

MEMORIA DEL PROYECTO:

**Nuevas estrategias docentes en el área de matemática aplicada
dentro del grado de ingeniería informática**

Código del proyecto: ID9/073

Responsable: Higinio Ramos Calle

Departamento: Matemática Aplicada

Participantes:

Manuel Domínguez Valverde

Antonio Martínez Fernández

Higinio Ramos calle

Centro de ejecución:

E.P.S. de Zamora. Titulación de Ingeniería Informática de Sistemas.

Cambiar la metodología docente con todo lo que ello conlleva (docencia propiamente dicha, tutorías, sistema de evaluación, etc.) y su adaptación a las exigencias del E.E.E.S. es el objetivo principal que nos hemos marcado en este grupo de trabajo. Cambiar la organización de las asignaturas, sus contenidos y la manera de hacerlas llegar a los alumnos es una tarea insoslayable en el nuevo marco europeo.

Para ello debemos abordar en primer lugar un cambio en la selección de contenidos que se han de impartir, procurando evitar solapamientos inútiles y evitando saltos en el vacío respecto de los conocimientos que se presuponen adquiridos en el bachillerato de referencia para la titulación. En este sentido, la presencia en el grupo creado, de profesores que han impartido y siguen impartiendo la asignatura garantiza un conocimiento exhaustivo de la actual situación y permite avanzar en el diseño del nuevo programa de acuerdo a las necesidades formativas actuales de los ingenieros informáticos.

En segundo lugar, hay que abordar un cambio metodológico que permita afrontar las nuevas necesidades de aprendizaje de los alumnos. La utilización de todo el potencial que proporcionan las nuevas tecnologías aplicadas al ejercicio docente puede derivar en la necesidad de replantarse la organización de los diferentes grupos docentes, adaptando su tamaño a las posibilidades de las diferentes aulas de informática o aulas de trabajo específicas. En este sentido, la adaptación al E.E.E.S. hará necesario un cambio institucional respecto de la organización docente y no sólo de la labor docente de cada profesor o grupo de profesores.

Las nuevas tecnologías desempeñarán un papel predominante en el nuevo enfoque que hay que dar a los diferentes procesos de enseñanza-aprendizaje, de evaluación, y en la acción tutorial. Los desarrollos de las Tecnologías de la Información y Comunicación (T.I.C.) son cada vez más rápidos y potentes, y proporcionan nuevas metodologías educativas con el

fin de personalizar la enseñanza. Además hay que aprovechar la oportunidad que supone el hecho de que los actuales estudiantes estén familiarizados con ellas, especialmente en esta titulación, y por tanto sean capaces de utilizarlas con facilidad y provecho.

Las T.I.C.s favorecen la comunicación y la gestión del conocimiento, y deberían formar parte sustancial de los modelos educativos. En el documento del Consejo de Coordinación Universitaria, *Propuesta para la Renovación de las Metodologías Educativas en la Universidad* (2006) se recoge como uno de los objetivos para la renovación de cara al E.E.E.S. la potenciación en el uso de las T.I.C.s. También favorecen un contacto y un seguimiento más personalizado del alumno, contacto que va más allá de la finalización de sus estudios en la Universidad, como hemos tenido ocasión de constatar en otros casos, y que de alguna manera posibilitan la realización de un aprendizaje permanente, amén de otros cauces que los egresados puedan elegir.

La metodología empleada hasta ahora ha sido fundamentalmente expositiva, al servicio de la transmisión de la información. Los resultados de aprendizaje que se demandan generalmente a los estudiantes se circunscriben al recuerdo de esa información en situaciones de examen tradicional.

En las asignaturas de matemáticas se ha aplicado hasta ahora el binomio clases teóricas y clases prácticas de problemas, y no existen, en general, laboratorios de matemáticas tal y como se entienden en las metodologías modernas. Este sistema de enseñanza tradicional impide, además, el cambio en los sistemas de evaluación que siguen siendo, en un porcentaje muy elevado, los derivados de los resultados de los exámenes presenciales.

Hemos pretendido cambiar esta situación desarrollando los siguientes aspectos:

- nuevo concepto de tutoría
- utilización de una plataforma on-line
- utilización de recursos informáticos
- sustitución del tradicional examen por otros medios de evaluación

Un nuevo concepto de tutoría:

Tradicionalmente, en los últimos años, el profesor tenía que señalar una serie de horas en que se encontraba en su despacho a disposición de los alumnos. Y generalmente, estos no acudían a hacer las consultas oportunas. La razón alegada para no acudir solía ser el miedo a hacer el ridículo, el pensar que las cuestiones que se iban a plantear suscitarían algún tipo de rechazo por parte del profesor.

Con el uso de medios virtuales, básicamente lo que se ha favorecido es la comunicación no presencial: los alumnos no temen ponerse delante del ordenador y preguntar al profesor por cuestiones relacionadas con la asignatura. El aumento de las tutorías debido a la utilización de este formato ha aumentado en torno a un 60%. El método preferido por su comodidad es el correo electrónico, seguido del uso de plataformas específicas como la plataforma Studium.

En la página siguiente mostramos unas imágenes que ratifican la utilización por parte de los alumnos de estos medios de tutoría. Cuando es posible, aunque las dudas de la materia de matemáticas pueden parecer difícil de responder a través del correo electrónico, no hay especial dificultad. Y cuando ello ha ocurrido, se ha procedido a generar un fichero .pdf escrito con notación matemática (mediante un procesador de texto matemático adecuado) para que la respuesta sea más comprensible.

Webmail USAL - Windows Internet Explorer

https://correo.usal.es/src/webmail.php

Archivo Edición Ver Favoritos Herramientas Ayuda

Favoritos Google gmail correo electrónico de ... Más complementos

Webmail USAL

Uso de cuota: 25.3% of 1.024.00 MB

Carpetas
 Última actualización: Mie, 6:58 am (Comprobar correo)

- ENTRADA
- Borrador
- Eliminados
- Enviados
- SPAM

Carpeta actual: **ENTRADA** Desconectarse

Redactar Direcciones Carpetas Opciones Buscar Ayuda Transferir SquirrelMail

Lista de mensajes | [Borrar](#) Anterior | [Siguiente](#) Reenviar | [Reenviar como adjunto](#) | [Responder](#) | [Responder a todos](#)

Asunto: Duda cálculo
De: ivan_perez@usal.es
Fecha: Vie, 21 de Mayo de 2010, 1:50 pm
Para: higr@usal.es
Prioridad: Normal
Crear filtro: [Automáticamente](#) | [De](#) | [Para](#) | [Asunto](#)
Opciones: [Ver encabezado completo](#) | [Vista preliminar](#) | [Bajar este mensaje como un archivo](#) | [Agrupar al Listín](#) | [Marcar como Spam](#)

Hola Higinio,

tengo una ED de la forma $(2xy^3).dx+(x^2y^2-1).dy=0$. No es homogénea pero se puede hacer homogénea mediante un cambio $yz=alfa$.

Si supongo que que no es exacta pero busco el factor integrante para haréla exacta me saldría que efectivamente podría hacerse exacta con un factor integrante que solo dependa de "y".

¿Una ecuación diferencial concreta puede llegar a ser resultado de ambas formas (como homogénea y como exacta) o he cometido algún error?

En el caso de que si se pueda de las dos formas, ¿qué método es más recomendable utilizar?

Tomar dirección

Inicio Escritorio MEMORIA DE ACTIVIDA... MEMORIA DEL PROYECT... Webmail USAL - Wind... 6:58

Webmail USAL - Windows Internet Explorer

https://correo.usal.es/src/webmail.php

Archivo Edición Ver Favoritos Herramientas Ayuda

Favoritos Google gmail correo electrónico de ... Más complementos

Webmail USAL x 16896: Participantes

Uso de cuota: 25.3% of 1.024.00 MB

Carpetas
 Última actualización: Mie, 7:04 am (Comprobar correo)

- ENTRADA
- Borrador
- Eliminados
- Enviados
- SPAM

Carpeta actual: **ENTRADA** Desconectarse

Redactar Direcciones Carpetas Opciones Buscar Ayuda Transferir SquirrelMail

Lista de mensajes | [Borrar](#) Anterior | [Siguiente](#) Reenviar | [Reenviar como adjunto](#) | [Responder](#) | [Responder a todos](#)

Asunto: Trabajo Calculo Informatica
De: antonioregulon@usal.es
Fecha: Mar, 11 de Mayo de 2010, 8:57 pm
Para: higr@usal.es
Prioridad: Normal
Crear filtro: [Automáticamente](#) | [De](#) | [Para](#) | [Asunto](#)
Opciones: [Ver encabezado completo](#) | [Vista preliminar](#) | [Bajar este mensaje como un archivo](#) | [Agrupar al Listín](#) | [Marcar como Spam](#)

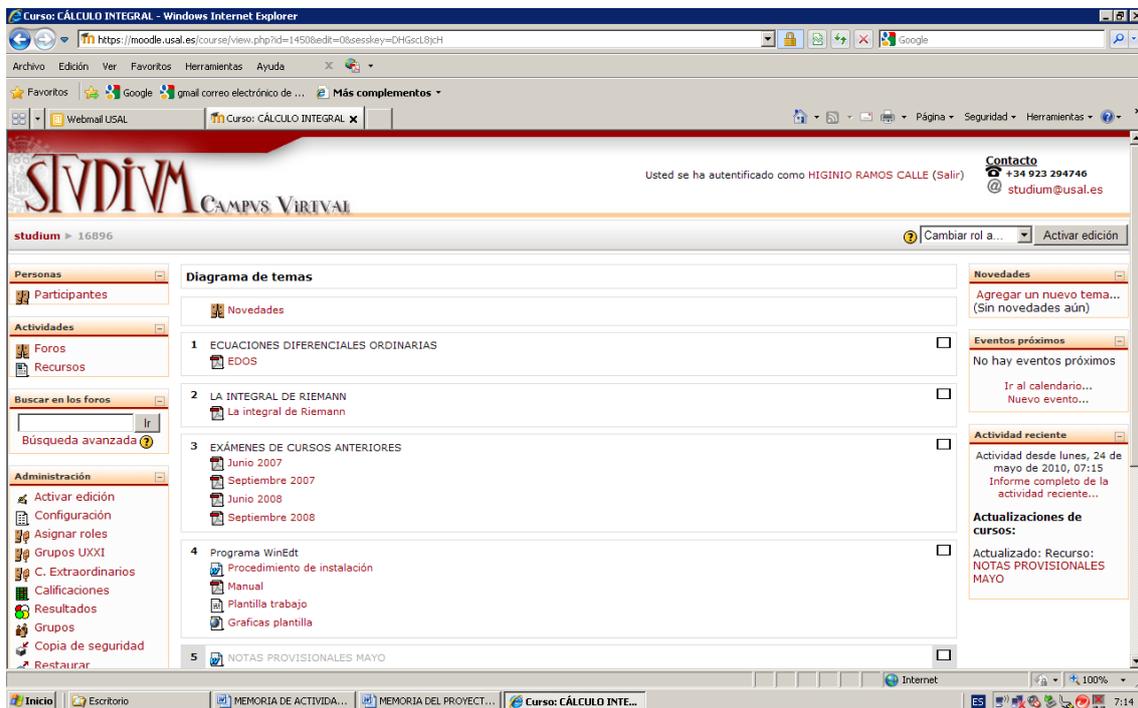
Hola Higinio, soy Antonio Regulón, alumno de Cálculo Integral de Informática de Gestión aquí en Zamora. Le envío este correo, ya que por motivos laborales no puedo acercarme a las horas de tutoría para preguntarle si puedo hacer el trabajo de Calculo junto con David e Iván. Muchas gracias por tu atención. Atentamente Antonio Regulón.

