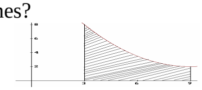
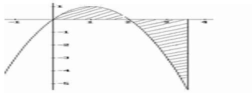
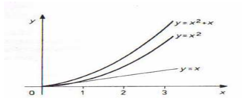
ANEXOS

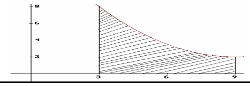
ANEXOS

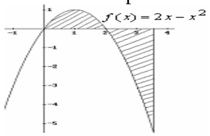
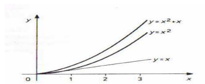
Anexo 1: Descripción del precuestionario: objetivos, tareas, ítems, descriptores, procedencia y variables.

OBJETIVOS	TAREAS	ITEMS	DESCRIPTORES	PROCEDENCIA	VARIABLES
Diagnosticar si los estudiantes logran aproximar el área bajo una curva, y cómo lo hacen a pesar de no tener una expresión algebraica que acompañe la gráfica de la función. Comprobar si son capaces de proponer cotas aproximadas.	**1**. El área de la región rayada es mayor que **12** y menor que **48**. **1a** ¿Por qué? **1b** ¿Puedes dar valores más ajustados? **1c** ¿Cuáles? **1d** ¿Cómo los obtienes? 	**1** **1a** **1b** **1c** **1d**	**1.1** Existe una gráfica asociada a unos valores en el plano cartesiano. **1.2** No aparece una expresión algebraica asociada a la gráfica. **1.3** Carece de la palabra Integral. **1.4** No se puede plantear una Integral Definida. **1.5** Los valores del área son aproximados y se pide ajustarlos más.	Tarea que proviene de modificar un ejercicio del trabajo de Depool (2004).	Aproximación del área. Representación gráfica. Función positiva y continua en $[3, 9]$.
Comprobar los procedimientos utilizados por los estudiantes en el cálculo de áreas y si saben justificar cada uno de los pasos al hallar el valor numérico del área de una región bajo la curva.	**2.** Sea R, la región encerrada por la gráfica de la función $y = f(x) = 4x$ y el eje x, en el intervalo $[-2, 2]$. **2a** Dibuja la gráfica. **2b**. Calcula gráficamente el área de la región R. **2c**. Calcula la $\int_{-2}^{2} 4x\,dx$. **2d**. ¿Son iguales los dos resultados anteriores? ¿Por qué? justifica cada paso.	**2** **2a** **2b** **2c** **2d**	**2.1** Aparece la representación algebraica de la función. **2.2** Existe un intervalo. **2.3** No se tiene una gráfica asociada a la expresión algebraica. **2.4** La función es continua, creciente y acotada. **2.5** El cálculo del área requiere de conceptos básicos. **2.6** Se pide comparar y justificar los procedimientos.	Tarea extraída de modificar un ejercicio del libro de texto de Cálculo de una variable, volumen 1. Gerald L. Bradley, Kart J. Smith. Editorial Prentice Hall. Madrid (2000).	Área bajo gráficas. Representación algebraica. Función positiva y contínua en $[-2, 2]$.
Analizar la forma y el método que los estudiantes utilizan en la resolución de ejercicios sobre el cálculo de áreas.	**3.** Sea R la región entre la gráfica de $f(x) = x^2$ y el Intervalo $[0, 4]$. -Utiliza un procedimiento de aproximación para calcular el área. - Justifica tu respuesta.	**3**	**3.1** Existe una expresión algebraica**.** **3.2** Se da un intervalo. **3.3** Se pide calcular el área. **3.4** No aparece la palabra integral. **3.5** El estudiante debe justificar el procedimiento utilizado. 3.6 No se tiene la gráfica asociada a la expresión	Tarea que proviene de modificar un ejercicio del libro de texto de Cálculo Diferencial e Integral de Edwars y Penney. Cuarta Edición. Editorial Prentice Hall. México 1997.	Concepto de área como una aproximación. Representación algebraica de la función. Función positiva y continua en $[0, 4]$.
Analizar si los estudiantes hacen transferencia de los conocimientos adquiridos y si aplican algunas propiedades de la Integral Definida.	**4.** Calcula el área limitada por la función $f(x) = \int_{0}^{2} \lvert 2x - 1 \rvert \, dx$ con el eje **OX**. - Justifica tu respuesta.	**4**	**4.1** El registro algebraico presenta información implícita. **4.2** Se menciona la palabra área. **4.3** Se da una expresión algebraica. **4.4** Existe una función para integrar. **4.5** El cálculo es sencillo e involucra el área de dos triángulos rectángulos y de conceptos previos.	Ejercicio que proviene de uno similar del libro de texto de Cálculo I, 7ª Edición. Larson, R.; Hostetler, R. P.; Edwars, B. H. Pirámide. Madrid. 2002.	Propiedad de la unión de intervalos. Teorema fundamental del cálculo. Función no derivable. Representación algebraica.

Comprobar si el estudiante comprende cómo calcular el área por medio de la Integral Definida, de regiones que se encuentran por debajo del eje OX y así mismo cómo establece las relaciones con regiones que están por encima del eje OX.	**5.** Dada la siguiente gráfica, calcula el área de la región rayada. - Explica el procedimiento utilizado en el cálculo del área. - Justifica cada paso. 	**5**	**5.1** Se pide calcular el área de la región sombreada. **5.2** Aparece especificada la región positiva y la región negativa. **5.3** No aparece la palabra integral. **5.4** No se da un intervalo de integración, aun que se identifica en la gráfica. **5.5** No existe una expresión algebraica asociada a la función cuadrática. **5.6** La función que se indica es continua. **5.7** No se pide aproximar.	Tarea que proviene de modificar un ejercicio del trabajo de Depool (2004).	Área de regiones positivas y negativas. La Integral Definida como área de una región. Función continua en $[0, 3.5]$.
Determinar qué tipo de argumentos en cuanto a las formas de representación (gráfico, algebraico, numérico) que utilizan los estudiantes para justificar la propiedad aditiva de la Integral Definida.	**6.** Explique, en términos del diagrama o de otra forma, por qué $\int_0^a (x^2+x)dx = \int_0^a x^2 dx + \int_0^a x dx$ 	**6**	**6.1** Se pide justificar la propiedad aditiva de la Integral. **6.2** No se menciona la palabra integral, ni área. **6.3** Hay expresiones algebraicas y gráficas relacionadas: una recta y dos curvas. **6.4** No se pide aproximar. **6.5** No existe una región subrayada. **6.6** Las funciones son continuas.	Tarea que proviene de modificar un ejercicio de A. Orton (1983) y Depool (2004).	Propiedad aditiva de la Integral Definida. Representación gráfica y algebraica.
Analizar el nivel de la relación entre la definición del concepto y la imagen del concepto de Integral Definida.	**7.** ¿Cuál es el significado matemático de la Integral Definida de una función $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$?	**7**	**7.1** Se da una pregunta abierta. **7.2** Aparece una función genérica. **7.3** Se da un intervalo genérico. **7.4** Se pide el concepto de Integral Definida. **7.5** No se da representación gráfica.	Situación que proviene de una de las tareas de Czarnocha., Dubinsky, et al.,(2000); Depool (2004); y del estudio de los libros de texto.	Definición del concepto de Integral Definida.
Analizar la relación que establecen los estudiantes entre la imagen del concepto y la definición del concepto de la Integral Definida.	**8**. En los apartados **8a**, **8b** y **8c**, que aparecen a continuación, decide si la afirmación es verdadera o falsa. En caso de ser falsa, explica por qué o muestra un contraejemplo. **8a** Si $F'(x) = G'(x)$ en el intervalo $[a, b]$, entonces $F(b)-F(a)=G(b)-G(a)$. **8b** Si f es continua en $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$. **8c** $\int_{-1}^{1} x^{-2}\,dx \left[-x^{-1}\right]_{-1}^{1} = (-1)-1=-2$	**8** **8a** **8b** **8c**	**8.1** Se dan tres proposiciones para clasificarlas como verdaderas o falsas. **8.2** Aparece una representación algebraica en cada una de ellas. **8.3** Se pide justificar en caso de ser falsa la proposición. **8.4** Se puede justificar la respuesta por medio de un contraejemplo (en algunos casos). **8.5** Existe una discontinuidad y la función que aparece integrada es no acotada.	Ejercicio que proviene de modificar uno similar del libro de texto de Cálculo I, 7ª Edición. Larson, R.; Hostetler, R. P.; Edwars, B. H. Editorial Pirámide. Madrid. 2002.	Relación entre la función primitiva y el Teorema Fundamental del Cálculo. Teorema: Continuidad implica integrabilidad Continuidad y discontinuidad de funciones.

Anexo 2: Descripción del cuestionario definitivo: objetivos, tareas, ítems, procedencia y variables.

OBJETIVO	TAREAS	ITEM	PROCEDENCIA	VARIABLE
Diagnosticar si los estudiantes logran aproximar el área de una región bajo una curva, y cómo lo hacen a pesar de no tener una expresión algebraica que acompañe la gráfica de la función. Comprobar si son capaces de proponer cotas más aproximadas.	**1**. El área de la región rayada es mayor que **12** y menor que **48**. **1a** ¿Por qué? **1b** ¿Puedes dar valores más ajustados? **1c** ¿Cuáles? **1d** ¿Cómo los obtienes? 	**1** **1a** **1b** **1c** **1d**	Tarea que proviene de modificar un ejercicio del trabajo de Depool (2004).	Sumas de Riemann. Aproximación del área. Representación gráfica. Función positiva y continua en $[3, 9]$.
Comprobar los procedimientos utilizados por los estudiantes en el cálculo de áreas de gráficas y como justifican cada uno de los pasos al hallar el valor numérico del área de una región bajo la gráfica, y mediante la Integral Definida.	**2.** Sea R, la región encerrada por la gráfica de la función $f(x) = 4x$ y el eje x, en el intervalo $[-2, 2]$. **2a** Dibuja la gráfica. **2b**. Calcula gráficamente el área de la región R. **2c**. Calcula la $\int_{-2}^{2} 4x\,dx$. **2d**. ¿Son iguales los dos resultados anteriores? Justifica cada paso.	**2** **2a** **2b** **2c** **2d**	Tarea extraída de modificar un ejercicio del libro de texto de Cálculo de una variable, volumen 1. Gerald L. Bradley, Kart J. Smith. Editorial Prentice Hall. Madrid (2000).	Área bajo gráficas. Representación algebraica. Función positiva y continua en $[-2, 2]$.
Analizar la forma y el método que los estudiantes utilizan en la resolución de ejercicios sobre el cálculo de áreas.	**3.** Sea R la región entre la gráfica de la función $f(x) = x^2$ y el Intervalo $[0, 4]$. -Utiliza particiones para aproximar el valor del área de la región R. -Justifica tu respuesta.	**3**	Tarea que proviene de modificar un ejercicio del libro de texto de Cálculo Diferencial e Integral de Edwars y Penney. Cuarta Edición. Editorial Prentice Hall. México 1997.	Concepto de área como una aproximación. y de área como límite de una suma. Representación algebraica de la función. Función positiva y continua en $[0, 4]$.
Analizar si los estudiantes hacen transferencia de los conocimientos adquiridos a los nuevos y si aplican algunas propiedades de la Integral Definida.	**4.** Calcula el área limitada por la gráfica de la función $f(x)=\|2x-1\|$, en el intervalo $[0, 2]$ y el eje x. -Justifica tu respuesta.	**4**	Ejercicio que proviene de uno similar del libro de texto de Cálculo I, 7ª Edición. Larson, R.; Hostetler, R. P.; Edwars, B. H. Editorial Pirámide. Madrid. 2002.	Propiedad de la unión de intervalos: La Integral Definida de un valor absoluto. Teorema fundamental del cálculo: Regla de Barrow. Representación algebraica. -Función no derivable.

Comprobar si el estudiante comprende cómo calcular el área por medio de la Integral Definida, de regiones que se encuentran por debajo del eje OX y así mismo cómo establece las relaciones con regiones que están por encima del eje OX.	**5.** Dada la siguiente gráfica, calcula por aproximaciones el área de la región rayada. Explica el procedimiento utilizado en el cálculo del área. Justifica cada paso. 	**5**	Tarea que proviene de modificar un ejercicio del trabajo de Depool (2004).	-Área de regiones positivas y negativas. -La Integral Definida como área de una región. -Función continua en $[0, 3.5]$.
Determinar que tipo de argumentos en cuanto a las formas de representación (gráfico, algebraico, numérico) utilizan los estudiantes para justificar la propiedad aditiva de la Integral Definida.	**6.** Explica, en términos del gráfico, porqué $\int_0^a (x^2 + x)dx = \int_0^a x^2 dx + \int_0^a x dx$ 	**6**	Tarea que proviene de modificar un ejercicio de A. Orton (1983) y Depool (2004).	-Propiedad de linealidad de la Integral Definida. -Representación gráfica y algebraica.
Analizar la relación que establecen los estudiantes entre la imagen del concepto y la definición del concepto a partir de la condición suficiente que la continuidad implica integrabilidad.	**7.** En los apartados **7a**, **7b** y **7c**, que aparecen a continuación, decide si la afirmación es verdadera o falsa. En caso de ser falsa, explica por qué o muestra un contraejemplo. **7a** Si $F'(x) = G'(x)$ en el intervalo $[a, b]$,entonces $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$. **7b** Si f es continua en $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$. **7c** $\int_{-1}^{1} x^{-2} dx = \left[-x^{-1}\right]_{-1}^{1} = (-1) - 1 = -2$	**7a** **7b** **7c**	Ejercicio que proviene de modificar uno similar del libro de texto de Cálculo I, 7ª Edición. Larson, R.; Hostetler, R. P.; Edwards, B. H. Editorial Pirámide. Madrid. 2002.	Relación entre la función primitiva y el Teorema Fundamental del Cálculo. Teorema: Continuidad implica integrabilidad Continuidad y discontinuidad de funciones.
Analizar el nivel de la relación entre la definición del concepto y la imagen del concepto de Integral Definida que tienen los estudiantes universitarios.	**8.** **¿**Cuál es el significado matemático de la Integral Definida de una función $y = f(x)$ en un intervalo $[a, b]$?	**8**	Situación que proviene de una de las tareas similares propuestas por Czarnocha; Dubinsky, et al., (2000); Depool (2004); y del estudio de los libros de texto.	Definición del concepto de Integral Definida.

Anexo 3: Análisis de los cuestionarios.

ALUMNO / RESPUESTA	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11
1a	**C**	**C**	**IN**	**IN**	**I**	**IN**	**IN**	**C**	**C**	**IN**	**C**
1b	**C**	**C**	**C**	**IN**	**I**	**IN**	**C**	**C**	**C**	**C**	**C**
1c	**I**	**IN**	**IN**	**IN**	**NR**	**NR**	**IN**	**I**	**IN**	**OR**	**C**
1d	**IN**	**IN**	**IN**	**IN**	**NR**	**NR**	**IN**	**IN**	**IN**	**IN**	**C**
2a	**C**	**C**	**C**	**C**	**C**	**C**	**C**	**C**	**C**	**C**	**C**
2b	**C**	**C**	**C**	**IN**	**I**	**NR**	**IN**	**IN**	**C**	**C**	**C**
2c	**C**	**C**	**I**	**I**	**C**	**C**	**C**	**C**	**C**	**I**	**C**
2d	**C**	**C**	**I**	**NR**	**I**	**NR**	**C**	**I**	**C**	**I**	**C**
3	**IN**	**IN**	**IN**	**IN**	**I**	**IN**	**IN**	**IN**	**IN**	**IN**	**C**
4	**OR**	**OR**	**I**	**I**	**I**	**I**	**C**	**OR**	**OR**	**C**	**I**
5	**I**	**IN**	**IN**	**I**	**I**	**I**	**IN**	**I**	**IN**	**I**	**IN**
6	**I**	**I**	**I**	**I**	**IN**	**I**	**C**	**I**	**I**	**I**	**OR**
7a	**C**	**I**	**C**	**C**	**C**	**C**	**C**	**I**	**C**	**I**	**I**
7b	**C**	**I**	**I**	**C**	**C**	**C**	**C**	**I**	**IN**	**I**	**C**
7c	**IN**	**NR**	**I**	**I**	**IN**	**NR**	**IN**	**I**	**I**	**IN**	**IN**

Tabla 1. Tipos de Respuestas dadas por los alumnos al resolver el cuestionario.

Convenciones: C: *Correcta.* ***I:*** *Incorrecta.* ***IN:*** *Inconclusa.* ***OR:*** *Otra Respuesta.* ***NR:*** *No Responde.*

ALUMNO / RESPUESTA	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11
1a	**JC**	**JC**	**JP**	**JI**	**JI**	**JP**	**JP**	**JC**	**JC**	**JP**	**JC**
1b			**JP**			**JP**	**JP**		**JC**	**JI**	**JP**
1c		**JI**	**JP**				**JP**	**JI**	**JP**	**OJ**	
1d	**JP**	**JI**	**JP**	**JI**	**NJ**	**NJ**	**JP**	**JP**	**NJ**	**JP**	**JC**
2a		**JC**								**JC**	
2b	**JC**	**JC**	**JC**	**JP**			**JP**	**JP**	**JC**	**JC**	**JC**
2c		**JC**						**JP**	**JC**		**JC**
2d	**JP**	**JP**	**JI**	**NJ**	**JI**	**NJ**	**JC**	**JI**	**JC**	**JI**	**JC**
3	**JP**	**JP**	**JP**	**JI**	**JI**	**NJ**	**JP**	**JP**	**JP**	**JP**	**JC**
4	**OJ**	**OJ**	**JI**	**JI**	**NJ**	**JI**	**JP**	**OJ**	**OJ**	**JC**	**JI**
5	**NJ**	**JP**	**JP**	**JI**	**NJ**	**JI**	**JP**	**JI**	**JP**	**JI**	**JP**
6	**NJ**	**JI**	**JP**	**JI**	**JI**	**JI**	**JC**	**JI**	**JI**	**JI**	**OJ**
7a		**JI**						**JI**			**JI**
7b		**JC**	**JI**			**JP**		**JI**	**OJ**		**JC**
7c	**JI**	**NJ**	**JI**	**NJ**	**JI**	**NJ**	**JI**	**NJ**	**NJ**	**NJ**	**JI**

Tabla 2. Justificación de las respuestas dadas por los alumnos al resolver el cuestionario.

Convenciones: ***JC****: Justificación Correcta.* ***JI****: Justificación Incorrecta.* ***JP****: Justificación Parcial.* ***OJ****: Otra Justificación.* ***NJ****: No Justifica.*

A1

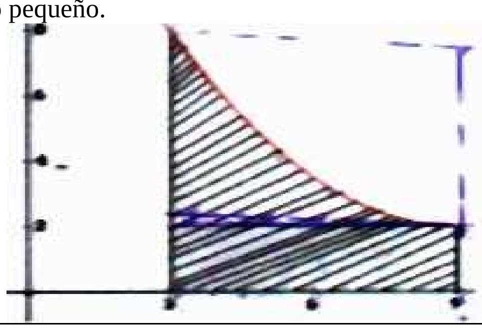
ITEM	JUSTIFICACIONES
1a	• Construye sobre el gráfico dos rectángulos y afirma que el área del rectángulo donde la función alcanza su valor máximo absoluto es igual a $48u^2$, • argumenta que el área del rectángulo donde la función tiene su valor mínimo absoluto es igual a $12u^2$, • concluye que el área de la región rayada está entre el área del rectángulo grande y el valor del área del rectángulo pequeño. 
1b	
1c	
1d	• Menciona que los valores los obtuvo a través del teorema del valor medio.
2a	
2b	• Dibuja la función y forma dos triángulos rectángulos, • compara los triángulos y demuestra que son congruentes, • halla el valor del área de un triángulo, • considera que el área total es equivalente al doble del área del triángulo anterior.
2c	
2d	• Afirma que los resultados no son iguales, • considera que en la grafica se puede visualizar fácilmente el valor del área, • menciona que en ocasiones el proceso de la Integral Definida nos puede llevar a errores.
3	• Indica que el área se calcula haciendo particiones regulares del intervalo $[0,4]$, • plantea el área usando la definición de la Integral Definida como una suma de Riemann, • dice que por medio de una partición haciendo que la $\lVert P \rVert \to 0$, y $n \to \infty$, de una suma de Riemann, que es igual a la Integral Definida, obtiene el valor exacto del área de la región.
4	• Manifiesta que con valor absoluto no ha trabajado mucho.
5	
6	
7a	
7b	
7c	• Afirma solamente que el valor debe ser positivo.

Tabla3. Justificaciones de A1

A2

ITEM	JUSTIFICACIONES
1a	• Supone que el área de la región sombreada tiene de base el intervalo $[3,9]$ o sea una longitud de base $6u$ y de altura $8u$ como muestra la gráfica, • indica que al transformar el área rayada en un rectángulo de base $6u$ y de altura $8u$, entonces la nueva área será de $48u^2$, • compara y expresa que como el área original era sólo una porción del área de este nuevo rectángulo, entonces el área original tiene una medida menor que $48u^2$, • dice que el área es mayor que $12u^2$ porque la región rectangular de base $6u$ y de altura $2u$ tiene por área $12u^2$ y esta es otra parte de la región sombreada original.
1b	
1c	• Plantea la $\int_3^9 f(x)dx$ y dice que $f(x)$ es la función que genera la gráfica que limita la región sombreada que pasa por los puntos $(3,8)\ y\ (9,2)$ aparentemente.
1d	• Propone que estos valores se obtienen utilizando el segundo teorema fundamental, o aplicando el límite de una suma de Riemann; pero que integrando es más fácil.
2a	• Considera que la función $f(x)=4x$ es lineal, por lo tanto es continua en los R, • halla los puntos de coordenadas P y Q, • menciona que son los puntos de coordenadas cuando $x=2, y, x=-8$ respectivos. • dice que la función pasa por el origen y que con estos puntos traza la gráfica, • subraya con líneas oblicuas el área de la región encerrada por el gráfico de la función $f(x)=4x$, el eje x y las rectas $x=-2, y\ x=2$.
2b	• Calcula gráficamente el área de la región R como la suma del área del triángulo, • utiliza como medida para el primer triángulo $2u$ de base y de altura $8u$ y para el segundo triángulo $\|-2\|$ de base y de altura $8u$.
2c	• Calcula la Integral Definida desde -2 hasta 2 de la función $f(x)=4x$ con respecto a, x utilizando el segundo teorema fundamental del calculo integral, • obtiene como resultado cero.
2d	• Afirma que los resultados anteriores no son iguales, considera que el área de la región encerrada por la gráfica de la función $f(x)=4x$, el eje x y las rectas $x=2, y\ x=-2$, representa el área como una suma de integrales que da como resultado $16u^2$ y la integral sola da 0.
3	• Dibuja la función, construye rectángulos circunscritos para indicar aproximaciones del área bajo la curva, y plantea una sumatoria de Riemann, menciona que el área se puede aproximar mediante una sumatoria, evaluando la función en el intervalo $[0,4]$ y haciendo particiones regulares del intervalo, en 4 subintervalos de longitud $1u$ y Δx_k es la longitud del k-ésimo subintervalo.
4	• Manifiesta que no ha trabajado este tipo de gráficos.
5	• Argumenta que un área no es una integral, pero que una integral geométricamente expresa un área.
6	• Trata de demostrar que la afirmación es verdadera, algo ya dado.
7a	• Plantea la demostración de falsedad de la proposición que es verdadera.
7b	• Afirma que existen funciones que no son continuas en un intervalo pero que son integrables en ese intervalo.
7c	

Tabla 4. Justificaciones de A2.

A3

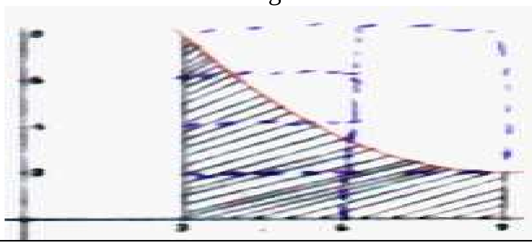
ITEM	JUSTIFICACIONES
1a	• Construye sobre la región sombreada 5 rectángulos pequeños de dimensiones 3×2, y rectángulo de 6×8 para demostrar que el área del rectángulo grande es $48u^2$, • indica que esta área es mayor que el área formada por la suma de las áreas de los rectángulos pequeños construidos sobre la región sombreada. 
1b	• Afirma que sí, podría dar valores más ajustados por medio del uso de la Integral Definida o mediante la suma de las áreas de los rectángulos.
1c	• Utiliza la fórmula del rectángulo para indicar que si cada uno tiene de base 3 y de altura 2, entonces su área es de $6u^2$, • concluye que como son 5 rectángulos, entonces el área total es de $30u^2$
1d	• Argumenta que obtiene los valores por medio de las sumas de los rectángulos construidos sobre la región sombreada en el gráfico.
2a	
2b	• Dibuja por separado el área de un rectángulo formado por puntos coordenados y traza una diagonal que pasa por los puntos $(0,0)\ y\ (2,8)$, • describe que el área del rectángulo formado es $16u^2$ y que la diagonal lo divide en dos triángulos iguales, entonces el área obtenida en cada uno es de $8u^2$, • argumenta que como la recta es simétrica respecto del origen, entonces suma el área de los triángulos.
2c	
2d	• Calcula algebraicamente tres integrales y concluye que los resultados son iguales.
3	• Dibuja la función, construye particiones regulares, traza rectángulos inscritos bajo la curva, y plantea el límite de una suma de Riemann, • manifiesta que si la norma tiende a infinito, entonces se hace un refinamiento y las particiones se hacen más pequeñas, y el valor del área será más aproximado. • obtiene finalmente, un valor exacto del área utilizando una Integral Definida.
4	• Afirma que toma la parte positiva de la función f, porque la parte sombreada que está limitada por el intervalo se encuentra sobre el eje x y en el primer cuadrante.
5	• Utiliza rectángulos circunscritos para encerrar el área sombreada, • dibuja por separado un rectángulo A de medidas 1 y 2, cuya área es $2u^2$, • dibuja otro rectángulo B de medidas $1{,}5$ y $5{,}5$ cuya área dice que es $8{,}25u^2$, • obtiene una aproximación del área sombreada sumando las áreas de los rectángulos.
6	• Traza rectas perpendiculares al eje x que cubren el área bajo la gráfica, • construye tres rectángulos paralelos al eje x entre $x=0$ y $x=3$, • dice que el área del rectángulo grande es igual a la suma del mediano y del pequeño, • asegura que el área del rectángulo mediano es igual al grande menos el pequeño, • concluye que el área del rectángulo pequeño es igual a la del grande menos el mediano.
7a	
7b	• Dice que si f es continua en (a,b), entonces f es integrable en $[a,b]$, lo mismo que se afirma en la proposición dada.
7c	

Tabla 5. Justificaciones de A3

A4.

ITEM	JUSTIFICACIONES
1a	• Argumenta que para saber el valor del área rayada de la gráfica necesita la ecuación , • menciona que una vez tenga la ecuación de la curva, calcula el área por medio de una integral evaluada en el intervalo $[3,9]$, • infiere que el área debe dar positiva.
1b	
1c	
1d	
2a	
2b	• Afirma que el área de la región gráficamente es de $8u^2$, pero como son dos, entonces es de $16u^2$.
2c	
2d	
3	• Dibuja la función del área bajo la curva y hace particiones de longitud ε, sobre el eje x, • indica la suma de las particiones para aproximar el valor del área.
4	Explica que la integral de la función valor absoluto en el intervalo dado la resuelve mediante la Integral Definida, y lo hace como si se tratara de una función lineal.
5	• Dice que trabaja la suma de integrales por trozos para calcular el área de la gráfica.
6	• Considera que si trabaja las integrales por separado y las suma obtiene la igualdad y que el gráfico por si mismo muestra que las tres funciones se relacionan.
7a	
7b	
7c	

Tabla 6. Justificaciones de A4

A5.

ITEM	JUSTIFICACIONES
1a	• Dice que el $Área = 6\times 8(-x) = 48 - x$, entonces la afirmación es verdadera.
1b	• Plantea que si $x = 20$, entonces $48 - x = ?$, luego $48 - 20 = 28$.
1c	
1d	
2a	
2b	
2c	
2d	• Considera que los resultados son los mismos, • explica que el área gráficamente la resuelve como una suma de integrales definidas, y en el otro caso sólo como una Integral Definida.
3	Dibuja la función, realiza algunos cálculos numéricos y concluye que el área es aproximadamente $20u^2$.
4	
5	
6	• Plantea una suma de integrales, donde sustituye las funciones y los intervalos, • realiza algunos cálculos numéricos, • concluye que el área comprendida entre estos valores es la misma.
7a	
7b	
7c	

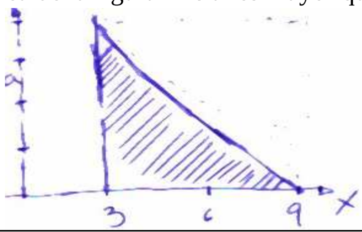
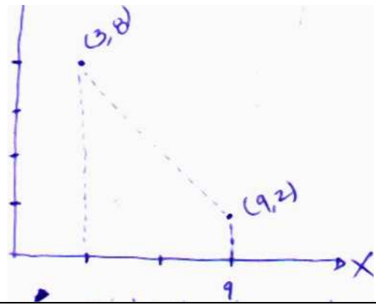
Tabla7. Justificaciones de A5

A6

ITEM	JUSTIFICACIONES
1a	• Afirma que partiendo la región sombreada en rectángulos y calculando las áreas da una aproximación dentro de ese rango.
1b	• Indica que un valor más ajustado a simple vista sería de 32 a 40 unidades.
1c	
1d	
2a	
2b	
2c	
2d	
3	
4	• Deduce que la función valor absoluto es positiva y que no necesita gráfica, • calcula el área de la función valor absoluto por medio de la Integral Definida, como si se tratara de una función lineal. • concluye que el área es de $4u^2$.
5	• Calcula el área de la región como una suma de integrales por separado, • concluye que el área sería igual a $32u^2$.
6	• Manifiesta que analiza numéricamente las áreas por separado, • menciona que inicia con la Integral Definida de la función $y = x^2 + x$ que sería igual a sumar las integrales definidas de las funciones $y = x^2$ con $y = x$, tomando el limite superior como un valor arbitrario a para todas las integrales.
7a	
7b	• Afirma que si f es continua es derivable, además que para ser integrable necesita tener continuidad.
7c	

Tabla 8. Justificaciones de A6

A7.

ITEM	JUSTIFICACIONES
1 a	• Construye por separado un triángulo rectángulo de base 6 y de altura 8 que representa la región sombreada, • menciona que el área de este triángulo construido es algo menor que el área de la figura inicialmente propuesta, • calcula el área del triángulo construido como, $\frac{6\times 8}{2}=24$ • considera que este valor de 24 que corresponde al área del triángulo es mayor que 12 y menor que 48, y que ésta es una aproximación al valor real del área, • explica además, que si construye un rectángulo sobre la figura inicialmente propuesta, se puede observar que el área del rectángulo es mayor que el área formada por la región sombreada, • concluye nuevamente que el área de la figura inicial es mayor que 12 y menor que 48. 
1b	
1c	• Menciona que un valor más ajustado de esta área podría ser $30u^2$, grafica una recta que pasa por los puntos $(3,8)\,y\,(9,2)$, • utiliza los puntos $(3,8)\,y\,(9,2)$ y haciendo uso de la fórmula de punto pendiente punto, encuentra la ecuación lineal $y=-x+11$, expresa el área como: $A=\int_3^9(-x+11)dx$, halla además el área como un trapecio de base mayor 8, de base menor 2 y de altura 6, así: $A=\frac{(8+2)}{2}6=30u^2$.  $m=\frac{2-8}{9-3}=\frac{-6}{6}=-1$ $3-x=-1(8-y)$ $3-x=-8+y$ $y=-x+11$
1d	• Plantea que los valores se pueden calcular con una suma de Riemann, si conocemos la función correspondiente con la gráfica de la región sombreada, o mediante la fórmula del trapecio.
2a	
2b	• Calcula gráficamente el área de la región como dos triángulos rectángulos de base 2 y de altura 8. • aplica la fórmula del área del triángulo y obtiene como resultado $16u^2$.
2c	
2d	• Considera que los resultados anteriores no son iguales a los de $2c$, porque esta integral es diferente a la integral que proporciona el área planteada inicialmente, • afirma que la integral del punto $2c$, es una integral descontextualizada y no representa el área de una región real.

3	• Traza la gráfica de la función, indica el vértice en $(0,0)$ y dice que abre hacia arriba. construye dos rectángulos circunscritos próximos a la región bajo la curva, • supone que haciendo particiones, entonces el área real de la región R se encuentra próxima a la suma de las áreas de los rectángulos construidos. • calcula el área de los dos rectángulos próximos a la curva, • suma las áreas de estos rectángulos y la considera como una aproximación al valor real del área, por medio de una partición.
4	• Define la función valor absoluto, y traza la gráfica de la función valor absoluto, • plantea el área de la función dada en el intervalo y el eje x como la suma de dos integrales que representan las áreas A_1 y A_2.
5	• Calcula el área por aproximación, a partir de la información gráfica, haciendo particiones del intervalo dado en subintervalos, de acuerdo con la función y el intervalo dado, • plantea el área aproximada como una suma de Riemann, pero no la resuelve.
6	• Grafica por separado cada una de las funciones , • considera que un proceso de rotación en los ejes de coordenadas de 45° de la gráfica de las funciones permite comprobar la igualdad de la propiedad.
7ª	
7b	
7c	• Razona el valor de falsedad de la proposición resolviéndola y obteniendo resultado 0.

Tabla 9. Justificaciones de A7.

A8

ITEM	JUSTIFICACIONES
1a	• Menciona que el área es mayor que 12 y menor que 48, porque si toma la parte inferior de la figura como un rectángulo de base 6 y de altura 2, obtendría un área de 12, la cual es menor que la región sombreada , • dice que si toma un rectángulo de base 6 y de altura 8 obtiene un área mayor que la de la región rayada.
1b	
1c	• Plantea que 42 es mayor que el área y 30 es un valor más aproximado del área.
1d	• Afirma que estos valores se obtienen construyendo rectángulos ubicados de tal manera que ocupen la mayor parte del área rayada.
2a	
2b	
2c	• Considera que como el área dio cero, es evidente que no puede ser nula, • menciona entonces, que trabaja la integral en dos intervalos de 0.2 y de $-2{,}0$ en valor absoluto, por ser áreas. • Obtiene como resultado $16u^2$.
2d	• Afirma que los resultados sí son iguales, porque de ambas maneras se trabajan las áreas efectivamente, • menciona que con sólo hallar el área de un intervalo, podemos calcular la del otro, • considera que por simetría en los triángulos, el área de cada uno es igual.
3	• Dibuja la función y construye rectángulos circunscritos , • considera que entre más pequeña sea la partición, la suma de las áreas de cada rectángulo será más próxima al área total de la región entre la curva y el eje x, • menciona que una aproximación de esta área podría ser 30. • calcula finalmente el área exacta mediante una Integral Definida.
4	• Manifiesta que no recuerda bien el manejo del valor absoluto.
5	• Dice que si construye sobre la gráfica rectángulos circunscritos de base 0.5 en el intervalo $[2,\ 3.5]$, y de altura $5{,}3$ y 2 obtiene una aproximación del área, • plantea y calcula finalmente una Integral Definida, • obtiene un valor negativo y dice que debe ser un error porque el área debe ser positiva.
6	• Dice que por gráfica al sumar las áreas de x y x^2 en un intervalo da lo mismo, que al encontrar el área de x^2+x como una función, ya que x influye en x^2 haciendo que esta sobrepase una cantidad igual al área del intervalo con x.
7a	• Afirma que la proposición es falsa porque si las derivadas dan iguales puede ser que ellas difieran en una constante aditiva, • concluye por tanto que el área encerrada por dichas regiones es diferente.
7b	• Considera la proposición como falsa porque la continuidad no implica integrabilidad, • dice que para integrar necesita encontrar la función que derivada de el integrando.
7c	

Tabla 10. Justificaciones de A8.

A9

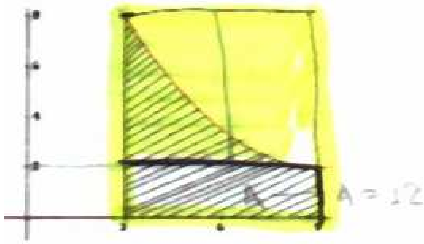
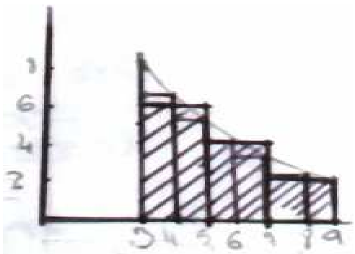
ITEM	JUSTIFICACIONES
1a	• Trabaja sobre la gráfica y construye un rectángulo de base 6 y de altura 2, • afirma que el área es mayor que 12, porque el área del rectángulo anterior es de $12u^2$, y ésta área es menor que el área total sombreada, • construye también un rectángulo más grande de base 6 y altura 8 que incluye toda la región sombreada, • indica que el área es menor que 48 porque el área del rectángulo grande es mayor que la región sombreada. 
1b	• Plantea que sí se pueden dar valores más ajustados sumando las áreas de cada uno de los rectángulos, 
1c	• Calcula los valores: $12+8+4=24u^2$.
1d	
2a	
2b	• Calcula el área geométricamente utilizando la fórmula del área del triángulo, • halla el área total como la suma de cuatro triángulos.
2c	
2d	• Afirma que los resultados no son iguales porque la Integral Definida es un número real y el otro valor es un área.
3	• Dibuja la gráfica y traza sobre ella rectángulos circunscritos , • aproxima el área como una suma de las áreas de cada uno de los rectángulos. • considera además una aproximación del área haciendo particiones del intervalo dado, • calcula la longitud de cada subintervalo y toma el extremo derecho, • obtiene el valor real del área usando las particiones como el límite de una suma de Riemann.
4	• Menciona que no sabe pero que igual lo intenta.
5	• Menciona hacer particiones que pueden ser regulares o irregulares, • construye dos rectángulos circunscritos para aproximar el valor del área, • calcula el valor aproximado del área de cada rectángulo, • suma el valor del área de cada rectángulo y obtiene así una aproximación del área.
6	• Considera que una forma para demostrar la igualdad de la propiedad es aplicando particiones y el limite de sumas de Riemann.
7a	
7b	• Manifiesta que como no encuentra una contradicción o un contraejemplo dice que la proposición es verdadera.
7c	

Tabla 11. Justificaciones de A9.

