inicia una etapa en la que el pensamiento matemático es dominado desde esta perspectiva, la fundamentación algebraica.

Además cabe mencionar que el tratamiento Lagrangiano para la resolución de ecuaciones trajo consigo descubrimientos en la rama compleja de la matemática pues no sólo da solución real sino plantea la solución de ecuaciones con raíces imaginarias y además el método seguramente trajo consigo innovaciones para la separación de raíces como por ejemplo el método de Fourier-Budan, el cual toma como base las fracciones continuas.

3.3. *The theory of equations*

3.3.1. Los autores

William Snow Burnside nació el 2 de Julio de 1852 en Paddington, Inglaterra. Fue de ascendencia Escocesa. A los seis años fue huérfano y fue educado en *Christ's Hospital*, donde obtuvo sobresaliente tanto gramática como en matemáticas. (**CP1, CP3**)

Posteriormente en octubre de 1871 Burnside ingresó becado a *St. John's College*, Cambridge. En 1873, se desplazó a *Pembroke College* y se graduó en 1875 como segundo wrangler[71]. Fue considerado por tener un estilo matemático muy elegante. Entre sus profesores en Cambridge estaban Stokes (1819-1903), Adams (1819-1892) y Maxwell (1831-1879) en matemáticas aplicadas y Cayley (1821-1895) en matemáticas puras. (**CP3**)

Su primer documento fue publicado en 1883, y en el consideraba funciones elípticas. Posteriormente en 1885, fue designado profesor de matemáticas en la Universidad Naval Real de Greenwich. Se dedicó por tanto a investigar mucho más sobre la hidrodinámica, pero varios de sus trabajos en esta dirección implicaron el uso de variable compleja y en sus documentos de 1891 y 1892 consideró el grupo de transformaciones fraccionarias lineales de una variable compleja. Así que su trabajo se torno hacia el estudio de grupos y a partir de 1894 se ocupó casi por completo al estudio de la Teoría de Grupos. (**CP3**)

Burnside fue elegido Fellow de la Royal Society en 1893 por sus trabajos sobre hidrodinámica y por la Teoría de Funciones Complejas. En el mismo año publicó su primer documento sobre grupos simples finitos. Su trabajo sobre Teoría de Grupos progresó rápidamente y en 1897 publicó la Teoría de Grupos de Orden Finito. Durante su vida publicó alrededor de 150 documentos de los cuales 50 fueron sobre Teoría de Grupos, de hecho en sus últimos años de vida estudió sobre Teoría de la Probabilidad y su primer documento sobre el tema apareció en 1918. (**CP3**)

Murió el 21 de Agosto de 1927 en Cotleigh, England.

Al respecto de Arthur William Panton únicamente se ha encontrado que

[71] Un *Wrangler* era el nombre dado a los graduados en primer grado en Matemáticas en la Universidad de Cambridge. El Senior Wrangler era la persona más sobresaliente a quien seguía el Segundo Wrangler. Este método de clasificación permaneció hasta 1909, cuando las listas empezaron a ser publicadas en orden alfabético.

fue profesor de matemáticas y que tuvo nombramientos de Fellow y Tutor en el Trinity College de Dublín. (**CP1,CP3**)

3.3.2. *The theory of equations*

Autor	Willian Snow Burnside Arthur Willian Panton
Fecha de nacimiento y fallecimiento del autor	1852/1927.
Título	*The theory of equations: with an introduction to the theory of binary algebraic forms.*
Año, editorial y lugar de la primera edición	1881, Dublin University Press Series, Londres
Año, editorial y lugar de la edición consultada	1918, Dublin University Press Series, Londres
Localización del manual utilizado	Biblioteca General de la Universidad de Salamanca.

Cuadro 3.11: Ficha de referencia de la obra. *The theory of equations*

Los siguientes extractos han sido tomados de la publicación en 1918 que corresponde a la 8^a edición. William Snow Burnside fue Senior Fellow del Trinity College de Dublín y profesor de matemáticas en la Universidad de Dublín, y Arthur William Panton fue Fellow y Tutor en el Trinity College de Dublín y profesor de matemáticas. El objetivo de su obra es mostrar una combinación de los "modernos" desarrollos en Álgebra Superior con los temas hasta el momento incluidos en trabajos sobre la Teoría de Ecuaciones (**CP5**). El libro está dividido en dos volúmenes, el primero de ellos (que es el que nos atañe), está dividido en 11 capítulos y contiene todas las proposiciones ordinariamente encontradas en tratados elementales sobre la asignatura. Se menciona que no se ha recurrido a una notación más moderna pero que el contenido aparece con la mayor simplicidad y para que pueda comprenderse claramente. (**CP4**)

En esencia nos concentraremos en el capítulo XI, que es el que refiere a la solución de ecuaciones numéricas, en dicho capítulo se muestran varios métodos que se pueden emplear para tal fin.

El contenido del libro se esquematiza como sigue(**CP4**):

- CHAPTER I. General properties of polynomials.
- CHAPTER II. General properties of equations.
- CHAPTER III. Relations between the roots and coefficients of equations, with applications to symmetric functions of the roots.
- CHAPTER IV. Transformation of equations.
- CHAPTER V. Solution of reciprocal and binomial equations.
- CHAPTER VI. Algebraic solution of the cubic and biquadratic.
- CHAPTER VII. Properties of the derived functions.
- CHAPTER VIII. Symmetric functions of the roots.
- CHAPTER IX. Limits of the roots of equations.
- CHAPTER X. Separation of the roots of equations.
- CHAPTER XI. Solution of numerical equations.

- Section. 101. Algebraical and numerical equations.
- Section. 102. Theorem relating to commensurable roots.
- Section. 103. Newton's method of divisors.
- Section. 104. Application of the method of divisors.
- Section. 105. Method of limiting the number of trial-divisors.
- Section. 106. Determination of multiple roots.
- Section. 107. Newton's method of approximation.
- Section. 108. Horner's method of solving numerical equations.
- Section. 109. Principle of the trial-divisor in Horner's method.
- Section. 110. Contraction of Horner's method.

- Section. 111. Application of Horner's method to cases where roots are nearly equal.
- Section. 112. Lagrange's method of approximation.
- Section. 113. Numerical solution of the biquadratic by Descartes' method.
- Miscellaneous examples.
- CHAPTER XII. Complex numbers and the complex variable.
- NOTES.

A. Algebraic solution of equations.

B. Solution of numerical equations.

C. The proposition that every equation has a root.

Como puede verse en el capítulo XI se muestra el método de Newton y el de Lagrange para la resolución de ecuaciones numéricas, métodos que hemos plasmado en las secciones anteriores de este trabajo. Asimismo hay un método más, el de Horner (1786-1837) (**CP6**). Veamos ahora cómo se representaban dichos métodos en este periodo (finales del S. XIX).

En primer lugar los autores hacen la distinción entre las soluciones de las ecuaciones algebraicas y ecuaciones numéricas, señalan que cuando son ecuaciones algebraicas la solución viene dada por una fórmula general de un carácter puramente simbólico, el cual siendo una expresión general para una raíz debería representar todas las raíces indiferentemente (**PA**); en el caso de ecuaciones numéricas, las raíces son determinadas separadamente por el método de Newton y el método de Lagrange, para lo cual antes de intentar hallar la aproximación para cualquier raíz individual, es en general necesario que se conozca un intervalo conocido el cual contenga sólo una raíz real (**PN**). Las raíces reales de ecuaciones numéricas pueden ser conmensurables (en la cuales se incluyen los enteros, fracciones y decimales finitos o repetitivos, los cuales son reducibles a fracciones) o inconmensurables (decimales interminables) Las raíces conmensurables pueden ser encontradas exactamente y las inconmensurables pueden ser aproximadas con cualquier grado de precisión por los tres métodos antes mencionados (**PN**).

En consecuencia inicialmente mencionan un teorema que reduce la determinación de raíces conmensurables a únicamente enteros.

> **Theorem.** *An equation in which the coefficient of the first term is unity, and the coefficients of the other terms whole numbers, cannot have a commensurable root which is not a whole number.*

Lo que nos dice que las raíces reales de la ecuación, por lo tanto, son siempre cantidades enteras o inconmensurables. Sin embargo toda ecuación cuyos coeficientes son números finitos, fraccionales o no, puede ser reducida a una ecuación cuyo primer coeficiente sea la unidad y los otros todos números, por lo que teniendo esta transformación, la determinación de raíces conmensurables en general puede ser reducida a la de raíces enteras.

Con el proceso de Newton, denominado *método de los divisores*[72](**PN**), se puede obtener las raíces enteras de una ecuación cuyos coeficientes son todos enteros. Este método también determina raíces múltiples cuando ellas son conmensurables. Para nuestros fines, nos centraremos en el caso en que las raíces ya no son conmensurables, así que directamente pasaremos a mostrar las secciones en las que se discuten estos casos.

3.3.3. Método de aproximación de Newton

Los autores inician este apartado explicitando el tipo de funciones a las que se aplica el método de Newton y comparando su confiabilidad con el método de Horner, dicendo que el método de aproximación a raíces de ecuaciones, comúnmente atribuido a Newton, es aplicado tanto a ecuaciones que involucran funciones trascendentales como a aquellas que involucran solamente funciones algebraicas. Cuando se aplica el método de Newton a esta última clase de funciones es, para propósitos prácticos, inferior (con esto los autores se refieren a menos confiable) a la forma del método de Horner, sin embargo, en principio ambos métodos son casi idénticos.

En todos los métodos de aproximación, la raíz que se busca es separada de las otras raíces, y se sitúa en un intervalo conocido entre límites cerrados.(**PA**)

Veamos cuál es el tratamiento del método:

Sea $f(x) = 0$ una ecuación dada, y supongamos un valor a conocido difiriendo de una cantidad pequeña de una raíz de la ecuación. Por lo tanto,

[72] Actualmente, esto es conocido como método de la división sintética.

ya que $a+h$ es una raíz de la ecuación,

$$f(a+h) = 0of(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{1 \cdot 2}h^2 + \cdots = 0.$$

ahora, como h es pequeño, se desprecian todas las potencias de h superiores a la primera, se obtiene que

$$f(a) + f'(a)h = 0,$$

dando como una primera aproximación a la raíz, el valor $a - \frac{f(a)}{f'(a)}$.

Representando este valor por b, y aplicando el mismo proceso por una segunda vez, se encuentra una aproximación más cerca $b - \frac{f(b)}{f'(b)}$.

Repitiendo este proceso la aproximación puede alcanzar cualquier grado de precisión requerida. (**PN, PA**)

Posteriormente muestran un ejemplo de la aplicación del método[73].

Encuentre el valor aproximado de las raíces positivas de la ecuación $x^3 - 2x - 5 = 0$.

Las raíces se encuentran entre los valores 2 y 3. Acotando los límites, las raíces se encuentran entre 2 y 2,2 (**PA**). Se coge a 2,1 como la cantidad representada para a. La cual no puede diferir del verdadero valor $a+h$ de la raíz más que en 0,1. Se encuentra entonces que:

$$\frac{f(a)}{f'(a)} = \frac{f(2{,}1)}{f'(2{,}1)} = \frac{0{,}061}{11{,}23} = 0{,}00543$$

Por lo tanto, una primera aproximación es:

$$2{,}1 - 0{,}00543 = 2{,}0946$$

Tomando este resultado como b, y calculando la fracción $\frac{f(b)}{f'(b)}$, se obtiene

$$b - \frac{f(b)}{f'(b)} = 2{,}09455148$$

para una segunda aproximación. Y así sucesivamente[74].

[73] Nótese que es el mismo ejemplo mostrado por Newton en el *De Analysi*, en el apartado de la resolución numeral de las ecuaciones afectadas.

[74] En esencia es el método presentado en el apartado Resolución numeral de ecuaciones afectadas. Anexo A, p. 1-21.

La aproximación del método de Newton es en general rápida. Sin embargo, cuando la raíz que buscamos está acompañada por otra casi igual a ésta, la fracción $\frac{f(a)}{f'(a)}$ no es necesariamente pequeña, ya que el valor de cualquiera más cercana a la raíz reduce $f'(x)$ a una cantidad pequeña. En estos casos se requiere precauciones especiales. Sin embargo, no se entra en discusiones profundas al respecto del método, ya que para propósitos prácticos los autores estiman enteramente al método de Horner.

Podemos observar hasta aquí que ya existe un tratamiento más en el sentido numérico y algebraico, incluyendo en esta contextualización las nociones de límite y convergencia de una manera más fluida y consistente.

3.3.4. Método de Horner para resolver ecuaciones numéricas

Los autores mencionan que por este método se pueden obtener raíces tanto conmensurables como inconmensurables. Las raíces van evolucionando por figura[75]: primero la parte entera (si la hay), y luego la parte decimal, hasta que la raíz termine si ésta es conmensurable, o llegue a cualquier número de plazas requeridas si es inconmensurable. El proceso es similar al proceso de extracción de raíces cuadradas o cúbicas, las cuales son casos particulares de la solución general del presente método justamente a ecuaciones cuadradas o cúbicas. (**PN**)

El principio principal que involucra el método de Horner es la disminución sucesiva de las raíces de la ecuación dada por cantidades conocidas, esto es por el algoritmo de incrementar o disminuir las raíces de una cantidad dada.[76] La gran ventaja de este método es que las transformaciones sucesivas son exhibidas en una forma aritmética compacta, y la raíz obtenida por un proceso continuo exacto a cualquier número de lugares de decimales requeridos. (**PA**)

En algunos casos para encontrar la primera figura es necesario el método de separación de raíces por lo que antes de ejemplificar la aplicación del método de Horner, se dan las bases para separar raíces:

> **Theorem of Fourier and Budan.** Let two numbers a and b, of which a is the less, be substituted in the series formed by $f(x)$

[75] Recuérdese que por figura, se entendía la connotación cifra.

[76] Anexo C. Artículo 33.

> and its successive derived functions, viz.,
>
> $$f(x), f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x);$$
>
> the number of the real roots which lie between a and b cannot be greater than excess of the number of changes of sign in the series when a is substituted for x, over the number of changes when b is substituted for x; and when the number of real roots in the interval falls short of that difference, it will be by an even number.

Teorema que expresa que el número de raíces reales entre a y b, no puede ser más grande que el exceso de los números de cambio de signo en la serie $f(x), f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ cuando x es sustituido por a y su diferencia con los números de cambio de signo cuando x es sustituido por b.

Para efectos prácticos el teorema refiere lo siguiente: *Let the roots of an equation $f(x) = 0$ be diminished, first by a and then by b, where a and b are any two numbers of which a is the less; then the number of real roots between a and b cannot be greater than the excess of the number of changes of sign in the first transformed equation over the number in the second.*

Ejemplo de la aplicación del teorema de Fourier y Budan.

- Encuentra la situación de las raíces de la ecuación

$$x^5 - 3x^4 - 24x^3 + 95x^2 - 46x - 101 = 0 \tag{3.17}$$

Se examinará la función para valores de x entre los intervalos: $-10, -1, 0, 1, 10$ (Estos números han sido elegidos asumiendo la facilitad de los cálculos)

Las sucesivas derivadas para $f(x) = x^5 - 3x^4 - 24x^3 + 95x^2 - 46x - 101$ son:

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= 5x^4 - 12x^3 - 72x^2 + 190x - 46 \\
f_2(x) &= 20x^3 - 36x^2 - 144x + 190 \\
f_3(x) &= 60x^2 - 72x - 144 \\
f_4(x) &= 120x - 72 \\
f_5(x) &= 120
\end{aligned}$$

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$f_5(x)$
-10	-	+	-	+	-	+
-1	+	-	+	-	-	+
0	-	-	+	-	-	+
1	-	+	+	-	+	+
10	+	+	+	+	+	+

Cuadro 3.12: Aplicación del Teorema de Fourier-Budan a (3.17)

Y haciendo las operaciones al sustituir los valores para x indicados, se ha obtenido la siguiente tabla de signos,

De esta tabla se deduce que todas las raíces reales deberían estar entre -10 y $+10$, por lo tanto:

- Como el número de cambios de signo para -10 es 5 y supera al número de cambios de signo para -1 que es 4, debe haber una raíz real entre -10 y -1.
- Por el mismo razonamiento debe haber una raíz real entre -1 y 0.
- Y como entre 0 y 1 hay el mismo número de cambios de signo (3) entonces entre este intervalo no hay raíces reales.
- Finalmente entre 1 y 10 hay 3 cambios de signo, por lo que al menos hay una raíz real.
- Por lo tanto, de lo anterior, queda duda sobre las otras dos raíces ya que éstas pueden ser imaginarias o quizá hay 3 raíces reales entre 1 y 10.[77]

El método de Sturm es el suplemento de lo que fue planteado por Fourier y Budan.

> **Theorem of Sturm.** *Let any two real quantities a and b be substituted for x in the series of $n+1$ function*
>
> $$f(x), f_1(x), f_2(x), f_3(x), \cdots, f_{n-1}(x), f_n(x).$$

[77]Esta es la debilidad del teorema de Fourier y Budan.

> *consisting of the given polynomial $f(x)$, its first derived $f_1(x)$, and the successive remainder*[78] *(with their signs changed) in the process of finding the greatest common measure of $f(x)$ and $f_1(x)$; then the difference between the number of changes of sign in the series when a is substituted for x and the number when b is substituted for x expresses exactly the number of real roots of the equation $f(x) = 0$ between a and b.*[79]

Esto es dados dos números reales a y b, y considerando la serie de funciones $f(x), f_1(x), f_2(x), f_3(x), \cdots, f_{n-1}(x), f_n(x)$, donde $f(x)$ es el polinomio del que se quiere hallar las raíces, $f_1(x)$ la primera derivada, $f_2(x)$ el máximo común divisor de $f(x)$ y $f_1(x)$ y así en lo que sigue. Entonces el número de raíces reales entre a y b es justamente la diferencia entre el número de cambios de signo en las series, cuando a sustituye a x, y el número cuando b sustituye a x.

Como puede observarse, otra de las ideas que ya se introduce en este tratado es el de derivada, con lo cual hay un acercamiento con el cálculo de raíces actualmente.

Ejemplo de la aplicación del teorema de Sturm:

---

[78]Las funciones de Sturm tienen la siguiente forma, en donde $q_1, q_2, \cdots, q_{n-1}$ representan los cocientes sucesivos en la operación:

$$
\begin{aligned}
&f(x) = q_1 f_1(x) - f_2(x),\\
&f_1(x) = q_2 f_2(x) - f_3(x),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\\
&f_{r-1}(x) = q_r f_r(x) - f_{r+1}(x),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\\
&f_{n-2}(x) = q_{n-1} f_{n-1}(x) - f_n(x).
\end{aligned}
$$

[79]Es conveniente en la práctica sustituir primero $-\infty, 0, \infty$ en las funciones de Sturm, para obtener el total de raíces negativas y de raíces positivas. Para separar las raíces negativas se sustituyen los enteros $-1, -2, -3,$ &*c*. cuando los signos en las funciones donde se sustituyó $-\infty$ lo indiquen, y para separar las raíces positivas se sustituye $1, 2, 3,$ &*c*. hasta que ∞ lo indique.

Encuentre el número y la situación de la raíz real de la ecuación[80]

$$f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0 \tag{3.18}$$

La primera derivada de $f(x)$ es

$$f_1(x) = 3x^2 - 2$$

Ahora se calcula el cociente $\frac{f(x)}{f_1(x)}$ para encontrar el máximo común divisor de estas dos fracciones, a saber el residuo (con signos cambiados como indica el teorema), se obtiene entonces,

$$f_2(x) = 4x + 15$$

Se procede con el mismo razonamiento la operación $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$, de donde se obtiene que

$$f_3(x) = -643$$

Ahora correspondiendo a los valores $-\infty, 0, \infty$, la siguiente tabla muestra los cambios de signo que tienen las funciones de Sturm, de donde aplicando el teorema podremos conocer cuantas raíces reales tiene la función a resolver dada. Ver tabla siguiente.

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
$-\infty$	-	+	-	-
0	-	-	+	-
∞	+	+	+	-

Cuadro 3.13: Aplicación del Teorema de Sturm a (3.18)

Por lo tanto hay solamente una raíz real, y ésta es positiva, ya que el número de cambios de signo para $-\infty$ es 2 y para 0 el número de cambios de signo es 2 también por lo que la diferencia entre estos cambios es 0, y por lo tanto no hay raíz real positiva entre $-\infty$ y 0. Ahora el número de cambios de signo para ∞ es 1, por lo tanto como la diferencia entre los cambios de signo de 0 e ∞ es 1, hay una sola raíz real entre ellos y obviamente positiva. La tabla siguiente indica entre cuales números se encuentra dicha raíz.

Finalmente como entre 1 y 2, no hay diferencia entre los cambios de signo y entre 2 y 3 la diferencia de los cambios de signo es 1, entonces se deduce que la raíz se encuentra entre 2 y 3.

Cuando resulta que hay raíces iguales el teorema Sturm es el siguiente:

[80]Ecuación que como puede observarse, es la trabajada por Newton y Lagrange en las dos secciones anteriores.

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
1	-	+	+	-
2	-	+	+	-
3	+	+	+	-

Cuadro 3.14: Aplicación del Teorema de Sturm a (3.18)

> **Theorem.** *The difference between the number of changes of sign when a and b are substituted in the series $f, f_1, f_2, \cdots, f_r$ the last of these being the greatest common measure of f and f_1, is equal to the number of real roots between a and b, each multiple root counting only once.*

Ya teniendo las bases para separar raíces, podemos analizar el método de Horner con ejemplos de su aplicación:

Ejemplo 1. Encuentra las raíces positivas de la ecuación

$$2x^3 - 85x^2 - 85x - 87 = 0 \tag{3.19}$$

El primer paso que se propone es encontrar la primera figura de la raíz. Esto puede usualmente hacerse con algunos ensayos; sin embargo, como ya se ha mencionado en algunos casos el método de separación de raíces podría ser empleado.

En este ejemplo hay solamente una raíz positiva, y encontramos por ensayo que se encuentra entre 40 y 50. Por lo tanto la primera figura de la raíz es 40. (**PA**)

Por lo que hay que disminuir[81] por 4 la ecuación dada (la serie de operaciones aritméticas se representa en la tabla siguiente):

Por lo tanto la primera ecuación transformada será,

$$2y^3 + 155y^2 + 2715y - 11487 = 0 \tag{3.20}$$

Por ensayos también se ha encontrado que esta ecuación tiene una raíz entre 3 y 4, ya que para $y = 3$ arroja el valor -1893 y para $y = 4$ arroja el valor

[81]En esencia se aplica el algoritmo de la división, es decir, se efectúa el cociente $\frac{2x^3-85x^2-85x-87}{x-40}$. Las líneas marcan la conclusión de cada transformación, y las figuras de tipo negro los coeficientes de la sucesiva ecuación transformada.

2	-85	-85	-87
	80	-200	-11400
	-5	-285	-11487
	80	3000	
	75	2715	
	80		
	155		

Cuadro 3.15: Reducción de (3.19) por 40

1981. Por lo tanto se procede a reducir la ecuación (3.20) por 3.[82]

La serie de operaciones aritméticas se representa en la tabla siguiente:

2	155	2715	-11487
	6	483	9545
	161	3198	-1893
	6	501	
	167	3699	
	6		
	173		

Cuadro 3.16: Reducción de (3.20) por 3

Así la segunda ecuación transformada será,

$$2z^3 + 173z^2 + 3699z - 1893 = 0 \tag{3.21}$$

que tiene una raíz entre 0 y 1, ya que para estos valores arroja -1893 y 1981 respectivamente.

Se ha encontrado directamente que si se reduce la ecuación (3.21) por 0,5 el residuo es cero, la serie de operaciones aritméticas se representa en la tabla siguiente:

Por lo tanto la raíz buscada de la ecuación dada será $x = 43{,}5$

También puede deducirse que $2x^3 + 155x^2 + 2715x - 11487 = 0$ es la ecuación cuyas raíces son menores que 40 y cuya raíz positiva se encuentra

[82] O en la ecuación dada a resolver se podría reducir por 43. O sea $\frac{2x^3-85x^2-85x-87}{x-43}$

2	173	3699	−1893
	1	87	1893
	174	3786	0
		−3786	
		0	

Cuadro 3.17: Reducción de (3.21) por 0.5

entre 3 y 4. Si la segunda ecuación transformada no tiene una raíz exacta en 0,5, se supone entre 0,5 y 0,6, pero las primeras tres figuras de la ecuación propuesta podrían ser 43,5; y para encontrar la próxima figura se procede hasta la siguiente transformación, disminuyendo las raíces por 0,5; y así sucesivamente. (**PA, PN**)

Algunas ecuaciones terminan en una etapa corta, cuando los cálculos son de gran longitud, sería necesario encontrar las figuras sucesivas por sustitución y la labor del proceso podría ser muy grande. Esto, sin embargo, no es necesario, y una de las ventajas más prácticas valoradas del método de Horner, es que después de la segunda o tercera (algunas veces después de la primera) figura de la raíz encontrada, la ecuación transformada sugiere ella misma por mera inspección la próxima figura de la raíz. El principio de esta simplificación se denomina Principio del Trial-divisor[83].

Ejemplo 2. Encuentra la raíz positiva de la ecuación

$$4x^3 - 13x^2 - 31x - 275 = 0 \tag{3.22}$$

La ecuación propuesta tiene su raíz positiva entre 6 y 7, por lo que la primera figura de su raíz es 6, y se procede a disminuir la ecuación a resolver por 6. (**PA, PN**)

La serie de operaciones aritméticas se representa en la tabla siguiente:
Por lo tanto la primera ecuación transformada es,

[83]Como hemos visto en el método de aproximación de Newton, cuando una ecuación es transformada por la sustitución de $a + h$ por x, a siendo un número que difiere de la verdadera raíz en una cantidad muy pequeña h en proporción con a, una aproximación numérica al valor de h es obtenida dividiendo $f(a)$ por $f'(a)$. Ahora, las sucesivas ecuaciones trasformadas en el proceso de Horner son los resultados de transformaciones de este tipo, siendo el último coeficiente $f(a)$, y el penúltimo $f'(a)$. Por lo tanto, después de dos o tres pasos que han sido completados, la parte restante de la raíz tiene un pequeño radio de la parte que se ha desarrollado ya.

4	-13	-31	-275
	$\underline{24}$	$\underline{66}$	210
	11	35	-65
	$\underline{24}$	$\underline{210}$	
	35	245	
	$\underline{24}$		
	59		

Cuadro 3.18: Reducción de (3.22) por 6

$$4y^3 + 59y^2 + 245y - 65 = 0 \tag{3.23}$$

La ecuación (3.23) tiene una raíz entre 0 y 1, y haciendo algunos ensayos se ha encontrado que está entre 0,2 y 0,3. Por lo que las dos primeras figuras de la ecuación propuesta es 6,2. Ahora se disminuye la ecuación (3.23) por 0,2. La serie de operaciones aritméticas se representa en la tabla siguiente:

4	59	245	-65
	$\underline{0{,}8}$	$\underline{11{,}96}$	51,392
	59,8	256,96	$-13{,}608$
	$\underline{0{,}8}$	$\underline{12.12}$	
	60,6	269,08	
	$\underline{0{,}8}$		
	61,4		

Cuadro 3.19: Reducción de (3.23) por 0.2

Por lo tanto la segunda ecuación transformada es,

$$4z^3 + 61{,}4z^2 + 269{,}08z - 13 - 608 = 0$$

La cual se puede comprobar que tiene una raíz en 0,05.

Y así se concluye que la raíz de la ecuación $4x^3 - 13x^2 - 31x - 275 = 0$ es $x = 6{,}25$.

Sin embargo el trabajo con números decimales tiene algunas observaciones, textualmente los autores mencionan al respecto que:

> "When the decimal part of the root (suppose $abc\cdots$)is about to appear, multiply the roots of the corresponding transformed equation by 10, i.e. annex one zero to the right of the figure in the first column, two to the right of the figure in the second column, three to the right of that in the third; and so on, if there be more columns (as there will of course be in equations of a degree higher than the third). The root of the transformed equation is then, not $abc\cdots$, but $abc\cdots$ Diminish the roots by a. The transformed equation has a root $bc\cdots$ Multiply the roots of this equation again by 10. The root becomes $bc\cdots$, and the process is continued as before. To illustrate this we repeat the above operation, omitting the decimal points. In all subsequent examples this simplification will be adopted." (**PA,PN**)

La serie de operaciones aritméticas para el ejemplo anterior, tomando la indicación anterior se representan en la tabla siguiente:

4	−13	−31	−275
	24	66	210
	11	35	−65000
	24	210	51392
	35	24500	−13608000
	24	1196	13608000
	590	25696	0
	8	1212	
	598	**2690800**	
	8	30800	
	606	2721600	
	8		
	6140		
	20		
	6160		

Cuadro 3.20: Reducciones para la ecuación (3.22)

Se ha visto que el método de aproximación dado por Newton falla cuando las raíces son casi iguales, tales casos representan mucha más dificultad tanto para analizarlas como para encontrar su solución. Con el método de Horner esto es posible, con más eficacia que la necesaria en otros casos para encontrar la solución a tales ecuaciones.

3.3.5. Método de aproximación de Lagrange

Desde el punto de vista de Burnside y Panton el método de Lagrange para propósitos prácticos es muy inferior al de Horner. Una descripción que dan del método es el siguiente:

Sea la ecuación a resolver $f(x) = 0$, la cual tiene una raíz, y solamente una raíz, entre dos enteros consecutivos a y $a+1$.

Se sustituye $a + \frac{1}{y}$ por x en la ecuación propuesta. De esta sustitución se encontrará una ecuación transformada en y que tendrá necesariamente una raíz positiva. Sea ésta determinada entre los enteros b y $b+1$.

Ahora transfórmese la ecuación en y por la sustitución $y = b + \frac{1}{z}$. Lo cual arrojará una nueva ecuación transformada en z, que también tendrá una raíz positiva y supóngase que por ensayos ésta se encuentra entre c y $c+1$.

Continuando este proceso, una aproximación a la raíz es obtenida en la forma de una fracción continua como sigue:

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{-} + \cdots}}$$

Ejemplo 1. Encuentre en la forma de una fracción continua la raíz positiva de la ecuación

$$x^3 - 2x - 5 = 0 \tag{3.24}$$

La raíz se encuentra entre 2 y 3. Para hacer la transformación se emplea el proceso para incrementar o disminuir las raíces de una cantidad dada (**PA, PN**), en este caso a disminuir por 2:

De aquí que se encuentra la ecuación

$$\frac{1}{y^3} + \frac{6}{y^2} + \frac{10}{y} - 1 = 0$$

cuyas raíces son las recíprocas de las raíces de la ecuación transformada en y que requerimos, a saber,

$$y^3 - 10y^2 - 6y - 1 = 0$$

La cual tiene raíces entre 10 y 11. Haciendo ahora la sustitución $y = 10 + \frac{1}{z}$, la ecuación en z será

$$-61 + \frac{94}{z} + \frac{20}{z^2} + \frac{1}{z^3} = 0$$

$$
\begin{array}{cccc}
\hline
\mathbf{1} & 0 & -2 & -5 \\
 & \underline{2} & \underline{4} & 4 \\
 & 2 & 2 & -1 \\
 & \underline{2} & \underline{8} & \\
 & 4 & 10 & \\
 & \underline{2} & & \\
 & 6 & & \\
\hline
\end{array}
$$

Cuadro 3.21: Disminución de la ecuación (3.24) por 2

Y multiplicando esta última ecuación por $-z^3$ obtendremos la ecuación en z que buscamos,

$$61z^3 - 94z^2 - 20z - 1 = 0$$

La cual tiene una raíz real entre 1 y 2; y así sucesivamente (**PA,PN**). Finalmente se concluye que la raíz en forma de fracción continua que se busca es:

$$2 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}$$

Con esto hemos terminado la parte de resolución de ecuaciones numéricas mostrada por Burnside y Panton.

Como podemos observar el tratamiento que se plantea en el libro refleja un acercamiento más numérico y algebraico. Además los tres métodos se muestran más en dirección a lo que el medio escolar nos enseña hoy día. Cabe señalar aquí que el libro ha tenido una reedición en 2005, lo que nos indica la demanda que tiene el libro por su buen encause hacia el objetivo de los autores.

Como una de las consecuencias del trabajo de Burside y Panton, está la teoría de Galois, y también un acercamiento hacia la enseñanza de los métodos de aproximación desde el punto de vista del álgebra superior.

3.4. Conclusiones

En primer lugar, cabe mencionar que la transposición histórica del método de aproximación de raíces tiene una polémica bastante sonada, desde su invención hasta su aplicación práctica. En términos históricos-epistemológicos, un recorrido suscinto de su tratamiento sería el siguiente:

Al respecto de algunos matemáticos que aplicaron el método de aproximación a raíces, Isaac Newton y Joseph Raphson consideraron sólo polinomios para su aplicación con un enfoque más iterativo, de allí el método actual; Simpson publicó en 1740 una versión generalizada donde por primera vez aparecía reconocida implícitamente la representación de la derivada de la función en el método; A principios del siglo XIX Joseph Fourier presentó el método en términos de la ahora universal notación $f'(x)$, describiéndolo como “le méthode newtonienne” (1831); Lagrange trabajó el método en términos algebraicos; En Alemania, Runge dio el método en forma Leibnizciana, atribuyéndole el mérito a Newton (1900); Moritz Cantor estudió los métodos de aproximación de Newton, Raphson, Halley y de Lagny, describiendo a Raphson “un absoluto admirador e imitador de Newton”(1898). Como puede observarse hay varias hipótesis sobre la génesis del método de aproximación por lo que hubo demasiada polémica por ello (Kollerstrom, 1992).

En este sentido, y de acuerdo a Cantoral y Reséndiz (2001) y Cantoral y Rodríguez-Vásquez (2005), se debe pensar a la noción de aproximación como consubstancial en el desarrollo de la matemática, ya que está oculta en los más ocultos pliegues de la naturaleza de sus métodos.

Ahora bien, con respecto al análisis realizado en las tres obras históricas, en principio hemos visualizado dos características de los métodos de aproximación para la resolución de ecuaciones: la repetición en el proceso de operar sus cálculos y asimismo puede observarse que son de carácter mecánico. En nuestra opinión, esto se genera por el tratamiento numérico y algebraico que predomina en su uso.

Asimismo, se puede observar, que las tres obras, al respecto de los métodos de aproximación muestran perspectivas diferentes respecto de su tratamiento:

- Por un lado las bases de Newton reflejan ser puramente geométricas, como era lo habitual en esa época;
- En lo que respecta a Lagrange, el tratamiento del método es puramente algebraico y algunas veces numérico, dando pie a demasiadas

operaciones y razonamientos del mismo tipo respectivamente, pero desde nuestra perspectiva, la lógica de la construcción del método es más clara que el tratamiento de Newton;

- Y con respecto a la presentación de Burnside y Panton sobre los métodos de Newton, Lagrange y también el de Horner, se observa que su dirección se acerca más a lo que actualmente se enseña.

Mas detalladamente, del estudio de la obra de Newton, destacamos *la aplicación* que tuvo el método iterativo (método de aproximaciones sucesivas), es decir, se observó que en esta etapa, dicho método no figuró propiamente como objeto de estudio, mas bien, figuró como un instrumento que permitió que la matemática evolucionara en su totalidad como disciplina científica, pues como vemos, su aplicación, sirvió en el desarrollo de la validación de la tercera regla de Newton y en consecuencia, permitió la fundamentación de su cálculo.

Del estudio de la obra de Lagrange, enfatizamos la inmersión de los procesos algebraicos como elementos esenciales en el desarrollo de la resolución de ecuaciones algebraicas, y asimismo su explicación para extender su teoría, y no sólo hallar raíces en el campo de los reales sino también hallar raíces complejas. En este sentido, el método iterativo (el de las fracciones continuas), fue innovador en esta etapa de estudio, pues como se observó en su capítulo III (Nuevo método para aproximar raíces de ecuaciones numéricas) y en la nota V (Sobre el método de aproximación dado por Newton), se pudo solventar a través del uso de fracciones continuas lo expuesto con el método de las aproximaciones sucesivas, pero con muchas más precisión.

Ahora bien, del estudio de la obra de Burnside y Panton, se notó la conjunción de los procesos analíticos con los procesos algebraicos, en este sentido, los autores realizaron un compendio que dejó mirar la evolución conceptual de los métodos iterativos hacia dos ramas de estudio de la matemática, a saber, el álgebra superior y los métodos numéricos.

En conclusión, queremos mencionar que lo anterior forma parte del alcance de nuestro primer objetivo de investigación, pues hemos podido identificar y clasificar (en una primera etapa), los diferentes tratamientos de los métodos iterativos para encontrar raíces de ecuaciones no lineales. Sin embargo, para complementar (en una segunda etapa) nuestro primer objetivo y asimismo indagar sobre el segundo objetivo, hemos optado por hacerlo inmersos en la rama de estudio “métodos numéricos” y no desde el “álgebra superior", pues en principio, nuestro interés por estudiar los métodos iterativos para la resolución de ecuaciones no lineales, nació de una investigación en un tema específico de ella, igualmente desde la perspectiva de la didáctica de la matemática.

Capítulo 4

Libros de texto. Ecuaciones no lineales de una variable en la enseñanza contemporánea

Introducción

En este capítulo mostramos el análisis de los libros de texto que fueron introducidos en el siglo XX para la enseñanza de la matemática en México, en particular de aquellos libros de mayor impacto propuestos para la enseñanza de los métodos iterativos en la resolución de ecuaciones no lineales en el nivel superior.

De acuerdo a la metodología que usamos para el desarrollo de esta investigación, hemos realizado una revisión de los programas de estudio en el nivel superior en México de las licenciaturas afines en Matemáticas, para identificar el contenido temático al respecto de los métodos iterativos en la resolución de ecuaciones no lineales, de tal forma que esto nos permita acceder a los contenidos específicos de las bibliografías recomendadas y al mismo tiempo se fundamente la elección de los libros de texto a analizar, tomando en cuenta datos importantes como el autor, la editorial, el número de edición, etc.

Ahora bien, en México el interés por la ciencia ha estado presente desde hace muchos siglos. Las culturas prehispánicas adquirieron conocimientos biológicos, e hicieron descubrimientos matemáticos importantes como son la notación posicional para escribir los números y la consiguiente necesidad de considerar al cero como número. También es ampliamente conocida la gran exactitud del calendario maya, que era bastante mejor que el calendario juliano que se empleaba en Europa en la época en que se inició la conquista de América. Finalmente, la existencia de grandes construcciones arquitectónicas como son las pirámides, y de importantes obras hidráulicas en la cuenca de México ilustran la existencia de conocimientos avanzados de ingeniería y por tanto de física y matemáticas.