Tomar dirección

Inicio Escritorio MEMORIA DE ACTIVIDA... MEMORIA DEL PROYECT... Webmail USAL - Wind... 7:06

Utilización de una plataforma on-line :

Ya hemos aludido anteriormente al uso de la plataforma Studium en relación con las tutorías. Pero no ha sido este el uso más extendido. La plataforma Studium ha permitido crear una página de la asignatura, donde se presentan todo tipo de informaciones relacionada con la misma, desde apuntes sobre temas del programa, hasta las notas obtenidas, pasando por explicaciones sobre diversas cuestiones prácticas.



The screenshot shows the Studium virtual campus interface for the course 'CÁLCULO INTEGRAL'. The browser window title is 'Curso: CÁLCULO INTEGRAL - Windows Internet Explorer'. The URL is 'https://moodle.usal.es/course/view.php?id=1450&edit=0&sesskey=DH6c18yH'. The interface includes a navigation menu on the left with options like 'Personas', 'Actividades', 'Foros', 'Recursos', 'Administración', and 'Restaurar'. The main content area is titled 'Diagrama de temas' and lists five topics: 1. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (EDOS), 2. LA INTEGRAL DE RIEMANN (La integral de Riemann), 3. EXÁMENES DE CURSOS ANTERIORES (Junio 2007, Septiembre 2007, Junio 2008, Septiembre 2008), 4. Programa WinEdt (Procedimiento de instalación, Manual, Plantilla trabajo, Graficas plantilla), and 5. NOTAS PROVISIONALES MAYO. The right sidebar contains sections for 'Noticias', 'Eventos próximos', 'Actividad reciente', and 'Actualizaciones de cursos'. The user is logged in as 'HIGINIO RAMOS CALLE (Salir)'.

Hay que señalar que la participación de los alumnos mediante esta plataforma ha sido mayoritaria, y ha sido acogida con satisfacción por su parte. Lo ideal sería poder ofrecer a través de ella procedimientos de autoevaluación de una forma continua, que les permitiera conocer sus debilidades. Es algo que esperamos desarrollar en un plazo no muy lejano.

16896: Informe de actividades (outline) - Windows Internet Explorer

https://moodle.usal.es/course/user.php?id=1450&user=683&mode=outline

Archivo Edición Ver Favoritos Herramientas Ayuda

Favoritos Google gmail correo electrónico de ... Más complementos

Webmail USAL 16896: Informe de activi... X

Inicio Escritorio MEMORIA DE ACTIVIDA... MEMORIA DEL PROYECT... 16896: Informe de ac... Internet 100% 7:18

Novedades

Tema 1

EDOS 3 vistas jueves, 25 de marzo de 2010, 22:08 (61 días 8 horas)

Tema 2

La integral de Riemann 2 vistas jueves, 25 de marzo de 2010, 22:08 (61 días 8 horas)

Tema 3

Junio 2007 1 vistas lunes, 1 de marzo de 2010, 00:39 (86 días 5 horas)
 Septiembre 2007 1 vistas lunes, 1 de marzo de 2010, 00:39 (86 días 5 horas)
 Junio 2008 1 vistas lunes, 1 de marzo de 2010, 00:39 (86 días 5 horas)
 Septiembre 2008 1 vistas lunes, 1 de marzo de 2010, 00:39 (86 días 5 horas)

Tema 4

Procedimiento de instalación 5 vistas sábado, 15 de mayo de 2010, 13:54 (10 días 17 horas)
 Manual 2 vistas lunes, 1 de marzo de 2010, 00:41 (86 días 5 horas)
 Plantilla trabajo 4 vistas viernes, 7 de mayo de 2010, 22:29 (18 días 8 horas)
 Graficas plantilla 2 vistas sábado, 15 de mayo de 2010, 11:31 (10 días 19 horas)

16896: Informe de actividades (allogs) - Windows Internet Explorer

https://moodle.usal.es/course/user.php?id=1450&user=23400&mode=alllogs

Archivo Edición Ver Favoritos Herramientas Ayuda

Favoritos Google gmail correo electrónico de ... Más complementos

Webmail USAL 16896: Informe de activi... X

Inicio Escritorio MEMORIA DE ACTIVIDA... MEMORIA DEL PROYECT... 16896: Informe de ac... Internet 100% 7:22

STUDIVM CAMPUS VIRIVAL

Usted se ha autenticado como HIGINIO RAMOS CALLE (Salir)

Contacto
 +34 923 294746
 @ studium@usal.es

studium > 16896 > Participantes > LAURA DEL RIO GALLEGO > Informe de actividades > Todas las entradas

LAURA DEL RIO GALLEGO

Perfil Mensajes Blog Notas Informes de actividad

Diagrama de informe Informe completo Registros de hoy Todas las entradas Estadísticas Calificación

Clics de LAURA DEL RIO GALLEGO en 16896

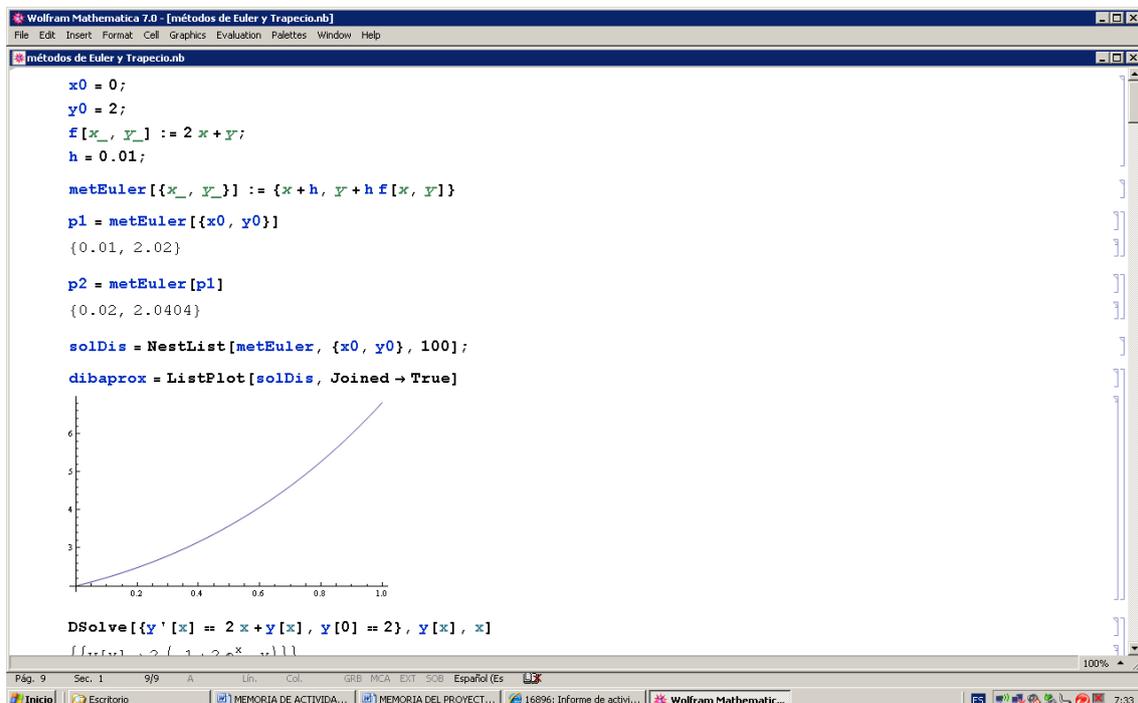
Fecha	Clics
dom 27 dic	0
dom 3 ene	0
dom 10 ene	0
dom 17 ene	0
dom 24 ene	0
dom 31 ene	0
dom 7 feb	0
dom 14 feb	0
dom 21 feb	0
dom 28 feb	0
dom 7 mar	0
dom 14 mar	0
dom 21 mar	0
dom 28 mar	0
dom 4 abr	0
dom 11 abr	0
dom 18 abr	11
dom 25 abr	0
dom 2 may	0
dom 9 may	0
dom 16 may	0
dom 22 may	0

Utilización de recursos informáticos :

La utilización de recursos informáticos de aplicación directa en las asignaturas de matemáticas ha consistido en el uso del programa Mathematica para la realización de prácticas y del programa WinEdt para la edición de documentos científicos.

Para que la utilización por parte de los alumnos fuera posible primeramente se les ha contado cómo funcionan dichos programas. El programa Mathematica sirve como apoyo complementario a las clases, y está disponible en las aulas de informática (además de que existe una versión de evaluación para alumnos). Lo han utilizado también para realizar los programas requeridos en relación con los trabajos que han tenido que presentar.

El programa WinEdt ha permitido realizar los trabajos en un formato usual para la presentación de documentos científico-técnicos.



Sustitución del tradicional examen por otros medios de evaluación:

Al final del proceso de enseñanza se nos exige una calificación (ahora numérica) con que señalar los logros alcanzados por el alumno. Supeditar la valoración de esos logros a una sola calificación obtenida en un único examen final puede ser muy arriesgado, y seguramente en ocasiones injusto. Por ello hemos propuesto la realización de tareas a lo largo del curso, la realización de pruebas parciales (que pueden ser más según requiera la situación) y la realización del trabajo señalado anteriormente, además del examen final. Todo ello se tiene en cuenta para establecer la calificación final de los alumnos según la fórmula

$$NotaFinal = \frac{4PF + 3TF + \frac{15}{n} \sum_{i=1}^n T_i + \frac{15}{m} \sum_{i=1}^m P_i}{10},$$

donde PF, TF, T_i , P_i son las valoraciones sobre 10 de los distintos aspectos. PF se refiere a la prueba final escrita (que en ocasiones pueden ser más de una), TF al trabajo obligatorio, T_i a los distintos trabajos prácticos que se han propuesto a lo largo del curso (obtención de la demostración de un teorema, desarrollo de alguna cuestión práctica de especial dificultad,..) y P_i a las pruebas escritas que se han realizado durante el curso.