A10

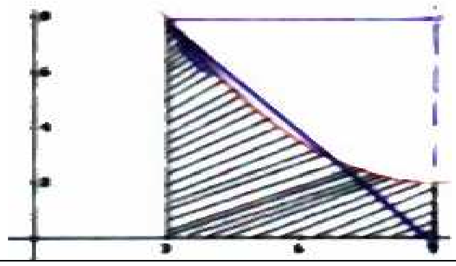
ITEM	JUSTIFICACIONES
1a	• Trabaja sobre el gráfico y traza una diagonal para ajustar más el área correspondiente a la parte sombreada, • menciona que el área es menor que 48, porque si forma un rectángulo de base 6 y de altura 8 obtiene un área de $48u^2$, indica que en el gráfico se puede ver que el área rayada es menor y aproximadamente igual a $24u^2$. 
1b	• Afirma que se pueden dar valores más exactos por medio del cálculo integral.
1c	• Menciona que en este momento no tiene muy claros los métodos anteriores.
1d	• Plantea que los valores los obtendría por medio de una integral definida o mediante las sumas de Riemann.
2a	Explica el procedimiento utilizado para trazar la recta que representa la función.
2b	Calcula el área geométricamente utilizando la fórmula del triángulo, halla el área de un triángulo y como son dos, luego la suma y obtiene $16u^2$.
2c	
2d	• Considera que los dos resultados son iguales, • afirma que el primer procedimiento utilizado es geométrico y que el segundo procedimiento se basa en una fórmula, • argumenta que esta fórmula para hallar áreas es más general, no importa la forma de la figura que cubre el área, • plantea que dicha fórmula es la Integral Definida del teorema fundamental del Cálculo Integral.
3	• Dibuja la gráfica de la función en el intervalo dado, • utiliza particiones para subdividir el intervalo dado en dos subintervalos de igual longitud, haciendo que cuando la $\|P\| \to 0$, $n \to \infty$, • parte de lo anterior y traza dos rectángulos circunscritos , • calcula el área aproximada de cada uno de los rectángulos • suma las áreas de cada uno y obtiene el área total aproximada de la región.
4	• Dibuja la función valor absoluto y sombrea el área bajo la gráfica, • forma dos triángulos rectángulos A_1 y B_2, • calcula el área de cada uno de los triángulos y las suma para hallar el área total. • plantea también una suma de integrales para calcular el área, pero no la resuelve.
5	• Propone usar el criterio que para hallar áreas bajo la curva y debajo del eje x, se halla el área que está sobre el eje x y se resta el área que queda por debajo del eje x.
6	• Plantea unas expresiones algebraicas, pero no concluye la justificación.
7a	
7b	
7c	

Tabla12. Justificaciones de A10.

A11

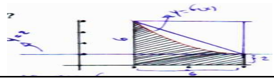
ITEM	JUSTIFICACIONES
1a	• Trabaja sobre la gráfica y supone que el área es mayor que 12 porque al trazar la recta $y = 2$, y el eje X, se forma un rectángulo de área igual a $12u^2$ y esto equivale a una parte del área total, • argumenta que es menor que 48 porque esta es el área de un rectángulo de base $6u$ y de altura $8u$, cuya área es igual a $48u^2$. 
1b	
1c	• Calcula el área del triángulo rectángulo, y el área del triángulo que está en la base, • obtiene los valores sumando el valor de cada una de las áreas anteriores, • concluye entonces que el área es menor que $30u^2$.
1d	• Obtiene los valores a partir de la lectura de la gráfica , • explica que en uno de los extremos de la gráfica se forma un triángulo de dimensiones 6 de base y 6 de altura, halla el área por la fórmula geométrica del triángulo, • propone que si se suma el valor de esta área con la del rectángulo obtiene una aproximación del área formada por la curva $y = f(x)$ y las rectas $x = 3$ y $x = 9$.
2a	
2b	• Afirma que el área de la región R es igual a dos veces el área del triángulo de base 2 y de altura 8, • calcula el área del triángulo geométricamente y manifiesta que este valor lo multiplica por dos por ser triángulos semejantes.
2c	
2d	• Considera que los resultados no son iguales porque la Integral Definida es un número que representa áreas, volúmenes…. y depende del contexto en el que se trabaje para poder emplear este número. • afirma que al calcular la integral planteada como tal, obtiene resultado 0; pero que si le piden calcular el área por medio de la integral, el resultado debe ser 16.
3	• Dibuja la función y traza rectángulos circunscritos que cubren el área bajo la curva, • utiliza particiones regulares para dividir el intervalo en subintervalos, • calcula la longitud del intervalo y explica todo el procedimiento desarrollado, • aproxima el área bajo la curva usando la definición analítica de la Integral Definida como el límite de una suma de Riemann, • considera además y lo argumenta verbal y gráficamente, que si se utilizan cada vez rectángulos más pequeños que se aproximen más a la curva el área de la región será mas aproximada; es decir, que cuando $\|P\| \to 0$, entonces, $n \to \infty$.
4	• Explica a través de un trapecio el valor del área de la función, y menciona que le expliquen: ¿qué significa la integral de esa función y cómo se trabaja?.
5	• Forma un primer triángulo rectángulo de base 1.5 y de altura 5 y calcula su área para aproximar el área bajo el eje x que está en el intervalo $[2, 3.5]$ • construye un segundo triángulo de base 2 y de altura 1, luego halla su área para aproximar el área que está por encima del eje x, en el intervalo $[0, 2]$, • suma el valor de ambas áreas porque en un intervalo el área es menor que el valor obtenido y en la otra es mayor, entonces considera lógico que lo que le sobra en uno lo pone en el otro y así obtiene el área total.
6	• Manifiesta que está perdido.
7a	• Considera la proposición falsa y propone un contraejemplo.
7b	• Afirma que sólo cuando vea integrales impropias puede decir que es falso, pero que hasta lo que llevan del curso se atreve a decir que es verdadera.
7c	• Resuelve la integral y la considera falsa, sólo por un signo diferente en el resultado.

Tabla 13. Justificaciones de A11

PREGUNTA 8

Esta pregunta es abierta y tiene que ver con el objeto de la investigación, concretamente con el Concepto de Integral Definida que tienen los estudiantes de licenciatura de Matemáticas. A continuación se presentan las respuestas textuales dadas por los 11 alumnos que respondieron el cuestionario.

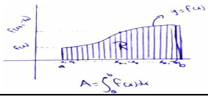
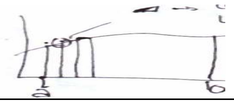
ALUMNO	RESPUESTA
A1	El significado matemático de la Integral Definida de la función $y=f(x)$ en un intervalo $[a,b]$ es el valor del área entre una región que limita entre funciones y un respectivo intervalo.
A2	Es un simple número, que puede ser la solución de múltiples problemas, eso depende del problema que se trabaje y de la forma que se modele ya que: la Integral Definida de la función $y=f(x)$ en un intervalo $[a,b]$ es única, pero no quiere decir que sea la única solución a un problema**.**
A3	Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ **y** derívable en el abierto (a,b), entonces el área de una región limitada para la curva $y=f(x)$ y el eje x y limitada por la recta paralela al eje y, la recta $x=a$ y la recta $x=b$ **es** $\int_a^b f(x)dx$. Es el $\underset{n\to 0}{lím}\sum_{i=1}^{n} f(x^*)\Delta x$ sumatoria de Riemann, se le llama o define como la Integral Definida: $\int_a^b f(x)dx$. 
A4	La Integral Definida de la función $y=f(x)$ en un intervalo $[a,b]$se define como el área $A=\int_a^b f(x)=f(b)-f(a)$ y matemáticamente es el proceso límite de una suma de Riemann, donde sumamos las particiones que se hagan.
A5	El significado matemático es que la Integral Definida es un límite, y donde el intervalo $[a,b]$ es dividido en subintervalos infinitos los cuales al sumarse en una suma de Riemann nos va a dar un valor numérico.
A6	El significado matemático de la Integral Definida de una función en un intervalo cerrado sería el área que ocupa o está encerrada por dos curvas y que permite encontrar una aproximación más acertada de dicho espacio, además sería igual al límite de la sumatoria que iría desde $k=1$, hasta n de la función evaluada en un epsilon $sub-k$ por la longitud del intervalo, esto cuando hacemos que la partición tenga un refinamiento y tienda al infinito, el n se acerca a cero. Además, es el límite del proceso de una suma de Riemann.
A7	Matemáticamente, la Integral Definida es el límite de una suma de Riemann, cuando $n\to\infty$ y siendo n el número de particiones en un intervalo $[a,b]$. Si $n\to\infty$, la norma de la partición p tiende a cero, esto es: $\lVert p\rVert\to 0$, cuando $n\to\infty$. Geométricamente la Integral Definida puede ser aplicada para el cálculo de áreas.
A8	El significado es que esta Integral es un número el cual representa un área, este número puede ser utilizado de acuerdo a la necesidad planteada por el problema trabajado. La Integral Definida se puede trabajar o emplear cuando necesitamos llegar a un resultado haciendo particiones, haciendo que la norma (la distancia más grande entre las particiones) tienda a cero, cuando el número de las particiones tiendan al infinito.
A9	Es el límite cuando la partición tiende a cero, o el número de puntos que tienden al infinito de una sumatoria de Riemann. Es decir, cuando uno quiere halla el área de la región entre la curva $y=f(x)$ y el eje x en el intervalo $[a,b]$lo que se hace es hallar una partición regular refinada de puntos cuyo número tiende a infinito. Y la altura será un ε cualquiera en el subintervalo $[k_{i-1},k]\in[a,b]$esto para hacer rectángulos y que el área de estos rectángulos no sea tan aproximada sea igual. O sea, que como hay unos trozos de la curva que van sobrando, se hace tan pequeñas las particiones que esto también se va aproximando cada vez a la curva y eventualmente la suma de todas estas áreas es igual a la requerida 
A10	El significado es que la Integral Definida se puede representar o proviene del límite de una suma de cualquier función real.
A11	Es el límite de una suma de Riemann es decir, $\underset{n\to\infty}{\lVert p\rVert}\to 0\sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_k)\Delta_k$, siendo f continua en $[a,b]$.

Tabla 14. Respuestas textuales a la pregunta 8 dadas por los alumnos al responder el cuestionario.

ITEM	CATEGORIA	ALUMNO
1a	• Justifica las cotas por aproximaciones geométricas	A1,A2,.A3,.A7,A8,A9,A10,A11
	• Necesita la función para calcular el área	A4
	• Otra Respuesta	A5,A6
1b	• Afirma que sí se pueden dar valores más ajustados	A1,A2,A3,A5,A6,A7,A8,A9,A10
	• No Responde	A4
1c	• Utiliza aproximación numérica	A1, A9
	• Utiliza aproximación geométrica	A3,A7, A11
	• Plantea una Integral Definida	A2
	• Otra Respuesta	A8, A10
	• No Responde	A4,A5,A6
1d	• Obtiene el área aproximada por construcciones geométricas	A8,A9,A11
	• Propone las sumas de Riemann y/o la Integral Definida	A2,A3, A7,A10
	• Otra respuesta	A1
	• No Responde	A4, A5, A6,

Tabla 15. Categoría por grupo de alumnos/pregunta 1.

ITEM	CATEGORIA	ALUMNO
2a	• Dibuja bien la grafica de la función	A1,A2,A3,A4,A5,A6,A7,A8,A9,A10,A11
2b	• Calcula gráficamente el área usando la fórmula del área del triángulo	A1,A2,A3,A4,A7, A9,A10,A11
	• Calcula mal el área de la región R	A5
	• Otra Respuesta	A8
	• No Responde	A6
2c	• Calcula bien la Integral Definida.	A1, A2, A3, A5, A6, A7, A8, A9, A11
	• Calcula mal la Integral Definida.	A10
	• No Responde	A4
2d	• Afirma correctamente que los resultados no son iguales.	A1, A2, A7,A9, A11
	• Afirma incorrectamente que los resultados son iguales.	A3, A5, A8, A10
	• No Responde	A4, A6

Tabla 16. Categoría por grupo de alumnos/pregunta2.

ITEM	CATEGORIA	ALUMNO
3	• Aproxima por exceso usando particiones y aplica el límite de una suma de Riemann	A9, A11
	• Plantea una aproximación por exceso usando particiones y calcula la Integral Definida	A3, A8
	• Aproxima por exceso usando particiones y cálculo numérico	A7, A10
	• Justifica planteando particiones y/o el límite de una suma de Riemann asociada al cálculo de la Integral Definida.	A1,A2,
	• Otras Respuestas	A4,A5,A6

Tabla 17. Categoría por grupo de alumnos/pregunta3.

ITEM	CATEGORIA	ALUMNO
4	• Dibuja bien la función y calcula bien el área usando un procedimiento geométrico y/o la Integral Definida	A7, A10
	• Dibuja mal la función y calcula mal el área usando un procedimiento geométrico y/o la Integral Definida	A3,A4,A11
	• No grafica la función y calcula mal el integrando como una función lineal	A5,A6
	• Otra Respuesta	A1,A2,A8,A9

Tabla 18. Categoría por grupo de alumnos/pregunta4

ITEM	CATEGORIA	ALUMNO
5	• Aproxima el área parcialmente usando rectángulos	A3,A9,A11
	• Aproxima el área incorrectamente usando la Integral Definida	A1,A4,A5,A6,A8,A10
	• Aproxima el área parcialmente usando particiones y sumas de Riemann	A7
	• Otra Respuesta	A2

Tabla 19. Categoría por grupo de alumnos/pregunta5.

ITEM	CATEGORIA	ALUMNO
6	• Utiliza el registro algebraico para sustituir las integrales y trata de demostrar la propiedad	A1,A2,A3A4,A5,
	• Plantea un proceso de rotación de los ejes de 45º para demostrar la propiedad	A7
	• Propone particiones y sumas de Riemann para demostrar la igualdad	A9
	• Otras respuestas	A6, A8,A10,A11

Tabla 20. Categoría por grupo de alumnos/pregunta 6.

ITEM	CATEGORÍA	ALUMNO
7a	• Afirma que la proposición es verdadera.	A1, A3, A4, A5, A6, A7, A9, A10
	• Afirma que la proposición es falsa.	A2, A8, A11
7b	• Afirma que la proposición es verdadera.	A1, A2, A4, A5, A6, A7, A9, A10,A11
	• Afirma que la proposición es falsa.	A3, A7
7c	• Afirma que la proposición es verdadera.	A3, A4, A8 A9,
	• Afirma que la proposición es falsa.	A1, A5, A7, A10, A11
	• No Responde.	A2, A6

Tabla 21. Categoría por grupo de alumnos/pregunta 7.

ITEM	CATEGORÍA	ALUMNO
8	• Asocia el Concepto de Integral Definida con el área.	A1
	• Asocia el Concepto de Integral Definida con el límite de una suma de Riemann.	A5,A10,A11
	• Asocia el Concepto de Integral Definida con el área y con el límite de una suma de Riemann.	A3,A4,A6,A7,A9
	• Asocia el Concepto de Integral Definida con un número.	A2,A8

Tabla 22. Categoría por grupo de alumnos/pregunta 8.

Anexo 4: Guión de entrevistas.

VNiVERSiDAD
Ð SALAMANCA

UNIVERSIDAD DEL QUINDIO

GUIÓN DE ENTREVISTA

SEUDÓNIMO:_______________________________ FECHA:________ HORA: ____LUGAR:_________

PREGUNTAS	NOTAS
1. ¿Me podrías explicar cómo obtuviste esta respuesta? 2. ¿Por qué justificas las cotas de esa forma? 3. ¿Me podrías explicar tus argumentos? 4. ¿Cómo has usado las condiciones del enunciado de la tarea? 5. ¿Puedes explicar tu razonamiento? 6. ¿Existe otra forma más exacta de ajustar las cotas? 7. ¿Por qué utilizas estos argumentos en tus razonamientos? 8. ¿Puedes utilizar otros métodos para aproximar el área? ¿Cuáles? 9. ¿Me puedes explicar que te ha hecho pensar así? 10. ¿Podrías explicarme el procedimiento que estas pensando? 11. ¿Cómo aproximarías el área utilizando los rectángulos? 12. ¿Cómo crees que podrías conseguir mejores aproximaciones del área: con rectángulos más grandes o más pequeños? 13. ¿Y eso que te da una sobreestimación y/o subestimación? 14. ¿Qué relación hay entre los rectángulos superiores y los inferiores? 15. ¿Cómo podrías aproximar numérica y/o geométricamente el área? 16. ¿De qué manera puedes calcular las sumas de Riemann? 17. ¿Las sumas de Riemann que te darían, una aproximación del área o el valor exacto del área? ¿Por qué? 18. ¿Podrías aplicar otro procedimiento diferente, que te permita una mejor aproximación del área y que justifique más las cotas?	
ELEMENTOS MATEMÁTICOS: El Área como Aproximación (P1C).	

PREGUNTAS	NOTAS
1. ¿Puedes explicarme cómo has resuelto la tarea? 2. Cuando graficas la función, ¿qué figuras bajo la gráfica se te formaron? 3. ¿Por qué has utilizado este razonamiento? 4. ¿Por qué duplicaste el área de este triángulo? 5. ¿Qué relación puedes establecer entre el área de la región bajo el eje OX, y la región formada sobre el eje OX ? 6. ¿Es lo mismo calcular el área gráficamente que resolver la integral indicada? 7. ¿Qué relación hay entre esa área geométrica y la integral? 8. ¿Significan lo mismo, el área y la Integral Definida? 9. ¿Se puede decir que el área es igual a la integral? ¿Por qué? 10. ¿Esta área es igual al valor obtenido de la integral planteada y en este intervalo dado? ¿Por qué? 11. ¿Qué relación hay entre ese número dado por la integral y el que puedes calcular del área? 12. ¿Por qué al calcular el área dio un valor y cuando calculó la integral dicho valor dio cero? 13. ¿Cómo justificas que los dos resultados sean iguales o diferentes? 14. ¿Qué relación estableces entre el área bajo la gráfica y la Integral Definida? 15. ¿Cuál es la diferencia entre calcular un área y calcular una Integral Definida? ¿Podrías explicarlo? 16. ¿Qué puedes concluir de los resultados obtenidos?	
ELEMENTOS MATEMÁTICOS: El Área como Aproximación y la Integral Definida (P2C).	

PREGUNTAS	NOTAS
1. ¿Sabrías comentarme cómo has resuelto la tarea? 2. ¿Qué es una partición? ¿Cómo divides el intervalo en subintervalos? 3. ¿Qué son las sumas de Riemann? ¿Cómo se construyen? 4. ¿Por qué usas rectángulos y no otras figuras? 5. ¿Cuál es el ancho de la base de cada rectángulo? 6. ¿Cómo obtienes las alturas de los rectángulos? 7. ¿Cómo obtendría las áreas de los rectángulos? 8. ¿Qué ocurre con los intervalos $[x_{i-1}, x_i]$ a medida que n crece? 9. ¿Esta secuencia puede ser continuada indefinidamente haciendo rectángulos con la base cada vez más pequeña? ¿Por qué? 10. ¿Podemos obtener una respuesta exacta del área bajo la gráfica de $y = x^2$ para $x = 0$ y $x = 4$ a partir de esta secuencia? 11. ¿Qué ocurre con las sumas al escoger todos los subintervalos de la partición cada vez más pequeños? 12. ¿Cuándo te aproximas más al área, cuando usas más o menos particiones? Justifica tu respuesta. 13. ¿Cuándo te aproximas más al área cuando usas subestimaciones o sobreestimaciones? ¿Por qué? 14. ¿De qué otra forma diferente de la anterior, podrías calcular el área bajo la gráfica? 15. ¿Puedes dar una fórmula para obtener el límite de la secuencia? 16. Si tu respuesta es sí, ¿cuál es la fórmula? 17. Cuando calculas los límites, ¿cómo son sus valores? 18. ¿Qué puedes concluir de los valores obtenidos?	
ELEMENTOS MATEMÁTICOS: **El Área como Límite de una Suma y la Integral Definida (P3C).**	

PREGUNTAS	NOTAS
1. ¿Puedes explicarme cómo has resuelto la tarea? 2. ¿De qué manera calcularías el área de esta función? 3. ¿Cómo defines tú el valor absoluto? 4. ¿Cómo defines ahora el valor absoluto de esta función? 5. ¿Sabrías hacerlo aplicando la definición de valor absoluto? 6. ¿Podrías decirme cómo has esbozado el gráfico de la función f ? 7. ¿Cómo calculas el área a partir de la representación gráfica? 8. ¿Qué figuras se formaron bajo la gráfica y cómo calculas su área? 9. ¿Podrías utilizar otro procedimiento para calcular el área? ¿Cuál? 10. ¿Se puede calcular una integral así como esta? ¿Cómo? 11. ¿Por qué planteas la integral de esta forma? 12. ¿Cómo planteas la integral una vez que has definido la función? 13. ¿Cómo puedes plantear una integral a partir de la gráfica y/o de la definición de valor absoluto? 14. ¿Consideras que está bien escrita la función a trozos? 15. ¿Qué propiedades aplicas para expresar la integral así? 16. ¿Se puede calcular esta área, con una sola Integral? ¿Por qué? 17. ¿Qué relación hay entre el ejercicio propuesto y la integral? 18. ¿Se puede calcular el área bajo la gráfica sin aplicar integrales? ¿Por qué? ¿Cómo? 19. ¿Cómo son los dos resultados que obtienes usando el cálculo geométrico y aplicando el cálculo de la Integral Definida? 20. ¿Qué puedes concluir de los dos procedimientos anteriores?	
ELEMENTOS MATEMÁTICOS: Las Propiedades de la Integral Definida: Unión de Intervalos (P4C).	

PREGUNTAS	NOTAS
1. Cuando te dicen que aproximes un área, ¿qué haces? 2. ¿Cómo calculas el valor de esta área por aproximación? 3. ¿Cómo aproximas el valor del área por defecto y/o por exceso? 4. ¿Cuál es la base de cada rectángulo que has trazado? 5. ¿Cómo obtienes las alturas de estos rectángulos? 6. ¿Cuál es el área que vas a aproximar? ¿Cuál es el intervalo? 7. ¿Cómo aproximas el área que está por encima del eje OX, y cómo aproximas el área que está bajo el eje OX. 8. ¿Cómo aproximas el área de la región bajo el eje OX? ¿Conoces algún procedimiento en especial? 9. ¿Qué haces, una vez que aproximas el área que está por encima del eje OX y la aproximación del área, que está bajo el eje OX? 10. ¿Cuánto te ha dado la aproximación del área total? 11. ¿Puede dar la aproximación del área negativa? ¿Por qué? 12. ¿Qué otras aproximaciones geométricas y /o numéricas puedes realizar? 13. ¿Qué otros procedimientos puedes aplicar para calcular el área? 14. ¿Cómo planteas una integral para calcular el área? 15. ¿Cómo calcularías el límite de las sumas de Riemann? 16. ¿Qué te dan las sumas de Riemann, una aproximación del área o el valor exacto del área? 17. ¿Y cómo calcularías el área aplicando una Integral Definida? 18. ¿En caso de la integral dar negativa, puedes explicarme por qué da negativa, si dices que el área debe ser positiva? 19. ¿Cómo son los resultados obtenidos en los procedimientos anteriores? ¿Por qué? 20. ¿Qué puedes concluir de los resultados obtenidos? ¿Por qué?	
ELEMENTOS MATEMÁTICOS: **El Área como Aproximación y la Integral Definida de Funciones Positivas y Negativas (P5C).**	

PREGUNTAS	NOTAS
1. ¿Podrías explicarme qué quieres decir con este razonamiento? 2. ¿Por qué utilizas sólo el registro algebraico para demostrar la propiedad? 3. ¿Por qué utiliza sólo el cálculo de las integrales y no otros procedimientos? 4. ¿No obtuviste ningún razonamiento para demostrar esta igualdad? 5. ¿Cómo terminarías el ejercicio? Continúalo por favor. 6. Piensa en un procedimiento haber, ¿qué te parece si lo intentas? 7. ¿Cómo crees que podrías justificar esta propiedad? 8. ¿Me puedes indicar cuáles son las áreas bajo las gráficas de las funciones f, g y h? 9. ¿Dónde empieza la región de f y hasta dónde llega? 10. ¿De dónde hasta dónde va en vertical y en horizontal la grafica de cada función? 11. ¿Cómo trazarías las gráficas de cada función por separado? 12. ¿Qué observas ahora que tiene por separado la gráfica de cada función? ¿Podrías compararlas? 13. ¿Qué relaciones puedes establecer entre las gráficas de las funciones para justificar la igualdad de esta propiedad? 14. ¿Qué figuras podrías formar bajo la gráfica de cada función? 15. ¿Qué sucedería si vas añadiendo al área de la primera gráfica, el área de la segunda grafica? 16. ¿Qué otros procedimientos diferentes podrías utilizar para comprobar la igualdad de la propiedad? 17. ¿Cómo justificarías numérica y/o gráficamente la igualdad, sin usar las integrales?	
ELEMENTOS MATEMÁTICOS: **Propiedades de la Integral Definida: Regla de Linealidad (P6C).**	

PREGUNTAS	NOTAS
1. ¿Qué razones tienes para decir que esta proposición es falsa o verdadera? 2. ¿Cuáles son los criterios que te llevan a este razonamiento? 3. ¿Cómo podrías demostrar gráficamente el valor de verdad o falsedad de la proposición? 4. ¿Con qué elementos matemáticos del Cálculo Integral relaciona la primera proposición? 5. ¿Con qué elementos matemáticos del Cálculo Integral relaciona la segunda proposición? 6. ¿Con qué elementos matemáticos del Cálculo Integral relaciona la tercera proposición? 7. ¿Consideras que la integral de Riemann sólo se puede aplicar a funciones continuas? ¿Por qué? 8. ¿Existen funciones que no son continuas en un intervalo pero que son integrables en alguna parte de ese intervalo? ¿Cuáles? 9. ¿Cuáles son las condiciones para que una función sea Riemann integrable? 10. ¿Podrías aplicar las sumas de Riemann al ejercicio *c*? 11. ¿Dónde considera que está el problema de la proposición *c*, en la aplicación del teorema, o en el valor numérico de la respuesta? ¿Por qué? 12. ¿Si la proposición es falsa podrías dar un contraejemplo o decir por qué? 13. ¿Podemos aplicar la regla de Barrow al ejercicio *c*? ¿Por qué sí, o por qué no? 14. ¿Qué pasa en la proposición *c*, si el denominador se hace cero? 15. ¿Puedes aplicar la misma regla? ¿Cómo lo harías? 16. ¿Por qué la continuidad implica integralidad?	
ELEMENTOS MATEMÁTICOS: **Teorema Fundamental del Cálculo y del Valor Medio**: **Regla de Barrow y Teorema de existencia de la Integral (P7C).**	

PREGUNTAS	NOTAS
1. ¿Cómo le explicarías a un compañero el significado de $\int_a^b f(x)dx$? 2. ¿Por qué asocias la expresión dada con la antiderivada? 3. ¿Qué es para ti una antiderivada o primitiva? 4. ¿Qué diferencia hay entre una Integral Definida y una indefinida? 5. ¿Qué significa para ti que f sea continua y acotada? 6. ¿Por qué consideras que la integral es el valor del área? 7. ¿Qué relación se establece entre el área geométrica y la Integral Definida? 8. ¿Qué quieres decir con que la integral es un número que representa la solución de múltiples problemas? 9. ¿Qué es para ti el límite de una suma de Riemann? 10. ¿Qué quieres decir con que la integral es el límite de las sumas de Riemann? 11. ¿Qué significa para ti que si el número de particiones n, crece indefinidamente, la longitud de cada partición tienda a cero? 12. ¿Por qué cuando el número de particiones n tiende a infinito, y la norma de la partición p, tiende a cero, nos aproximamos más al área bajo el gráfico? 13. Gráficamente, ¿Cómo interpretarías el significado de $\int_a^b f(x)dx$? 14. ¿Qué significa que la Integral Definida proviene del límite de las sumas de Riemann? 15. ¿Cuál es tu propia definición de Integral Definida	
ELEMENTOS MATEMÁTICOS: **La Integral Definida (P 8C).**	

Anexo 5: Transcripción de entrevistas.

ENTREVISTA (A1).

PREGUNTA Nº 1.

I: ¿Podría explicarme como obtuvo la respuesta de la pregunta número 1?

A1: Si, acá preguntan que si el área de la región rayada es mayor que 12 y menor que 48, conteste que si, porque el área del rectángulo donde la función alcanza su valor máximo absoluto es igual a 48 unidades de medidas cuadradas y el área del rectángulo donde la función tiene su valor mínimo absoluto es igual a 12 unidades de medida cuadrada y como el área de la región rayada está entre el área del rectángulo grande y el valor del área del rectángulo pequeño, por eso es que es mayor que 12 y menor que 48.

I: ¿Por qué justifica esas cotas de esa manera y no de otra?

A1: Porque sabemos que el área entre una función y el eje X viene siendo la integral definida.

I: ¿Podría aproximar o ajustar esa área con la integral?

A1: Si, señor.

I: ¿Cómo lo haría?

A1: Integrando en el intervalo de 3 a 9.

I: ¿Qué función integraría en ese intervalo?

A1: Conociendo la función haría la integral definida entre la recta $x=3$ y $x=9$.

I: ¿Y conoce aquí la función?

A1: No, acá eso es lo que no conozco.

I: ¿Qué podría hacer, me podría explicar sus argumentos?

A1: Si, a través de dos rectángulos.

I: ¿Cómo seria? ¿Podría subrayarlo en su hoja adicional?

A1: Si señor, tendría el rectángulo mayor que viene siendo hasta el valor 8 que tiene la función f evaluada en x que es igual a 8, entonces la altura viene siendo la del rectángulo mayor que es 8, y la base viene siendo 9 menos 3 (*el estudiante dibuja en una hoja de respuestas*).

I: ¿Por qué -3?

A1: Porque -3 es la medida de la longitud del segmento que está entre la recta $x=3$ y $x=9$ y ese rectángulo viene siendo más grande que el rectángulo donde la función alcanza su mínimo absoluto.

I: ¿Qué es el mínimo absoluto?

A1: Son los extremos de la función.

I: ¿Cuáles son los extremos de la función?

A1: $f(2)$, por lo tanto el rectángulo mayor que tiene altura 8 y base 6, porque 9 menos 3 seis, es mayor que el rectángulo que tiene altura 2 y base 6 que viene siendo 12.

I: ¿Qué más haría para ajustar las cotas?

A1: Aquí ya tengo las dos áreas.

I: ¿Cuáles son las dos áreas?

A1: El área del rectángulo mayor que es 6 por 8 igual a 48 y el área del rectángulo menor que viene siendo 12, seis por dos doce, porque es el mismo y tiene la misma base.

I: ¿Está seguro que con eso está ajustando las cotas?

A1: Si.

I: ¿Qué otros métodos podría utilizar para aproximar el área?

A1: En este caso ¿Qué otro método?

I: ¿Qué otros procedimientos utilizaría para aproximar el área? ¿Cuáles?

A1: No.

I: ¿Qué quiere decir esta expresión que tiene aquí $AR = 4$?

A1: $AR = 4$, el área del rectángulo.

I: ¿Qué quiso decir con esa expresión que tiene escrita?

A1: Si, al exponer el área del rectángulo mayor.

I: ¿De dónde obtiene el valor de 4?

A1: Cuando la función toma el valor de $f(4)$, aplicándole el valor medio para integrales.

I: ¿Cuál valor medio?

A1: El valor medio para integrales.

I: ¿Cómo toma ese valor medio?

A1: Cuando calculamos la derivada en un número del intervalo por la longitud del intervalo es igual al teorema fundamental del cálculo que es $f(b) - f(a)$.

I: ¿Cómo aplica aquí el teorema fundamental?

A1: Supuse que el valor promedio de la función viene siendo 4.

I: ¿Por qué es 4?

A1: Porque la función esta entre 0 y 8, entonces saqué el valor promedio.

I: ¿Para qué le sirve ese valor?

A1: Con base en ese valor promedio y la longitud de la medida del segmento del intervalo puedo aplicarle el valor medio para integrales y así puedo hallar el área de la región.

I: ¿Qué dice el teorema del valor medio?

A1: Que si tengo una función que es continúa en cierto intervalo, en este caso f es continua en 3 y 9 y existe un número especial en ese intervalo.

I: ¿Y sólo podría utilizar aproximación o ajuste del área utilizando el teorema del valor medio?

A1: Y los dos del rectángulo.

I: ¿Cuántos rectángulos utilizaría?

A1: Los 2 que utilice.

I: ¿Qué otros procedimientos podría hacer para ajustar más el área?

A1: Trabajándola a partir de particiones.

I: ¿Cómo seria con particiones, qué es eso de particiones, indíquemelo en la hoja?

A1: Particionando este intervalo.

I: ¿Cómo seria con particiones?

A1: (*El estudiante susurra mientras va pensando*), 3 a 9, entonces particionamos el intervalo en x.

I: ¿Qué es particionar el intervalo en x?

A1: Es dividir ese intervalo en varios subintervalos.

I: ¿Para qué divide ese intervalo en subintervalos?

A1: Para trabajar la base.

I: ¿Qué busca cuando hace la subdivisión del intervalo?

A1: Hallar rectángulos que tengan como altura la función evaluada en cualquier punto del subintervalo.

I: ¿Para qué lo hace?

A1: Para aproximar y para hallar el área de cada rectángulo formado por la base del subintervalo que hallo y de altura la función evaluada en el número.

I: ¿Qué obtiene con eso?

A1: Aproximar el área de la región.

I: ¿Cuál de las dos formas o procedimientos le ajusta más el área, el que mencionaba anteriormente o la partición del intervalo?

A1: La partición del intervalo.

I: ¿Por qué razón?

A1: Porque viene siendo como más preciso cuando se trabaja con base en un proceso limite.

I: ¿Qué quiere decir más preciso con base en un proceso limite?

A1: Que así tenemos una medida más acorde del área que vamos aproximar.

I: ¿Qué es acorde, qué es lo que esta tratando de decir cuando dice acorde, a qué quiere llegar?

A1: Que aproximo más el área.

I: ¿Qué es aproximarla?

A1: Que el área sea casi igual.

I: ¿Casi igual, a qué?

A1: Al área que hay entre la curva y el eje X.

I: ¿Podría explicarme otro procedimiento diferente que le permita una mejor aproximación del área y que justifique más las cotas?

A1: ¿Otro más? Espera a ver, en este momento no.

PREGUNTA Nº 2.

I: ¿Podría explicarme cómo ha resuelto la tarea número 2?

A1: Si señor, grafiqué hallando puntos, dándole valores a la función $f(x) = 4x$.

I: ¿Qué figura obtuvo?

A1: Una recta.

I: ¿Qué figura geométrica se formó bajo la recta?

A1: Entre el eje X y la recta que va desde el origen hacia arriba, resulto un rectángulo e igualmente de la recta hacia abajo, también resulto otro rectángulo.

I: ¿Cómo calculó el área gráficamente?

A1: Si, espere un momento, acá es igual a 8, halle el área del primer rectángulo (*el estudiante observa la respuesta que tiene en el cuestionario*).

I: ¿Rectángulo?

A1: Digo del primer triángulo rectángulo, si el primer triángulo rectángulo.

I: ¿Cuántos triángulos rectángulos tiene?

A1: Dos triángulos rectángulos que están conformados por la recta, el triángulo que va de p, numeré cada punto p_0 p_1 y p_4.

I: ¿Cómo calcula el área geométricamente?

A1: Sé que el área del triángulo rectángulo es igual a base por altura sobre 2 o de cualquier triángulo, entonces me dio 8, como los triángulos p_0 p_1 y p_4, y el triángulo p_4 p_3 p_2 son congruentes y equivalentes, el valor del área de la región es igual a 16.

I: ¿Por qué son congruentes?

A1: Por ángulos opuestos, por el teorema lado, ángulo, lado, porque tienen igual lado e igual ángulo, entonces hallé el área y me dio 16 unidades.

I: ¿Por qué duplicó el área de este triángulo rectángulo?

A1: ¿Del triángulo rectángulo? Porque hallando el área de cualquiera de los dos triángulos rectángulos, como son iguales multiplico y obtengo el área que está formada por la recta $f(x) = 4x$.

I: ¿Cuál es el área geométrica bajo la curva?

A1: ¿El área geométrica bajo la curva y el eje X?

I: Si.

A1: Es igual a 16 unidades de medidas cuadradas.

I: ¿Cómo calculó la integral?

A1: Aplicándole el teorema, aplicando primero la propiedad de la integral definida de una constante por una función que es igual a la constante por la integral definida de la función.

I: ¿Qué valor obtuvo?

A1: Acá me dio cero.

I: ¿Está de acuerdo con ese valor?

A1: Pues la integral esta bien hecha pero el valor…

I: ¿Qué relación hay entre esa área geométrica y la integral?

A1: Aquí tengo la duda, porque acá me equivoque.

I: ¿Por qué?

A1: Por que la integral...

I: ¿Por qué cree que se equivocó?

A1: Porque la integral cuando esta entre el eje X y bajo la curva el signo cambia.

I: ¿Qué le piden ahí?

A1: Obtener el área de la curva, eso es una propiedad.

I: ¿Qué le piden aquí, calcular el área o calcular la integral?

A1: Calcular la integral, pero el área…

I: ¿Pero no está de acuerdo con el resultado que le dio la integral?

A1: No.

I: ¿Por qué?

A1: Ésta debía dar 16, porque cambiaba pero…

I: ¿Por qué le debe dar 16, qué le piden calcular el área o calcular la integral?

A1: Porque aplicándole la propiedad de las funciones cuando están debajo del eje X le cambiamos el signo para que sea el área de la función.

I: ¿Qué esta hallando aquí cuando le piden calcular, una área o la integral?

A1: Calcular la integral, porque así la integral esta bien, pero el área es una parte que se desglosa de la integral.

I: ¿Significan lo mismo el área y la integral definida?

A1: No.

I: ¿Por qué?

A1: La integral definida viene siendo el proceso del límite de una sumatoria de Riemann y geométricamente es el área de una figura plana.

I: ¿Qué es una sumatoria de Riemann?

A1: Es cuando tenemos la sumatoria.

I: ¿Se puede decir que el área es igual a la integral?

A1: En este caso no, el área no es igual.

I: ¿El valor de esta área es igual al de la integral planteada?

A1: Si es igual, pero acá me dio diferente.

I: ¿Qué relación hay entre ese número dado por la integral y el que obtuvo al calcular el área?

A1: Que acá trabaje la integral y le apliqué todo y no tuve en cuenta que tenia que aplicar la propiedad de adición del limite de una integración.

I: ¿Qué le pedían calcular el área o calcular la integral?

A1: Calcular la integral.

I: ¿Cuando le piden calcular el área, es lo mismo que calcular la integral, o qué relación existe entre estos dos elementos?

A1: Cuando me piden calcular el área de una función plana, lo trabajo a través de un proceso de integral.

I: ¿Por qué al calcular el área le dio un valor y cuando calculó la integral dicho valor dio cero?

A1: Porque, no le apliqué la propiedad cuando la función esta por debajo del eje X y cuando la función esta por encima del eje X que viene siendo desde -2 hasta 0, más la integral desde 0 hasta 2.

I: ¿Cuál es la diferencia entre calcular el área y calcular una integral definida, podría explicármelo?

A1: Es cuando vamos a aplicarle las propiedades de la integral.

I: ¿Cuáles propiedades?

A1: Como son por ejemplo, la propiedad que me faltó acá que es la propiedad de la suma con respeto a los limites de integración, en este caso hasta cero, debemos tener en cuenta lo que hacemos, porque entonces integrando no vamos a obtener un resultado acorde a lo que nos plantea el gráfico o hallar el área aplicando la integral.