En el siglo XVI, los españoles trajeron su cultura renacentista europea y fundaron la Real Universidad de México e instalaron la primera imprenta que hubo en América. En esa imprenta, en 1557 se publicó el primer libro de física escrito en México, y en América, su autor, Alonso de la Veracruz. Sin embargo, para la época de la independencia de México, la Real Universidad de México, no incorporó en su seno los conocimientos científicos que se desarrollaron en Europa en los siglos subsecuentes, de modo que el país estaba sumamente atrasado en temas científicos.

Fue a fines del siglo XVIII, cuando se fundaron en México dos importantes escuelas: la de Bellas Artes y el Real Colegio de Minería. En la primera, además de pintura, escultura y grabado, se empezó a enseñar arquitectura y en la segunda se preparaban ingenieros. Fue en el Colegio de Minería en donde se inició la enseñanza formal del cálculo diferencial e integral, de la mecánica de Newton y de la química, este colegio fue la primera casa de la ciencia en México. (http://www.fciencias.unam.mx/admin/historia.html)

Durante el siglo XIX, con las frecuentes guerras, tanto extranjeras como civiles, el desarrollo científico en México se vio obstaculizado y como una de sus consecuencias la Universidad fue suprimida en forma definitiva. Sin embargo, durante el siglo XX, se crean nuevas instituciones para la educación en México. Para este periodo, la evolución del sistema educativo mexicano según el reporte (2004) de la Organización de Estados Iberoamericanos (OEI) de la educación, puede dividirse en dos momentos:

- La educación en México hasta 1950
    - Educación prehispánica
    - La educación durante la Colonia
    - La educación en el periodo postindependiente
    - La educación en el porfiriato
    - De la revolución mexicana al periodo de conciliación y consolidación (1910-1958)

- La educación en México de 1950 a 1990
    - La expansión del sistema educativo
    - La política educativa del gobierno federal, 1952-1993

En lo que sigue, retomaremos los hechos históricos a partir de 1910 cuando se inauguró la Universidad Nacional[1] de México y pasaremos a 1934 (durante el porfiriato), que fue cuando se institucionalizó la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas en dicha Universidad. Así además de considerar los dos periodos considerados por la OEI, también consideraremos el periodo 1995-1999 y el periodo 2001-2006 puesto que el Programa Nacional de Educación (2001-2006) sufre cambios con respecto al Programa Nacional de Educación (1995-2000).

[1]Primera institución que agrupaba diversas escuelas y colegios de educación superior. Posteriormente en 1929 la Universidad obtuvo su autonomía.

4.1. De la inclusión de la enseñanza de la matemática en el nivel superior (1934) y de los programas de estudio en matemáticas

4.1.1. Perspectiva histórica de la educación superior en México

La Universidad Nacional[2] estaba conformada por las Escuelas Nacionales Preparatoria, de Jurisprudencia, de Medicina, de Ingenieros, de Bellas Artes y de Altos Estudios. Esta última estaba organizada en 3 secciones: la de Humanidades, la de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, y la de Ciencias Sociales Políticas y Jurídicas. La segunda sección incluía a las matemáticas.

En 1911, se reunió la primera comisión (nombrada por el Consejo Universitario) para definir los cursos que se impartirían en cada sección. Quedando para la sección de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de la siguiente manera, (Ramos, 2005):

CURSOS NECESARIOS		
Altas matemáticas	Física experimental	Química biológica
Mecánica racional	Geología	Embriología general
Astronomía	Físico-química	Fisiología experimental
Mecánica celeste	Química general	Psicología experimental
Física-Matemática	Química orgánica	Evolución de los seres organizados
		Bacteriología
		Anatomía patológica
CURSOS ÚTILES		
	Termodinámica Electrología Meteorología Mexicana Historia de las Matemáticas Historia de la Física y de la Química Historia de la Medicina	

Cuadro 4.1: Cursos

[2]En 1910 se inauguró la Universidad Nacional, como parte de los festejos de conmemoración del centenario de la Independencia de México.

Este primer intento por dar forma al plan de estudios fue imposible de realizar por la falta de presupuesto, sin embargo, se realizó una reestructuración y nuevas contrataciones para la planta docente. Matemáticas se vió beneficiada por la contratación de Sotero Prieto (1884-1935) para el curso de funciones analíticas, además fue uno de los fundadores de la Sociedad Científica *Antonio Alzate*[3] y publicó diversas obras y trabajos en matemáticas que fueron textos en la Universidad como: Enseñanzas de las Matemáticas, Convergencias de Series, Geografía Cinemática, Secciones Cónicas y otras más.

En 1935, el Consejo Universitario aprobó la estructura general de la Universidad, por lo que México tenía una institución de educación superior que contaba con planes de estudio adecuadamente estructurados para realizar estudios de física y matemáticas.

Posteriormente, en el periodo del general Lázaro Cárdenas (1934-1940) se alentó a la educación técnica, la realización más importante del periodo fue la fundación del Instituto Politécnico Nacional (IPN) y otros establecimientos tecnológicos. Durante la posguerra, en el periodo conocido en México como de conciliación y consolidación, Miguel Alemán dio continuidad a la política de industrialización y a la política educativa del gobierno anterior, así que entre 1940 y 1952, se redujo a 50 % el analfabetismo de la población adulta.

Más tarde, se crean instituciones para el régimen de la educación como son el Instituto Nacional Indigenista (1948), la Asociación Nacional de Universidades e Institutos de Enseñanza Superior (ANUIES) (1950) y el Centro Regional de Educación de Adultos y Alfabetización Funcional para América Latina (CREFAL) (1951). En 1952 se inauguró la Ciudad Universitaria de la Universidad Nacional Autónoma de México. En 1943 tuvo lugar la unificación de los sindicatos magisteriales. El nuevo Sindicato Nacional de Trabajadores de la Educación (SNTE) fue reconocido mediante un decreto presidencial en 1944 como el único organismo representativo de todo el magisterio nacional.

En el periodo de 1920-1950 la expansión en el sistema[4] educativo creció de

[3]En 1935 se convierte en la Academia Nacional de Ciencias.

[4]Para dar curso a la actividad del sistema, la Secretaría de Educación Pública (SEP) modificó su estructura orgánica y creó la Subsecretaría de Planeación y Coordinación Educativa. Inició la desconcentración técnico-administrativa con la creación de 39 unidades y subunidades de servicios descentralizados en algunas de las ciudades más importantes. A la par la Subsecretaría de Planeación y Coordinación Educativa impulsó medidas técnico administrativas para mejorar el control escolar y elaborar los programas y el presupuesto educativo, entre otras cosas.

forma moderada, así por ejemplo, la enseñanza en el nivel superior tenía un carácter restringido, sin embargo, en los siguientes 30 años la educación tuvo un gran ciclo expansivo. Posterior a estos 30 años algunos establecimientos, en especial de educación superior, crecieron en grandes proporciones. Pero a partir de 1982, bajo el impacto de la crisis económica, el sistema educativo mexicano se internó en un nuevo periodo con dos momentos claramente definidos: disminución progresiva de los ritmos de crecimiento y decremento absoluto en el número de estudiantes.

Con respecto a la matrícula del nivel superior, los estados comenzaron a aumentar su participación en el total de ésta, por lo que se creó la Universidad Autónoma Metropolitana (UAM), como una propuesta novedosa, que modificó los esquemas con los que tradicionalmente se habían organizado las universidades públicas, mediante una estructura de unidades, divisiones por grandes áreas profesionales y departamentos.

Otro factor influyente en los cambios de la educación del nivel superior fueron los periodos sexeniales de los presidentes de México, así por ejemplo, durante la presidencia de José López Portillo (1976-1982) se elaboró el Plan Nacional de Educación (PNE), el cual consistió en un diagnóstico y en un conjunto de programas y objetivos. Se buscó regular, mediante la planeación, a la educación superior y se creó la Universidad Pedagógica Nacional (UPN). En este sexenio adquirieron relevancia las preocupaciones sobre la calidad y la atención al rezago educativos. También se avanzó en el diseño e instrumentación de un marco general para coordinar y planear la educación superior. Además en 1976 la SEP creó la Coordinación General de Educación Superior, Ciencia y Tecnología, la cual en 1978 se transformó en Subsecretaría de Educación Superior e Investigación Científica; en 1978 fue promulgada la Ley Nacional de Coordinación de la Educación Superior; en 1979 se constituyó la Coordinación Nacional para la Planeación de la Educación Superior (CONPES); en 1980 la autonomía universitaria fue elevada a rango constitucional; y en 1981 se dio a conocer el Plan Nacional de Educación Superior, mismo que fue aprobado por los rectores y directores de las universidades e instituciones de educación superior. El Plan Nacional constituye el primer instrumento en su género diseñado con la participación de las IES, la ANUIES y el gobierno federal. La fundamentación central del Plan fue racionalizar el crecimiento y coordinar este nivel educativo con las necesidades de desarrollo nacional. Ese complejo sistema de organismos y normas para la educación superior buscó a mediano y largo plazo orientar el desarrollo de las instituciones de educación superior, mediante el apoyo financiero a proyectos específicos.

En 1980 el Artículo Tercero Constitucional[5] incluyó el concepto de autonomía universitaria. En esa edición constitucional la autonomía fue concebida como el ejercicio de ciertas facultades que el Estado otorga a entidades públicas no centralizadas. La autonomía se otorga, así, mediante un acto jurídico emanado del Poder Legislativo, federal o estatal, e implica el derecho y la obligación de las instituciones a autogobernarse, expedir sus normas y reglamentos, realizar sus fines con respeto a la libertad de cátedra e investigación y de libre examen y discusión de las ideas, determinar sus planes y programas de estudio, fijar los términos de ingreso, promoción y permanencia del personal académico y administrar su patrimonio.

Otro factor en el desarrollo de la educación superior se reflejo en el sexenio del presidente Miguel de la Madrid (1982-1988),momento en que se desencadenó una fuerte crisis económica, lo que causó que las instituciones de educación superior estabilizaran el crecimiento de su matrícula, mientras que las instituciones tecnológicas federales y los establecimientos privados conservaron sus posibilidades de expansión. A diferencia de su reducida participación en otros niveles educativos, el sector privado absorbió más de un tercio del crecimiento de la educación superior.

Alrededor de un tercio de los inscritos en licenciatura en la unidad central fueron egresados de bachilleratos y casi la totalidad de los inscritos en las especializaciones provinieron de las normales. La planta docente se integró con una importante porción de profesores de diversas instituciones universitarias y de postgraduados en el país y en el exterior (Fuentes, 1980: 19-20, citado en http://www.oei.es/quipu/mexico/mex02.pdf).

En la actualidad, el ideal que se busca es alcanzar niveles de cobertura, eficiencia terminal y aprendizaje en educación básica, media superior y superior que nos acerquen a los de los países más desarrollados con los que la globalización nos obliga a interactuar, al tiempo que reducir las desigualdades ancestrales de la sociedad mexicana y fortalecer su identidad multicultural. (Martínez, 2001)

Como ha podido observarse, esta evolución en los estatutos de la educación superior se rige, por una parte, por los estatutos de cada sexenio

[5] La Constitución Política de los Estados Unidos Mexicanos, plantea en general en su Artículo Tercero Constitucional, que todo individuo tiene derecho a recibir educación. El artículo actualizado puede obtenerse de la página http://info4.juridicas.unam.mx/ijure/fed/9/

presidencial y por otra, por los estatutos de cada institución de educación superior. Sin embargo, es común que los materiales introducidos para la enseñaza-aprendizaje, son modelos adoptados de otros países y que seguramente fueron introducidos por los profesores con influencias extranjeras en sus estudios.

Hoy día, según el Plan Nacional de Desarrollo de la Educación Superior se tiene la convicción de que la educación debe ser elemento clave para el desarrollo social, cultural, político y económico del país; para el fortalecimiento de la soberanía nacional; para la construcción de una inteligencia individual y colectiva; y para combatir eficazmente la pobreza, el propósito central del Plan Nacional de Desarrollo es hacer de la educación el gran proyecto nacional.

De fondo, en el desarrollo de la educación superior, esta la influencia que se ha tenido sobre México por otros países en cuanto a la adaptación de los planes y programas de estudio, así como de las metodologías que se emplean en sección de enseñanza-aprendizaje. No cabe duda que esto repercute en todo el sistema educativo mexicano, sin embargo, se ha estado implementando el convencimiento de que los profesionistas deben responder a las necesidades que la sociedad mexicana requiere.

En este sentido, cabe mencionar que se tiene programado en algunas universidades la entrada de un nuevo modelo educativo, el cual plantea de manera general procesos formativos enfocados hacia la formación profesional, intelectual, humana y social de los estudiantes; procesos centrados en el aprendizaje; centrados en abordar inter y multidisciplinariamente los temas y problemas; procesos orientados hacia la aplicación del conocimiento adquirido mediante la vinculación con diversos actores sociales en situaciones reales; y procesos encauzados en la búsqueda de conocimientos relevantes, tanto básicos como especializados que permitan construir una comunidad de aprendizaje capaz de innovar continuamente el quehacer académico y de cumplir con la misión social de la Universidad.

Siguiendo este planteamiento, por ejemplo en Guerrero, la licenciatura de matemáticas, plantea como objetivo el desarrollo de convicciones, criterios y capacidades científicas para la elaboración y ejecución de proyectos de planificación, dirección y control de procesos para la preservación y trascendencia de la matemática, su enseñanza o sus aplicaciones.

Lo anteriormente escrito, nos brinda un panorama amplio de como ha venido desarrollándose la educación superior y de lo que se espera para tiempos futuros.

En lo que sigue mostramos los programas de estudio en las licenciaturas de matemáticas de algunas de las universidades con el fin de identificar el lugar en el que se encuentra nuestro tema matemático de estudio y asimismo analizar algunos libros de texto a los cuales se recurre para su tratamiento.

4.1.2. Los programas de estudio

Los programas de estudio que se muestran, son de algunas de las universidades de mayor influencia académica en México y son los planes que se siguen en la actualidad.

***Universidad Nacional Autónoma de México**

Licenciatura en Matemáticas. El egresado de esta licenciatura contará con conocimientos sólidos en las ramas de: cálculo y análisis real, análisis complejo, álgebra lineal y abstracta, ecuaciones diferenciales, geometría analítica y moderna, así como otras ramas de las que deberá elegir disciplinas tales como: computación, investigación de operaciones, análisis numérico, estadística, topología algebraica, diferencial y de conjuntos, geometría diferencial y algebraica, historia y didáctica de las matemáticas, lógica matemática, filosofía de la ciencia y matemáticas discretas y finitas.

Primer Semestre Álgebra Superior I Cálculo Dif. e Int. I Geometría Analítica I Geometría Moderna I	Segundo Semestre Álgebra Superior II Cálculo Dif. e Int. II Geometría Analítica II Materia Optativa	Tercer semestre Álgebra Lineal I Cálculo Dif. e Int. III Materia Optativa Materia Optativa
Cuarto Semestre Álgebra Lineal II Cálculo Dif. e Int. IV Ecuaciones Diferenciales I Materia Optativa	Quinto Semestre Análisis Matemático I Álgebra Moderna II Variable Compleja I	Sexto Semestre Análisis Matemático II **Materia Optativa** Materia Optativa
Séptimo Semestre Materia Optativa Materia Optativa Materia Optativa Materia Optativa	Octavo Semestre Materia Optativa Materia Optativa Materia Optativa Materia Optativa	

El tema de nuestro estudio se encuentra situado en el sexto semestre de la licenciatura, en la segunda asignatura **Materia Optativa** correspondiente a los niveles V y VI, (Como materia optativa se puede elegir entre 35 cursos) específicamente la asignatura se denomina Análisis Numérico.

Dentro de Análisis numérico el tema de nuestro interés se ve en la unidad temática 7.

Objetivo de la optativa: Presentar a los alumnos las herramientas básicas del Análisis Numérico con las cuales se pueden trabajar problemas de Álgebra Lineal, ceros de funciones, aproximación, interpolación e integración numérica. En este curso se hace énfasis en el cálculo de los errores de cada método numérico y en la estabilidad del mismo.

Tema 7. Solución de ecuaciones no lineales

- 7.1 Métodos iterativos: bisección, secante, regula-falsi y Newton- Raphson.
- 7.2 Velocidad de convergencia.
- 7.3 Estimación de errores.
- 7.4 Sistema de ecuaciones no lineales.
- 7.5 Opcional: Métodos de interpolación polinomial y racional.

Bibliografía básica

1. Conte, S. D. y De Boor, C. (1980). *Elementary numerical analysis. An Algorithmic Approach.* McGraw-Hill Book Company.
2. Elden, L. & Wittmyer-Koch, L. *Numerical Analysis.* New York: Academic Press.
3. Gollub, G. & Van Loan,C. (1996). *Matrix computation.* Baltimore: Johns Hopkins University.
4. Kahaner, D. & Moler, C. (1989). *Numerical Methods and Software.* New Jersey: Prentice Hall.
5. Shampine, L., Allen, R. & Pruess, S. (1996). *Fundamentals of Numerical Computing.* New York: J. Wiley.
6. Van Loan, C. (1997). *Introduccion to Scientific Computing.* New Jersey: Prentice Hall.

***Instituto Politécnico Nacional**

Licenciatura en Física y Matemáticas. Originalmente esta Licenciatura se crea en 1961, para formar los cuadros básicos docentes para las carreras de Ingeniería y Ciencias del país en corto y mediano plazo. Con el tiempo, la demanda de profesionales en otras actividades ha orientado la licenciatura de modo tal que, en el presente los egresados ocupan también posiciones importantes en la investigación científica, el desarrollo tecnológico, la industria y aún la administración.

El objetivo de la carrera de Licenciado en Física y Matemáticas es la formación de profesionales con una preparación sólida en dos ramas básicas de la ciencia: la Física y las Matemáticas. El plan de estudios de la licenciatura consta de materias tanto obligatorias como de materias electivas. Estas últimas elegidas de acuerdo a las inclinaciones del alumno ya sea en con orientación hacia la Física o hacia las Matemáticas.

Cuarto Semestre Cálculo IV Física IV Álgebra IV Programación II	Quinto Semestre Análisis Matemático I Álgebra Moderna I **Optativa I** Optativa II	Sexto Semestre Análisis Matemático II Optativa I Optativas II Optativa III
Séptimo Semestre Optativa I Optativa II Optativa III Optativa IV	Octavo Semestre Optativa I Optativa II Optativa III Optativa IV	

El tema de nuestro interés se encuentra situado en el quinto semestre en la optativa de Métodos Numéricos.

La fundamentación de la oferta de la asignatura de análisis numérico radica en que como rama de la matemática aplicada, trata con la obtención, descripción y análisis de algoritmos para el estudio y solución de problemas matemáticos. El desarrollo continuo de las máquinas computadoras y, su ahora más fácil accesibilidad, aumenta cada vez más la importancia del papel de los métodos numéricos en la solución de problemas en la ciencia y la ingeniería. En el curso se pretende dar un panorama amplio de la gama de problemas matemáticos que se pueden resolver usando los métodos numéricos. En el curso se obtienen algoritmos que se aplican a la solución de problemas, mediante una serie de etapas, en cada una de las cuales se usan sólo las operaciones aritméticas elementales. Es también parte importante en la orientación hacia computación. Es asignatura obligatoria en la carrera de Ingeniería Nuclear y opción importante para los egresados con orientación hacia física de esta escuela.

El estudio de esta asignatura requiere conocimientos de cálculo, el manejo de un lenguaje de programación como el que se obtiene en Programación I y el conocimiento de conceptos de álgebra lineal como espacios vectoriales, normas vectoriales y matrices. Las directrices metodológicas para el manejo del curso son la explicación de los conceptos por medio de una discusión de los mismos, la presentación de ejemplos y la solución de ejercicios dentro de la clase, además de tareas para resolver fuera de clase en las que se obtenga la solución de problemas sobre los métodos numéricos usando la computadora.

Los puntos esenciales del curso son: Estudio y clasificación de errores, **solución de ecuaciones no lineales**, aproximación e interpolación, derivación e integración numérica, solución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias y solución de sistemas de ecuaciones lineales.

Objetivo de la asignatura es la obtención, estudio y aplicación de métodos numéricos para la solución de problemas de matemáticas en las ramas de Cálculo, Álgebra Lineal, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Al término del curso el estudiate dominará los puntos esenciales del mismo y habrá realizado programas de computadora de los principales métodos numéricos estudiados.

Dentro de Análisis numérico el tema de nuestro interés se ve en la unidad temática 3. Los objetivos de la unidad son conocer los métodos de Bisección Secante y Falsa posición, conocer la interpretación gráfica del método de falsa posición y poder apreciar la superioridad de este método sobre el de bisección, entender el concepto de método iterativo de punto fijo, entender el concepto de aceleración de la convergencia, entender el concepto de convergencia lineal y cuadrática y sus aplicaciones en la eficiencia de los métodos de iteración y de Newton, aplicar los métodos estudiados al cálculo de raíces de polinomios, conocer el método de Newton aplicado a sistemas de ecuaciones no lineales.

- Método de bisección, secante y falsa posición
- Iteración de punto fijo
- Aceleración de la convergencia

- Método de Newton y sus variantes
- Método de Atken
- Cálculo de raíces de polinomios
- Sistemas de ecuaciones no lineales, método de Newton

Bibliografía básica

1. Atkinson, K. E. (1978). *An introduction to numerical analysis.* John Wiley and Sons, Inc. New York.
2. Burden, R. I. y Faires, J. D. (1985). *Análisis Numérico.* Grupo Editorial Iberoamérica. México.
3. Carnahan, B., Luther, H. A. & Wilkers, J. O. (1969). *Applied Numerical Methods.* John Wiley and Sons, Inc. New York.
4. Chapra, S. C. y Cale, R. P. (1981). *Métodos Numéricos para Ingenieros.* McGraw Hill, México.
5. Conte, S. D. & De Boor, C. (1980). *Elementary Numerical Analysis.* 3a. Ed. McGraw-Hill Book Company.
6. Dahlquist, G. & Björk, A. (1974). *Numerical Methods.* Prentice-Hall, New Jersey.
7. Hamming, R. W. (1973). *Numerical Methods for Scientists and Engineers.* 2a. Ed. McGraw-Hill, Inc. New York.
8. Henrici, P. K. (1964). *Elements of Numerical Analysis.* John Wiley and Sons, Inc. New York.
9. Henrici, P. K. (1972). *Elementos de Análisis Numérico.* Trillas, México.
10. Hildebrand, F. B. (1974). *Introduction to Numerical Analysis.* 2a. Ed. McGraw Hill Book Company, Inc.
11. Kahaner, D., Moler, C. & Nash, S. (1989). *Numerical Methods and Software.* Prentice-Hall, New Jersey.
12. Nakamura, S. (1992). *Métodos numéricos aplicados con software.* Prentice-Hall, Hispanoamericana, S. A.

13. Ralston, A. & Rabinowitz, P. (1978). *A first Course in Numerical Analysis*. 2a. Ed., McGraw Hill, México.

14. Shampine, L. F. & Allen Jr. R. C. (1973). *Numerical Computing: An introduction*. W. B. Saunders Company (Eds.), Philadelphia.

***Universidad Autónoma de Baja California**

Licenciatura en Matemáticas Aplicadas. El licenciado en Matemáticas Aplicadas analiza problemas reales en las diferentes áreas de las ciencias exactas, naturales y económico-administrativo, con la finalidad de crear modelos matemáticos para simular situaciones, proveer resultados y optimizar recursos.

El plan de estudios es el siguiente:

Etapa básica	Etapa disciplinaria	Etapa terminal
Álgebra superior	Cálculo IV	Funciones especiales
Álgebra lineal I	Física Moderna	Análisis de Fourier I
Cálculo IV	Probabilidad	Análisis de Fourier II
Cálculo II	Estadística	Simulación determinística
Cálculo III	Int. a los procesos estocásticos	Simulación estocástica
Fśica I	Programación	Variable compleja II
Física II	**Métodos numéricos I**	Modelos matemáticos lineales
Física III	Ec. Diferenciales Ordinarias	y no lineales
	Análisis Matemático I	
	Análisis Matemático II	
	Álgebra Moderna	
	Álgebra Lineal II	
	Variable compleja I	
	Ecu. Diferenciales Ordinarias	

El propósito del curso de Métodos Numéricos es que el estudiante aprenda los algoritmos básicos del cálculo numérico, sus fundamentos teóricos, ventajas y desventajas y los problemas relacionados con su implementación.

Objetivos generales del curso

1. Construirá algoritmos estructurados, para cada uno de los procedimientos numéricos estudiados.

2. Compondrá un paquete de subprogramas en el que incluirá (deberá hacerlo), para cada subprograma:

A) Descripción de los algoritmos empleados en la subrutina programada y su ubicación en el programa.
B) Identificación de cada una de las variables que intervienen en el programa.
C) Recomendaciones de uso y con qué tipo de problemas se pueden usar.

3. Utilizará su paquete de subprogramas en la solución de problemas reales interrelación con otras disciplina.

***Benemérita Universidad Autónoma de Puebla**

Licenciatura en Matemáticas Aplicadas. El objetivo general es formar profesionistas con una sólida preparación matemática, que sea capaz de utilizar y crear modelos matemáticos que permitan colaborar en la búsqueda de soluciones a problemas planteados en los distintos sectores sociales, en lo que atañe a la producción, control y planeación en el estudio de la problemática que conlleva, la implantación de nuevos métodos y formas de industrialización (estudios teóricos y prácticos de nuevas tecnologías); en el análisis y solución de problemas referentes a la economía, a los servicios o al comercio que sean susceptibles de un tratamiento matemático o de carácter general o concreto que den respuesta a las demandas sociales y económicas de nuestro país.La carrera de Licenciado en Matemáticas Aplicadas que ofrece esta universidad se forma en dos periodos: Nivel básico y Nivel Formativo.

El tópico de nuestro interés se encuentra situado en el Nivel Formativo en la disciplina de Análisis Numérico. El esquema del curso es el siguiente:

El **objetivo general** del curso es estudiar métodos matemáticos y su implementación en una computadora para la solución de problemas prácticos.

Los objetivos específicos son:

- Mostrar las limitaciones de una computadora
- Mostrar métodos para solucionar problemas (métodos matemáticos aplicados)
- Mostrar los errores generados por estos métodos y la manera de evitarlos

- Mostrar los errores generados por la implementación de los métodos en una computadora y la manera de evitarlos

Las unidades temáticas en donde se plantean los métodos de aproximación a raíces de una variable es:

- I. Errores de redondeo
- II. Ceros de funciones

  [*] Polinomios

  [-] Método de Horner

  [-] Raíces Múltiples

  [-] Reglas de signos de Descartes

  [*] Métodos para aproximar ceros de funciones

  [-] Método de bisección

  [-] Criterio de paro

  [-] Orden de convergencia

  [-] Método de Newton-Raphson

  [-] Método de la secante

  [-] Método de la regla falsa

  [-] Método de la regla falsa modificada

  [-] Método de punto fijo

Bibliografía básica

1. Burden, R. I. y Faires, J. D. (1985). *Análisis Numérico*. Iberoamérica, México.
2. Demidovich B. P., Maron I. A. (1981). *Computational Mathematics*. 1st. Edition, MIR, Moscú.
3. Fröberg, C. E. (1977). Introducción al Análisis Numérico. Traducción de Mariano Gasca González. Vinces VIVES.
4. Johnston, R. L. (1982). *Numerical Methods a Software Approch*. 1st. Edition, John Wiley and Sons, New York.
5. Kindcaid, D. & Cheney, W. (1990). *Numerical Analysis*. Books/Cole Publishing Company.

6. Nakamura, S. (1992). *Métodos numéricos aplicados con software.* Prentice-Hall, Hispanoamericana, S. A.

En la revisión de los programas de estudio de las licenciaturas en Matemáticas, nos hemos dado cuenta de que los enfoques son diferentes desde el punto de vista de que, en algunas la finalidad es favorecer en el sentido "aplicado" y en otra es de favorecer en el sentido "teórico". Por ejemplo, la asignatura en donde identificamos nuestro tópico matemático de estudio, en algunas Universidades se les da el carácter de obligatoria, mientras que en otras el de optativas. Sin embargo, uno podría cuestionarse según los objetivos de la asignatura si debe o no ser una rama de la matemática que debieran conocer en general los estudiantes de cualquier licenciatura en matemáticas independientemente de su orientación (matemática aplicada o matemática abstracta).

De acuerdo a los contenidos de las asignaturas Métodos Numéricos y Análisis Numérico, estudiar los métodos de aproximación para encontrar raíces de ecuaciones no lineales, contribuye al los objetivos de dichas asignaturas, lo que nos da pie para argumentar que efectivamente dichos métodos contribuyen en la creación de modelos matemáticos que permitan colaborar en la búsqueda de soluciones a problemas planteados en los distintos sectores sociales, por ejemplo.

En consecuencia, hemos realizado una clasificación de la mayoría de los libros sugeridos como bibliografía para el curso de análisis numérico, en los programas de estudio mencionados, respecto del tratamiento del tópico matemático en cuestión. De tal manera que pudimos mirar la información de primera mano y concluimos en clasificarlos en tres grupos básicamente:

- **Grupo 1.** Libros Teóricos
- **Grupo 2.** Libros Teóricos - Tecnológicos
- **Grupo 3.** Libros Teóricos - Prácticos

El Grupo 1 se caracteriza, como su nombre lo dice, porque en ellos se da un tratamiento puramente teórico al contenido, es decir, se observa la rigurosidad matemática en su totalidad. Estos libros generalmente no muestran gráficos, y tampoco recurren a la tecnología como medio para resolver los cálculos numéricos. Asimismo los ejercicios que se plantean, son de aplicación de los algoritmos y de corte demostrativo con la aplicación de los teoremas y corolarios vistos.

El Grupo 2 se caracteriza, porque en los libros puede notarse un tratamiento riguroso en el sentido matemático pero se recurre al uso de algún lenguaje de programación como ayuda para resolver los problemas planteados, aunque su uso suele ser del tipo práctico. Es decir, se buscan generar habilidades en la programación para su aplicación en los algoritmos iterativos. Algunos de estos libros introducen gráficos sólo como representación del algoritmo, no así, para fomentar desarrollo de alguna propiedad intuitivamente. Los ejercicios que se plantean, siguen siendo de corte puramente matemático, es decir, son de aplicación de los algoritmos y de corte demostrativo con el uso de los teoremas y corolarios vistos.

El Grupo 3 se caracteriza, porque también en los libros se nota un tratamiento riguroso en el sentido matemático y se recurre al uso de algún lenguaje de programación como ayuda para resolver los problemas planteados, incluso en algunos se recurre al uso de algún software usado en la enseñanza con fines didácticos para la resolución de problemas y ejercicios. Es decir, se busca introducir el uso de softwares didácticos con la finalidad de que los estudiantes vean, perciban o fortalezcan las propiedades que derivan del tratamiento de los métodos iterativos. Estos libros generalmente recurren al uso de la graficación como un medio para enriquecer el tratamiento de dichos métodos. Además son libros que explican muy detalladamente el contenido en el sentido pedagógico.

En la tabla siguiente mostramos la clasificación por grupos:

Grupo	Libro
Grupo 1 Teórico	⋄ Conte, S. D. y De Boor, C. (1980). *Elementary numerical analysis. An Algorithmic Approach.* McGraw-Hill Book Company. ⋄ Fröberg, C. E. (1977). Introducción al Análisis Numérico. Traducción de Mariano Gasca González. VICENS universidad. ⋄ Hamming, R. W. (1973). *Numerical Methods for Scientists and Engineers*. 2a. Ed. McGraw-Hill, Inc. New York. ⋄ Henrici, P. K. (1972). *Elementos de Análisis Numérico*. Trillas, México. ⋄ Hildebrand, F. B. (1974). *Introduction to Numerical Analysis*. 2a. Ed. McGraw Hill Book Company, Inc. ⋄ Shampine, L. F. & Allen Jr. R. C. (1973). *Numerical Computing: An introduction*. W. B. Saunders Company (Eds.), Philadelphia.
Grupo 2 Teórico-Tecnológico	⋄ Atkinson, K. E. (1978). *An Introduction to Numerical Analysis*. John Wiley and Sons, Inc. New York. ⋄ Johnston, R. L. (1982). *Numerical Methods a Software Approch*. 1st. Edition, John Wiley and Sons, New York. ⋄ Kahaner, D., Moler, C. & Nash, S. (1989). *Numerical Methods and Software*. Prentice-Hall, New Jersey. ⋄ Nakamura, S. (1992). *Métodos numéricos aplicados con software*. Prentice-Hall, Hispanoamericana, S. A.
Grupo 3 Teórico-Práctico	⋄ Burden, R. I. y Faires, J. D. (2002). *Análisis Numérico*. Thomson Learning. ⋄ Carnahan, B., Luther, H. A. & Wilkers, J. O. (1969). *Applied Numerical Methods*. John Wiley and Sons, Inc. New York. ⋄ Kindcaid, D. & Cheney, W. (1990). *Numerical Analysis*. Books/Cole Publishing Company.

Cuadro 4.3: Clasificación de textos utilizados en la enseñanza de los métodos numéricos.

Ahora bien, de acuerdo a la clasificación anterior, hemos seleccionado un libro por grupo para el análisis del contenido de los métodos de aproximación, a fin de ver su transposición al respecto del contenido erudito, y por otra parte con la finalidad de mirar sobre el tratamiento didáctico que le damos hoy día. Cabe mencionar que además de tomar en cuenta la bibliografía recomendada por algunas de las universidades más importantes de México, también contemplamos al o los autor(es), el número de edición y la editorial por ejemplo. Así que decidimos analizar los siguientes libros.

Del **Grupo 1**:
Libro A. Conte, S. D. y Boor, C. (1980). *Elementary Numerical Analysis. An Algorithmic Approach.* 3a. Ed. McGraw-Hill Book Company.

Del **Grupo 2**:
Libro B. Nakamura, S. (1992). *Métodos numéricos aplicados con software.* Prentice Hall Hispanoamericana, S. A.

Del **Grupo 3**:
Libro C. Burden, R. I. y Faires, J. D. (2002). *Análisis Numérico.* Thomson Learning.

En la siguiente sección, mostramos cómo es presentado el tema de los métodos iterativos en los libros anteriores, considerando tanto los objetivos de investigación planteados en el segundo capítulo como las categorías de análisis para los libros contemporáneos mencionadas al final del mismo.

4.2. Análisis de libros de texto. Resolución de ecuaciones no lineales de una variable

El esquema de presentación es la siguiente:

- **Parte A.** Ficha de referencia de cada texto seguida de una descripción breve del objetivo general y de lo que al autor quiere transmitir en él.
- **Parte B.** Análisis de acuerdo a las categorías correspondientes.

Las categorías de análisis para los textos se encuentran en el capítulo 2. Al respecto cabe mencionar que recurrimos a los campos *Análisis Conceptual, Análisis Didáctico* y *Análisis Fenomenológico*, para conocer cómo es el desarrollo conceptual de los métodos iterativos en el contexto de su enseñanza actual. En lo que sigue mostramos el análisis para cada texto:

Parte A. Ficha de referencia de cada texto seguida de una descripción breve del objetivo general y de lo que al autor quiere transmitir en él.

Libro A.

Autores	S. D. Conte Carl de Boor.
Título	*Elementary numerical analysis. An Algorithmic Approach.*
Año, editorial y lugar de la edición consultada	1980, Editado por McGraw-Hill, 3a.Ed. New York.
Localización del manual utilizado	Biblioteca de la Fac. de Educación de USAL/Biblioteca personal.

Cuadro 4.4: Ficha de referencia. Libro A.

La obra está dirigida principalmente a estudiantes que se encuentran entre los niveles superior y licenciatura, asimismo a estudiantes de ingeniería, matemáticas y ciencias incluyendo particularmente a los de ciencias de la computación. Se requiere que para el estudio de la obra se tenga una formación sólida en cálculo (**ACCP**). Los autores mencionan que cuando se trabaja con conceptos matemáticos avanzados, como normas y ortogonalidad, estos se manejan de manera adecuada al nivel de los estudiantes y no compromete los conocimientos previos.

Se asume que los estudiantes tienen o han tenido acceso a una computadora y que están familiarizados con la programación, en algunos casos(**ACCP**).

En el texto se presentan varios algoritmos y programas de FORTRAN. Hay algo menos completo de los programas en esta edición. Todos los programas se han probado en uno o más ordenadores para su viabilidad.

Libro B.
La obra en general combina los fundamentos matemáticos del análisis numérico, la aplicación de métodos numéricos a problemas de ingeniería, ciencias y matemáticas con el empleo del lenguaje de programación MATLAB. Básicamente es un libro de texto para estudiantes universitarios no

Autores	Shoichiro Nakamura
Título	*Métodos numéricos aplicados con software.*
Año, editorial y lugar de la edición consultada	1992, Editado por Prentice-Hall Hispanoamericana, S. A.
Localización del manual utilizado	Biblioteca de la Fac. de Educación de USAL/Biblioteca personal.

Cuadro 4.5: Ficha de referencia. Libro B.

graduados.

El autor plantea que MATLAB ha cambiado el concepto de programación para análisis numérico y matemático. El libro contiene temáticas consideradas para estudiantes de ingeniería, ciencias e iniciados en posgrado.

El autor destaca que la importancia de los métodos numéricos ha aumentado de forma drástica en la enseñanza de la ingeniería y ciencia, importancia que se ve reflejada en uso actual y sin precedentes de las computadoras. Menciona que estudiar métodos numéricos hace apto al aprendiz en: entender esquemas numéricos a fin de resolver problemas matemáticos, de ingeniería y científicos en una computadora; deducir esquemas numéricos básicos; escribir programas y resolverlos con una computadora; y usar correctamente el software existente para dichos métodos. En su opinión, el aprendizaje de los métodos numéricos, aumenta la habilidad para el uso de las computadoras y amplia la pericia matemática y la comprensión de los principios científicos básicos.

Entre los objetivos del libro enuncia: que sea fácilmente comprensible para los estudiantes de licenciatura con un conocimiento mínimo de matemáticas (**ACCP**); capacitar a los estudiantes para que practiquen los métodos en una microcomputadora; proporcionar programas cortos que puedan usarse de manera sencilla en aplicaciones científicas con o sin modificaciones; proporcionar software que resulte fácil de comprender.

Libro C.

La primera edición del libro *Numerical Analysis* fue publicado hace más de 20 años. En el prólogo se menciona que fue el primer libro que mostró un tratamiento completo de los métodos de aproximación en la solución de problemas matemáticos para estudiantes de ciencia e ingeniería, lo cual se sigue

Autores	Richard L. Burden J. Douglas Faires
Título	*Análisis numérico*
Año, editorial y lugar de la edición consultada	2002, Editado por Thomson Learning, México.
Localización del manual utilizado	Biblioteca de la Fac. de Educación de USAL/Biblioteca personal.

Cuadro 4.6: Ficha de referencia. Libro C.

conservando, ya que en la edición que analizamos, se menciona que ésta, está dirigida para estudiantes orientados a las matemáticas, ciencias e ingeniería que han concluido su curso de cálculo en licenciatura.