Esta forma de obtener la calificación final resulta adecuada para valorar el trabajo a lo largo del curso y ha sido acogida favorablemente por los alumnos.

ANEXO I

Muestra de algunas de las hojas de tareas puestas a disposición de los alumnos.

INTEGRAL INDEFINIDA

1.- $\int \frac{1+x}{1-x} dx$

2.- $\int \frac{1+x}{1+x^2} dx$

3.- $\int \frac{dx}{\sqrt{20+8x-x^2}}$

4.- $\int \operatorname{tg}^2 x dx$

5.- $\int \frac{\sqrt[3]{Lx}}{x} dx$

6.- $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-L^2x}}$

7.- $\int x^m Lx dx, \quad m \neq -1$

8.- $\int (\operatorname{tg}^3 x - 2 \operatorname{tg} x + 3) \frac{dx}{\cos^2 x}$

9.- $\int x a^{kx} dx$

10.- $\int \frac{2+L^2x}{xLx-x} dx$

11.- $\int x \sqrt{1+x} dx$

12.- $\int e^{ax} \cos bx dx$

13.- $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx$

14.- $\int \frac{dx}{e^x+1}$

15.- $\int \frac{dx}{x\sqrt{4-9L^2x}}$

16.- $\int x^4 L^2 x dx$

17.- $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}$

18.- $\int \frac{dx}{x\sqrt{Lx(1-Lx)}}$

19.- $\int \frac{dx}{m^2 e^x + n^2 e^{-x}}$

20.- $\int \sqrt{1+x} Lx dx$

21.- $\int \frac{Lx}{\sqrt{x}} dx$

22.- $\int \frac{L(1+x^2)}{x^2} dx$

23.- $\int L \frac{1-x}{1+x} dx$

24.- $\int \frac{x dx}{\operatorname{sen}^2 x}$

25.- $\int \frac{dx}{\cos^6 x}$

26.- $\int x(2x+5)^{10} dx$

27.- $\int \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^2}$

28.- $\int \sqrt{a^2-x^2} dx$

29.- $\int \cos^2(Lx) dx$

30.- $\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} dx$

31.- $\int \frac{dx}{1+\cos^2 x}$

32.- $\int \operatorname{tg}^6 x dx$

33.- $\int x \operatorname{tg}^2 2x dx$

34.- $\int x^3 \operatorname{arctg} x dx$

35.- $\int x^2 \cos^2 3x dx$

36.- $\int \frac{x e^{\operatorname{arcsen} x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$

37.- $\int L(x^2+2) dx$

38.- $\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{e^x} dx$

39.- $\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} dx$

40.- $\int \frac{x \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} dx$

41.- $\int \frac{e^{\operatorname{arctag} x} dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$

42.- $\int \frac{Mx+N}{[(x-r)^2+s^2]} dx$

43.- $\int \frac{7x^2-10x+37}{(x+1)(x^2-4x+13)} dx$

44.- $\int \frac{2x^2 dx}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}$

45.- $\int \frac{5x^3}{x^3-5x^2+4x} dx$

46.- $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$

47.- $\int \frac{dx}{x^3+1}$

48.- $\int \frac{dx}{1+x-x^2}$

Encontrar una ley de recurrencia que permita calcular:

49.- $I_n = \int e^{-x} x^n dx$

50.- $I_n = \int \operatorname{tg}^n x dx$

51.- $I_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$

52.- $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$

53.- $I_n = \int x^3 (Lx)^n dx$

54.-

$I_n = \int \frac{x^{2n}}{(a^2+x^2)^n} dx$

INTEGRALES CURVILÍNEAS

1.- Calcular las siguientes integrales a lo largo de la curva y los puntos que se indican:

a) $\int_{\gamma} xy dx + (x^2 - y^2) dy, \quad \gamma: x^2 + y^2 = 1.$

b) $\int_{\gamma} xy dx + (x^2 - y^2) dy, \quad \gamma: y^2 = x$ entre los puntos $(1, -1)$ y $(1, 1).$

c) $\int_{\gamma} xy dx + (x^2 - y^2) dy, \quad \gamma: y^2 = x^3$ entre los puntos $(1, -1)$ y $(1, 1).$

d) $\int_{\gamma} xy dx + (x^2 - y^2) dy, \quad \gamma: x^2 + 2y^2 = 4.$

Solución: a) 0 b) $\frac{8}{15}$ c) $\frac{16}{21}$ d) 0

2.- Calcular la integral curvilínea $\int_{\gamma} (x^2 y - y^3) dx + (y^4 - x) dy$ a lo largo de la parábola

$y^2 = x$, entre los puntos $(1, 1)$ y $(4, 2).$

Solución: $\frac{2.914}{105}$

3.- Calcular la integral curvilínea $\int_{\gamma} (2xy + 1) dx + (x^2 + 3) dy$ entre los puntos $(0, 0)$ y

$(6, 0)$ a lo largo de la curva $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0.$

Solución: 6

4.- Calcular la integral $\int_{(0,0)}^{(1,1)} (y - x) dx + y dy$ a lo largo de:

a) La recta que une los puntos.

b) Un arco de la parábola de ecuación $y^2 = 2px$, que pasa por los puntos $(0, 0)$ y $(1, 1).$

c) Un arco de la parábola de ecuación $x^2 = 2py$, que pasa por los puntos $(0, 0)$ y $(1, 1).$

Solución: a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{1}{3}$

5.- Calcular $\int_{AB} \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$, siendo AB el arco de la circunferencia de

centro el origen y radio 1, con $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y $B\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Solución: $\frac{\pi}{6}$

6.- Hallar la primitiva de la expresión $(8xy + 5y) dx + (4x^2 + 5x + 2) dy.$

Solución: $U = 4x^2 y + 5xy + 2y + C$

7.- Encontrar la función potencial de las funciones: $X(x, y) = 2xy$, $Y(x, y) = x^2 - y^2.$

Solución: $U = x^2 y - \frac{y^3}{3} + C$

8.- Calcular $\int_{(0,0)}^{(\pi,\pi)} (x+y) dx + (x-y) dy$ a lo largo de los siguientes caminos que unen $O(0,0)$ y M

(π, π) :

a) Recta OM.

b) Curva $y = x + \sin x$.

c) Línea OPM, siendo $P(\pi, 0)$.

d) Parábola $y = \frac{x^2}{\pi}$

Solución: π^2 (en los cuatro casos).

9.- Calcular $\int_C (y - \sin x) dx + \cos y dy$ a lo largo del contorno triangular de vértices

$A(0,0)$, $B\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ $C\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Solución: $-\frac{\pi^2}{8}$

10.- Calcular $\oint e^{-(x^2-y^2)} (\cos 2xy dx + \sin 2xy dy)$ a lo largo de la curva $x^2 + y^2 = R^2$.

Solución: 0

11.- Calcular $\oint_C x^3 dy - y^3 dx$ a lo largo de la curva $x^2 + y^2 = R^2$

a) Directamente.

b) Aplicando el teorema de Riemann.

Solución: $\frac{3}{2} \pi R^4$

12.- Calcular $\oint_C (3x^2 + 2y) dx - (x + 3\cos y) dy$, a lo largo del paralelogramo de vértices

$(0,0)$, $(2,0)$, $(3,1)$ y $(1,1)$.

Solución: -6

13.- Calcular $\oint_C \frac{x dx - y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, siendo C el contorno situado en la región de valores positivos de

las coordenadas, siendo $x \geq 3$ formado por las líneas $x = 3$, $x^2 + y^2 = 25$. Comprobar el resultado mediante la fórmula de Green.

Solución: $\frac{4}{5}$

14.- Comprobar el teorema de Green para las funciones $X = 2x^2 + 3y^2$, $Y = 4xy$ y la curva C, situada en la región de valores positivos de coordenadas, formada por las curvas $y = 0$, $x^2 + y^2 = 2x$, $y^2 = x$.

Solución: $-\frac{7}{6}$

INTEGRALES MÚLTIPLES

- 1.- Calcular $\iint_R x^2 dx dy$, siendo R el rectángulo limitado por los ejes y las rectas $x = 4$, $y = -2$. **Solución:** $128/3$
- 2.- Calcular $\iint_R xy^3 dx dy$ en el recinto de integración limitado por el eje OY y la curva $x^2 + y^2 - 2y = 0$, siendo $x \geq 0$. **Solución:** $16/15$
- 3.- Calcular $\iint_R (x^2 + y^2) dx dy$, siendo R el recinto limitado por las curvas $y = x^2$, $y = 1$ y $x = 2$. **Solución:** $1.006/105$
- 4.- Calcular $\iint_R xy dx dy$ extendida a la región del primer cuadrante limitada por $y = x$ e $y = x^3$. **Solución:** $1/16$
- 5.- Calcular el volumen del tetraedro limitado por el plano $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ y los planos coordenados. **Sol.:** $\frac{abc}{6}$ u. de v.
- 6.- Hallar el volumen de la región limitada por $z = x^2 + y^2$, $z = 0$, $x = a$, $x = -a$, $y = a$, $y = -a$. **Solución:** $\frac{8a^4}{3}$ u. de v.
- 7.- Calcular $\iint_R x \cdot e^{\frac{-x^2}{y}} dx dy$ extendida a la porción del plano limitada por $x = 0$, $x^2 = y$, $y = 1$ e $y = 2$. **Solución:** $\frac{3}{4} \frac{(e-1)}{e}$
- 8.- Hallar el volumen comprendido entre las superficies $z = x^2 + y^2$, $x = y^2$, y los planos $x = 4$, $z = 0$. **Solución:** $\frac{8.576}{105}$ u. de v.
- 8.- Calcular $\iint_R x dx dy$, siendo R el recinto plano limitado por las curvas: $x = 0$, $y = 0$, $x^2 + y^2 = 10$, $x \cdot y = 3$. **Solución:** $\frac{10\sqrt{10} - 8}{3}$
- 10.- Hallar el volumen limitado por los planos $y + z = 25$ y $z = 0$ en el cilindro circular recto $x^2 + y^2 = 4$. **Sol.:** 100π u. de v.