I: ¿Lo que usted quería era que al calcular la integral le diera el mismo valor que obtuvo cuando calculó el área?

A1: Si, señor.

I: ¿Qué puede concluir de los resultados obtenidos?

A1: Que debemos de modificar muchas veces los problemas, no siempre mecanizar las fórmulas mirar lo que nos están preguntando para comprenderlo bien.

I: Me refiero en cuanto a resultados obtenidos del valor del área y el valor de la integral.

A1: Los valores no me dieron iguales.

I: ¿Qué puede concluir?

A1: Que no me dieron los valores iguales.

I: ¿Tendrían que darle los valores iguales?

A1: Si señor.

I: ¿Por qué?

A1: Porque, sabemos que la integral definida geométricamente la utilizamos para hallar el área de una función plana.

I: ¿Cree que cuando calculó el área geométricamente dio un resultado y cuando calculó la integral le tenía que dar lo mismo?

A1: Si señor.

I: ¿Por qué?

A1: Porque, es un área que está comprendida entre una función plana y una la recta.

PREGUNTA Nº 3.

I: ¿Sabría comentarme como ha resuelto la tarea número 3?

A1: A través de particiones del intervalo.

I: ¿Qué son las particiones?

A1: Partir el intervalo $[0\,,4]$ en varios subintervalos en este caso lo dividí regularmente.

I: ¿Para que hace esas particiones?

A1: Para hallar la altura de los rectángulos evaluando la función.

I: ¿Podría indicarme en la hoja adicional cómo seria lo de los rectángulos?

A1: De 0 a 4, entonces vamos particionando este intervalo.

I: ¿Cuál seria la gráfica de la función?

A1: Una parábola.

I: ¿Cómo haría las particiones?

A1: Particionando estos dos.

I: ¿Podría hacer un boceto de la gráfica?

A1: Si señor.

I: ¿Qué área es la que va a calcular?

A1: El área entre el eje X.

I: ¿Cuál es, podría subrayarla?

A1: Esta.

I: ¿De dónde hasta dónde le piden?

A1: De 0 a 4, es la parte derecha del área.

I: ¿Cómo es el proceso de las particiones y el uso de rectángulo?

A1: Particionamos este intervalo que va de 0 a 4.

I: ¿Cómo seria?

A1: En x, subparticionamos y hallamos rectángulos de base la medida de cada subintervalo y de altura…

I: ¿Qué longitud va a tener cada subintervalo?

A1: Subintervalos regulares de longitud 1.

I: ¿Qué quiere decir regulares?

A1: Que todos los intervalos tienen la misma medida.

I: ¿Hasta dónde llegarían esos rectángulos, cuál seria la altura?

A1: La altura mayor seria hasta 1.

I: ¿Cómo calcula las alturas de los rectángulos usando las particiones?

A1: Evaluando la función.

I: Observe los rectángulos.

A1: De longitud ésta y de altura la función evaluada en…

I: ¿Qué más puede hacer, a demás dividir el intervalo y de trazar los rectángulos?

A1: Después de tener los rectángulos sumarlos.

I: ¿Para qué los suma?

A1: Para hallar la aproximación del área que hay entre la parábola y el eje X, y las recta $x = 0$.

I: ¿Cómo seria la suma, qué valores va a sumar?

A1: El área de cada rectángulo que tuve.

I: ¿Esos rectángulos son superiores o inferiores, qué tipo de rectángulos esta trazando?

A1: Inferiores.

I: ¿Qué haría si quiere aproximar más?

A1: Y si quiero aproximar mas…

I: ¿Qué haría?

A1: Esta función la podría trabajar…

I: ¿Cómo obtendría las áreas de los rectángulos?

A1: De base la longitud del subintervalo que en este caso viene siendo 1, por la altura que seria la función evaluada en el extremo derecho de cada uno de los intervalos.

I: ¿Cuántos rectángulos debe trazar para aproximar el área?

A1: ¿Para aproximar el área? A través de un proceso del límite, puedo hallar la aproximación.

I: ¿Cómo es un proceso de limite, qué quiere decir con esto?

A1: A través de la integral, con proceso limite de una sumatoria de Riemann, cuando la norma tienda a cero.

I: ¿Qué quiere decir con esto, cómo lo haría con el proceso del limite de la sumatoria, qué tal si pasa de la gráfica a lo analítico?

A1: Del límite cuando la norma tienda a cero, sabemos que la norma es la medida que tiene el subintervalo mayor, entonces haciendo que la norma tienda a cero, a través del proceso de límite de esa sumatoria.

I: ¿Cuál seria la sumatoria?

A1: La sumatoria de x_k

I: ¿Cómo seria el procedimiento?

A1: ¿Por la sumatoria? Me hace el favor y me reitera la pregunta.

I: Tiene ya una gráfica.

A1: Si señor.

I: Tiene el área bajo la curva.

A1: Si señor.

I: Ha dividido todos los intervalos en subintervalos, ha trazado unos rectángulos que me dice que son inferiores.

A1: Si señor.

I: Me dice que los va a sumar para aproximar el área, me habla del límite de una sumatoria cuando la norma tiende a cero ¿Cómo seria ya pasando del gráfico de los rectángulos a esta fórmula analítica que me plantea?

A1: Sumando el área de cada uno de estos rectángulos.

I: ¿Cuál seria el área del primero y cómo la obtendría?

A1: Evaluando la x^2 en 1, por la longitud.

I: ¿Cuál seria el área del primer rectángulo?

A1: Seria 1 y sumándole el área del segundo.

I: ¿Cómo seria?

A1: Evaluándolo en 4.

I: ¿Por qué 4?

A1: Si porque, evaluó la base de estos rectángulos y va a ser1.

I: ¿Podría escribir los resultados que va obteniendo?

A1: Y evaluando la altura de ese rectángulo.

I: ¿Podría escribir todo eso que me esta diciendo?

A1: Si señor, entonces el primer rectángulo es igual a 1.

I: ¿De dónde obtiene el 1?

A1: Del área del primer rectángulo, que tiene de base 1 y de altura 1, porque evaluó en1.

I: ¿El segundo rectángulo?

A1: Este tiene de base 1, por la altura que la obtengo evaluando el segundo número que viene siendo 2 en la función, entonces queda 4.

I: ¿Qué otra forma diferente de la anterior podría utilizar para calcular el área bajo la gráfica?

A1: A través de la integral, que viene siendo la $\int_0^4 x^2\ dx$.

I: ¿Qué utilizaría para aproximar el área?

A1: ¿Para aproximar el área?

I: ¿La integral que le permite aproximar el área o calcular el área?

A1: Calcular el área.

I: ¿Hay diferencia entre los dos?

A1: Si, señor

I: ¿Cuál?

A1: Que cuando me dicen aproximarla viene siendo un resultado casi igual y cuando es el área es lo que mide entre la curva y la recta.

I: ¿El área o la integral?

A1: Cuando me dicen calcular el área, es el valor que tiene el área que hay entre la curva y las rectas respetivas en este caso viene siendo…

I: ¿Y cuándo calcula la integral?

A1: Cuando calculo la integral hallo el área.

I: ¿Cuándo le piden aproximar qué hace?

A1: Doy un valor casi igual al que me están pidiendo.

I: ¿Y cuándo te piden calcular el la integral?

A1: Estoy hallando la integral definida geométricamente y sabemos que es el área que hay entre la curva y las rectas respectivas.

I: ¿Qué puede concluir de los valores obtenidos?

A1: Espere un momento.

I: ¿Podría explicarme verbalmente como continuaría el ejercicio para aproximar el área?

A1: Hallando y sumando las áreas de cada rectángulo.

I: ¿Cuántos rectángulos tendría que trazar?

A1: 4 rectángulos.

I: ¿Por qué 4?

A1: La medida de la base viene siendo 1 y la altura la obtengo evaluando la función.

I: ¿Sólo 4 rectángulos, puede utilizar más o puede utilizar menos?

A1: Trabajándolo con un proceso de limite puedo hallar una gran cantidad, los subintervalos se van al infinito.

I: ¿Qué quiere decir con eso que se van al infinito?

A1: Que haciendo que la norma tienda a cero, los intervalos también van tendiendo a cero.

I: ¿Para qué hace eso?

A1: Para aproximar el área.

I: ¿Por qué aproxima más así?

A1: Porque esa viene siendo la integral definida.

I: ¿Por qué? ¿Cuál de los dos procedimientos le da más aproximación, el que tiene o el que hace usando limites?

A1: A través de ese proceso del límite, es que obtengo casi igual el área de esa curva.

PREGUNTA Nº 4

I: ¿Puede explicarme cómo ha resuelto la tarea número 4?

A1: Calcular el área limitada por la gráfica de la función $f(x)$ igual (*el estudiante lee parte de la pregunta*).

I: ¿Qué función tiene ahí?

A1: Una función de valor absoluto.

I: ¿Cómo se define el valor absoluto?

A1: El valor absoluto es…

I: ¿Podría escribir cómo se define, trata de hacerlo, inténtalo por favor?

A1: El valor absoluto es el número positivo que tiene…

I: ¿Cómo define uno el valor absoluto de x?

A1: El valor absoluto de x es igual a $x_{,}$ si x es mayor que 0 y menos x, si x es menor que 0 (*el estudiante escribe e una hoja de respuestas*).

I: ¿Cómo queda la gráfica, cómo define el valor absoluto para esta función en particular?

A1: Es que realmente, con valores absolutos casi no he trabajado.

I: ¿Qué haría con esa función, inténtelo por favor?

A1: Pues la función siempre va a ser positiva.

I: ¿Por qué positiva?

A1: Porque el valor absoluto de un número va a ser positivo.

I: Si.

A1: Entonces los términos de la función van a ser negativos, no todos negativos.

I: ¿Cómo cree que seria la gráfica de esta función, cuál es la gráfica de la función valor absoluto de x?

A1: Valor absoluto de x viene siendo, con términos no negativos y es una recta.

I: ¿Podría trazarla?

A1: Viene siendo una…

I: ¿Cuál seria la gráfica para esta función en particular?

A1: De esta viene siendo…

I: ¿Qué haría con esta función para poderla graficar?

A1: Darle valores.

I: ¿Cómo seria dándole valores?

A1: Cuando la variable x valga cero, la función vale 1, entonces va a cortar al eje y en 1.

I: ¿Cómo quedaría la gráfica?

A1: Ya.

I: ¿Qué esta buscando, ahí?

A1: Los valores para graficar.

I: ¿Cuándo se va a graficar una función, qué es lo primero que se hace?

A1: Lo primero que tiene que hay que hacer es darle valores (*el estudiante traza un gráfico en una hoja de respuestas*).

I: ¿Para qué, le da valores?

A1: Para darle valores a la variable independiente que en este caso es x.

I: ¿Para qué?

A1: Para hallar los valores de la función que son los valores en donde va a estar ubicada la función en el eje y.

I: ¿Cómo podría calcular esa área, puede calcularla sin la gráfica, cómo lo lograría?

A1: A través de la integral.

I: ¿Cuál integral?

A1: La integral definida en el intervalo.

I: ¿Cómo seria con la integral definida, podrida plantearla?

A1: Si señor espere, teniendo la gráfica de una recta la planteo.

I: ¿Cuál seria la integral, podría plantearla?

A1: La integral, si señor.

I: Escríbala, por favor.

A1: Entre 0, es esta región.

I: ¿Entre 0 y qué?

A1: Entre 0 y 2.

I: ¿0 y 2?

A1: De la función

I: ¿De cuál función?

A1: Del $|2x-1|$ con respeto a x.

I: ¿Que región es la que va a calcular?

A1: La región…

I: Señálela

A1: La región en…

I: ¿Cuál es la región que va a considerar como la gráfica del valor absoluto?

A1: Le di dos valores y la trace, sin embargo a través de la integral no es necesario conocer la gráfica.

I: ¿Considera que esa integral está bien planteada?

A1: Si señor.

I: ¿Por qué?

A1: Porque, sabemos que la integral geométricamente es el área de esa región y la curva es continua en ese intervalo.

I: ¿Cuántas integrales necesitaría?

A1: Una integral definida, de $2x-1$ con respecto a x entre 0 y 2 y a esa integral le aplicamos las propiedades.

I: ¿Cuáles propiedades?

A1: Las propiedades de la integral definida que viene siendo…

I: ¿Qué propiedades aplicaría?

A1: La propiedad de la suma, que dice que la integral de una suma es igual a la suma de las integrales definidas, esta es la propiedad aditiva con respecto al integrando.

I: ¿Qué puede concluir de lo que me acaba de explicar?

A1: (*El estudiante va hablando y escribiendo en una hoja de respuestas*) Qué viene siendo ésta, igual a ésta, de 0, a, 2 de $2x$, menos la integral de 0 a 2 de 1 con respecto a x, y ahí podemos efectuar la integración.

I: ¿Está seguro que este planteamiento es correcto?

A1: Si señor.

PREGUNTA Nº 5

I: ¿Podría decirme cómo aproxima el área del problema número 5, cuando le dicen que aproxime un área, qué hace?

A1: Particionar el intervalo.

I: ¿Cómo aproxima el valor de esta área, podría rayar en la hoja adicional?

A1: Acá, lo trabajaría a través de las integrales y la integral la trabaje en el $[0, 3.5]$ donde está comprendida el área que representa la función (*el estudiante grafica en una hoja de respuestas*).

I: ¿Cómo calcula el valor de esta área por aproximación?

A1: A través de particiones.

I: ¿Cómo seria?

A1: Particionando el intervalo de cero a dos.

I: ¿Podría hacer en la hoja adicional lo que me esta diciendo, cómo lo escribe en el papel?

A1: Particiono el intervalo de 0 a 2.

I: ¿Cómo particiona sobre la gráfica, cuál sería el bosquejo de la gráfica?

A1: Con rectángulos.

I: ¿Cómo serian los rectángulos, podría trazarlos?

A1: Si señor (*el estudiante traza rectángulos sobre la gráfica en una hoja de respuestas*).

I: ¿Hasta dónde van esos rectángulos, cómo quedarían?

A1: Hallo primero.

I: ¿Cómo quedarían esos rectángulos?

A1: Hallo primero las particiones regulares, que son igual a $\Delta x = 2$, es igual a 1 de base.

I: Dibuje los rectángulos ¿Hasta dónde van, cómo son? Trácelos.

A1: Si.

I: ¿Esos rectángulos están por encima del área o por debajo del área?

A1: Por encima, estos 2.

I: ¿Cómo calcularía el área de cada rectángulo?

A1: Cada rectángulo tiene de base 1.

I: ¿Por qué 1?

A1: Porque es la medida de la longitud que tiene cada subintervalo, a través de la partición regular y de altura la función evaluada en el extremo derecho de cada subintervalo.

I: ¿Cómo aproxima el área que esta bajo el eje OX, podría graficarla?

A1: Si señor.

I: ¿Cómo trazaría los rectángulos, o cómo los aproximaría con otras figuras?

A1: ¿Cómo lo aproximaríamos?

I: Sobre el eje OX trazó rectángulos ¿Qué hace bajo el eje OX?

A1: Bajo éste también, porque esa es la otra parte del área de la figura.

I: ¿Cómo la aproximaría?

A1: También con los rectángulos.

I: ¿Cómo los traza? Indíqueme por favor.

A1: Particionaria.

I: Hágalo por favor.

A1: El $[2\,;3{,}5]$.

I: ¿Cómo seria, podría trazar los rectángulos?

A1: Haría la partición regular que viene siendo $\Delta x = 3{,}5 - 2$ dos rectángulos

I: ¿2 rectángulos?

A1: No.

I: ¿Cuántos? Veo líneas horizontales, oblicuas y verticales, cuáles son los rectángulos en la gráfica?

A1: Espere un momento, los rectángulos...

I: ¿Qué rectángulos podría ubicar sobre la gráfica?

A1: Estos rectángulos, a través de las particiones y sumando el área de cada rectángulo, hallo el área de esta parte de la curva que está comprendida entre el eje X, y la curva $2x-x^2$.

I: ¿Qué otros procedimientos puede aplicar para calcular el área?

A1: ¿Qué otro procedimiento? No, espera un momento.

I: Fuera de los rectángulos.

A1: No.

I: ¿Qué puede concluir de los resultados obtenidos?

A1: Que obtuve los resultados después de hallar el área de esa curva con base a la integral definida.

I: ¿Cuál es el área que halló? ¿Sólo se puede aproximar el área con la integral?

A1: Si, porque acá hallamos el área comprendida entre…

I: ¿Si le dicen que aproxime el área, aplica la integral o aplica otros procedimientos?

A1: Aplico otros procedimientos.

I: ¿Como cuáles?

A1: Como particiones hago aproximaciones con rectángulos, pero si me dicen que halle el área la hallo a través del proceso de la integral.

I: ¿Qué otras figuras geométricas utilizaría?

A1: Triángulos.

I: ¿Cómo seria con triángulos la gráfica, cómo aproximaría con triángulos?

A1: En esta gráfica, hallaría el triangulo rectángulo que me da 2 hasta 3.5.

I: ¿Cómo seria con el triángulo rectángulo sobre el área sombreada?

A1: De 2 a 3,5 y que va hasta 5.

I: ¿Qué haría sobre el eje OX?

A1: Hallaría un rectángulo que tiene de altura la función evaluada en 1, en el valor promedio que hay entre 0 y 2.

PREGUNTA Nº 6.

I: ¿Podría explicarme que quiere decir con este razonamiento de la pregunta número 6?

A1: Explique en términos del gráfico por qué (*el estudiante lee parte de la pregunta y dicA1: espera un momento que estoy observando*).

I: ¿Por qué utiliza sólo el registro algebraico para demostrar la propiedad?

A1: Si, espera un momento que ya estoy mirando el gráfico, porque la trabaje a través de la integral, pero acá me dicen que a través del gráfico.

I: ¿Por qué utiliza sólo las integrales?

A1: Porque es el área que hay entre curvas planas, entonces se pueden trabajar a través de la integral definida.

I: ¿Cómo seria gráficamente, podría hacer bosquejo en la hoja adicional?

A1: El cuadrado de x, esto es con respecto a x, con base al gráfico puedo hallar.

I: ¿Cómo harías gráficamente? Inténtalo.

A1: Hallando el área que hay.

I: ¿Podría sacar en la hoja aparte la región sombreada de cada una de las funciones?

A1: Tengo la región de la curva comprendida entre 0 y 3 hasta un número (*dice que está un poco tensionado*). Muestre, ya tengo la mayor que viene siendo la función, el área comprendida entre la función $y = x^2 + x$, en el intervalo $[0, 3]$ y aparte tengo (*el estudiante hace gráficas en una hoja de respuestas*).

I: ¿Por qué hasta tres y no otro valor?

A1: Porque aproximé un valor específico para trabajarlo con la integral, en este caso 3 aunque acá lo están generalizando puedo coger cualquier valor.

I: ¿Cómo seria con las otras gráficas?

A1: Con la otra gráfica, con la medina viene siendo la función $y = x^2$ hasta el mismo intervalo $[0, 3]$, entonces hallando éstas dos y la tercera que es la curva $y = x$.

I: ¿Cómo demuestra la igualdad con esas tres gráficas que tiene por separado?

A1: ¿Cómo demuestro el área que hay de las otras dos?

I: ¿Qué haría gráficamente para demostrar la igualdad?

A1: Espera un momento pienso un poquito.

I: ¿Podría compararla?

A1: Si señor.

I: ¿Cómo?

A1: Comparo, seis, cero (*el estudiante susurra mientras va pensando*), si acá podemos observar que a través de la comparación tenemos la misma área.

I: ¿El área de quién, qué pasa geométricamente?

A1: ¿Geométricamente? Estoy observando que como acá nos piden hallar la integral de la función mayor que está por encima de las otras dos y le aplican las propiedades de la integral definida, pero si hallamos la integral de cada uno de las funciones.

I: ¿Sólo se puede comparar si halla la integral de cada una, gráficamente es difícil?

A1: Si, un poco.

I: ¿Por qué?

A1: Porque el área que tenemos acá es el área comprendida entre la curva $y = x^2 + x$ y el eje X, entre las rectas $x = 0$ y $x = 3$, pero si hallamos el área de cada una de las funciones que están por debajo de esta función...

I: ¿Tiene otra forma de demostrar la propiedad?

A1: No, si sumamos esas áreas no se da esa propiedad.

PREGUNTA Nº 7.

I: ¿Qué razones tiene para decir el valor de verdad de estas proposiciones en la pregunta 7?

A1: Espera un momento, en los apartados 7a…

I: ¿Cuáles son los criterios que lo llevan a este razonamiento?

A1: Acá estamos aplicando el…

I: ¿Está de acuerdo con los valores que le da a la proposición 7a y 7b?

A1: No señor, porque…

I: ¿Por qué?

A1: Porque la derivada de $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ no viene siendo $F(b) - F(a)$?

I: ¿Por qué?

A1: Porque falta es el cociente entre $F(b) - F(a)$.

I: ¿Con qué elementos matemáticos del cálculo integral relaciona la primera proposición?

A1: Con el teorema fundamental del cálculo integral.

I: ¿Cuál considera que es el valor, no esta de acuerdo con el valor que habías colocado antes?

A1: No señor.

I: ¿Por qué?

A1: Porque la derivada de $f(x)$ viene siendo igual al cociente entre la diferencia de $f(b)\ y\ f(a)$ sobre $b - a$, entonces acá la pregunta la respondí mal.

I: ¿Cuál considera que es la respuesta?

A1: Es la…

I: ¿Cuál considera en este momento que debe ser el valor de la proposición, o, no está de acuerdo con el valor que tiene?

A1: Espera un momento, no estoy de acuerdo.

I: ¿Por qué?

A1: Porque, no me están pidiendo hallar áreas y la integral se utiliza para hallar áreas.

I: Pero no le están pidiendo hallar un área le están dando una proposición, le están dando una afirmación.

A1: Entonces si la antiderivada de x es igual a la antiderivada de $g(x)$ en el intervalo $[a, b]$…

I: Bueno y en la proposición b.

A1: Si f es continúa en ab entonces f.

I: ¿Cuáles son los criterios que le llevan a este razonamiento?

A1: Porque, la integración incluye, continuidad.

I: ¿Qué quiere decir con estos argumentos?

A1: Es decir, que si una función es continua en cierto intervalo, la podemos integrar.

I: ¿Qué quiere decir que una función sea continua?

A1: Que no tenga saltos y que en todos los puntos del intervalo la función esté definida.

I: ¿Considera que el argumento de la proposición $7c$ es válido?

A1: Acá, la puse falsa.

I: ¿Está de acuerdo con ese valor?

A1: La integral como le decía esta bien hecha pero…

I: ¿Está seguro que esta bien hecha?

A1: Muestre.

I: ¿O existe algo con lo que no este de acuerdo?

A1: Un momento la observo otra vez de nuevo (*el estudiante susurra mientras piensa*), puedo rayar acá, porque está mal hecha.

I: ¿Por qué esta mal hecha?

A1: Integrando si esta bien hecha, pero el valor no.

I: ¿Quiere decir que el problema está es en el signo de la respuesta?

A1: Si señor, la integral está bien pero si es para hallar un área…

I: ¿Le piden plantear la solución de una integral o le piden un área tal como está planteada la proposición?

A1: Si me piden hallar un área está mal hecha, pero si me piden hallar el la integral está bien hecha.

I: ¿Qué le plantean en este ejercicio?

A1: La integral, entonces está bien hecha y contesté que es falsa.

I: Entonces, no esta de acuerdo hoy con la respuesta.

A1: No, no estoy de acuerdo.

I: ¿Por qué?

A1: Porque esta bien hecha la integral.

I: Completamente seguro que esta bien hecha.

A1: Si señor.

PREGUNTA Nº 8.

I: ¿Cómo le explicaría a un compañero el significado de la $\int_a^b f(x)\,dx$?

A1: Que es un proceso del límite de una sumatoria de Riemann.

I: ¿Qué quiere decir un proceso del límite de una sumatoria de Riemann?

A1: Eh.

I: ¿Qué es un límite?

A1: ¿Un limite? Es cuando hallamos un valor donde la función presenta algún problema

I: ¿Un problema?

A1: Por ejemplo, cuando tenemos $f(x)=\frac{1}{x}$, entonces hallamos el límite, cuando la variable independiente, en este caso x tienda a ese valor que no puede tomar el cero, porque ahí la función no está definida.

I: ¿Que tal si eso que me acaba de decir lo aplica en el numeral 7c del ejercicio anterior?

A1: Muestre espere un momento, pues la función ahí no va a tener problema y va a dar la constante.

I: ¿Qué es una suma de Riemann?

A1: Espera un momento.

I: ¿Qué es para usted una suma de Riemann?

A1: Espere ya se la defino, (*el estudiante comenta: no es que uno coge estos sin haber estudiado*).

I: ¿Cuál es su propia definición de integral definida?

A1: Espera un momento, pienso un poquito, tengo una clase estábamos en...

I: ¿Cuál es?

A1: Espera, el significado matemático es lo mismo que decir significado geométrico o por qué significado matemático, viene siendo a través del proceso de un límite y el geométrico viene siendo el área.

I: El significado matemático es el concepto que tiene de integral definida, cuando le pido el significado matemático, hago referencia es el concepto que tiene mentalmente de integral definida ¿Cómo le explicaría a alguien en este momento el concepto de integral definida?

A1: Bueno.

I: ¿Cómo lo entiende, cómo está en su mente este concepto en el momento?

A1: Es un proceso del límite de una suma de Riemann, cuando la norma va tendiendo a cero.

I: ¿Cuál es su propia definición de integral definida?

A1: Mi propia definición, es hallar el área, geométricamente o es hallar el área que hay entre una curva y una recta o entre varias curvas en un intervalo.

I: ¿Entonces una integral definida es un área?

A1: Geométricamente es un área, pero en si es un proceso limite de una suma Riemanniana.

I: ¿Si tuviera que explicar en este momento el concepto de integral definida cómo empezaría, en esta hoja cómo lo haría, quiero que me explique el concepto de integral definida cómo empezarías a explicarme?

A1: Comenzaría explicándole que es una partición, luego construiríamos los rectángulos que tienen como longitud la partición del subintervalo y de altura la función evaluada en el extremo derecho de cada subintervalo, así hallaríamos una aproximación del área de esa curva y luego hallamos la suma de todas las áreas de cada uno de los rectángulos y obtendremos la aproximación de esa área, luego a través de un proceso de límite de esa suma Riemanniana.

I: ¿Quiere decir que cuando hablo de integral definida necesariamente tengo que abordar el área?.

A1: Así lo explicaría para que lo comprendan más fácil.

I: ¿Pero el área y la integral son lo mismo?

A1: La integral definida en geometría si viene siendo el área.

I: ¿Dónde no lo es?

A1: También se puede utilizar en otros campos que no los…

I: ¿Qué seria la Integral Definida, el área u otra cosa?

A1: Un proceso límite de una suma Riemanniana, cuando la norma va tendiendo a cero.

I: Muchas gracias por estar con nosotros.

A1: Eliécer muchísimas gracias a usted, ahí, disculpa millones de errores.

ENTREVISTA (A2).

PREGUNTA Nº 1.

I: ¿Podría explicarme cómo obtuvo esta respuesta con relación a la pregunta número 1?

A2: Si, suponiendo que el área de la región rayada tiene como base el $[3, 9]$ de longitud 6 unidades y por altura 8 unidades.

I: Puede argumentar de forma general.

A2: (*El estudiante dice en voz baja*) no hay necesidad de leer esto.

I: ¿Por qué justifica las cotas de esa forma?

A2: La región rayada tiene como base el $[3, 9]$ y como altura aparentemente 8, entonces me preguntan, por qué la región rayada es mayor que 12 y menor que 48, lo que hago es trazar el rectángulo, completar el rectángulo de base 6 unidades de 3 a 9 y de altura 8, entonces eso me da 48 unidades cuadradas, me dice que la región rayada es mayor que 12 y menor que 48, entonces claro, es menor que 48, porque la región completa del rectángulo que acabo de utilizar para tomar una medida más bien intuitiva de la región que me piden mide 48 y como la región rayada es una subregión del rectángulo mayor de 48 unidades, lógicamente va a ser menor que 48.

I: Me podría explicar sus argumentos con relación a la parte intuitiva ¿Qué significa cuando utiliza ese método?

A2: Digo intuitivo porque no tengo la función y aparentemente la altura del rectángulo que estoy utilizando es 8, o sea mirando el gráfico, por eso digo aparentemente porque no puedo asegurar, pero viendo que el área del triángulo que utilizo es 48 y la región es obvio que la región es una subregión del rectángulo mayor de 48 unidades, por eso digo intuitivamente porque no tengo coordenadas, no tengo con que asegurarlo.

I: ¿Cómo ha usado las condiciones del enunciado del problema?

A2: Para mi no han sido fáciles de seguir, nos dice que el área rayada es mayor que 12 y menor que 48, por lo que acabo de decir, porque si puedo dar valores más ajustados, no me preguntan otra cosa.

I: ¿Puede utilizar otros métodos para aproximar el área, cuáles?

A2: Otros métodos, hay varios, no se, tal vez trazar los rectángulos.

I: ¿Cuáles, cómo seria?

A2: Seria haciendo una partición para dividir el área rayada en regiones rectangulares y sumar esas áreas para dar un valor aproximado.

I: ¿Por qué en regiones rectangulares?

A2: En regiones rectangulares, porque creo que es la figura geométrica más precisa para determinar un área de estas, podrían ser círculos, podrían ser triángulos, pero los rectángulos debido a que sus bases son iguales y me permite abarcar más, ser más preciso a la hora de sumar un área (*el estudiante dibuja en una hoja de respuestas*).

I: ¿Qué quiere decir con ser más preciso?

A2: Que al sumar las áreas, digamos que si fueran de pronto círculos me quedarían demasiadas regiones que no se estaría integrando, que estaría dejando por fuera del área pedida.

I: ¿Cómo son esos rectángulos que acaba de trazar?

A2: Son rectángulos de igual base.

I: ¿Cómo son sus longitudes en cuanto a la altura?

A2: Sus longitudes con respecto a la altura, es menor.

I: ¿Qué tipo de rectángulos acaba de trazar?

A2: Son…

I: ¿Superiores al área sombrada, o inferiores al área sombreada?

A2: Son inferiores las sumas de las áreas de todos, son inferiores por supuesto porque es una aproximación.

I: ¿Podría trazar rectángulos superiores?

A2: De poder trazarlos, si, pero no.

I: ¿Quién le daría mayor aproximación, los rectángulos superiores o los rectángulos inferiores?

A2: Los inferiores.

I: ¿Por qué los inferiores?

A2: Porque, los inferiores siempre los puedo dividir de manera que las áreas pequeñas que me quedan y que estoy sumando sean cada vez menores para obtener un área aproximada.

I: A partir de esos rectángulos que me acaba de trazar ¿Podría obtener un valor numérico, cómo seria?

A2: Seria hacer una sumatoria.

I: ¿Cómo seria, podría explicármelo?

A2: Seria por ejemplo, la sumatoria 1, 2, 3, 4, 5, 6,.. A 6 que estamos trabajando, con esta función vamos hallar la Δ_x que seria la base de cada rectángulo.

I: Si.

A2: Entonces, seria la sumatoria de la altura de la función en el punto.

I: ¿Si reemplazara esa expresión analítica por valores numéricos que obtendría?

A2: Seria un área.

I: ¿Cómo seria numéricamente, cuánto le daría?

A2: A ver, seria 1, 2, 3, 4, 5, 6 seria 1, la sumatoria de 1, acá tendría que tener los valores de la función si quiero dar valores numéricos.

I: ¿Cómo calcularía el área de esos rectángulos, o no la podría calcular?

A2: Si podría por una aproximación.

I: ¿Podría hacerlo numéricamente?

A2: Esto es una curva, haría las particiones, partiría en seis e incluiría rectángulos.

I: ¿Cuántos rectángulos necesitaría?

A2: Entre más se tenga mejor.

I: ¿Qué quiere decir entre más se tenga mejor?

A2: ¿Qué quiere decir más aproximada?

A2: Más cercana al área real de la región que se pide.

I: ¿Cómo obtendría las áreas de esos rectángulos numéricamente, cuáles serian?

A2: Aquí supongo que la altura como ya dije es 8, la que aparece en la gráfica, que es 8 el área, digo la altura del primer rectángulo que es el mayor, seria un 8 menos, vamos a llamar esto $8-y$, llamémoslo la altura de un rectángulo, la longitud que se le resta al rectángulo, porque obviamente queda que la base dentro de la región siempre va a quedar un área, entonces uno espera que las áreas que sobran de los demás rectángulos sean muy similares a estos, eso depende de la curva.

I: Si.

A2: Espera entonces la sigo llamando y, diría que es muy aproximada a esa, entonces la base es 1 y si estamos trabajando de 3 a 9, me quedarían 6, en este caso 8, menos la longitud que me falta por 1, esto seria casi de 8 unidades cuadradas.

I: ¿Qué haría después de tener las áreas de cada uno de los rectángulos?

A2: El área del primer rectángulo seria aproximadamente 8 unidades cuadradas, la del segundo, serian 6, serian 8 unidades, tendría que hacer un gráfico mejor.

I: ¿Cuál es la base de cada rectángulo?

A2: 1.

I: ¿Cuál seria el área del segundo rectángulo?

A2: El área del segundo seria 1, por su altura que seria 8 menos, estoy tomando como referencia la altura mayor, 8 menos, calculando seria unas dos veces y, seria más o menos el área, suponiendo que la curva me permite que las áreas sobrantes sean más o menos iguales que sean áreas parecidas.

I: ¿En la primera obtuvo 8 unidades, en la segunda numéricamente cuanto seria?

A2: Numéricamente ahí, tendría que hacer un gráfico mejor, podría dar mejor aproximación, porque acá, tengo que hacer un área mejor que la que hice, (*el estudiante susurra mientras va pensando*). Seria 1, 3, 4, 5, 6, suponemos que son iguales, tenemos 8, entonces el primero lo voy a trazar por acá, el segundo acá, el tercero acá, el cuarto acá, el quinto por acá , el sexto por acá, bueno de tres a nueve, entonces seria primero 1 por, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, seria 7,5 unidades cuadradas, más el segundo, seria 1 por 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, seria 6,5 unidades cuadradas, el tercero seria 5,5, el cuarto 4,5 , 3,5 +2,5 unidades cuadradas (*el estudiante hace estos cálculos en una hoja de respuestas*).

I: ¿Qué hace ahora con esas áreas?

A2: Sumarlas.

I: ¿Qué valor obtendría?

A2: Seria 16, 13, y 5, 18, 22, 25, y dos, 27, seria 1, 2, 3, 4, 5, 6, por 5, 30 seria 30 unidades cuadradas.

I: ¿Podría aplicar otro procedimiento diferente que le permita una mejor aproximación del área y que justifique más las cotas?

A2: Seria, hacer más rectángulos cada vez más pequeños.

I: ¿Por qué más rectángulos y por qué cada vez más pequeños?

A2: Más pequeños para que se ajusten más a la curva de la gráfica de la función y por lo tanto las áreas que sobren sean cada vez más pequeñas.

PREGUNTA Nº 2.

I: ¿Puede explicarme cómo ha resuelto la tarea de la cuestión número 2?

A2: Dice que dibuje la gráfica, creo que la gráfica de esto no tiene problema, seria calcular gráficamente el área de la región, aquí me piden el área de la región sombreada, el área comprendida entre la integral de $4x$, evaluada en el intervalo $[-2\,,2]$.

I: ¿Qué figuras se formaron cuando graficó la función?

A2: Se formaron triángulos.

I: ¿Cómo calcula gráficamente esa área?

A2: Gráficamente hablando en términos de integrales.

I: ¿Le piden calcular gráficamente, qué haría?

A2: Tengo la base que es de 0 a 2, es decir que la base mide dos, necesitaría la altura.

I: ¿Cómo obtiene la altura?

A2: La altura, seria de 0, 2, seria 8, eso fue lo que hice acá.

I: ¿De dónde obtiene el 8?

A2: Lo que hice acá fue trazar el triángulo.

I: Si.

A2: Y dije que es un triángulo de área 2 por 8.

I: ¿De dónde obtiene la base, me dice que es 2, cómo obtiene la altura 8?

A2: Lo que hice acá fue hallar la intercepción de la gráfica cuando pasa por el origen, entonces el punto de intercepción entre la grafica y la recta $x=2$ es la altura.

I: ¿De dónde obtiene el valor de 8, qué le representa este valor?

A2: La altura.

I: ¿Cómo obtiene la altura de ese triángulo?

A2: Si, la altura es el punto máximo, es la intercepción entre la recta $x=2$ y la gráfica de la función en el punto en que se interceptan y necesito la altura para poder calcular.

I: ¿Cómo obtiene esa altura máxima, ese punto 2, 8?

A2: Lo que hice fue calcular el punto, o sea reemplazar x por 2

I: ¿Cuál x?

A2: El x de la función $f(x)$.

I: ¿Por qué duplica esa área?

A2: Porque el triángulo que me queda en el tercer cuadrante es de área similar.

I: ¿Qué relación puede establecer entre el área de la región bajo el eje OX y la región formada sobre el eje OX?

A2: Que son iguales.

I: ¿Por qué son iguales?

A2: Son iguales, porque ambos tienen por base la longitud 2, la base del triángulo que esta ubicado en el primer cuadrante es de 0 a 2, o sea es 2 unidades y la del triángulo que esta ubicado en el tercer cuadrante es de 0 a -2, pero como es una longitud, mide lo mismo, son 2 unidades y vuelvo y hago lo mismo reemplazo a x por menos 2 en la función $f(x)$ y me da -8, como estamos hablando de longitud, entonces son 8 unidades de longitud, o sea que las áreas son iguales, porque el área de una es 8 por 2 sobre 2 y el área de la otra es 8 por 2 sobre 2, son iguales.

I: ¿Qué valor obtuvo al calcular esa área gráficamente?

A2: Obtuve 16 unidades cuadradas, es decir la suma de las 2, la suma de los 2 triángulos.

I: ¿Cuando calcula la integral qué valor obtiene?

A2: Obtengo cero, de $\int_{-2}^{2} 4x dx$.

I: ¿Por qué al calcular el área dio un valor y cuando calculó la integral dicho valor dio cero?

A2: Acá me piden el área, entonces me ubico gráficamente en el plano cartesiano y no tomo en cuenta valores negativos, es decir estamos hablando de áreas las voy a sumar, en cambio la integral es cero, porque la diferencia es que esta es un área, estoy hablando de un área de 16 unidades cuadradas y la integral de esa función evaluada en ese intervalo es cero, entonces son diferentes.

I: ¿Cómo justifica que los 2 resultados sean iguales o diferentes?

A2: Porque a mi me enseñaron que una integral no es un área, o sea geométricamente representa un área, pero una integral no es un área, es un numero, en este caso la integral de esa función evaluada en el intervalo dado es cero y no es más.

I: ¿Qué relación establece entre el área bajo la gráfica y la integral definida?