La filosofía del texto es dar una introducción a los métodos numéricos, explicar cómo, por qué y cuándo se espera que éstos funcionen además de proporcionar una base firme para un estudio futuro.

Los ejercicios varían desde aplicaciones elementales de los algoritmos hasta generalizaciones y extensiones de la teoría. Las aplicaciones demuestran cómo se usan los métodos numéricos en situaciones de la vida real.

El texto ha sido diseñado de manera que los instructores tengan flexibilidad en la elección de los temas así como en el nivel de rigor teórico y en el énfasis de las aplicaciones.

Se menciona también que el uso por los estudiantes de algunos Sistemas Algebraicos computacionales para el tratamiento de estos métodos, se ha incrementado para perfeccionar los cálculos requeridos. Éstos les permiten ver los efectos puntuales de un método sin tener que realizar perdida de tiempo con la computadora.

Algunos lenguajes de programación que se incluyen en el texto son C, FORTRAN y Pascal y hojas de trabajo como Maple, MATLAB y Mathematica.

En la introducción se menciona que el análisis numérico trata de diseñar métodos para aproximar de una manera eficiente, las soluciones de problemas expresados matemáticamente. La eficiencia depende tanto de la presición que se requiera como de la facilidad con que pueda implementarse. Para obtener la aproximación se idea un método llamado algoritmo, el cual consiste en una secuencia de operaciones algebraicas y lógicas que producen la aproximación al problema matemático y se espera que también al problema físico, con una tolerancia y precisión determinista.

Parte B. Análisis de acuerdo a las categorías correspondientes.

En el **libro A**, el tema de nuestro interés se encuentra en el capítulo tres del libro, el cual está estructurado de la siguiente manera[6]:

Capítulo 3. La Solución de Ecuaciones No Lineales

- Reconocimiento de los Métodos Iterativos
- Programas en Fortran para Algunos Métodos Iterativos
- Iteración de Punto-Fijo
- Aceleración de la Convergencia para la Iteración de Punto-Fijo
- Convergencia del Métodos de Newton y de la Secante
- Ecuaciones Polinomiales: Raíces Reales
- Raíces Complejas y el Método Müller

A este capítulo le precede el capítulo referente a sistemas de números y errores y el referente a la interpolación por polinomios. En el primero, se muestran temas tales como, la representación de enteros y fracciones, los métodos computacionales para la estimación de error, comentarios referentes a la convergencia de sucesiones, y como preliminares necesarios para los capítulos subsecuentes menciona el teorema del valor intermedio para funciones continuas, el teorema del valor medio para integrales, el teorema de Rolle, el teorema del valor medio para derivadas, el teorema de Taylor con residuo y

[6]En el libro, textualmente aparece como:
Chapter 3. The Solution of Nonlinear Equations

- A Survey of Iterative Methods
- Fortran Programs for Some Iterative Methods
- Fixed-Point Iteration
- Convergence Acceleration for Fixed-Point Iteration
- Convergence of the Newton and Secant Methods
- Polynomial Equations: Real Roots
- Complex Roots and Müller's Method

la regla de la cadena. En el segundo, se ven temas como, las formas polinomiales, la existencia y unicidad de la interpolación polinomial, la diferencia dividida como una función de sus argumentos, el error de la interpolación polinomial, etc. (**ACCP**)

En el **libro B**, el tema de nuestro interés se encuentra en el capítulo tres, y está estructurado de la siguiente manera:

3 Solución de ecuaciones no lineales

- Introducción
- Método de bisección
- Método de la falsa posición y método de la falsa posición modificada
- Método de Newton
- Método de la secante
- Método de la sustitución sucesiva
- Método de Bairstow

Menciona el autor que el libro comprende temas desde el 2o. año de licenciatura hasta el primero de posgrado, para estudiantes de ingeniería y de ciencias. Su interés se manifiesta en que la importancia de los métodos numéricos ha aumentado en la enseñanza de esas carreras, y ello se refleja por el uso actual y sin precedentes de las computadoras. Su opinión acerca de aprender métodos numéricos es que nos hace aptos para: 1) entender esquemas numéricos a fin de resolver problemas matemáticos, de ingeniería y científicos en una computadora; 2) deducir esquemas numéricos básicos; 3) escribir programas y resolverlos en una computadora, y 4) usar correctamente el software existente para dichos métodos.

Los objetivos del libro que el autor describe son: 1) que sea fácilmente comprensible para los estudiantes de licenciatura con un conocimiento mínimo de matemáticas; 2) capacitar a los estudiantes para que practiquen en una microcomputadora; 3) propocionar programas cortos que puedan usarse de manera sencilla en aplicaciones científicas con o sin modificaciones, y 4) proporcionar software que resulte fácil de comprender.

En resumen, el autor menciona que el aprendizaje de los métodos numéricos no sólo aumenta nuestra habilidad para el uso de computadoras sino también amplia la pericia matemática y la comprensión de los principios científicos básicos.

En la introducción del capítulo de nuestro interés, el autor inicia dando ejemplos de funciones no lineales que pueden ser resultas con algún método numérico. El menciona que la razón principal para resolver ecuaciones no lineales por medio de este tipo de métodos, es que ellas carecen de solución exacta, por ejemplo, la solución analítica para ecuaciones polinomiales existe sólo hasta orden cuatro, pero no existen soluciones en forma exacta para órdenes superiores.

Enfatiza que los estudiantes deben aprender los pros y los contras de cada método y en particular sus dificultades, además de familiarizarse con los métodos mediante la práctica en una computadora.

Con la finalidad de que los lectores tengan una idea de los requerimientos para cada método, en la misma introducción del capítulo, el autor propone la siguiente tabla:

Nombre	Necesidad de especificar un intervalo que contenga a la raíz	Necesidad de la continuidad de f'	Tipos de ecuaciones	Otras características especiales
Bisección	Sí	No	Cualquiera	Robusto, aplicable a funciones no analíticas
Falsa Posición	Sí	Sí	Cualquiera	Convergencia lenta en un intervalo grande
Falsa Posición Modificada	Sí	Sí	Cualquiera	Más rápido que el método de la falsa posición
Método de Newton	No	Sí	Cualquiera	Rápido; se necesita calcular f'; aplicable a raíces complejas
Método de la secante	No	Sí	Cualquiera	Rápido; no se requiere calcular f'
Sustitución Sucesiva	No	Sí	Cualquiera	Puede no converger
Método de Bairstow	No	Sí	Polinomial	Factores cuadráticos

Cuadro 4.7: Resumen de los esquemas para encontrar raíces.

Esta tabla resume las características principales de los métodos numéricos para ecuaciones lineales. El autor menciona que los primeros tres métodos tienen la característica común de que con ellos puede encontrarse una raíz si se conoce un intervalo de x que contenga a la raíz, por lo tanto se necesita un esfuerzo preliminar para estimar un intervalo adecuado que contenga a la raíz deseada, al respecto de los métodos de Newton y el de la secante, menciona que necesitan una estimación inicial pero no es necesaria la estimación de un intervalo, del método de la sustitución sucesiva que es un algoritmo iterativo simple, pero que su desventaja es que la iteración no siempre converge y finalmete del método de Bairstow menciona que éste se limita a los polinomios, pero se pueden hallar todas las raíces incluso las complejas, sin conocimientos previos de cualquier tipo, aunque a veces que la iteración no converja en lo absoluto.

Ahora bien, en el **libro C** el tema de nuestro interés se encuentra en el capítulo dos del libro, el cual está estructurado de la siguiente manera:

Capítulo 2. Soluciones de ecuaciones de una variable

- El método de bisección
- Iteración de punto fijo
- El método de Newton
- Análisis de error para los métodos iterativos
- Convergencia acelerada
- Ceros de polinomios y el método de Müller
- Una visión general de los métodos y de software

Los conocimientos previos que se requieren para este capítulo son: la definición de raíz de una ecuación, ceros de una función, el Teorema del valor intermedio, la definición de continuidad, el algoritmo para calcular el punto medio, la definición de la función signo, la definición de sucesión, el concepto de convergencia y la definición de límite. (**ACCP**)

Como puede observarse, los conocimientos previos que se requieren en las tres obras para el tratamiento de los métodos iterativos para ecuaciones no lineales de una variable es el mismo, haciendo variaciones sólo en el orden de su introducción, o incrementando más según el contenido general lo requiere. Una característica en las tres obras, es la identificación del uso de la tecnología como consubstancial con los métodos iterativos. Las tres obras, reflejan una tendencia de dicho uso para facilitar los cálculos, pero en ninguno uno de ellos se nota una tendencia a su uso como objeto para construir conocimiento.

Ahora bien, aunque el análisis de libros se realizó libro por libro, en lo que sigue mostramos dicho análisis de acuerdo a cada método iterativo, pues ello permite ver más claro la forma en que cada método se presenta y las diferencias con las otras obras, de tal forma que es más viable observar las variaciones conceptuales.

⧫ Método de Bisección

★Análisis conceptual

En el **libro A**, el método de bisección se introduce de manera constructiva (**ACCC**), a través de un ejemplo, ellos plantean resolver la ecuación $x^3 - x - 1 = 0$ en donde $f(x) = x^3 - x - 1$, y hacen notar que

$$f(1) = -1 < 0 < 5 = f(2)$$

de tal forma que como $f(x)$ es continua debería hacerse cero en algún punto del intervalo $[1, 2]$ por el teorema del valor intermedio y si $f(x)$ se hace cero en dos o más puntos del intervalo $[1, 2]$ entonces por el mismo teorema, $f'(x)$ tedría un cero en $[1, 2]$. Así como $f(x) = 3x^2 - 1$ es positiva en $[1, 2]$, $f(x)$ tiene un sólo cero en $[1, 2]$.

Llamando a ese cero ξ, entonces $\xi \approx 1{,}5$ con un error absoluto $\leq 0{,}5$.

Mencionan que para conocer más acerca del cero, se evalue a $f(x)$ en el punto medio del intervalo $[1, 2]$, de donde,

$$f(1{,}5) = 0{,}875 > 0 > -1 = f(1)$$

de aqui se conoce que el cero se encuentra en el intervalo más pequeño $[1, 1{,}5]$ y por lo tanto,

$\xi \approx 1{,}25$ con un error absoluto $\leq 0{,}25$

así se repite el procedimiento evaluando en el punto medio 1,25.

$$f(1{,}25) = -0{,}296\cdots < 0 < 0{,}875 = f(1{,}5)$$

y por lo tanto se conoce que ξ está en el intervalo más pequeño $[1{,}25, 1{,}5]$, es decir

$\xi \approx 1{,}375$ con un error absoluto $\leq 0{,}125$

Mencionan que con este procedimiento se localiza a una solución de la ecuación $f(x) = 0$ en una sucesión de intervalos de tamaño decreciente, método que es llamado de bisección.

Debemos observar que fueron construyendo la sucesión de intervalos y al final mencionaron el nombre del método. Seguido de esto, presentan el algoritmo (**ACCF**):

Algorithm 3.1: Bisection method. Given a function $f(x)$ continuous on the interval $[a_0, b_0]$ and such that $f(a_0)f(b_0) < 0$. For $n = 0, 1, 2, \cdots$, **until satisfied**, do:
Set $m = (a_n + b_n)/2$
If $f(a_n)f(a_m) \leq 0$, set $a_{n+1} = a_n, b_{n+1} = m$
Otherwise, set $a_{n+1} = m, b_{n+1} = b_n$
Then $f(x)$ has a zero in the interval $[a_{n+1}, b_{n+1}]$

Por otra parte, en el **libro B**, se inicia diferenciando las ventajas y desventajas del método de bisección, primero se menciona que éste es el más simple, seguro y sólido para encontrar una raíz en un intervalo dado, donde se sabe que existe dicha raíz. Y que una de sus ventajas es que funciona aun para funciones no analíticas.

En este libro, la introducción del concepto es gráfica (**ACRG**), y se menciona que el método se basa en el hecho de que, para que un intervalo $[a, c]$ tenga una raíz, basta que los signos de $y(x)$ en los dos extremos sean opuestos o bien que $f(a)$ o $f(c)$ se anulen, es decir, $f(a) \cdot f(c) \leq 0$

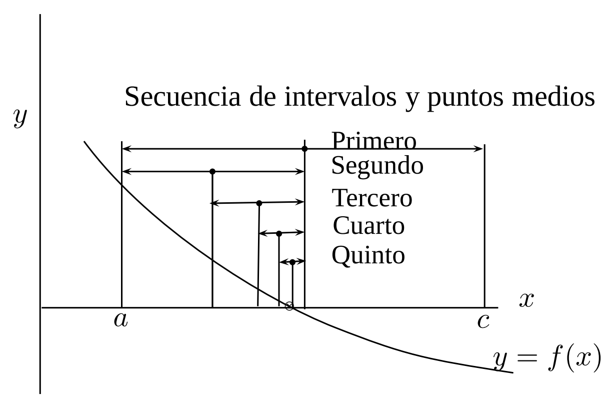


Figura 4.1: Representación gráfica del método de bisección. Libro B.

Un ejemplo que propone al respecto del método es el siguiente (**ACEEA**):

Se sabe que la raíz de

$$e^x - 2 = 0$$

está en $[0, 2]$. Hallar un valor aproximado de la raíz con una tolerancia de $\varepsilon = 0{,}01$ mediante el método de bisección.

Para su solución, el autor explica verbalmente la aplicación de la técnica y posteriormente lo representa con la siguiente tabla:

Número de iteración, i	a	b	c	$f(a)$	$f(b)$	$f(c)$	Cota del error
1	0	1	2	-1	0.7182	5.3890	1
2	0	0.5	1	-1	-0.3512	0.7182	0.5
3	0.5	0.75	1	-0.3512	0.1170	0.7182	0.25
4	0.5	0.625	0.75	-0.3512	-0.1317	0.1170	0.125
5	0.625	0.6875	0.75	-0.1317	-0.0112	0.1170	0.0625
6	0.6875	0.7187	0.75	-0.0112	0.0518	0.1170	0.03125
7	0.7865	0.7031	0.7187	-0.0112	0.0200	0.0518	0.015625
8	0.6875	0.6953	0.7031	-0.0112	0.0043	0.0200	0.0078125

Cuadro 4.8: Método de bisección para $e^x - 2 = 0$.

La solución para este ejemplo es $b = 0{,}6953$ y su cota de error (máximo error posible) es 0,0078, que está dentro de la tolerancia específica.

Finalmente en el **libro C**, de entrada se plantea el concepto de manera heurística (**ACCH**), su introducción se realiza de manera gráfica (**ACRG**), planteando visualmente la bipartición del intervalo tantas veces como sea necesario, lo cual representa la técnica iterativa fundamentalmente.(Ver figura siguiente)

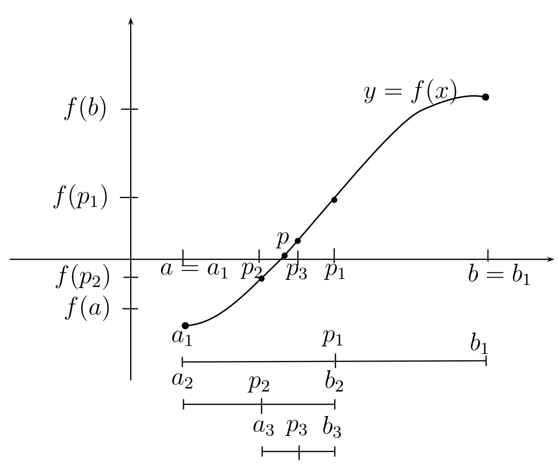


Figura 4.2: Representación gráfica del método de bisección. Libro C.

En este libro, también se plantea el algoritmo de bisección de manera constructiva (**ACCC**), como sigue:

Para obtener una solución a $f(x) = 0$ dada la función f continua en el intervalo $[a, b]$, donde $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos:

ENTRADA extremos a, b; tolerancia TOL; número máximo de iteraciones N_0.

SALIDA solución aproximada p o mensaje de error.

Paso 1 Tome $i = 1$;
$FA = f(a)$

Paso 2 Mientras $i \leq N_0$ haga pasos 3-6.

Paso 3 Tome $p = a + (b - a)/2$; (Calcule p_i.)
$FP = f(p)$

Paso 4 Si $FP = 0$ o $(b - a)/2 < TOL$ entonces
SALIDA p;
PARAR

Paso 5 Tome $i = i + 1$.

Paso 6 Si $FA \cdot FP > 0$ entonces $a = p$; (Calcule a_i, b_i)
$FA = FP$
Si no tome $b = p$.

Paso 7 SALIDA ('El método fracasó después de N_0, iteraciones, $N_0 ='$, N_0);
(*Procedimiento terminado sin éxito.*)
PARAR.

También muestran un ejemplo cuya representación es numérica (**ACEEA**) (**ACRN**) y se muestra tabularmente. Su función es la ejemplificar la técnica aplicada un cierto número de veces consecutivamente para verificar el error de convergencia. (Ver el cuadro siguiente.)

n	a_n	b_n	p_n	$f(p_n)$
1	1.0	2.0	1.5	2.375
2	1.0	1.5	1.25	-1.79687
3	1.25	1.5	1.375	0.16211
4	1.25	1.375	1.3125	-0.84839
5	1.3125	1.375	1.34375	-0.35098
6	1.34375	1.375	1.359375	-0.09641
7	1.359375	1.375	1.3671875	0.03236
8	1.359375	1.3671875	1.36328125	-0.03215
9	1.36328125	1.3671875	1.365234375	0.000072
10	1.36328125	1.365234375	1.364257813	-0.01605
11	1.364257813	1.365234375	1.364746094	-0.00799
12	1.364746094	1.365234375	1.364990235	-0.00396
13	1.364990235	1.365234375	1.365112305	-0.00194

Cuadro 4.9: Algoritmo de bisección para $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$

Además se muestra como determinar el error de convergencia con base en el siguiente teorema (**ACEET**), el cual también representa formalmente la técnica del método (**ACCF**):

Teorema: Supongamos que $f \in C[a,b]$ y $f(a) \cdot f(b) < 0$. El método de bisección que se usa en el algoritmo de bisección genera una sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ que aproxima a un cero de p de f tal que

$$|p_n - p| \leq \frac{b-a}{2^n}$$

donde $n \geq 1$.

★Análisis Didáctico

Puede observarse en la parte del análisis conceptual para el **libro A**, que al principio del algoritmo presentado utilizan la frase "**until satisfied**", lo cual indica y destaca que el algoritmo es incompleto, es decir que es una aproximación muy cercana. En consecuencia los autores mencionan que quien use el algoritmo debe precisar el criterio de terminación, lo cual dependerá en parte del problema específico a resolver con dicho algoritmo. (**ADCH**)

También hacen notar que en cada paso la longitud del intervalo que contiene al cero de $f(x)$ es reducido por un factor de 2, y por lo tanto cada paso produce un dígito correcto de la raíz de $f(x) = 0$. En consecuencia, mencionan que siempre se puede encontrar una raíz con la presición que uno desee con este algoritmo, sin embargo, comparado con otros métodos el método de bisección converge lentamente. (**ADCH**)

Ahora bien, en el **libro B**, se destaca primero que el tamaño del intervalo después de n pasos de la iteración es

$$\frac{(c-a)_0}{2^n}$$

donde el numerador es el tamaño del intervalo inicial. Lo anterior con el fin de que se observe que esa ecuación también representa el máximo error posible cuando la raíz se aproxima mediante el n-ésimo punto medio, así si la tolerancia de error está dada por ε, el número de pasos iteración necesarios es el mínimo entero que satisface

$$\frac{(c-a)_0}{2^n} \leq \varepsilon$$

o en forma equivalente

$$n \geq log_2 \frac{(c-a)_0}{2^n}$$

Para reafirmar proponen el siguiente ejemplo:

Si $(c-a)_0 = 1$ y $\varepsilon = 0{,}0001$, entonces $n = 14$.

Para el ejemplo mostrado en el análisis conceptual, $e^x - 2 = 0$ al aplicar el método de bisección se ha supuesto que hay una sola raíz en el intervalo y que $f(a)f(b) \leq 0$, al respecto el autor destaca que $f(a)f(b) \leq 0$ siempre que el intervalo tenga un número de raíces impares, así que en ese caso, el método encontrará una de las raíces separadas en el intervalo dado. (**ADCH**)

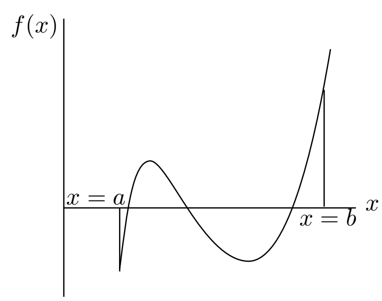


Figura 4.3: Número impar de raíces en un intervalo dado.

Otras debilidades que menciona acerca del método, es que éste no puede encontrar una pareja de raíces dobles, debido a que la función toca el eje x de manera tangencial en las raíces dobles. Además también puede atrapar una singularidad como si fuera una raíz, debido a que el método no reconoce la diferencia entre una raíz y una singularidad[7] (**ADCH**). Ver gráficas siguientes:

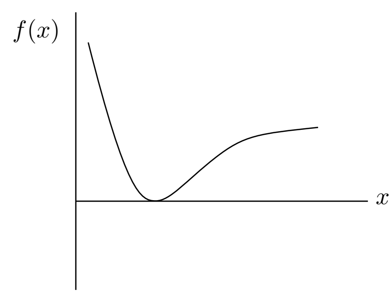


Figura 4.4: Función que toca al eje x en un punto.

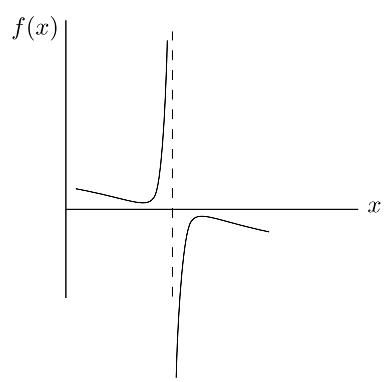


Figura 4.5: Función con una singularidad.

[7]Un punto singular es aquel en el que el valor de la función tiende a infinito.

Al respecto de lo anterior el autor sugiere que cuando no hay información acerca de los valores aproximados de las raíces, una forma sencilla para hallar intervalos de x que contengan una raíz es escribir una tabla de la función para valores de x con separación uniforme y entonces, si el signo del valor de la función cambia a través de un intervalo, significa que existe al menos una raíz en ese intervalo. También menciona que el enfoque gráfico es útil para localizar intervalos que contengan una raíz, en particular cuando la ecuación tenga varias raíces.

Para reafirmar la explicación del método de bisección, en esta obra se presenta el siguiente resumen:

a) El método de bisección encuentra una raíz de una función si se sabe que la raíz existe en un intervalo dado.

b) El método de bisección encuentra una raíz aun cuando la función no sea analítica.

c) Por otro lado, se puede atrapar una singularidad como si fuera una raíz, debido a que el método no distingue las raíces de las singularidades.

d) Una tarea importante que se debe realizar antes de aplicar el método de bisección es encontrar un intervalo que contenga a la raíz. La búsqueda de raíces se puede llevar a cabo listando una tabla de valores o graficando la función en la pantalla.

Finalmente en el **libro C**, se observa que los autores pretenden que los estudiantes *identifiquen* que se pueden aproximar a la solución de ecuaciones tanto como se quiera y al mismo tiempo, que para algunos casos, pueden encontrar una solución exacta dentro de un cierto parámetro **(ADCH)**. Esto puede observarse en los siguientes ejercicios:

Ejercicio 2. (Ejercicios 2.1) Sea $f(x) = 3(x+1)(x-\frac{1}{2})(x-1)$. Aplique el método de bisección a los siguientes intervalos para encontrar p_3.
a.[-2, 1.5] **b.**[-1.25, 2.5]

Ejercicio 3. (Ejercicios 2.1) Aplique el método de bisección para encontrar soluciones exactas dentro de 10^{-2} para $x^3 - 7x^2 + 14x - 6 = 0$ en cada intervalo.
a.[0, 1] **b.**[1, 3.2] **c.**[3.2, 4]

Se observa también que se introduce la noción de convergencia (**ADOA**), así por ejemplo se propone el siguiente ejercicio:

Ejercicio 8. (Ejercicios 2.1) Sea $f(x) = (x+2)(x+1)^2x(x-3)^3(x-2)$. ¿A cuál cero de f converge el método de bisección en los siguientes intervalos?

a.[-1.5, 2.5] **b.**[-0.5, 2.4] **c.**[-0.5, 3] **d.**[-3, -0.5]

★Análisis Fenomenológico

En la organización de este apartado, se muestran las situaciones encontradas en el siguiente orden: En torno a la matemática misma; En torno a otras ciencias; Fenoménos contextualizados.

Para el Libro A

- **En torno a la matemática misma.** (**AFTM**)

  Por lo general, las situaciones que encontramos plantean no sólo la realización de un cálculo, sino que a partir de él puedan observar otras propiedades implícitas en la explicación del contenido, por ejemplo, en la siguiente situación, se espera que los estudiantes puedan preever el error de estimación para 6 dígitos.

  Ejercicio 3.1-1. Find an interval containing the real positive zero of the function $f(x) = x^2 - 2x - 2$. Use Algorithms 3.1 (Bisection method) and 3.2 (Regula falsi) to compute this zero correct to two significant figures. Can you estimate how many steps each method would require to produce six significant figures.

- **En torno a otras ciencias.** (**AFOC**)

  No hay situaciones en torno a otras ciencias.

- **Fenoménos contextualizados.** (**AFFC**)

  No hay situaciones en torno a fenómenos contextualizados.

Para el Libro B

- **En torno a la matemática misma.** (**AFTM**)

  En este caso, observamos en general tres tipos de situaciones, aquellas en las que se plantea determinar una raíz sujeta a ciertas condiciones de tolerancia de error, aquellas relacionadas con el uso de un lenguaje de programación para realizar los cálculos, y aquellas que integran a los recursos gráficos para determinar propiedades.

Ejercicio 3.1 Determine la raíz positiva de $x^2 - 0{,}9x - 1{,}52 = 0$ en el intervalo $[1, 2]$ mediante el método de bisección, con una tolerancia de 0,001.

Ejercicio 3.2 Encuentre la raíz de

$$xsen(x) - 0{,}1 = 0, \qquad 0 < x < 1{,}0$$

mediante el método de bisección, con una tolerancia de 0,001.

Ejercicio 3.4
a. Determine un intervalo de tamaño 0,5 para cada raíz positiva de las siguientes ecuaciones, utilizando el programa 3-2[8]:

i. $f(x) = 0{,}5e^{x/3} - senx = 0, \qquad x > 0$
ii. $f(x) = log_e(1 + x) - x^2 = 0$

b. Grafique las funciones definidas anteriormente en el plano xy, utilizando el programa 3-3[9] y verifique los resultados de **a.**

- **En torno a otras ciencias.** (**AFOC**)

A este respecto, encontramos situaciones en relación con la física, con la aerodinámica y con la química. No obstante, en nuestra opinión las situaciones planteadas, carecen de significado si los estudiantes no cuentan con las nociones necesarias acerca del problema, desde la perspectiva de dichas disciplinas, en consecuencia, se plantean las situaciones en el sentido de aplicar el algoritmo conocido a fórmulas que modelan los fenómenos planteados en cada problema.

Fenómenos en cuanto a física:

Ejercicio 3.9 Un proyectil de $M = 2$gm se ha lanzado de forma vertical al aire y está descendiendo a su velocidad terminal. Dicha velocidad se determina mediante

[8]El programa 3-2, realiza la búsqueda de raíces con el lenguaje BASIC.
[9]El programa 3-3, realiza la gráfica de una función con el lenguaje BASIC.

la ecuación $gM = D_{drag}$ donde g es la gravedad y M es la masa; esta ecuación se puede escribir después de evaluar las constantes como

$$\frac{(2)(9{,}81)}{1000} = 1{,}4 \times 10^{-5}\nu^{1{,}5} + 1{,}15 \times 10^{-5}\nu^{2}$$

donde ν es la velocidad terminal en m/seg. El primer término del lado derecho representa la fuerza de fricción y el segundo la fuerza de la presión. Determine la velocidad terminal mediante el método de bisección, con una tolerancia de 0,001.

Fenómenos en cuanto a aerodimámica:

Ejercicio 3.10 La configuración superficial de la aeronave NACA 0012 de longitud de arco 1m y con espesor máximo de 0,2 m esta dada por

$$y = \pm[0{,}2969\sqrt{x} - 0{,}126x - 0{,}3516x^2 + 0{,}2843x^3 - 0{,}1015x^4]$$

donde los signos más y menos se refieren a las superficies superior e inferior, respectivamente. Determine x, donde el espesor del aparato es 0,1m por medio del método de bisección. Haga la tolerancia igual a 0,00001. (Existen dos soluciones.)

Fenómenos en cuanto a química:

Ejercicio 3.11 Una masa de 1kg de CO está contenido en un recipiente a $T = 215^o$K y $p = 70$bars. Calcule el volumen del gas utilizando la ecuación de estado de van der Waals para un gas no ideal, dada por [Moran/Shapiro]

$$P + \frac{a}{\nu^2}(\nu - b) = RT$$

donde $R = 0{,}08314$ bar m^3/kg mol ^{o}K, $a = 1{,}463$bar m^6/ (kg mol)^2 y $b = 0{,}0394$m^3/kg. Determine el volumen específico ν (en m^3/kg) y compare los resultados con el volumen calculado por la ecuación del gas ideal, $P\nu = RT$.

- **Fenómenos contextualizados. (AFFC)**

No hay situaciones en torno a fenómenos contextualizados.

Para el Libro C

- **En torno a la matemática misma. (AFTM)**

En este libro se observaron situaciones de tres tipos: las relacionadas con la aplicación del algoritmo de bisección como tal, las relacionadas con el uso de un teorema, y por último las que plantean el establecimiento de propiedades, a partir de relaciones entre conceptos. En lo que sigue, se muestran ejemplos concretos de cada tipo de situación:

Aplicación de la técnica iterativa:

Ejercicio 1. (Ejercicios 2.1) Aplique el método de bisección para obtener p_3 para $f(x) = \sqrt{x} - cosx$ en [0,1].

Aplicación de un teorema para obtener el número de iteraciones necesarias para no rebasar la cota de error establecida:

Ejercicio 12. (Ejercicios 2.1) Use el teorema 2.1 para obtener una cota del número de iteraciones que se requieren para alcanzar una aproximación con una exatitud de 10^{-3} a la solución de $x^3 - x - 1 = 0$ que se encuentra en el intervalo [1, 4]. Obtenga una aproximación de la raíz con ese grado de exactitud.

Relación entre conceptos:

Ejercicio 15. (Ejercicios 2.1) Sea $\{p_n\}$ la sucesión definida por $p_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$. Demuestre que $\{p_n\}$ diverge aún cuando $\lim_{n\to\infty}(p_n - p_{n-1}) = 0$ que

- **En torno a otras ciencias.** (**AFOC**)

En el **libro C** se observó únicamente la siguiente situación en cuanto a otra ciencia, en específico, la situación plantea un problema en el campo de la física:

Fenómenos en cuanto a física:

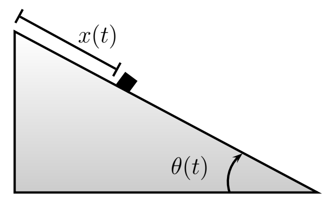
Ejercicio 18. (Ejercicios 2.1) Una partícula parte del reposo sobre un plano inclinado uniforme, cuyo ángulo θ cambia con una rapidez constante de

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega < 0$$

Al final de t segundos, la posición del objeto está dada por

$$x(t) = -\frac{g}{2\omega^2}\left(\frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2} - sen\omega t\right)$$

Suponga que la partícula se desplazó 1,7 pies en 1 s. Encuentre con una exactitud de 10^{-5}, la rapidez ω con que θ cambia. Suponga que $g = 32{,}17$ pies/s^2

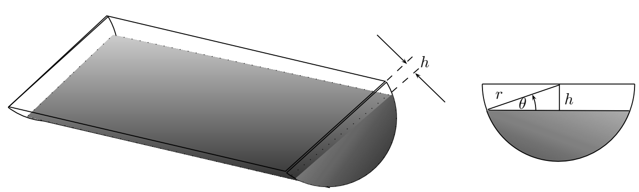


- **Fenoménos contextualizados.** (**AFFC**)

Para este caso, en el **libro de C**, se observó únicamente la siguiente situación:

Ejercicio 17. (Ejercicios 2.1) Un abrevadero de longitud L tienen una sección transversal en forma de semicírculo en radio r. Cuando se llena de agua hasta una distancia h de la parte superior, el volumen V de agua es

$$V = L[0{,}5\pi r^2 - r^2 \arcsin(h/r) - h(r^2 - h^2)^{1/2}].$$



Suponga que $L = 10$ pies, $r = 1$ pie, y que $V = 12{,}4$ pies^3. Determine la profundidad del agua en el abrevadero hasta 0.01 pies.

⧫ Método de punto fijo

★Análisis conceptual

La introducción del método de punto fijo en el **libro A**, se realiza a continuación del método de Newton, puesto que se considera que es un caso especial de él (**ACCC**).

Es decir, los autores consideran la ecuación:

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

entonces, la fórmula de iteración del método de Newton $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$ tomaría la forma simple:

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

Ahora, si la sucesión generada, $x_1, x_2, x_3, \cdots$ converge a algún punto ξ y $g(x)$ es continua, entonces

$$\xi = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(\lim_{n\to\infty} x_n) = g(\xi)$$

O $\xi = g(\xi)$, lo que significa que ξ es un punto fijo de $g(x)$.

También se menciona formalmente el algoritmo de punto fijo (**ACCF**) como sigue:

> **Algorithm 3.6: fixed-point iteration.** Given an iteration function $g(x)$ and a starting point x_0
>
> For $n = 0, 1, 2, \cdots$, until satisfied, do:
> Calculate $x_{n+1} = g(x_n)$

Mencionan que para poder usarlo se debe probar lo siguiente:

(i) For the given starting point x_0, we can calculate successively $x_1, x_2, \cdots$
(ii) The sequence $x_1, x_2, \cdots$ converges to some point ξ
(iii) The limit ξ is a fixed point of $g(x)$, that is, $\xi = g(\xi)$.

Y además de que para cada una de ellas se debe resolver las siguientes hipótesis respectivamente:

Assumption 3.1 There is an interval $I = [a, b]$ such that, for all $x \in I, g(x)$ is defined and $g(x) \in I$; that is, the function $g(x)$ maps I into itself.

Assumption 3.2 The iteration function $g(x)$ is continuous on $I = [a, b]$.
Assumption 3.3 The iteration function is differentiable on $I = [a, b]$. Further, there exist a nonnegative constant $K < 1$ such that

$$forall x \in I \qquad | g'(x) | \leq K$$

Enseguida mencionan el teorema de existencia y unicidad del punto fijo:

Theorem 3.1 Let $g(x)$ be an iteration function satisfying Assumptions 3.1 and 3.3. Then $g(x)$ has exactly one fixed point ξ in I, and starting with any point x_0 in I, the sequence $x_1, x_2, \cdots$ generated by fixed point iteration of Algorithm 3.6 converges to ξ.

Como puede observarse existe una lógica rigurosa en la forma del tratamiento del concepto.

Aunque en esta obra no hubo representaciones gráficas para las otras técnicas de aproximación de raíces tratadas en este trabajo, para la iteración de punto sí la hubo:

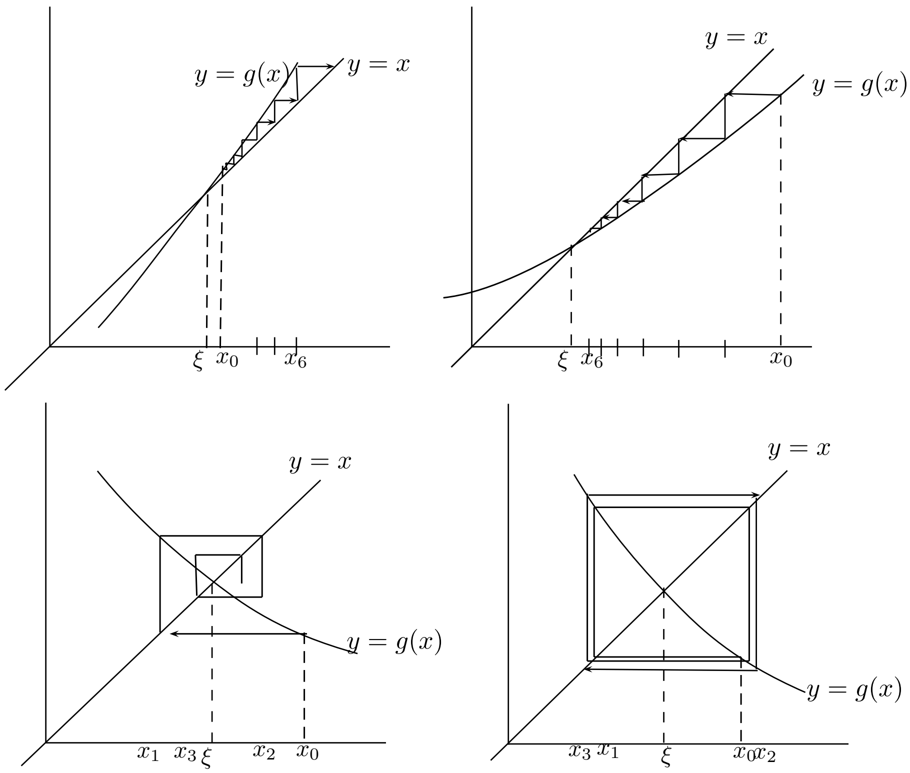


Figura 4.6: Iteración de Punto Fijo. Libro A.

Esta gráfica nos permite observar la importancia de las condiciones que propone el teorema, lo cual seguramente es algo que los autores quieren que se visualice justamente a partir de dicha gráfica, pues visualmente ya nos proporciona datos para poder hacer predicciones acerca de la convergencia o no con la técnica de punto fijo.

Ahora bien, en el **libro B**, a este método se le llama método de sustitución sucesiva e introducen el concepto tomando como referencia a Conte y de Boor, sin embargo el concepto se introduce de manera formal (**ACCF**) como sigue:

Si la ecuación $f(x) = 0$ se rearregla en la forma

$$x = \overline{f}(x)$$

entonces se puede escribir un método iterativo como

$$x^{(t)} = \overline{f}(x^{(t-1)})$$

donde el índice t es el número de pasos en la iteración y $x^{(0)}$ es una estimación inicial.