11.- Hallar $\iint_R dx dy$, siendo R la región comprendida entre $y = 2x$ e $y = x^2$, situada a la izquierda de $x = 1$. **Sol.:** $\frac{2}{3}$

12.- Hallar $\iint_R x^2 dx dy$, siendo R la región del primer cuadrante limitada por la hipérbola $x \cdot y = 16$ y las rectas $y = x$ e $y = 0$. **Solución:** 448

13.- Calcular $\iint_R \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, donde R es la región definida por $x^2 + y^2 \leq a^2$.
Solución: $\frac{2\pi a^3}{3}$

14.- Si R es la región $x^2 + y^2 \leq a^2$, calcular $\iint_R e^{-(x^2+y^2)} dx dy$. **Solución:** $\pi(1 - e^{-a^2})$

15.- Siendo R el triángulo definido por las rectas $x = 0$, $y = 0$ y $x + y = 2$, hallar $\iint_R (x - 2y) dx dy$. **Solución:** $-\frac{4}{3}$

16.- Siendo R la semicorona circular situada por encima del eje de abscisas y determinada por $x^2 + y^2 = 25$ y $x^2 + y^2 = 9$, hallar $\iint_R \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$.
Solución: 16

17.- Siendo R el dominio definido por: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$, hallar $\iint_R dx dy$. **Solución:** 12π

18.- Calcular la siguiente integral invirtiendo el orden de integración:

$$\int_0^1 \int_{\arcsen y}^{\pi/2} \cos x \sqrt{1 + \cos^2 x} dx dy$$

19.- Hallar el volumen del sólido que está encima del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y debajo de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

20.- Dibuja el recinto de integración y calcula la siguiente integral, invirtiendo el orden de integración:

$$\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2} dx dy$$

21.- Intercambiar el orden de integración en:

$$\int_{-6}^2 \int_{\frac{x^2}{4}}^{2-x} f(x, y) dy dx$$

ANEXO II

Muestra de una de las prácticas realizadas mediante el uso del programa Mathematica

Prácticas de Matemáticas con *Mathematica* .

Integración numérica.

Departamento de Matemática Aplicada.

E.P.S. de Zamora

Universidad de Salamanca

EJEMPLO 1 :

Consideremos la integración numérica de la función siguiente en el intervalo $[0, 2]$:

```
f[x_] := Exp[-x^2]
```

El valor exacto de la integral puede obtenerse con el comando `Integrate` del *Mathematica*

```
Integrate[f[x], {x, 0, 2}]
```

```
 $\frac{1}{2} \sqrt{\pi} \operatorname{Erf}[2]$ 
```

Y la aproximación numérica del valor anterior se obtiene en la forma siguiente :

```
Exacto = N[ $\frac{1}{2} \sqrt{\pi} \text{Erf}[2]$ , 16]
```

```
0.8820813907624217
```

Si quisiermos utilizar 20 subintervalos en la Regla del Trapecio compuesto deberemos hallar los nodos de integración :

```
n = 200 000; a = 0; b = 2;
```

```
h = (b - a) / n
```

```
 $\frac{1}{100\ 000}$ 
```

```
Table[x[j] = a + j * h, {j, 0, n}];
```

La fórmula del Trapecio se puede expresar en la forma :

```
T = N[h (f[x[0]] / 2 + Sum[f[x[i]], {i, 1, n - 1}] + f[x[n]] / 2)]
```

```
0.882081
```

```
Exacto - T
```

```
 $6.10401 \times 10^{-13}$ 
```

Lo ideal es utilizar una sólo fórmula que evalúe directamente lo que queremos. Ello se puede conseguir introduciendo todos los pasos anteriores en una función que llamamos Trapecio[n_, a_, b_] donde n será el número de intervalos, y a, b los puntos extremos del intervalo de integración. La función f[x] ya estaba definida previamente.

```
Trapecio[nn_, a_, b_] := (n = nn; h = (b - a) / n; Table[x[j] = a + j * h, {j, 0, n}];  
N[h (f[x[0]] / 2 + Sum[f[x[i]], {i, 1, n - 1}] + f[x[n]] / 2), 16])
```

Comprobamos el error que se comete al aplicar la función que acabamos de definir para distintos valores de n :

```
Exacto - Trapecio[2000, 0, 2]
```

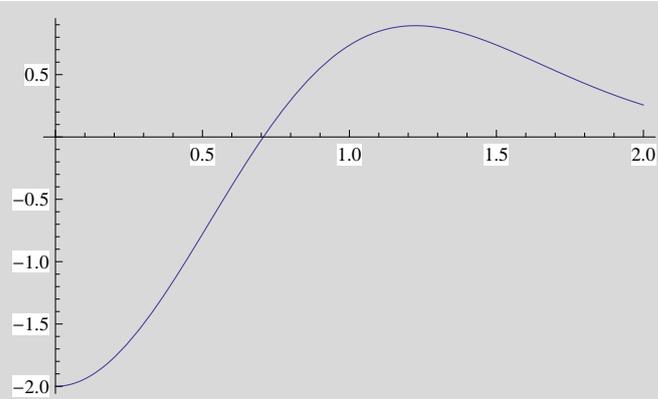
$$6.105212 \times 10^{-9}$$

```
-1 / 12 h^3 f'' (s) n
```

```
f''[x]
```

$$-2 e^{-x^2} + 4 e^{-x^2} x^2$$

```
Plot[f''[x], {x, 0, 2}]
```



```
h
```

$$\frac{1}{1000}$$

```
n
```

```
2000
```

```
fD = 2
```

```
2
```

```
ErrorT = N[1 / 12 h ^ 3 fD n]
```

```
2.08333 × 10-6
```

```
Exacto - Trapecio[800, 0, 2]
```

```
3.8157541 × 10-8
```

```
Exacto - Trapecio[8000, 0, 2]
```

```
3.81576 × 10-10
```

```
Exacto - Trapecio[80 000, 0, 2]
```

```
3.816 × 10-12
```

Lo mismo que hemos hecho para la Regla del Trapecio puede hacerse con la Fórmula de Simpson compuesta. Definimos la función `Simpson[n_, a_, b_]` teniendo en cuenta que ahora el número `n` de subintervalos tiene que ser par.

```
Simpson[nn_, a_, b_] :=
  (n = nn; h = (b - a) / n; Table[x[j] = a + j * h, {j, 0, n}]; N[h / 3 (f[x[0]] +
    4 Sum[f[x[i]], {i, 1, n - 1, 2}] + 2 Sum[f[x[i]], {i, 2, n - 2, 2}] + f[x[n]]), 16])
```

La aplicación de la función que acabamos de definir produce los siguientes errores

```
Exacto - Trapecio[800, 0, 2]
```

```
3.8157541 × 10-8
```

```
Exacto - Simpson[800, 0, 2]
```

```
1.59 × 10-13
```

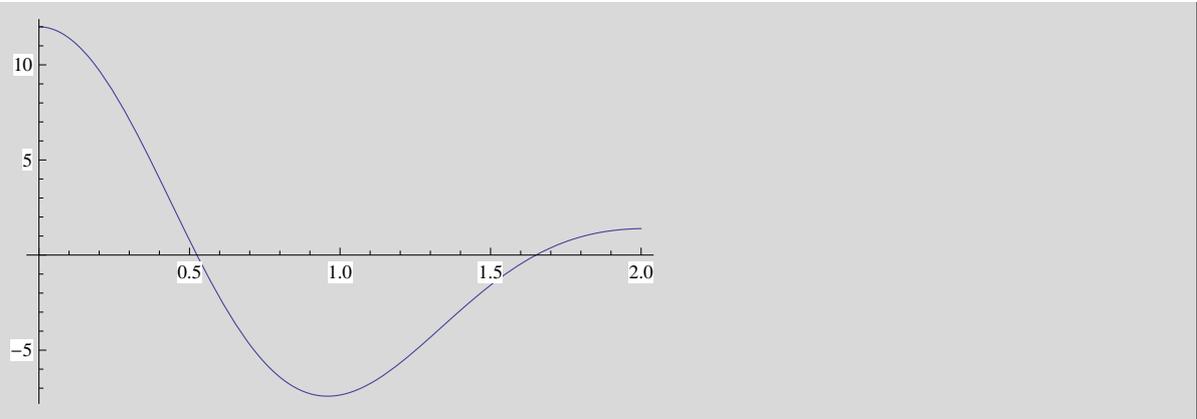
```
f''''[x]
```

```
12 e-x2 - 48 e-x2 x2 + 16 e-x2 x4
```

```
D[f[x], {x, 4}] /. x -> 0
```

12

```
Plot[12 e-x2 - 48 e-x2 x2 + 16 e-x2 x4, {x, 0, 2}]
```



```
f4D = 12
```

12

```
ErrorS = N[1 / 180 h5 f4D n]
```

5.20833×10^{-12}

ERROR EN LA FÓRMULA DE SIMPSON

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] - \frac{1}{90} h^5 f^{(4)}(\xi).$$

```
Clear[f, h];
```

```
Series[Integrate[f[t], {t, x0, x0 + 2 h}] - h / 3 (f[x0] + 4 f[x0 + h] + f[x0 + 2 h]), {h, 0, 5}]
```

$$-\frac{1}{90} f^{(4)}[x_0] h^5 + O[h]^6$$

```
Series[Integrate[f[t], {t, x0, x0 + h}] - h / 2 (f[x0] + f[x0 + h]), {h, 0, 3}]
```

$$-\frac{1}{12} f''[x_0] h^3 + O[h]^4$$

EJEMPLO 2 :

```
f[x_] := Sin[x]
```

```
Exacto = Integrate[f[x], {x, 0, Pi}]
```

```
2
```

```
Trapezio[300, 0, Pi]
```

```
1.999981722921408
```

```
Simpson[300, 0, Pi]
```

```
2.000000000133622
```

Errores cometidos con los métodos anteriores

```
Exacto - Trapezio[300, 0, Pi]
```

```
0.000018277078592
```

```
Exacto - Simpson[300, 0, Pi]
```

```
-1.33622 × 10-10
```

EJEMPLO 3 :

```
f[x_] := x^3 Sin[40 x]
```

```
Exacto = Integrate[f[x], {x, 0, 2 Pi}]
```

$$\frac{3\pi}{16000} - \frac{\pi^3}{5}$$

```
N[Exacto]
```

```
-6.20067
```

Errores cometidos con los métodos anteriores

```
Exacto - Trapecio[10 000, 0, 2 Pi]
```

```
-0.000326424432599
```

```
Exacto - Simpson[10 000, 0, 2 Pi]
```

```
1.3742806 × 10-8
```

EJEMPLO 4 :

```
f[x_] := x^3 Sin[10 x]
```

```
Exacto = Integrate[f[x], {x, 0, 2 Pi}]
```

$$\frac{3\pi}{250} - \frac{4\pi^3}{5}$$

```
nint = 1600; A1 = Trapecio[nint, 0, 2 Pi];
```

```
Exacto - A1
```

```
-0.00318778660995
```

```
nint = 800; A2 = Trapecio[nint, 0, 2 Pi];
```

```
Exacto - A2
```

```
-0.01275212530323
```

```
nint = 2400; A3 = Trapecio[nint, 0, 2 Pi];
```

```
Exacto - A3
```

```
-0.00141677391024
```

```
Exacto -  $\left( A1 + \frac{A1 - A2}{2^2 - 1} \right)$ 
```

```
3.2628781 × 10-7
```

Ahora además de calcular la integral con los métodos anteriores aplicaremos el proceso de extrapolación para a partir de un número n y de un número $2n$ de subintervalos obtener fórmulas mejoradas.