A2: ¿El área bajo la gráfica y la integral Definida ¿ Me hablan de la integral y a mi me enseñaron que si voy hallar el área y estamos hablando de áreas utilizando integrales debo hallar su integral, o sea su área geométricamente, evaluando la función si la tengo en un intervalo dado, una función negativa que esta por debajo o sea que es menor que cero, cuando se evalúa toma valores negativos, entonces como el área debe ser positiva., se cambia el signo o lo que es se multiplica por menos uno.

I: ¿Cuál es la diferencia entre calcular un área y calcular una integral definida, podría explicarlo?

A2: ¿Calcular un área? Bueno, una vez más cuando voy a calcular un área me ubico acá en el plano cartesiano, a mi me enseñaron que la función mayor se evalúa, la integro en el intervalo dado, menos la integral que tiene la función menor y voy a obtener el área y la integral como le digo sigue siendo un número, o sea es muy diferente.

I: ¿Qué puede concluir de los resultados obtenidos?

A2: La conclusión es lo que he estado diciendo que la integral no es un área, geométricamente representa un área, pero sigue siendo un número, de ahí los resultados.

PREGUNTA Nº 3.

I: ¿Sabría comentarme como ha resuelto la tarea número 3?

A2: Dice que sea R la región entre la gráfica de la función $f(x)=x^2$ y el eje X en el intervalo $[0\,,4]$, utiliza particiones para aproximar el valor del área de la región R. Justifica tu respuesta (*el estudiante lee la pregunta*). Acá lo que hice fue que como me dicen que la integral de la función $f(x)$, evaluada de 0 a 4, utilizar particiones para aproximar el área, luego lo que hago es trazar el intervalo de 0 a 4 y hallar el área bajo la curva de esta función en el $[0\,,4]$, es decir el área que esta limitada por la gráfica de la función en las rectas $x=0$ y $x=4$, entonces lo que hago es nuevamente trazar rectángulos.

I: ¿Cuántos rectángulos?

A2: Los rectángulos que trace ahí, fueron sólo 4.

I: ¿Cuántos puede trazar, cuantos debería trazar?

A2: ¿Deberían?

I: Si.

A2: Para obtener el área precisa deberían ser infinitos.

I: ¿Qué significa trazar infinito número de rectángulos?

A2: Infinito número de rectángulos hablando en términos de sumatorias seria empezar trazando muchos, acá tengo 4, puedo trazar 8, puedo trazar 50, si los que quiera.

I: ¿Cuándo aproxima más, cuando tiene 4, cuando tienes 8 o cuando tiene 50?

A2: Cuando tengo infinitos, es decir cuando el número de particiones que hago es infinito, hablando en términos de integral, seria el límite de esa sumatoria de Riemann.

I: ¿Como queremos un valor aproximado del área cuál seria? ¿Podría escribirlo?

A2: Esta vez, si tengo los valores de la función, entonces lo que hice fue trazar 4, si 1, 2 y 3 acá y la base de cada uno es 1, entonces seria la sumatoria de f evaluado en ε_k, que seria la altura de la función, que es la altura del rectángulo trazado correspondiente y multiplicarlo por la base de cada rectángulo que es 1; es decir $f(x)$ evaluado en 1, es 1, es decir el primer triángulo seria 1 el área, luego el área del segundo, seria la altura de la función, evaluado en 2; es decir 4 (*el estudiante traza la gráfica*)**.**

I: ¿Por qué evaluado en 2?

A2: Porque 2 me daría la altura que necesito, la altura del segundo.

I: ¿Cuál es la base de cada rectángulo?

A2: Es 1, entonces simplemente conozco las alturas, me estaría dando las áreas por eso las trace con base 1 más sencillo que seria menos aproximado, el segundo seria 4, el tercero seria 9 y el cuarto seria 16, todo esto en unidades cuadradas, esto seria 5, 13 23, 29, unidades cuadradas, trazando sólo 4 rectángulos para hacer una pequeña aproximación (*el estudiante hace los cálculos en una hoja de respuestas*).

I: ¿Está seguro que es 29?

A2: Serian 25, ah no, 30 unidades cuadradas (*el estudiante corrige en una hoja de respuestas*).

I: ¿De qué otra forma diferente de la anterior podría calcular el área bajo la gráfica?

A2: Sin hacer esas aproximaciones, las que acabo de hacer, seria evaluando la integral.

I: ¿Qué podría hacer fuera de evaluar la integral?

A2: Seria hacer que el número de rectángulos que uno incluye en la región tienda al infinito.

I: ¿Qué seria eso, podría escribirlo por favor?

A2: Seria el limite, siendo n el número de particiones, cuando el limite de n tiende a infinito, o sea el numero de particiones de la sumatoria de las áreas de esos rectángulos, obtendría el área precisa, el área exacta de la región bajo la curva, seria ε_k por la altura que es $\Delta(x)$ de 1 al infinito si hago la partición tiende al infinito, desde 1 a n (*el estudiante escribe en una hoja de respuestas*).

I: ¿Qué necesitaría para expresar ese limite de esa suma?

A2: Tendría que tener, el limite de esta suma.

I: ¿Cuál seria, cómo lo obtendría, cuál es la base y cuál es la altura?

A2: La base es $\Delta(x)$, seria la base de todos.

I: ¿Y la altura?

A2: Es una partición regular y la altura seria $f(\varepsilon_k)$.

I: ¿Qué tiene planteado ahí, entonces?

A2: Tengo la sumatoria de las áreas de los rectángulos, que incluí en el área bajo la curva, es decir la partición.

I: ¿Qué le permite el límite de esa sumatoria, obtener una aproximación o el valor del área?

A2: El valor del área.

I: ¿Cuál es la diferencia con la anterior?

A2: La anterior, es que el número de particiones es finito, es decir que su área verdadera puede que sea muy aproximada, pero nunca va a ser igual, en cambio acá estoy haciendo que ese número de particiones sea infinito.

I: ¿Qué valor obtendría al hacer esto?

A2: Seria el valor del área bajo la curva de la función.

I: ¿Qué otro procedimiento podría utilizar diferente al limite de esa sumatoria?

A2: Seria la integral, esto es una integral.

I: ¿Cómo plantearía esa integral?

A2: Eso seria, hablando en términos del ejercicio, la $\int_0^4 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^4 = \frac{64}{3} - 0 = \frac{64}{3}$.

I: ¿Cuánto le daría el limite de esa sumatoria?

A2: El límite de esa sumatoria me daría $\frac{64}{3}$.

I: ¿Cuál es la diferencia entre hallar el límite de una sumatoria y calcular la integral?

A2: Para mí, la diferencia es que el procedimiento de las particiones para hallar el área con el límite de la sumatoria de Riemann se puede, pero es menos práctico.

I: ¿Qué quiere decir menos práctico?

A2: Que es más fácil utilizar la integral, para eso está la integral.

I: ¿Qué puede concluir de los valores obtenidos y del ejercicio en general?

A2: El valor que obtuve no deja de ser una aproximación lejana al valor real de la función, aunque las particiones que hice fueron sólo 4, el valor esta muy lejos del que pedían.

I: ¿Si le fueras a enseñar a un estudiante por primera vez a resolver este ejercicio cómo lo haría, por aproximación, por el limite, o integraría de una vez?

A2: Empezaría mostrándole el proceso, como es que se llega a una integral.

I: ¿Cuál es ese proceso, podría describirlo, cómo sería?

A2: Primero empezaría diciéndole que si necesito hallar el área bajo una curva de la gráfica de una función, o cualquier área utilizaría los rectángulos, porque como ya dije son las figuras geométricas que más se ajustan para hacer la aproximación para incluir rectángulos y sumar sus áreas, luego mostrarle que cuando esos rectángulos se hacen cada vez mayores, el área es cada vez más aproximada y si uno hace que el número de rectángulos sea infinito, va a obtener el área precisa, entonces ese seria el procedimiento y mostrarle que eso se define como el limite de una sumatoria de Riemann, que es lo mismo que tener una integral definida.

PREGUNTA Nº 4.

4I: ¿Puede explicarme como ha resuelto la tarea número 4?

A2: La 4 no la hice, no la resolví.

I: ¿Podría intentarlo, trata de hacerlo nuevamente, cómo seria?

A2: Seria…

I: ¿De qué manera calcularía el área de esta función?

A2: Con una integral.

I: ¿Por qué con una integral? Si ahí, no le mencionan la palabra integral.

A2: No, pero la asocio porque el problema dice calcula el área limitada por la gráfica de la función $f(x)=|2x-1|$, en el intervalo $[0, 2]$ y el eje x (*el estudiante lee la pregunta*).

I: ¿Cómo define usted el valor absoluto?

A2: Acá lo que me quiere decir es que están tomando en cuenta sólo los valores positivos, de la función.

I: ¿Cómo define ahora el valor absoluto de esta función?

A2: Seria más fácil haciendo el gráfico y considerar sólo los valores positivos, es decir mirando la gráfica (*el estudiante traza una gráfica*).

I: ¿Qué quiere decir, considerar sólo los valores positivos?

A2: Seria los valores que digamos en la gráfica, en el plano cartesiano están por encima del eje X .

I: ¿Podría indicarlos?

A2: Seria hallar esa integral.

I: ¿Podría indicar la región que va a calcular?

A2: La región entre cero y dos, pero a ver (*el estudiante ubica los valores en la gráfica*)

I: ¿Qué figuras se han formado?

A2: Seria 2, tengo 2 triángulos (*el estudiante forma 2 triángulos en la gráfica*).

I: Tiene 2 triángulos.

A2: Si.

I: ¿Cómo calcularía esa área?

A2: Seria con la integral nuevamente.

I: ¿Si tiene 2 triángulos sólo puede calcular con la integral, cómo lo haría sin usar la integral?

A2: Seria hallar la intercepción o sea hacer x, cuando x es igual a 2 y donde se encuentra.

I: ¿Dónde corta la recta el eje X ?

A2: La corta cuando x es igual a cero, es decir cuando $y = 0$ es decir en x .

I: ¿Cómo sería en x ?

A2: No, necesito hallar el área de esto.

I: Si.

A2: Y necesito hallar la intercepción.

I: ¿De dónde hasta dónde va esa área?

A2: De 0 a 2, me dicen calcular el área encerrada por la gráfica de la función en el intervalo $[0, 2]$, de $[0, 2]$ seria calcular este punto.

I: ¿Cuál es el valor en ese punto?

A2: Pues el valor en ese punto es $\frac{1}{2}$ que es cuando $y = 0$

I: ¿Y qué es $\frac{1}{2}$, ahí?

A2: Seria…

I: ¿Cómo obtiene $\frac{1}{2}$?

A2: $\frac{1}{2}$ es cuando hago $y=0$, hallo el intercepto de la grafica de la función con el eje X, entonces voy a obtener el intervalo que necesito, o sea tendría otro intervalo que es $\frac{1}{2}$ que va de $\frac{1}{2}$ a 2.

I: Si.

A2: Y esa seria la base del triángulo, del triángulo superior que está por encima, del eje X .

I: ¿Cómo podría llamar ese triángulo?

A2: Ese triángulo seria, llamémoslo x y tengo.

I: ¿Qué tiene?

A2: Y tengo otro triángulo pequeño.

I: ¿Cómo lo va a llamar?

A2: Z.

I: ¿Podría calcular el área de cada uno?

A2: Si, por supuesto.

I: ¿Cómo seria, hágalo por favor?

A2: Ya tengo la base que es de $\frac{1}{2}$ a 2, que seria 0,5 $\frac{1}{2}$.

I: ¿De quién, de qué triángulo?

A2: Del triángulo x, que es el mayor.

I: Escríbalo, por favor.

A2: Entonces el área del triangulo x es igual a la base.

I: Esa es la base ¿Cómo obtiene la altura?

A2: Digo que es $\frac{1}{2}$, es $\frac{3}{2}$, no $\frac{3}{2}$ que es la longitud de la base.

I: ¿Cómo obtiene la altura?

A2: La altura seria cuando $x=2$, se reemplaza en la función, es decir la altura seria 3, porque voy a calcular la intercepción de la gráfica de la función, con la recta $x=2$, luego hago $x=2$ para hallar la altura, o sea el valor de la función en 2, entonces 4-1 tres, es la base, por la altura de la de la función.

I: ¿Cuál es la altura?

A2: 3.

I: ¿Cuánto da el área?

A2: Base por altura sobre 2, entonces seria $\frac{9}{4}$, el área del triángulo x, base por altura sobre 2, estamos bien $\frac{9}{4}$ si seguro, ahora calcular.

I: ¿Esta seguro que la altura es 3?

A2: A ver, $\frac{3}{2}$ de base y de altura 3.

I: ¿Cómo obtiene la altura?

A2: Haciendo $x = 2$

I: ¿Por qué $x = 2$?

A2: Porque, es el extremo del intervalo en el que me piden que halle el área.

I: ¿Cómo obtiene el área del segundo triángulo?

A2: El área del siguiente triángulo, el intervalo $[0\,,2]$, seria la base del triangulo Z pequeño, seria $\frac{1}{2}$ de la base, el intercepto como trace la gráfica, sé que se intercepta con el eje y, es decir la altura es 1, como estamos hablando de longitud, entonces el área es $\frac{1}{2}$ dividido 2, que seria $\frac{1}{4}$ y tenemos las 2 áreas.

I: ¿Cuál seria el área total?

A2: El área total seria igual a $\frac{1}{4} + \frac{9}{4}$ seria $\frac{10}{4}$, $\frac{5}{2}$ el área total.

I: ¿Qué otro procedimiento podría utilizar para calcular esa área?

A2: Otro procedimiento, serian las integrales.

I: ¿Cómo lo haría por la integral?

A2: Seria la integral definida desde $\frac{1}{2}$ a 2 del valor absoluto de $2x - 1$.

I: ¿Esta seguro que es desde un $\frac{1}{2}$?

A2: Lo que hago es calcular primero el área del triángulo mayor llamado x, entonces, como sé que el área comprendida entre el eje X, la gráfica de la función y las rectas $x = \frac{1}{2}$ y $x = 2$, es el área que tengo por encima del eje X, entonces voy a calcular primero esa, es decir, eso seria la integral definida desde $\frac{1}{2}$ hasta 2 de la función que es valor absoluto de $2x - 1$, como la otra esta por debajo (*el estudiante plantea las integrales en una hoja de respuestas*).

I: Si.

A2: Seria sumar las áreas.

I: Hágalo por favor.

A2: Seria menos.

I: ¿Por qué menos?

A2: Porque el área está por debajo y se supone que esta área me va a dar negativa como sé que va a dar negativa, entonces la presido del signo menos, porque lo que busco es sumar las áreas, entonces como el valor va a dar negativo con el menos se va a volver más, o sea, se van a sumar que es lo que buscamos con la $\int_0^{1/2} |2x-1|dx$, esa seria el área de la misma función.

I: ¿Cuánto le daría al calcular esas integrales?

A2: Al calcular esa integral, a ver seria…

I: ¿Cómo lo haría?

A2: Lo que haría seria $\frac{5}{2}$, no.

I: ¿Cómo calcularía esa integral?

A2: Tendría que dar $\frac{5}{2}$ entonces seria, valor absoluto, podría convertir esto, (*el estudiante susurra mientras va pensando y escribiendo*), $\frac{1}{2}$ de esto de $2x-1$ de x, vamos a invertir y vamos a dejar acá $\frac{1}{2}$, más cero de $2x-1$ de x, vamos a calcular la integral de este, más esto, seria la integral de 2, de menos este, por acá vamos a sumar, restar, seria -5 (*continua susurrando*) no a ver, con esta integral, aquí tengo un inconveniente con el valor absoluto.

I: ¿Por qué?

A2: No, hasta ahora no he trabajado mucho ésta integral.

I: ¿Cómo define el valor absoluto de x?

A2: Seria el valor absoluto ¿De la función x? Estas propiedades no las recuerdo ahora.

I: ¿Qué es más fácil calcular esa área geométricamente o a través de la integral?

A2: A través de la integral seria más fácil, si aplicando la integral.

I: ¿Y en este caso?

A2: En este caso, para mi seria ya que no puedo hacer la integral calculando el área de los triángulos que también seria como muy sencillo.

I: ¿Qué puede concluir de los procedimientos que ha utilizado?

A2: Se supone que la integral siempre va a ser mejor porque es un método más directo para hallar el área pedida, pero no la puedo utilizar en este caso.

I: ¿Por qué no la puede utilizar?

A2: Porque no sabría como hacer esta integral, entonces tengo otro método para hacerlo.

I: ¿Qué valor supone que debe dar esa integral?

A2: $\frac{1}{4}$, digo $\frac{5}{2}$ que es el área total.

I: ¿Cree que los 2 valores van a ser iguales?

A2: Si.

I: ¿Por qué?

A2: Tienen que ser iguales.

I: ¿Por qué tienen que ser iguales?

A2: Porque creo que los cálculos que hice hallando el área de los triángulos por geometría son correctos, pues si son correctos, tienen que ser iguales el área que halle y la integral.

PREGUNTA Nº 5.

I: ¿Cuándo le dicen que aproxime un área que hace en la pregunta número 5?

A2: Trazar los gráficos, los rectángulos.

I: ¿Cómo calcula el valor de esta área por aproximación?

A2: El valor de esta área, sólo aproximando.

I: ¿Cómo aproximaría en el problema 5?

A2: Seria hacer lo mismo.

I: ¿Qué seria lo mismo?

A2: Trazar los rectángulos en el área que me piden calcular por aproximación, en la región rayada, seria primero trazar la gráfica, nuevamente trazar triángulos.

I: ¿Cuántos?

A2: Digamos que de cero a dos, en este caso seria mejor trazar 4 rectángulos.

I: ¿Qué clase de rectángulos son esos?

A2: Son rectángulos de base $\frac{1}{2}$.

I: ¿Son mayores al área o menores al área?

A2: Son menores.

I: ¿Cómo se llaman cuando son menores al área?

A2: Cuándo son menores ¿Cómo?

I: ¿Cómo se llaman esos rectángulos cuando son menores al área?

A2: Pues no se exactamente hablando en el contexto, serian en las particiones del área pedida.

I: ¿Qué esta haciendo ahí, sobreestimaciones o subestimaciones?

A2: Estoy haciendo subestimaciones.

I: ¿Por qué subestimaciones?

A2: Porque la suma del área que me dan de todos los triángulos, es menor que el área pedida, por eso sé que es menores.

I: ¿Cuál seria la base de cada rectángulo?

A2: Seria $\frac{1}{2}$, estamos aparentemente en el intervalo de $[0\,,2]$ y trace 4.

I: ¿Cómo obtiene las alturas de cada rectángulo?

A2: Seria la función evaluada en cada punto, el punto que me da la altura de cada rectángulo.

I: ¿Cómo aproxima el área que esta por encima del eje OX y la que esta bajo el eje OX?

A2: El área que esta por encima, seria trazando esta gráfica, acá se entiende que trace 4, no se ve muy claro, pero aquí tenemos el área en el $[2\,,3{,}5]$ aparentemente, para mi lo mejor seria trazar 3, sólo estamos hablando de aproximaciones, entonces haciendo las particiones del área que esta por de bajo del eje X, me quedan rectángulos de base $\frac{1}{2}$ y nuevamente la altura me la da la función (*el estudiante traza gráficas en una hoja de respuestas*).

I: ¿Podría indicar los rectángulos en cada una de las regiones?

A2: A ver, seria base $\frac{1}{2}$ y tenemos acá…

I: ¿Hasta dónde va ese rectángulo, a ver trácelo?

A2: Bueno, este va hasta acá, y como es una curva y (*el estudiante dice, es que acá me quedó muy feo el gráfico, pero lo voy a volver hacer acá que sea mejo*), serian cuatro, 1, 2, 3 y 4, seria $\frac{1}{2}$, serian 2, serian $\frac{5}{2}$, $\frac{3}{2}$, 1,5 y este es 2, entonces nuevamente la altura la trazo y este rectángulo vamos a tomarlo hasta acá, este no se muestra muy bien, tendría que hacer más acá, este hasta acá, acá, serian 4, bueno así más o menos.

I: ¿Qué hace una vez que aproxima el área que está por encima del eje OX y la que esta bajo el eje OX?

A2: Sumarlas, me piden toda el área rayada, seria la suma de las 2.

I: ¿Puede dar la aproximación de un área negativa?

A2: Esta área negativa seria la que esta por debajo.

I: ¿Pero daría un área negativa?

A2: Lo que pasa es que eso es de interpretación, porque si estoy hallando el área y digamos me da -5, como sé que es un área, pues obviamente lo voy a tomar como 5, y si estoy trabajando otro problema digamos la integral me dio -5 pues eso ya depende del problema que uno esté trabajando.

I: ¿Qué otras aproximaciones geométricas y o numéricas puede realizar?

A2: ¿Geométrica?

I: O numérica.

A2: Seria calcular el área que esta por debajo del eje X , calcularla como un triángulo, tiene una forma de triángulo, entonces eso va de 2 a 3,5, y vamos hacerlo, aparentemente va hasta -5, y como la curva es muy suave, entonces esto va hasta -5, esto se asemeja a un triángulo rectángulo, de base 1,5 de longitud y como altura 5, es decir el área de la región bajo el eje X (*el estudiante traza otro gráfico por separado*).

I: ¿Cómo obtiene la altura, por qué dice que la altura es 5?

A2: Porque mirando la gráfica aparentemente va hasta -5.

I: ¿De qué otra forma diferente podría hallar la altura?

A2: Seria acá, nunca le podría dar la altura exacta.

I: ¿Por qué?

A2: Porque, para hallar la altura tendría que hallar el intercepto de la gráfica de la función y la recta x, igual puede ser 3,5, puede ser 3,4 acá no se especifica.

I: ¿Qué otros procedimientos puede aplicar para calcular el área?

A2: Aparte de los que acabamos de mencionar, la integral.

I: ¿Cómo seria con la integral?

A2: La $\int_0^2 \left(2x - x^2\right) dx$, que es el área que esta por encima de la función.

I: ¿Cuántas integrales utilizaría?

A2: 2.

I: ¿Por qué?

A2: Porque la otra área está por de bajo del eje X , es decir me va a dar negativa.

I: ¿Qué le va a dar negativa, la integral o el área?

A2: La integral me va a dar negativa y como estamos hablando de áreas necesito que sea positiva, necesito sumarlas, entonces como esta por debajo lo que hago es restarla, como dije antes, hacer que esté precedida por el signo menos.

I: ¿En caso de la integral dar negativa puede explicarme porque da negativa si dice que el área debe ser positiva?

A2: Es más, le digo la integral no es el área, no es un área, por eso de ahí, que esto depende del problema que uno este trabajando.

I: ¿En este caso?

A2: En este caso, estamos trabajando áreas y debe ser positiva como va negativa la pongo precedida de un signo menos, porque sé que va a dar negativa.

I: ¿Qué puede concluir de los resultados obtenidos y por qué?

A2: De los resultados puedo decir que al hallar el área utilizando las integrales voy hallar el área exacta que me están pidiendo y si me pongo hacer sólo aproximaciones que fue lo hice van a ser sólo eso, aproximaciones, es decir, en este caso me están pidiendo áreas, una vez más depende de cómo uno interprete el problema.

I: ¿Qué es más fácil hacer aproximaciones o calcular el área y por qué?

A2: Eso pende (*el estudiante se ríe*). En este caso es más fácil hacer la integral.

I: ¿Cuándo utilizaría aproximaciones y cuándo utilizaría el cálculo del área a través de la integral?

A2: Utilizaría aproximaciones sino pudiera hacer la integral, si necesito hallar el área, si sé que el área que necesito la puedo hallar con una integral, el área precisa utilizaría integrales, pero sino puedo hacer la integral me tocaría hacer aproximaciones.

I: ¿O sea, que las aproximaciones sólo se hacen cuando no se pueden aplicar integrales?

A2: Si.

PREGUNTA Nº 6.

I: ¿Podría explicarme que quiere decir con los razonamientos que ha utilizado en la cuestión número 6?

A2: Esto es verdadero, lo que hice fue que aquí tuve una confusión de que fuera diferente, entonces a la función mayor que es igual a $y = x^2 - x + x$, me dicen que el área bajo esa curva es igual a la suma bajo la curva de $y = x^2$ y de la recta $y = x$ es igual a la suma de esas dos, entonces me dicen que en términos del gráfico, sólo viendo el gráfico lo único que se me ocurre es…

I: ¿Por qué ha utilizado el registro algebraico para demostrar la propiedad?

A2: Seria, porque…

I: Si, sólo el algebraico ¿Cómo lo haría utilizando un registro gráfico?

A2: Sé que la función $y = x^2 + x$ es mayor que $y = x^2$, pues evaluándola en el primer cuadrante como se muestra en la gráfica y que estas a su vez son mayores que la función $y = x$, como sé eso a mi lo único que se me ocurre gráficamente sin utilizar integrales ni nada seria el área, entonces hacemos el dibujo mejor (*el estudiante traza gráficas en una hoja de respuestas*), seria, $y = x$, como las 3 funciones están evaluadas en el mismo intervalo, las integrales están evaluadas en el mismo intervalo de cero a a, entonces sé que el área bajo la curva de la función $y = x^2$ es menor que el área bajo la curva de la función $y = x^2 + x$, porque me dicen que la suma de estas áreas, las sumas del área de la curva $y = x^2$, más la suma del área bajo la recta de $y = x$ son iguales al área bajo la curva de $y = x^2 + x$, entonces sé que $y = x^2$ es el área bajo la curva es menor que el área bajo la curva de $y = x^2 + x$, ahora seria demostrar que el área es menor, entonces lo que deduzco acá, seria demostrar que el área bajo la curva bajo de la recta de $y = x$, es igual al área comprendida entre la gráfica de la función $y = x^2 + x$ y la de $y = x^2$, es decir que acá $y = x$, o sea que esta área bajo $y = x$, es igual a esta, a la que está comprendida entre $y = x^2 + x$ y $y = x^2$, porque la menor es el área bajo la curva de $y = x^2$ y como la que está por encima es $y = x^2 + x$, entonces le voy a sumar el área de $y = x$.

I: ¿Cómo lo haría, de qué otra forma lo haría gráficamente?

A2: ¿Sólo gráficamente?

I: Si ¿Qué otra forma, qué tal si las saca a parte, la dibuja y compara?

A2: A ver…

I: ¿Cómo lo haría?

A2: En $y = x$, acá lo único que se me ocurre es utilizar la integral.

I: ¿La integral?

A2: Si, porque…

I: Pero le piden justificar gráficamente sin hacer uso de las integrales.

A2: Gráficamente, pues sé que $y = x^2 + x$ es igual a la suma $x^2 + x$, no la verdad para demostrar esto gráficamente lo único que alcanzo a concluir, es que seria demostrar que esta área, el área bajo la recta $y = x$, es igual al área comprendida entre $y = x^2 + x$ y $y = x^2$, seria esa mi conclusión.

PREGUNTA Nº 7.

I: ¿Qué razones tiene para decidir el valor de verdad de cada proposición en la pregunta número 7?

A2: A ver…

I: En la pregunta número 7.

A2: Acá en la 7a, me dicen que si $f^{'}(x) = g^{'}(x)$ en el intervalo $[a, b]$, entonces $f(b) - f(a) = g(b) - g(a)$ (*el estudiante lee la pregunta*), que si eso es igual, o sea que lo que necesito es saber si es falso o verdadero, luego concluyo que eso es falso, porque si f es una familia de antiderivadas, entonces va a existir una constante C, entonces interprete el problema así y digamos que tengo F mayúscula evaluado en x, más 4, derivo eso, y voy a obtener f minúscula, y G mayúscula evaluado en $x + 5$, entonces hablando en términos de integrales la derivada de eso me va a dar g.

I: Esta seguro de ese razonamiento

A2: A ver…

I: ¿Qué tal si mira bien la proposición nuevamente?

A2: No, acá lo que interpreto es que F mayúscula evaluada en x lo que tengo es una familia de antiderivadas.

I: ¿Con qué elementos del cálculo matemático relaciona la primera proposición?

A2: Con el teorema fundamental del cálculo integral.

I: ¿Qué dice el teorema fundamental del cálculo integral?

A2: Que si tengo, la integral de una función…

I: ¿Como seria?

A2: La $\int_a^b f(x)\,dx$, va a ser igual a F mayúscula, es decir que f derivada es igual a $f(x)$, entonces F mayúscula evaluado en a, b, es igual a $f(b) - f(a)$, y con base en esto fue que respondí, me dice que la derivada de F mayúscula, es igual a F', entonces interpreto que esto es una familia de antiderivadas, así lo relaciono.

I: ¿Qué es una familia de antiderivadas?

A2: Es el conjunto de todas las funciones que al ser derivadas me van a dar el integrando.

I: ¿Qué es una antiderivada?

A2: Es la función que al ser derivada me dan el integrando y como existe una constante arbitraria, sabemos que la derivada de una constante es cero, entonces por eso digo que la afirmación es falsa, porque puedo tener una, es decir supongamos que la antiderivada f evaluada en b f y g son iguales.

I: Si.

A2: Pero como existe una constante C, es decir, como ejemplo le doy acá si existe una constante C, al evaluar esa función en un mismo número que no van hacer iguales por que C es una constante arbitraria estamos hablando de una familia de antiderivadas, C puede ser cualquier número real, es decir para f, puede ser igual a 100.

I: ¿Pero ahí, me están hablando de una familias antiderivadas?

A2: Por eso, lo que hago es relacionarlo con integrales, con el teorema fundamental del cálculo.

I: Sigue afirmando que es falsa.

A2: Si, según como lo interpreté, si.

I: ¿Qué puede decir de la proposición 7b?

A2: Me dicen que si f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f es integrable en el mismo intervalo, y a la hora de la prueba no había visto integrales impropias.

I: ¿En la proposición 7b, podríamos hablar de integrales impropias?

A2: ¿En la proposición b?

I: Si.

A2: No hemos visto las integrales impropias.

I: ¿Qué tiene que ver esta proposición con las integrales impropias?

A2: La relaciono de la siguiente manera, dice que si f es continua en a, b, entonces f es integrable en a, b, acá respondí que existen funciones que no son continuas en un intervalo pero que son integrables en ese intervalo, es decir como una integral impropia.

I: ¿Está de acuerdo con la proposición?

A2: Entonces f es integrable en a, b, porque conozco funciones que no son continuas en un intervalo y se ha demostrado que su integral existe.

I: ¿Cuál es el valor que le da a la proposición?

A2: Acá lo que me dicen es falso, lo que me afirman es que si f es continua, no lo estoy interpretando mal, o sea, si f es continua en a, b, eso es cierto.

I: ¿Afirma entonces que la proposición es verdadera?

A2: Si, es cierto, porque si f no es integrable, es porque la función no es continua en alguna parte de ese intervalo, otra cosa es que existan unas que no son continuas en un intervalo, pero si existen en ese intervalo la integral, entonces es verdadera.

I: ¿Cuál es el razonamiento que hace acerca de la proposición 7c?

A2: La proposición 7c, bueno acá no vi el igual, si seria desde -1 en x^{-2}, esta integral seria mirarla, se supone que acá va un igual.

I: Si.

A2: Entonces evaluar la integral.

I: ¿Cómo seria?

A2: La integral desde -1 a 1, esto es igual a x^2 -1 es negativo, desde -1 hasta 1, que es lo mismo que tenemos acá, seria igual a 1, o sea -1, menos-1, seria -1, menos 1 a la menos 2, tenemos -1 acá, menos, más -1, haciéndola me da menos 2 (*el estudiante realiza los cálculos en una hoja de respuestas*).

I: ¿Está de acuerdo con el enunciado de la proposición?

A2: Si, estoy de acuerdo.

I: ¿Qué función esta integrando?

A2: La función x^{-2}.

I: ¿Entre qué valores?

A2: Entre -1 y 1, ah, 0 -1, $x-1$, 0, a ver, -1, es continua en -1 y 1.

I: ¿Qué valores hay entre -1 y 1?

A2: Esta cero, no tiene problema.

I: ¿Está seguro?

A2: Cero, si tiene problema.

I: ¿Cuál es el problema?

A2: Es discontinua.

I: ¿En dónde?

A2: En cero.

I: ¿Qué quiere decir, escríbalo por favor?

A2: Esto seria, $\frac{1}{0}$ (*el estudiante escribe estas expresiones en una hoja de respuestas*).

I: ¿Cuándo?

A2: Al reemplazar cero, si cuando $x=0$, cuando x esté elevado a la menos 2.

I: ¿Qué qué elementos del cálculo aparecen en esa proposición?

A2: En este caso, lo que hemos aprendido hasta ahora, es que esta integral es una integral impropia.

I: ¿Qué regla han aplicado ahí, para resolverla?

A2: Un limite.

I: ¿Qué han aplicado ahí para resolver esa integral, qué elementos del cálculo?

A2: Usted me pregunta acá en el ejercicio, la regla básica.

I: ¿Cuál regla, la regla de quién?

A2: La regla básica para integrales.

I: ¿Cómo se llama esa regla, de cuál regla habla?

A2: Lo que estoy aplicando, o lo que se hizo acá, no se.

I: ¿Esa regla se puede aplicar, ahí?

A2: No.

I: ¿Por qué no se puede aplicar esa regla?

A2: Porque, no es continua en el intervalo que se esta evaluando, es decir esta regla aquí no sirve.

I: ¿De cuál regla me habla?

A2: Es decir, si tengo la variable al sumarle 1 al numerador y dividirlo por el numerador.

I: ¿Pero fue eso lo que aplicaron solamente?

A2: Si, y luego de obtener esto, lo que veo es que sumaron uno al numerador y dividieron.

I: ¿Pero qué regla del cálculo están aplicando?

A2: Y luego aplicaron el teorema fundamental del cálculo.

I: ¿Qué parte del teorema fundamental del cálculo?

A2: Que si tengo la antiderivada y la evaluó en el extremo superior del intervalo.

I: ¿Cree que es correcta la aplicación de esta regla?

A2: No, no se puede aplicar.

I: ¿Por qué, qué haría entonces?

A2: Eso se resolvería como una integral impropia, porque la integral es impropia

I: ¿Por qué?

A2: Porque presenta una discontinuidad, ah no, espere a ver, de cero a infinito, cero, si es impropia.

I: ¿Cuál seria la gráfica de esa función?

A2: La gráfica de esta función, como es una discontinuidad infinita tiene una asintota.

I: ¿Cómo seria, podría hacer el esquema de la gráfica?

A2: Seria, -1, vale -1, 1 al cuadrado vale -1,…. (Susurra), 1, (Susurra) esto vale 1, vale 1, vale 0, vale $\frac{1}{2}$, esto vale 4 acá, 4 (*el estudiante susurra mientras va haciendo la gráfica*), esto seria trazando 2 puntos no más, más o menos así.

I: ¿Se corta en 1 y -1?

A2: (Susurra y continua dándole valores para graficar), no.

I: ¿No qué?

A2: No se corta en eso.

I: ¿Entonces cómo quedaría la gráfica?

A2: Seria, y vale 1, y vale 1, cuando x vale -1, (*hace cálculos mentales para graficar*), 1 que estamos seria, (*continua susurrando*) vale 2, esto vale $\frac{1}{4}$, acá seria más o menos así.

I: ¿Esta de acuerdo con la primera?

A2: No.

I: ¿Cómo se calcularía esa integral?

A2: Seria primero aplicar esta integral de -1 hasta cero, x^2 *de* x , más cero, 1 de x.

I: ¿Me decía que era una integral impropia?

A2: Si

I: ¿Qué es una integral impropia y cómo se calculan las integrales impropias?

A2: Una integral impropia es aquella que al menos uno de sus limites es infinito o el integrando presenta una discontinuidad de tipo infinito.

I: ¿Qué relación hay entre la integral definida y la integral impropia?

A2: La diferencia es que siempre que estamos hablando de integración impropia, el área, no se puede calcular de una manera encerrada, se calcula con un límite, porque pareciera que el área, tiende al infinito.

I: ¿Entonces cómo se calcularía esa integral?

A2: Seria, el limite (*el estudiante susurra mientras va pensando*).

I: ¿Qué pasa en la proposición 7c, si el denominador se hace cero?

A2: Si el denominador es cero, presenta una discontinuidad.

I: ¿Puede aplicar la misma regla para este tipo de integrales?

A2: ¿La regla que se enfoca en el ejercicio?

I: Si.

A2: No.

I: ¿Por qué?

A2: Porque, como presenta una discontinuidad es una integral impropia de tipo infinito,

I: ¿Por qué la continuidad implica integralidad?

A2: Acá, si tendría que hablar tal vez en términos de área, porque si tengo el área así como la curva, necesito hallar un área de una curva y presenta una discontinuidad, creo que, no voy a obtener el área total, así lo interpreto gráficamente al presentar la discontinuidad no voy a obtener el área.

I: ¿Cuál es entonces, el valor de la proposición 7c?

A2: Falso.

PREGUNTA Nº 8.

I: ¿Cómo le explicaría a un compañero el significado matemático de la $\int_a^b f(x)\,dx$ en la pregunta número 8?

A2: Eso es un número.

I:¿Por qué es un número, cómo justifica esa respuesta?

A2: La integral es un simple número, si estoy buscando áreas, pues seria llevar el resultado de esa integral al contexto de áreas, que es lo que estoy buscando.

I: ¿Qué quieres decir con que la integral es un número?

A2: Es un simple numero, si es una integral definida es un número siempre va a ser un número real que estamos trabajando.

I: ¿Por qué?

A2: Es un número real porque estamos trabajando con funciones reales, se supone que es un número que puede ser, la solución a múltiples problemas.

I: ¿Qué quiere decir solución a múltiples problemas?

A2: Que las integrales se utilizan en la resolución de problemas en diferentes ciencias, entonces eso depende que una integral dio un resultado de 5, para una persona puede ser la respuesta a un problema digamos de física, para mi puede ser el área que busco, para otra persona puede ser otra cosa, por eso digo que es un simple número que depende es de la interpretación.

I: ¿Si mañana tuviera que enseñarle a un alumno el concepto de integral definida, cómo iniciaría el desarrollo del proceso para llegar a que el estudiante comprenda el concepto de integral definida?

A2: A ver.

I: ¿Cuáles serian sus pasos?

A2: Creo, que lo primero que uno debería dejar claro es que la integral es un número, eso seria lo primero y luego empezaría a explicarle el proceso gráfico, a explicarle como hacer las particiones, como hacer las aproximaciones, luego como se llega a la integral pero siempre teniendo en cuenta que como acabe de decir, la integral es un numero que puede ser la solución a muchos problemas, siempre teniendo en cuenta eso y obviamente luego explicarle como se halla el área y todas sus propiedades, de ahí en adelante partiría primero de esa definición, no al contrario, o sea, no llegar a la integral luego de hacer la aproximaciones y decir que es un número y luego las propiedades eso seria lo primero.

I: ¿Qué seria lo primero, otra vez?

A2: Lo primero que yo haría seria…

I: O sea, hay un estudiante que no tiene el concepto todavía de integral definida, que no lo ha visto por primera vez ¿Cómo empezaría a inducirlo en ese proceso de construcción del concepto de integral definida?