Enseguida enfatiza sobre las ventajas y desventajas del método, mencionando en el primer caso, la sencillez y flexibilidad para elegir la forma de $\overline{f}$, y en el segundo caso, que la iteración no siempre converge con cualquier forma elegida de $\overline{f}$. (**ADCH**)

Un ejemplo que proponen para mostrar la técnica es el siguiente (**ACEEA**):

> Ejemplo. Se sabe que la función $y = x^2 - 3x + e^x - 2$ tiene dos raíces: una negativa y una positiva. Hallar la menor de éstas mediante el método de sustitución sucesiva.
>
> Solución
> Verificamos el signo de y en $x = -1$ y $x = 0$ (a saber, $y(-1) = 2{,}367$ y $y(0) = -1$) para localizar la raíz menor en $[-1, 0]$. Reescribimos la ecuación anterior como
>
> $$x = \overline{f}(x) = \frac{x^2 + e^x - 2}{3}$$
>
> Se puede escribir un método iterativo como
>
> $$x^{(t)} = \overline{f}(x^{(t-1)})$$
>
> La primera derivada de $f(x)$ satisface la ecuación $\mid \overline{f'}(x) \mid < 1$ en el rango $[-1, 0]$, por lo que el método anterior es convergente. Los valores numéricos de la iteración se dan a continuación:

Contador de iteraciones n	Aproximación Sucesiva x_n
0	0 (estimación inicial)
1	-0.333333
2	-0.390786
3	-0.390254
4	-0.390272
5	-0.390272

> Las ecuaciones alternativas son:
>
> $$x = -\sqrt{3x - e^x + 2}$$

> y
>
> $$x = \sqrt{3x - e^x + 2}$$
>
> Sin embargo, las ecuaciones anteriores tienen discontinuidades en la vecindad de la raíz menor. Además las primeras derivadas de ambas ecuaciones violan la condición de la ecuación $| \overline{f'}(x) |< 1$ en la vecindad de la raíz. Por lo tanto, ninguna de las ecuaciones funciona.

Ahora bien, para definir la función adecuada, procede como sigue (**ACCH**):

> Un camino sistemático para encontrar una forma de $\overline{f}(x)$ es hacer que
>
> $$\overline{f}(x) = x - \alpha f(x)$$
>
> por lo tanto el esquema iterativo queda como
>
> $$x_n = x_{n-1} - \alpha f(x_{n-1})$$
>
> donde α es una constante.

A diferencia de las obras anteriores en relación a la introducción de la técnica de punto fijo, en el **libro C** primero se define lo que es punto fijo de la siguiente manera:

> Un **punto fijo** de una función g es un número p para el cual $g(p) = p$.

También se define de entrada la relación entre los problemas de búsqueda de raíces y los de punto fijo:

Los problemas de búsqueda de raíces y los de punto fijo son equivalentes en el siguiente sentido:

> Dado un problema de buscar una raíz $f(p) = 0$, podemos definir una función g con un punto fijo en p de diversas formas; por ejemplo, como $g(x) = x - f(x)$ o como $g(x) = x + 3f(x)$. Por el contrario si la función g tiene un punto fijo en p, entonces la función definida por $f(x) = x - g(x)$ tiene un cero en p

Y posteriormente la técnica iterativa se presenta mediante el siguiente teorema (**ACCF**):

> **Teorema 2.2 a.** Si $g \in C[a, b]$ y $g(x) \in [a, b]$, para toda $x \in [a, b]$, entonces g tiene un punto fijo. **b.** Y además si $g'(x)$ existe en (a, b) y existe una constante positiva $k < 1$ con $| g'(x) |\leq k$, para toda $x \in (a, b)$, entonces el punto fijo en $[a, b]$ es único.

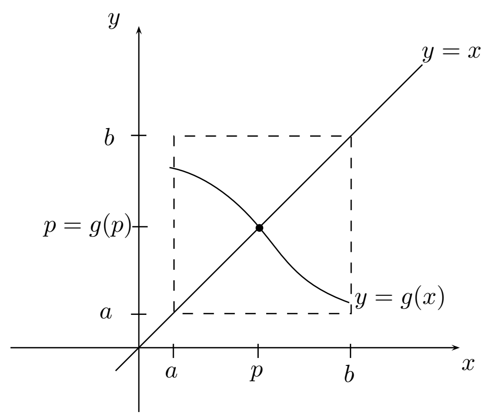


Figura 4.7: Representación gráfica del punto fijo. Libro C.

Enseguida los autores muestran lo anteriormente dicho con la representación gráfica (**ACRG**):
A continuación proponen un ejemplo de la técnica del Teorema 2.2 (**ACEET**):

> **a.** Sea $g(x) = (x^2 - 1)/3$ en [-1, -1]. El teorema del valor extremo establece que el mínimo absoluto de g ocurre en $x = 0$ y $g(x) = \frac{-}{1}3$. De manera análoga el máximo absoluto ocurre en $x = \pm 1$ y tienen valor $g(\pm 1) = 0$. Además, g es continua y
>
> $$\mid g'(x) \mid = \mid \frac{2x}{3} \mid \leq \frac{2}{3},$$
>
> para toda $x \in (-1, 1)$. Por lo tanto, g satisface todas las hipótesis del teorema 2.2 y tiene un punto único en [-1, 1].

También hay que notar que g que tiene un único punto fijo en $p = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{13})$ en el intervalo $[3, 4]$, sin embargo, $g(4) = 5$ y $g'(4) = \frac{8}{3} > 1$, así que g no satisface las hipótesis del teorema en $[3, 4]$, lo cual demuestra que esas hipótesis son suficientes para garantizar un único punto fijo, pero no son necesarias. (**ADCH**)

> **b.** Sea $g(x) = 3^{-x}$. Puesto que $g'(x) = -3^{-x} \ln 3 < 0$ en [0, 1], la función g es decreciente en [0,1]. Por lo tanto
>
> $$g(1) = \frac{1}{3} \leq g(x) \leq 1 = g(0),$$
>
> para $0 \leq x \leq 1$. Así, para $x \in [0, 1]$, tendremos $g(x) \in [0, 1]$, y g tendrá un punto fijo en [0,1]. Puesto que
>
> $$g'(0) = -\ln 3 = -1{,}098612289$$

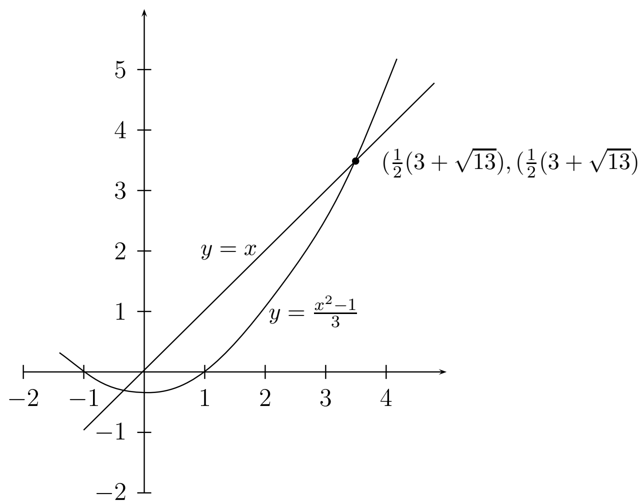


Figura 4.8: Unicidad de punto fijo para $g(x) = (x^2 - 1)/3$

Ahora bien, en el **libro C** el algoritmo iterativo también se representa de manera gráfica (**ACRG**):

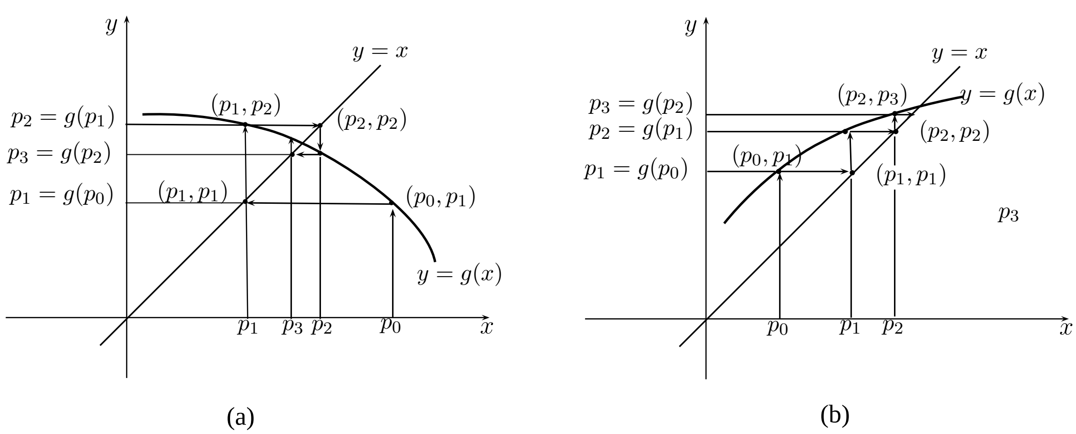


Figura 4.9: Representación gráfica de la técnica iterativa de punto fijo. Libro C.

Y luego de manera constructiva (**ACCC**):

Para obtener una solución a $p = g(p)$ dada una aproximación inicial p_0:

ENTRADA aproximación inicial p_0; tolerancia TOL; número máximo de iteraciones N_0.

SALIDA solución aproximada p o mensaje de error.

Paso 1 Tome $i = 1$

Paso 2 Mientras $i \leq N_0$ haga pasos 3-6
Paso 3 Tome $p = g(p_0)$. (Calcule p_i.)

Paso 4 Si $\mid p - p_0 \mid < TOL$ entonces
SALIDA (p); (*Procedimiento terminado satisfactoriamente.*)
PARAR.

Paso 5 Tome $i = i + 1$.

Paso 6 Tome $p_0 = p$. (Defina un nuevo p_0.)

Paso 7 SALIDA ('El método fracasó después de N_0 iteraciones $N_0 ='$ $, N_0$);
PARAR.

De manera formal la iteración se introduce con el siguiente teorema (**ACCF**):

Teorema de punto fijo. Sea $g \in C[a, b]$ para toda x en $[a, b]$. Además supongamos que existe g' en (a, b) y una constante positiva $0 < k < 1$ tales que

$$\mid g'(x) \leq k \mid,$$

para toda x en (a,b).
Entonces, para cualquier número p_0 en $[a, b]$, la sucesión definida por

$$p_n = g(p_{n-1}), n \geq 1,$$

converge al único punto fijo p en $[a, b]$

La demostración básicamente consiste en aplicar el Teorema del valor medio.

Los autores muestran un ejemplo en el cual se analizan las funciones considerando las hipótesis del teorema anterior (**ACEET**), lo cual en nuestra opinión es bastante representativo para poder elegir sobre las bases de aplicar el método o no. En el ejemplo cogen a la ecuación $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$, para analizarla desde las diferentes opciones que toma cuando se lleva a la forma $x = g(x)$:

a. Para $g_1(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10$, tenemos $g_1(1) = 6$ y $g_1(2) = -12$, de modo que g_1 no mapea $[1, 2]$ en sí mismo. Además, $g_1'(x) = 1 - 3x^2 - 8x$, de modo que $\mid g_1'(x) \mid > 1$ para toda x en $[1, 2]$. Aunque el teorema no garantiza que el método deba fallar para esta elección de g, tampoco tenemos razón para esperar convergencia.

b. Con $g_2(x) = [(10/x) - 4x]^{\frac{1}{2}}$, podemos ver que g no mapea [1,2] en [1, 2] y que la sucesión $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ no está definida en $p_0 = 1{,}5$. Además tampoco hay un intervalo que contenga a $p \approx 1{,}365$ tal que $\mid g_2'(x) \mid < 1$, puesto que $\mid g_2'(p) \mid \approx 3{,}4$
No hay razón para esperar que este método converja.

c. Para la función $g_3(x) = \frac{1}{2}(10 - x^3)^{\frac{1}{2}}$,

$$g_3'(x) = -\frac{3}{4}x^2(10 - x^3)^{-}\frac{1}{2} < 0 \qquad en \quad [1, 2],$$

así que g_3 es estrictamente decreciente en [1 ,2]. Sin embargo $\mid g_3'(2) \mid \approx 2{,}12$, por lo cual la condición $\mid g_3'(x) \mid \approx \leq k < 1$ falla en $[1, 2]$. Un análisis más cerca de la sucesión $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ comenzando por $p_0 = 1{,}5$ revela que basta considerar el intervalo $[1, 1.5]$ en vez de $[1, 2]$. En este intervalo sigue siendo verdad que $g_3'(x) < 0$ y g_3 es estrictamente decreciente pero además

$$1 < 1{,}28 \approx g_3(1{,}5) \leq g_3(x) \leq g_3(1) = 1{,}5,$$

para toda x en $[1, 1.5]$. Esto demuestra que g_3 mapea el intervalo $[1, 1{,}5]$ en sí mismo. Puesto que también es cierto que $\mid g_3'(x) \mid \leq \mid g_3'(1{,}5) \mid \approx 0{,}66$ en este intervalo por el teorema del punto fijo confirma la convergencia de la cual ya estábamos conscientes.

d. Para $g_4(x) = (10/(4 + x))^{\frac{1}{2}}$ tenemos

$$\mid g_4'(x) \mid = \left| \frac{-5}{\sqrt{10}(4 + x)^{\frac{3}{2}}} \right| \leq \frac{5}{\sqrt{10}(5)\frac{3}{2}} < 0{,}15 \quad \forall x \in [1, 2].$$

La cota en magnitud de $g_4'(x)$ es mucho menor que la de la magnitud de g_3' lo cual explica la convergencia más rápida que se obtiene con g_4.

e. La sucesión definida por

$$g_5(x) = x - \frac{x^3 + 4x^2 - 10}{3x^2 + 8x}$$

converge mucho más rápido que nuestras otras opciones.

★Análisis Didáctico

En el **libro A**, se hace notar que el método de Newton está muy relacionado con el método de punto fijo (**ADOA**), los autores mencionan que es claro que si ξ es un punto fijo de la función iteración $g(x)$ para el método de Newton, entonces ξ es una solución de la ecuación $f(x) = 0$. Y reflexionan sobre si para una ecuación dada $f(x) = 0$ es posible elegir varias funciones iteración $g(x)$, con la propiedad de que un punto fijo de $g(x)$ es un cero de $f(x)$.

A lo anterior mencionan que para cada elección, se puede calcular la sucesión $x_1, x_2, \cdots$ para

$$x_{n+1} = g(x_n) \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

También proponen un ejemplo (que van desarrollando en el tratamiento de la sección referente a la iteración de punto fijo) de la aplicación de la técnica, enfatizando primero en las diferentes formas en que se podría hacer a la función dada a resolver de la forma $g(x) = 0$, y posteriormente analizan si la primera opción (a) y la segunda opción (b), cumplen las condiciones del teorema 3.1. El ejemplo es el siguiente:

> If, for example,
>
> $$f(x) = x^2 - x - 2,$$
>
> the among possible choices for $g(x)$ are the following:
>
> (a) $g(x) = x^2 - 2$
> (b) $g(x) = \sqrt{2 + x}$
> (c) $g(x) = 1 + \frac{2}{x}$
> (d) $g(x) = x - \frac{x^2 - x - 2}{m}$ for some nonzero constant m

Cada $g(x)$ se reconoce en la obra como la función iteración para resolver el problema $f(x) = 0$.

Como mencionamos, sólo ejemplifican la aplicación del teorema con la primera y segunda opción, la resolución que proponen es la siguiente:

> The zeros of this function are 2 and -1. Suppose we wish to calculate the root $\xi = 2$ by fixed-point iteration. If we use the iteration function given by
>
> $$g(x) = x^2 - 2$$

> then for $x > \frac{1}{2}, g'(x) > 1$. It follows the assumption 3.3 is not satisfied for any interval containing $\xi = 2$; that is, ξ is not a point of attraction.
> $\vdots$
> On the other hand, if we choose $g(x) = \sqrt{2+x}$, hence $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2+x}}$. Now $x \geq 0$ implies $g(x) \geq 0$ and $\sqrt{2+x} \leq \sqrt{2+7} = 3$. Hence, with $I = [0, 7]$, both assumptions 3.1 and 3.3 are satisfied, and any $x_0 \in [0, 7]$ leads, therefore, to a convergent sequence. Indeed, if we take $x_0 = 0$, then
>
> $$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{2} = 1{,}41421 \\ x_2 &= \sqrt{3{,}41421} = 1{,}84775 \\ x_3 &= \sqrt{3{,}84775} = 1{,}96157 \\ x_4 &= \sqrt{3{,}96157} = 1{,}99036 \\ x_5 &= \sqrt{3{,}99036} = 1{,}99759 \end{aligned}$$
>
> which clearly converges to the root $\xi = 2$

El ejemplo, es muy significativo desde el punto de vista que nos permite observar una de las consecuencias de que alguna de las condiciones del teorema no se cumpla, aun más, enfatiza en que hay que mirar acerca de las condiciones necesarias y suficientes para encontrar un punto fijo solución del problema a resolver.

Por otra parte al respecto de la desventaja mencionada en el análisis conceptual, en el **libro B** se menciona que para garantizar la convergencia de la iteración, se debe satisfacer la siguiente condición:

$$\mid \overline{f'}(x) \mid < 1$$

en la vecindad de la raíz.

Aun más, se muestra cómo afecta $\overline{f'}(x)$ la convergencia del método iterativo con la siguiente representación gráfica, (**ACRG**), (**ADOA**):

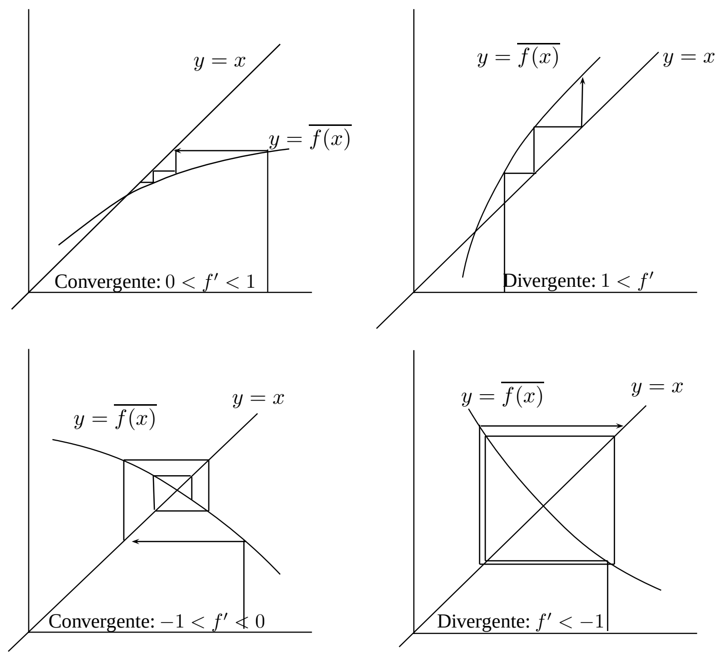


Figura 4.10: Convergencia del método de sustitución sucesiva. Libro B.

De aquí que el autor hace notar, que la convergencia es asintótica si $0 < \overline{f'} < 1$ y oscilatoria si $-1 < \overline{f'} < 0$. (**ADCH**)

También menciona que se puede mostrar fácilmente que la razón de convergencia es más rápida si f' tiende a cero en la vecindad de la raíz. (**ADCH**)

Al respecto, propone el siguiente criterio para determinar convergencia (**ADCH**):

> Si la iteración converge, el valor de x obtenido mediante el esquema anterior ($x_n = x_{n-1} - \alpha f(x_{n-1})$) satisface $f(x) = 0$. La constante α puede determinarse como sigue. Al sustituir la ecuación $\overline{f}(x) = x - \alpha f(x)$ en la ecuación $|\ \overline{f}(x)\ | < 1$, se ve que la iteración converge cuando
>
> $$-1 < 1 - \alpha f'(x) < 1$$
>
> o en forma equivalente,
>
> $$0 < \alpha f'(x) < 2$$
>
> Esta última ecuación indica que, en primer lugar, α debe tener el mismo signo que f' y, en segundo lugar, la ecuación $x_n = x_{n-1} - \alpha f(x_{n-1})$

> siempre convergerá cuando α tienda a cero. La razón de convergencia es óptima cuando $\alpha \simeq 1/f'$.

Se puede observar que dicho criterio consiste en poner algunas restricciones al valor α.

Posteriormente se menciona que el esquema iterativo de punto fijo se reduce al método de Newton si α se iguala a $1/f'(x_{n-1})$ para cada iteración. (**ADCH**)

Ahora bien, un ejemplo que propone para ejemplificar el algoritmo de punto fijo es el siguiente:

> Ejemplo. El tamaño crítico de un reactor nuclear se determina resolviendo una ecuación de criticalidad. Supóngase que se da una versión sencilla de la ecuación de criticalidad como
>
> $$tan(0{,}1x) = 9{,}2e^{-x}$$
>
> La solución físicamente significativa es la menor raíz positiva y se sabe que está en [3, 4] para la ecuación anterior. Determine la mínima raíz positiva.
>
> Solución.
>
> Utilizamos el esquema iterativo de la ecuación $x_n = x_{n-1} - \alpha f(x_{n-1})$ escribiendo
>
> $$f(x) = tan(0{,}1x) - 9{,}2e^{-x}$$
>
> Se estima un valor aproximado de f' en [3, 4] como
>
> $$f' = \frac{[f(4) - f(3)]}{(4-3)} = 0{,}40299$$
>
> Por medio de la estimación anterior, se hace el parámetro α igual a $1/f' = 1/0{,}40299 = 2{,}4814$.
>
> La iteración de la ecuación $x_n = x_{n-1} - \alpha f(x_{n-1})$ converge de la siguiente manera:

En este ejemplo contextualizado al campo de la física, el autor proporciona los datos necesarios para usar la técnica iterativa, es decir, nos da tanto la ecuación a resolver como el intervalo en el cual se encuentra la raíz buscada, y se aplica el criterio de convergencia para optimizar la razón de convergencia.

Finalmente para reafirmar lo anterior, en esta obra se presenta el siguiente resumen (**ADOA**):

Contador de iteraciones n	x_n
0	4
1	3.36899
2	3.28574
3	3.29384
4	3.28280
5	3.29293
6	3.29292
7	3.29292

> a. La sustitución sucesiva es una clase amplia de esquemas iterativos para encontrar una raíz de una función. El método de Newton y el de la secante, son casos de la sustitución sucesiva.
>
> b. Se ha analizado un criterio para la convergencia, de este método.

Pasando al **libro C**, uno de los objetivos de los autores es que el estudiante sepa encontrar las soluciones a los problemas de punto fijo y la conexión entre éstos y los de búsqueda de la raíz. (**ADOA**)

Una de las intenciones de los autores es que los lectores observen que los problemas en la forma de punto fijo son más fáciles de analizar, además que algunas opciones de punto fijo dan origen a técnicas más poderosas de búsqueda de raíces. (**ADOA**)(**ADCH**)

Lo que los autores proponen es que los lectores reflexionemos acerca de la siguiente pregunta:

> ¿Cómo podemos encontrar un problema de punto fijo capaz de producir una sucesión que converja confiable y rápidamente en una solución en un problema de búsqueda de raíz?

Otra de las intenciones de los autores es que se identifiquen las características para una selección confiable del problema de punto fijo. Es decir, la búsqueda de una función eficaz en cuanto a la búsqueda de raíces equivalente al problema original dado. Esto puede mirarse en el siguiente ejemplo(**ACEEA**)(**ADCH**):

> La ecuación $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ tiene una raíz única en [1,2]. Hay muchas formas para convertirla en la forma $x = g(x)$ mediante un simple manejo

algebraico. Por ejemplo para obtener la función $g = \frac{1}{2}(10 - x^3)^{\frac{1}{2}}$, podemos manejar la ecuación $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ así: $4x^2 = 10 - x^3$, luego $x^2 = \frac{1}{4}(10 - x^3)$, y

$$x = \pm\frac{1}{2}(10 - x^3)^{\frac{1}{2}}$$

Además de que muestra otras posibles opciones para la elección de g con la intención de que se identifiquen las demás posibilidades existentes (**ADCH**), lo cual también puede observarse a partir de la tabla siguiente (**ACRN**) que ejemplifica la rapidez de convergencia:

a. $x = g_1(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10$
b. $x = g_2(x) = \left(\frac{10}{x} - 4x\right)^{\frac{1}{2}}$
c. $x = g_3(x) = \frac{1}{2}(10 - x^3)^{\frac{1}{2}}$
d. $x = g_4(x) = \left(\frac{10}{4+x}\right)^{\frac{1}{2}}$
e. $x = g_5(x) = x - \frac{x^3+4x^2-10}{3x^2+8x}$

Iniciando con $p = 1{,}5$ (**ACRN**)

n	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
0	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5
1	-0.875	0.8165	1.286953768	1.348399725	1.373333333
2	6.732	2.9969	1.402540804	1.367376372	1.365262015
3	-469.7	$(-8.65)^{1/2}$	1.345458374	1.364957015	1.365230014
4	1.03×10^8		1.375170253	1.365264748	1.365230013
5			1.360094193	1.365225594	
6			1.367846968	1.365230576	
7			1.363887004	1.365229942	
8			1.365916734	1.365230022	
9			1.364878217	1.365230012	
10			1.365410062	1.365230014	
15			1.365223680	1.365230013	
20			1.365230236		
25			1.365230006		
30			1.365230013		

Cuadro 4.10: Representación numérica del algoritmo de Punto Fijo.

La función de la tabla es observar la diferencia entre los valores que se obtienen con cada una de las funciones g_n, así como observar también que la primera opción **a.**, ocasiona divergencia y la opción **b.**, se torna indefinida porque contiene la raíz cuadrada de un número negativo.

(**ADCH**)

★Análisis Fenomenológico

En la organización de este apartado, se muestran las situaciones encontradas en el siguiente orden: En torno a la matemática misma; En torno a otras ciencias; Fenoménos contextualizados.

Para el Libro A

- **En torno a la matemática misma.** (**AFTM**)

Las situaciones que encontramos tienden a enfatizar en la propiedad de convergencia que aparece en el teorema del punto fijo y encontramos algunas otras que proponen adecuar el algoritmo a un lenguaje de programación.

De aplicación del teorema (Iteración de punto fijo):

> *Exercise 3.3-2.* For each of the following equations determine an iteration function (and an interval I) so that the conditions of Theorem 3.1 are satisfied (assume that it is desired to find the smallest positive root):
>
> (a) $x^3 - x - 1 = 0$
> (b) $x - tanx = 0$
> (c) $e^{-x} - cosx = 0$

De aplicación de programación:

> *Exercise 3.3-3.* Write a program based on Algorithm 3.6 (Fixed point iteration) and use this program to calculate the smallest roots of the equations given in *Exercise 3.3-2.*

Al respecto del concepto de convergencia:

> *Exercise 3.3-6.* The function $g(x) = \sqrt{1 + x^2}$ satisfies Assumption 3.1 for $I = (-\infty, \infty)$, and Assumption 3.3 on any finite interval, yet fixed-point iteration with this iteration function does not converge. Why?

> *Exercise 3.3-8.* The equation $e^x - 4x^2 = 0$ has a root between $x = 0$ and $x = 1$. Show that the iteration function $x = \frac{1}{2}e^{x/2}$ will converge to this root if x_0 is chosen in the interval $[0, 1]$.

- **En torno a otras ciencias.** (**AFOC**)

  En el **libro A** no se encontraron situaciones en torno a otras ciencias.

- **Fenómenos contextualizados.** (**AFFC**)

  En el **libro A** no se encontraron situaciones en torno a fenómenos contextualizados.

Para el Libro B

- **En torno a la matemática misma.** (**AFTM**)

  Las situaciones que encontramos en esta obra, se enfocan en la aplicación de la técnica pero distinguiendo las posibilidades de formulación en que puede replantearse la ecuación original.

> *Ejercicio 3.26.* La ecuación $x^2-2x-3=0$ se puede reformular mediante el método de sustitución sucesiva como sigue:
>
> (a) $x = \frac{(x^2-3)}{2}$
>
> (b) $x = \sqrt{2x+3}$
>
> (c) $x = \frac{(2x+3)}{\sqrt{x}}$
>
> (d) $x = x - 0{,}2(x^2 - 2x - 3)$
>
> Las soluciones son $x = 3$ y $x = -1$. Determine en forma gráfica cuáles de las fórmulas anteriores convergen cuando se utilizan con la sustitución sucesiva para encontrar la raíz $x = -1$. Verifique los resultados del enfoque gráfico utilizando el criterio dado por la ecuación $\mid \overline{f'}(x) \mid < 1$. Repita el mismo análisis para $x = 3$.

En esta situación el autor también hace uso del contexto gráfico para que los estudiantes observen lo que pasa con el criterio de convergencia, y pretende que ellos pasen de un contexto a otro para verificar las condiciones que se necesitan para dicha convergencia. (**ADCH**)

Otra situación en torno a la matemática misma es el siguiente:

> *Ejercicio 3.27.* Encuentre todas las soluciones de las ecuaciones del problema 3.4 utilizando la sustitución sucesiva en la forma
>
> $$x = x - \alpha f(x)$$
>
> *Sugerencia:* determine α usando el gradiente de la interpolación lineal ajustada a los dos extremos del intervalo encontrados en el problema 3.4.

Como puede observarse, el autor remite a los estudiantes a mirar por la vía de interpolación lineal, lo cual es muy significativo desde el punto de vista de enfatizar sobre la relación existente de estos métodos de aproximación con la interpolación lineal. (**ADCH**)

- **En torno a otras ciencias.** (**AFOC**)

En esta obra únicamente encontramos la siguiente situación de aplicación al campo de la física, específicamente en relación con la mecánica de fluidos:

> **Ejercicio 3.8.** El coeficiente de la fricción f para el flujo turbulento en un tubo está dado por
>
> $$\frac{1}{\sqrt{f}} = 1{,}14 - 2{,}0log_{10}\left(\frac{e}{D} + \frac{9{,}35}{R_e\sqrt{f}}\right)$$
>
> donde R_e es el número de Reynols, e es la rugosidad de la superficie del tubo y D es el diámetro del tubo.
> (a) Escriba un programa de computadora para resolver esta ecuación en términos de f, utilizando el método de sustitución sucesiva.
> (b) Evalúe f llevando a cabo el programa para los siguientes casos:
> (i) $D = 0{,}1$m, $e = 0{,}0025$, $R_e = 3 \times 10^4$
> (ii) $D = 0{,}1$m, $e = 0{,}0001$, $R_e = 5 \times 10^6$
>
> (*Sugerencia:* primero reescriba la ecuación en la siguiente forma:
>
> $$f = \left(1{,}14 - 2{,}0log_{10}\left[\frac{e}{D} + \frac{9{,}35}{R_e\sqrt{f}}\right]\right)^{-2}$$
>
> Introduzca una estimación inicial para f en el lado derecho. Reintroduzca de nuevo la f calculada en el lado derecho y repita esta iteración hasta que f converja. La estimación inicial puede igualarse a cero. Los resultados de estos cálculos se pueden verificar con una tabla de Moody que se puede encontrar en cualquier libro usual sobre mecánica de fluidos.)

Como puede observarse, se plantea el uso de programación para resolver la situación, e incluso se propone la forma en la cual expresar la función para que exista la convergencia en el proceso de iteración. Sin embargo, en nuestra opinión, esta situación carece de sentido si no se conocen al menos las nociones básicas de física que involucra.

- **Fenómenos contextualizados.** (**AFFC**)

En el **libro B**, no se encuentran situaciones contextualizadas para la enseñanza de esta técnica.

Para el Libro C

- **En torno a la matemática misma.** (**AFTM**)

Las situaciones que encontramos están caracterizadas por la aplicación de la técnica a seguir, por la aplicación de las técnicas y su relación con los problemas de búsqueda de raíz, y por la búsqueda de convergencia.

> *Ejercicio 1.* (Ejercicios 2.2). Use el manejo algebraico para demostrar que las siguientes funciones tienen un punto fijo en p exactamente cuando $f(p) = 0$, donde $f(x) = x^4 + 2x^2 - x - 3$. (**ACEEA**)(**ACRA**)
>
> **a.** $g_1(x) = (3 + x - 2x^2)^{\frac{1}{4}}$ **b.** $g_2(x) = \left(\frac{x+3-x^4}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$
>
> *Ejercicio 8.* (Ejercicios 2.2). Aplique el teorema del punto fijo para demostrar que $g(x) = 2^{-x}$ tiene un único punto fijo en $[\frac{1}{3}, 1]$. Utilice la iteración de punto fijo para obtener una aproximación del punto fijo exacta en 10^{-4}. Use el corolario 2.4 para estimar la cantidad de iteraciones necesarias para alcanzar una exactitud de 10^{-4} y después compare esta estimación teórica con la cantidad que realmente se requiere. (**ACEET**)
>
> *Ejercicio 20.* (Ejercicios 2.2). Demuestre que si A es un número positivo, entonces la sucesión definida por medio de
>
> $$x_n = \frac{1}{2}x_{n-1} + \frac{A}{2x_{n-1}},$$
>
> para $n \geq 1$, converge a $\sqrt{A}$ siempre que $x_0 > 0$

- **En torno a otras ciencias.** (**AFOC**)

Únicamente encontramos la siguiente situación en relación al campo de la física, situación que propone encontrar el tiempo en el que un objeto llega al suelo, si éste tiene fuerzas de fricción en el ambiente.

De aplicación en la física:

> *Ejercicio 23.* (Ejercicios 2.2). Un objeto que cae verticalmente en el aire está sujeto a una resistencia viscosa y también a la fuerza de gravedad. Suponga que dejamos caer un objeto de masa m desde una altura s_0 y que la altura del objeto después de t segundos es
>
> $$s(t) = s_0 - \frac{mg}{k}t + \frac{m^2 g}{k^2}(1 - e^(- kt/m)),$$
>
> donde $g = 32{,}17$ pies/s^2 y k representa el coeficiente de resistencia del aire en lb-s/pies. Suponga que $s_0 = 300$ pies, $m = 0{,}25$lb, y que $k = 0{,}1$lb-s/pies. Calcule con una exactitud de 0.01s, el tiempo que tarda este peso de un cuarto de libra en caer al suelo.

- **Fenómenos contextualizados.** (**AFFC**)

En el **libro C**, no se encuentran situaciones contextualizadas para la enseñanza de esta técnica.

⧫ Método de Newton

★**Análisis conceptual**

En el **libro A** se introduce el método de Newton (**ACCC**), como continuación del método de la secante, es decir, a partir de la fórmula de la secante:

$$x_{n+1} = [f(x_n)x_{n-1} - f(x_{n-1})x_n]/[f(x_n) - f(x_{n-1})]$$

debido a que podría presentarse el caso extremo de que $f(x_n) = f(x_{n-1})$, entonces se puede recurrir a la forma equivalente:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Los autores hacen notar que el segundo término del lado derecho de la igualdad es igual a:

$$\frac{-f(x_n)}{[f(x_n) - f(x_{n-1})]/(x_n - x_{n-1})}$$

y mencionan que los estudiantes podrían reconocer la razón $[f(x_n) - f(x_{n-1})]/(x_n - x_{n-1})$ como una primera diferencia dividida de $f(x)$ y como la pendiente de la secante para $f(x)$ que pasa por los puntos $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ y $(x_n, f(x_n))$. Además se observa que esa razón es igual a la pendiente de $f(x)$ en algún punto entre x_{n-1} y x_n si $f(x)$ es diferenciable. Por lo tanto se podría reemplazar esa razón por el valor de $f'(x)$ en algún punto cercano a x_n y x_{n-1}, dado que $f'(x)$ puede ser calculado.

Continuan mencionando que si $f(x)$ es diferenciable, entonces pueden reemplazar en la fórmula anterior, la pendiente de la secante por la pendiente de la tangente en x_n de donde se obtiene la fórmula:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

la cual es llamanda fórmula de iteración del método de Newton.

El algoritmo lo presentan como sigue (**ACRA**), (**ACCF**):

> **Algorithm 3.5: Newtons method.** Given $f(x)$ continuously differentiable and a point x_0.
>
> For $n = 0, 1, 2, \cdots$, until satisfied, do:
> Calculate $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$

A diferencia del **libro A**, el **libro B** se inicia mencionando que el método de Newton también es llamando método de Newton-Raphson, y las condiciones que se necesitan para su aplicación y algunas de sus ventajas, como por ejemplo, que se encuentra una raíz siempre y cuando se conozca una estimación inicial para la raíz deseada, que este método se puede aplicar al dominio complejo para hallar raíces complejas y también se puede extender a las ecuaciones no lineales simultáneas.

La introducción del concepto en esta obra se lleva a cabo de manera constructiva de la siguiente manera (**ACCC**):

Primero se menciona que el método se obtiene del desarrollo de Taylor, entonces suponiendo que el problema es encontrar una raíz de $f(x) = 0$, al utilizar el desarrollo de Taylor de $f(x)$ en torno a una estimación, la ecuación puede escribirse como:

$$f(x) = 0 = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + O(h^2)$$

donde $h = x - x_0$. Así al despejar x en la de $f(x)$ no se obtiene un valor exacto, pero la solución se acerca en mayor medida al x exacto mientras más cercano estimemos el valor aproximado x_0. En consecuencia, al repetir la solución utilizando el valor actualizado como una nueva estimación, se mejora la aproximación en forma sucesiva.

Enseguida introduce el concepto de forma gráfica (**ACRG**) como sigue:

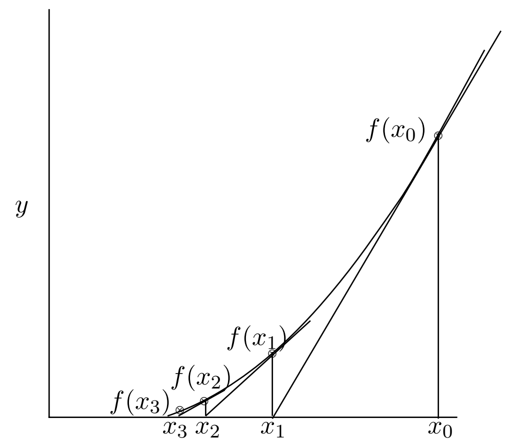


Figura 4.11: Método de Newton. Libro B.

En la explicación de la representación gráfica, el autor menciona que x_0 es una estimación inicial para la raíz, obteniendo asi una función lineal que pasa por (x_0, y_0) en forma tangencial, así la intersección del eje x con esta recta, se denomina x_1 y se considera como la nueva aproximación a la raíz, y se repite el mismo procedimiento. Se considera entonces que la recta tangente que pasa por $(x_0, f(x_0))$ es:

$$g(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Entonces se continua la construcción del concepto:

La raíz de $g(x) = 0$ denotada por x_1 satisface

$$f'(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_0) = 0$$

Al resolver la ecuación anterior se obtiene

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

De donde las aproximaciones sucesivas a la raíz se escriben como,

$$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}$$

Ahora bien, en el **libro C** se enfatiza que hay tres formas de introducir esta técnica, sin embargo la más común es considerarlo gráficamente

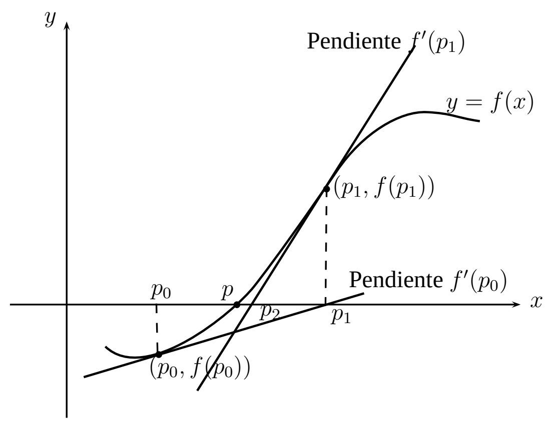


Figura 4.12: Representación gráfica del método de Newton. Libro C.