Nótese que con $3n$ subintervalos no obtenemos mejor aproximación que con las mismas evaluaciones pero utilizando el proceso de extrapolación.

Con la fórmula de Simpson pasa algo parecido

```
nint = 1600; S1 = Simpson[nint, 0, 2 Pi];
```

Exacto - S1

3.2628781×10^{-7}

```
nint = 800; S2 = Simpson[nint, 0, 2 Pi];
```

Exacto - S2

$5.22345133 \times 10^{-6}$

```
nint = 2400; S3 = Simpson[nint, 0, 2 Pi];
```

Exacto - S3

6.444541×10^{-8}

Exacto - $\left(S1 + \frac{S1 - S2}{2^4 - 1} \right)$

-1.8975×10^{-10}

ANEXO III

Muestra de uno de los trabajos realizados a lo largo del curso por parte de un grupo de alumnos

La Integral de línea y Teorema de Riemann-Green

Ales Manzanas Carbajo y Alberto Veloso Aguilar

17 de mayo de 2010

Índice general

1. Conceptos Previos	2
1.1. Concepto de Integral	2
1.2. Concepto de derivada y derivada parcial	2
2. Curvas Parametrizadas	3
2.1. Ejemplo de parametrización de una curva	4
3. Introduccion a la Integral de Línea	6
4. Caminos e Integrales de Línea	7
4.1. Ejemplo de una integral de línea	8
5. Propiedades fundamentales de las integrales de línea	10
5.1. Comportamiento de una integral de línea frente a un cambio de parámetro	11
5.2. Demostración	12
6. Integrales de línea de campos escalares	13
6.1. Ejemplos de una integral de línea de campo escalar . .	14
7. Integrales de línea de campos vectoriales	16
7.1. Ejemplo de una integral de línea de campos vectoriales	17
8. Integrales de línea con respecto a la longitud de arco	18
8.1. Ejemplo de una integral de línea con respecto a la longitud de arco	19
9. Teorema de Riemann-Green	20
10. Demostracion Teorema de Riemann-Green	21
11. Aplicaciones Teorema de Riemann-Green	24
11.1. Cálculo de Integrales Curvilíneas	24
11.1.1. Ejemplos de cálculo de integrales curvilíneas	24

Capítulo 1

Conceptos Previos

1.1. Concepto de Integral

Concepto de las matemáticas avanzadas, tanto en el campo del cálculo como en el del análisis matemático. Básicamente, una integral es una suma de infinitos sumandos, infinitamente pequeños. Se conocen hasta ahora una gran variedad de técnicas y métodos para resolverlas.

1.2. Concepto de derivada y derivada parcial

La derivada de una función de una variable mide la rapidez de cambio de la variable dependiente respecto a la variable independiente. Con funciones de dos variables "x" e "y" es posible medir dos cambios: uno según cambia "y" dejando la variable "x" fija y otro según cambia "x", dejando la variable "y" fija. Si se deja variar sólo a "x", dejando a "y" fija y poniendo de condición que "y = b", en donde "b" es una constante, entonces, se trata de una función de una sola variable "x", a saber " $g(x)=f(x,b)$ ". Si "g" tiene una derivada en "a" entonces la llamamos la derivada parcial de "f" con respecto a "x" en "(a,b)". De forma análoga podemos hacerlo para "y" variable y "x" fija.

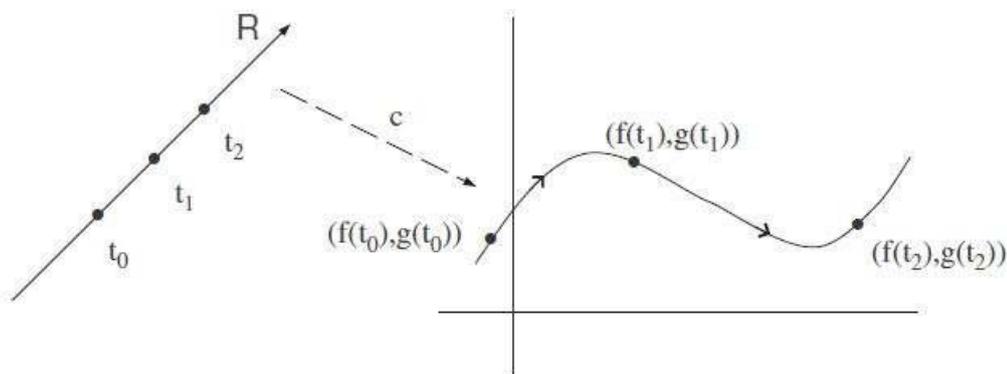
Capítulo 2

Curvas Parametrizadas

A menudo resultará de interés ver una cierta gráfica como si fuese el rastro que deja un móvil que se desplaza por el plano. Esto puede hacerse mediante las llamadas curvas parametrizadas.

$$C \equiv \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}, t \in [a, b].$$

A t se le llama parámetro de la curva, y puede resultar útil pensar en él como en el tiempo.



Es importante que se especifique el intervalo de definición del parámetro, pues en caso contrario se pasará a restringirse a una región u otra de la curva. Cuando no se especifique nada, se dará por entendido que el parámetro puede tomar cualquier valor real para el que estén definidas $f(t)$ y $g(t)$. Entonces, en cada instante la partícula móvil tendrá unas coordenadas $(x, y) = (f(t), g(t))$. Obsérvese que a medida que se van tomando t mayores, nos vamos desplazando según un cierto sentido sobre la curva C . Este sentido de

recorrido se llama orientación de la curva C . Para llevar lo explicado hasta ahora a la práctica se procede a realizar un ejemplo.

2.1. Ejemplo de parametrización de una curva

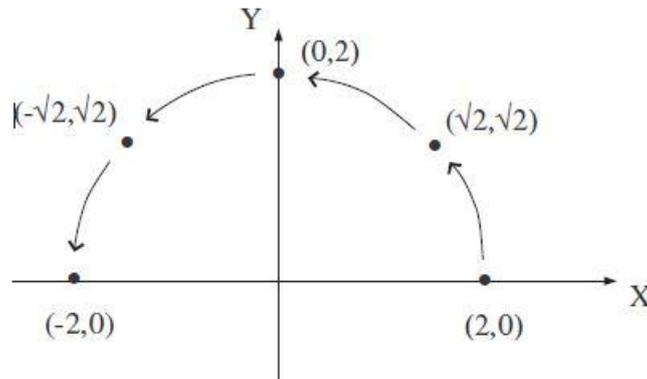
Consideremos la curva parametrizada C dada por las ecuaciones siguientes:

$$C \equiv \begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi].$$

Para poder hacerse una idea de su forma se procede a dar valores al parámetro t , obteniéndose así una tabla como la siguiente:

t	(x, y)
0	(2, 0)
$\pi/4$	$(\sqrt{2}, \sqrt{2})$
$\pi/2$	(0, 2)
$3\pi/4$	$(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$
π	(-2, 0)

Representando las parejas de valores (x, y) resulta la siguiente figura:



Llegando a completar la circunferencia si se diesen valores hasta 2π .

Este proceso no es posible en todos los casos; no siempre se puede despejar el parámetro para obtener una ecuación $y = y(x)$, es decir, no toda curva parametrizada C es globalmente el gráfico de una función $y = y(x)$. Como ejemplo tenemos la curva de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} x = \frac{e^t}{\cos(t)} \\ Y = t^2 \sin(t) \end{cases}$$

Lo que sí se puede hacer siempre es escribir una función arbitraria $y = y(x)$ como una curva parametrizada. Sólo hay que poner:

$$\begin{cases} x=t \\ y=y(t) \end{cases}$$

Ahora se expondrá un ejemplo sobre curvas que no pueden ser parametrizadas de forma sencilla

Consideremos la parábola $4x^2 + y = 4$. De la ecuación resulta $f(x) = 4(1 - x^2)$ que según se ha explicado anteriormente, una parametrización sería:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 4(1 - t^2) \end{cases}$$

Capítulo 3

Introducción a la Integral de Línea

En este tipo de integrales, el intervalo $[a, b]$ se reemplaza por una curva en el espacio de n -dimensiones definida por una función vectorial α , y el integrando es un campo vectorial f definido y acotado en esa curva. La integral que resulta se llama integral de línea, integral curvilínea o integral de contorno, y se emplea para ella la notación:

$$\int f(x)dx$$

O algún otro símbolo parecido. El punto intermedio en la integral es usado para indicar el producto interior de dos vectores. La curva se llama camino de integración. El uso de este tipo de integral es común en el campo de la Física.

Capítulo 4

Caminos e Integrales de Línea

Antes de definir las integrales de línea recordemos la definición de curva. Sea α una función vectorial definida en un intervalo cerrado finito. Cuando t va tomando los valores de J , la función $\alpha(t)$ describe un conjunto de puntos en el espacio de n -dimensiones llamado gráfica de la función. Si α es continua en J la gráfica se llama curva; con mayor precisión es la curva descrita por α . Al estudiar integrales de línea es de interés no solo el conjunto de puntos de una curva sino la manera en que la curva ha sido originada, es decir la función α . Esta función recibe por nombre camino continuo, que se definirá a continuación.

Sea $J = [a, b]$ un intervalo cerrado finito de R^1 . Una función $\alpha: J \rightarrow R^n$ continua en J se llama camino continuo en el espacio de n -dimensiones. El camino se llama regular si existe la derivada α' y es continua en el intervalo abierto (a, b) . El camino se llama regular a trozos si el intervalo $[a, b]$ puede descomponerse en un número finito de subintervalos en cada uno de los cuales el camino es regular.

Una vez definido el camino se define la integral de línea.

Sea α un camino regular a trozos en el espacio de n -dimensiones definido en un intervalo $[a, b]$, y sea f un campo vectorial definido y acotado sobre la gráfica de α . La integral de línea de f a lo largo de α se representa con el símbolo $\int f, dx$ y se define por:

$$\int f(x)dx == \int_a^b f[\alpha(t)]\alpha'(t)dt$$

Siempre que la integral del segundo miembro exista, bien como integral propia o integral impropia.

Si C representa la Gráfica de α , la integral de línea $\int f(x)dx$ también se representa por $\int_C f(x)dx$ y se llama integral de f a lo largo de C . Si $a = \alpha(a)$ y $b = \alpha(b)$ representan los puntos extremos de C , a veces la integral de línea se expresa poniendo $\int_a^b f$ o $\int_a^b f dx$ y se denomina integral de línea de f desde "a" hasta "b" a lo largo de α . Cuando se use la notación $\int_a^b f$ deberá tenerse en cuenta que la integral no depende solamente de los extremos "a" y "b", sino también el camino α que los une.