A2: Yo le diría primero que la integral de una función en un intervalo dado es un número, así no sepa en ese momento de qué le estoy hablando, que sepa eso de entrada y que no se le olvide, y luego va a entender porque, creo que si uno empieza a trabajar al contrario empieza hacer el procedimiento geométrico y las aproximaciones y el proceso de la sumatoria de Riemann y no deja en claro qué es una integral, entonces creo que corre el riesgo de no comprender qué es la integral definida.

I: Quedo claro que lo primero que le va a decir es que no es un área, que es un número ¿Qué sería lo segundo?

A2: Lo segundo es empezar a mostrarle que geométricamente representa un área.

I: ¿Qué es geométricamente, qué haría en la parte geométrica?

A2: Seria explicarle en el plano cómo hallar el área de la gráfica de una función, el área bajo la curva.

I: ¿A través de qué?

A2: A través de aproximaciones.

I: ¿Aproximaciones basadas en qué?

A2: Haciendo particiones con rectángulos y luego haciéndole ver que cuando esas particiones tienden al infinito vamos a obtener el área precisa.

I: ¿Cuál seria el tercer paso?

A2: El tercer paso seria mostrarle que es el límite de una sumatoria de Riemann que se puede expresar como una integral.

I: ¿Cuál seria el cuarto paso?

A2: El cuarto paso seria mostrar las propiedades de esta integral, primero qué es una integral definida, lo que es una familia de antiderivadas, lo segundo decirle qué es la integral definida, mostrarle las propiedades fundamentales que existen y el teorema fundamental del cálculo.

I: ¿Cuál es su propia definición del concepto de integral definida?

A2: Simplemente que es un número no más, sólo digo eso, es un número.

I: Muchas gracias.

ENTREVISTA (A3).

PREGUNTA Nº 1.

I: ¿Podría explicarme como obtuvo esta respuesta a la pregunta número 1?

A3: *El área de la región rayada es mayor que 12 y menor que 48* (*aquí el estudiante lee parte del problema*), en el primer punto lo que hice fue un análisis práctico de la gráfica, partiendo un poco de la experiencia, utilizando lo que son las áreas de rectángulos puede dar con la respuesta de la pregunta, el porque era menor que 12 y mayor que 48.

I: ¿Qué quiere decir partiendo de la experiencia?

A3: En varios casos o en ejercicios resueltos hallando áreas de integrales, puedo descubrir a simple vista que usando la suma de las áreas de los rectángulos puedo obtener esta respuesta de una manera más fácil, ahora si quisiera usar la parte matemática o la aplicación de la matemática, entonces haría implementación de las fórmulas de la integral definida.

I: Como le piden aproximar el área para ajustarla ¿Qué seria más recomendado?

A3: Para obtener un área más aproximada seria utilizar la fórmula de la integral definida.

I: ¿La integral qué le permite aproximar el área o calcular el área?

A3: La integral me permite calcular el área, si quisiera aproximarla también podría utilizar la sumatoria de Riemann que es la partición de rectángulos.

I: ¿Qué le permite la sumatoria de Riemann calcular áreas o aproximar áreas?

A3: La sumatoria de Riemann nos permite es aproximar el área, el cálculo de un área y con la integral definida podemos obtener el área más exacta.

I: ¿Podría explicarme los argumentos que utilizó aquí en este razonamiento?

A3: Como te había dicho.

I: Si.

A3: O sea, primero por simple observación puede deducir que el área formada utilizando las coordenadas era la de un rectángulo.

I: Háblame de los rectángulos que tiene en la gráfica.

A3: Tenemos un una integral que esta definida entre…

I: ¿Tenemos aquí una integral, o tenemos un gráfico?

A3: Tenemos un gráfico, entonces ese gráfico esta limitado por dos rectas paralelas que es la recta $x=1$ y la recta igual a 3 y por una recta horizontal que seria y igual a 8, entonces si trazamos esas rectas dentro de esa área sombreada se va a formar un rectángulo grande que a su vez lo dividimos en subrectángulos de una manera equitativa, como te había dicho antes, si sumaba cada área de ese rectángulo me va a dar una aproximación del rectángulo grande con eso demostraba, porque el área sombreada era menor y mayor de lo que me estaban planteando.

I: ¿Qué valor obtuvo con esos rectángulos?

A3: Obtuve que el área sombreada, el área de ese rectángulo grande mayor era 48 y eso me demostraba como te decía que el área sombreada era menor que 48 y mayor que 12.

I: ¿Cuál es el valor aproximado de esa área sombreada en los rectángulos que tiene?

A3: Pues…

I: ¿Cómo aproxima cada uno de los rectángulos?

A3: Utilizando la fórmula del área de un rectángulo lado por lado.

I: ¿Cómo seria?

A3: Si vemos la gráfica estamos trabajando con una escala de 1 unidad.

I: ¿Esta seguro que es de 1 unidad, qué valores tiene en el eje X ?

A3: 3; 6 y 9, entonces en el eje X estamos trabajando con una escala de 3 unidades y en el eje Y tenemos escalas de 2 unidades, si hallo el área de un sólo rectángulo aplicaríamos la fórmula que es lado por lado y tenemos que un lado va a ser igual a 3 y el otro igual a 2.

I: Escriba los valores de las áreas y las va sumando.

A3: Entonces, si trabajamos con el rectángulo grande va a estar formado por dos lados, lado 6 por lado 8 *(el estudiante traza las gráficas en una hoja de respuestas).*

I: Si.

A3: Si subimos ese rectángulo por las escalas que nos esta planteando la gráfica vamos a tener 8 rectángulos de lado 3×2 y si hallamos el área a un subrectangulo, nos daría 6 unidades de medida y si hacemos la sumatoria de los 8 rectángulos, entonces seria 6×8 rectángulos nos daría un total de 40.

I: ¿Cuáles son los 8 rectángulos?

A3: Los 8 rectángulos.

I: ¿Cuáles son?

A3: Serian los que están formados dentro del rectángulo mayor.

I: ¿Qué seria esto la cota superior o la cota inferior?

A3: ¿La cota superior?

I: ¿Qué me estaría dando entre la cota superior o entre la cota inferior?

A3: No, estaría entre la cota inferior

I: ¿Qué más puede argumentarme?

A3: Como te decía, si hago la sumatoria de esos rectángulos obtendré 48 unidades que seria como la unidad máxima que podría obtener de ese rectángulo mayor y la unidad mínima que seria la de un subrectangulo de 6 unidades.

I: ¿Qué más podría hacer?

A3: La pregunta me esta diciendo ¿El área sombreada es mayor que 12 y menor que 48? Analizando la gráfica, veo que el área sombreada me esta tomando 2 rectángulos, completamente y obtendría 12 unidades.

I: 12 unidades.

A3: Si analizamos un tercer triángulo que está parcialmente sombreado, pero la pregunta lo esta diciendo, (*el estudiante lee la pregunta*) *el área sombreada es mayor que 12 y menor que 48*. La sumatoria de los rectángulos me dio 48 y sé que hay rectángulos que me están quedando en blanco, o sea que es menor que 48, ahora es mayor que 12 si, porque, con sólo 2 triángulos tengo 12 unidades de área, y en realidad tengo 1; 2; 3, 4, diría que por simple observación, podría obtener 4 rectángulos completamente sombreados, o sea si las partes que están parcialmente sombreadas y las que están en blanco las reemplazo por una parte que ya esta parcialmente sombreada, me darían 4 rectángulos sombreados, que seria 24 unidades del área.

I: ¿Existe otra forma más exacta de ajustar las cotas?

A3: Una forma más exacta de ajustar las cotas, la verdad no sé.

I: ¿Podría aproximar más esa área?

A3: Si, utilizando la integral definida, porque aquí la podríamos utilizar tenemos los valores.

I: ¿Le piden aproximar esa área?

A3: Si señor.

I: ¿La integral qué le permite, calcular el área o aproximar el área?

A3: Calcular el área.

I: Queremos aproximarla al máximo, ya ha demostrado que están en ese rango las cotas ¿Cómo podría ajustarla más y aproximar más el valor?

A3: Si lo queremos hacer de una manera deductiva, podríamos trabajar con rectángulos más pequeños, con la mitad de cada rectángulo y a la vez divido ese subrectángulo que tengo en otros rectángulos más pequeños.

I: Grafícalo nuevamente.

A3: Bueno estamos hablando de un rectángulo grande que habíamos dicho que tenia de lados 6 y 8, ese rectángulo grande lo dividimos en 8 subrectángulos que nos dieron de lado 3×2, si cojo un subrectángulo. …

I: ¿Cuál es el área sombreada ahí, dentro de ese rectángulo de 6×8?

A3: Seria…

I: ¿Qué tiene en la nueva gráfica?

A3: El área sombreada seria, el rectángulo que va de….

I: Dibújela en el rectángulo que tiene, el área sombreada ¿Cómo ubica esta área sombreada aquí dentro de este rectángulo?

A3: O sea, ésta es la grande.

I: Si exacto, ahora trate de explicar.

A3: Comenzamos con el rectángulo y luego los subretángulos, si queremos hacer algo más aproximarnos a esa área.

I: ¿Cómo lo haría?

A3: Diría que haciendo de un subrentángulo otro conjunto de subrentángulos.

I: ¿Como seria?

A3: Entonces trabajo con un subrectangulo que tiene de 3×6, ese a su vez lo divido en este caso en 4 unidades, luego ese subrectangulo ya seria de lado 1,5 y una unidad.

I: ¿Por qué 1,5?

A3: Porque, estaría trabajando con las líneas medias de los lados de un subrectángulo.

I: Ese rectángulo que tiene de 6×2, necesita subdividirlo más ¿Dónde esta el problema?

A3: Tenemos dos subrectángulos que están completamente sombreados, entonces nuestro problema estaría en los subrectángulos que están parcialmente sombreados.

I: ¿Cómo lo haría?

A3: Entonces tomaría…

I: Trate de hacer una gráfica nuevamente.

A3: Tomaría un subrectangulo que esté parcialmente sombreado y a ese subrectángulo lo dividiría en partes que sean proporcionales a la medida

I: ¿Cómo seria?

A3: O sea, ese subrectángulo lo que haría es subdividirlo en partes de tal manera que una de las partes me quede completa.

I: ¿Cómo obtiene esos valores?

A3: Seria dividiendo un subrectángulo en 3 o dividirlo en 4 partes iguales.

I: Hábleme de un valor numérico específico.

A3: Digámoslo que el rectángulo que tiene de lado 3, lo vamos a dividir en subrectángulos que tengan lado 1×1.

I: Dibújelo, por favor.

A3: Aquí tendríamos un subrectángulo que tiene lado 1; 1, un rectángulo que nos genera son cuadrados, porque tiene lados iguales, pero si analizamos ese cuadrado de 1×1, hay uno que esta casi completamente sombreado que nos daría una aproximación más exacta de esa parte sombreada, si observamos el otro rectángulo podemos ver que es un pedacito que le hace falta para estar completamente sombreado, entonces con ese subrectángulo también haría el mismo procedimiento, lo dividiría en partes iguales de tal manera que los subrectángulos que me queden estén completamente sombreados para que me den una mayor aproximación (*el estudiante traza gráficas en una hoja de respuestas y hace los cálculos numéricos*).

I: ¿Cuáles serian los valores de cada uno?

A3: Acá hicimos uno que lo dividimos en partes 1×1 y obtuvimos un cuadrado que esta casi completamente sombreado.

I: Si eso ya lo dijo, ahora en términos de valores.

A3: Ahora obtenemos otro subrectángulo que tiene los mismos lados 3×2, éste también lo voy a dividir de lados 1×1, porque con estos cuadrados voy a obtener uno también casi completamente sombreado.

I: Si le piden los valores numéricos ¿Cuánto le daría esa área ajustada, el área total?

A3: Para hallar esta área ajustada tendría que hacer una suma de las áreas de los rectángulos y la suma de los cuadrados.

I: ¿Podría hacerlo?

A3: Si, por supuesto.

I: Escríbalo por favor.

A3: Aquí con estos 2 rectángulos que estaban completamente sombreados sé que el área de cada uno es de 6 unidades, entonces ya tengo 12 unidades sombreadas en la nueva partición de uno de los rectángulos que estaba parcialmente sombreado y obtuve un cuadrado de área 1×1, acá ya tengo una unidad. (*aquí el estudiante trabaja sobre las gráficas).*

I: Muéstreme aquí el cuadrado.

A3: Bueno y éste a su vez es otro subrectángulo que esta también parcialmente sombreado y voy a dividirlo en cuadros de 1×1 y si hago la sumatoria me quedaría (*El estudiante habla en voz baja*) de 5 unidades aproximadas, porque esta acá parcialmente sombreado ese cuadro que es igualmente de 1×1.

I: ¿Y esa área la esta tomando por encima o por debajo de la curva?

A3: La estoy tomando por debajo de la curva, entonces tendría 6 unidades más, y uno de los cuadros que esta parcialmente sombreado es de área 1×1.

I: ¿Cuál?

A3: Este cuadro de acá, que lo dividiría en partes iguales de tal manera que los cuadros nuevos que se me generen estén completamente sombreados, entonces se me van a formar, 3 nuevos cuadros de lado 0.5 es decir de área 0.5×0.5, que seria 0,25, así tendría 0,25 unidades más, ahora tendría que operar con los otros 2 rectángulos que también están parcialmente sombreados, de tal manera que con este método de pronto puedo deducir que la forma de hallar una aproximación de esta área era usando rectángulos que fue lo que hice inicialmente, o ese rectángulo subdividirlo en cuadrados de lados iguales, que me van a generar también un aproximación del área.

I: ¿Cuánto le da el área total aproximada?

A3: Aquí todavía me faltarían 2 subrectángulos por subdividirlos, pero como la subdivisión a cuadrados me está funcionando, entonces los otros 2 subrectángulos los divido también en cuadrados así que tendría 2 unidades más de medida y otro cuadrado parcialmente sombreado, haría la subdivisión en partes iguales que me daría otro cuadrado que va a tener 0,25 unidades de medida y el último subrectángulo que está sombreado un pedacito no más, lo que voy hacer es dividirlo primero en cuadrados de lado 1×1 y las partes sombreadas las voy a dividir a su vez, los cuadros sombreados los voy a dividir a su vez en unos cuadrados más pequeños que me van a dar como ya habíamos dicho de área 0,25 y 0,25 y obtengo 3 cuadros de esa medida, o sea 0,75 unidades más, entonces ya puedo hacer la sumatoria de de las áreas y obtengo 23,25 unidades.

I: ¿Qué valor es ese?

A3: El valor aproximado del área sombreada.

I: ¿Podría aplicar otro procedimiento diferente que te permita una mejor aproximación del área y que justifique más las cotas?

A3: Si, sin duda utilizaría la integral definida, para que sea un valor más aproximado.

I: ¿Cómo utilizaría ahí, una integral definida?

A3: ¿Cómo utilizaría una integral definida?

I: Si.

A3: Pues, tengo la gráfica de una función, la cual está limitada por una curva y tengo sus 2 rectas paralelas que me están dando los valores en los cuales puedo evaluar esa integral.

I: ¿Cuál seria esa integral?

A3: Por el comportamiento de la curva podríamos estar hablando de una parábola.

I: ¿Conoce la función?

A3: Utilizando un poquito de geometría analítica podría llegar a deducir la función.

I: ¿Qué es más fácil aproximar esa área o calcular la integral, tal como esta planteado el ejercicio?

A3: Aproximar el área, porque para calcular la integral tendría que descubrir la función, y tendría que hacer uso de otras herramientas de la matemática, para hallar la función.

I: ¿Podría aproximar por otros procedimientos el área para ajustar más esas cotas?

A3: Si lo puedo hacer como te dije, pero utilizando otras herramientas de la matemática.

I: ¿Cómo cuáles?

A3: Como la interpretación de una grafica y el uso de la geometría analítica para descubrir la función que me esta limitando esa curva sombreada.

I: ¿Está pensando en aproximar el área o en calcular el área?

A3: Estoy pensando en calcular el área.

I: ¿Encuentra diferencia entre aproximar y calcular?

A3: Si.

I: ¿Cuál?

A3: Una aproximación es un valor promedio, un valor tentativo de lo que puede medir esa

gráfica y calcular el área es hallar el valor exacto del área sombreada.

PREGUNTA N º 2.

I: ¿Puede explicarme como ha resuelto la tarea número 2?

A3: Según la pregunta (*el estudiante lee la pregunta*), *sea R la región encerrada por el gráfico de la función* $f(x) = 4x$ *y el eje* x *en el intervalo* $[-2 , 2]$, nos están pidiendo como primer punto que dibuje una gráfica, entonces el paso básico para graficar una función es con una tabulacion dándole un valor a x y el resultado me va a dar el valor de y, cuando obtengo los valores los ubico en el plano cartesiano, identifico la función como en este caso no es polinómica, puedo hablar de una función lineal, entonces no voy a tener problema en trazar los puntos del plano cartesiano porque sé que estoy hablando de una recta.

I: ¿Qué figuras bajo la gráfica se formaron?

A3: ¿Qué figuras bajo la gráfica se me formaron? Triángulos.

I: ¿Cuántos?

A3: No sabría decirle, infinitos porque…

I: ¿Qué gráfica representa esa función?

A3: Esta función me representa una línea.

I: ¿Qué figuras geométricas se formaron bajo esa línea?

A3: Se forman rectas o se pueden forman rectas paralelas que van del eje X hasta…

I: ¿Esas rectas paralelas de las que habla sobre qué figura geométrica están?

A3: Sobre el eje X .

I: ¿Qué figuras tiene formadas en el plano cartesiano?

A3: ¿Tengo formadas debajo de la gráfica?

I: Si.

A3: Tengo formados triángulos.

I: ¿Cuántos triángulos tiene?

A3: Según los puntos de coordenada tengo 2 triángulos.

I: ¿Qué relación puede establecer entre el área de la región bajo el eje OX y la región sobre el eje OX?

A3: Que son simétricas.

I: ¿Por qué?

A3: ¿Por qué? Porque, estoy hablando de una función idéntica que esta pasando por el origen y me esta dando valores como te dijera…

I: ¿Quiénes son simétricas?

A3: Son simétricos, me preguntaba que el área sombreada que esta debajo el eje X y sobre el eje X , qué puedo observar de ellos, lo que te decía que son iguales o son simétricos.

I: ¿Quiénes son simétricos?

A3: Los triángulos o el área sombreada debajo de esa curva.

I: ¿Cómo obtuvo el área de esos triángulos?

A3: Lo hice también usando un poco de deducción, me pude dar cuenta que estaba trabajando con un rectángulo de lados 2×8.

I: ¿De dónde obtiene 8 y qué representa ese 8?

A3: 8 es la cota mayor cuando hice la tabulacion, 8 es como el valor que…

I: ¿Qué es 8 con relación al triángulo?

A3: Es uno de los lados o sea la cota superior

I: ¿Que viene a ser como elemento del triángulo?

A3: Seria un vértice.

I: ¿8 es un vértice?

A3: O un punto de coordenada.

I: ¿Cuáles son los elementos del triángulo, ahí?

A3: Los elementos del triángulo serian de 1 a 2.

I: ¿Cómo calcula el área de un triángulo?

A3: Base por altura sobre 2.

I: ¿Cuál es la base, de ese triángulo?

A3: 2.

I: ¿Qué más necesita?

A3: La altura.

I: ¿Cómo la calcula?

A3: La altura seria el valor hasta donde llega…

I: ¿Cómo la obtiene?

A3: La obtengo como la recta paralela que va del eje X , hasta el momento en que parte la función en 2, que fue lo que me dio el punto 8.

I: ¿Cómo obtiene ese valor analíticamente?

A3: Pues…

I: ¿De dónde sale ese valor?

A3: Como estoy trabajando una escala de 1 en x y en y con escala 2.

I: ¿De dónde obtuvo ese valor de 8?

A3: Por medio de la tabulación cuando…

I: ¿Qué fue lo que hizo en la tabulación?

A3: Cuando reemplace x por 2 obtuve….

I: ¿Dónde lo reemplazó?

A3: En la función inicial, y cuando reemplace x por 2 obtuve que en y valía 8, entonces eso me daba la altura del triángulo

I: ¿Qué más hizo?

A3: Apliqué la formula de base por altura, pero esa hubiera sido como la manera más correcta de hacerla en el momento, porque viendo en los apuntes que tengo trabaje fue con un rectángulo y su diagonal porque tenia la base que era 2 y la misma altura que era 8.

I: ¿Cuánto obtuvo de área?

A3: Lo que hice fue hallar el área del rectángulo que me dio 16 y como veía que el rectángulo se formaba por dos triángulos simétricos, lo dividí por 2, o sea que el área de la parte sombreada del triángulo era 8.

I: ¿Geométricamente cuál es el área total?

A3: El área total sería la suma de los 2 triángulos, o sea 16.

I: ¿Qué quiere decir de manera intuitiva?

A3: Intuitiva, es que observo la gráfica y puedo decir que estoy trabajando con valores simétricos, que observo un rectángulo y hallándole el área y viendo interiormente el rectángulo, trabajando con su diagonal puedo decir que está formado por 2 triángulos que son simétricos, entonces si hallo el área del rectángulo y lo divido por 2 voy a obtener el área del triángulo; pero como te dije anteriormente, si hubiera trabajado mejor con el triángulo inicialmente hubiera llegado al mismo resultado.

I: ¿Qué quiere decir que sean simétricos?

A3: Simétricos, que son equitativos o que son iguales.

I: ¿Qué valor obtuvo al calcular la integral?

A3: Al calcular la integral, obtuve las mismas 16 unidades de medida que haciendo la integral porque llegué al mismo resultado.

I: ¿A cuál resultado?

A3: A las mismas 16 unidades.

I: ¿Por qué?

A3: ¿Por qué llegue al mismo resultado? El paso anterior fue de una manera intuitiva y con esto lo que hice fue comprobarlo de una manera matemática que de pronto las integrales de estas funciones tienen una manera hallarle su área, una manera matemática o una solución intuitiva y que van a llegar a un mismo resultado.

I: ¿Lo intuitivo no es matemático?

A3: Si, claro obviamente.

I: ¿Qué le pedían calcular el área o calcular la integral?

A3: Me pedían calcular el área de la región.

I: ¿Qué le pedían calcular una integral o calcular el área?

A3: Me pedían graficar el área de la región sombreada.

I: ¿Qué le piden en el siguiente paso?

A3: En el paso siguiente me piden evaluar una integral limitada por un intervalo.

I: ¿Cuánto le dio esa integral?

A3: Me dio 16 unidades.

I: ¿Esta seguro de ese valor?

A3: Me dio cero.

I: ¿Esta de acuerdo con ese valor?

A3: Si lo hacemos así, si lo resolvemos de manera lógica como se resuelve una integral o sea el algoritmo normal de una integral, obtenemos que la integral nos da cero.

I: ¿Qué le pedían?

A3: Calcular esa integral, pero ese resultado me generaba una controversia con la respuesta intuitiva que me había dado.

I: ¿Por qué controversia?

A3: Porque sabia que el resultado de esa integral no era correcto

I: ¿Por qué no es correcto?

A3: Porque de pronto el resultado de la integral si era correcto, pues era lo que me estaban pidiendo, pero de manera intuitiva o de manera mental me decía que esa respuesta no era correcta porque había deducido que el área sombreada era 16.

I: ¿Por qué esta relacionando el área con esa integral?

A3: Porque al ver una gráfica sombreada, la interpreto como una integral y si la quisiera resolver aplicando una integral y me da cero, sé que de pronto hay un error.

I: ¿Por qué esta integral que le piden calcular la relaciona con el área que ya calculó geométricamente?

A3: Porque la función esta ahí, la función $4x$

I: ¿Qué relación hay entonces, entre el área y la integral?

A3: Que el área de una función se puede calcular por medio de una integral.

I: ¿Significan lo mismo el área y la integral definida?

A3: ¿Significan lo mismo el área y la integral definida? Si.

I: ¿Por qué?

A3: Porque el área de una integral definida me esta generando una función a través de un intervalo, entonces lo que voy hallar es el área de la función, dentro de ese intervalo que me esta manejando la integral.

I: ¿Qué delación hay entre ese número dado por la integral y el que puede calcular del área?

A3: ¿Qué relación hay en el que obtuve o en el que puedo obtener?

I: En el que obtuvo.

A3: En el valor que obtuve no se me relaciona nada con el área de la integral porque como te decía hay como un desacuerdo en la respuesta.

I: ¿Por qué hay desacuerdo?

A3: Porque como te decía, si resolvemos la integral de esta manera, vamos a obtener un resultado que no es el verdadero del área sombreada que tenemos en la gráfica, esas integrales hay que trabajarlas de otra forma.

I: ¿Qué le pedían calcular el área o calcular la integral?

A3: Me decían calcular el área, pero no me decían a través de qué, si no calcule el área.

I: No, aquí en este punto ¿Qué le pedían calcular la integral o calcular el área?

A3: Calcular la integral.

I: ¿Esta de acuerdo con el resultado?

A3: Si, o sea, en este momento…

I: ¿Cuál es su duda en la respuesta, en qué no esta de acuerdo?

A3: Es que mi pensamiento choca en el sentido en que sé que el resultado puede ser correcto con lo que me están pidiendo, pero no es correcto con lo que veo gráficamente, de pronto por eso es mi choque de pensamiento, si simplemente me están diciendo calcule esa integral, lo que hago es usando los conocimientos de la integral resolverla y obtengo un resultado, sin tener en cuenta si es correcto o no, el hecho es que obtuve un resultado.

I: ¿Cuál es la diferencia entre calcular un área y calcular una integral definida, podría explicarlo?

A3: La diferencia es que al calcular un área vamos hallar un valor exacto de una función, la cual gráficamente va a tener alguna parte sombreada y vamos a llegar al valor de esa área sombreada.

I: ¿Cómo debe ser ese valor?

A3: Ese valor debe ser exacto y debe ser real, debe ser un valor que represente el área sombreada de la gráfica y cuando resolvemos la integral definida, simplemente tomamos la función y la evaluamos en ese intervalo y obtenemos un resultado.

I: ¿Qué puede concluir de los resultados obtenidos?

A3: Que si me piden evaluar una integral, debo resolverla y dejar la respuesta obtenida tal cual y si me dicen calcular el área, tendría que graficar la función, para mirar que parte sombreada es la que vamos a trabajar.

I: ¿Entonces qué relación habría entre el área y la integral?

A3: *¿Qué relación habría entre el área y la integral?* (*El estudiante repite la pregunta*) Eliécer quiero decirte algo, si a mi me dicen resuelva la integral definida, lo que haría simplemente seria resolverla y llegar a una respuesta, si me dicen halle el área de una función en cierto intervalo lo que haría es graficar la función para detectar cual es el área sombreada que me están pidiendo, y para saber qué integral es la que voy a utilizar para hallar esa área, entonces la relación seria si te piden una integral uno resuelve la integral, si te piden el área utiliza la integral para hallar el área de esa función.

PREGUNTA Nº 3.

I: ¿Sabría comentarme como has resuelto la tarea número 3?

A3: En el punto 3 me están diciendo que (*el estudiante lee el problema*), *sea R una región entre la gráfica de la función* $f(x) = x^2$ *y el eje* x *, en el intervalo* $[0\,,4]$, entonces como punto de partida, me dicen que utilice particiones para aproximar el valor del área de la región, cuando a nosotros nos hablaban de integral, nos comentaron de dónde partió la integral, de dónde surgió la integral.

I: ¿Qué le comentaron?

A3: Que la parte introductoria de la integral fue a través de la sumatoria de Riemann que se pudo deducir la integral definida, entonces si me dicen por particiones sé que me están hablando de la integral, pero usando una sumatoria de Riemann, es decir que me están hablando del limite de una partición que tiende al infinito de la sumatoria de la función Δ_x, entonces lo que hago inicialmente es graficar la función.

I: ¿Cómo calcularía, entonces el área a partir de las particiones y del límite?

A3: A partir de las particiones…

I: ¿Qué utilizaría para aproximar el área por particiones, cómo lo haría?

A3: Pues primero tener…

I: Escriba lo que esta pensando.

A3: Primero seria graficar la función (*el estudiante grafica en una hoja de respuestas*) que me están dando $f(x) = x^2$, me están hablando de una parábola que con vértice en el origen y que abre hacia arriba, entonces hacemos uso de la geometría analítica, y hallo el área de la parte sombreada que esta bajo esa curva.

I: ¿En qué intervalo?

A3: Aquí nos están hablando del intervalo $[0 , 4]$.

I: ¿Cuántas particiones harías?

A3: Haría infinitas.

I: ¿Cuántas para mostrar el valor aproximado?

A3: Como están hablando de particiones, entonces utilizaría primero una partición regular.

I: ¿Qué quiere decir una partición regular?

A3: Coger ese intervalo y dividirlo en subintervalos de igual tamaño.

I: ¿Cuántos va a tazar?

A3: Puedo trazar 10, trazar 12, eso depende.

I: ¿Cuál es la diferencia al trazar más o trazar menos?

A3: ¿La diferencia? Al trazar más, al tener más particiones voy a aproximarme más al valor, que es a lo que iba a llegar, si hago n particiones regulares y si esas particiones las hago cada vez más pequeñas obtengo un valor más aproximado al área sombreada de esa región, aplicando lo que es la sumatoria de Riemann, que nos dice que si a esos subintervalos los hacemos que tiendan hacia el infinito, que cada vez sean más pequeños que se aproximen a cero, entonces esos subintervalos van a dar un valor más aproximado del área de la región sombreada; por eso estábamos trabajando con limites y la fórmula de Riemann nos dice que el limite cuando el intervalo tiende al infinito va a ser la sumatoria de la función la que es x^2 , tendríamos que hallar Δ_x, pero Δ_x sabemos que es la diferencia del intervalo sobre n y el intervalo es $[0 , 4]$, luego la diferencia seria 4 menos cero nos da 4 que seria igual $4n$, pero aquí me dio $2n$.

I: Esto seria utilizando los límites de las sumas de Riemann.

A3: Si señor.

I: ¿Cómo aproximaría con las particiones?

A3: Las particiones.

I: ¿Cómo utilizaría las particiones para aproximar?

A3: Las particiones serian de $4n$.

I: ¿Qué haría para aproximar esta área?

A3: Trazar rectas paralelas que estén debajo de la curva (*el estudiante traza rectas sobre la gráfica de la curva*).

I: ¿Qué valor va a obtener?

A3: Interpreté cuando decía que utilice particiones.

I: ¿Particiones?

A3: Lo quise relacionar con Riemann, porque el utilizó las particiones.

I: ¿Como llegaría entonces, con lo que quiera a un valor aproximado de esa área?

A3: Planteando la fórmula de Riemann.

I: Calcúlela. llegue a un resultado.

A3: Riemann nos decía…

I: Ya me dijo que decía Riemann, ahora hágalo por favor.

A3: Tenemos el limite de una partición cuando tiende al infinito de la sumatoria de la función x^2 de $\Delta(x)$, que $\Delta(x)$ es la diferencia del intervalo, que seria $4n$ esto lo puedo expresar como una integral porque la sumatoria de Riemann me lleva a una integral definida (*el estudiante escribe esto en una hoja de respuestas*).

I: Pero aquí no le piden que aplique o calcule una integral le dan una instrucción que dice que utiliza particiones para aproximar ¿Qué haría en este caso, qué haría para aproximar?

A3: Viéndolo de otra manera, trabajaría con rectángulos.

I: ¿Cuántos?

A3: En este caso trabajaría con rectángulos y como me están pidiendo particiones, entonces me inclino hacerlas de 1×1.

I: ¿Cómo sería?

A3: Que pueden ser cuadrados de lado 1×1, entonces obtengo cuadrados de 1×1, de 2×2 de 3×3 y otro cuadrado de 4×4, así estaría abarcando el $[0\ ,4]$, y dentro de cada cuadrado va a estar sombreada una parte de la curva, y seria entrar a trabajar con los cuadrados independientemente.

I: ¿Cuál seria el valor aproximado?

A3: Dijimos que las particiones las voy hacer de 1×1.

I: ¿Qué va a formar con esas particiones?

A3: Voy a formar cuadrados, porque los estoy uniendo.

I: ¿Cuadrados o rectángulos qué está formando?

A3: Son cuadrados, sino que se ven como rectángulos, pero son cuadrados.

I: ¿Qué trata de explicar o de hacer, aquí?

A3: Intento hallar el área sombreada, a través de la suma de cuadrados.

I: Escriba los valores que va obteniendo de cada uno.

A3: De este cuadrado su área va hacer 1×1, pero tendría que restarle la parte sombreada.

I: A ver, haga todo lo que me va diciendo.

A3: Acá tengo un cuadrado de 1×1, pero como puedo observar, la parte sombreada es sólo una parte, entonces el cuadrado tendría que subdividirlo en partes iguales de tal manera que esas partes que me queden divididas y completamente sombreadas.

I: ¿Cuál es el valor?

A3: Si conozco la sumatoria de Riemann, podría utilizar la sumatoria de Riemann.

I: Puede utilizar lo que sea para hallar un valor aproximado.

A3: ¿Tú lo que quieres es saber el valor del intervalo de las particiones?

I: Quiero que aproxime el área a partir de unas particiones mire que quiere hacer, si quiere hacerlo así o mire que utiliza, si llega a un valor aproximado utilizando figuras geométricas o si puede utilizar el limite de una sumatoria de Riemann, pero no pase del limite de la sumatoria de Riemann a la integral, cómo haría entonces a través del limite de sumas de Riemann, porque aquí indico el límite de la sumatoria de Riemann, pero inmediatamente lo que aplicó fue una integral.

A3: Umm.

I: Lo que le piden realmente es aproximar haciendo particiones.

A3: Si.

I: Hágalo como lo esta pensando.

A3: Como la parte sombreada yo la puedo subdividir en intervalos, tales que cada intervalo sea lo más pequeño posible para que me de un valor más aproximado a esa área sombreada.

I: Si ya me dijo eso, entonces comience hacerlo

A3: Esos subintervalos los llamaríamos $\Delta(x)$, entonces nuestro Δ_x seria igual a la diferencia del intervalo sobre n.

I: Si, ya lo hizo también anteriormente.

A3: Que nos dio $\frac{4}{n}$.

I: ¿Qué representa este $\frac{4}{n}$?

A3: Este $\frac{4}{n}$ nos representa el valor en que se debe dividir el intervalo para llegar a un valor aproximado del área y ese $4n$ lo sustituimos en la fórmula de Riemann y tenemos el límite cuando la partición tienda al infinito de la sumatoria.

I: ¿Esta seguro qué la partición tiende al infinito?

A3: Debe tender al infinito para llegar a 0 cuando n tienda a infinito.

I: ¿Cuáles son las particiones, cuando n tiende a infinito la partición a qué tiende?

A3: A cero, de la sumatoria de la función x^2 por $\Delta(x)$ que es $4n$, esta seria la representación a través de la fórmula de Riemann de las particiones del área sombreada bajo la curva.

I: ¿Cómo calcula esto aplicando el límite de la sumatoria de Riemann?

A3: Haciendo la suma de estas particiones cuando n tienda al infinito.

I: ¿Cómo seria?

A3: Tomar los valores del $[0\ ,\ 4]$, los valores de x, y hacer la suma.

I: ¿Cómo seria?

A3: Esto seria igual al limite cuando n tiende a cero de la sumatoria de n, desde cero hasta 4 que es el intervalo que nos están dando de $x^{2,}$, $4n$ entonces empezamos a desarrollar esto cuando n valga cero nos daría el punto inicial que seria cero, más cuando n valga 1 nos daría $4x^2$, cuando n valga 2 nos daría $2x^2$, cuando n vale cero el valor seria cero, cuando n valga 1 nos daría la sumatoria $4x^2$.

I: ¿Qué esta obteniendo con esto?

A3: Estoy obteniendo valores funcionales.

I: ¿Qué va hacer después con esos valores funcionales?

A3: Darles un valor para x.

I: ¿Qué valor le va a dar a x?

A3: No, ahí si me enrede en ese pedacito.

I: ¿Por qué maneja los términos teóricos bien, pero a la hora de aplicarlos tiene dificultad?

A3: Me enredo, me confundo

I: Si, y eso.

A3: Debe ser porque manejo muchos conceptos al mismo tiempo y en el momento de aplicarlos no los sé diferenciar o no sé discriminar bien cual utilizar en el momento adecuado y me confundo.

I: ¿Qué le es más fácil aproximar el área como lo decía intuitivamente o aplicar estas formas?

A3: Si tengo buen conocimiento aplicando las fórmulas, pero si a veces presento ese problema que estoy presentando ahora pues seria más fácil la manera intuitiva.

PREGUNTA Nº 4

I: ¿Podría explicarme cómo ha resuelto la tarea número 4?

A3: La tarea dice (*el estudiante lee la pregunta*) calcula *el área limitada por la gráfica de la función* $f\ (x)=|2x-1|$, *en el intervalo de* $[0\ ,\ 2]$ *y el eje* x, entonces sabemos que cualquier valor que le apliquemos a una función dentro de un valor absoluto va a dar positivo.

I: ¿Por qué?

A3: ¿Por qué? No recuerdo en el momento, pero hay una razón justa por la cual el valor absoluto da positivo.

I: ¿Cómo define el valor absoluto?

A3: ¿Cómo lo defino? Que todo valor real evaluado en un valor absoluto va a dar el mismo valor real, si tengo -2, el $|-2|$ es 2, si tengo -3, el valor absoluto es 3.

I: ¿Podría decirme como ha esbozado el gráfico de esta función?

A3: Usando la tabulación ubique los puntos en el plano cartesiano y como te había dicho la función es positiva, entonces la ubiqué en el primer cuadrante **(***el estudiante grafica en una hoja de respuestas).*

I: ¿Considera que la gráfica de esa función es correcta?

A3: Si, está correcta.

I: ¿Por qué?

A3: Primero porque si miro la tabulación los valores…

I: ¿Cómo hizo la tabulación, explíqueme?

A3: Le dí valores a x, si x toma un valor tanto positivo como negativo, en y me va a dar el mismo valor que si tomo 1 y -1, si x vale 1 me dio que y era igual a 1 y si x, hubiera valido -1, me hubiera dado el mismo valor de 3.

I: ¿Podría calcular el área a partir del gráfico, o de qué otra forma lo podría hacer?

A3: Si a partir del gráfico lo podría hacer.

I: ¿Considera que el gráfico esta bien elaborado?

A3: No, aquí estoy viendo una inconsistencia.

I: ¿Dónde encuentra inconsistencia y por qué?

A3: En los valores que toma la función, los valores negativos que pueda tomar la función, me van a generar otro valor.

I: ¿Cortaría la gráfica de esa función en alguna parte el eje x?

A3: La corta en -1 en 1.

I: ¿Por qué en 1?

A3: Porque…

I: ¿En uno, en qué eje?

A3: La corta en y, en 1.

I: ¿Por qué en 1?

A3: Porque hallando los puntos de corte cuando x vale cero, me queda -1 y el valor absoluto -1 es 1, entonces corta el eje y en 1, y cortaría el eje x , lo cortaría en $x = \frac{1}{2}$.

I: ¿Por qué, de dónde lo obtiene?

A3: Igualando $f(x)$ a cero y despejando x, obtengo de valor $\frac{1}{2}$ y la gráfica no me estaría coincidiendo con el valor absoluto de x.