(**ACRG**), la introducción que hacen del concepto en forma gráfica es la siguiente (**ACCH**):

Otra forma de introducir el concepto consiste en derivarlo como una técnica que permite lograr una convergencia más rápida que la que ofrecen otros tipos de iteración funcional. (**ACCC**)

Finalmente la tercera forma de introducir el concepto es a través de los polinomios de Taylor (**ACCC**). Lo cual se expresa de la siguiente manera:

Supongamos que $f \in C^2[a,b]$. Sea $\overline{x} \in [a,b]$ una aproximación de p tal que $f'(\overline{x}) \neq 0$ y $\mid p - \overline{x} \mid$ es "pequeño". Consideremos el primer polinomio de Taylor para $f(x)$ expandido alrededor de $\overline{x}$,

$$f(x) = f(\overline{x}) + (x - \overline{x})f'(\overline{x}) + \frac{(x-\overline{x})^2}{2} f''(\xi(x)),$$

donde $\xi(x)$ está entre x y $\overline{x}$. Dado que $f(p) = 0$ esta ecuación, con $x = p$, da

$$0 = f(\overline{x}) + (p - \overline{x})f'(\overline{x}) + \frac{(p-\overline{x})^2}{2} f''(\xi(p)).$$

Derivamos el método de Newton suponiendo que, como $p - \overline{x}$ es tan pequeño, el término que contiene $(p - \overline{x})^2$ es mucho menor que

$$0 \approx f(\overline{x}) + (p - \overline{x})f'(\overline{x}).$$

Despejando p de esta ecuación obtenemos

$$p \approx \overline{x} - \frac{f(\overline{x})}{f'(x)}.$$

> Esto nos prepara para introducir el método de Newton, el cual comienza con una aproximación inicial p_0 y se genera la sucesión $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ definida por
>
> $$p_n \approx p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})},$$
>
> para $n \geq 1$.

En esta obra la representación numérica del algoritmo se presenta como sigue (**ACCC**):

> Para obtener una solución a $f(x) = 0$ dada la función diferenciable f y una aproximación inicial p_0:
>
> ENTRADA aproximación inicial p_0; tolerancia TOL; número máximo de iteraciones N_0.
>
> SALIDA solución aproximada p o mensaje de fracaso.
>
> *Paso 1* Tome $i = 1$.
>
> *Paso 2* Mientras $i \leq N_0$ haga pasos 3-6.
>
> *Paso 3* Tome $p = p_0 - f(p_0)/f'(p_0)$. (Calcule p_i.)
>
> *Paso 4* Si $| p - p_0 | < TOL$ entonces
> SALIDA (p); (*Procedimiento terminado satisfactoriamente.*)
> PARAR.
>
> *Paso 5* Tome $i = i + 1$.
>
> *Paso 6* Tome $p_0 = p$. (*Redefina* p_0)
>
> *Paso 7* SALIDA ('El método fracasó después de N_0 iteraciones, $N_0 ='$, N_0);
> (*Procedimiento terminado sin éxito.*)
> PARAR.

También se considera su introducción de manera formal (**ACCF**), para lo cual se considera su equivalencia con la técnica de iteración funcional de la forma $p_n = g(p_{n-1})$, en donde,

$$g(p_{n-1}) = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}, \qquad para \qquad n \geq 1$$

por lo que se infiere que si $f'(p_{n-1}) = 0$ no se puede continuar con esta técnica. (**ADCH**)

★Análisis Didáctico

Al respecto del método de Newton, en el **libro A** se hace notar que cuando se aplica al ejemplo planteado para resolver con el método de bisección[10], y tomando como $x_0 = 1$, después de cuatro pasos, se obtendría una muy buena aproximación a la raíz (**ADOA**).

Por otra parte, de la fórmula para encontrar las aproximaciones sucesivas,

$$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}$$

en el **libro B**, se explica que una forma de obtener la primera derivada de una función dada puede ser una tarea difícil o imposible, entonces se sugiere evaluar $f'(x_i)$ mediante una aproximación por diferencias, en vez de la forma analítica (**ADCH**). Es decir, se sugiere encontrar f' mediante las siguientes fórmulas:

$$f'(x_{i-1}) = \frac{f(x_{i-1} + h) - f(x_{i-1})}{h}$$

y

$$f'(x_{i-1}) = \frac{f(x_{i-1}) - f(x_{i-1} - h)}{h}$$

El autor agrega que la precisión del resultado final no se ve afectada por la aproximación en diferencias y que además si la función no tiene singularidades en la vecindad de la raíz, ambas aproximaciones por diferencias funcionan bien, pero que se debe elegir una u otra si existe una singularidad cercana. También se menciona que es posible con el lenguaje FORTRAN encontrar raíces complejas, y propone un programa[11] a seguir.

Se proponen dos ejemplos en esta sección, uno en donde muestra cómo aproximar la raíz cúbica de un número y otra en donde se aplica el método de Newton a una función trascendente, los ejemplos y su resolución son los siguientes:

> Ejemplo: Obtenga un esquema iterativo para encontrar la raíz cúbica de un número, basándose en el método de Newton. Determine la raíz cúbica de $a = 155$ mediante el esquema obtenido.

[10] El ejemplo fue encontrar una solución para $f(x) = x^3 - x - 1$.
[11] Para detalles, ver Conte y de Boor (1980).

Solución:
Primero se reformula el problema, es decir, el nuevo problema indica que se quiere determinar el cero de la función dada por:

$$f(x) = x^3 - a$$

Ahora por el método de Newton, se escribe el esquema iterativo como

$$x_{n+1} = x^n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - a}{3x_n^2} = \frac{2}{3}x_n + \frac{a}{3x_n^2}$$

Entonces para calcular la raíz cúbica de 155, se define $a = 155$ y la estimación inicial $x_0 = 5$, de donde se obtienen los siguientes resultados iterativos:

n	x
0	5
1	5.4
2	5.371834
3	5.371686 (exacto)

Entonces se observa que la solución exacta se obtiene sólo hasta después de tres pasos de iteración, sin embargo el autor hace notar que cuando da el valor inicial $x_0 = 10$, entonces son necesarios más pasos en el proceso de iteración (**ADCH**):

n	x
0	10
1	7.183334
2	5.790176
3	5.401203
2	5.371847
3	5.371686 (exacto)

El segundo ejemplo es el siguiente:

> Ejemplo: Calcule la raíz positiva más pequeña de $y = tan(x) - 0{,}5x$ mediante el método de Newton.

Primeramente el autor se basa en la estimación de una aproximación inicial mediante la representación gráfica siguiente:

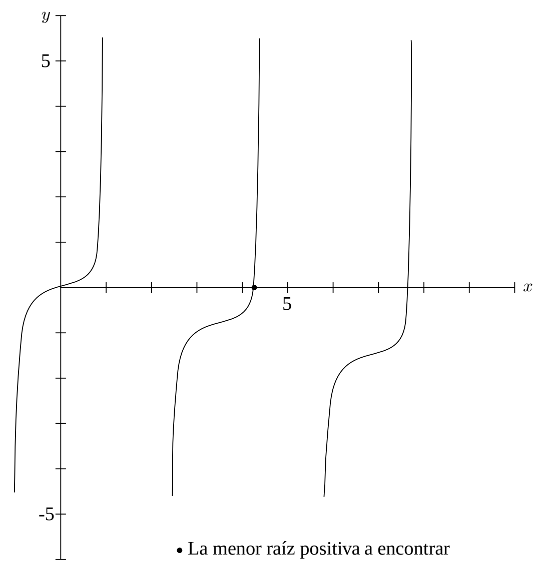


Figura 4.13: Ejemplo. Método de Newton. Libro B.

Entonces se observa de la gráfica que la mínima raíz positiva se encuentra en una vecindad de 4.5 o entre 4 y $3\pi/2$. Luego, aunque la expresión analítica de la primera derivada es fácil de obtener el autor se aproxima mediante diferencias, es decir, se aproxima mediante

$$y'(x) \simeq [tan(x) - tan(x - 0{,}001)]/0{,}001 - 0{,}5$$

Enseguida de ello muestra los valores numéricos para el ejemplo con una estimación inicial de 4,0

IT. No.	$x(N-1)$	$y(N-1)$	$x(N)$
1	4.000E+00	-8.421787E-01	4.458280E+00
2	4.458280E+00	1.621111E+00	4.352068E+00
3	4.352068E+00	4.781129E-01	4.288511E+00
4	4.288511E+00	7.190108E-02	4.275191E+00
5	4.275191E+00	2.075195E-03	4.274782E+00
6	4.274782E+00	-2.861023E-06	4.274782E+00

Con este ejemplo el autor muestra que la elección de la estimación inicial es muy importante, pues si se cogiera como estimación inicial el valor 3.6 por ejemplo, la iteración converge a un valor irrelevante después de que los valores de x varían de forma errática, y muestra numéricamente lo dicho:

IT. No.	$x(N-1)$	$y(N-1)$	$x(N)$
1	3.600000E+00	-1.306533E-00	5.358891E+00
2	5.358891E+00	-4.004476E+00	7.131396E+00
3	7.131396E+00	-2.431464E+00	8.494651E+00
4	8.494651E+00	-5.588555E+00	1.092057E+01
5	1.092057E+01	7.847680E+00	1.087581E+01
6	1.087581E+01	2.872113E+00	1.083419E+01
7	1.083419E+01	7.255301E-01	1.081511E+01
8	1.081511E+01	7.328224E-02	1.081269E+01
9	1.081269E+01	6.022453E-04	1.081267E+01

Para reafirmar lo anterior (**ADOA**), se termina la sección con el siguiente resumen:

a. El método de Newton utiliza de forma iterativa las rectas tangentes que pasan por las aproximaciones consecutivas de la raíz.

b. El método require una buena aproximación inicial. De otro modo, la solución iterativa puede diverger o converger a una solución irrelevante.

c. La razón de convergencia iterativa del método de Newton es alta, cuando funciona.

d. El método de Newton puede encontrar raíces complejas si las variables se definen como complejas.

Por otra parte, en el **libro C** se inicia la sección dedicada a esta técnica iterativa, mencionando que es una de las técnicas numéricas más poderosas para resolver un problema de búsqueda de raíces $f(x) = 0$. Además se pretende que el estudiante sea capaz de decidir sobre la tolerancia para la convergencia (**ADCH**):

> Las desigualdades de la técnica de paro dadas con el método de bisección son aplicables al método de Newton. Es decir, seleccione una tolerancia $\varepsilon > 0$ y construya $p_1, \cdots p_N$ hasta que
>
> $$\mid p_N - p_{N-1} \mid < \varepsilon,$$
>
> $$\frac{\mid p_N - p_{N-1} \mid}{\mid p_N \mid} < \varepsilon, \qquad p_N \neq 0,$$
>
> o bien
>
> $$f(p_N) < \varepsilon.$$

Otra intención de los autores es que sepan decidir sobre la elección adecuada de la aproximación inicial, lo cual queda plasmado en el siguiente teorema:

Teorema. Sea $f \in C^2[a,b]$. Si $p \in [a,b]$ es tal que $f(p) = 0$ y $f'(p) \neq 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que el método de Newton genera una sucesión $\{p_n\}_{n-1}^{\infty}$ que converge a p para cualquier aproximación inicial $p_0 \in [p-\delta, p+\delta]$.

La intención es que se observe que la técnica de Newton converge a condición de que se escoja una aproximación inicial suficientemente cercana.

★Análisis Fenomenológico

En la organización de este apartado, se muestran las situaciones encontradas en el siguiente orden: En torno a la matemática misma; En torno a otras ciencias; Fenoménos contextualizados.

Para el Libro A

- **En torno a la matemática misma.** (**AFTM**)

A este respecto, encontramos cuatro tipos de situaciones, las que tienen que ver con la aplicación de la técnica en sí, las que plantean que la técnica se traduzca en un lenguaje de programación, las que tienden a establecer propiedades y finalmente las que inducen a la reflexión de qué pasa si se aplica el método cuando hay dos raíces muy cercanas.

Ejercicio 3.1-7 The function $f(x) = e^{2x} - e^x - 2$ has a zero on the interval $[0,1]$. Find this zero correct to four significant digits using Newton's method.

Ejercicio 3.2-7 Write a subroutine for Newton's method. Be sure to provide an exit in the event that $f'(x_n) = 0$. In addition to the termination criteria (3.13) or (3.14), provision for termination should also be made in the event of nonconvergence after a given number NTOL of iterations.

Ejercicio 3.5-2 For Newton's method show that if $f(\xi) = 0, f'(\xi) \neq 0$ and if $f(x)$ is twice continuously differentiable, then $g'(\xi) = 0$. Also show that $g''(\xi) = f''(\xi)/f'(\xi)$.

Ejercicio 3.5-6 Find the root of the equation

$$x = tanx$$

which is closed to 100, by Newton's method. (Note: Unless x_0 is very carefully chosen, Newton's method produces a divergent sequence.)

- **En torno a otras ciencias.** (**AFTM**)

  En el **libro A**, no encontramos situaciones en torno a otras ciencias.

- **Fenómenos contextualizados.** (**AFTM**)

  En el **libro A**, no encontramos situaciones en torno a fenómenos contextualizados.

Para el Libro B

- **En torno a la matemática misma.** (**AFTM**)

  En el **libro B**, encontramos situaciones que proponen aplicar la técnica tanto a ecuaciones transcendentes, como a ecuaciones polinómicas, además de que ello se lleve a cabo con el uso de algún artefacto tecnológico. Asimismo, hay situaciones con las que se permite observar que el método, en efecto, no sólo sirve para hallar raíces enteras sino también complejas:

Para ecuaciones trascendentes:

> *Ejercicio 3.15.* Encuentre la raíz de
>
> $$tan(x) - 0{,}1x = 0$$
>
> en $\pi < x < 1{,}5\pi$ mediante el método de Newton con una calculadora de bolsillo (la tolerancia es de 0.0001)

Para ecuaciones polinómicas:

> *Ejercicio 3.21.* Dos raíces complejas de
>
> $$y = 2 - x + 2x^2 + x^4$$
>
> son $-0{,}5+1{,}5i$ y $0{,}5-0{,}7i$, aproximadamente. Utilice estos valores como suposiciones iniciales y encuentre los valores exactos de las dos raíces complejas mediante el método de Newton (Usar programa 3-6)[12]

[12] Los programas que utiliza el autor no los hemos incluido en este trabajo de investigación, sin embargo puede consultar el libro Nakamura (1992).

- **En torno a otras ciencias.** (**AFOC**)

En esta obra no sólo se observaron situaciones en torno al campo de la física sino también en el campo de la química. Sin embargo, en nuestra opinión, al igual que en otros casos, estas situaciones carecen de sentido si no existe una explicación de las nociones básicas de física y química que involucran las situaciones respectivamente.

Aplicación a la física:

Ejercicio 3.17. Las frecuencias naturales de vibración de una varilla uniforme sujetada por un extremo y libre por el otro son soluciones de

$$cos(\beta l)cosh(\beta l) + 1 = 0$$

donde
$\beta = \rho\omega^2/EI$
$I = 1$ (longitud de la varilla en metros)
ω =frecuencia en seg^{-1}
EI = rigidez de flexión
ρ = densidad del material de la varilla
Busque las raíces de la ecuación anterior primero mediante el método gráfico, y determine después los tres valores más pequeños de β que satisfagan la ecuación mediante el método de Newton.

Ejercicio 3.18. Las frecuencias naturales de vibración de una varilla sujetada en ambos extremos satisfacen:

$$tan(\beta l) = tanh(\beta l), \beta > 0$$

donde se supone que β es 1, como en el problema anterior. Utilice el método de Newton con base en una aproximación por diferencias para evaluar la derivada, y determine los valores más pequeños de $\beta > 0$ que satisfagan la ecuación anterior. No incluya a $\beta = 0$ como respuesta.
Sugerencia: $tanh(x) = [exp(x) - exp(-x)]/[exp(x) + exp(-x)]$

Aplicación a la química:

Ejercicio 3.22. Una mezcla equimolar de monóxido de carbono y oxígeno alcanza el equilibrio a 300^{o}K y a una presión de 5 atm. La reacción teórica es

$$CO + \frac{1}{2}O_2 \rightleftharpoons CO_2$$

La reacción química real se escribe como

$$CO + O_2 \rightarrow xCO + \frac{1}{2}(1 + x)O_2 + (1 - x)CO_2$$

La ecuación de equilibrio químico para determinar la fracción del CO restante, x, se escribe como

$$K_p = \frac{(1-x)(3+x)^{1/2}}{x(x+1)^{1/2}p^{1/2}}, 0 < x < 1$$

donde $K_p = 3{,}06$ es la constante de equilibrio para $CO + \frac{1}{2}O^2 = CO_2$ a 3000^o y $p = 5$ es la presión. Determine el valor de x por medio del método de Newton.

Ejercicio 3.23. Considere la misma reacción química del problema anterior, pero que ocurra con la presencia de N_2 a la presión atmosférica. La reacción real es

$$CO + O_2 + 3{,}76N_2 \rightarrow xCO + \frac{1}{2}(1+x)O_2 + (1-x)CO_2 + 3{,}76N_2$$

La ecuación de equilibrio es

$$3{,}06 = \frac{(1-x)(10{,}52+x)^{1/2}}{x(1+x)^{1/2}}$$

Determine el valor de x por medio del método de Newton.

- **Fenómenos contextualizados.** (**AFFC**)

En el **libro B** no encontramos situaciones entorno a fenómenos contextualizados.

Para el Libro C

- **En torno a la matemática misma.** (**AFTM**)

En el **libro C**, a partir del método de Newton se deriva el *método de la Secante* (**ACCC**), debido a que el primero tiene el problema de la necesidad de conocer el valor de la derivada de f en cada aproximación. Al respecto los autores mencionan que frecuentemente es más difícil determinar $f'(x)$ y se requieren más operaciones aritméticas para calcularlo que para $f(x)$. En consecuencia, para evitar lo anterior, se hace la variación siguiente:

Por definición,

$$f'(p_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x) - f(p_{n-1})}{x - p_{n-1}}.$$

Haciendo $x = p_{n-2}$, tenemos

$$f'(p_{n-1}) \approx \frac{f(p_{n-2}) - f(p_{n-1})}{p_{n-2} - p_{n-1}} = \frac{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})}{p_{n-1} - p_{n-2}}.$$

Al aplicar esta aproximación para $f'(p_{n-1})$ en la fórmula de Newton se obtiene:

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})(p_{n-1} - p_{n-2})}{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})}$$

En el libro de Burden y Faires en la misma sección del método de Newton, se presenta la derivación hacia el *método de la falsa posición*, como otra consecuencia de la matemática misma, técnica que genera aproximaciones del mismo modo que el de la secante, pero ofrece una prueba para asegurarse de que la raíz quede entre dos iteraciones sucesivas. Sin embargo, los autores mencionan que no es un método que recomiendan.

- **En torno a otras ciencias.** (**AFOC**)

En esta obra, encontramos una situación en el campo de la medicina, en este sentido, la situación refleja un problema muy interesante ya que deja mirar la aplicación "inmediata" en casos de la vida real.

Aplicación a la medicina:

Ejercicio 24. (Ejercicios 2.3). El medicamento administrado a un paciente produce una concentración en la corriente sanguínea dada por $c(t) = Ate^{-1/3}$ miligramos por mililitro, t horas después de inyectarle A unidades. La máxima concentración segura es de 1 mg/ml.

a. ¿Qué dosis deberá inyectársele al paciente para alcanzar la máxima concentración segura y cuándo se presenta esta concentración?
b. Una cantidad adicional al medicamento deberá administrarse al paciente después de que la concentración disminuya a 0.25 mg/ml. Determine, con una aproximación al minuto más cercano, cuándo debe aplicarse la segunda inyección.
c. Suponiendo que la concentración producida por inyecciones consecutivas es aditiva y que 75 % de la dosis inyectada originalmente se administra en la segunda inyección, ¿cuándo será el momento de aplicar la tercera inyección?

- **Fenómenos contextualizados.** (**AFFC**)

En el **libro C**, existe más variedad en las situaciones contextualizadas que en otras obras. Así por ejemplo, se observaron situaciones en el área de censos poblacionales, en el área de deportes, en el área automotriz y finalmente situaciones en las que se propone el uso de algún software educativo para la aplicación de la técnica. Las situaciones encontradas fueron:

En cuanto a problemas relacionados con el crecimiento de población:

Ejercicio 27. (Ejercicios 2.3). El modelo logístico del crecimiento demográfico se describe por medio de una ecuación de la forma

$$P(t) = \frac{P_L}{1 - ce^{-kt}}$$

donde P_L, c y $k > 0$ son constantes y $P(t)$ es la población en el tiempo t. P_L representa el valor límite de la población, ya que $\lim_{t\to\infty} P(t) = P_L$. Utilice los censos correspondientes a los años 1950, 1960 y 1970 que vienen en la tabla de la página 104 para determinar las constantes P_L, c y k para un modelo logístico de crecimiento. Utilice el modelo logístico para predecir la población de Estados Unidos en los años 1980 y 2010, suponiendo que $t = 0$ en 1950. Compare con el valor real de la predicción relativa a 1980.

En cuanto a problemas de probabilidad:

Ejercicio 29. (Ejercicios 2.3). El jugador A dejará en cero (por una puntuación de 21 a 0) al jugador B en un partido de raquetbol con una probabilidad de

$$P = \frac{1+p}{2}\left(\frac{p}{1-p+p^2}\right)^2 1,$$

donde p denota la probabilidad de que A gane un intercambio de tiros (independientemente del servicio). Determine, con una exactitud de 10^{-3}, el valor mínimo de p que garantice que A dejará en cero a B al menos en la mitad de los partidos que jueguen.

En cuanto a problemas de mecánica:

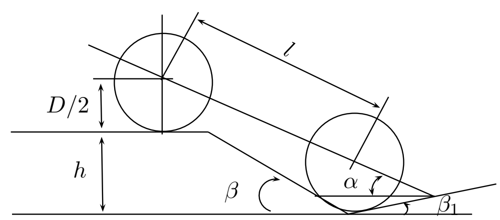
Ejercicio 29. (Ejercicios 2.3). En el diseño de los vehículos para todo tipo de terreno, es necesario tener en cuenta las fallas cuando se trata de librar dis tipos de obstáculos. Una es la *falla por rozamiento,* y ocurre cuando el vehículo intenta cruzar un obstáculo que hace que su fondo toque el suelo. La otra recibe el nombre de *falla por colisión de la defensa delantera* y ocurre cuando el vehículo desciende por una zanja y la defensa delantera toca el suelo.
La figura anexa, adaptada de [Bek], muestra los componentes asociados al segundo tipo de falla. En ella se indica que el ángulo máximo α que puede alcanzar un vehículo cuando β es el ángulo máximo en que *no* ocurre la falla por rozamiento satisface la ecuación

$$Asen\alpha cos\beta + sen^2\alpha - Ccos\alpha - Esen\alpha = 0,$$

donde
$A = lsen\beta_1$, $B = lcos\beta_1$, $C = (h + 0{,}5D)sen\beta_1 - 0{,}5Dtan\beta_1$, y
$E = (h + 0{,}5D)cos\beta_1 - 0{,}5D$.

a. Se afirma que, cuando $l = 89$pulg, $h = 49$pulg, $D = 55$pulg y $\beta_1 = 11{,}5^o$, el ángulo α será aproximadamente de 33^o. Verifique este resultado.

b. Encuentre α para la situación en que l, h y β_1 son iguales como en la parte (a) pero $D = 30$pulg.



Problemas en los que se pide el uso de la tecnología:

Ejercicio 17. (Ejercicios 2.3). Use Maple para determinar cuántas iteraciones del método de Newton con $p_0 = \pi/4$ se necesitan para encontrar un cero de $f(x) = cosx - x$ con una exactitud de 10^{-100}.

Ejercicio 25. (Ejercicios 2.3). Sea $f(x) = 3^{3x+1} - 7 \cdot 5^{2x}$.

a. Use los comandos o instrucciones de `Maple solve` y `fsolve` para tratar de encontrar todos los ceros de f.

b. Grafique $f(x)$ para obtener las aproximaciones iniciales de los ceros de f.

c. Con el método de Newton encuentre los ceros de f con una exactitud de 10^{-16}.

d. Encuentre algebraicamente las soluciones exactas de $f(x) = 0$.

⧫ Método de la secante

★Análisis conceptual

En el **libro A**, el método de la secante se introduce como una variación del método de la falsa posición, el algoritmo lo presentan como sigue (**ACRA**), (**ACCF**):

> **Algorithm 3.4: Secant method.** Given a function $f(x)$ and two points x_{-1}, x_0.
>
> For $n = 0, 1, 2, \cdots$, until satisfied, do:
> Calculate $x_{n+1} = [f(x_n)x_{n-1} - f(x_{n-1}x_n)]/f(x_n) - f(x_{n-1})$

Los autores mencionan que aplicando esta técnica al ejemplo propuesto para el método de bisección[13], después de 6 pasos se obtiene una aproximación mucho mejor.

A diferencia del **libro A**, en el **libro B**, la introducción de este concepto se hace de manera heurística (**ACCH**), es decir, se le relaciona tanto con el método de Newton como con el método de la falsa posición para introducir la fórmula iterativa, el autor inicia mencionando que este método es muy similar al método de Newton, con la diferencia de que con éste método f' se aproxima utilizando los dos valores de iteraciones consecutivas de f, en consecuencia se elimina la necesidad de evaluar tanto a f como a f' en cada iteración, de tal forma que el método de la secante es más eficiente sobre todo si f es una función en la que se invierte mucho tiempo al evaluarla (**ADCH**).

En cuanto a la relación con el método de la falsa posición, se menciona que ambos se basan en la fórmula de la interpolación lineal, la diferencia está en que el método de la secante utiliza extrapolaciones mientras que el de la falsa posición utiliza únicamente interpolaciones. (**ADCH**)

De aquí que las aproximaciones sucesivas para la raíz en el método de la secante están dadas por

$$x_n = x_{n-1} - y_{n-1}\frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{y_{n-1} - y_{n-2}}, n = 2, 3 \ldots$$

[13]Resolver la ecuación polinomial $x^3 - x - 1 = 0$.

donde x_0 y x_1 son dos suposiciones iniciales para comenzar la iteración.

Luego de esto, se muestra la representación gráfica del método de la secante (**ACRG**):

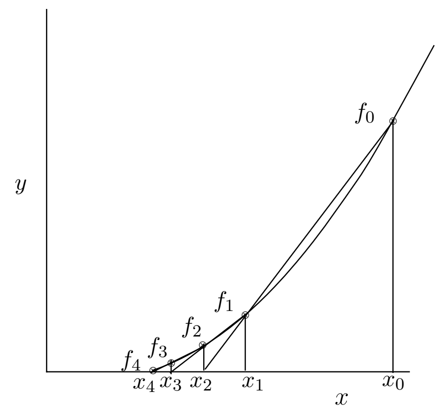


Figura 4.14: Método de la secante. Libro B.

Y hace notar que si los x_{n-1} consecutivos son muy cercanos, entonces también y_{n-1} y y_n están muy cercanos, por lo que aparece un error de redondeo significativo en la ecuación

$$x_n = x_{n-1} - y_{n-1}\frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{y_{n-1} - y_{n-2}}, n = 2, 3 \ldots$$

En consecuencia, menciona que ello se puede evitar de dos formas (**ADCH**):

> (a) Cuando y_n es menor que un valor fijado de antemano, x_{n-2} y y_{n-2} en la ecuación anterior quedan fijos de ahí en adelante.
>
> (b) x_{n-2} y y_{n-2} se reemplazan por $x_{n-2} + \xi$ y $y(x_{n-2} + \xi)$ donde ξ es un número perqueño prescrito pero lo suficientemente grande como para evitar serios errores de redondeo.

Finalmente hace la aclaración de que el método de la secante puede converger a una raíz no deseada o puede no converger del todo si la estimación inicial no es buena. (**ADCH**)

Para ejemplificar, muestra una situación contextualizada en la ciencia de la física (**ACEEA**):

Ejemplo. Un proyectil de $M = 2$ gm ha sido lanzado verticalmente al aire y está descendiendo a su velocidad terminal. La velocidad terminal se determina mediante $gM = F_{drag}$ donde g es la gravedad y M es la masa; toda la ecuación se puede escribir, después de evaluar las constantes, como

$$y = \frac{(2)(9{,}81)}{1000} = 1{,}4 \times 10^{-5} v^{1{,}5} + 1{,}15 \times 10^{-5} v^2$$

donde y es la velocidad terminal en m/seg. El primer término del lado derecho representa la fuerza de fricción y el segundo término la fuerza de presión. Determinar la velocidad terminal por medio del método de la secante. Una estimación perfecta[14] está dada por $y \simeq 30$ m/seg.

Solución.

El problema está definido como la determinación de la raíz de

$$y = f(v) = \frac{(2)(9{,}81)}{1000} - 1{,}4 \times 10^{-5} v^{1{,}5} - 1{,}15 \times 10^{-5} v^2$$

Hacemos $y_0 = 30$ y $y_0 = 30{,}1$ con base en la estimación imperfecta, para los que se evalúan y_0 y y_1 mediante la ecuación anterior. La solución iterativa según la fórmula

$$x_n = x_{n-1} - y_{n-1} \frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{y_{n-1} - y_{n-2}}, n = 1, 2, 3 \ldots$$

es como sigue:

n	v_n	y_n
0	30.00000	1.962000E-02
1	30.10000	6.8889391E-03
2	30.15411	6.8452079E-03
3	38.62414	-8.9657493-04
4	37.64323	9.0962276E-05
5	37.73358	9.9465251E-07
6	37.73458	-1.8626451E-09

Así la velocidad terminal es $v = 37{,}7$ m/seg.

[14]Se ha cambiado la palabra *imperfecta* por *perfecta*.

Como podemos observar, para la resolución se nos proporcionaron los elementos necesarios para la aplicación de la técnica de la secante, de tal forma que calculamos la velocidad terminal de un proyectil, sin embargo, mi opinión es que siendo un problema contextualizado quizá se deba dar una explicación de lo que significa velocidad terminal y posteriormente la fórmula que la determina.

Continuando con este método, en el **libro C**, la técnica de la secante se introduce como una derivación de la técnica de Newton debido al inconveniente que éste presenta en la necesidad de calcular $f'(x)$, lo cual ya hemos mencionado en el análisis fenomenológico del método de Newton. En consecuencia el concepto se introduce de manera constructiva como sigue (**ACCC**):

> Por definición,
>
> $$f'(p_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x) - f(p_{n-1})}{x - p_{n-1}}$$
>
> Haciendo $x = p_{n-2}$, tenemos
>
> $$f'(p_{n-1}) \approx \frac{f(p_{n-2}) - f(p_{n-1})}{p_{n-2} - p_{n-1}} = \frac{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})}{p_{n-1} - p_{n-2}}$$
>
> Al aplicar esta aproximación para $f'(p_{n-1})$ en la fórmula de Newton se obtiene:
>
> $$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})(p_{n-1} - p_{n-2})}{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})}$$

El algoritmo para esta técnica es el siguiente (**ACRN**) (**ACCC**):

> Para encontrar una solución para $f(x) = 0$ dadas las aproximaciones iniciales p_0 y p_1:
>
> ENTRADA aproximaciones iniciales p_0, p_1; tolerancia TOL; número máximo de iteraciones N_0.
>
> SALIDA solución aproximada p o mensaje de fracaso.
>
> *Paso 1* Tome $i = 2$;
> $q_0 = f(p_0)$;
> $q_1 = f(p_1)$.
>
> *Paso 2* Mientras $i \leq N_0$ haga pasos 3-6.
>
> *Paso 3* Tome $p = p_1 - q_1(p_1 - p_0)(q_1 - q_0)$. (*Calcule* p_i)

Paso 4 Si $\mid p - p_1 \mid < TOL$ entonces
SALIDA (p); (*Procedimiento terminado satisfactoriamente.*)
PARAR.

Paso 5 Tome $i = i + 1$
Paso 6 Tome $p_0 = p_1$; (Redefina p_0, q_0, p_1, q_1.)
$q_0 = q_1$;
$p_1 = p$;
$q_1 = f(p)$.

Paso 7 SALIDA (El método falló después de N_0 iteraciones, $N_0 =', N_0$);
(*Procedimiento terminado sin éxito.*)
PARAR.

Y la representación gráfica (**ACRG**):

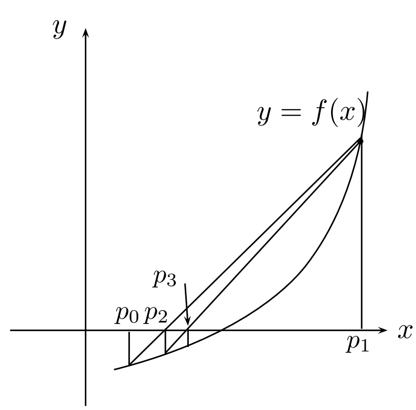


Figura 4.15: Representación gráfica del método de la secante.

Los autores buscan que se observe (**ADCH**)(**ACEEA**) acerca de la rapidéz de convergencia con esta técnica, y para ello retoman un ejemplo mostrado en la presentación del método de Newton, el ejemplo es el siguiente:

> Aplique el método de la secante para encontrar una solución de $x = cosx$.

Numéricamente se hace una comparación de las tablas siguientes, que corresponden a la técnica funcional (o técnica del punto fijo), el método de Newton y la técnica de la secante respectivamente.

n	p_n
0	0.7853981635
1	0.7071067810
2	0.7602445972
3	0.7246674808
4	0.7487198858
5	0.7325608446
6	0.7434642113
7	0.7361282565

Cuadro 4.11: Aplicación del método del punto fijo a $f(x) = cosx$, con $p_0 = \frac{\pi}{4}$

n	p_n
0	0.7853981635
1	0.7395361337
2	0.7390851781
3	0.7390851332
4	0.7390851332

Cuadro 4.12: Aplicación del método de Newton a $f(x) = cosx - x$, con $p_0 = \frac{\pi}{4}$

n	p_n
0	0.5
1	0.7853981635
2	0.7363841388
3	0.7390581392
4	0.7390851493
5	0.7390851332

Cuadro 4.13: Aplicación del método de la secante a $x = cosx$, con $p_0 = 0{,}5$ y $p_1 = \frac{\pi}{4}$

La función de esta comparación es notar que la técnica de la secante es un poco más rápida que la iteración funcional pero un poco más lenta que el método de Newton.

★Análisis Didáctico

En el **libro A**, uno de los objetivos de los autores es que los estudiantes reconozcan una desventaja sobre el método de la secante, así por ejemplo, mencionan que el método aparentemente se acerca muy pronto a un punto en el que $\mid f(x) \mid$ muy pequeña, pero no da sentido para saber a que distancia un cero de $f(x)$ podría estar de ese punto (**ADCH**). Asimismo, hacen notar que $f(x_n)$ y $f(x_{n-1})$ no necesitan tener signos opuestos, por lo tanto la expresión:

$$x_{n+1} = \frac{f(x_n)x_{n-1} - f(x_{n-1})x_n}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

podría redondear efectos de error. Por ejemplo, una situación extrema podría tenerse cuando $f(x_n) = f(x_{n-1})$ haciendo que el cálculo de x_{n+1} sea imposible (**ADOA**). De aquí que los autores plantean la construcción del método de Newton.

Del **libro B**, al respecto del análisis didáctico en sí, lo que podemos mencionar es que la sección al respecto del método de la secante, la termina con el siguiente resumen (**ADOA**):

> a. El método de la secante es una variación del método de Newton. Desde el punto de vista computacional, es más eficiente que el método de Newton.
>
> b. Sin embargo, si dos aproximaciones sucesivas están demasiado cercanas, pueden aparecer errores de redondeo. Se han sugerido dos formas para prevenir los problemas por errores de redondeo.

Finalmente en el **libro C**, uno de los objetivos de los autores es que los estudiantes identifiquen la ventaja de la técnica de la secante por sobre otra técnica, asimismo que observen que tanto la técnica de Newton como la de la secante no hacen un acorralamiento de la raíz. (**ADOA**)

★Análisis Fenomenológico

En la organización de este apartado, se muestran las situaciones encontradas en el siguiente orden: En torno a la matemática misma; En torno a otras ciencias; Fenoménos contextualizados.

Para el Libro A

- **En torno a la matemática misma.** (**AFTM**)

Las situaciones que encontramos, se caracterizan por la aplicación de la técnica tanto a funciones polinómicas como a funciones trascendentes, asimismo, encontramos situaciones en las que se pide comparar resultados cuando se ha aplicado a una misma ecuación técnicas diferentes, con lo que posiblemente, los estudiantes reconozcan la efectividad de las técnicas en cuanto a rapidez, finalmente encontramos situaciones que plantean la reflexión de condiciones ideales de un cierto teorema.

Ejercicio 3.1-3 The polynomial $x^3 - 2x - 1$ has a zero between 1 and 2. Using the secant method find this zero correct to three significant figures.

Ejercicio 3.1-8 The function $f(x) = 4sinx - e^x$ has a zero on the interval $[0, 0{,}5]$. Find this zero correct to four significant digits using the secant method.

Ejercicio 3.5-4 Solve each of the examples in Exercise 3.5-3[15] by both the secant method and Newton's method and compare your results.

Ejercicio 3.5-8 Prove that, under the conditions of Theorem 3.2[16] , the

[15]Exercise 3.5-3 For each of the following functions locate and interval containing the smallest positive zero and show that the condition of the Theorem 3.2 are satisfied.
(a) $e^{-x} - x = 0$
(b) $x^3 - x - 1 = 0$
(c) $e^{-x^2} - cosx = 0$

[16]**Theorem 3.2** Let $f(x)$ be twice continuously differentiable on the closed finite interval $[a, b]$ and let the following conditions be satisfied:
(i) $f(a)f(b) < 0$
(ii) $f'(x) \neq 0, x \in [a, b]$
(iii) $f''(x)$ is either ≥ 0 or ≤ 0 for all $x \in [a, b]$
(iv) At the endpoints a, b

$$\frac{| f(a) |}{| f'(a) |} < b - a \qquad \frac{| f(b) |}{| f'(b) |} < b - a$$

Then Newton's method converges to the unique solution ξ of $f(x) = 0$ en $[a, b]$ for any secant method converges for any choice of x_0, x_1 in the interval $[a, b]$. Also show that the mode of convergence is either monotone or waltzing, depending on the location of two successive iterates. [*Hint:* Use the error equation (3.39) and proceed as in the proof for convergence of Newton's method.]