Cuando $a=b$ el camino se llama cerrado. A menudo el símbolo $\oint f$ se usa para indicar la integración a lo largo de un camino cerrado. Cuando f y α se expresan en función de sus componentes, a saber:

$$f = (f_1, \dots, f_n) \quad y \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

La integral del segundo miembro de la definición de la integral de línea ($\alpha'(t)dt$) se convierte en suma de integrales

$$\sum_{K=1}^n \int_a^b f_k[\alpha(t)]\alpha'_k(t)dt$$

En este caso la integral de línea también se pone en la forma $\int f_d\alpha_1 + \dots + f_n d\alpha_n$. En el caso de dos dimensiones ordinariamente el camino *alpha* se define con un par de ecuaciones paramétricas,

$$x = \alpha_1(t), \quad y = \alpha_2(t)$$

Y la integral de línea $\int_C f_1 dx + f_2 dy$ o bien $\int_C f_1(x, y)dx + f_2(x, y)dy$. En tres dimensiones sería igual, pero añadiendo la coordenada Z .

En el siguiente ejemplo se resolverá una integral de línea y además se comentará una de las propiedades de la integral de línea que consiste en que el valor de la integral es independiente de la representación paramétrica utilizada para la curva.

4.1. Ejemplo de una integral de línea

Sea f un campo vectorial de dos dimensiones dado por:

$$f(x, y) = \sqrt{y}'i + (x^3 + y)j$$

Para todo (x, y) con $y \geq 0$. Calcular la integral de línea de f desde $(0,0)$ a $(1,1)$ a lo largo de cada uno de los siguientes caminos:

1. La recta de ecuaciones paramétricas $x = t \quad y = t \quad 0 \leq t \leq 1$
2. El camino de ecuaciones paramétricas $x = t^2 \quad y = t^3 \quad t \leq 1$

Para el camino de la parte 1 tomamos $\alpha(t) = ti + tj$. Entonces $\alpha'(t) = i + j$ y $f[\alpha(t)] = \sqrt{t} i + (t^3 + t)j$. Por consiguiente el producto interior de $f[\alpha(t)]$ por $\alpha'(t)$ es igual a $\sqrt{t} + t^3 + t$ y encontramos

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} f dx = \int_0^1 (\sqrt{t} + t^3 + t) dt = \frac{17}{12}$$

Para el camino de la parte 2 tomamos $\alpha(t) = t^2i + t^3j$. Por consiguiente $f[\alpha(t)]\alpha'(t) = 2t^{\frac{5}{2}} + 3t^8 + 3t^5$.

Así que

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} f dx = \int_0^1 (2t^{\frac{5}{2}} + 3t^8 + 3t^5) dt = \frac{59}{42}$$

Estos ejemplos ponen de manifiesto que la integral desde un punto a otro puede depender del camino que los une.

Ahora si se calcula la parte 2 una vez más utilizando la misma curva pero con representación paramétrica distinta podrá comprobarse lo dicho antes referido a que el valor de una integral de línea no varía según la representación paramétrica usada. Dicha curva podrá representarse con la función:

$$\beta(t) = ti + t^{\frac{3}{2}}, \quad \text{donde } 0 \leq t \leq 1$$

Esto conlleva a la relación:

$$f[\beta(t)]\beta'(t) = (t^{\frac{3}{4}}i + (t^3 + t^{\frac{3}{2}})j)(i + \frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}j) = t^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}t^{\frac{7}{2}} + \frac{3}{2}t^2$$

Cuya integral desde 0 a 1 es $\frac{59}{42}$, como antes. Esto comprueba que el valor de la integral es independiente de la representación paramétrica para la curva. Esta es una propiedad general de las integrales de línea que se demuestra a continuación:

Capítulo 5

Propiedades fundamentales de las integrales de línea

Al definirse en función de las integrales ordinarias, las integrales de línea comparten muchas de las propiedades de estas. Por ejemplo tienen la propiedad de linealidad respecto al integrando:

$$\int (af + bg)dx = a \int f dx + b \int g dx$$

Y la propiedad aditiva de la integración

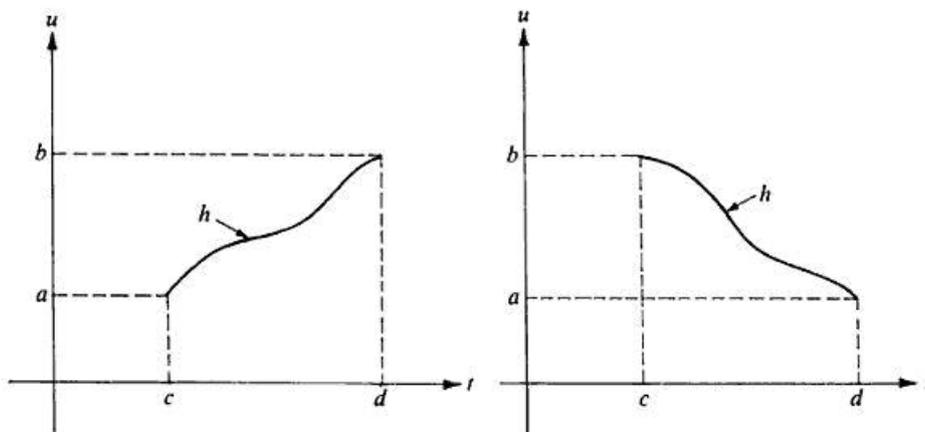
$$\int_C f dx = \int_{C_1} f dx + \int_{C_2} f dx$$

Donde las dos curvas C_1 y C_2 forman la curva C . Es decir, C es la gráfica de una función α definida en un intervalo $[a,b]$, y las curvas C_1 y C_2 son las representaciones gráficas de $\alpha(t)$ al variar en los subintervalos $[a,c]$ y $[c,b]$ respectivamente, para un C que cumple $a \leq c \leq b$

Seguidamente se estudia el comportamiento de las integrales de línea al efectuar un cambio de parámetro. Sea α un camino continuo definido en un intervalo $[a,b]$, sea u una función real derivable, de modo que u' nunca sea cero en un intervalo $[c,d]$, y tal que el recorrido de u sea $[a,b]$. Entonces la función β definida en $[c,d]$ por la ecuación

$$\beta(t) = \alpha[u(t)]$$

Es un camino continuo que tiene la misma gráfica que α . Dos caminos α y β así relacionados se llaman equivalentes. Se dice que proporcionan distintas representaciones paramétricas de la misma curva. Se dice que la función u define un cambio de parámetro.



En las siguientes figuras el cambio de parámetro definido por $u=h(t)$. En la imagen de la izquierda la función h conserva la orientación. En la imagen de la derecha invierte la orientación.

Sea C la gráfica común de los dos caminos equivalentes α y β . Si la derivada de u es siempre positiva en $[c,d]$ la función u es creciente y decimos que los dos caminos α y β originan C en la misma dirección. Si la derivada de u es siempre negativa decimos que α y β originan C en direcciones opuestas. En el primer caso se dice que " u " conserva la orientación; y en el segundo caso que u invierte la orientación, como se muestra en la imagen anterior.

El teorema siguiente demuestra que una integral de línea no varía al efectuar un cambio de parámetro que conserva la orientación. Se da por supuesto que existen las dos integrales: $\int f d\alpha$ e $\int f d\beta$

5.1. Comportamiento de una integral de línea frente a un cambio de parámetro

Si α y β son dos caminos equivalentes regulares a trozos entonces se tiene

$$\int_C f d\alpha = \int f d\beta$$

Si α y β originan C en la misma dirección

$$\int_C f d\alpha = - \int f d\beta$$

Si α y β originan C en direcciones opuestas

$$\int_C f d\alpha = \int f d\beta$$

5.2. Demostración

Basta demostrar el teorema para caminos regulares; luego se aplica la propiedad aditiva con respecto al camino de integración para deducir el resultado para caminos regulares a trozos.

La demostración es la aplicación de la regla de la cadena. Los caminos α y β están ligados por una relación de la forma $\beta(t) = \alpha[u(t)]$, estando u definida en un intervalo $[c,d]$ y α en un intervalo $[a,b]$. De la regla de la cadena resulta:

$$\beta'(t) = \alpha'[u(t)]u'(t)$$

Por consiguiente:

$$\int_C f d\beta = \int_c^d f[\beta(t)]\beta'(t)dt = \int_c^d f(\alpha[u(t)])\alpha'[u(t)]u'(t)dt$$

En la última integral se realiza la sustitución $v=u(t)$, $dv=u'(t)$ y se obtiene que:

$$\int_C f d\beta = \int_{u(c)}^{u(d)} f(\alpha(v))\alpha'(v)dv = \pm \int_a^b f(\alpha(v))\alpha'(v)dv = \pm \int_C f d\alpha$$

En donde se utiliza el signo $+$ si $\alpha = u(c)$ y $b = u(d)$, y el signo $-$ si $\alpha = u(d)$ y $b = u(c)$. El primer caso se presenta si α y β originan C en la misma dirección. El segundo si originan C en direcciones opuestas.

Capítulo 6

Integrales de línea de campos escalares

Supongamos una función definida en el plano, $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, que denotaremos $F(x, y)$, y una curva parametrizada C , dada por las ecuaciones mostradas en el apartado 4.

A una función como $F(x, y)$ se la llama campo escalar, porque se puede pensar que nos dice, para cada punto (x, y) del plano, cuál es el valor de una magnitud numérica (o escalar) definida sobre el plano. Por ejemplo, podría darnos la temperatura en cada punto de una plancha metálica.

Se llama integral de línea del campo $F(x, y)$ a lo largo de la curva C , entre los puntos $P = (x_p, u_p)$ y $Q = (x_q, u_q)$ y se denota por $\int_C F(s)ds$ a la integral de una variable dada por:

$$\int_{tP}^{tQ} F(f(t), g(t)) \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2} dt$$

En esta expresión, t_p, t_q son los valores del parámetro "t" para los cuales la curva pasa por $P = (x_p, u_p)$ y $Q = (x_q, u_q)$, respectivamente.