I: ¿Cómo seria, recuerda cómo se define el valor absoluto de x?

A3: Más o menos el valor absoluto de x es igual a la raíz cuadrada de x.

I: ¿Qué otra forma podría utilizar para calcular esa área?

A3: Me están dando la función y el intervalo, entonces directamente la puedo resolver con una integral definida.

I: ¿Cómo seria con una integral definida?

A3: Seria la $\int_0^2 |2x-1|\,dx$ que expresa los valores positivos y los valores negativos

I: ¿Cuáles son los positivos?

A3: El valor absoluto lo que hace es que los valores positivos y los valores negativos los expresa como positivos, entonces si quiero trabajarlo como una integral, tendría que hacer una suma de integrales que vaya de cero a 2.

I: Si

A3: De $2x-1\Delta x$ más la integral que vaya de cero a 2 de $2x+1$, tendría que trabajarlo de esa manera porque para poder tomarlo.

I: ¿De 0 a 2?

A3: De 0 a 2 de $2x-1$ más la integral de 0 a 2 de $2x+1$ para poder tomar los valores positivos y negativos, para discriminar los valores positivos y negativos de de la función, para no dejar ningún valor suelto.

I: ¿Qué función cumple $\frac{1}{2}$ de x, el $\frac{1}{2}$ que obtuvo al despejar a x?

A3: Pues seria el punto de corte en el eje.

I: ¿Quién esta cortando en $\frac{1}{2}$?

A3: La función cortaría el eje X en $\frac{1}{2}$.

I: ¿Qué necesitaría graficar para poder ubicar la región que va a calcular, qué piensa en el momento?

A3: Tendría que tabular nuevamente pero tomando tanto valores negativos como valores positivos para ver que comportamiento tiene la función, porque la gráfica no esta coincidiendo con los valores que tienen que ser.

I: ¿Cómo seria, elabore un bosquejo de la gráfica?

A3: Dijimos que si x vale cero, la función me va a dar 1, si x vale 1, la función me va a dar 1, si x vale 2 la función vale en y vale 3, como tomé 1 entonces si x vale -1, y va a valer 3, como tome 2, si tomo x igual a -2, entonces, el valor absoluto en y seria 5.

I: ¿Puede graficar con esos valores?

A3: Si señor.

I: ¿Cómo seria?

A3: Si x vale cero, y vale 1, si x vale 1, y vale 1, si x vale 2, y vale 3, si x vale -1, y vale 3, si x vale -2, y me vale 5, entonces la función me quedaría de esta manera.

I: ¿Que puede concluir del procedimiento utilizado?

A3: Que cuando estamos trabajando con una función valor absoluto es muy importante tener en cuenta los valores tanto positivos como negativos en x, porque su valor en y puede cambiar.

PREGUNTA Nº 5.

I: ¿Cuando le dicen que aproxime un área qué hace en la pregunta número 5?

A3: Como me están pidiendo una aproximación puedo hacer la suma de las áreas de los rectángulos.

I: ¿Cómo seria, trata de hacerlo?

A3: Tenemos una gráfica la cual me esta representando una parábola y me están mostrando las regiones sombreadas me piden que haga uso de la aproximación para dar el área de la región, si analizo la escala de la gráfica me dice que esta trabajando en x con escala igual a 1 y en y también me esta trabajando con una escala igual a 1, si trazo un rectángulo que vaya desde el punto 2 en x hasta -5,5 en y, y trazo una línea paralela al eje y que vaya de 2 en x, hasta 5,5 en $-y$ *(el estudiante traza la gráfica en una hoja de respuestas).*

I: ¿De dónde obtiene 5,5?

A3: De una manera intuitiva.

I: ¿ De qué otra manera lo podría calcular?

A3: Pues…

I: ¿Cuál es la base?

A3: La base seria…

I: La base de este rectángulo.

A3: Esta.

I: ¿Cuánto tiene de base?

A3: Tendría 1,5.

I: ¿Cómo calcula esa altura?

A3: Usando un poquito de Pitágoras.

I: ¿Pitágoras, seria necesario Pitágoras? ¿Tiene la base cómo calcularía la altura?

A3: Tengo la base y la altura.

I: ¿La altura está en quién?

A3: En y.

I: ¿Cómo obtiene el valor de y?

A3: Despejándola de la función.

I: ¿Cómo seria?

A3: Dicen que la función es $2x - x^2$, entonces cuando x valga 5,5, si despejo…

I: ¿Qué va despejar?

A3: Para obtener y, le doy un valor a x, y lo reemplazo en…

I: ¿Qué valor le va a dar a x?

A3: Pues aquí, en este caso seria 2,5 para obtener…

I: ¿Por qué 2,5?

A3: Pues lo deduzco.

I: ¿Cuál es la base?

A3: La base es esta

I: ¿Cuánto tiene de base, ahí?

A3: Pues intuitivamente yo veo que es de 1,5.

I: ¿Pero me dice 2,5, entonces qué valor es?

A3: No, para obtener el valor de y le daría 2,5.

I: ¿Por qué 2,5?

A3: Porque intuitivamente yo veo que …

I: ¿El área de qué rectángulo va hallar?

A3: Si

I: ¿De qué rectángulo estamos hablando?

A3: De este de acá.

I: ¿Cuánto tiene de base?

A3: 2,5

I: ¿Por qué 2,5?

A3: 1,5 perdón.

I: ¿Tiene de base 1,5, cómo calcula la altura de ese rectángulo?

A3: De este rectángulo.

I: Si, conociendo ya la base.

A3: Usando el teorema de triángulos.

I: ¿Por qué?

A3: Base por altura, tengo la base.

I: ¿Cómo obtiene la altura?

A3: Cómo obtengo la altura.

I: Si.

A3: La verdad en el momento no recuerdo.

I: ¿Sobre que eje están la altura y la base?

A3: El eje y.

I: ¿Cómo obtiene, entonces el valor de y?

A3: Mirando intuitivamente también.

I: ¿Y si no fuera de forma intuitiva como podría encontrar el valor de y?

A3: Pues dándole valores a x…

I: ¿Qué valor le va a dar a x?

A3: Pues le daría…

I: Va hallar la altura

A3: Le daría 3,5.

I: ¿Por qué 3,5?

A3: Porque cuando x valga 3,5 me va a dar el valor de y que va a estar sobre esa base.

I: ¿De qué triangulo?

A3: De este.

I: ¿Cuánto tiene de base ese triángulo?

A3: Tiene 1,5.

I: Si quiere calcular el área de ese triángulo en qué valor va a reemplazar.

A3: Si voy hallar el área de este, el valor es…

I: ¿Cuál es la altura de este?

A3: ¿La altura de este? Como le digo voy a reemplazar en x.

I: ¿Cómo es, reemplácelo?

A3: Si x vale 3,5.

I: ¿Por qué 3,5?

A3: Para hallar este punto de coordenada que es el punto que me esta limitando el rectángulo en la parte de abajo.

I: ¿Por qué viene hasta acá?

A3: Porque ese me da la altura del rectángulo.

I: ¿Cuál es la base de ese rectángulo?

A3: 1,5.

I: ¿Por qué habla de 3,5 cuando va a reemplazar?

A3: Porque es que el rectángulo esta desplazado con relación el eje Y.

I: ¿Y por eso calcula en 3,5?

A3: Si, porque es que si observamos la gráfica el punto donde se encuentra la base y el punto de corte de la altura seria en 3,5 o en 1, o en 3,5 o en 2 obtenemos ese mismo valor.

I: ¿Cómo seria, calcúlalo?

A3: Si $f(x) = 2 \times 3{,}5 - (3{,}5)^2$, entonces $f(x) =$ es igual a 2 $\times \frac{7}{2} - (\frac{7}{2})^2$, entonces va a ser igual a $\frac{14}{2}$ sobre 2 menos $\frac{49}{4}$, $f(x)$ va a ser igual a $7 - \frac{9}{4}$ (susurra) y 21 dividido 4.

I: ¿Cómo obtiene el área de la otra parte?

A3: El área de esta.

I: Si

A3: Estamos hablando de esta parte, como tengo la altura y sé que el área de un rectángulo es lado por lado, obtengo el área del rectángulo mayor y trazo una diagonal que me forma 2 triángulos, uno de los cuales va a estar conformado por la parte sombreada, entonces el área que me dio el rectángulo lo divido por 2 y esa me da el valor aproximado del triángulo.

I: ¿Cómo terminaría el ejercicio?

A3: Aquí estoy trabajando con un rectángulo de base 1,5 y de largo 5,5.

I: ¿De dónde obtiene 5,5?

A3: Si miro la gráfica de la escala.

I: Si no miraras la gráfica de dónde obtendría esa altura.

A3: De reemplazar 3,5 en la función.

I: ¿Por qué cuando me habla de la base me hablas de 1,5 y cuando me habla de reemplazarlo lo hace en 3,5?

A3: Porque es el valor que toma x.

I: ¿Qué valor va a utilizar, aquí?

A3: ¿En dónde?

I: Para calcular esta área.

A3: El mismo 5,5, sino que le estaba mostrando de donde salio ese 5,5, cuando x, vale acá 3,5, y vale 5,5 y ese 5,5 al trazarlo horizontalmente me esta cortando.

I: Bueno, continúa por favor.

A3: El rectángulo me da de lado 5,5 por 1,5, le hallo el área a eso y me queda que el área del rectángulo es de 6,75, si le trazo una diagonal se van a formar 2.

I: ¿Para qué traza la diagonal?

E. Para formar 2 triángulos, en los cuales uno de los triángulos estaría compuesto por la parte sombreada.

I: El área sombreada de ese rectángulo representaría un área superior a la región sombreada o inferior a la región sombreada.

A3: El área del rectángulo seria superior a la del área sombreada.

I: ¿Si en la parte de abajo toma un área superior a la sombreada en la parte de arriba qué haría?

A3: ¿En la parte de arriba? Tomar la de la parte inferior.

I: ¿Puede tomar por arriba área inferior y por abajo un área superior?

A3: No, el rectángulo me muestra el área sombreada del rectángulo que esta por la parte superior de de la gráfica.

I: ¿Cuánto le dio el área bajo el eje OX?

A3: 6,75 unidades, pero esta área la voy a dividir por 2.

I: ¿Para obtener qué?

A3: Para obtener la parte sombreada del triángulo.

I: ¿Cuánto seria la mitad?

A3: Seria de 3,37 unidades aproximadamente la del área de abajo.

I: ¿Qué área ha calculado?

A3: La que esta debajo de la curva, que esta debajo del eje X.

I: ¿Cómo calcula la parte sombreada que está sobre OX?

A3: ¿Ésta de acá? La calculo también utilizando un triangulo rectángulo.

I: ¿Triángulo?

A3: No, rectángulo, perdón.

I: ¿Superior al área o inferior al área?

A3: Superior al área.

I: ¿Cómo seria?

A3: Trabajaría con un rectángulo que tenga como base 2 y de altura 1, eso me daría como área 2 unidades y la divido en 3, este rectángulo lo divido en 4 rectángulos iguales.

I: ¿Para qué lo divide en rectángulos iguales?

A3: Porque si analizo la gráfica, hay 2 partes en las cuales el área no está completamente sombreada.

I: Podría sacarlo a parte.

A3: Bueno, tengo un rectángulo de 2×1 que a su vez lo voy a dividir en 4 rectángulos iguales, los cuales van a tener como área 1×0.5, le hallo el área a 2 subrectangulos, el área del rectángulo mayor fue 2, pero como voy a trabajar con 2, entonces ya tendría una unidad hallada, trabajaría con los otros 2, estos 2 que me quedan los divido en 2 me queda 0,5, se me formarían 2 cuadrados, se me formarían 4 cuadrados de 0,5 por 0,5, estos 2 quedarían cubiertos de área 0,5 por 0,5.

I: ¿Cuáles 2?

A3: Estos 2 estarían parcialmente cubiertos.

I: ¿Cuáles son, no veo las figuras?

A3: Este fue el mayor.

I: ¿Cuánto tiene de área?

A3: 2×1, o sea que tiene de área 2 unidades.

I: 2 unidades.

A3: 2 unidades pero este lo divido en 4 pedazos iguales, que me forman 4 rectángulos de 1×0.5, si observo los 2 rectángulos superiores estarían dándome un valor aproximado de esa área sombreada.

I: ¿De cuánto?

A3: De 1 unidad, estos 2 me formarían 1 unidad de área.

I: ¿Por qué?

A3: El área del mayor es 2 y como son 4 partes iguales y voy a tomar 2, entonces seria la mitad que es 1, los otros 2 los divido en partes iguales y se formarían 4 cuadrados de lado 0,5 por 0,5, y hallaría el área de 2 no más y esos me darían un valor aproximado del área.

I: Si, continua por favor.

A3: Entonces seria 0,5 por 0,5, que seria 0,25, me faltaría este pedacito, si parto uno de los cuadrados en 4 partes iguales obtengo 4 cuadrados de 0,25 por 0,25 igual a 0,125, luego tendría 1 + 0,25 más, pero 0,25 son 2, más 0,125, haría la sumatoria de esto y me quedaría 1,025 (*El estudiante hace cálculos en voz baja*) 7 tres coma, eso me daría 1,375 más lo que obtuve anteriormente, que fue 3,37 más 3,375 eso me daría 4,75 el área de las 2 partes sombreadas.

I: ¿Qué puede concluir de los resultados obtenidos y por qué?

A3: Puedo concluir, que de una manera intuitiva llegaría a un valor aproximado del valor del área, pero si me piden el valor exacto utilizaría la integral definida haciendo uso de la función y el intervalo que tengo.

PREGUNTA Nº 6.

I: ¿Podría explicarme que quiere decir con el razonamiento que hace en la pregunta número 6?

A3: Bueno, nos están mostrando una gráfica establecida por una función y unos intervalos, y me están diciendo que esa integral se puede mostrar como una suma de integrales.

I: ¿Qué le piden en el ejercicio?

A3: Dice explica en términos del gráfico por qué la $\int_0^a \left(x^2+x\right)dx$, es igual a la suma de las partes de las integrales.

I: ¿Qué le piden hacer?

A3: Me dicen primero, o sea es como…

I: ¿Qué es lo que le piden en concreto?

A3: Explicar porque…

I: ¿Qué le piden en el ejercicio?

A3: El ejercicio me dice que explique el por qué de esa igualdad.

I: ¿En términos de qué?

A3: En términos de la gráfica, porque esa igualdad se puede expresar de manera gráfica, nos están mostrando la suma de las áreas de 3 gráficas que tienen una área bajo la curva, pero que la suma de las áreas independientes es igual al área total, entonces si le hallamos primero el área a una curva, le hallamos el área a la siguiente curva y finalmente hallamos el área de la otra curva, y si sumamos las 3 áreas nos debe dar algo igual.

I: ¿Por qué utiliza sólo el registro algebraico para demostrar la propiedad, puede hacerlo gráficamente?

A3: ¿Gráficamente? Pues gráficamente.

I: ¿Cómo graficaría las funciones qué haría para demostrar que se cumple esa igualdad?

A3: Pues seria a cada función graficarla con un valor y el valor que utilice para una función lo utilizo para las otras 2 funciones (*el estudiante grafica en una hoja de respuestas*).

I: ¿Le piden calcular las funciones o le piden que lo muestre gráficamente?

A3: No, me están diciendo que….

I: ¿Cómo seria gráficamente, trate de hacerlo?

A3: ¿Gráficamente? Me están diciendo que, $y = x$, entonces le doy valores a a.

I: No le piden dar valores, no le piden utilizar registro algebraico sino gráfico cómo lo haría a partir de gráficos, del gráfico de cada función ¿Qué haría?

A3: Como me dicen acá, haría el rectángulo de uno que fue lo que utilice, luego haría el rectángulo del otro.

I: ¿Por qué rectángulos?

A3: Porque es una de las formas más fácil, la que más se utiliza para hallar un valor aproximado del área.

I: Aquí no le piden aproximar le piden que explique gráficamente esa igualdad ¿Qué otras figuras geométricas podrías utilizar?

A3: Triángulos también.

I: ¿Como seria?

A3: Trazaría un triángulo, como inicialmente nos están dando un intervalo, pero no trazaría un triángulo, le hallaría los puntos de corte de la función, si y vale cero, x va a valer cero, si x vale cero, y va a valer cero, y sabemos que el primer punto va a partir en cero, ahora le hallaría un valor en x, entonces digamos que si x vale 3 entonces y vale 3, así obtengo el otro punto.

I: Le dicen que todas las integrales tienen el mismo intervalo.

A3: Si señor, entonces lo que quise hacer aquí en esta gráfica fue lo siguiente.

I: ¿Qué va hacer aquí en la gráfica?

A3: Mostrar que gráficamente nos están indicando 3 curvas, lo que quise hacer fue trazar líneas horizontales desde el punto de corte de la función hasta el eje x, ahí se me formaron 3 rectángulos, entonces lo que quise demostrar fue que el área de este rectángulo más el área de este otro me debe dar esta (*el estudiante va graficando en una hoja de respuestas*).

I: ¿Con los rectángulos, cómo obtendría la igualdad?

A3: Tengo este rectángulo de dónde lo obtengo, pues la curva tiene una forma así acá y utilizo este punto de corte y lo trazo horizontalmente hasta el eje y, observando la otra curva.

I: ¿Por qué no dibuja por separado y compara?

A3: Lo mismo hago con la segunda curva utilizo el punto de corte del intervalo en x y trazo una línea horizontal hasta el eje Y, y lo mismo hago con la tercer curva.

I: ¿Qué función representa cada gráfica?

A3: ¿Qué función? Esta me representa $y = x$, esta representa $y = x^2$ y esta a $y = x^2 + x$.

I: ¿Qué quiere demostrar con eso?

A3: Lo que quise demostrar fue que la suma del rectángulo formado por la función $y = x$ más el área del rectángulo $y = x^2$, esta suma es igual a la suma de estos 2 rectángulos, es igual al área del rectángulo de $y = x^2 + x$.

I: ¿Podría utilizar otro gráfico para explicar la propiedad?

A3: Seria un gráfico donde estén rayados los 3 al mismo tiempo.

I: ¿Que haría, necesita los 3?

A3: ¿Otro gráfico?

I: ¿Qué harías con otro gráfico para demostrar lo que acaba de explicar?

A3: No, no creo que con estos 3 lo puedo.

I: ¿Cómo representa gráficamente lo que estaba diciendo ahora?

A3: ¿Qué la suma de estos 2 me forman este?

I: Exacto.

A3: Que la suma de este más este me da este, o sea que la suma de los 3, de estos 2 me lleva me lleva a este, tengo yx, entonces le adiciono x^2, pero este a su vez este, este más este va a ser igual a $x^2 + x$.

I: ¿Qué conclusiones puede sacar del ejercicio?

A3: Que si me dan 3 funciones y tengo una función en la cual su área es mayor que la otra función, entonces esta función mayor se puede expresar como la suma de las áreas de 2 funciones menores que ella.

PREGUNTA Nº 7.

I: ¿Qué razones tiene para decir el valor de cada una de las proposiciones de la pregunta 7?

A3: Dice que (*el estudiante lee la pregunta) si* $F'(x) = G'(x)$ *en el intervalo* $[a, b]$, *entonces* $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$, pues es verdadero porque sabemos que la integral definida es la parte inversa de la derivada, cuando me hablan de f' me están hablando de la derivada y cuando me están hablando de f ya me esta hablando de la función original o sea la familia de la función y lo que me están mostrando es que esa función la integraron en un intervalo y la están evaluando en ese intervalo, entonces es algo que es correcto según el teorema.

I: ¿Con qué elementos matemáticos del cálculo integral relaciona esa primera proposición?

A3: Con la integral definida en un intervalo $[a\,,b]$.

I: ¿Qué más están aplicando aquí?

A3: La relaciono con la integral y la puedo relacionar con el área de una función evaluada en un intervalo

I: ¿Por qué encuentra relación con la integral definida, qué están aplicando de la integral definida ahí?

A3: Están aplicando el teorema fundamental.

I: ¿Cuáles son los criterios que lo llevan al razonamiento de la proposición 7b?

A3: El teorema de la integral definida, porque aquí nos están diciendo que si una función es continúa en un intervalo cerrado, entonces es integrable en el cerrado y el teorema de la integral definida nos dice que si una función es continua en un intervalo cerrado y derivable en el abierto.

I: ¿Qué valor le ha dado a esa proposición?

A3: Que es falsa.

I: ¿Por qué argumenta que es falsa?

A3: Porque la quise relacionar con el teorema de la integral definida que me dice que si una función es continua en el intervalo cerrado y derivable en el cerrado, entonces la integral se expresa como la $\int_a^b f(x)\,dx$, aquí me están diciendo que si una función es continua en el cerrado, entonces es integrable en el cerrado pues no se cumple eso.

I: ¿Por qué no esta de acuerdo?

A3: Porque muchas veces una función puede ser continua en ese intervalo, pero puede presentarse un salto.

I: ¿Pero están diciendo que es continua? Lea la proposición por favor.

A3: No, entonces si es verdadera.

I: ¿Cuáles son sus argumentos?

A3: Si viéndolo desde este punto, porque me están hablando del mismo intervalo y si la función es continua en ese intervalo, también es derivable e integrable.

I: ¿Qué elementos matemáticos están implícitos en esa proposición?

A3: El teorema de la integral definida, también el teorema de la derivada, porque si una función es continúa es derivable en un intervalo continuo, estarían como implícitos esos dos puntos.

I: ¿Qué otros conceptos matemáticos encuentra?

A3: La continuidad de una función, nos están hablando de continuidad.

I: ¿Qué argumentos tiene para justificar el valor de la proposición 7c? ¿ Por qué?

A3: Porque desarrolle la integral y obtuve el mismo resultado, resolví la integral a parte y me dio el mismo resultado.

I: ¿Está de acuerdo con ese resultado?

A3: Si.

I: ¿Qué valor obtuvo en la proposición 7c?

A3: Como la plantee me dio el mismo resultado -2, lo que hice fue invertir los intervalos porque al resolverlo de manera directa el resultado me daba cero.

I: ¿Qué función esta integrando?

A3: x^{-2}

I: ¿Entre qué valores?

A3: Entre -1 y 1.

I: ¿Qué valores hay entre -1 y 1?

A3: Esta 0, esta -1 ¿Qué valores? Pues…

I: ¿Cómo expresaría esa función?

A3: La expresaría como una suma de integrales que vaya desde -1 hasta 0 y desde 0 hasta 1.

I: ¿Por qué?

A3: Porque estoy trabajando en un intervalo casi unitario, lo que hace la diferencia son los signos, entonces el valor que voy a obtener de pronto no va hacer el correcto y la forma más correcta de trabajar esas integrales es por medio de una suma de integrales.

I: ¿Esta de acuerdo con que esa función se puede integrar así?

A3: ¿Así, cómo?

I: Como esta planteada y como esta resuelta.

A3: No.

I: ¿Por qué?

A3: Porque daría 0, o inclusive la respuesta esta incorrecta.

I: ¿Cuál es la incorrecta, la que esta ahí, o, la que hizo?

A3: No, están incorrectas la que esta ahí y la que hice.

I: ¿Por qué?

A3: La que esta ahí, porque como la plantean la respuesta no es la correcta, porque ahí lo que hicieron fue invertir el intervalo pero cuando se invierte el intervalo es porque, el intervalo de abajo es menor que el mayor, el intervalo de abajo es mayor que el superior en esos casos hay que invertir el intervalo.

I: ¿El problema está es en el intervalo?

A3: Exactamente tenemos problema de intervalo, entonces si invertimos el intervalo vamos a la misma respuesta que es -2, pero lo haría por medio de una partición de intervalos.

I: ¿Para qué partiría el intervalo?

A3: Para mirar que resultado puedo obtener.

I: ¿Cómo se llama la función que esta integrando?

A3: La función que estoy integrando, no lo tengo presente.

PREGUNTA Nº 8.

I: ¿Cómo le explicarías a un compañero el significado de la pregunta número 8?

A3: ¿Cómo le explicarías el significado de $\int_a^b f(x)\,dx$?

I: ¿Qué le diría, cómo lo haría?

A3: Por medio de la gráfica en pocas palabras le trataría de dar a entender el teorema cuando me hablan de una integral.

I: ¿Qué teorema?

A3: El teorema de la integral definida.

I: ¿Teorema o la definición?

A3: Perdón, la definición, entonces tomo una curva cualquiera en este caso voy a tomar el primer cuadrante como para facilitar el ejercicio, tomo el gráfico de una curva cualquiera, la cual voy a denominar $y = f(x)$, esa curva la voy a limitar por 2 rectas paralelas en x, de las cuales una la voy a llamar A y la otra B, la parte interna la voy a sombrear y a denominar región R, luego le explicaría a mi compañero que $f(x)$ es una curva trazada en ese cuadrante la cual debe ser continua dentro de ese intervalo y a su vez debe ser derivable, como otro punto es de que esa curva va a estar limitada por la curva superior $y = f(x)$ y por la recta x o el eje X, entonces va a estar limitada de arriba hacia abajo y verticalmente por las 2 rectas paralelas $x = a$ y $x = b$, entonces la integral la represento primero como el limite inferior, el valor menor de ese intervalo en este caso A y el limite superior, el valor mayor en este caso B , entonces mi función va a estar limitada por ese intervalo y la integral de la función y la función es $f(x)$ con diferencial de x por qué diferencial de x, porque como estamos hablando de funciones continuas y derivables, entonces por eso trabajamos con la diferencial *(El estudiante grafica el una hoja de respuestas).*

I: ¿Si tuviera mañana que explicarle a alguien el concepto de integral definida, cual seria la secuencia que seguiría, el desarrollo; es decir si tuvieras que preparar una clase de una semana para enseñar el concepto de integral definida, cuáles serian los pasos por dónde empezarías para lograr que un estudiante comprendiera el concepto de integral definida.

A3: El primer pasó si es en una semana

I: El tiempo seria indiferente, quiero que un estudiante que por primera vez lo voy a introducir en el concepto de integral definida, comprenda el concepto, qué secuencia seguiría para lograrlo.

A3: Preguntando primero si tiene el conocimiento de la derivada

I: ¿Cómo lo llevaría a que el comprendiera el concepto de integral Definida?

A3: Primero que todo lo haría con la sumatoria de Riemann.

I: ¿Por qué?

A3: Porque fue la manera en que me lo enseñaron y como de pronto pude entender un poco mejor de que se trataba la integral definida.

I: Lo que hoy vi es que se habla del concepto de sumatoria de Riemann, pero no logramos en la entrevista hacer una sumatoria de Riemann, entonces cómo induciría a un estudiante con el concepto de integral definida, qué haría.

A3: Primero seria a través de una gráfica, hacer la interpretación de la integral definida.

I: ¿Cómo sería a través de una gráfica?

A3: Explicando por medio de la definición.

I: ¿La definición de qué?

A3: De la integral definida y a través de la definición hacer la interpretación gráfica y después de entender la definición hacer la interpretación gráfica para entender más de que se trata lo que nos están hablando, saber que una función debe ser continua y derivable en un intervalo para poder integrarla, porque son los puntos básicos de la definición, para dar a entender primero el teorema y luego dar la interpretación gráfica.

I: ¿Cuál es tu propia definición de integral definida?

A3: Mi propia definición.

I: De integral definida.

A3: Que es una función que esta limitada por una curva llamada $y = f(x)$, y el eje X , y a su vez por 2 rectas paralelas llamadas intervalos, en este caso $x = a$ y $y = b$.

I: Muchas gracias.

ENTREVISTA (A4).

PREGUNTA Nº 1.

I: ¿Me podría explicar como obtuvo la respuesta de la pregunta número 1?

A4: Dice que (*la estudiante lee parte de la pregunta*) *el área de la región rayada es mayor que 12 y menor que 48*, la sustenté o la explique como puse ahí, porque no teníamos la ecuación, tendríamos que haber hallado el intercepto de la curva para poder saber cuál es la región y evaluarla en los puntos que me están dando que serian 3 y 9.

I: ¿Considera que esa área no se puede aproximar como está?

A4: Si, se puede aproximar como le digo.

I: Le piden ajustar más el área de esa región ¿Qué piensa, cómo lo haría?

A4: Haciendo particiones.

I: ¿Qué es eso de particiones?

A4: Cogiendo trozos de la gráfica.

I: ¿Cómo seria, trate de hacerlo en la hoja adicional?

A4: Espere y vera más o menos (*la estudiante dibuja en un hoja de respuestas*).

I: ¿Qué esta trazando?

A4: Haciendo la partición y hallaríamos el área de cada rectangulito.

I: ¿Para qué hace esas particiones?

A4: Para poder sumarlas todas y sacar un triángulo más.

I: ¿Qué está formando con esas particiones?

A4: Un área.

I: ¿Qué figuras geométricas esta formando, ahí?

A4: Rectángulos.

I: ¿Para qué traza los rectángulos?

A4: Para hallarles el área y sumarla para poder tener un área más aproximada.

I: ¿Cuál seria el área de cada rectángulo y cómo la calcularía?

A4: Seria lo que vale la partición, el ancho de la partición.

I: ¿Cuánto seria el ancho de la base de esa partición?

A4: Tomando en cuenta el intervalo cerrado $[3, 9]$ que me dan.

I: ¿Cómo lo haría, cómo seria?

A4: Partiendo ese intervalo.

I: ¿Cómo seria, trata de hacerlo?

A4: Colocándole más o menos de la base, por ejemplo, para que me mida 1, seria 1 por acá, entonces seria la base y mirar hasta donde me llega.

I: ¿Cómo calcularía la altura?

A4: Aquí me dice que es un 8, entonces acá seria 8 de base.

I: ¿Cuál seria el área del primer rectángulo?

A4: Del primer rectángulo, seria 8.

I: ¿Por qué 8, cómo obtiene el área de un rectángulo?

A4: Base por alto.

I: Tendría 8 para el primero.

A4: Entonces.

I: Qué tal si lo escribe.

A4: El área del primero seria 8.

I: ¿Cómo calcularía el área del segundo?

A4: Tomaría este aquí, me daría más o menos 6 teniendo en cuenta la gráfica.

I: ¿6 de qué?

A4: De alto.

I: ¿Cuál seria la base?

A4: 1.

I: ¿Por qué todos miden 1?

A4: Teniendo en cuenta (*la estudiante ríe*), que lo particiono de 3 a 9, serian 6 particiones.

I: ¿Cómo son esas particiones?

A4: Un refinamiento.

I: Continua el procedimiento.

A4: El área del rectángulo 2, seria 1 de base por alto que serian 6, acá me darían 6 (*la estudiante hace todas las anotaciones en una hoja de respuestas*).

I: ¿Cuánto le daría el área aproximada calculándolos todos?

A4: Me daría 24.

I: ¿Podría aplicar otro procedimiento diferente que le permita mejor aproximación del área y que justifique más las cotas?

A4: Seria hallando los interceptos.

I: ¿Cómo seria hallando los interceptos, cuáles?

A4: El intercepto por ejemplo, tengo uno que es 3 en x y tengo 8 en y, entonces es 3, es 8 y la otra es 9, es 2.

I: ¿Qué figuras formaría, qué quiere decir con esos interceptos, cómo seria?

A4: Para poder con esos puntos trazar la curva

I: ¿Qué quiere hacer con esos puntos?

A4: ¿Qué quiero hacer?

I: Si, con esos puntos que me acaba de nombrar,

A4: Hallar interceptos y aplicarlos para poder hallar la curva que es una parábola.

I: ¿Quiere encontrar una expresión algebraica?

A4: Hallando la expresión calculamos la integral definida de 3 a 9.

I: ¿Qué le permite esto, ajustar el área entre esos 2 valores o calcular el área exacta?

A4: Calcular esa área.

I: ¿Qué le pide el ejercicio?

A4: Los valores más ajustados.

I: ¿Qué más podría utilizar para ajustar más los valores?

A4: Particionando más chiquito y teniendo en cuenta estos que están fuera.

I: ¿Cómo seria más chiquito, que quiere decir que sean más chiquitos?

A4: Los triángulos.

I: ¿Cómo seria?

A4: Por ejemplo, acá tomaríamos estos otros teniendo en cuenta lo que hicimos anteriormente que es lo del rectángulo.

I: ¿Qué otros?

A4: Restándole este pedacito que seria de un triángulo, creo que lo mismo, el área del triangulo que es base por altura sobre 2, seria la base 1y la altura, seria de 8 a 6, entonces serian 2 y así con el resto, pero ya esto se lo restaría al área que me dieron acá.

I: ¿Cuántos rectángulos necesitaría trazar para ajustar más las cotas?

A4: Entre más pequeños sean los rectángulos, es decir, si hago más particiones voy a llegar a un resultado más ajustado.

I: ¿Qué otras figuras podría trazar para ajustar más el área?

A4: ¿Qué otras figuras?

I: Fuera de los rectángulos ¿Con qué otras figuras podría cubrir esa área?

A4: Cuadrados.

I: ¿Cómo seria con cuadrados?

A4: No igual, seguirían siendo rectángulos y particionándolos así creo que es más fácil.

I: ¿Cuántas figuras formarían, ahí?

A4: Teniendo en cuenta la escala.

I: ¿Qué calcularía y qué tiene en la base?

A4: Tendría un rectángulo.

I: ¿Cuánto mide ese rectángulo?

A4: Esto es de 3 a 9

I: Si

A4: Este es de 7

I: Si

A4: Un rectángulo de base 4 y altura…

I: ¿Esta segura que la base es 4, si va de 3 a 9?

A4: Para este primero.

I: ¿Para el primero y necesita partirlo?

A4: No necesariamente, entonces seria de 6.

I: ¿Cuánto tiene de base?

A4: De base 6 y de altura 4.

I: ¿Esta segura que la altura es 4, mire la gráfica?

A4: No, 2.

I: ¿Qué haría con la otra parte?

A4: La dividiría en 4 pedacitos, en 4 particiones.

I: ¿Podría utilizar más?

A4: Si, pero entonces…

I: ¿Podrías utilizar menos, cuántas utilizaría y por qué?

A4: Si utilizo más voy a llegar siempre a un resultado más ajustado.

I: ¿Qué seria entonces lo ideal?

A4: Hacer varias particiones.

I: ¿Eso que le permitiría?

A4: Que me permitiría hacer.

I: Si, al hacer bastantes particiones.

A4: Lograr un área más ajustada de acuerdo con lo que me están pidiendo en el ejercicio.

PREGUNTA Nº 2

I: ¿Puede explicarme como ha resuelto la tarea número 2?

A4: La pregunta 2 dice (*la estudiante lee el problema*) que *la región encerrada por el gráfico de la función* $f(x) = 4x$ *y el eje* x *en el intervalo cerrado* $[-2\,,2]$, la pregunta 2a me pide dibujar la gráfica, entonces le di valores a la x, para poder hallar la recta y dibujarla, teniendo en cuenta que me estaban diciendo el eje X, y el $[-2\,,2]$, entonces ahí seria como una especie de asíntotas y hasta aquí lo trabaje.

I: ¿Qué figuras se formaron bajo la línea recta?

A4: Triángulos rectángulos.

I: ¿Cómo son esos triángulos?

A4: Tienen de base 2 y de altura 8.

I: ¿Cómo ha calculado el área gráficamente?

A4: El área del triángulo es base por altura sobre 2, luego tengo de base 2 y de altura 8, entonces dos por ocho 16 y dividido entre 2, ocho.

I: Si.

A4: Pero como tengo otra figura igual, es sólo multiplicar por 2 y obtengo las 16 unidades de medida cuadrada.

I: ¿El área que esta bajo el eje OX es igual que la que esta por encima del eje OX?

A4: No, porque es igual pero con signo contrario.

I: ¿Cómo son las áreas entonces?

A4: Las áreas deben ser siempre positivas.

I: ¿Cuál es el valor del área total?

A4: Si, 16.

I: ¿Está segura?

A4: Estoy dudando.

I: ¿Por qué?

A4: Porque ya mirando el teorema…

I: ¿Cuánto le da esa área gráficamente?

A4: Si hallo esta área seria -2, por los 8 de altura menos 16, no, siempre me va a dar positivo.

I: ¿Por qué?

A4: ¿Por qué? Porque estoy tomando un x negativo y un y negativo, al hallar el área del triángulo me va a dar positivo, entonces sí me daría 8 más ocho 16.

I: ¿Cómo ha calculado la integral?

A4: La del punto 2b gráficamente, así como le explique, calculé la $\int_{-2}^{2} 4x dx$ y la resolví integrando normal, evaluando en estos 2 puntos y teniendo en cuenta el teorema (*la estudiante hace referencia a la respuesta que tiene en el cuestionario*).

I: ¿Cuánto dio el valor de esa integral?

A4: Me dio 16.

I: ¿Esta segura que ese valor es correcto?

A4: No.

I: ¿Por qué?

A4: Porque, cuando le doy el valor de $f(b)-f(a)$, $f(b)$ seria 2 y al reemplazarlo 2^2 es 4 por 2 ocho, menos el $f(a)$ seria -2. y -2^2 4 positivo por -2 menos 8, entonces ahí se me cancela o sea me daría 0 y un área no puede dar 0.

I: ¿Qué le piden calcular el área o calcular la integral?

A4: Me piden calcular la integral.

I: ¿Está de acuerdo con lo que hizo y por qué?

A4: Pues de acuerdo no, porque me equivoque acá.

I: ¿Por qué se equivoco?

A4: Sume y no se podía sumar.

I: ¿Cuál seria el valor correcto?

A4: Cero.

I: ¿Por qué cero?

A4: Porque al reemplazar en estos 2 valores, la resta me daría cero.

I: ¿Es lo mismo calcular el área que calcular la integral?

A4: No.

I: ¿Por qué?

A4: Porque la integral es un proceso más analítico y en el área hay que tener en cuenta es el intervalo.

I: ¿Qué relación hay entre esa área geométrica y la integral?

A4: ¿Qué relación?

I: Si.

A4: Que están tomando el mismo intervalo, de $[-2\ ,\ 2]$ y la función.

I: ¿Significan lo mismo el área y la integral definida?

A4: No.

I: ¿Por qué?

A4: La integral definida es el proceso limite de una suma de Riemann.

I: ¿Qué es el área?

A4: El área es la integral definida entre un intervalo cerrado $[a\ ,b]$ de la función evaluada en este intervalo.

I: ¿Por qué al calcular el área dio un valor y cuando calculó la integral dicho valor dio cero?

A4: Lo estaba viendo, porque por ejemplo, trabaje de -2 a 2 y no partí la integral.

I: Si.

A4: La pude haber trabajado también de -2 a 0 y de 0 a 2, pero igual me va a dar lo mismo, entonces no sé en qué estoy fallando aquí.

I: ¿Entonces, no está de acuerdo con lo que hizo?

A4: No, igual me quedo malo.

I: ¿Cómo justifica que los dos resultados sean diferentes?

A4: ¿Qué los 2 resultados sean diferentes?

I: Si, me dice que el área da 16 y que si hubiera hecho la integral correcta seria 0.

A4: Si.

I: ¿Por qué?

A4: ¿Por qué?