- **En torno a otras ciencias.** (**AFOC**)

En esta obra no encontramos situaciones en torno a otras ciencias.

- **Fenómenos contextualizados.** (**AFFC**)

En esta obra no encontramos situaciones en torno a fenómenos contextualizados.

Para el Libro B

- **En torno a la matemática misma.** (**AFTM**)

En el **libro B**, al respecto del método de la secante, encontramos sólo dos situaciones en torno a la matemática misma, de hecho, son dos situaciones que en las que se había pedido utilizar el método de bisección:

Ejercicio 3.24. Repita el problema 3.7[17] con el método de la secante.

Ejercicio 3.24. Repita el problema 3.8[18] con el método de la secante.

---

choice of $x_0 \in [a, b]$.

[17] Ejercicio 3.7. Encuentre todas las raíces de las ecuaciones siguientes mediante el método de bisección con una tolerancia de 0.001. (Primero determine un intervalo apropiado para cada raíz mediante el programa 3-3 o enlistando los valores escogidos de x.)
(a) $tan(x) - x + 1 = 0, \quad 0 < x < 3\pi$
(b) $sen(x) - 0{,}3e^x = 0, \quad x > 0$
(c) $-x^3 + x + 1 = 0$
(d) $16x^5 - 20x^3 + x^2 + 5x - 0{,}5 = 0$

[18] Ejercicio 3.8. Calcule intervalos apropiados para las raíces de las siguientes ecuaciones y determine después las raíces mediante el método de bisección con una tolerancia de 0.001:
(a) $0{,}1x^3 - 5x^2 - x + 4 + e^{-x} = 0$
(b) $log_e(x) - 0{,}2x^2 + 1 = 0$
(c) $x + \frac{1}{(x+3)x} = 0$

- **En torno a otras ciencias.** (**AFOC**)

  En esta obra no encontramos situaciones en torno a otras ciencias.

- **Fenómenos contextualizados.** (**AFFC**)

  En esta obra no encontramos situaciones en torno a fenómenos contextualizados.

Para el Libro C

- **En torno a la matemática misma.** (**AFTM**)

  En el **libro C**, debido a que el método es una derivación del método de Newton, son pocas las situaciones que encontramos, una que nos pareción muy interesante reportar es la siguiente, debido a que plantea un razonamiento en cuanto a la operatividad del método:

  > *Ejercicio 15.* (Ejercicios 2.3). La ecuación de iteración para el método de la secante puede escribirse en la forma más simple
  >
  > $$p_n = \frac{f(p_{n-1})p_{n-2} - f(p_{n-2})p_{n-1}}{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})}$$
  >
  > Explique por qué, en términos generales, esta ecuación tiende a ser menos precisa que la del algoritmo de la secante (Este algoritmo fue mostrado en el análisis conceptual.)

- **En torno a otras ciencias.** (**AFOC**)

  En el **libro C** no hay problemas relacionados con el método de la secante en torno a otras ciencias.

- **Fenómenos contextualizados.** (**AFFC**)

  En el **libro C** no hay problemas contextualizados con el método de la secante en torno a fenómenos contextualizados.

⧫ Método de la falsa posición

★Análisis conceptual

En el **libro A**, el método de la falsa posición se introduce de manera constructiva (**ACCC**), cabe mencionar que éste se presenta continuando al método de bisección debido a que los autores mencionan que al ser éste último de lenta convergencia a la raíz, se puede esperar llegar a la raíz más rápido con más información acerca de $f(x)$ en cada paso.

Para la construcción del algoritmo, los autores consideran nuevamente a la función $f(x) = x^3 - x - 1$. De ello hacen notar que $\mid f(1) \mid$ es más cercano a cero que $\mid f(2) \mid$, y que la raíz ξ es probablemente más cercana a 1 que a 2, al menos si $f(x)$ es "casi" lineal. Ahora a diferencia del método de bisección, se evalúa a $f(x)$ en la media ponderada, es decir, en:

$$w = \frac{\mid f(2) \mid \cdot 1 + \mid f(1) \mid \cdot 2}{\mid f(2) \mid + \mid f(1) \mid}$$

los autores hacen notar que si $f(1)$ y $f(2)$ tienen signos opuestos, la ecuación anterior puede escribirse como

$$w = \frac{f(2) \cdot 1 - f(1) \cdot 2}{f(2) - f(1)}$$

que para el ejemplo resulta

$$w = \frac{5 \cdot 1 + 1 \cdot 2}{6} = 1{,}166666 \cdots$$

y

$$f(w) = -0{,}578703 \cdots < 0 < 5 = f(2)$$

de aqui que ξ se encuentra entre $[1{,}166666 \cdots, 2]$, ahora se repite el proceso para ese intervalo y se obtiene,

$$w = \frac{5 \cdot (1{,}166666 \cdots) + (0{,}578703 \cdots) \cdot 2}{5{,}578703} = 1{,}253112 \cdots$$

y $f(w) = -0{,}285363 \cdots < 0 < 5 = f(2)$.

En consecuencia $f(x)$ tiene un cero en el intervalo $[1{,}253112 \cdots, 2]$.

Después de haber realizado el proceso, los autores mencionan que ello es conocido como el método de la falsa posición o regula falsi y enseguida presentan el algoritmo (**ACRA**) (**ACCF**):

> **Algorithm 3.2: Regula falsi**. Given a function $f(x)$, continuous on the interval $[a_0, b_0]$ and such that $f(a_0)f(b_0) < 0$.
> For $n = 0, 1, 2, \cdots$, until satisfied, do:
> Calculate $w = [f(b_n)a_n - f(a_n)b_n]/[f(b_n) - f(a_n)]$
> If $f(a_n)f(w) \leq 0$, set $a_{n+1} = a_n, b_{n+1} = w$
> Otherwise, set $a_{n+1} = w, b_{n+1} = b_n$

Posteriormente presentan la gráfica que ejemplifica el proceso (**ACRG**):

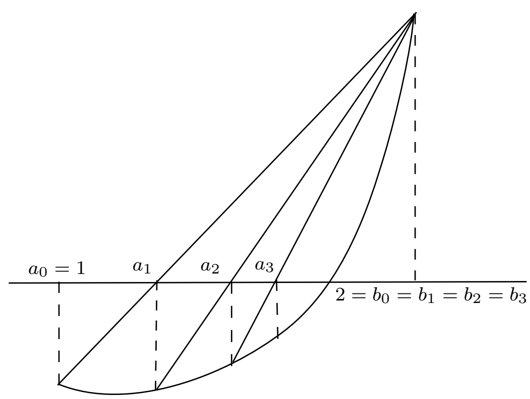


Figura 4.16: Representación gráfica del método de la falsa posición. Libro A.

Ahora bien, el algoritmo del método de la falsa posición, puede mejorarse de varias maneras, una de ellas es el método de la falsa posición modificada, el cual sustituye a las secantes por líneas rectas de menos pendiente hasta que w cae del otro lado de la raíz. Otra manera es el método de la secante, el cual es una modificación del método de la falsa posición.

Al respecto del algoritmo de la falsa posición modificada, los autores mencionan el siguiente (**ACRA**) (**ACCF**):

> **Algorithm 3.3: Modified regula falsi**. Given $f(x)$ continuous on $[a_0, b_0]$ and such that $f(a_0)f(b_0) < 0$.
> Set $F = f(a_0), G = f(b_0), w = a_0$
>
> For $n = 0, 1, 2, \cdots$, until satisfied, do:
> Calculate $w_{n+1} = (Ga_n - Fb_n)/(G - F)$

If $f(a_n)f(w_{n+1}) \leq 0$, set $a_{n+1} = a_n, b_{n+1} = w_{n+1}, G = f(w_{n+1})$
If also $f(w_n)f(w_{n+1}) > 0$, set $F = F/2$
Otherwise, set $a_{n+1} = w_{n+1}, F = f(w_n + 1), b_{n+1} = b_n$
If also $f(w_n)f(w_{n+1}) > 0$, set $G = G/2$
Then $f(x)$ has a zero in the interval $[a_{n+1}, b_{n+1}]$

Posteriormente presentan la gráfica que ejemplifica el proceso (**ACRG**):

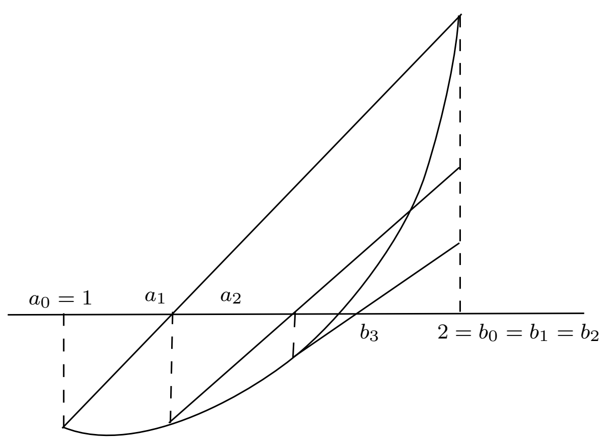


Figura 4.17: Representación gráfica del método de la falsa posición modificado. Libro A.

Por otra parte, en el **libro B**, este método se presenta enseguida del método de bisección, el autor menciona que está basado en la interpolación lineal y que es análogo al método de la bisección, ya que el intervalo que contiene a la raíz se reduce mediante la iteración, pero la diferencia es que en vez de bisectar monótonamente el intervalo, se utiliza una interpolación lineal ajustada a dos puntos extremos para encontrar una aproximación de la raíz. La introducción del concepto se hace de manera constructiva como se muestra a continuación (**ACCC**):

Dado un intervalo $[a, c]$ que contenga a la raíz, la función lineal que pasa por $(a, f(a))$ y $(c, f(c))$ se escribe como

$$y = f(a) + \frac{f(c) - f(a)}{c - a}(x - a)$$

o despejando x,

$$x = a + \frac{c - a}{f(c) - f(a)}(y - f(a))$$

La coordenada en x en donde la línea intersecta al eje x se determina al hacer $y = 0$ en la ecuación anterior, de donde:

$$b = a - \frac{c-a}{f(c)-f(a)} f(a) = \frac{af(c) - cf(a)}{f(c)-f(a)}$$

El autor explica que después de encontrar b, el intervalo $[a, c]$ se divide en $[a, b]$ y $[b, c]$, si $f(a)f(b) \leq 0$, la raíz se encuentra en $[a, b]$, en caso contrario está en $[b, c]$, entonces los extremos del nuevo intervalo se renombran a y c, así el proceso de interpolación se repite hasta que las raíces estimadas convergen.

Finalmente para este método, en el **libro C**, se introduce de manera constructiva (**ACCC**), éste surge de la derivación del método de la secante, y en consecuencia, del método de Newton. Su principal objeto es el acorralamiento de raíces, ya que en los dos métodos de los cuales se deriva NO está garantizado dicho acorralamiento. Es decir el método de la falsa posición ofrece una prueba para asegurarse de que la raíz quede entre dos iteraciones sucesivas.

Su representación gráfica, se muestra en comparación con la del método de la secante como sigue (**ACRG**):

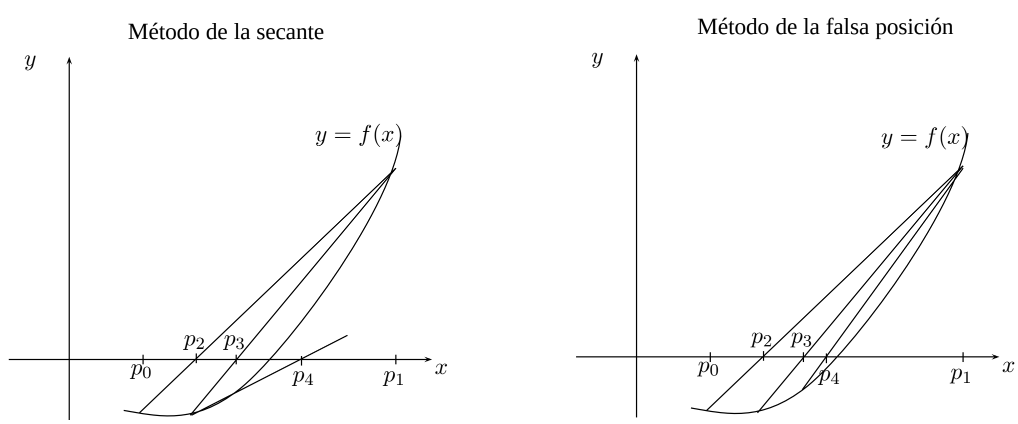


Figura 4.18: Diferencia entre el método de la secante y el de la falsa posición. Libro C.

La representación algorítmica, en el **libro C** se muestra como sigue (**ACCC**):

Para encontrar una solución a $f(x) = 0$ dada la función continua f en el intervalo $[p_0, p_1]$ donde $f(p_0)$ y $f(p_1)$ tienen signos opuestos:

ENTRADA aproximaciones iniciales p_0, p_1; tolerancia TOL; número máximo de iteraciones N_0.

SALIDA solución aproximada p o mensaje de falla.

Paso 1 Tome $i = 2$;
$q_0 = f(p_0)$;
$q_1 = f(p_1)$.

Paso 2 Mientras $i \leq N_0$ haga pasos 3-7.

Paso 3 Tome $p = p_1 - q_1(p_1 - p_0)(q_1 - q_0)$. (*Calcule* p_i)

Paso 4 Si $\mid p - p_1 \mid < TOL$ entonces
SALIDA (p); (*Procedimiento terminado satisfactoriamente.*)
PARAR.

Paso 5 Tome $i = i + 1$;
$q = f(p)$.

Paso 6 Si $(q)(q_1) < 0$ entonces tome $p_0 = p_1$; $q_0 = q_1$.

Paso 7 Tome $p_1 = p; q_1 = q$.

Paso 8 SALIDA ('El método falló después de N_0 iteraciones, $N_0 =', N_0)$;
(*Procedimiento terminado sin éxito.*)
PARAR.

Numéricamente (**ACRN**), los autores hacen una comparación con las técnicas anteriores aplicando el método de la falsa posición a $f(x) = cosx$

Al respecto, señalan que este método suele requerir más cálculos que el método de la secante, pero que es más seguro. (**ADOA**)

★Análisis Didáctico

n	p_n
0	0.5
1	0.7853981635
2	0.7363841388
3	0.7390581392
4	0.7390848638
5	0.7390851305
6	0.7390851332

Cuadro 4.14: Aplicación del método de la falsa posición a $x = cosx$, con $p_0 = 0{,}5$ y $p_1 = \frac{\pi}{4}$

Como ya se mencionó, en el **libro A**, la forma de presentación del método de la falsa posición continúa la idea de encontrar la raíz en menos pasos que con el uso del método de bisección, ello responde al hecho de que los estudiantes observen que la convergencia es más rápida usando el método de la falsa posición. (**ADCH**), (**ADOA**)

Sin embargo, los autores mencionan dos variantes de este método, dado que aunque el método de la falsa posición produce un punto en el que $\mid f(x) \mid$ es muy "pequeño" y converge más rápido que el método de bisección, éste falla cuando se da un intervalo muy pequeño. El argumento es que la media ponderada,

$$w = \frac{f(b_n)a_n - f(a_n)b_n}{f(b_n) - f(a_n)}$$

es el punto en el cual la línea recta que pasa por los puntos $\{a_n, f(a_n)\}$ y $\{b_n, f(b_n)\}$ intersecta al eje x, además de que tal línea es una secante a $f(x)$, en consecuencia, si $f(x)$ es cóncava hacia arriba y creciente en el intervalo de interés, entonces la secante está siempre por encima de $f(x)$, y por lo tanto w está siempre a la izquierda del cero. Ahora si $f(x)$ es cóncava hacia abajo y creciente, w está siempre a la derecha del cero. (**ADCH**)

Al finalizar la sección correspondiente a los métodos iterativos, los autores muestran un ejemplo, al que aplican 4 de los algoritmos planteados, con la finalidad de que se observe con mayor detalle las ventajas de uno sobre otro (**ADCH**), el ejemplo es el siguiente:

Example 3.1 The function $f(x) = x - 0{,}2sinx - 0{,}5$ has exactly one zero between $x_0 = 0{,}5$ and $x_l = 1{,}0$, since $f(0{,}5)f(l{,}0) < 0$, while $f'(x)$

does not vanish on $[0{,}5, 1]$. Locate the zero correct to six significant figures using Algorithms 3.1, 3.3, 3.4, and 3.5. *(Método de bisección, método de la falsa posición modificado, método de la secante y método de Newton.)*

The following calculations were performed on an IBM 7094 computer in singleprecision 27-binary-bit floating-point arithmetic.

	Algorithm 3.1		Algorithm 3.3		Algorithm 3.4	Algorithm 3.5
n	x_n	ε_n	x_n	ε_n	x_n	x_n
-1					1	
0	0.75	$3 \cdot 10^{-1}$	0.75	$3 \cdot 10^{-1}$	0.5	0.5
1	0.625	$2 \cdot 10^{-1}$	0.80606124	$2 \cdot 10^{-1}$	0.61212248	0.61629718
2	0.5625	$6 \cdot 10^{-2}$	0.61534080	$3 \cdot 10^{-3}$	0.61549349	0.61546820
3	0.59375	$3 \cdot 10^{-2}$	0.61701328	$2 \cdot 10^{-3}$	0.61546816	0.61546816
4	0.609375	$2 \cdot 10^{-2}$	0.61701363	$2 \cdot 10^{-3}$		
5	0.6171875	$8 \cdot 10^{-3}$	0.61546816	0		
6	0.61328125	$4 \cdot 10^{-3}$				
...	...					
10	0.61547852	$4 \cdot 10^{-3}$				
...	...	...				
19	0.61546850	$5 \cdot 10^{-7}$				

Cuadro 4.15: Comparación numérica para la función $f(x) = x - 0{,}2 sin x - 0{,}5$

Los autores explican que en el algoritmo del método de bisección y en el algoritmo del método de la falsa posición modificada, x es el punto medio entre las cotas superior e inferior, a_n y b_n después de n iteraciones, mientras el ε_n da la cota correspondiente sobre el error en x_n previsto por el algoritmo. También hacen notar la rapidez y convergencia sistemática tanto del algoritmo del método de la secante y del método de Newton y que el método de bisección converge muy lentamente pero firmemente, mientras que el método de la falsa posición modificada parece converger rápidamente, obteniendo el cero correcto con bastante rapidez. (**ADCH**)

Respecto del **libro B**, a diferencia del **libro A**, en primer lugar se explica acerca de una desventaja del método de la falsa posición, la desventaja es que pueden aparecer extremos fijos como en la siguiente figura (que también es la representación gráfica del método (**ACRG**)), es decir, uno de los extremos de la sucesión de intervalos no se mueve del punto original, por lo que las aproximaciones a la raíz convergen a la raíz exacta solamente por un lado, entonces se menciona que los extremos fijos no son deseables debido a que hacen más lenta la convergencia, en particular cuando el intervalo inicial es muy grande o cuando la función se desvía de manera significativa de una línea recta en el intervalo. (**ADCH**)

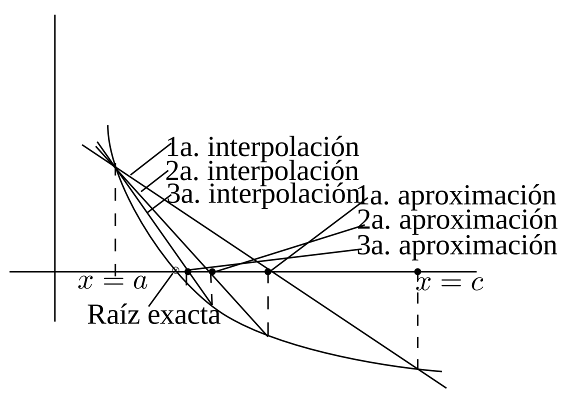


Figura 4.19: Método de la falsa posición. Libro B.

Entonces el autor enfatiza en la dificultad anterior, con la finalidad de mostrar que el método de la falsa posición modificado elimina dicha dificultad. Y lo representa gráficamente como sigue (**ACRG**):

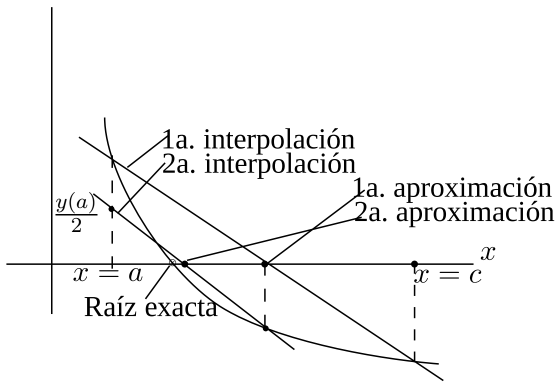


Figura 4.20: Método de la falsa posición modificada. Libro B.

La intención de los autores con la gráfica es hacer notar que el efecto de dividir el valor de y es que la solución de la interpolación lineal se hace cada vez más cercana a la verdadera raíz. (**ADOA**)

Para reafirmar el contenido en la sección de la falsa posición, el autor termina la sección con el siguiente resumen:

a. El método de la falsa posición es esencialmente igual al método de la bisección, excepto que el segundo método se reemplaza por la interpolación lineal.
b. El método de la falsa posición no necesariamente es más rápido que el método de bisección, debido a que un extremo puede permanecer fijo.
c. El método de la falsa posición modificada elimina los extremos fijos dividiendo a la mitad los valores de dichos puntos.

Al respecto del método de la falsa posición, en el **libro C**, no se le recomienda, las causas, no las mencionan a priori. Sin embargo, sí se puede decir que en consecuencia buscan que el estudiante recurra a otros métodos. (**ADOA**) Esto quizá se deba a que el método de la falsa posición suele requerir más cálculos que el método de la secante debido a que aunque hubo una simplificación en la derivación del método, éste suele lograrse a costa de iteraciones adicionales.

Otra intención de los autores es que los estudiantes descubran otras ventajas y desventajas tanto del método de la secante como del de la tangente, pues por ejemplo, mencionan que en los ejercicios 13 y 14, se verán más ejemplos de aspectos positivos y negativos de ámbos métodos.

Ejercicio 13. (Ejercicios 2.3). El polinomio de cuarto grado

$$f(x) = 230x^4 + 18x^3 + 9x^2 - 221x - 9$$

tiene dos ceros reales, uno en $[-1, 0]$ y el otro en $[0, 1]$. Trate de aproximar estos ceros con una exactitud de 10^{-6} por medio de:

a. El método de la posición falsa
b. El método de la secante
c. El método de Newton

Utilice los extremos de cada intervalo como aproximaciones iniciales en (a) y en (b) y los intermedios como aproximaciones iniciales en (c).

Ejercicio 14. (Ejercicios 2.3). La función $f(x) = tan\pi x - 6$ tiene un cero en $(1/\pi)arctan6 \approx 0{,}447431543$. Sean $p_0 = 0$ y $p_1 = 0{,}48$, use diez iteraciones de cada uno de los siguientes métodos para aproximar esta raíz. ¿Cuál de ellos es más eficiente y por qué?

a. Método de bisección
b. Método de la posición falsa
c. Método de la secante

★Análisis Fenomenológico

En la organización de este apartado, se muestran las situaciones encontradas en el siguiente orden: En torno a la matemática misma; En torno a otras ciencias; Fenoménos contextualizados.

Para el Libro A

- **En torno a la matemática misma.** (**AFTM**)

En esta obra, las situaciones que encontramos se caracterizan por las relaciones entre conceptos que se pretenden hacer en una misma situación, por ejemplo en una de las situación siguientes, podemos observar que se intentan relacionar conceptos como raíz positiva real y error de estimación. Asimismo, se pretende ver la diferencia en la velocidad de convergencia de los métodos de bisección y de la falsa posición. Y en otra, se observa la aplicación de la técnica en sí, pero condicionada.

Ejercicio 3.1-1 Find an interval containing the real positive zero of the function $f(x) = x^2 - 2x - 2$. Use Algorithms 3.1 and 3.2 (Bisection method and regula falsi method) to compute this zero correct to two significant figures. Can you estimate how many steps each method would require to produce six significant figures?

Ejercicio 3.1-2 For the example ($f(x) = x^3 - x - 1$) given in the text, carry out two steps of the modified regula falsi (Algorithm 3.3)

- **En torno a otras ciencias.** (**AFOC**)

En el **libro A**, no encontramos situaciones en torno a otras ciencias.

- **Fenómenos contextualizados.** (**AFFC**)

En el **libro A**, no encontramos situaciones en torno a fenómenos contextualizados.

Para el Libro B

- **En torno a la matemática misma.** (**AFTM**)

En el **libro B**, las situaciones que encontramos generalmente son de aplicación de la técnica en sí, tanto a funciones polinómicas como a funciones trascendentes.

Problema 3.12. Encuentre la raíz de $f(x) = sen(x) - x + 1$ que se sabe está en $1 < x < 3$, mediante el método de la falsa posición modificada. Detenga los cálculos después de cuatro iteraciones.

Problema 3.13. Determine las raíces de las siguientes ecuaciones mediante el método de la falsa posición modificada:

(a) $f(x) = 0{,}5exp(x/3) - sen(x), \quad x > 0$
(b) $f(x) = log(1 + x) - x^2$
(c) $f(x) = exp(x) - 5x^2$
(d) $f(x) = x^3 + 2x - 1 = 0$
(e) $f(x) = \sqrt{x + 2}$

- **En torno a otras ciencias.** (**AFOC**)

En el **libro B**, no encontramos situaciones en torno a otras ciencias.

- **Fenómenos contextualizados.** (**AFFC**)

En el **libro B**, únicamente encontramos la siguiente situación contextualizada, sin embargo, en nuestra opinión carece de sentido si no se hace una explicación de qué es una función de transferencia o las nociones básicas de lo qué se puede modelar con un sistema de transferencia. Lo que nos parece interesante de esta situación, es que plantea su tratamiento en dos marcos de representación, el gráfico y el numérico.

> *Problema 3.14.* La función de transferencia para un sistema está dada por
> $$F(s) = \frac{H(s)}{1 + G(s)H(s)}$$
> donde
> $$G(s) = \frac{1}{s}exp(-0{,}1s), \qquad H(s) = K$$
> Busque las raíces de la ecuación característica $1 + G(s)H(s) = 0$ para $K = 1, 2$ y 3 mediante el método gráfico y evalúelas después mediante el método de la falsa posición modificada.

Para el Libro C

En esta obra, no hemos encontrado directamente situaciones de fenómenos en torno a la matemática misma, en torno a otras ciencias o en torno a fenoménos contextualizados relacionadas con el método de la falsa posición, ya que como hemos dicho, su explicación se incluye en la sección dedicada al método de Newton.

♦ Método de Horner

★Análisis conceptual

Al respecto de este método, sólo analizamos el **libro C**, pues en las otras obras dicho método no está presente.

En primer lugar, la presentación de la técnica se realiza mediante el siguiente teorema (**ACCF**):

TEOREMA. MÉTODO DE HORNER.
Sea

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Si $b_n = a_n$ y $b_k = a_k + b_{k+1}x_0$, para $k = n-1, n-2, \cdots, 1, 0$ entonces $b_0 = P(x_0)$. Más aún si,

$$Q(x) = b_n x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} + \cdots + b_2 x + b_1,$$

entonces

$$P(x) = (x - x_0)Q(x) + b_0.$$

Posteriormente muestran un ejemplo de aplicación de la técnica:

Ejemplo 1. Aplique el método e Horner para evaluar $P(x) = 2x^4 - 3x^2 + 3x - 4$ en $x_0 = -2$.

Para resolverlo, los autores mencionan que se recurre a la construcción de una tabla que se corresponde con la división sintética, de donde la solución se plantea como sigue:

$x_0 = -2$	Coeficiente de x^4	Coeficiente de x^3	Coeficiente de x^2	Coeficiente de x	Término constante
	$a_4 = 2$	$a_3 = 0$	$a_2 = -3$	$a_1 = 3$	$a_0 = -4$
		$b_4x_0 = -4$	$b_3x_0 = 8$	$b_2x_0 = -10$	$b_1x_0 = 14$
	$b_4 = 2$	$b_3 = -4$	$b_2 = 5$	$b_1 = -7$	$b_0 = 10$

Por lo tanto,

$$P(x) = (x + 2)(2x^3 - 4x^2 + 5x - 7) + 10$$

De manera constructiva (**ACCC**), el algoritmo iterativo se presenta de la siguiente manera:

Para evaluar el polinomio

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = (x - x_0)Q(x) + b_0$$

y su derivada en x_0:

ENTRADA grado n; coeficientes $a_0, a_1, \cdots, a_n; x_0$.

SALIDA $y = P(x_0); z = P'(x_0)$.

Paso 1 Tome $y = a_n$; (*Calcule* b_n *para* P)
$z = a_n$. (*Calcule* b_{n-1} *para* Q)
Paso 2 Para $j = n-1, n-2, \cdots, 1$
Tome $y = x_0 y + a_j$ (*Calcule* b_j *para* P)
$z = x_0 z + y$ (*Calcule* b_{j-1} *para* Q)
Paso 3 Tome $y = x_0 y + a_0$ (*Calcule* b_0 *para* P)

Paso 4 SALIDA (y, z) PARAR.

★Análisis Didáctico

En la obra, se hace notar una ventaja del uso de este procedimiento (**ADOA**), la cual consiste en que como

$$P(x) = (x - x_0)Q(x) + b_0$$

donde

$$Q(x) = b_n x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} + \cdots + b_2 x + b_1,$$

al derivar respecto a x se obtiene $P'(x) = Q(x) + (x - x_0)Q'(x)$ y $P'(x_0) = Q(x_0)$, entonces se puede utilizar de la misma forma cuando se use el método de Newton-Raphson.

Los autores pretenden que los estudiantes relacionen el procedimiento de Newton con la división sintética (**ADCH**), (**ACEET**):

Ejemplo 2. Encuentre una aproximación a uno de los ceros de

$$P(x) = 2x^4 - 3x^2 + 3x - 4$$

usando el procedimiento de Newton y la división sintética para evaluar $P(x_n)$ y $P'(x_n)$ en cada iteración x_n.

Para su resolución muestran lo obtenido con el ejemplo 1,

$$\begin{array}{r|rrrrrl} x_0=-2 & 2 & 0 & -3 & 3 & -4 & \\ & & -4 & 8 & -10 & 14 & \\ \hline & 2 & -4 & 5 & -7 & 10 & =P(-2) \end{array}$$

Usando el teorema y la ecuación $P'(x_0) = Q(x_0)$ se obtiene, $Q(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 7$ y $P'(-2) = Q(-2)$, de modo que $P'(-2)$ puede encontrarse al evaluar $Q(-2)$ de manera similar:

$$\begin{array}{r|rrrrl} x_0=-2 & 2 & -4 & 5 & -7 & \\ & & -4 & 16 & -42 & \\ \hline & 2 & -8 & 21 & -49 & =Q(-2)=P'(-2) \end{array}$$

y

$$x_1 = x_0 - \frac{P(x_0)}{P'(x_0)} = -2 - \frac{10}{-49} \approx -1{,}796.$$

Al repetir el procedimiento para encontrar x_2,

$$\begin{array}{r|cccccc} -1{,}796 & 2 & 0 & -3 & 3 & \text{-4} & \\ & & -3{,}592 & 6{,}451 & -6{,}197 & 5.742 & \\ \hline & 2 & -3{,}592 & 3{,}451 & -3{,}197 & 1{,}742 & =P(x_1) \\ & & -3{,}592 & 12{,}902 & -29{,}368 & & \\ \hline & 2 & -7{,}184 & 16{,}353 & -32{,}565 & =Q(x_1) & =P'(x_1) \end{array}$$

Por lo tanto, $P(-1{,}796) = 1{,}742, P'(-1{,}796) = -32{,}565$, y

$$x_2 = -1{,}796 - \frac{1{,}742}{-32{,}565} \approx -1{,}7425.$$

También se pretende que se observe (**ADCH**) que el polinomio $Q(x)$ depende de la aproximación que se emplea y además que cambia de una iteración a otra.

Otra característica importante es que esta técnica en conjunto con el método de Newton permite encontrar raíces complejas, lo cual conceptualmente es diferente de la búsqueda de raíces reales (**ADCH**). Al respecto lo autores mencionan:

> Un problema que se presenta al aplicar el método de Newton a los polinomios, es la posibilidad de que el polinomio contenga raíces complejas, cuando todos los coeficientes son números reales. Si la aproximación inicial mediante el método de Newton es un número real, también lo serán las aproximaciones subsecuentes. Una manera de superar esta dificultad consiste en comenzar con una aproximación inicial compleja y efectuar todos los cálculos por medio de la aritmética compleja.

De tal forma que para fortalecer lo anterior, plasman el siguiente teorema:

Teorema. Si $z = a + bi$ es un cero complejo de multiplicidad m del polinomio $P(x)$, entonces $\bar{z} = a - bi$ también será un cero de multiplicidad m del polinomio $P(x)$ y $(x^2 - 2ax + a^2 + b^2)^m$ será un factor de $P(x)$

★Análisis Fenomenológico

En la organización de este apartado, se muestran las situaciones encontradas en el siguiente orden: En torno a la matemática misma; En torno a otras ciencias; Fenoménos contextualizados.

Para el Libro C

- **En torno a la matemática misma. (AFTM)**

Directamente en esta obra no se han encontrado situaciones que apliquen el método de Horner, sino más bien se plantean situaciones en las que se pide aplicar el método de Newton con la finalidad de que se recurra al cálculo de $P'(x_0)$ con la técnica de Horner.

Asimismo se plantean situaciones para encontrar ceros complejos, lo cual refleja una característica más de la técnica de Horner.

Ejercicio 2. (Ejercicios 2.6). Obtenga aproximaciones con un grado de exactitud de 10^{-5} a todos los ceros de los siguientes polinomios, encontrando primero los ceros reales mediante el método de Newton y reduciendo luego los polinomios de menor grado para determinar los ceros complejos.

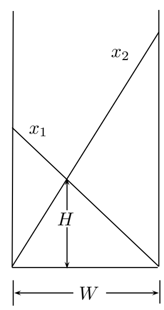
- **En torno a otras ciencias.**

En el **libro C**, no se han encontrado situaciones en torno a otras ciencias.

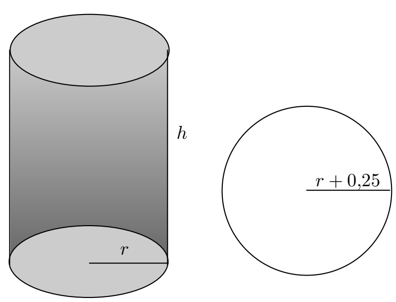
- **Fenómenos contextualizados.**

Encontramos tres situaciones contextualizadas en el **libro C**, la primera relacionada con el cálculo de longitudes, la segunda relacionada con el cálculo de volumen, y la tercera con la comprobación de un resultado encontrado por un personaje de la historia muy famoso. Aunque los contextos de las tres situaciones son de distinta naturaleza, comparten según nuestra opinión, que las tres recaen en el campo de la resolución de problemas.

Ejercicio 10. (Ejercicios 2.6). Dos escaleras se cruzan en un pasillo de ancho W. Cada una llega de la base de un muro a un punto en el muro de enfrente. Las escaleras se cruzan a una altura H arriba del pavimento. Dado que las longitudes de las escaleras son $x_1 = 20$ pies y $x_2 = 30$ pies y que $H = 8$ pies, calcule W.



Ejercicio 11. (Ejercicios 2.6). Debemos fabricar una lata de forma cilíndrica circular recta que contenga 1000 cm^3. La tapa circular de la parte superior y del fondo deben tener un radio de 0,25 cm más que el radio de la lata, para que el sobrante se utilice para sellar con la parte lateral. La hoja de material con que se construye esta parte de la lata también debe ser 0,25 cm más grande que la circunferencia de la lata, de modo que pueda hacerse un sello. Calcule, con una exactitud de 10^{-4}, la cantidad mínima de material necesaria para fabricar la lata.



Ejercicio 12. (Ejercicios 2.6). En 1224, Leonardo de Pisa, mejor conocido como Fibonacci, resolvió el reto matemático de Juan Palermo en presencia del emperador Federico II. El reto consistía en obtener una raíz de la ecuación $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$. Primero demostró que la ecuación carecía de raíces racionales y de una raíz irracional euclidiana, es decir, no tenía ninguna raíz de una de las formas $a \pm \sqrt{b}$, $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$, $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$, o $\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$, donde a y b son números racionales. Después aproximó la única raíz real, probablemente aplicando un método algebraico de Omar Khayyam que incluía la intersección de un círculo y de una parábola. Su respuesta la dio en un sistema numérico de base 60 así:

$$1+22\left(\frac{1}{60}\right)+2\left(\frac{1}{60}\right)^2+42\left(\frac{1}{60}\right)^3+33\left(\frac{1}{60}\right)^4+4\left(\frac{1}{60}\right)^5+40\left(\frac{1}{60}\right)^6$$

¿Qué exactitud tenía su aproximación?

⧫ Método de Müller

★Análisis conceptual

Este método sólo lo tratan el **libro A** y el **libro C**, en consecuencia en lo que sigue no mencionamos el **libro B**.

En el **libro A**, primeramente se inicia mencionando porqué usar este método, es decir, se enfatiza que es un método con el que se pueden encontrar aproximaciones de todos los ceros simultáneamente, además de que puede ser usado para encontrar cualquier número de ceros, reales o complejos de una función arbitraria. También se menciona que es una extensión del método de la secante. Se le introduce primeramente de manera gráfica (**ACRG**):

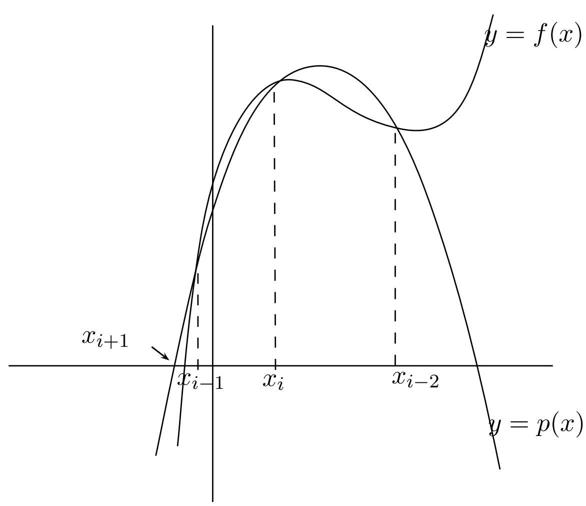


Figura 4.21: Representación gráfica del método de Müller. Libro A.