Si cambiamos la orientación de C , la integral anterior cambia de signo, ya que:

$$\int_{tQ}^{tP} = - \int_{tP}^{tQ}$$

Se considera que si la curva C pasara por alguno de estos puntos para más de un instante t , no se sabría cuál de esos instantes tomar para calcular la integral. Por eso, se supondrá que las curvas parametrizadas con las que se trabaja no tienen autointersecciones (se dice a veces que son curvas simples). Por ejemplo, una circunferencia.

$$C \equiv \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi],$$

no tiene autointersecciones, pero la curva (que tiene la gráfica de un 8)

$$C \equiv \begin{cases} x = \sin 2t \\ y = \cot s \end{cases}, t \in [0, 2\pi],$$

tiene una autointersección en $(x, y) = (0, 0)$. Pasa por este punto para los valores

$$t = \frac{\pi}{2} \quad y \quad t = \frac{3\pi}{2}$$

6.1. Ejemplos de una integral de línea de campo escalar

A continuación se muestran dos ejemplos de integrales de línea de campo escalar

1. Se procede a evaluar la integral de línea del campo $F(x,y) = \frac{x^3}{y}$ a lo largo de la parábola $y = \frac{x^2}{2}$ entre los puntos $(0,0)$ y $(2,2)$

Lo primero que hay que hacer es parametrizar la parábola (recuérdese el método citado anteriormente para las curvas no parametrizables4),

$$C \equiv \begin{cases} x = t \\ y = \frac{t^2}{2} \end{cases}$$

es decir, tomar $f(t) = t$ y $g(t) = \frac{t^2}{2}$. Los valores del parámetro t para los cuales la parábola pasa por $(0,0)$ y $(2,2)$ son, respectivamente, $t=0$, $t=2$. Ahora, ya podemos aplicar la fórmula de la integral de campo descrita anteriormente.

$$\int_{t=0}^{t=2} F\left(t, \frac{t^2}{2}\right) \sqrt{1+t^2} dt = \int_0^2 \frac{t^3}{\frac{t^2}{2}} \sqrt{1+t^2} dt = \int_0^2 2t \sqrt{1+t^2} dt$$

$$\int_C F(s) ds = \frac{2}{3} (1+t^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 = \frac{2}{3} (\sqrt{75} - 1)$$

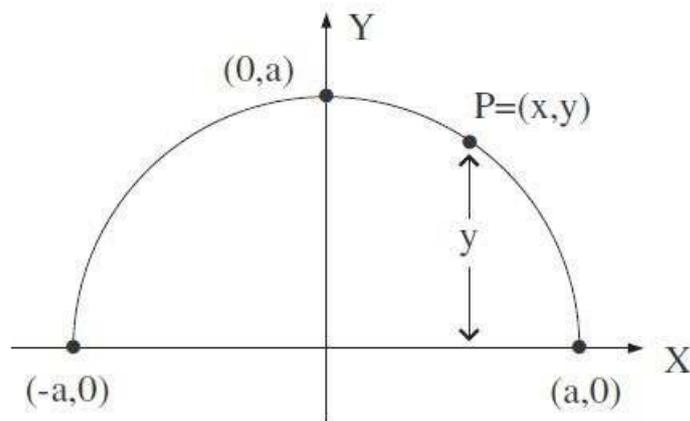


Figura 6.1: Representación del alambre

2. Un alambre tiene la forma de una semicircunferencia de radio a . La densidad lineal de masa en un punto P es directamente proporcional a la distancia de P a la recta que pasa por los extremos del alambre, y se quiere determinar cuál es la masa total.

El primer paso consiste en situar el alambre en un sistema coordenado sobre el plano, como en la figura: Ahora, obsérvese que la densidad puede interpretarse como un campo escalar: lo que nos dicen es que en cada punto $P = (x, y)$ de la curva que describe el alambre, la densidad es:

$$\lambda(x, y) = ky$$

(donde k es la constante de proporcionalidad), ya que y es la distancia de P a la recta que pasa por los extremos. Calcular la masa total equivale a sumar la densidad sobre todos los puntos de la curva, y así lo que queremos calcular es $m = \int_C \lambda(s) ds$, donde C es la curva que describe el alambre, la semicircunferencia de radio a . Una parametrización para C es:

$$C \equiv \begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi].$$

Esta parametrización tiene orientación antihoraria, es decir, comienza en $(a, 0)$ para $t = 0$ y pasa por $(-a, 0)$ en $t = \pi$. Aplicando la definición de integral de línea:

$$\begin{aligned} m &= \int_C \lambda(s) ds = \int_0^\pi k a \sin t \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t} dt = k a^2 \int_0^\pi \sin t dt = \\ &= -k a^2 (\cos t) \Big|_0^\pi = 2k a^2 \end{aligned}$$

Capítulo 7

Integrales de línea de campos vectoriales

Una aplicación diferenciable $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se dice que es un campo vectorial de n dimensiones. Normalmente se trabajará con las dimensiones 2 y 3. Un campo F asigna un vector (de \mathbb{R}^n) a cada punto de \mathbb{R}^n con el objetivo de que la orientación de esos vectores no sufra variaciones bruscas.

Primero se describirá la situación de $n = 2$ dimensiones. La acción del campo F será descrita como $F(x, y) = F_1(x, y)i + F_2(x, y)j$ o como $F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$, indistintamente. Ahora, al igual que con las integrales de campos escalares, dada una curva parametrizada:

$$C \equiv \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}, t \in [a, b]$$

podemos considerar la integral de F a lo largo de C .

Se llama integral de línea del campo $F(x, y)$ a lo largo de la curva C , entre los puntos $P = (x_p, y_p)$ y $Q = (x_q, y_q)$ a la integral:

$$\int_{tP}^{tQ} F_1(x, y)dx + \int_{tP}^{tQ} F_2(x, y)dy$$

Simplificando la expresión anterior nos quedaría la integral siguiente:

$$\int_C F_1(x, y)dx + F_2(x, y)dy$$

Nuevamente t_p y t_q son los valores del parámetro t para los cuales la curva pasa por $P = (x_p, y_p)$ y $Q = (x_q, y_q)$, respectivamente. Obsérvese que la integral de línea de campo descrita anteriormente tiene los extremos expresados en función del parámetro t . Por tanto, habrá que hacer un cambio de variable para convertir dx y dy en dt . La táctica para conseguirlo, es la

misma que se emplea en los cambios de variable de las integrales usuales: diferenciando las ecuaciones paramétricas de C descritas anteriormente en este mismo apartado para obtener dx y dy en función de dt .

$$\begin{cases} dx=f'(t)dt \\ dy=g'(t)dt \end{cases}$$

A continuación se mostrará un ejemplo.

7.1. Ejemplo de una integral de línea de campos vectoriales

Evalúese la integral de línea del campo $F(x, y) = (xy, x^2)$ a lo largo de la curva C con las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$C \equiv \begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = 3t^2 - 2t \end{cases}, t \in [1, \frac{5}{3}]$$

En este caso, tenemos que

$$F_1(x, y) = xy, F_2(x, y) = x^2$$

y, por tanto, lo que queremos es $\int_C xydx + x^2dy$. De las ecuaciones de C resulta, según las ecuaciones paramétricas descritas anteriormente para obtener dx y dy en función de dt :

$$\begin{aligned} dx &= (3t-1)'dt = 3dt \\ dy &= (6t-2)dt \end{aligned}$$

, donde sustituyendo

$$\begin{aligned} \int_C xydx + x^2dy &= \int_1^{5/3} ((3t - 1)(3t^2 - 2t)3t + (3t - 1)^2(6t - 2))dt = \\ &= \int_1^{5/3} (81t^3 - 81t^2 + 24t - 2)dt = 58 \end{aligned}$$

Capítulo 8

Integrales de línea con respecto a la longitud de arco

Sea α un camino con derivada α' continua en un intervalo $[a, b]$. La gráfica de α es una curva rectificable. La correspondiente función longitud de arco "s", está dada por la integral

$$s(t) = \int_a^t \|\alpha'(u)\| du$$

La derivada de la longitud de arco tiene por valor

$$s'(t) = \|\alpha'(t)\|$$

Sea φ un campo escalar definido u acotado en C , la grafica de α . La integral de línea de φ con respecto a la longitud de arco a lo largo de C se presenta con el símbolo $\int_C \varphi ds$ y se define por:

$$\int_C \varphi ds = \int_a^b \varphi[\alpha(t)] s'(t) dt$$

Siempre que exista la integral del segundo miembro.

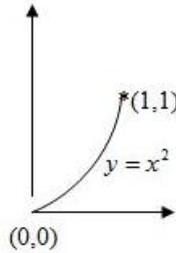
Consideremos ahora un campo escalar φ dado por $\varphi[\alpha(t)] = f[\alpha(t)]T(t)$ que es el producto interior de un campo vectorial f , definido por C , por el vector tangente unitario $T(t) = (\frac{d\alpha}{ds})$. En este caso la integral de línea $\int_C \varphi ds$ coincide con esta otra, $\int_C f d\alpha$ debido a:

$$f[\alpha(t)]\alpha'(t) = f[\alpha(t)]\frac{d\alpha}{ds}\frac{ds}{dt} = f[\alpha(t)]T(t)s'(t) = \varphi[\alpha(t)]s'(t)$$

Cuando f representa una velocidad, el producto interior fT es el componente tangencial a la velocidad, y la integral de línea $fT ds$ es la integral de flujo de f a lo largo de C . Cuando C es una curva cerrada la integral de flujo es la circulación de f a lo largo de C . Estas denominaciones se usan corrientemente en la teoría del flujo de fluidos.

8.1. Ejemplo de una integral de línea con respecto a la longitud de arco

Evalúe $\int_C 2x ds$, donde C es la curva descrita por el arco de la parábola $y = x^2$ de $(0,0)$ a $(1,1)$



Parametrizando $y = x^2$ $x=x$, en el parámetro x ($y'(x) = 2x$ $x'(x) = 1$)

$$\begin{aligned}\int_C 2x ds &= \int_0^1 2x \sqrt{1 + (2x)^2} dx = \int_0^1 2x \sqrt{1 + 4x^2} dx \\ \frac{1}{4} \int_0^1 (1 + 4x^2)^{\frac{1}{2}} &= \frac{1}{4} \frac{2}{3} (1 + 4x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{5\sqrt{5} - 1}{6}\end{aligned}$$

Capítulo 9

Teorema de Riemann-Green

El teorema de Riemann-Green establece la relación entre una integral de línea alrededor de una curva C cerrada y simple, y una integral doble sobre la región plana R limitada por C . Este tipo de teoremas resulta muy útil ya que dados un campo vectorial y una curva cerrada simple sobre cual hay que integrarlo, puede elegirse la posibilidad más simple entre poder integrar el campo directamente sobre la curva o bien integrar la diferencia de sus derivadas parciales cruzadas sobre un recinto que esté delimitando la curva. Por otro parte, la relación así establecida entre la integral de la línea sobre una curva y la integral doble sobre la región interior a ésta, permite a veces obtener información sobre una función o su integral en un espacio a partir del comportamiento de esta función sobre la frontera de dicho recinto.