I: Esta de acuerdo que el área geométricamente le dio 16 ¿Cuando calcula la integral cuánto le debe dar?

A4: Teniendo en cuenta el área de la región gráficamente

I: ¿Cuando le piden calcular la integral cuánto le debe dar?

A4: Me dicen calcule el área.

I: No, le dicen calcule la integral ¿Cuánto le debe dar?

A4: Un valor.

I: ¿Cuánto da esta integral al calcularla?

A4: ¿Sin hacer la partición?

I: Si, lo que le piden en el ejercicio, calcular la integral.

A4: Cero.

I: ¿Por qué esos dos resultados son diferentes, el del área y el de esa integral?

A4: ¿Por qué?

I: ¿O, tienen que ser iguales?

A4: Creo que si, es la función de la misma gráfica.

I: En una le piden calcular el área gráficamente, en la otra le dicen que calcule la integral.

A4: Calcule y que la evalué en el intervalo.

I: Si, le piden calcular una integral ¿Tiene que dar lo mismo que el área?

A4: Creo que si.

I: ¿Por qué?

A4: Porque es la función de esa misma gráfica.

I: ¿Sino le hubieran pedido calcular el área gráficamente y sólo le hubieran pedido calcular esa integral, entonces qué habría hecho?

A4: O sea, sin evaluarla en esos dos puntos.

I: ¿Calculando la integral de esa función en ese intervalo, cuánto tendría que haber dado?

A4: Igual, me da cero.

I: ¿Cómo son los dos resultados?

A4: Diferentes.

I: ¿Por qué son diferentes?

A4: ¿Por qué son diferentes? Porque acá la tome negativa y a mi no me importó que estuviera por debajo del eje X .

I: ¿El área es negativa o es positiva?

A4: Es que ya entre en duda (*la alumna se ríe*) ya me puso a pensar más.

I: ¿Cómo debe ser un área?

A4: Positiva.

I: ¿Que valores puede dar una integral?

A4: Valores numéricos Reales,

I: ¿Cuánto debe dar esa integral?

A4: ¿La integral?

I: Si, la integral de esa función ¿Cuánto debe dar?

A4: Haciendo los cálculos me da cero.

I: ¿Es correcto o incorrecto ese valor, esta calculando sólo la integral no piden calcular área?

A4: Si, entonces es cero.

I: ¿Cuánto le debe dar el área?

A4: Un valor positivo

I: ¿Qué valor le dio?

A4: 16.

I: ¿Cómo son los 2 resultados?

A4: Positivos

I: Me refiero, a si son iguales o son diferentes.

A4: Son diferentes.

I: ¿Por qué son diferentes?

A4: ¿Por qué son diferentes?

I: ¿Qué puede concluir de los resultados obtenidos?

A4: Que es muy diferente calcular la integral y hallar el área gráficamente.

I: ¿Por qué?

A4: ¿Por qué? Porque acá sé que la integral de una función debe ser continua y si es continua en ese intervalo es integrable.

I: ¿Cuál es la función que esta integrando?

A4: $4x$.

I: ¿Es continua esa función?

A4: Si

I: ¿Por qué es continua?

A4: ¿Por qué es continua? Porque no tiene ningún pico, ningún chuzo y no hay un salto.

I: ¿Qué puede concluir de los dos resultados?

A4: En una, es el área.

I: ¿Y en la otra?

A4: El valor de la integral.

I: ¿Cómo son los dos resultados?

A4: Diferentes.

PREGUNTA Nº 3.

I: ¿Sabría comentarme como ha resuelto la tarea número 3?

A4: Dice que *(la estudiante lee parte del problema) sea la región entre la gráfica de la función* $f(x)=x^2$ *y el eje* x, es una parábola con vértice en el origen en el intervalo $[0\,,4]$, entonces me dice *utiliza particiones para calcular el área de la región R. Justifica tu respuesta,* en ese momento la deje, no fui capaz de resolverla.

I: ¿Qué piensa en este momento, qué haría se le piden hacer particiones para aproximar el área?

A4: Lo mismo que hice en el ejercicio 1.

I: ¿Qué es lo mismo?

A4: Teniendo en cuenta el $[0\,,4]$, el eje X, y la parábola, haría particiones y sumaria el área de cada uno de esos rectangulitos (*la estudiante grafica en una hoja de respuesta*).

I: ¿Qué particiones haría? ¿Cuál seria la base de cada partición?

A4: ¿La base?

I: ¿Cómo obtiene la base? ¿Cómo obtiene las alturas?

A4: Sé que la parábola es x^2.

I: Si.

A4: *(La alumna trata de hacer cálculos pero no lo logra*) No sé dándole valores a la x, creo que no lo sé.

I: ¿Cómo seria?

A4: Me enrede.

I: ¿Cuál es el intervalo en el que esta trabajando?

A4: $[0\,,4]$ cerrado.

I: ¿Cómo hallaría la base de cada intervalo?

A4: De acuerdo a los rectángulos que saqué le doy el valor a cada uno.

I: ¿Cómo le daría el valor a cada uno, qué quiere decir con esto?

A4: Que son la cantidad de particiones que hago para aproximar.

I: ¿Cómo traduce todo lo que me esta diciendo en valores para aproximar, cómo lo haría aplicando lo que me esta diciendo?

A4: ¿Cuántas particiones hago?

I: ¿Cuando le piden aproximar qué debe hacer, a dónde tiene que llegar?

A4: Aproximar el valor del área de la región.

I: ¿A qué tendría que llegar?

A4: Al valor de un área aproximada

I: ¿Qué seria por ejemplo, una letra o un número?

A4: Un número

I: ¿Cómo llegaría a ese número?

A4: Sin trabajar las particiones.

I: Como quiera.

A4: Por la integral.

I: ¿Cómo seria?

A4: Entonces seria.

I: ¿Qué le piden calcular la integral o aproximar?

A4: Aproximar.

I: ¿Cuando le piden aproximar, qué hace?

A4: Las particiones.

I: Calcular la integral o hacer otras cosas.

A4: Aplicar las sumas de Riemann.

I: ¿La suma de Riemann, le aproxima o le da el área?

A4: Las particiones

I: ¿Una suma de Riemann le da el valor exacto del área o una aproximación?

A4: Yo sé que una suma de Riemann es un proceso limite.

I: ¿Qué es un proceso límite?

A4: La integral definida.

I: ¿Cuando aplica el proceso limite está hallando el valor del área o lo esta aproximando?

A4: La estoy aproximando, porque la estoy calculando en este intervalo cerrado.

I: ¿Qué obtiene con esto, un valor exacto o el valor aproximado?

A4: Un valor exacto.

I: ¿Qué piden en el ejercicio?

A4: Aproximar el valor del área.

I: ¿Podría aplicar de una vez suma de Riemann o la integral, si aquí le dice que utilice particiones para aproximar el área, cómo lo haría?

A4: Haciendo lo mismo, dividiendo en rectángulos otra vez y hallaría el área aproximada.

I: ¿Cómo hallaría la base y la altura de esos rectángulos?

A4: Las hallaría haciendo 4 particiones.

I: ¿Cómo seria?

A4: 4 particiones: 2; 3 y 4 y me quedaría la base cada una de uno.

I: ¿Cómo seria, escriba los valores?

A4: Uno, si uno, y uno, más o menos dos, entonces cada rectángulo tiene de base 1.

I: ¿Cómo obtiene las alturas?

A4: ¿Cómo obtengo las alturas?

I: ¿Cómo obtiene las alturas si ya tiene la gráfica, las bases, el intervalo y la función, ¿qué piensa en este momento para aproximar el área, qué haría?

A4: No.

I: ¿Qué haría después de hallar el área de cada rectángulo?

A4: Hallaría el área de de cada triangulito y las sumaria.

I: ¿Para qué halla el área de cada triangulito?

A4: Porque estos son los triangulitos que están por fuera del área de la figura y los restaría a todo lo que me dio el rectángulo, hallo las áreas de cada rectángulo y las sumo.

I: ¿Qué más haría?

A4: Hallaría el área de cada triángulo y las sumaria y se las restaría a todo, porque estos son los que no están dentro de la gráfica.

PREGUNTA Nº 4.

I: ¿Puede explicarme como ha resuelto la tarea número 4?

A4: *Dice (la estudiante lee el problema) calcular el área limitada por la gráfica de la función* $f(x) = |2x-1|$ *en el intervalo* $[0\,,\,2]$ *y el eje* X, primero grafiqué la función.

I: ¿Qué figura se formó bajo la recta?

A4: Un triángulo.

I: ¿Cuántos triángulos?

A4: 2.

I: ¿Cuál es el otro?

A4: Este de acá.

I: ¿Qué le piden hallar?

A4: El área limitada por la gráfica de la función.

I: ¿Cómo hallaría el área de esa función?

A4: Acá lo halle sin tener en cuenta este triangulito, entonces seria la integral de 0 a u, esto es 0,5.

I: ¿Cómo obtiene el valor de 0,5?

A4: Tome escalas de 1.

I: ¿Cómo obtiene el valor, dónde corta la recta el eje X ?

A4: ¿Cómo obtengo el valor? Dándole valores a la x.

I: ¿Cómo seria dándole valores?

A4: Umm.

I: ¿Qué integrales esta planteando?

A4: Seria la integral de cero (*la estudiante escribe en una hoja de respuestas*)

I: ¿Hasta dónde?

A4: Si es 0,5 es que no sé, entonces lo voy a tomar como si fuera 0,5.

I: ¿De qué función?

A4: De la que esta por encima, menos la que esta por debajo.

I: ¿Cómo seria, podría plantearla?

A4: La que esta por encima seria el eje X, menos la que esta por debajo que seria $2x-1$ menos acá, antes de la integral, porque esta por debajo del eje X, más la integral de 0,5 a 2 de la curva que esta por encima, menos la otra, entonces seria $2x-1$ diferencial de x (*la estudiante lo va diciendo y escribiendo en una hoja de respuestas*).

I: ¿Está segura que esa integral está bien planteada?

A4: No.

I: ¿Por qué?

A4: Porque estoy dudando.

I: ¿Por qué lo duda?

A4: Lo dudo porque, sé que cuando estoy trabajando con el valor absoluto, una lo tengo que trabajar con el negativo y la otra con el positivo, o sea con los valores positivos.

I: ¿Cómo define el valor absoluto de una función?

A4: ¿Cómo lo defino?

I: ¿Cómo define el valor absoluto de una función?

A4: Los valores de la misma función, los valores negativos y los valores positivos.

I: ¿Cuáles serian los valores positivos, aquí?

A4: Tomando el valor absoluto ¿Cómo defino el valor absoluto?

I: Si.

A4: Si, la parte positiva de la función y evaluando esa misma función en negativo.

I: ¿Podría resolver el área de esa figura sin recurrir a la integral, cómo la calcularía?

A4: ¿Gráficamente?

I: Como quiera ¿De qué otra manera podría calcular esa área?

A4: Geométricamente

I: ¿Cómo lo haría?

A4: Como el área del triángulo.

I: ¿Cómo lo haría hallando el área del triángulo?

A4: Seria el área, la base es 1,5, insisto con el 0,5.

I: ¿Cuál seria la altura?

A4: ¿Cómo calcularía la altura?

I: Si

A4: Dándole valores a esta x, para poder graficar.

I: ¿Cómo seria, hágalo por favor?

A4: Seria, por ejemplo, cuando le doy el valor de 1 positivo.

I: ¿Cómo calcularía la altura con ese valor de la base?

A4: ¿Con esa base? ¿Cómo calcularía la altura con esa base? Teniendo en cuenta donde se intercepta la función y conociendo el $[0\ ,\ 2]$.

I: ¿Si ya tiene la base, cómo hallaría la altura para ese triángulo?

A4: Reemplazando ese 2 que me están dando en la ecuación.

I: ¿Cuánto le daría la altura?

A4: 3. Si dos por dos cuatro menos uno tres entonces si sería tres.

I: ¿Cuánto me dice que es la base?
A4: 1,5.

I: ¿Cómo halla la altura?

A4: Reemplazando los valores del intervalo.

I: ¿Cuál valor va a reemplazar el de la base o el que tiene en el intervalo?

A4: El que tengo en el intervalo.

I: ¿Por qué?

A4: Porque me esta diciendo que hasta ahí va la gráfica, o sea que se corta.

I: ¿Qué triángulo está calculando?

A4: El grande.

I: ¿Cómo seria, cuánto tiene el grande de base?

A4: 1,5.

I: ¿Cuánto tiene de base el pequeño?

A4: 0,5

I: ¿Cuánto daría el área de cada uno?

A4: De este grande.

I: ¿Este triángulo grande tiene de base 2 o tiene de base 1,5?

A4: 1,5

I: ¿Por qué reemplaza en 2?

A4: Estoy reemplazando en 2, para ver en dónde se me corta la gráfica y hasta dónde va y le doy valores a la x, para graficar esta función.

I: ¿Le da valores para dibujar el triángulo, o para trazar la recta?

A4: Para trazar la recta.

I: ¿Cuánto daría el área de cada uno?

A4: Esto me da uno, uno punto, 1,3 más o menos.

I: ¿El área total de quién?

A4: No, el área de éste.

PREGUNTA Nº 5.

I: ¿Podría explicarme cuando le dicen que aproxime un área que hace en la pregunta número 5?

A4: Qué aproxime el área de la región rayada

I: ¿Qué hace?

A4: Trabajo la integral.

I: ¿Cuando le dicen que aproxime, calcula la integral?

A4: Pero si me dicen calcula por aproximaciones utilizo el área.

I: ¿Qué es calcular por aproximaciones?

A4: Particionar.

I: ¿Cómo seria?

A4: Particionariamos la curva que va de cero a dos y la que va de dos a cuatro.

I: ¿Para qué particiona?

A4: Para poder tener una aproximación más exacta del área.

I: ¿Qué hace con esas particiones?

A4: Las sumaria.

I: ¿Para qué las particiona?

A4: Para obtener una área más chiquita y luego sumarlas.

I: ¿Qué figuran forman esas áreas?

A4: Pueden ser con rectángulos.

I: ¿Cómo tienen que ser esos rectángulos?

A4: ¿Cómo son?

I: ¿Cómo quedarían, cómo los trazaría?

A4: ¿Cómo los trazaría? No igual que trace las otras y aquí trabajaría lo mismo (la estudiante grafica en una hoja de respuestas).

I: ¿Cómo hallaría las bases de esos rectángulos?

A4: Teniendo en cuenta la escala que me están dando de cero a cuatro, entonces una es de cero a dos ¿Cómo le daría el valor a la base?

I: Si

A4: Haciendo un refinamiento pequeño de esas particiones por ejemplo, de uno.

I: ¿Para qué?

A4: Para que no me queden así como...

PREGUNTA Nº 6.

I: ¿Podría explicarme qué quiere decir con este razonamiento en la pregunta número 6?

A4: Me están diciendo que esto es una a, que de cero a, a, me están planteando la integral definida de la primera curva que es $x^2 + x$ y me están diciendo que la suma de estas 2 curvas por aparte me conforman una sola, entonces la trabaje tomándolas por separado.

I: ¿Por qué utiliza sólo el registro algebraico para demostrar la propiedad?

A4: Las hice por aparte de cero a tres de cada una de las funciones.

I: ¿Cómo lo podría demostrar gráficamente?

A4: ¿Gráficamente? No se, como demostrarlo, analíticamente si, por aparte las sumo y si me dan.

I: ¿Gráficamente no se le ocurre algo, cómo podría hacerlo, inténtalo que tal si grafica cada función por separado y luego las compara?

A4: Una es, bueno la otra, entonces que (*la alumna va dibujando en una hoja de respuestas, mientras va hablando).*

I: ¿Qué podría hacer para comparar, si ya las tiene, qué haría ahora?

A4: Tomando en cuenta el intervalo que me dan y al sumar esta $y = x$ y la de la parábola me van a formar esta.

I: ¿Si, cómo?

A4: Gráficamente.

I: ¿Por qué?

A4: ¿Por qué?

I: Si.

A4: Porque está encerrando en el mismo intervalo, en 3.

I: Ahí, no dice hasta 3, sino hasta a.

A4: Pero se supone que todas llegan hasta ese mismo a, veo que como el a puede ser cualquier número y siempre el mismo en las tres gráficas.

I: Horizontalmente y verticalmente se extiende hasta ahí ¿Cómo demuestra que una suma es igual a la otra?

A4: ¿Verticalmente? Verticalmente las curvas siempre van a crecer.

I: ¿Cómo demuestra que $y = x^2 + x$ le da lo mismo que la otra?

A4: Gráficamente.

I: Si, ya las tiene por separado ¿Qué relación puede establecer?

A4: Que las dos llegan a un a que es el mismo para todas y que al sumarlas van a dar la función grande.

PREGUNTA Nº 7

I: ¿Qué razones tiene para decir el valor de la proposición 7a?

A4: En la 7a, me dan la antiderivada de $f(x)$, lo tomé por aparte y según uno de los teoremas dice que si $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado, entonces es integrable en ese intervalo y por el segundo teorema fundamental del cálculo, si evaluó esa una función en ese intervalo es $f(b)-f(a)$ y tengo dos funciones que tienen la misma antiderivada y como la estoy evaluando en el mismo intervalo entonces son iguales.

I: ¿Cómo justifica el valor de verdad de la proposición 7b?

A4: *Si f es continúa en el intervalo cerrado $[a\ ,b]$ entonces f es integrable en el intervalo cerrado $[a\ ,b]$ (la estudiante lee la proposición),* este teorema dice que la continuidad no implica la integrabilidad, si porque puede haber un salto en la función y puede ser integrable.

I: ¿Puede suceder lo contrario?

A4: Lo contrario que sea integrable y que no…

I: Lee la proposición.

A4: Si f es continúa en el intervalo cerrado $[a\ ,b]$, entonces f es integrable en el intervalo cerrado $[a\ ,b]$.

I: ¿Cómo es lo de la continuidad?

A4: Que la función no tenga un salto, no tenga un pico por decirlo así y que se puede integrar en ese intervalo.

I: ¿Entonces, esta es la razón por la cual es verdadera, o, cómo justifica el valor de verdad?

A4: Aquí, es un igual, porque me están diciendo que la $\int_{-1}^{1} x^{-2}\, dx = \left[-x^{-1}\right]_{-1}^{1} = (-1)-1 = -2$, entonces me están diciendo que integre normalmente, por la fórmula de la potencia.

I: Si

A4: Entonces x^{-2} seria $x^{-2}+1$, si sobre el mismo $n+1$.

I: ¿Qué función está integrando y de dónde hasta dónde?

A4: De -1 a 1

I: ¿De qué función?

A4: ¿De qué función? Esta x^{-2}, que la puedo escribir como $\frac{1}{x^2}$?

I: ¿Puede integrar esta función así como está planteada? ¿Por qué?

A4: No se si lo pueda, igual me va a dar 1, si evaluó en x^2-1 me daría 1, entonces la integral es 1.

I: ¿Cuál cree que es el problema?

A4: ¿Cuál es el problema? Si parto la integral de -1.

I: ¿Ese valor es verdadero o falso?

A4: ¿Con qué elementos matemáticos se relaciona esa proposición?

A4: ¿Con qué elementos matemáticos?

I: ¿Qué conceptos matemáticos, estarían aplicando aquí?

A4: Están integrando una potencia

I: ¿Qué reglas están aplicando?

A4: El teorema fundamental.

I: ¿Qué más estarían aplicando ahí, entre qué valores están integrando esa función?

A4: Entre -1 y 1

I: ¿Entre -1 y 1 qué valores hay?

A4: Cero.

I: ¿Puede integrar esa función como la tiene expresada?

A4: Evaluándola en cero, o sea partiendo la integral de -1 a cero y de 1 a cero.

I: ¿Cómo seria y por qué?

A4: No, no se.

PREGUNTA Nº 8.

I: ¿Cómo le explicaría a un compañero el concepto de integral definida?

A4: Que es una integral definida.

I: ¿Cómo le explicaría a alguien el concepto de la Integral Definida, cómo lo harías?

A4: Que la integral definida es un proceso limite de una suma de Riemann y que una suma de Riemann son unas particiones que se hacen para llegar a una aproximación.

I: ¿Se puede hablar de aproximación de una integral?

A4: De un área.

I: ¿Aproximación de un área?

A4: Qué se evalúa en ciertos intervalos.

I: ¿Por qué asocia el concepto de integral con el límite y con la suma de Riemann?

A4: ¿Por qué lo asocio? Porque, una suma de Riemann se define, o sea, una integral definida se define como una suma de Riemann, como el limite de de esa sumatoria.

I: ¿Qué quiere decir que la integral es el límite de una suma de Riemann?

A4: ¿Qué quiere decir?

I: Si

A4: Que es la suma de todos esos pedacitos que estoy cogiendo de la integral y los estoy evaluando en ese intervalo y sumando.

I: ¿Cuál es su propia definición de integral definida?

A4: Que la integral definida en el $[a\,,b]$ es igual al proceso limite de una suma de Riemann.

I: Entonces, integral definida es sinónimo, de suma de Riemann ¿A qué nos lleva esto?

A4: ¿A qué me lleva? A un valor.

I: ¿Expresado en qué, cómo qué?

A4: ¿Expresado en qué?

I: ¿Si, qué valor?

A4: Al proceso que se llega cuando trabajo con la integral definida de una función evaluada en un intervalo, a un valor positivo.

I: ¿Siempre positivo?

A4: No.

I: ¿Cómo es ese valor?

A4: Un valor…

I: ¿Qué es un valor?

A4: Un valor numérico.

I: Muchas gracias.

ENTREVISTA (A5).

PREGUNTA Nº 1.

I: ¿Me podría explicar como obtuvo la respuesta de la pregunta número 1?

A5: Dice que el área de la región rayada es mayor que 12 y menor que 48 ¿Que por qué? (*el estudiante lee la pregunta*), decimos que el área es la base por la altura, entonces le damos valores y rayamos, entonces aproximadamente aquí le dimos unos valores de escala y reemplazamos.

I: ¿Podría explicarme esa expresión de dónde la obtuvo, esa área igual a 6×8, esa expresión que tiene, ahí, de dónde la obtiene?

A5: Decimos que el área es igual a base por altura, entonces ya armamos como el cuadro y tratamos de hacer una línea para hallar el área.

I: ¿Por qué le resta x?

A5: ¿Por qué, qué?

I: ¿Por qué resta x?

A5: Porque, supuestamente no sabemos cuánto vale el área que tenemos en blanco, con la que conformamos el cuadro para poder hallar los otros valores.

I: ¿Por qué justifica las cotas de esa forma?

A5: No, son valores que uno le da como para hacerlos.

I: ¿Para hacerlos qué?

A5: Como para demostrar lo que uno tiene.

I: ¿Me podría explicar más sus argumentos?

A5: Como no nos han dado aquí la escala, entonces tomamos y armamos el cuadrado y ya sabemos que el área es base por altura, le restamos la x que es el área que formamos, para poder que nos diera el cuadrado y le trazamos una línea para hacer la base por altura.

I: ¿Existe otra forma más exacta de ajustar las cotas?

A5: Posiblemente por sumatorias de Riemann, pero no se.

I: ¿Cómo seria por una sumatoria de Riemann?

A5: No, tocaría hallarle el área a cada uno, pero no, eso es complicado, pero se puede hacer por ese lado.

I: ¿Por qué es complicado?

A5: ¿Por qué es complicado? Porque si profe, porque uno tiene que tener la fórmula y sinceramente en ese momento no me acordaba.

I: ¿Y en éste momento?

A5: No profe.

PREGUNTA Nº 2.

I: ¿Puede explicarme como ha resuelto la tarea número 2?

A5: (*El estudiante tose continuamente*), supuestamente nos dan una función, entonces le damos valores en este intervalo.

I: ¿Qué le piden en el ejercicio?

A5: Hacer la gráfica y calcular el área de la región.

I: ¿Qué valor obtuvo al calcular el área gráficamente?

A5: ¿Qué valor obtuve? No, no se.

I: ¿Qué gráficas se formaron en el plano cartesiano?

A5: Que le puedo decir, dos triángulos.

I: ¿Cómo calculó el área gráficamente?

A5: Por eso, por una integral.

I: ¿Qué le piden aplicar la integral o calcular gráficamente?

A5: No, aplicar gráficamente.

I: ¿Gráficamente cómo puede calcular el área, trata de hacerlo en la hoja adicional?

A5: ¿Cómo puedo hallar esto?

I: Si, el área de lo que me acaba de decir de esos triángulos.

A5: Pues no, seria hallar el área de esto, hallar el área de éste rectángulo y restarle éste.

I: ¿Cómo seria?

A5: Aquí con la integral.

I: ¿Qué le piden aplicar la integral o calcular gráficamente?

A5: Pues...

I: ¿Gráficamente, cómo seria, trate de hacerlo?

A5: Calcular gráficamente seria así….

I: ¿A ver, cómo?

A5: Así, como está en la otra.

I: ¿Cómo la calcula el área de esos triángulos?

A5: Pues el área…

I: Calcúlela en la hoja adicional.

A5: El intervalo que nos dan, va de -2 a 2.

I: Expréselo en la hoja adicional ¿Cómo seria?

A5: Seria de 2.

I: ¿Ya tiene la gráfica, qué le falta?

A5: No, no entiendo.

I: ¿Si, cuánto vale el área que tiene sombreada?

A5: ¿Cuánto vale?

I: ¿Si, le piden calcular gráficamente el área, y tiene una gráfica de dos triángulos, cuál es el área de esos triángulos que están formados y sombreados que tienes ahí, bajo la gráfica?

A5: Seria lo mismo, que como la otra.

I: ¿Cómo seria como la otra, qué figuras tiene ahí?

A5: Dos triángulos.

I: ¿Cómo haya el área del triángulo?

A5: Con la integral definida.

I: ¿El área de un triángulo se haya con la integral definida?

A5: No, no me acuerdo.

I: ¿Inténtelo, podría hacerlo?

A5: Porque, es que aquí me dice calcular gráficamente la región.

I: ¿Dónde se han formado dos triángulos ¿Cómo haya el área de esos triángulos

A5: Área seria…

I: Aquí en la hoja adicional.

A5: Base por altura, no, si, base por altura, no, no me acuerdo.

I: ¿Qué valor obtuvo al calcular la integral?

A5: Supuestamente cero.

I: ¿Por qué supuestamente, no esta seguro?

A5: Pues no, pues da cero.

I: ¿Por qué da cero la integral?

A5: Porque tengo una integral, porque hay una fórmula que dice que si usted tiene, pero es que esto no es.

I: Le piden calcular la integral.

A5: Pero, es que ésta es negativa de -2 a 2, por eso, hacemos dos integrales.

I: ¿Qué valor obtuvo al calcular la integral?

A5: Cero.

I: ¿Por qué obtuvo cero?

A5: Porque al evaluarlo primero en la parte superior y después en la parte inferior me daría cero.

I: ¿Qué puede concluir de los dos resultados que obtuvo en 2b y en 2c?

A5: En 2b y en 2c, que son iguales, o sea que se puede hallar por cualquiera de los dos.

I: ¿Cuánto le dio el área en 2b?

A5: Supuestamente cero.

I: ¿Un área puede dar cero?

A5: No.

I: ¿Entonces?

A5: Está mala, pues creo que esta mala, pues no se si el área puede dar así, porque cuando uno tiene esto si.

I: ¿Si, qué?

A5: No da cero, da 1, no, entonces está malo profe.

I: ¿Cómo lo podría resolver?

A5: ¿Cómo lo podría resolver? Lo mismo, una sumatoria de Riemann, pero en este momento no se, no me acuerdo de la fórmula.

I: ¿Qué tiene que ver la sumatoria de Riemann con el área de un triángulo?

A5: Que uno puede ir como hallándole el área.

I: ¿Qué tiene aquí curvas, o tiene una figura regular?

A5: Una figura regular.

I: ¿Cómo calcularía el área?

A5: No, no me acuerdo profe.

PREGUNTA Nº 3.

I: ¿Sabría comentarme cómo ha resuelto la tarea número 3?

A5: Bueno, dice que utilice particiones para aproximar el área de la región R. Entonces, si sabemos que el área es igual a la base por altura y formamos un rectángulo, tenemos que nos daría ésta función.

I: ¿De dónde obtiene estos valores?

A5: ¿De dónde obtenemos estos valores? De la base por la altura que seria...

I: ¿Cuál es la base?

A5: La base es…

I: ¿De dónde obtiene 2×2?

A5: ¿De dónde obtiene 2×2? Pues, esta es la base, si o no.

I: ¿La expresión 2×2 de dónde la obtiene?

A5: Porque ésta es la base que seria...

I: ¿Qué quiere decir con que ésta es la base?

A5: ¿Qué quiere decir que ésta es la base? Que queremos hallar el área y necesitamos saber cuál es la base de la figura que nos dan, entonces decimos que 2×2.

I: ¿De dónde obtiene $2\times 2 + 2\times 8$? ¿De dónde obtuvo ésta expresión?

A5: Tiene que ser de la figura.

I: ¿Cómo que de la figura, cómo la obtuvo, de dónde la sacó, qué haría en este momento?

A5: No, no me acuerdo profe.

I: ¿Podría explicarme como resolvería este ejercicio?

A5: No me acuerdo sinceramente.

PREGUNTA Nº 4.

I: ¿Puede explicarme cómo ha resuelto la tarea número 4?

A5: Dice que calcule el área limitada por la gráfica de la función, entonces nos dan la función en el intervalo, evaluamos en ese intervalo la función, y nos da la respuesta.

I: ¿Cuál es la respuesta?

A5: 4

I: ¿Considera qué esa función esta bien integrada?

A5: Pues no se profe, en este momento no se, pues yo la hice así pero…

I: ¿Si le piden calcular el área, por qué aplicó la integral?

A5: ¿Si me piden calcular el área?

I: Si le piden calcular el área de una función valor absoluto ¿Por qué aplica la integral de esa función?

A5: Porque con ella también la puedo hallar.

I: ¿Cuántas integrales utilizaría para eso? ¿Considera que el procedimiento es correcto? ¿Qué haría en este momento? ¿Podría graficar la función?

A5: No…

PREGUNTA Nº 5.

I: ¿Cuando le dicen que aproxime un área qué hace en la pregunta número 5?

A5: ¿En la 5? Aquí, nos dicen que dada la siguiente gráfica, calcular aproximadamente el área de la región rayada, hay una fórmula que dice que cuando uno tiene dos áreas hay que mirar la que está por arriba y la que está por debajo, entonces se tiene la que esta por arriba y se le resta la que está por debajo y se evalúa en los intervalos dados.

I: ¿Por qué se resta?

A5: Porque esta por debajo, si no estoy mal, es porque esta por debajo.

I: ¿Siempre que este por debajo se resta? ¿Cuál es ese criterio para restar lo que este por debajo?

A5: ¿Cuál es el criterio? No.

I: ¿Si tiene áreas sombreadas cómo las aproximaría, cómo las calcularía?

A5: La función que tengo por encima evaluada en el intervalo, menos la función que tengo por debajo, menos el intervalo en el que esta lo resto.

I: ¿De qué otra forma lo podría hacer?

A5: ¿De qué otra forma lo puedo hacer? Pues con particiones, con una suma de Riemann, pero no.

I: ¿Cómo seria con particiones? ¿Podría comentarlo?

A5: (*El estudiante se ríe*), los divide en rectángulos y empieza hallar el área.

PREGUNTA Nº 6.

I: ¿Podría explicarme que quiere decir con este razonamiento en la pregunta número 6?

A5: Aquí, nos dan las integrales en unos intervalos, pero el intervalo superior está limitado dado por u, entonces reemplazamos.

I: Es de cero a a, todos tienen el mismo intervalo cero a a.

A5: De cero a a, lo tome como si fuera u, porque no se ve bien, entonces le damos un valor a ese más o menos aproximado a la gráfica y lo resolvemos.

I: ¿Podría demostrarlo gráficamente?

A5: No.

PREGUNTA Nº 7.

I: ¿Qué razones tiene para dar el valor de verdad de cada una de las proposiciones en la pregunta número 7?

A5: Dije que la primera es verdadera, pues en una discusión que tuvimos ahora con un compañero puse en ésta que era verdadera, porque si decimos que ésta es la derivada pero…

I: ¿Cuál considera en este momento que es el valor de verdad de ésta proposición?

A5: Pues no se, porque aquí, no se especifica si en verdad ésta es la derivada.

I: Si, eso es lo que está afirmando, es una proposición compuesta.

A5: Si entonces, ésta es la derivada de ésta.

I: ¿Qué elementos matemáticos están implícitos en esa primera proposición?

A5: ¿Qué elementos matemáticos?

I: ¿Qué conceptos están ahí presentes?

A5: Pues la derivada.

I: ¿Qué mas?

A5: La derivada, la integral.

I: ¿Por qué la integral?

A5: Porque si ésta es la derivada de ésta, entonces la integral de ésta seria la contraria.

I: ¿Qué valor de verdad le dio a la segunda proposición y por qué?

A5: ¿A cuál segunda, a ésta? ¿Qué valor le di?

I: Si.

A5: No, pues ahí no dice que le de ningún valor.

I: ¿La considera falsa o verdadera?

A5: No verdadera, porque supuestamente la función…

I: ¿Por qué la considera verdadera?

A5: Porque tiene que ser que continua, y aunque aquí no dice.

I: ¿Qué conceptos hay en esa proposición?

A5: ¿Qué conceptos? No pueden haber, cómo se dice, huecos.

I: ¿De qué nos hablan en la proposición?

A5: Monótona, tiene que ser monótona creciente para poder que sea integrable o sea que tiene que ser continua y monótona creciente.

I: ¿Qué valor le dio a la tercera proposición, a la 7c y por qué?

A5: Dicen que va de -1 a 1, dije que era falsa.

I: ¿Por qué la considera falsa?

A5: Porque la resolví, no se, si esta bien, me dio lo contrario, un número contrario a la respuesta anterior que nos dan.

I: ¿Considera que ese es el problema o puede tener otro?

A5: Otro procedimiento para resolver.

I: ¿Qué regla aplicaron ahí, para resolver esa integral?

A5: ¿Qué regla? No pues…

I: ¿En qué se fundamentaron para resolver esa integral?

A5: En lo que hemos visto.

I: ¿Qué es lo que han visto?

A5: Si, en la integral, se integra la función que tenemos, la evaluamos en los intervalos que nos dan, que es -1 y 1 y solucionamos.

I: ¿Está de acuerdo con el procedimiento más no con la respuesta?

A5: No, si la respuesta supuestamente es falsa y no me dio contrario el procedimiento.

I: ¿Cuál es el valor entonces?

A5: Falsa.

I: ¿Pero está de acuerdo con la regla que aplican en la proposición, igual que con la regla que está aplicando?

A5: Esta regla, con esta.

I: ¿Se puede aplicar esa regla, ahí?

A5: No se, porque aquí...

I: ¿Qué conceptos matemáticos se están aplicando, ahí?

A5: Lo que sabemos de integral.

I: ¿Qué es lo que sabe de integral?

A5: Como integrar una función y como evaluarla en los intervalos que nos dan.

PREGUNTA Nº 8.

I: ¿Cómo le explicaría a un compañero el significado de la integral definida en la pregunta 8?

A5: Dice que el significado matemático, es que la integral definida es un límite y donde el intervalo digámoslo ab está dividido en subintervalos infinitos, los cuales al sumarse en una suma de Riemann nos va a dar un valor numérico.

I: ¿Qué quiere decir en una suma de Riemann y un intervalo infinito?

A5: Una suma de Riemann, es por ejemplo las particiones, o sea, la integral es un número y la suma de Riemann son las particiones que yo puedo hacerle a ese intervalo y sumarlo infinitas veces.

I: Muchas Gracias

A5: Bueno profe.

ENTREVISTA (A6).

PREGUNTA Nº 1.

I: ¿Me podría explicar como obtuvo la respuesta a la pregunta número uno?

A6: En la pregunta me dan el área de la región sombreada y me dicen que es mayor que 12 y menor que 48, lo que hago es buscar las áreas por aproximaciones partiendo de lo que conozco y del intervalo, saco el área de los rectángulos como la base por altura, así tendría una aproximación del área, no sabría exactamente cual, pero tiene que ser mayor que 12 porque estoy tomando el rectángulo de abajo y que da 12 y está sobrando un espacio, eso quiere decir que es mayor que 12 (*la estudiante señala sobre el gráfico con el dedo*).

I: ¿De dónde obtiene el 12?

A6: El 12 lo obtengo de un rectángulo que tengo de base, que se esta moviendo en un intervalo de 3 a 9, que son 6 unidades y de altura 12 unidades y el área de ese rectángulo, me esta dando 6 por 2 da 12 unidades cuadradas, entonces concluyo que sí es mayor que 12.

I: ¿Cómo justifica que sea menor que 48?

A6: Menor que 48, por los otros rectángulos que tengo.

I: ¿Cuáles otros rectángulos?

A6: Los rectángulos que me dan que se están moviendo en el eje X positivo, a partir de ellos hago unas particiones.

I: ¿Dónde tiene ubicados esos rectángulos?

A6: Dentro del área de una curva y una recta paralela al eje X, que está partiendo desde 2 hago particiones de las áreas de los rectángulos que conozco.

I: ¿Cuál es el valor de las áreas de esos rectángulos que están entre la curva y el rectángulo base?

A6: Tengo uno que me da de base uno que es en el eje X de 3 hasta 4, de 3 a 4 me da una unidad y de altura me esta dando de 2 hasta 6, que se me esta moviendo de 2 a 6 que se me esta moviendo 4 unidades, entonces esto me da 4 por 1 me da 4 unidades cuadradas, de la misma manera hago las particiones que siguen, una que la tomo en un intervalo, más o menos el primero lo tome de 2 a 4 en el eje X, el segundo lo tomo de 4 a 5 en el mismo eje X, que seria mi base y la altura seria de 2 a 4, entonces aquí me da una unidad, y este da 2 por 1 me da dos unidades cuadras de área seria mi segundo rectángulo y el tercer rectángulo seria de 5 a 6 en la base, que seria una unidad y de altura 2 hasta 3, seria 3 unidades o sea una anidad, esto me da, uno por uno me da una unidad cuadrada, el que sigue en la base seria de 6 a 7 que seria una unidad y de altura aproximadamente una unidad, que seria de 2 a 2.5 la anterior la tome a 3, éste me está dando más o menos en la mitad, entonces de 2 a 2.5, me da 0. 5, entonces esta me da 1 por 0. 5 me da 1.5 unidades cuadradas.

I: ¿Cuál es la base?

A6: La base es 1.

I: Si

A6: La base de todo la estoy tomando como uno.

I: Si

A6: Y la altura la estoy tomando de 0 .5

I: ¿Cuál es el área aproximada?

A6: ¿Cuánto me da el área? 1.5 ¿No, o estoy haciendo mal?

I: ¿Esta segura? ¿0.5 por 1 cuanto da?

A6: ¿Cuánto me da? 0.5 (*la estudiante sonríe y die: no estoy segura, no me acuerdo*).

I: ¿Tiene 0.5 de base?

A6: Si

I: Y de altura 1.

A6: No de base tengo 1.

I: ¿Y de altura?

A6: Y de altura tengo 0.5

I: ¿Cómo se obtiene el área de un rectángulo?