Y enseguida se formaliza en con el algoritmo siguiente:

1. Let x_0, x_1, x_2 be three approximations to a zero ξ of $f(x)$. Compute $f(x_0), f(x_1), f(x_2)$.
2. Compute

$$h(2) := x_2 - x_1, h_1 := x_1 - x_0$$
$$f[x_2, x_1] = (f(x_2) - f(x_1))/h_2$$
$$f[x_1, x_0] = (f(x_1) - f(x_0))/h_1$$

3. Set $i = 2$

4. Compute

$$f[x_i, x_{i-1}, x_{i-2}] = (f[x_i, x_{i-1}] - f[x_{i-1}, x_{i-2}])/(h_i + h_{i-1})$$

$$c_i := f[x_i, x_{i-1}] + h_i f[x_i, x_{i-1}, x_{i-2}]$$

5. Compute

$$h_{i+1} := -2f(x_i)/\left(c_i \pm \sqrt{c_i^2 - 4f(x_i)f[x_i, x_{i-1}, x_{i-2}]}\right)$$

6. Set $x_{i+1} = x_i + h_{i+1}$
7. Compute

   $f(x_{i+1})$ and $f[x_{i+1}, x_i] = (f(x_{i+1}) - f(x_i))/h_{i+1}$
8. Set $i = i + 1$ and repeat steps 4-7 until either of the following criteria is satisfied for prescribed $\varepsilon_1, \varepsilon_2$:
   (a) $\mid x_i - x_{i-1} \mid < \varepsilon_1 \mid x_i \mid$
   (b) $\mid f(x_i) \mid < \varepsilon_2$ or until the maximum number of iterations is exceeded.

Por otra parte en el **libro C**, se inicia mencionando que el método de Müller es una extensión del método de la secante, haciendo la diferencia de que para el último se inicia con dos aproximaciones x_0 y x_1 a partir de las cuales se determina la siguiente aproximación x_2 como la intersección del eje x con la línea que cruza $(x_0, f(x_0))$ y $(x_1, f(x_1))$, mientras que en con el método de Müller se necesitan tres aproximaciones iniciales x_0, x_1 y x_2 y se determina la siguiente aproximación x_3 al considerar la intersección del eje x con la parábola que atraviesa $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$ (**ACCH**).

También se recurre primero a la introducción gráfica del concepto (**ACRG**):

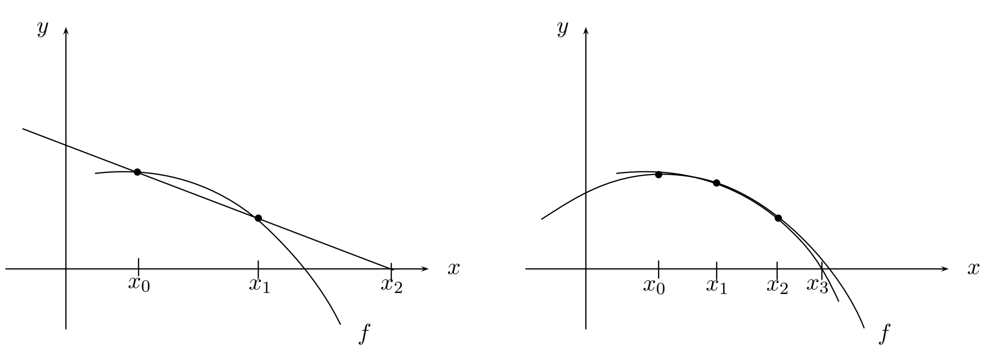


Figura 4.22: Representación gráfica del método de Müller. Libro C.

De manera constructiva el algoritmo se presenta como sigue (**ACCC**):

Para obtener una solución de $f(x) = 0$ dadas tres aproximaciones x_0, x_1 y x_2 :

ENTRADA x_0, x_1 y x_2; tolerancia TOL; número máximo de iteraciones N_0

SALIDA solución aproximada p o mensaje de falla.

Paso 1 Tome $h_1 = x_1 - x_0$;
$h_2 = x_2 - x_1$;
$\delta_1 = (f(x_1) - f(x_0))/h_1$;
$\delta_2 = (f(x_2) - f(x_1))/h_2$;
$d = (\delta_1 - \delta_2)/(h_2 + h_1)$;
$i = 3$.

Paso 2 Mientras $i \leq N_0$ haga pasos $3 - 7$.

Paso 3 $b = \delta_2 + h_2 d$;
$D = (b^2 - 4f(x_2)d)^{1/2}$ (*Nota: se puede necesitar aritmética compleja.*)

Paso 4 Si $| b - D | < | b + D |$ entonces tome $E = b + D$
si no, tome $E = b - D$

Paso 5 Tome $h = -2f(x_2)/E$;
$p = x_2 + h$

Paso 6 Si $| h | \leq TOL$ entonces
. SALIDA (p); (*Procedimiento terminado satisfactoriamente.*)
PARAR.

Paso 7 Tome $x_0 = x_1$; (*Prepárese para la siguiente iteración.*)
$x_1 = x_2$;
$x_2 = p$;
$h_1 = x_1 - x_0$;
$h_2 = x_2 - x_1$;
$\delta_1 = (f(x_1) - f(x_0))/h_1$;
$\delta_2 = (f(x_2) - f(x_1))/h_2$;
$d = (\delta_2 - \delta_1)/(h_2 + h_1)$;
$i = i + 1$.

Paso 8 SALIDA ('El método falló después de N_0 iteraciones, $N_0 ='$, N_0;) (*Procedimiento terminado sin éxito.*)
PARAR.

★Análisis Didáctico

En el **libro A**, se presentan algunos ejemplos de aplicación, uno de ellos propone encontrar los ceros del polinomio $f(x) = x^8 - 170x^6 + 7,392x^4 - 39,712x^2 + 51,200$, del cual mencionan los autores que prueba que el algoritmo de Müller es muy potente para polinomios de alto grado con muy buenos resultados. (**ADOA**)

Al respecto en el **libro C**, se menciona que este método permite aproximar las raíces de los polinomios con varios valores iniciales y que generalmente converge a la raíz de un polinomio con cualquier aproximación inicial, pero que también se pueden construir problemas en que no haya convergencia en algunas de las elecciones iniciales, lo cual puede suceder si para alguna i se tiene $f(x_i) = f(x_{i+1}) = f(x_{i+2}) \neq 0$, ya que la ecuación cuadrática se reduciría a una función constante no cero y nunca cruzaría el eje de las x. (**ADCH**)

★Análisis Fenomenológico

En la organización de este apartado, se muestran las situaciones encontradas en el siguiente orden: En torno a la matemática misma; En torno a otras ciencias; Fenoménos contextualizados.

Para el Libro A

- **En torno a la matemática misma.** (**AFTM**)

A este respecto, las situaciones que encontramos en el **libro A** fueron de distinta naturaleza, se observaron situaciones en las que se plantea la aplicación de la técnica tanto a funciones polinomiales como a funciones trascendentes, pero en ambas enfatizando en que no sólo se pueden encontrar raíces reales sino también complejas. Asimismo encontramos situaciones que plantean la aplicación de la técnica a ecuaciones de renombre en las que las funciones toman la forma de series, lo cual en nuestra opinión plantea altos niveles cognitivos en los estudiantes, pero con ello se muestra que el método, en efecto, aplica a ecuaciones de grados superiores.

> *Exercise 3.7-1* Use Müller's method to find the zeros, real or complex of the following polynomials:
> (a) $x^7 - 1$

(b) $x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 20x + 8$
(c) $x^6 + 2x^5 + x^4 + 3x^3 + 5x^2 + x + 1$

Exercise 3.7-2 The equation $x - tanx = 0$ has an infinite number of real roots. Use Müllers method to find the first three positive roots.

Exercise 3.7-3 The Fresnel integral $C(x)$ is defined by the series

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(\pi/2)^{2\pi}}{(2n)!(4n+1)} x^{4n+1}$$

Find the first three real positive zeros of this function using Müllers method. Start by truncating the series with $n = 3$ and then increase n until you are satisfied that you have the correct zeros.

3.7-4 Bessels function of order 1 is defined by the series

$$J_1(z) = \frac{z}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z^2/4)^k}{k!(k+1)!}$$

Find the first four zeros of this function proceeding as in *Exercise 3.7-3*.

- **En torno a otras ciencias.** (**AFOC**)

En esta obra no encontramos situaciones en torno a otras ciencias.

- **Fenómenos contextualizados.** (**AFFC**)

En esta obra no encontramos situaciones en torno a fenómenos contextualizados.

Para el Libro C

- **En torno a la matemática misma.** (**AFTM**)

En el **libro C**, las situaciones se reducen a la repetición de problemas ya planteados con el método de Newton, con lo cual, quizá los autores pretenden que se observe entre las ventajas y desventajas que tuviera uno sobre el otro.

Ejercicio 3. (Ejercicios 2.6). Repita el *Ejercicio 1*[19] aplicando el método de Müller.

Ejercicio 4. (Ejercicios 2.6). Repita el *Ejercicio 2*[20] aplicando el método de Müller.

Ejercicio 9. (Ejercicios 2.6). Aplique los métodos siguientes para obtener una solución con una exactitud de 10^{-4} para el problema

$$600x^4 - 550x^3 + 200x^2 - 20x - 1 = 0$$

a. Método de bisección
b. Método de Newton
c. Método de la secante
d. Método de la posición falsa
e. Método de Müller

- **En torno a otras ciencias.**

En el **libro C** no encontramos situaciones en torno a otras ciencias.

[19] *Ejercicio 1.* Obtenga las aproximaciones, con una exactitud de 10^{-4} a todos los ceros reales del siguiente polinomio aplicando el método de Newton.

a. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5$
b. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$
c. $f(x) = x^3 - x - 1$
d. $f(x) = x^4 + 2x^2 - x - 3$
e. $f(x) = x^3 + 4{,}001x^2 + 4{,}002x + 1{,}101$
f. $f(x) = x^5 - x^4 + 2x^3 - 3x^2 + x - 4$

[20] *Ejercicio 2.* Obtenga aproximaciones con un grado de exactitud de 10^{-5} a todos los ceros de los siguientes polinomios, encontrando primero los ceros reales mediante el método de Newton y reduciendo luego los polinomios de menor grado para determinar los ceros complejos.

a. $f(x) = x^4 + 5x^3 - 9x^2 - 85x - 136$
b. $f(x) = x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 16x - 40$
c. $f(x) = x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x + 2$
d. $f(x) = x^5 + 11x^4 - 21x^3 - 10x^2 - 21x - 5$
e. $f(x) = 16x^4 + 88x^3 + 159x^2 + 76x - 240$
f. $f(x) = x^4 - 4x^2 - 3x + 5$
g. $f(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x + 4$
h. $f(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 6$

- **Fenómenos contextualizados.**

  En el **libro C**, las situaciones que encontramos se caracterizan por introducir el uso de algún software educativo en la aplicación de la técnica iterativa.

> *Ejercicio 7.* (Ejercicios 2.6). Use Maple para encontrar las raíces exactas del polinomio $x^3 + 4x - 4$.
>
> *Ejercicio 8.* (Ejercicios 2.6). Use Maple para encontrar las raíces exactas del polinomio $x^3 - 2x - 5$.[21]

4.3. Conclusiones

Para fijar ideas, en esta sección consideramos necesario recordar la siguiente tabla de categorías para el análisis de texto:

<table>
<tr><th>Campo de análisis</th><th colspan="2">Unidades de análisis</th><th>Categorización</th><th>Descripción general de los propósitos</th></tr>
<tr><td>Ficha de referencia del texto</td><td colspan="2">•Nombre de los autores
•Título del texto
•1ra. Edición (año) y editorial
•Edición analizada y editorial
•Localización del texto analizado</td><td>FRT</td><td>El propósito es conocer la ubicación del libro y el contexto en general.</td></tr>
<tr><td rowspan="9">Análisis Conceptual</td><td colspan="2">•Conocimientos previos</td><td>ACCP</td><td rowspan="9">Definición y organización del concepto, tipo de representación, función de los problemas y ejercicios resueltos o propuestos.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">•Conceptos</td><td>•Formal</td><td>ACCF</td></tr>
<tr><td>•Heurístico</td><td>ACCH</td></tr>
<tr><td>•Constructivo</td><td>ACCC</td></tr>
<tr><td rowspan="2">•Ejemplos y Ejercicios</td><td>• De aplicación o argumentación de las definiciones o conceptos</td><td>ACEEA</td></tr>
<tr><td>•De la técnica de demostración de teoremas o corolarios</td><td>ACEET</td></tr>
<tr><td rowspan="3">•Representación del algoritmo iterativo</td><td>• Gráfico</td><td>ACRG</td></tr>
<tr><td>• Algebraico</td><td>ACRA</td></tr>
<tr><td>• Numérico</td><td>ACRN</td></tr>
</table>

[21] Esta es la famosa ecuación de la que se trató su resolución en los tres libros históricos analizados.

Análisis Didáctico	•Objetivos e intenciones del (os) autor (es)	**ADOA**	La finalidad es mostrar los objetivos que el autor pretende alcanzar. Así como la influencia didáctica actual.
	•Corriente didáctica subyacente	**ADCD**	
	•Capacidades y habilidades que se quieren desarrollar	**ADCH**	
Análisis Fenomenológico	•En torno a la matemática misma	**AFTM**	La finalidad es mostrar los fenómenos que se toman en consideración con respecto al concepto en cuestión.
	•En torno a otras ciencias	**AFOC**	
	•Fenómenos contextualizados	**AFFC**	

Al respecto, recordemos que seguimos tres fases en el análisis: en la primera etapa, realizamos fichas bibliográficas con los datos fundamentales del libro (Título, autor(es), editorial, edición analizada, etc.); en la segunda etapa bosquejamos de manera general del texto (objetivos del(os) autor(es), objetivo del libro en general, la importancia del estudio de los métodos iterativos, etc.); y finalmente en la tercera etapa hicimos consideración de las siguientes dimensiones de análisis:

a) Análisis conceptual, referente a cómo se define y organiza el concepto a lo largo del texto, representaciones gráficas utilizadas, tipo de problemas y ejercicios resueltos o propuestos, así otras características que determinan el tratamiento del concepto.

b) Análisis didáctico-cognitivo, referente tanto a la explicitación de los objetivos que los autores quieren conseguir como al modo en el que se intenta que el alumno desarrollo ciertas capacidades cognitivas.

c) Análisis fenomenológico, referente a los fenómenos que se toman en consideración con respecto al concepto en cuestión.

Lo anterior con la finalidad de robustecer nuestra investigación acerca del desarrollo conceptual de los métodos iterativos. Ahora bien, como ya hemos dicho, estás dimensiones de análisis nos permitieron estudiar entre otras características el tipo de lenguaje, el papel de los ejercicios y la influencia didáctica que se ha tenido presente en la enseñanza de los métodos iterativos para la resolución de ecuaciones no lineales, así como la relación existente de la visualización en las formas de representación como un proceso de comprensión.

Al igual que en Sierra, et al. (1999), las concepciones epistemológicas de los autores acerca del conocimiento matemático están vinculadas a la forma de su transmisión, y determinan qué tipo de capacidades se pretenden desarrollar en los estudiantes, de tal forma que como se ha visto en el desarrollo de la sección anterior, a veces en inevitable mezclar componentes epistemológicos y didáctico-cognitivos en este análisis.

En lo que sigue vamos a presentar los resultados de acuerdo con el análisis conceptual, didáctico y fenomenológico que hemos llevado a cabo en la sección anterior.

★ Del análisis conceptual

En primer lugar cabe mencionar que la idea de método iterativo aparece en los programas de estudio alrededor del 5 o 6 semestre de una licenciatura a fin con la matemática. Además está fuertemente vinculada con los conceptos de aproximación, límite, sucesión, convergencia, que se utilizan explícita e implícitamente para definir lo que es un método iterativo para la resolución de ecuaciones de una variable.

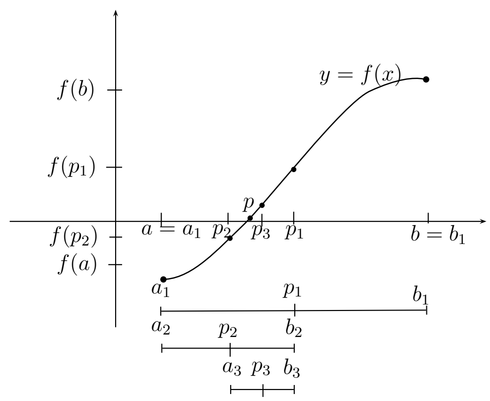
Podemos observar que de forma colectiva, el concepto de método iterativo tiene la acepción de repetición y en este caso es la repetición de un algoritmo tantas veces como sea necesario para aproximar a un número tanto como se requiera. Cabe mencionar que se enfatiza en que no es un valor exacto sino una aproximación casi exacta a donde se quiera llegar, pues en ese sentido es cómo se le da la utilidad a este tipo de métodos.

Aunque es poca la diferencia de años entre la publicación del **libro A** respecto del **libro C**, puede observarse que la idea de método iterativo ha sufrido una evolución de una a otra obra, en el sentido de su definición, pues por ejemplo, en el **libro A**, ésta casi siempre aparece de manera formal, mientras que en el **libro C**, su introducción aparece la mayoría de veces de forma constructiva o gráfica.

Libro A
Given a function $f(x)$ continuous on the interval $[a_0, b_0]$ and such that $f(a_0)f(b_0) < 0$. For $n = 0, 1, 2, \cdots$, **until satisfied**, do:

Set $m = (a_n + b_n)/2$
If $f(a_n)f(a_m) \leq 0$, set $a_{n+1} = a_n, b_{n+1} = m$
Otherwise, set $a_{n+1} = m, b_{n+1} = b_n$
Then $f(x)$ has a zero in the interval $[a_{n+1}, b_{n+1}]$

Libro C



En ambas concepciones, la idea de aproximación está implícitamente subyacente al concepto de método iterativo.

Se observa de los autores del **libro A**, una preocupación por los aspectos algebraicos. En general los aspectos gráficos están muy abandonados, de lo que se infiere que existe una tendencia hacia la algoritmización, pero no en el sentido de aplicación de fórmulas o de un proceso puramente repetitivo, sino mas bien con la intención de aplicación del algoritmo vinculado a problemas de análisis.

Al igual que en el **libro B**, en el **libro C**, se recurre generalmente a las representaciones gráficas para la introducción del concepto, la diferencia es que en éste último dicha introducción la mayoría de veces está ligada a las ventajas y desventajas del uso de algún método iterativo. Respecto del **libro A**, esa también es una variante muy clara, sin embargo, comparten la idea del uso del lenguaje FORTRAN para la programación operativa.

En cuanto a las representaciones del algoritmo iterativo, en el **libro A**, la tendencia de representación es algebraica, mientras que en el **libro B**, la tendencia es la representación gráfica en combinación con la representación numérica, y finalmente en el **libro C**, se observa un complemento tanto de la representación gráfica, como la algebraica y la numérica. De aquí que podemos inferir que el cambio entre el **libro A**, el **libro B** y el **libro C**, hacen notar que los aspectos visuales son realmente importantes y significativos para el tratamiento del concepto método iterativo.

★ Del análisis didáctico

Al respecto, podemos mencionar que en el **libro A**, se pretende incidir sobre tres fases del proceso de resolver un problema:

- *La formulación.* Referente a la modelación de una situación física. Una vez que el problema se ha formulado se debe de tener en cuenta un método numérico así como el análisis preliminar de error para resolver el problema, en este sentido se plantea un método numérico que se puede utilizar para resolver dicho problema, a saber un *algoritmo.*

- *Elección de un algoritmo.* El algoritmo se define como un conjunto de procedimientos no ambiguos establecidos, que conducen a la solución de un problema matemático. La selección o construcción de algoritmos apropiados bien entra dentro del ámbito de análisis numérico.

  Así después de haber decidido un algoritmo o conjunto de algoritmos para resolver el problema, los analistas numéricos deben examinar todas las las fuentes de error que pueden afectar los resultados. Se debe considerar la exactitud requerida, determinar el número de pasos o el número de iteraciones necesarias, para proporcionar el control adecuado de la precisión, y hacer asignación de medidas correctivas en los casos de nonconvergence.

- *La programación.* En donde el programados debe transformar el algoritmo sugerido en un conjunto establecido de pasos e instrucciones para el ordenador.

  El primer paso en este procedimiento es llamado flujo de la cartografía. Un diagrama de flujo es simplemente un conjunto de procedimientos, por lo general en bloque de forma lógica, que el equipo seguirá. Puede ser dada en gráfica o de declaración del procedimiento.

Se observa de aquí, que la formación del estudiante debería ir en las tres direcciones en el contenido de la obra.

Al respecto del **libro B**, entre los objetivos generales que se mencionan estan que el contenido sea fácilmente comprensible para los estudiantes de licenciatura con un conocimiento mínimo de matemáticas así como capacitar a los estudiantes para que practiquen los métodos en una microcomputadora y proporcionar programas cortos que puedan usarse de manera sencilla en aplicaciones científicas y finalmente proporcionar software que resulte fácil de comprender.

Como complemento de esto se infiere que el autor pretende robustecer el conocimiento transmitido en el contenido combinando los fundamentos matemáticos del análisis numérico, la aplicación de métodos numéricos a problemas de ingeniería, ciencias y matemáticas con el empleo de la tenología como recurso de implementación tanto didáctica como operativa, tan es así que el autor plantea que el uso del lenguaje MATLAB ha cambiado el concepto de programación para análisis numérico y matemático.

Algunas de las capacidades y habilidades que se pretenden desarrollar en el estudiante son: entendimiento de esquemas numéricos a fin de resolver problemas matemáticos, de ingeniería y científicos en una computadora; la deducción de esquemas numéricos básicos; la escritura de programas y su resolución con ordenador; y el uso correcto del software existente para dichos métodos así como la habilidad para el uso de las computadoras debido a que ello amplia la pericia matemática y la comprensión de los principios científicos básicos.

En particular, ejemplifica con funciones no lineales que pueden ser resueltas con algún método numérico para justificar la razón principal para resolver ecuaciones no lineales por medio de este tipo de métodos, la cual es que carecen de solución exacta, por lo que al respecto deja ver que la solución analítica para ecuaciones polinomiales existe sólo hasta orden cuatro, pero no existen soluciones en forma exacta para órdenes superiores.

Y cómo se ha visto en el desarrollo de la sección anterior, el autor enfatiza que los estudiantes deben aprender los pros y los contras de cada método y en particular sus dificultades, además de familiarizarse con los métodos mediante la práctica en una computadora.

Asimismo, proporciona de manera sintética y en conjunto las características principales de los métodos numéricos para ecuaciones no lineales, destacando aquellos que tienen características en común y sus ventajas y desventajas de uno sobre el otro.

Finalmente del **Libro C**, podemos mencionar que el autor pretende transmitir la filosofía del cómo, por qué y cuándo se espera que los métodos numéricos funcionen, además de proporcionar una base firme para un estudio futuro.

Se menciona también que el uso por los estudiantes de algunos Sistemas Algebraicos Computacionales para el tratamiento de estos métodos, se ha incrementado para perfeccionar los cálculos requeridos lo cual les permitirá ver los efectos puntuales de un método sin tener que realizar perdida de tiempo con la computadora.En este sentido, respecto a la tecnología se pretende la ampliación de conocimientos en cuanto al manejo de algunos lenguajes de programación como C, FORTRAN y Pascal y hojas de trabajo como Maple, MATLAB y Mathematica.

De manera particular, se entiende a la *aproximación* dentro del diseño de métodos funcionales para encontrar soluciones de problemas matemáticos de una manera eficiente, en donde la eficiencia depende tanto de la presición que se requiera como de la facilidad con que pueda implementarse. Además se hace notar que para obtener la aproximación se idea un método llamado algoritmo, el cual consiste en una secuencia de operaciones algebraicas y lógicas que producen la aproximación al problema matemático y se espera que también al problema físico, con una tolerancia y precisión determinista.

Del desarrollo de la sección anterior puede notarse que las tres obras, reflejan una tendencia del uso de la tecnología para facilitar los cálculos, pero en ninguno uno de ellos se nota una tendencia a su uso como objeto para construir conocimiento.

★ **Del análisis fenomenológico**

En el **libro A**, no hay una tendencia a hacer referencia sólo sobre aspectos matemáticos, mientras que en los **libros B** y **C**, hay una tendencia a fenómenos físicos, químicos, de aplicación a la medicina, de aplicación en problemáticas relacionadas con el crecimiento de población, problemas referentes a probabilidad, y asimismo se observaron algunos fenómenos contextualizados en el campo de la computación, en particular referentes al uso de softwares para la graficación u operacionalidad de los métodos iterativos.

En general en las tres obras analizadas, los ejercicios planteados varían desde aplicaciones elementales de los algoritmos hasta generalizaciones y extensiones de la teoría.

Sin embargo en los **libros B** y **C**, las aplicaciones demuestran cómo se usan los métodos numéricos en situaciones de la vida real.

> Finalmente cabe mencionar que los tres textos han sido diseñados de manera que los instructores tengan flexibilidad en la elección de los temas, así como en el nivel de rigor teórico y en el énfasis de las aplicaciones.

Con esto concluimos el capítulo cuatro. En lo siguiente mostramos las conclusiones relativas a la investigación general.

Capítulo 5

Conclusiones

Introducción

Este capítulo, el de las conclusiones, pretende dar una mirada sintética a la vez que conclusiva. Para tal fin, optamos por seccionar tres apartados: los alcances de este trabajo, las limitaciones de la investigación y los campos del conocimiento que juzgamos abiertos para el futuro.

Nuestra investigación, fundamentalmente se organiza sobre datos de corte histórico epistemológico, en particular, decidimos seguir el análisis a profundidad de un cierto saber matemático. Ahora bien, son dos las investigaciones que marcaron nuestro camino para realizar un trabajo de este tipo, por un lado Sierra (1997), quien considera que:

> "Algunas de las razones que apuntan para la integración de la historia de las matemáticas en su enseñanza son las siguientes:
>
> Para el profesor, constituye un antídoto contra el formalismo y el aislamiento del conocimiento matemático y un conjunto de medios que le permiten apropiarse mejor de dicho conocimiento a la vez que le ayuda a ordenar la presentación de los temas en el currículum... le ayuda igualmente a descubrir los obstáculos y dificultades que se han presentado, los errores cometidos por los propios matemáticos (que a veces se reproducen en los alumnos), así como la visión de la actividad matemática como actividad humana con sus glorias y miserias.
>
> Para los alumnos, prepara un terreno donde las matemáticas dejan de jugar el papel de edificio acabado, restableciéndose su es-

> tatus de actividad cultural, de actividad humana, a la vez que les ayuda en su motivación para el aprendizaje. Además facilita conocer la génesis de los conceptos y los problemas que han pretendido resolver y ayuda a su comprensión"

Con las premisas anteriores se busca dar respuesta, parcialmente, a una problemática relacionada con el fenómeno de transposición didáctica de una pieza de conocimiento matemático, al respecto Cantoral et al. (2000) expresan que:

> "La matemática se ha construido socialmente en ámbitos no escolares, que su introducción al sistema de enseñanza le obliga a una serie de modificaciones que afectan directamente su estructura y su funcionamiento, y por lo tanto este proceso de incorporación de los saberes al sistema didáctico define una serie de problemas tanto teóricos como prácticos que precisan de acercamientos metodológicos y teóricos adecuados."

Coincidimos con ambos enfoques en tanto que, al hacer investigación histórica epistemológica estamos en condición de conjeturar sobre lo que ambos señalan. Nuestra contribución radica entonces, en una parte específica del contenido matemático, la epistemología de lo que llamamos a lo largo de la investigación "los métodos iterativos en matemáticas".

5.1. Alcances de la investigación

En el segundo capítulo fueron planteados los siguientes objetivos de investigación:

- Identificar y clasificar, a lo largo de la historia, los diferentes tratamientos de los métodos iterativos para encontrar raíces de ecuaciones.

- Analizar cómo han variado los métodos iterativos para la resolución de ecuaciones al introducirlos como objeto de estudio en la enseñanza.

Ambos como consecuencia de las siguientes interrogantes, que en principio esbozamos como eje de nuestra investigación:

- ¿Qué tipo de concepciones sobre las matemáticas predominaban entre los matemáticos de los siglos XVII, XVIII y XIX en relación a los métodos de aproximación para encontrar una solución a una ecuación?

- ¿Qué tipo de problemas intentaban resolver los matemáticos de los siglos XVII, XVIII y XIX en general?
- ¿Cómo han variado los métodos iterativos para la resolución de ecuaciones al introducirlos como objeto de estudio en la enseñanza?
- ¿Cómo han variado los métodos iterativos para la resolución de ecuaciones no lineales al introducir las nuevas tecnologías en su enseñanza?
- ¿Qué similitudes existen en los métodos iterativos plasmados en los libros de texto con los expuestos por las nuevas tecnologías?

Para indagar sobre lo anterior, partimos de considerar a los conceptos como abstracciones mentales por medio de las cuales se puede tener una representación del objeto, posibilitando así el conocimiento del mundo, en consecuencia sin los conceptos no habría representaciones y por lo tanto tampoco habría mundo, más aún los conceptos son construcciones sociales que corresponden a una realidad bajo una convención social.

En este sentido, creemos que los objetivos anteriormente mencionados se han logrado en el curso de este trabajo de investigación mediante el análisis y la revisión de los libros que denominamos "libros históricos" y de los "libros de texto". Todo ello ha quedado plasmado en los capítulos tercero y cuarto. Ahora bien, de acuerdo al método histórico que seguimos, es que ahora organizamos nuestras conclusiones.

Primere Fase de Análisis:

Del análisis de los libros históricos identificamos tres momentos en cuanto al tratamiento de los métodos iterativos:

En un **primer momento**, encontramos que los métodos iterativos han sido pilar fundamental para el desarrollo del Cálculo Integral y Diferencial mismo. Implícitamente fueron un eje que permitió a Isaac Newton la organización sistemática base para la explicación de los fundamentos de su enfoque al Cálculo. Debemos destacar que los problemas que se intentaban resolver en esa época estuvieron localizados en la llamada "revolución científica del siglo XVII", periodo en el que se redefinen viejos problemas en matemáticas y se encara de nueva forma la manera de abordarlos. Adicionalmente la mecánica newtoniana, emerge como un paradigma para la ciencia, como una consecuencia del hecho de hacer corresponder a las ciencias naturales con la realidad misma y en este sentido la matemática llegó a ser el medio más adecuado e importante para la comprensión del universo, el espacio y el tiempo. El espacio de los estudios dinámicos geometrizados dio a Newton un rol singular en la historia de las ideas, es ahí, justamente donde los métodos iterativos hacen su mayor contribución.

En consecuencia, los métodos iterativos formaron parte de la consolidación de los conocimientos que le fueron heredados a Newton por sus predecesores. Más precisamente, la etapa de cohesión de los métodos antiguos, como el método de exhausión de la Grecia clásica o el método de las aproximaciones sucesivas, se suscitó en paralelo con el estudio de las curvas y sus tangentes y la cuadratura de curvas algebraicas.

Asimismo en el examen hecho del *De Analysi*, se encuentra que los métodos iterativos subyacen como alternativa para cuadrar curvas mediante la solución de ecuaciones no lineales, tanto algebraicas como trascendentes, lo cual en nuestra opinión, condujo a un estudio más sistemático y a profundidad del "paso al límite" y la consolidación del concepto de convergencia.

En efecto, Newton usó el método de aproximación sucesiva aplicado al teorema binomial, con lo cual fue posible:

- Introducir exponentes negativos y fraccionarios, de manera que fue permitible interpolar o extrapolar el teorema binomial de enteros positivos a racionales.

- Se obtuvo un método para representar una clase amplia de curvas por una serie de potencias, en consecuencia las curvas no serían sólo reducidas a las ecuaciones algebraicas, sino también se abre paso al tratamiento de las series infinitas.

Cabe mencionar que en esta época el resultado más general concerniente a la cuadratura de curvas, fue el bien conocido Teorema Fundamental del Cálculo, que fue la piedra angular para la fundamentación y desarrollo del Cálculo Infinitesimal.

Posteriormente, la escuela francesa de matemáticas logró éxitos considerables, pues fueron los "vencedores de la ciencia" debido a la declinación de las matemáticas inglesas, París se convirtió entonces en la capital mundial de las matemáticas, incluso se le llama al periodo el de las matemáticas ilustradas, pues la ciencia floreció con el movimiento de la ilustración francesa, es decir, refiriéndose en su sentido etimológico a la iluminación, referida a la luz de la razón con la cual los ilustrados aspiraban reformar el mundo.

Es así que llegamos a un **segundo momento**, aquel mediante el cual identificamos a los métodos iterativos como parte de la fundamentación del Álgebra de J. L. Lagrange, uno de los franceses que hizo, en nuestra opinión, la más grande contribución a la matemática de la época, a saber el Cálculo de Variaciones.

Dichos métodos se ven reflejados en la búsqueda de soluciones para ecuaciones algebraicas, observamos que hubo un avance significativo en la matemática con ello, puesto que hubo una generalización para encontrar la solución de ecuaciones algebraicas aunque éstas no tuvieran soluciones reales. En consecuencia y haciendo uso de dichos métodos, Lagrange demostró que algunas funciones f, pueden ser desarrolladas en serie de potencias en la forma $f(x+h) = f(x)+ph+qh^2+rh^3+\cdots$, de tal forma que las series de potencias fueron utilizadas para la **aproximación** de cualquier función mediante polinomios. Éste es quizá uno de los grandes logros matemáticos de la época y lo que a la postre permitiría la consolidación y desarrollo de la ciencia moderna.

Cabe mencionar que han sido otros los problemas ligados a este segundo periodo de análisis, problemas más de orden social. Se vivía una época de Ilustración y de Revolución, sin embargo, a pesar de las dificultades que vivía el imperio francés con el establecimiento de un pueblo republicano, hubo mucho desarrollo en varias ramas del conocimiento, así por ejemplo, en Química encontramos a Lavoisier quien enuncia la ley de la conservación de la materia, al físico Charles de Coulomb quien inventa la balanza de torsión para medir fuerzas de magnetismo y electricidad, particularmente en matemáticas Euler desarrolla algunas aplicaciones para el cálculo y Lagrange por ejemplo, desarrolló una base sólida para la Astronomía y la Mecánica. Los progresos matemáticos más destacados en este periodo fueron el establecimiento del sistema métrico decimal, el desarrollo del álgebra, el desarrollo de la geometría analítica, de la teoría de las ecuaciones diferenciales, el desarrollo del cálculo infinitesimal y como dijimos anteriormente, del cálculo de variaciones.

En consecuencia del auge de los descubrimientos y desarrollo de las ciencias, los centros superiores de enseñanza fueron creciendo y a finales de la revolución francesa, tuvo un fuerte impulso la enseñanza superior basada en el rigor matemático y se desarrolló aún más la geometría como campo autónomo. Es así como identificamos un **tercer momento** en el que los métodos iterativos están inmersos en lo que actualmente denominamos álgebra superior. Lo cual fue una consecuencia de la fundamentación en el

Análisis Matemático.

Con respecto a este tercer momento, Burside y Panton nos muestran con claridad expresa en qué tipo de ecuaciones pueden ser utilizados los métodos iterativos, haciendo la distinción entre las soluciones de las ecuaciones algebraicas y ecuaciones numéricas. En su obra señalan que la solución de una ecuación algebraica está definida por una fórmula general de un carácter puramente simbólico, la cual teniendo una expresión general para una raíz debería representar todas las raíces indiferentemente. En el caso de las ecuaciones numéricas, las raíces son determinadas separadamente por los métodos de Newton, Lagrange o Horner, para lo cual, antes de intentar hallar la aproximación para cualquier raíz individual, se hace necesario en general el conocer un intervalo específico que contenga sólo una raíz real, una raíz aislada.

Otra característica que señalan es que las raíces reales de ecuaciones numéricas pueden ser conmensurables (en las cuales se incluyen los enteros, fracciones y decimales finitos o repetitivos, los cuales son reducibles a fracciones) o inconmensurables, infinitos o periódicos (irracionales). Las raíces conmensurables pueden ser encontradas exactamente y las inconmensurables pueden ser aproximadas con cualquier grado de precisión por los métodos antes mencionados.

En general, los argumentos matemáticos de las obras históricas que analizamos, el *De Analysi*, *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés en Ouvres de Lagrange* y *The theory of equations: with an introduction to the theory of binary algebraic forms*, reflejan una multiplicidad de conceptos y procedimientos, que se pueden localizar desde las caracterizaciones geométricas, analíticas o algebraicas, y como ya hemos mencionado, se puede observar intentos sucesivos de sistematización.

Para esta **primera fase de análisis**, es importante mencionar al respecto de la naturaleza de los procesos iterativos, pensando en cómo estos han llegado a ser lo que son, que la historia nos remonta a la era babilónica cuando utilizaron la técnica de acotar por exceso y defecto la raíz cuadrada de un número y enseguida tomar como aproximación de la raíz el punto medio de las dos cotas, técnica que evolucionó más adelante como método de bipartición, esto es, se parte el intervalo donde se encuentra la solución de una ecuación y se procede a iterar el proceso de dividir en dos el segmento que contiene a la raíz hasta llegar a una aproximación con una precisión mínima.

Este conocimiento es llevado a los pensadores Europeos y Vieta rescata la idea en la extracción de la raíz cuadrada de un número N, conocimiento que es adoptado por Newton y que lo motivó a partir del estudio de las series binomiales mediante el tratamiento de series que no podrían ser abordadas de una manera aritmética (Cantoral y Reséndiz, 2001). Esto último puede constatarse en el *De Analysi*.

En consecuencia, nuestra opinión con respecto a la naturaleza de los métodos iterativos en el periodo de estudio de los libros históricos, es que éstos emergen de la misma concepción que en la antigüedad se refleja en el principio de Eudoxo, es decir, un estratagema para ocuparse del infinito mediante estrategias finitas.

Asimismo, la transposición histórica del método de aproximación de raíces tiene una polémica bastante sonada, desde su invención hasta su aplicación práctica. En muchos libros llaman al método de aproximaciones sucesivas, método de Newton-Raphson, sin embargo, otras opiniones reflejan que esencialmente el método no debería llamarse así puesto que fue inventado por Thomas Simpson.

Una síntesis histórica al respecto de algunos matemáticos que aplicaron el método de aproximación a raíces la podemos encontrar en (Kollerstrom, 1992):

> In the early nineteenth century, the mathematician Joseph Fourier presented the method in terms of the now-universal $f'(x)$ calculus notation, describing it as 'le méthode newtonienne' (*Analyse des equations determinees* (1831)). Fourier's writings on equations became very well known. The British mathematicians Burnside and Panton referred to the method, using the language of calculus, as being that of Newton and Lagrange, without mentioning Raphson. They did refer to Simpson and the Bernoullis as having 'occupied themselves' with the problem (*The Theory of Equations* (1881)). Similarly in Germany, Runge gave the method in Leibnizian form, attributing it to Newton (Separation and Approximation der Wurzeln (1900)). Moritz Cantor reviewed the approximation methods of Newton, Raphson, Halley and de Lagny, describing Raphson as 'an absolute admirer and imitator of Newton', whose approximation method 'greatly resembled that of Newton' (*Geschichte der Mathematik* (1898)).