Capítulo 10

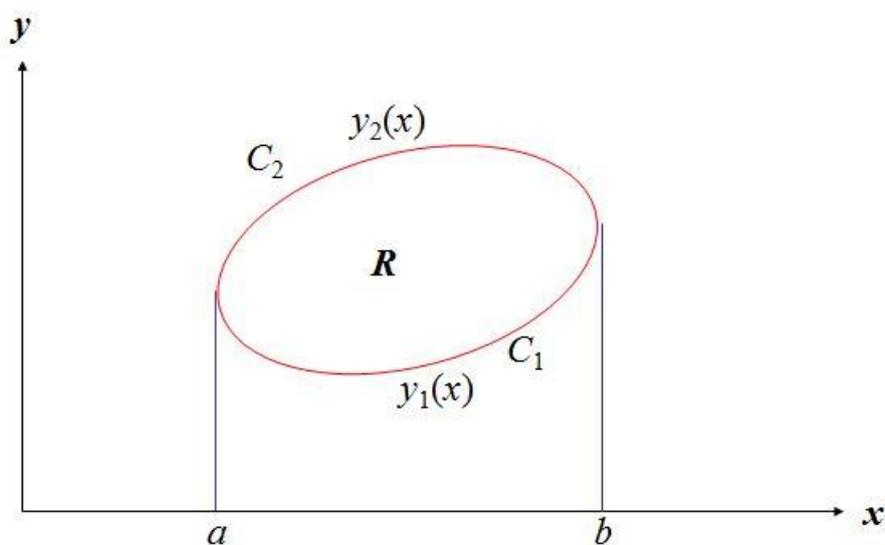
Demostración Teorema de Riemann-Green

Sea C una curva simple y cerrada, suave a trozos y orientada positivamente, y sea $F(x;y) = (P;Q)$ un campo vectorial cuyas funciones coordenadas tienen derivadas parciales continuas sobre una región abierta que contiene a la región R acotada por C . Entonces:

$$\int_C Pdx + Qdy = \iint_R \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dxdy$$

Ahora se procederá a verificar el teorema de Riemann-Green demostrando que:

1. $\int_C Pdx = - \int \int_R \left[\frac{\partial P}{\partial y} \right] dy$
2. $\int_C Qdy = \int \int_R \left[\frac{\partial Q}{\partial x} \right] dx$



Donde R es la región acotada por la curva. Para la primera parte, primero proyectamos la región R sobre el eje X.

Sea C la curva cerrada que determina la frontera de la región R.

Se forma la curva C1, descrita por la función $y_1(x)$; y la curva C2 descrita por la función $y_2(x)$.

C1 está definida por $y_1(x); a \leq x \leq b$ C2 está definida por $y_2(x); a \leq x \leq b$

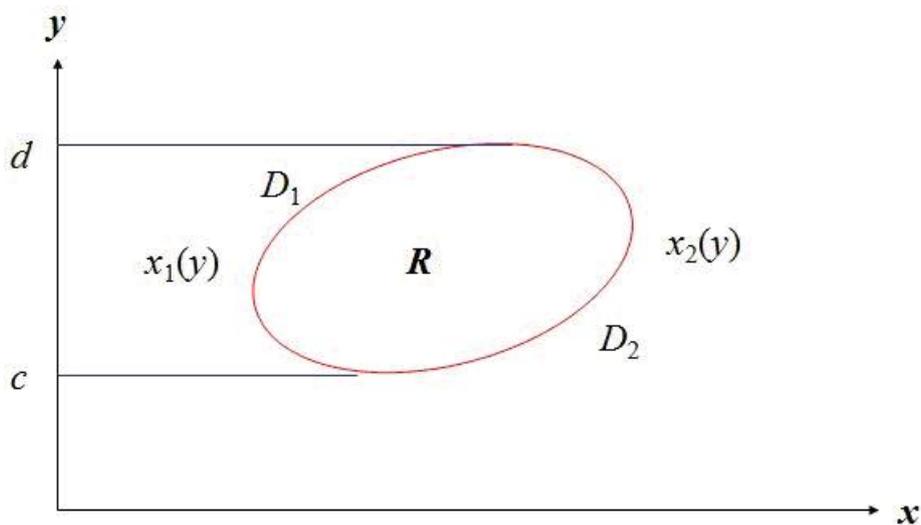
Calculando la integral siguiente:

$$\begin{aligned} \int \int_R \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy &= \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dy \right) dx = \int_a^b (P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x))) dx = \\ &= - \int_a^b (P(x, y_2(x))) dx - \int_a^b P(x, y_1(x)) dx = \oint_{C_2} P dx - \oint_{C_1} P dx = - \oint_C P dx \\ &\quad - \oint_C P dx = \int \int_R \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy \end{aligned}$$

Por lo que obtenemos que:

$$\oint_C P dx = - \int \int_R \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy$$

Ahora proyectaremos la región R sobre el eje Y



Sea C la curva cerrada que determina la frontera de la región R.

Se forma la curva D1, descrita por la función $x_1(y)$; y la curva D2 descrita por la función $x_2(y)$.

D1 está definida por $x_1(y); c \leq x \leq d$ D2 está definida por $x_2(y); c \leq x \leq d$

Ahora calculamos la otra parte de la demostración del teorema:

$$\begin{aligned} \int \int_R \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} dx dy &= \int_c^d \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} dx \right) dy = \int_c^d (Q(x_2(y), y) - Q(x_1(y), y)) dy = \\ &= \int_c^d (Q(x_2(y), y)) dy + \int_c^d Q(x_1(y), y) dy = \oint_{D_2} Q dy + \oint_{D_1} Q dy = \oint_C Q dy \end{aligned}$$

Con lo que nos queda

$$\oint_C Q dy = \int \int_R \frac{\partial Q(x, y)}{\partial y} dx dy$$

Sumando lo que nos queda, demostramos el teorema

$$\int_C P dx + Q dy = \int \int_R \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dx dy$$

Capítulo 11

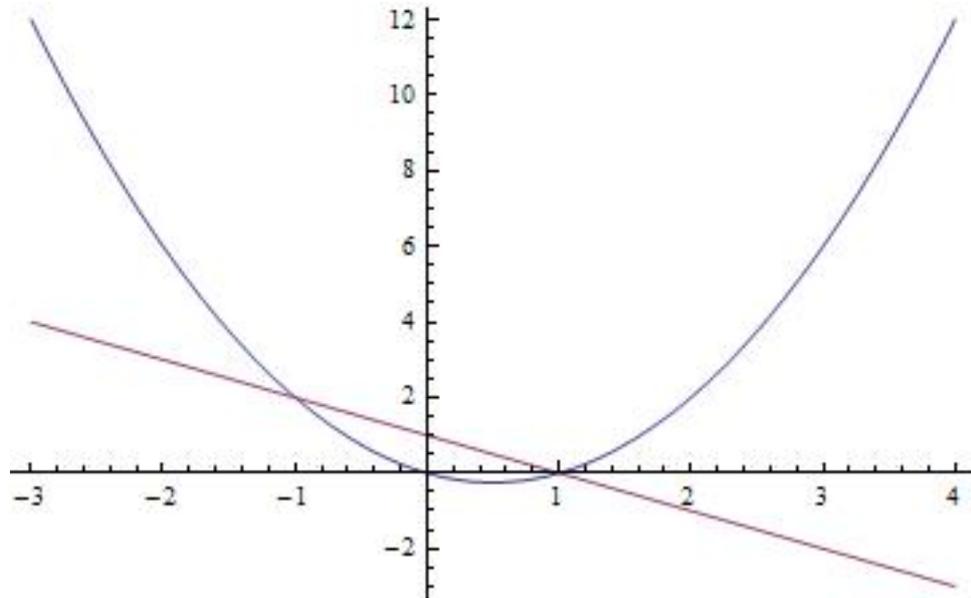
Aplicaciones Teorema de Riemann-Green

11.1. Cálculo de Integrales Curvilíneas

Una aplicación muy importante de este teorema es el cálculo de integrales curvilíneas mediante el teorema de Riemann-Green (la transformación de integrales de línea en integrales de dobles), como puede verse a continuación en este par de ejemplos:

11.1.1. Ejemplos de cálculo de integrales curvilíneas

1. Aplicar el Teorema de Riemann-Green para evaluar la integral, $\oint (5y - 4x^2)dx + (2x - 6^{2y})dy$ donde C es la curva que acota la región mostrada en la siguiente gráfica:



La ecuación del Teorema de Riemann-Green es:

$$\int_C Pdx + Qdy = \iint_R \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dx dy$$

de manera que para resolver la integral de línea cerrada por medio de este teorema, se realizará el siguiente proceso:

a) Identificar P y Q

$$P = 5y - 4x^2 \quad y \quad Q = 2x - g^{2y}$$

b) Obtener $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 5$$

c) A partir de la gráfica, plantear los límites de integración, donde claramente se aprecia que:

$$x^2 - x \leq y \leq 1 - x$$

$$-1 \leq x \leq 1$$

d) Sustituir toda esta información en la ecuación del Teorema de Riemann-Green y resolvemos la integral:

$$\begin{aligned}
\oint (5y - 4x^2)dx + (2x - 6^{2y})dy &= \int_{-1}^1 \int_{x^2-x}^{1-x} (2 - 5)dydx \\
\int_{-1}^1 \int_{x^2-x}^{1-x} -3dydx &= -3 \int_{-1}^1 [y]_{x^2-x}^{1-x} dx \\
-3 \int_{-1}^1 [1 - x - x^2 + x]dx &= -3 \int_{-1}^1 [1 - x^2]dx \\
-3 \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 &= -3 \left[1 - \frac{1^3}{3} - (-1) + \frac{(-1)^3}{3} \right] \\
-3 \left[1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} \right] &= -4
\end{aligned}$$

e) Entonces, para la curva inticada tenemos que:

$$\oint (5y - 4x^2)dx + (2x - 6^{2y})dy = -4$$

Bibliografía

<http://www.eva.com.mx/sia/ingenieria/ejercis/calculovec/mediou9.htm>

<http://www.uantof.cl/facultades/csbasicas/Matematicas/academicos/emartinez/calculo3/green.ppt>.

<http://forum.lawebdefisica.com/threads/5013-%C2%BFMe-explican-las-integrales-de-linea-y-las-integrales-cerradas>

http://galia.fc.uaslp.mx/~jvallejo/integrales_linea.pdf

http://es.wikipedia.org/wiki/Integral_de_l%C3%ADnea

<http://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:Jl9lHa4x9B4J:www.abrakadabra.com.ve/Curvas%2520en%2520el%2520espacio.doc+integral+de+linea+respecto+a+una+longitud+de+arco&cd=3&hl=es&ct=clnk&gl=es&client=firefox-a>

Calculus; Vol. 2, Tom M. Apóstol; Editorial reverté, s.a. 1977