Para concluir respecto a esta primera fase de análisis, baste lo dicho para mencionar que podemos medir la importancia de los métodos iterativos en en función del impacto que produjeron aunque como bien sabemos la validez de un resultado matemático pertenezca exclusivamente a un entorno puramente axiomático.

Segunda Fase de Análisis:

En esta fase, referente a los libros de texto que se utilizan para la enseñanza de los métodos iterativos, identificamos que:

Los métodos iterativos como objeto de estudio son tratados sistemáticamente en la resolución de ecuaciones numéricas no lineales, y son empleados en la resolución de problemas en áreas de economía, biología o física, entre otras disciplinas que estudian fenómenos dinámicos de la naturaleza misma y de la sociedad.

En consecuencia, si bien desde la enseñanza secundaria se nos muestra cómo resolver ecuaciones de una y dos incógnitas y los sistemas de ecuaciones lineales, y además en el bachillerato y en algunas licenciaturas se continua con esta enseñanza profundizando las técnicas y ampliando el universo de objetos a quienes se les aplica, se hace necesario no sólo la enseñanza de la operatividad numérica sino la comunicación, en el sentido pleno, de los significados asociados a las aproximaciones que dan lugar a la solución buscada.

Probablemente, sea por ello que algunos de los autores de los libros de texto insistan en la enseñanza de tales métodos, sin importar si los estudiantes vayan o no a optar por estudiar en el área de matemáticas en el nivel superior, pues éstos reflejan su aplicación en la resolución de problemas relativos a nuestro entorno.

Con respecto al tratamiento de los métodos iterativos en los libros de texto, usados para su enseñanza, hemos identificado principalmente dos tipos:

El tratamiento numérico. Se caracteriza por la aplicación de algoritmos, y tiene como principal objeto el mostrar el comportamiento con la variación de un número después de transcurrido un tiempo.

El tratamiento gráfico. Caracterizado mediante representaciones visuales, que se han venido introduciendo en la enseñanza progresivamente. Este tratamiento se apoya principalmente en los resultados de su expresión numérica.

Aún más, esta clasificación por tratamiento deviene del progreso y de la influencia que se ha tenido a través de los textos, así por ejemplo el Grupo 1 de textos, permite mirar que el tratamiento es puramente teórico y se observa la rigurosidad matemática en su totalidad. Posteriormente ello cambia y en el Grupo 2 de textos, se observa además del tratamiento riguroso, que se recurre al uso de algún lenguaje de programación para su aplicación en los algoritmos iterativos y de aquí se pasa a la siguiente etapa con los libros del Grupo 3, en donde se nota en efecto el tratamiento riguroso y también que se recurre al uso de algún lenguaje de programación, pero se amplia el marco de trabajo con el uso de algún software usado en la enseñanza con fines didácticos para la resolución de problemas y ejercicios. Es decir, se busca introducir el uso de softwares didácticos con la finalidad de que los estudiantes vean, perciban o fortalezcan las propiedades que derivan del tratamiento de los métodos iterativos. Estos libros generalmente recurren al uso de la graficación como un medio para enriquecer el tratamiento de dichos métodos. Además son libros que explican muy detalladamente el contenido en el sentido pedagógico.

También cabe mencionar, que con respecto a las categorías de análisis utilizadas en esta etapa, se observó que estos métodos van siempre ligados a conceptos como aproximación, límite, sucesión y convergencia, ya que se utilizan explícita e implícitamente para definir lo que es un método iterativo para la resolución de ecuaciones no lineales de una variable.

En general, los libros que hemos analizado, muestran los mismos métodos para la resolución de ecuaciones no lineales: método de bisección, método de falsa posición y falsa posición modificada, método de Newton, método de la secante, método de sustitución sucesiva, y método de Bairstow. La exposición que cada autor hace de ellos es, básicamente o estructuralmente, la misma, las diferencias radican en la clase de problemas que plantean (problemas de dimensión finita y de dimensión infinita), en que algunos recurren a la tecnología como medio óptimo para realizar los cálculos numéricos, y en la utilización de gráficos como un sustento visual.

La siguiente tabla muestra las características resumidas de cada uno de los métodos citados:

Método	Especificación de un intervalo que contenga a la raíz	Necesidad de la continuidad de f'	Tipos de ecuaciones	Otras características

Bisección	Sí	No	Cualquiera	Fuerte, aplicable a funciones no analíticas
Falsa Posición	Sí	Sí	Cualquiera	Converge lentamente en intervalos grandes.
Falsa Posición Modificada	Sí	Sí	Cualquiera	Más rápido que el método de la falsa posición
Método de Newton	No	Sí	Cualquiera	Converge rapidamente; Se necesita calcular f'; Aplicable a raíces complejas
Método de la Secante	No	Sí	Cualquiera	Rápido; No se requiere calcular f'
Aproximación Sucesiva	No	Sí	Cualquiera	Puede no converger
Método de Bairstow	No	Sí	Polinomial	Factores cuadráticos

Cuadro 5.1: Características de cada método

Se observan al menos tres tipos de problemas planteados, generalmente, para resolver por los estudiantes, como son: Desarrollados en el contexto puramente numérico (con o sin ayuda de la tecnología), en el contexto de fenómenos físicos y en el contexto, digamos, gráfico como medio de apoyo en la enseñanza. Citemos por ejemplo:

- Determine la raíz positiva de $x^2 - 0{,}9x - 1{,}52 = 0$ en el intervalo $[1, 2]$ mediante el método de bisección, con una tolerancia de 0,001

- Un objeto que cae verticalmente en el aire está sujeto a una resistencia viscosa y también a la fuerza de gravedad. Suponga que dejamos caer un objeto de masa m de altura s_0 y que la altura del objeto después de t segundos es:

$$s(t) = s_0 - \frac{mg}{k}t + \frac{m^2 g}{k^2}(1 - e^{-kt/m}),$$

  donde $g = 32{,}17$ pies/s^2 y k representa el coeficiente de resistencia del aire en lb-s/pies. Suponga que $s_0 = 300$ pies, $m = 0{,}25$lb, y que $k = 0{,}1$ lb-s/pies. Calcule, con exactitud de 0.01s, el tiempo que tarda este peso de un cuarto de libra en caer al suelo.

- Grafique las funciones definidas por $f(x) = e^x - 5x^2 = 0$; $f(x) = x^3 - 2x - 1 = 0$ en el plano xy utilizando el programa P_1, y después determine un intervalo de tamaño 0,5 para cada una de sus raíces utilizando el programa P_2.

Probablemente esto significa que se considera necesaria la sistematización por parte de un estudiante de los tres contextos, la pregunta que se abre es: ¿En el aula esto es posible?

En general de las obras analizadas, se observa que los ejercicios varían desde aplicaciones elementales de los algoritmos hasta generalizaciones de la teoría.

Ahora bien, con respecto de la dimensión epistemológica, que es parte consubstancial de este trabajo, en nuestra opinión lo referido anteriormente esboza una síntesis particular de ella, pues el cuerpo del trabajo de Tesis se hace bajo un enfoque histórico - epistemológico, así de este modo, en el capítulo uno, sección 1,6 describimos ampliamente los antecedentes históricos de los métodos iterativos en la resolución de ecuaciones, y en el capítulo tres bajo las categorías de análisis, se profundiza en la epistemología misma de los métodos iterativos a través los libros históricos.

Del mismo modo con respecto a la dimensión didáctica, en el capítulo cuatro detallamos ampliamente al respecto, y la segunda fase de análisis que exponemos en este apartado refleja de algún modo el uso y las aplicaciones de los métodos iterativos para resolver ecuaciones no lineales.

En conclusión, retomando nuestro enfoque teórico acerca de la evolución de un conocimiento, y considerando que la Transposición Didáctica describe el proceso por el que una idea pasa del sitio sabio al entorno didáctico, es decir, la modificación del saber altamente especializado a un saber propio del ámbito educativo, sostenemos que la transposición nos permitió distinguir las etapas de conceptualización (transformación de tratamientos) de dichos métodos. Su análisis devela un corrimiento conceptual que va de lo lineal a lo no lineal y de lo finito a lo infinito pasando por la exactitud a la aproximación y la convergencia.

Con respecto a la evolución de los métodos iterativos hasta su tratamiendo con tecnología[1] la *noción* de aproximación es esencialmente la misma, sin embargo, el desarrollo conceptual de éstos cambia en función de los intentos de sistematización de la matemática misma. No obstante el meollo de su uso

[1]Como ya se ha dicho, se dedica un anexo a algunos programas que pueden ser utilizados en la enseñanza de los métodos numéricos.

es una estimación "exacta" a la solución buscada. Otro cambio conceptual se hace explícito a partir de los medios tecnológicos, los cuales son de gran ayuda en los cálculos numéricos y en la visualización, pues sobre todo, optimizan tiempo y el manejo del espacio visual del alumno.

5.2. Limitaciones del trabajo

Como la mayoría de los trabajos de investigación al nivel de una tesis doctoral, durante el desarrollo, el autor se enfrenta a severas limitaciones que en algunas ocasiones llegan a paralizar el curso de una investigación y otras son motivos de reordenamientos y reconstrucciones conceptuales de las ideas centrales. En esta sección, mostramos algunas de las limitaciones que se presentaron durante el curso de esta tesis, a fin de que los iniciados en este tipo de trabajos tengan en cuenta nuestra experiencia.

La misma metodología que hemos seguido, nos señala algunas circunstancias que se deben tomar en consideración para este tipo de trabajos, entre ellas: las posibilidades económicas, el manejo de idiomas necesarios, la facilidad para desplazarse a lugares distintos del de residencia, la disponibilidad de las fuentes, y un largo etcétera. Afortunadamente en nuestro caso, tuvimos la ventaja de que las bibliotecas de la Universidad de Salamanca están excelentemente dispuestas con obras completas y, de no haber tenido el material necesario, por medio de un préstamo inter bibliotecario se hubiera conseguido, además también se cuenta con otras bibliotecas independientes de la Universidad. Sin embargo en cuanto a artículos, sí hubo algunos que no fuimos capaces de conseguir a pesar de nuestros grandes intentos.

La documentación en cuanto al marco teórico, fue un tanto difícil de seleccionar, debido a que la investigación histórica epistemológica no tiene un único marco teórico propio a seguir, sin embargo, organizamos dicha sección en función de los elementos teóricos de la didáctica de la matemática misma que tienen una relación intrínseca con la investigación histórica epistemológica, específicamente con estudios que tratan sobre evolución de algún contenido matemático.

Otra dificultad fue la lectura de los libros históricos a estudiar, por ejemplo, la lectura y traducción de algunos fragmentos del *De Analysi* de Newton fue complicada, puesto que el original escrito en latín exigió de un estudio particular de nuestra parte. Sin embargo, la investigación se tornó más accesible cuando encontramos un facsímil del libro realizado recientemente por la

Sociedad Thales que incluía la traducción al español realizada por José Luis Arantegui Tamayo.

5.3. Campos abiertos a futuras investigaciones

Esta tesis al ser de carácter histórico-epistemológico, permitió el tránsito a través de las diferentes etapas por las que los métodos iterativos fueron *usados* como un proceso necesario para la construcción de nuevas técnicas en matemática. Citemos por ejemplo la resolución de ecuaciones no lineales y la fundamentación de la teoría de integración misma, por ende, aunque se trató de hacer una revisión exhaustiva de su aparición en los libros históricos, en nuestra opinión debe aun cubrirse con mayor detalle el aspecto epistemológico, es decir consideramos necesario realizar una revisión del origen de dichos métodos desde la época babilónica y darle seguimiento conceptual a las sucesivas evoluciones.

También ha quedado fuera de nuestro alcance una revisión profunda acerca del tratamiento de los métodos iterativos, específicamente con las aplicaciones de los programas computacionales para la enseñanza o la resolución de tareas. Se hace necesario un estudio de este tipo dada la importancia en nuestros días de los recursos tecnológicos.

En el mismo sentido, se considera que debe estudiarse a la tecnología no sólo como una herramienta que facilita los cálculos numéricos, sino como un elemento que es necesario para adquirir conocimiento, por ejemplo, utilizando las capacidades gráficas de un dispositivo tecnológico, es probable que el pensamiento visual sea “mejor” desarrollado para la resolución de ecuaciones no lineales.

Con respecto a las dimensiones de conocimiento que contemplamos en un principio: la dimensión cognitiva y la dimensión social, debemos aceptar que no profundizamos lo suficiente en esta tesis, pues nuestro objetivo no fue el de abarca tales dimensiones.

En un futuro, nuestro interés se centrará en el diseño y aplicación de actividades didácticas, considerando de antemano esa propiedad exclusiva que tienen los contenidos matemáticos: su epistemología.

Referencias Bibliográficas

Aaboe, A. (1954). Al-Kashi's iteration method for the determination of sin 1. *Scripta Math. 20*, 24-29.

Acta Eruditorum (1693).

Arcavi, A. & Hadas, N. (2000) Computer mediated learning: an example of an approach. *International journal of computers for mathematical learning 5,* 25-45.

Atkinson, K. E. (1978). *An introduction to numerical analysis.* John Wiley and Sons, Inc. New York.

Azcárate, C. y Camacho, M. (2003). Sobre la investigación en didáctica del Análisis Matemático. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana 10,* 2.

Bagni, G. (2000). The role of the history of mathematics in mathematics education: reflections and examples. *Proceedings of CERME-1*, Schwank, I. (Ed.), II (2000), Forschungsinstitut fuer Mathematikdidaktik, Osnabrueck, 220-231.

Baker, G. y Gollub, J. (1990). *Chaotic Dynamics. An introduction.* Cambridge University Press.

Beckett, R. y Hurt, J. (1967) *Numerical calculations and algorithms.* McGraw-Hill, Inc. USA.

Berger, M. (1998). Graphic calculator: an interpretative framework. *For the Learning of Mathematics. An international Journal of Mathematics Education 18* (2), 13-20.

Bernheim, E. (1908). *Lehrbuch der historischen methode.* Leipzig. p. 252.

Bernoulli, J. (1690). Acta Eruditorum.

Bernoulli, J. (1742). *Opera omnia, tam antea sparsim edita quam hactenus inedita.*

Bottazzini, U. (1986). *The higher calculus: a history of real and complex analysis from Euler to Weierstrass.* Springer-Verlag. USA.

Boyer, C. (1986). *Historia de la Matemática.* Madrid: Alianza Editorial. Traducción por Mariano Martínez Pérez. *A History of Mathematics.*

Brousseau, G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en didactique des Mathématiques 2*, 37-128.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles epistemologique et les problémes en Mathématiques. *Recherches en didactique des Mathématiques 4* (2), 165-198.

Bruno, A. y Martinón, A. (2000). Contenidos matemáticos en la segunda enseñanza española del siglo XX. *SUMA 34*, 27-44.

Burden, R. I. y Faires, J. D. (1985). *Análisis Numérico.* Grupo Editorial Iberoamérica. México.

Burden, R. y Faires, J. D. (2002). *Análisis numérico.* 7a. Ed. International Thomson Editores, S. A. de C. V.

Burnside, W. y Panton, A. (1918) *The theory of equations: with an introduction to the theory of binary algebraic forms.* 8a. Ed. Dublin University Press Series.

Cajori, F. (1910). Historical note on the Newton-Raphson method of approximation. *Amer. Math. Monthly 18,* 29-33.

Cajori, F. (1969). *An introduction to the theory of equations.* New York: Dover.

Candela, A. (1999). *La ciencia en el aula. Los alumnos entre la argumentación y el consenso.* Piados Educador. ISBN:9688-534242.

Cantoral, R. (1990). Un acercamiento constructivista a la noción de analiticidad. En *Memorias de la Cuarta Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa.* F. Hitt y C. Imaz. (Eds.) Vol. Único. Cap. 1. Propuestas Metodológicas, 19 24. Acapulco, México.

Cantoral, R., et al. (2000). *Desarrollo del pensamiento matemático.* Ed. Trillas, S. A. de C. V.

Cantoral, R. y Montiel, G. (2001). *Funciones: Visualización y Pensamiento Matemático.* D.F, México:Prentice-Hall.

Cantoral, R. y Reséndiz, E. (2001). *Aproximaciones Sucesivas y Sucesiones.* 3a. Ed. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. y Rodríguez, F. (2005). *Recursividad, Convergencia y Visualización.* Cuadernos didácticos. Edición especial CASIO.

Carnahan, B., Luther, H. A. & Wilkers, J. O. (1969). *Applied Numerical Methods*. John Wiley and Sons, Inc. New York.

Castañeda A. (2006). Formación de un discurso escolar: El caso del máximo de una función en la obra de L'Hospital y Agnesi. *Revista Latinoamerica de Matemática Educativa. CLAME: México. 9*, (2) 253 - 265.

Castañeda, A. y Cantoral, R. (2001). Estudio didáctico del punto de inflexión. En G. L. Betía (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 14,* 370- 377). Grupo Editorial Iberoamérica: México.

Castro, A. (2001). Incorporación de tecnología en la enseñanza de la matemática. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 14*. 277-280.

Cauchy, A. (1821). *Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique*. De L'imprimerie Royale.

Cauchy, A. (1823). *Resumé des leçons sur le calcul infinitesimal.*

Cauchy, A. (1839). *Leçons sur le calcul differentiel.*

Cauchy, A. (1887). *Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy.*

Cerasoli, M. (2001). Dall algoritmo babilonese al frattale di Mandelbrot. Bolletino dei docente di Matematica 43, 17-22.

Chapra, S. C. y Cale, R. P. (1981). *Métodos Numéricos para Ingenieros*. McGraw Hill, México.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble, Francia: La Pensée Sauvage.

Confrey, J. (1992). Using computers to promote students' inventions on the function concept. This Year in School Science 1991. En Malcom, Roberts & Sheingold, (Ed.), *American Association for the Advancement of Science*. Washington, DC, 131-161.

Conte, S. D. & De Boor, C. (1980). *Elementary numerical analysis,* 3a. Ed. New York: McGraw-Hill.

Christensen, C. (1996). Newton's method for resolving affected equations. *College Mathematics Jornal 27,* (5.)

D'Alembert, J. (1751-1772). *Encyclopedie o Dictionaire raisonné des sciences, des arts et des metiers.*

D'Alembert, J. (1747). *Memoirs de la Academia de Berlin.*

Dahlquist, G. & Björk, A. (1974). *Numerical Methods.* Prentice-Hall, New Jersey.

Dance, R., Nelson, J., Jeffers, Z. & Reinthaler, J. (1992). Using graphing calculators to investigate a population growth model. En Fey, M. & Hirsch, C. (Eds.), *Calculator in mathematics education.* Virginia, USA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Davis, P. (1993). Visual theorems. *Educational Studies in Mathematics 24,* 333-344.

De Faria, E. (2001). Generalización del teorema de Morgan. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 14*, 272-276.

De Guzmán, M. (1975). *Ecuaciones diferenciales ordinarias: teoría de Estabilidad y Control*, Madrid, España: Alhambra.

De Guzmán, M. (1992). Los riesgos del ordenador en la enseñanza de la matemática. En Abellanas, M. y García, A (Eds.), *Enseñanza experimental de la matemática en la Universidad.* Universidad Politécnica de Madrid.

De Guzmán, M. (1997). *El rincón de la pizarra: ensayos de visualización en Análisis Matemático.* Madrid, España: Pirámide.

Delachet, A. (1973). *Análisis matemático.* Traducción de Jaime Tortella Casares. *L'analyse mathématique.* Madrid: Editorial Tecnos.

Demidovich B. P., Maron I. A. (1981). *Computational Mathematics.* 1st. Edition, MIR, Moscú.

Dennis, D. y Confrey, J. (2000). La creación de exponentes continuos: un estudio sobre los métodos y la epistemología de John Wallis. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 3*, (1), 5-31.

Devaney, R. (2003). *Chaos, Fractals and Dynamics. Computer experiments in mathematics.* 2a. Ed. Boulder (Colorado): Westview Press.

Dhombres, J. (1978). *Nombre, mesure et continu. Épistemologie et historie.* IREM de Nantes. Paris: CEDIC/Fernand Nathan.

Dhombres, J. (1985). Review of the origins of Cauchy's rigorous calculus by Judith V. Grabiner. En *Historia Mathematica 12,* 86-90.

Dhombres, J. (1992). *L' École normale de l'an III. Leçons de Mathematiques. Laplace- Lagrange-Monge.* Paris Dunod.

Díaz, T. (2003). La Interpretación histórico-cultural de la transposición didáctica como puente de emancipación del aprendizaje y la enseñanza. *Revista Praxis 3*, 37-56.

Durán, A. (2003). Newton y el Analysis. En A. Durán & F. J. Pérez (Eds.), *Análisis de cantidades mediante series, fluxiones y diferencias, con una enumeración de las líneas de terer orden* (pp. LXIX-CLXXVIII). España. Real Sociedad Matemática Española: SAEM "Thales".

Duval, R. (1988). Graphiques et équations: L'Articulation de dux registres. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives 1*, IREM de Strasbourg France, 235-253.

Duval, R. (1999). *Semiosis y Pensamiento Humano. Registros semióticos y Aprendizajes Intelectuales.* Grupo de educación Matemática, Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía. México.

Dubinsky, E.; Dautermann, J.; Leron, U. & Zazkis, R. (1997). A reaction to Burn's "What are the fundamental concepts of group theory?". *Educational Studies in Mathematics 34*, 249-253.

El Bouazzaoui, H. (1988). *Conceptions des eleves et des professeurs á propos de la notion de continuité d'une fonction.* Thése PH. D. Université Laval.

Elden, L. & Wittmyer-Koch, L. *Numerical Analysis.* New York: Academic Press.

Euler, L. (1744). *Methodus inveniendi lineas curvas.*

Euler, L. (1748). *Opera omnia: Vol 8-9. Introductio in analysis infinitorum.*

Euler, L. (1755). *Opera omnia: Vol 10 Institutiones calculi differentiatis*

Euler, L. (1755). *Opera omnia: Vol 11-13 Institutiones calculi integralis*

Facultad de Ciencias. Universidad Nacional Autónoma de México. Génesis de la Facultad de Ciencias. (n.d.). Obtenida el 15 de Febrero de 2008, de
http://www.fciencias.unam.mx/admin/historia.html

Farfán, R. M. (1993). *Construcción de la noción de convergencia en ámbitos fenomenológicos vinculados a la ingeniería. Estudio de caso.* Tesis doctoral no publicada. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Fauvel, J. (1991). Using history en mathematics education. *For the Learning of Mathematics 11* (2), 3-6.

Foster, J. (1999). Visualización de la recta tangente a una curva. *Educación Matemática 11* (2), 120-127.

For the learning of mathematics 11 (2). (1991.) Fauvel, J. (Ed.) An international journal of mathematics education.

Frend, W. (1796). *The Principles of Algebra*. London, 456.

Freudenthal, H. (1981). Major problems of mathematics education. *Educational Studies in Mathematics 12* (2). 133-150.

Fröberg, C. E. (1977). Introducción al Análisis Numérico. Traducción de Mariano Gasca González. VICENS universidad.

Furinghetti, F. (1997). History of Mathematics, Mathematics Education, School Practice: Case Studies in Linking Different domains. *For the Learning of Mathematics 17* (1), 55-61.

Furinghetti, F. y Somaglia, A. (1997). History of mathematics in school across disciplines. *Mathematics in school 27* (4), 48-51. London.

Furinghetti, F. (2005). A report on the ICMI study "The role of the history of mathematics in the teaching and learning of mathematics." *Enseignement mathematique 3*, 365-372. ISSN 0013-8584.

García, M. et al. (2001). El efecto de la calculadora graficadora en la construcción de relaciones entre variables visuales y algebraicas de funciones cuadráticas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 14*, 346-352.

Gascón, J. (1993). Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: del patrón de an 'alisis-síntesis a la génesis del lenguaje algebraico. *Recherches en didactique des mathématiques 13* (3), 295-332.

Glaeser, G. (1981). Epistemologie des nombres relatifs. *Recherches en Didactique des Mathematiques 2* (3), 303-346.

Gollub, G. & Van Loan,C. (1996). *Matrix computation.* Baltimore: Johns Hopkins University.

Gómez, B. (1995). Los viejos métodos de cálculo. Un dominio para transitar de la aritmética al álgebra. *SUMA 20*, 61-68.

Gómez, B. (2001). La justificación de la regla de los signos en los libros de texto: ¿Por qué menos por menos es más?. En Pedro Gómez y Luis Rico (Eds.) *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática.* Homenaje al profesor Mauricio Castro. Granada. Universidad de Granada. pp. 257-275.

Gómez, B. (2003). La investigación histórica en didáctica de las matemáticas. En E. Castro et al. (Eds). *Investigación en educación matemática.* Séptimo Simposio de la SEIEM. pp. 79-85.

González, M. T. (2002). *Sistemas simbólicos de representación en la enseñanza del Análisis Matemático: perspectiva histórica acerca de los puntos críticos.* Tesis doctoral. Universidad de Salamanca, España.

González, M. T., et al (2004). Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias 22* (3), 389-408.

Grattan-Guinnes, I. (1980). *Del Cálculo a la Teoría de Conjuntos, 1630-1910. Una Introducción Histórica.* Traducción de: Mariano Martínez Pérez. *From the Calculus to Set Theory, 1630-1910. An Introductory History.* Madrid: Alianza Editorial, S. A.

Guicciardini, N. (2003). Newton's method and Leibniz's calculus. *History of analysis* (N. Jahnke ed.), American Mathematical Society Press, pp. 73-103.

Gutiérrez, S. (2006). Jakob Bernoulli: La geometría y el nuevo cálculo. *SUMA 51,* 89-92.

Hairer, E. y Waigner, G. (1996). *Analysis by its history.* New York, USA: Springer Verlag.

Hamming, R. W. (1973). *Numerical Methods for Scientists and Engineers*. 2a. Ed. McGraw-Hill, Inc. New York.

Heffer, A. (2004). Learning concepts through the history of mathematics: The case of symbolic algebra. *Mathematics in education: Is there room for a philosophy of mathematics in school practice?* Free University of Brussels (VUB).

Henrici, P. K. (1964). *Elements of Numerical Analysis*. John Wiley and Sons, Inc. New York.

Henrici, P. K. (1972). *Elementos de análisis numérico*. México: Trillas.

Hershkowitz, R. (1989). Psychological aspects of learning geometry. In P. Nesher and J. Kilpatrick, (Eds) *Mathematics and Cognition: A research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Cambridge University Press, pp. 70-95.

Hildebrand, F. B. (1974). *Introduction to Numerical Analysis*. 2a. Ed. McGraw Hill Book Company, Inc.

Hodgson, T. (1996). Students' ability to visualize set expresions: An initial investigation. *Educational Studies in Mathematics 30* (2), 159-178.

Ince, E. (1926). *Ordinary Differential Equations.* New York: Dover.

Informe OEI-Secretaría 1994. Capítulo 2. Evolución del Sistema Educativo Mexicano. Consultado el 17 de Octubre de 2007, página web de La Organización de Estados Iberoamericanos. Para la Educación, la Ciencia y la Cultura:
http://www.oei.es/quipu/mexico/mex02.pdf

Informe OEI-Secretaría 1994. Capítulo 10. Educación Superior. Consultado el 17 de Octubre de 2007, página web de La Organización de Estados Iberoamericanos. Para la Educación, la Ciencia y la Cultura:
http://www.oei.es/quipu/mexico/mex10.pdf

Jiménez, V. (2000). *Ecuaciones diferenciales: cómo aprenderlar, cómo enseñarlas.* Murcia: Universidad de Murcia. Servicio de publicaciones.

Johnston, R. L. (1982). *Numerical Methods. A Software Approch.* 1st. Edition. New York: John Wiley and Sons.

Kahaner, D. & Moler, C. (1989). *Numerical Methods and Software.* New Jersey: Prentice Hall.

Kindcaid, D. & Cheney, W. (1990). *Numerical Analysis.* Books/Cole Publishing Company.

Kline, M. (1972). *Mathematical Thought From Ancient to Modern Times.* England: Oxford University Press.

Kollerstrom, N. (1992). Thomas Simpson and 'Newton's method of approximation': an enduring myth. *British Journal of the History of Science 25*, pp. 347-354.

Lagrange, J. L. (1808). *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés en Ouvres de Lagrange.* Gauthier-Villars. París.

Laubenbacher, R. et al. (2001). Lagrange and the solution of numerical equations. *Historia mathematica 28* (3), 220-231.

Leibniz, G. (1684). *Acta Eruditorum.*

Leibniz, G. (1686). *Acta Eruditorum.*

McLaren, P. (1989). *Sociedad, Cultura y Educación.* Madrid, España: Miño y Dávila Editores.

Man-Keung, S. (2000). The ABCD of using history of mathematics in the (undergraduate) classroom. En Katz, V. (2000) *Using History to Teach Mathematics. An International Perspective.* Mathematical Asociation of America. pp. 3-9.

Martínez, F. (2001). Las políticas educativas mexicanas antes y después de 2001. *Revista Iberoamericana de Educación 27.* OEI.

Maz, A. (1999). La historia de las matemáticas en clase: ¿porqué? y ¿para qué? En Berenger, M. I.; Cardeñoso, J. M. y Toquero M. (Eds.) (1999). *Investigación en el aula de matemáticas. Matemáticas en la sociedad.* Granada: Sociedad Thales y Departamento de Didáctica de la matemática.

Maz Machado, A. (2000). Tratamiento de los números negativos en textos de matemáticas publicados en España en los siglos XVIII y XIX. *Memoria de tercer ciclo.* Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Meavilla, J. L. (2000). Historia de las matemáticas: métodos no algebraicos para la resolución de problemas. *SUMA 34*, 81-85.

Montero, Y., Astiz, M., Medina, P., Vilanova, S., Rocerau, M.,Vecino, M. (2003). Un asistente matemático en la enseñanza de la resolución de ecuaciones no lineales por el Método de Punto fijo. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 16* (1), 94-99.

Moreno, Ma. del M. (2000). *El profesor universitario de matemáticas: Estudio de las concepciones y creencias acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. Estudio de casos.* Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona. España.

Muñoz, J. (1999). *Newton. El umbral de la ciencia moderna. Las matemáticas en sus personajes.* Nivola, libros y ediciones, S. L. Madrid.

Nápoles, J. E. y Negrón, C. (2002). La historia de las ecuaciones diferenciales ordinarias contada por sus libros de texto. *Xixím: Revista electrónica de didáctica de las matemáticas, 2,* 33-57.

Nakamura, S. (1992). *Métodos numéricos aplicados con software.* Prentice Hall Hispanoamericana, S. A.

NCTM. (1969). *Historical topics for the mathematical Classrom.* Thirty first yearbook. Washington, D.C., National Council of Teachers of Mathematics.

Newton, I. (1685). *Algebra.*

Newton, I. (1687). *Philosophiae naturalis principia mathematica.*

Newton, I. (1742-1760). *El movimiento de los cuerpos.*

Newton, I. (1742-1760). *El movimiento de los cuerpos en medios resistentes.*

Newton, I. (1742-1760). *El sistema del mundo.*

Newton, I. (1704). *De cuadratura curvarum.*

Newton, I. (1711). *Analysis per quantitatum series, fluxiones, ac differentias; cum enumeratione linearum tertii ordinis.* Facsímil 2003. En A. J. Durán & F. J. Pérez (Eds.) España. Real Sociedad Matemática Española.

Ortega, T. (2000). Una modificación del problema de Arquímedes de las reses del Sol para una clase de problemas. *SUMA 34*, 21-25.

Otte, M. (1986). What is a Text? In B. Christiansen, A.G. Howson, M. Otte (Eds.), *Perspectives on Mathematics Education*, 173-203. Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Pajus, M. (2000). On the benefits of introducing undergraduates to the history of mathematics - A french perspective in Katz, V. (2000). *Using History to Teach Mathematics. An International Perspective*. Mathematical Asociation of America. 17-25.

Picard, E. (1927). *Leçons sur quelques types simples d'equations aux dérivées partielles avec des applications à la physique mathé matique.*

Poincaré, J. H. (1892-1899). *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste.*

Puig, L. (1994). El De Numeris Datis de Jordanus Nemorarius como sistema matemático de signos. *Mathesis 10,* 47-92.

Puig, L. (1998). Componentes de una historia del álgebra. El texto de al-Khwarizmi restaurado. En F. Hitt (Ed.) *Investigaciones en Matemática Educativa II*, 109-131. México, DF: Grupo Editorial Iberoamérica.

Quesada, A. (2001). Modelos de ajuste de datos. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 14.*

Radford, L. (1996). An historical incursión into the hidden side of the early development of equations. En J. Jiménez, Campos L., y B. Gómez (Eds.) *Arithmetics and algebra education.* Tarragona, España: U. Rovira i Virgili. pp. 120-131.

Ralston, A. & Rabinowitz, P. (1978). *A first Course in Numerical Analysis.* 2a. Ed., McGraw Hill, México.

Ramos, M. P. (2005). De la física de carácter ingenieril a la creación de la primera profesión de física en México. *Revista Mexicana de Física 51* (2), 137-146.

Rodríguez-Vásquez, F. (2003). *Convergencia, recursividad y visualización.* Tesis de Maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Rojano, M. T. (1985). *De la aritmética al álgebra (un estudio clínico con niños de 12 a 13 años de edad).* Tesis doctoral no publicada. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

Rojano, M. T. (1994). La matemática escolar como lenguaje: nuevas perspectivas de investigación y enseñanza. *Enseñanza de las ciencias 12* (1), 45-56.

Romero, J. et al. (1999). Algoritmos iterativos para la computación de raíces en sistemas de ecuaciones. *SUMA 31*, 51-54.

Ruiz Berrio, J. (1976). El método histórico en la investigación histórica de la educación. *Revista Española de Pedagogía 134*, 449-475.

Sánchez, J. M. (2003). Newton: el grande entre los grandes. En A. Durán y F. J. Pérez (Eds.), *Análisis de cantidades mediante series, fluxiones y diferencias, con una enumeración de las líneas de terer orden* (pp. VII-L). España. Real Sociedad Matemática Española: SAEM "Thales".

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics 22*, pp. 1-36.

Shampine, L. F. & Allen Jr. R. C. (1973). *Numerical Computing: An introduction.* W. B. Saunders Company (Eds.), Philadelphia.

Simmons, G. F. (1991). *Ecuaciones Diferenciales. Con aplicaciones y notas históricas.* 2a. Ed. Traducción por Lorenzo Abellanas Rapún. McGraw-Hill.

Struik, D. (1998). *Historia Consisa de las Matemáticas.* Traducción de: Pedro Lezama y Noriega. *A Concise History of Mathematics.* México: Instituto Politécnico Nacional.

Schubring, G. (1987). On the methodology of analyzing historical textbooks: Lacroix as textbook author. *For the Learning of Mathematics 7* (3), 41-51. FML Publishing Montreal, Quebec: Canada.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathematiques 6* (1), 5-7.

Sierpinska, A. (1989). Sur un programe de recherche lié a la notion d'obstacle épistemologique. En N. Berdnaz y C. Garnier (Eds.), *Constructions de savoirs: Obstacles & Conflicts* (pp. 130-148). Otawa, Canada: Agence d'Arc.

Sierpinska, A. (). *Understanding Mathematics.* Falmer Press.

Sierpinska, A. (1992). An understanding the notion of function. En G. Harel y E, Dubinsky (Eds.), *The concept of function.*

Aspects of Epistemology and pedagogy, pp. 25-58. USA: Mathematical association of America.

Sierra, M. (1989). Dos ejemplos de investigación histórica en Educación Matemática y su didáctica en las Escuelas de Magisterio (1940-1983) y Centre Belge de Pédagogie de la Mathématique (1958-1973). *Conferencia a las jornadas de profesores de didáctica de las matemáticas de las escuelas de magisterio de Andalucía*. España.

Sierra, M. (1997). Notas de historia de las matemáticas para el currículo de secundaria. En L.Rico (Ed.), *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria.* Barcelona, España: Horsori.

Sierra, M., González, M.T. y López, C. (1999). Evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de Bachillerato y Curso de Orientación Universitaria: 1940-1995. *Enseñanza de las Ciencias 17* (3), 463-476.

Sierra, M., Gónzalez, M. T. y López, C. (2002). Una visión integradora acerca del concepto de límite. *Uno Revista de Didáctica de las Matemáticas 29*, pp. 77-94.

Sierra, M.,González, M.T. y López, C. (2003). El concepto de continuidad en los manuales españoles del siglo XX. *Educación Matemática 15* (1), 21-51.

Simmons. F. (1991). *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Con aplicaciones y notas históricas.* Traducción por Lorenzo Abellanas Rapun. Ed. Mc. Graw Hill.

Swetz, F. (2000). Mathematical pedagogy: an historical perspective. En Katz, V. (2000). *Using History to Teach Mathematics. An International Perspective.* Mathematical Asociation of America. pp. 11-16.

Struik, D.J. (1998). *Historia concisa de las matemáticas.* D.F, México: Instituto Politécnico Nacional. Traducción de *A concise history of mathematics.* 1948.

Tall, D. (1991). (Ed). *Advanced mathematical thinking.* Dordrecht: Kluwer.

Tavignot, P. (1993). Analyse du processus de transposition didactique. Application à la symétrie orthogonale en sixieme lors de la reforme de 1985. *Recherches en Didactique des Mathematics 13* (3), 257-294.

Taylor, B. (1715). *Methodus incrementorum directa et inversa.*

Trouche, L. (2000). La parabole du gaucher et de la caserole a bec verseur: Létude des processus d'aprentissage dans un environnement de calculatrices symboliques. *Educational Studies in Mathematics 41*, 239-264.

Topolsky, J. (2007). *Metodología de la historia.* Madrid: Catedra.

Waldegg, G. y Moreno, L. (1991). The conceptual evolution of actual mathematical infinity. *Educational Studies in Mathematics 22*, 211-231.

Waldegg, G. (1997). Histoire, épistemologie et méthodologie dans la recherche en didactique. *For the Learning of Mathematics 17* (1), 43-46.

Van Loan, C. (1997). *Introduccion to Scientific Computing.* New Jersey: Prentice Hall.

Varona, J. (2002). Graphic and numerical comparison between iterative methods. *The mathematical intelligencer 24* (1), 37-45.

Vilenkin, N. Ya. (1984). *Método de las aproximaciones sucesivas.* 2a. Ed. Editorial Mir. Moscu.

Vinner, S. (1991). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. En D. Tall. (Ed.), *Advanced mathematical thinking.* Dordrecht: Kluwer, pp. 65-81.

Zill, D. (1988). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones.* 2a. Ed. México. D, F: Grupo Editorial Iberoamérica.

Zimmerman, W. y Cunninghan, S. (1991). *Visualization in teaching and learning mathematics* Washington, DC: Mathematical Association of America. ISBN:0-88385-071-0.