A6: La base por la altura.

I: ¿Cuánto es 0.5 por 1?

A6: Me da uno por 0 .5, me da 0.5.

I: ¿Cómo obtiene el área total?

A6: El área total la obtengo haciendo *(la estudiante hace los cálculos en una hoja de respuestas)* la sumatoria de todas las unidades que me dieron, tomo la primera que tenia del triángulo rectángulo grande que me dio 12 unidades cuadradas, más las otras 4 unidades cuadradas, más 2, más 1unidad cuadrada, más 0 .5 unidades cuadrada, pero de todas maneras me están sobrando unos espacios, y es ahí donde hago mis aproximaciones entonces voy a decir que 12 + 4, 16 + 2, 18 +1, 19, 19.5 dentro de lo que tome, ahora puedo aproximar los espacios que me quedaron que no he tomado, entonces puedo decir que eso me va a dar más de 20 y menos de 30.

I: ¿Qué cota justifica con ese 19.5 ?

A6: La cota inferior.

I: ¿Qué está demostrando con esto?

A6: Con eso esto estoy demostrando que a partir de 19.5 unidades cuadradas es mayor que 12 y menor que 48, porque pasa de 12 unidades cuadradas y tampoco llega a las 48, ésta es la cota inferior.

I: ¿Puede utilizar otros métodos para aproximar el área, cuáles?

A6: Para aproximar el área si, podría utilizar otros métodos siempre y cuando conociera en este momento la ecuación de la curva, podría utilizar una integral definida para hallar el área que esta ocupando esa curva con el eje X en ese intervalo de 3 a 9.

I: ¿Qué le permite la integral definida, calcular el área o aproximar el valor de área?

A6: Aproximar el valor del área.

I: ¿Qué esta haciendo ahora, calculando o aproximando?

A6: Estoy aproximando, porque no tengo la certeza con las puntas que me quedan en la gráfica.

I: ¿Qué pasaría con la integral si tiene puntas y sobrantes?

A6: Con la integral, quito esos sobrantes entonces, y ya estoy dando el área de la curva.

I: ¿Qué área esta dando?

A6: El área entre esas curvas la que esta ocupando el eje X con la curva.

I: ¿Qué le permite la integral, aproximar o calcular el valor?

A6: Calcular el valor del área.

I ¿Cómo es el valor calculado con la integral?

A6: Es un valor exacto.

I: ¿Podría aplicar otro procedimiento diferente que le permita mejor aproximación del área y justificar más las cotas?

A6: Haciendo más particiones.

I: ¿Cómo seria?

A6: Refinando particiones.

I: ¿Qué es refinar particiones?

A6: Refinar particiones es partir los rectángulos que tengo en más rectángulos, en rectángulos cada vez más pequeños para hacer que el área sea más aproximada.

I: ¿Aproximada a qué?

A6: Al área exacta que me está ocupando esa curva con el eje X .

PREGUNTA Nº 2.

I: ¿Puede explicarme cómo ha resuelto la tarea número dos?

A6: La pregunta número dos, dice que la región encerada por la recta $f(x) = 4x$ y el eje x, en este intervalo (*la estudiante lo señala con el dedo*), lo que pasa es que en ese intervalo no está definida, y sabemos que para calcular la integral definida debe ser continua, cuando grafique el punto (0.0), ella no está definida, entonces tengo que tomar esta gráfica.

I: ¿Quién no está definida la integral o la función?

A6: No, la función no es definida.

I: ¿Puede repetirme cuál es la función?

A6: La función es $f(x) = 4x$ y el eje de X .

I: ¿Esa función no es continua?

A6: En este intervalo desde -2 hasta 2, no.

I: ¿Por que?

A6: Porque ella se me esta cortando en el eje X y ahí, no hay una continuidad, esta haciendo un…

I: ¿No hay continuidad de qué?

A6: Pues de la recta.

I: ¿De la recta? ¿Qué tiene la recta ahí en ese punto?

A6: Un corte.

I: ¿Cuál corte?

A6: El de 0.0, es un punto, pero me esta cortando la recta.

I: ¿Entonces, por eso no es continua?

A6: Cuando se corta en más de un punto deja de ser continua.

I: ¿En cuántos puntos se está cortando?

E. Pues si está sobre el eje X, cuando trace una línea vertical ella se va a cortar.

I. ¿Cuándo grafica la función qué figura bajo la curva se formó?

A6: Un triángulo rectángulo.

I: ¿Cuántos triángulos?

A6: Dos, uno por de bajo del eje X y uno por encima de eje X.

I: ¿Gráficamente, cómo calcula esa área?

A6: ¿Gráficamente? Por un triángulo rectángulo, que ya conozco.

I: ¿Cómo lo calcula, escríbalo por favor?

I: El área de un triangulo es la base por la altura sobre dos ¿Cómo calcularía gráficamente?

A6: En este momento mi base seria de 0 a 2, seria dos unidades por la altura.

I: ¿Cómo obtiene la altura?

A6: ¿La altura? Tengo que hallar puntos de intersección, entre la recta de la gráfica de la función $y = 4x$ y la recta paralela al eje y, que es 2.

I: ¿Cómo la calcula? Tiene la base ¿Cómo obtiene la altura?

A6: Calculo los puntos de intersección con el eje X, haciendo $y = 0$ y para calcularlo con el eje X, hago $x = 0$ (*la estudiante escribe en una hoja de respuestas*).

I: ¿Cuál es la altura de ese triángulo?

A6: 6 más o menos.

I: ¿Cómo lo calcula?

A6: La altura (*la estudiante susurra*).

I: ¿Por qué subió la recta hasta esta parte y formó ese triángulo? ¿Qué punto tiene en el vértice de ese triángulo?

A6: Porque tengo el punto de coordenadas $(2,6)$ más o menos, pero los saque y no recuerdo cómo.

I: ¿Cómo obtendría la altura?

A6: Esas coordenadas ¿No?¿Cómo le digo? $y = 0$ y $x = 0$ y reemplazo en la función.

I: ¿Qué reemplaza en la función?

A6: Los ceros que tengo.

I: ¿Cuáles son los ceros?

A6: Cuando hago $x = 0$ y $y = 0$, despejo y, entonces obtengo las coordenadas.

I: Estamos diciendo que la base es 2.

A6: Si

I: ¿Cómo obtiene la altura?

A6: Hallando puntos de intersección.

I: ¿Cómo seria?

A6: Haciendo $x = 0$ me da el punto de coordenada de y, si tengo que la función es $y = 4x$ y si hago $x = 0$ me da $y = 4(0)$, entonces me da que $y = 0$, ese es mi punto en y, ahora mi punto en, en x es $y = 4x$, si y es igual a cero, entonces despejo a x, y me da $x = 0$.

I: ¿Qué es $x = 0$; $y = 0$?

A6: Un punto.

I: ¿Dónde queda el punto?

A6: En el origen.

I: ¿Cómo obtiene la altura? ¿Cuál es la base?

A6: 2

I: ¿Sobre qué eje esta esa base?

A6: Sobre el eje X.

I: ¿Cómo obtiene el valor correspondiente en Y?

A6: Trazando una línea recta en 2 que me está cortando el eje X y que es paralelo al eje Y.

I: ¿Cómo calcularía el área gráficamente y cuál seria el área gráficamente de los dos triángulos?

A6: ¿Para esos dos triángulos?

I: Los que tiene formados bajo el gráfico.

E. Para mi seria la misma.

I: ¿Cuál es la misma?

A6: El área es la misma.

I: ¿Cuál es el área?

A6: Me esta sobrando un espacio.

I: ¿Cuál es el área, porque aun no tiene ninguna de las dos?

A6: Susurra (*la estudiante susurra a medida que va pensando*).

I: ¿Podría calcularla el área a partir del gráfico?

A6: NO.

I: ¿Inténtalo cómo seria?

A6: La altura es donde se intercepta.

I: ¿Cuánto seria la altura?

A6: 8.

I: Escriba las operaciones y calcule el área gráficamente.

A6: Si, tengo que el área es igual a la base por la altura sobre dos, mi base es 2, mi altura es 8, sobre 2, eso me da 16, dividido 2 me da 8, esa es el área del triángulo rectángulo que está por encima del eje X .

I: ¿Y como obtienes el área del que esta bajo el eje X ?

A6: Igualmente.

I: ¿Cómo es igualmente?

A6: Igual, es que tengo una base que es 2 unidades, una altura que es el mismo 8 y sobre 2 eso me da 16, dividido 2, me da 8, pero como está debajo del eje X , es negativa.

I: ¿Quién, el área?

A6: El área.

I: ¿Cuánto da el área gráficamente?

A6: ¿Gráficamente?

I: ¿Cuánto da el área de toda la gráfica?

A6: Me da 16 unidades cuadradas.

I: ¿De dónde obtiene las 16 unidades cuadradas?

A6: De sumar las dos áreas.

I: Me dice que una es negativa ¿El área puede ser negativa?

A6: Le coloco un signo menos por estar debajo del eje X , no puedo decir que el área me va a dar 0 y gráficamente estoy viendo que no me va a dar 0.

I: ¿Por qué le pone el signo menos?

A6: Porque está bajo el eje X .

I: ¿Qué tiene que ver que esté bajo el eje X ?

A6: Que es negativo.

I: ¿Qué es negativo?

A6: Bueno no seria el área negativa, un área no es negativa.

I: ¿Y entonces?

A6: Entonces, digo que esto me va a dar 16 unidades cuadradas, estas dos áreas si las sumo la que esta por encima y la que esta por debajo sin tomar el signo obviamente un área no me puede dar negativa, entonces sumo estas dos áreas la del triángulo que está por encima del eje X y la del triángulo que está por debajo del eje X me da 16 unidades cuadradas.

I: ¿Qué relación puedes establecer entre el área de la región bajo el eje OX y la región formada sobre el eje OX ?

A6: La relación que hay entre ellas dos, es que son las mismas, que ocupan el mismo espacio, estando en diferente posición.

I: ¿Cómo calcula la integral?

A6: La integral me está dando el intervalo que es desde -2 hasta 2, un intervalo cerrado y la calcule como un intervalo de -2 a 0 y de 0 a 2.

I: ¿Cómo calculó la integral?

A6: La calcule como la integral que va desde -2 hasta 2 de la función $4x$ y el eje X , que seria 0.

I: ¿Qué valor obtuvo?

A6: 0.

I: ¿Qué significa lo que hizo debajo?

A6: Lo que hice debajo fue partir la integral en 2 intervalos.

I: ¿Para que la parte?

A6: Necesitaba saber si me estaba dando igual y me da igual a 0 por los dos métodos que la calcule me esta dando el área 0.

I: ¿Por qué al calcular el área dio un valor y cuando calculó la integral dicho valor dio cero?

A6: ¿Por qué me dio 0?

I: ¿Por qué al calcular el área te dio un valor de 16 y cuando calculó la integral dio un valor de 0?

A6: Porque cuando calculo la integral debo saber que en ese momento debo anteceder a la integral un menos indicando que el área esta por debajo del eje X .

I: ¿Qué le piden en la primera parte?

A6: Gráficamente el área de la región.

I: ¿Qué le piden calcular en la otra parte?

A6: La integral.

I: ¿Cómo son los dos resultados?

A6: Los dos resultados son diferentes.

I: ¿Por qué son diferentes?

A6: Porque cuando estoy calculando la integral estoy tomando el intervalo completo y cuando estoy calculando gráficamente estoy hallando los triángulos por separados y los estoy sumando pero en la integral estoy tomando el intervalo de los dos triángulos y se me anula, el que esta por debajo con el que esta por encima por que son diferentes.

I: ¿Qué le piden calcular el área o calcular sólo la integral?

A6: Calcular sólo la integral.

I: ¿Qué relación hay entre los dos procedimientos?

A6: Que en la integral no me están pidiendo que calcule el área, simplemente me piden que calcule la integral y la integral se me anula.

I: ¿Cuál es la diferencia entre calcular un área y calcular una integran definida? ¿Podría explicarlo?

A6: La diferencia entre calcular un área y la integral definida, es que con la integral definida puedo calcular un área, la intersección que me da el área de dos curvas, con la integral definida puedo dar un valor exacto de esa área.

I: ¿Y cuándo calcula el área? ¿Que diferencia hay entre calcular el área y calcular una integral definida?

A6: Que cuando estoy calculando el área estoy calculando un valor, un valor de un número real, un valor exacto.

I: ¿Cuándo calcula la integral que esta calculando?

A6: ¿Cuál?

I: ¿Qué puede concluir de los resultados obtenidos?

A6: Que no es lo mismo calcular el área gráficamente de una región, que calcular una integral.

I: ¿Por qué?

A6: (*La alumna susurra*).

PREGUNTA Nº 3.

I: ¿Sabría comentarme como ha resuelto la tarea número tres?

A6: La tarea numero 3 me dice que haga la gráfica de la función $f(x)=x^2$, y el eje X, x^2 me está indicando una función cuadrática cuya gráfica es una parábola que abre hacia arriba y está encerando un área con el eje X en el $[0,4]$, además me dicen que utilice particiones para aproximar el valor del área de la región; estas particiones las puedo calcular como el proceso limite de una suma de Riemann, que consiste en que cada partición de estas la voy a evaluar en la función dada, (*la estudiante dibuja el gráfico en una hoja de respuestas*) en cada épsilon que tomo y la multiplico por la longitud del intervalo para conocer el valor de cada rectángulo que estoy tomando, cuando calcule las áreas de cada uno de estos rectángulos, sumo esas particiones y obtengo una aproximación del área total.

I: ¿Cómo podría aproximar a través de particiones el área bajo esa curva? Utilice la hoja.

A6: Bueno.

I: ¿Cómo obtendría los valores de las particiones que me acaba de decir?

A6: Tomo la función y la evalúo en el primer épsilon y luego la multiplico por la longitud que me dan en el intervalo (*la estudiante hace estos cálculos en una hoja de respuestas*).

I: ¿Cómo lo haría hasta obtener un valor aproximado?

A6: Lo primero la función evaluada en 1, es 1.

I: ¿Qué representa uno, la base o la altura?

A6: Es la base, que seria la longitud del intervalo.

I: ¿Cómo obtiene la altura, con qué figuras va a trabajar?

E. Con rectángulos.

I: ¿Cómo seria?

A6: Hasta donde me llega ese rectángulo, que no se me pase de la curva.

I: ¿Cómo obtendría la base y la altura?

A6: Para la base voy a tomar una unidad de longitud del primer rectángulo que tomo y la altura me da 0.5.

I: ¿Cómo obtiene 0.5?

A6: Porque la gráfica me parte de 0.0 y empieza a crecer, entonces gráficamente puedo ver que está dando 0.5.

I: ¿De dónde obtiene 0.5?

A6: Porque lo veo.

I: ¿Cuál seria el área del primer rectángulo?

E 0.5.

I: ¿Cómo obtiene el área del segundo?

A6: Tomo la misma unidad de la longitud del intervalo y la función.

I: ¿Cuál es el área del primer rectángulo?

A6: El área del primer rectángulo es 0.5.

I: ¿Del segundo?

A6: Del segundo es 1, porque mi base es uno y mi altura viéndola me da 1.

I: ¿Qué quiere decir viéndola?

A6: Que no la estoy calculando.

I: ¿Dónde la calcularía, cómo la obtendría?

A6: Con mediciones.

I: ¿Cómo obtendría el segundo?

A6: Una unidad de la base que es la longitud del intervalo y la función evaluada en 1, me daría 1×1, seria una unidad cuadrada.

I: ¿De dónde obtiene una unidad cuadrada?

A6: Una unidad cuadrada la obtengo de la función evaluada en 1.

I: ¿Qué quiere decir la función evaluada en uno?

A6: Qué x^2 la evaluó en 1, que es el épsilon que estoy tomando.

I: ¿Cómo obtiene el área del primero?

A6: La función evaluada en 0.5.

I: ¿Cuánto le da la función evaluada en 0.5? ¿Por qué la evalúa en 0.5? ¿Cuál es la base del primer rectángulo?

A6: Uno.

I: ¿Cómo obtiene el área?

A6: El área es la función evaluada.

I: ¿Qué va a evaluar?

A6: x^2

I: ¿En qué valor va a evaluar a x^2?

A6: En 0.5

I: ¿Por qué en 0.5?

A6: Porque es mi altura

I: Para qué evalúa en 0.5, si tiene la base y tiene la altura ¿Qué está haciendo en el segundo rectángulo?

A6: En el segundo rectángulo estoy haciendo lo mismo, uno que es la altura por 1 unidad.

I: ¿1 es la altura, qué es 1?

A6: Es la altura o la función evaluada en 1.

I: ¿Por qué?

A6: En la función, es mi altura

I: ¿Qué obtiene al evaluar la función?

A6: La altura.

I: La altura.

A6: La base me la esta dando el intervalo.

I: ¿Cuánto es la base?

A6: Es un.

I: ¿Qué obtiene cuando calcula la función?

A6: 1

I: ¿Qué obtiene con esto?

A6: La altura.

I: ¿La base o la altura?

A6: La altura.

I: ¿Cómo obtiene la altura del primer rectángulo?

A6: La función evaluada.

I: ¿Evaluada en cuanto?

A6: En 1, no en 0.5.

I: ¿Por qué en 0.5? Observe cómo calculó el área del segundo rectángulo.

A6: Si, el área del segundo rectángulo tome de base 1 que es la longitud del intervalo.

I: ¿Qué esta reemplazando en la función la base o la altura?

A6: La base.

I: ¿Cuál es la base del primer rectángulo?

A6: 1

I: ¿Como obtiene la altura?

A6: La función evaluada en 1.

I: ¿Cuánto le daría el área del primer rectángulo?

A6: Seria 1 unidad cuadrada.

I: ¿En el segundo, cuánto obtiene?

A6: Una unidad cuadrada.

I: ¿En el tercero?

A6: En el tercero, 1 unidad cuadrada.

I: ¿Todos tienen una unidad?

A6: Pero usted me está diciendo que evalué lo que estoy diciendo, no, es así.

I: No le estoy pidiendo que haga particiones ¿Cómo las obtiene? ¿Qué esta tomando de base?

A6: La longitud del intervalo, cada partición que hice tiene una longitud de 1 y esa longitud que hice la evaluó en la función, entonces todas me van a dar 1 unidad cuadrada.

I: ¿Por qué dan una unidad cuadrada?

A6: Porque mi longitud es la misma.

I: ¿Qué haría para aproximarlo? Aquí me esta hablando de limites de sumas de Riemann, me habla de épsilon, entonces cómo lograría aproximar el valor de esa área.

A6: Por una integral definida.

I: Pero aquí me esta hablando es del limite de una sumatoria ¿Cómo la obtendría?

A6: Es que...

I: Aquí le piden hacer particiones para aproximar.

A6: Haciendo particiones utilizo el limite de la suma de Riemann.

I: ¿Cómo podría utilizar esas particiones para hacer una mejor aproximación del área?

A6: Hallo el área de cada rectángulo.

I: Halle el área de cada rectángulo, si quiere trace nuevamente la gráfica, trace los rectángulos.

A6: Bueno, tomo de nuevo los rectángulos y me están diciendo que el intervalo es de 0 a 4 entonces de 0 a 4 voy a hacer particiones.

I: ¿Cuántas particiones va a hacer? ¿Cuántos rectángulos va a trazar?

A6: 4

I: ¿Cuántas tiene?

A6: Bueno aquí…

I: ¿Cuántos rectángulos sacarías?

A6: Muchos.

I: Trácelos a ver.

A6: Yo podría sacar muchos.

I: Haga las particiones, trace los rectángulos ¿Cuáles son los rectángulos?

A6: El rectángulo.

I: ¿Cuántos rectángulos tiene?

A6: 4

I: ¿Cómo halla el área de cada uno?

A6: Hallo el área como la base por la altura y luego las sumo.

I: ¿Halle el área de cada un, cómo seria?

A6: Del primer rectángulo me da de longitud 0.5 de base por 0.5 de altura.

I: ¿Cómo obtiene la base?

A6: Es que la base no la puedo tomar desde 0 porque ahí, no se me forman rectángulos.

I: ¿Cual seria el área del primero?

A6: El área del primero seria 0.5 por 0.5 de altura

I: ¿Y el área del segundo?

A6: Seria de base 1 por altura los mismos 0.5.

I: ¿Por qué 0.5?

A6: Porque la estoy trazando desde mi intervalo, desde 2 y trazo 1 línea recta y esa línea recta se me esta uniendo con.

I: ¿Si x vale 2, cómo obtiene el valor en y?

A6: Evaluando la función.

I: ¿Cuánto tiene de base y cuánto tendría de altura para ser un rectángulo?

A6: De base tendría 1 y si lo evaluó en la función que es x^2 me da 1.

I: ¿Cuánto le dio el área del primer triángulo?

A6: Me da 0.5 y ese 0.5 lo evaluó en la función.

I: ¿Y el área del segundo rectángulo?

A6: Del segundo rectángulo es 1 de base y ese 1 lo evaluó en la función y me da 1.

I: ¿Esta segura que esa área esta bien calculada? ¿Qué valores tiene en las particiones del eje X?

A6: ¿Qué valores tengo? 1, 2, 3 y 4

I: ¿Cómo obtiene las alturas?

A6: Este 2 que es mi segunda partición lo evaluó en la función.

I. ¿Qué valor obtiene?

E. 4

I: ¿Cómo lo escribe?

A6: En 1 hoja y el tercero 3, lo evaluó en la función para que me de la altura 9, y el cuarto 4, lo evaluó en la función y me da 16.

I: ¿Qué hace ahora con esos valores?

A6: Los sumo

I: ¿Y qué obtiene?

A6: Un área aproximada.

I: ¿Por qué es aproximada?

A6: Porque tengo unas puntas que no puedo calcular que me están sobrando, entonces estoy aproximando el área estoy diciendo que este es el tope más bajo que le puedo dar al área de la grafica.

I: ¿Cuál seria el valor, entonces?

A6: Seria $0.5+4+9+16=29.5$

I: ¿Ese 29.5 qué representa?

A6: La cota más baja que puede tomar el área de la gráfica.

I: ¿Qué quiere decir con eso?

A6: Que es una aproximación del área.

I: ¿De qué otra forma podría aproximar más el valor del área?

A6: Con la integral definida.

I: ¿La integral qué le permite aproximar el área o calcular el área?

A6: Calcular el área.

I. ¿De qué otra forma o qué otro procedimiento permitiría aproximar más esa área?

A6: Haciendo más particiones.

I: ¿Por qué al hacer más particiones aproxima más el área?

A6: Porque cuando hago más particiones lo que estoy buscando es que mis rectángulos se hagan más pequeños y me ocupen más espacios, ó sea que las puntas que me quedaban ya no me van a quedar sobrando tanto, que vayan siendo cada vez más pequeñas.

I: ¿Qué quiere decir que las puntas sean más pequeñas?

A6: Que se llenen todos los espacios que están ocupando la curva de la función $f(x)=x^2$ y el eje X entonces esos sobrantes que al principio deje, se vayan reduciendo más, porque cuando hago particiones lo que estoy haciendo es aproximar mucho más el área.

PREGUNTA Nº 4.

I: ¿Puede explicarme cómo ha resuelto la tarea número cuatro?

A6: *(La estudiante lee la pregunta) El área limitada por la gráfica de la función* $f(x)=|2x-1|$, *en el intervalo* $[0, 2]$ *y el eje* X, cuando me están hablando de ese valor absoluto, entonces me están diciendo lo que apunté inicialmente que era una función que me iba a dar positivo.

I: ¿Por qué positivo?

A6: Porque el valor absoluto me esta diciendo que el área no me da negativa, entonces me esta confirmando que el área me va a dar positivo.

I: ¿Cómo define el valor absoluto de una función? ¿Cómo define el valor absoluto de esta función? ¿Podría decirme cómo esbozaría el gráfico de esta función?

A6: Calculé el área en el intervalo que me dan de 0 a 2, del $|2x-1|$ diferencial de x, pero este valor absoluto me da dos valores.

I: ¿Cuáles son esos dos valores?

A6: Cuando x sea 0 y cuando x sea menor o igual que -1.

I: Escríbalos, por favor.

A6: $x\ldots$

I: ¿Qué hizo el 2? ¿Qué está tratando de hacer?

A6: Lo que estoy tratando de hacer es que cuándo esta función se me va a volver 0.

I: ¿Qué haría para mirar esto?

A6: Le doy los valores a x, para que esta función se me vuelva 0.

I: ¿Cuándo se le vuelve a cero?

A6: Cuando x sea igual a 0.

I: ¿Está segura cuando x sea igual a 0?

A6: No, me da -1, no mentira meda -1 esta x, esta función no se me va a volver 0.

I: ¿Qué haría, que está pensando en el momento?

A6: Estoy pensando que esta función siempre es positiva que no me va a dar 0.

I: ¿Trate de hacer lo que está pensando?

A6: Estoy pensando en un valor que la función me de en 0

I: ¿Cómo obtiene ese valor de 0, qué tiene que hacer con esa función?

A6: Encontrarle un valor a x, para reemplazarlo.

I: ¿Cómo encuentra ese valor de x?

A6: Le doy valores aleatorios con los que yo crea que la función…

I: ¿Cuál seria aleatoriamente?

A6: Buscar donde se me corta.

I: ¿Dónde corta qué?

A6: Donde se me está interceptando cuando $x = 0$.

I: ¿Cómo halla los interceptos?

A6: Pues haciendo…

I: ¿Qué debe hacer para hallar los interceptos?

A6: Para hallar los interceptos hago $x = 0$.

I: ¿Cómo hace que x se vuelva 0, cuánto debe valer x para que se vuelva 0?

A6: $\frac{1}{2}$

I: ¿Cómo obtiene $\frac{1}{2}$?

A6: Pues 0.5

I: ¿Cómo lo obtiene?

A6: O sea $x = 0.5$.

I: ¿De dónde obtiene $\frac{1}{2}$, escríbalo?

A6: Si tengo 2 y 2 por x y a x le doy el valor de $\frac{1}{2}$ y esto -1, entonces 2 y 2 eso me da 1 y 1-1 eso me da 0.

I: ¿Qué obtiene con ese 0?

A6: Un valor.

I: Pero qué valor y para qué quiere llegar a obtener 0? ¿Cómo obtiene $\frac{1}{2}$?

A6: Lo pensé.

I: ¿Cómo lo pensó, cómo llego a el?

A6: ¿Cómo llego a el? Necesito que la función se haga 0.

I: ¿Por qué necesita que la función se le haga 0, qué quiere con ese 0?

A6: Porque sé que cuando x valga $\frac{1}{2}$ la función me da un valor de 0.

I: ¿Cómo seria la gráfica?

A6: Entonces, cuando x valga $\frac{1}{2}$, la función vale 0 y ese es un punto por donde pasa la gráfica.

I: ¿Por dónde pasa la gráfica?

A6: Por 0. 0

I: ¿Por 0 .0?

A6: Ah no, por $\frac{1}{2}$.

I: ¿Cuál es el punto?

A6: ¿El punto? Es $\frac{1}{2}$.

I: ¿El punto es $\frac{1}{2}$? ¿ $\frac{1}{2}$ es un punto? ¿Cuál es el par ordenado, ahí?

A6: El par ordenado seria $\frac{1}{2}$, 0.

I: ¿Cómo quedaría la gráfica?

A6: La gráfica del $|2x-1|$.

I: ¿Como la trazaría?

A6: ¿Cómo la trazaría? (*La alumna susurra*), la trazo (*la estudiante traza lo que está diciendo*) y me está mostrando una recta que se está desplazando una unidad.

I: ¿Hacia dónde?

A6: Hacia la izquierda.

I: ¿Sobre qué eje?

A6: X .

I: ¿Cómo quedaría al trazarla?

A6: Está pasando sobre el eje Y en uno, es una recta paralela al eje X .

I: ¿Cómo seria paralela?

A6: Seria (*la estudiante susurra*) paralela al eje Y .

I: ¿Para qué obtuvo $\frac{1}{2}$ del que me hablaba ahora? Trate de hacer el esquema de la gráfica. ¿Cómo calcularía más fácil esa área, gráficamente o a partir de la función?

A6: A partir de la función.

I: ¿Cómo la calcularía a partir de la función?

A6: Por la integral.

I: Trate por algún medio de los que sabe, o de lo que piensa en este momento ¿Qué haría?

A6: ¿Qué haría? La calcularía por la integral definida.

I: ¿Cómo seria por la integral definida?

A6: La calcularía en el intervalo que me están dando de 0 a 2 y el eje X .

I: ¿Qué valor obtendría?

A6: Cuando la hallé me dio 4.

I: ¿Está de acuerdo con ese valor? ¿Está segura que ese es el valor del área?

A6: Espere la vuelvo ha hacer si.

I: ¿De qué otra forma podría calcular esa área?

A6: ¿De qué otra forma?

I: ¿Cómo serian los otros 2 resultados obtenidos al usar el cálculo geométrico y al aplicar la integral definida?

A6: Serian iguales.

I: ¿Por qué?

A6: Porque con la integral definida estoy hallando el valor y geométricamente cuando lo calcule también me va a dar lo mismo.

I: ¿Podría hacer alguno de los dos?

A6: No

I: ¿Por qué?

A6: Porque ahora no recuerdo, ya lo hice calculando la integral.

I: ¿Qué valor obtuvo?

A6: 4

I: ¿Esta de acuerdo con ese valor del área?

A6: No estoy muy segura.

I: ¿Por qué no esta segura?

A6: Porque me están dando un valor absoluto y la verdad no estoy manejando muy bien el concepto del valor absoluto.

PREGUNTA Nº 5.

I: ¿En el problema 5 cuando le dicen que aproxime un área, qué hace?

A6: Me dicen que aproxime el área y me están dando una curva que está partida en 2 por el eje X, entonces con una integral definida puedo hallar el área de cada una y sumarlas.

I: ¿Cómo hallaría el área de cada una?

A6: Me están dando los valores del intervalo y me están diciendo que la primera integral de la función que está por encima va desde 0 hasta 2.

I: ¿Qué le pide el ejercicio, calcular una integral o aproximar el área?

A6: Aproximar el área.

I: ¿Cómo aproximaría el área, por medio de la integral?

A6: La integral definida me da un valor exacto.

I: ¿Pero qué le piden el valor exacto o aproximar?

A6: Aproximar.

I: ¿Cómo aproximaría el área?

A6: Por particiones.

I: ¿Cómo seria por particiones?

A6: Por particiones puedo sacar rectángulos, que me ocupen aproximadamente el área de cada una de las gráficas.

I: ¿Cómo seria, trácelos en la hoja de respuestas?

A6: La primera curva se esta moviendo en el eje X, 2 unidades y en el eje Y positivo hasta 1, me esta dando una parábola que abre hacia abajo, entonces como particióno el primer rectángulo y tomo de base uno (*la estudiante traza la grafica en una hoja de respuestas*).

I: ¿Cómo obtiene la altura?

A6: La altura, si miro la gráfica la altura está dando hasta 1.

I: Si

A6: Me dicen que la función de esa curva es $f(x) = 2x - x^2$, entonces esa unidad la puedo evaluar en la función y me da el valor de la altura.

I: ¿Cómo seria, hágalo por favor?

A6: 2×2 por $1 - 1$ cuadrado, entonces 2-1 me da 1.

I: ¿Qué representa ese 1?

A6: Ese 1 es la altura, es la función evaluada en 1.

I: ¿Cómo obtiene el segundo?

A6: Entonces, el segundo.

I: ¿Cuántos rectángulos va hacer sobre el eje OX?

A6: 2.

I: ¿Cuáles son los rectángulos, trázalos por favor? ¿Cómo obtiene el área del segundo?

A6: El área del segundo, evaluando la función en 2, que es $2x - x^2$, 2 por 2 y 2 al cuadrado me da 4, -4 me da 0.

I: ¿Por qué en 2?

A6: No en 1, que es la longitud del intervalo, que es la base.

I: ¿Cuánto da el área?

A6: La base la estoy cogiendo desde 1 hasta 2.

I: ¿Cuánto es el área del segundo?

A6: 1.

I: ¿Cuánto da el área total sobre el eje OX?

A6: 2 unidades sobre el eje X.

I: ¿Cómo calcularía el área bajo el eje OX?

A6: Lo mismo.

I: ¿Cómo es lo mismo?

A6: Particiones.

I: ¿Cómo seria?

A6: Tengo la misma curva que se extiende de forma decreciente y que no alcanza a partir en 4, aproximadamente en 3.5 y tiene una recta paralela al eje Y, que corta con la gráfica de la parábola, los valores del eje Y están dando negativos, y la gráfica según la estoy viendo va más o menos hasta -0.5.

I: ¿Qué figuras va a formar bajo el eje OX?

A6: Rectángulos.

I: ¿Cuántos rectángulos trazaría?

A6: 2, uno que tiene de longitud 1 unidad de base.

I: ¿Cómo obtiene la altura de ese rectángulo?

A6: Evaluó la función.

I: ¿Cuánto le daría?

A6: 1, una unidad para el primero y el segundo seria.

I: ¿Cuánto mide el área?

A6: ¿El área? 1.

I: ¿El área de ese rectángulo es 1?

A6: Es la base por la altura.

I: ¿Cómo obtiene la altura?

A6: Pero es que la altura la puedo tomar viendo las unidades en las que me están partiendo el eje Y de la gráfica que me dieron inicialmente que va hasta -5 y puedo decir que si la base es 1 y la altura del rectángulo la puedo tomar hasta 4 y calculo el área del rectángulo como la base por la altura y obtengo 4 unidades cuadradas.

I: ¿Cómo calcularía el segundo2?

A6: De la misma manera, pero el segundo ya tendría de base 0.5.

I: ¿Cómo obtienes esa área, cuál seria el área total aproximada?

A6: Pues multiplicando 0.5×5.5 (*la estudiante hace cálculos en una hoja de respuestas*).

I: ¿Cómo lo hace?

A6: 27.5 en el segundo rectángulo.

I: ¿Cuál es el área total aproximada?

A6: Sumo las dos áreas.

I: ¿Cuáles son las dos áreas?

A6: La del primer rectángulo me da 4 unidades cuadradas y la segunda me dio 27.5 unidades cuadradas.

I: ¿Cuántos decimales tiene aquí?

A6: 2.

I: ¿Cuál seria la respuesta?

A6: 27.5

I: Revise la respuesta de la operación ¿Cuántos decimales debe separar?

A6: 1.

I: ¿Cuántos tiene?

A6: Tengo 2.

I: ¿Cuántos tiene en el producto?

A6: 2.

I: ¿Cuántos le daríán, y cómo los cuenta?

A6: De derecha a izquierda.

I: ¿Qué valor obtendría?

A6: 27, ah, 2.75.

I: ¿Cuál seria el área total de la región sombreada?

A6: La suma del área de los dos rectángulos que me da 2.75 y la otra que me dio 4.

I: ¿Pero esa es el área que está por de bajo del eje X o es el área total?

A6: Una aproximación del área total que está bajo el eje X.

I: ¿Y la que está por encima, estamos hablando del área total de la gráfica?

A6: Por eso, esta es la que me da 6.5 el área que esta bajo del eje X.

I: Pero le están pidiendo el área total ¿Cuál es?

A6: Si, para el área total sumo esta área, con el área aproximada que me dio por encima de eje X.

I: ¿Cuál es la aproximación total del área?

A6: 7.75.

I: ¿Cómo obtiene este valor de 7.75? ¿Cuánto dio el área que está sobre el eje OX?

A6: 2 unidades

I: ¿2 unidades?

I: ¿Cómo obtiene el área total por aproximación?

A6: Entonces, 2 unidades que están por encima y 6.75 que están por debajo me dan 8.75 aproximando al área total.

I: ¿De quién?

A6: De la gráfica

I: ¿Cómo obtendría mejores aproximaciones?

A6: Haciendo más particiones.

I: ¿Qué puede concluir de los resultados obtenidos y por qué?

A6: Que me están dando aproximaciones, pero no tan exactas, podría mejorarlas si hiciera más.

I: ¿Por qué?

A6: Porque las particiones que estoy tomando son muy grandes, para eso podría hacer aproximaciones más pequeñas y así aproximaría mejor el área.

I: ¿Podría hacerlo?

A6: Sí, podría hacerlo.

I: ¿Cómo seria?

A6: Haciendo más rectángulos.

I: ¿Qué le permite encontrar al hacer más rectángulos?

A6: Un área más aproximada.

PREGUNTA Nº 6.

I: ¿Podría explicarme que quiere decir con este razonamiento en la pregunta número seis?

A6: En la pregunta número 6, me esta diciendo que explique en términos del gráfico por qué se cumple la igualdad entre una integral y una suma de integrales en un mismo intervalo , entonces si la miro por propiedades puedo decir que la integral que me están dando $\int_0^a (x^2 + x)\,dx$, por propiedades lo puedo separar y eso me va a dar una igualdad con la que tengo al frente, por medio del gráfico me están diciendo que la grande contiene a las dos pequeñas, que si tengo la grande que es $y = x^2 + x$, entonces que esa me va a dar igual a la integral de $y = x^2$ más la integral de x.

I: ¿Por qué utiliza sólo el cálculo de integrales o el registro algebraico y no demuestra la igualdad a partir del gráfico? ¿Qué haría gráficamente para demostrar esa igualdad?

A6: Gráficamente podría hacer un triángulo rectángulo que me ocuparía el área del grande (*la estudiante traza las gráficas en una hoja de respuestas*).

I: ¿Cómo seria eso?

A6: Sobre el eje X, el área del triángulo grande tiene de base 3.

I: ¿Por qué habla de un triángulo?

A6: ¿De un triángulo rectángulo? Porque puedo formar un triángulo rectángulo.

I: ¿Dónde lo forma?

A6: En el gráfico.

I: ¿Por qué?

A6: Porque necesariamente tengo que tomar esa curva con 2 puntos puedo trazar una recta.

I: ¿Qué estaría representando ese triángulo?

A6: Ese triángulo me estaría representando el área.

I: ¿El área de quiénes?

A6: El área del rectángulo grande.

I: ¿Qué está representando esa área?

A6: El área del gráfico grande.

I: ¿Qué está representando ese gráfico?

A6: Me esta representando la suma de los dos pequeños.

I: ¿Qué representan los dos gráficos?

A6: La suma total del grande.

I: ¿Qué está representado la suma total del grande?

A6: ¿Qué hay representado? Una recta y dos curvas.

I: ¿Qué representan esa recta y esas dos curvas?

A6: El gráfico grande.

I: ¿Qué está representando el gráfico grande?

A6: El área total.

I: ¿Qué más haría para demostrar que esa propiedad se cumple gráficamente?

A6: Hallaría el área de los dos gráficos pequeños.

I: ¿Cómo seria el área de los otros dos, grafíquela por favor?

A6: Aquí estoy haciendo las dos.

I: ¿Cuáles serian las dos?

A6: Las dos, la que está en medio que es $y = x^2$.

I: ¿Cuál es la otra?

A6: Y esta recta que es $y = x$ que me está encerando un área con el eje X.

I: ¿Qué hace con esos tres gráficos?

A6: ¿Qué hago con esos tres gráficos? Les hallo…

I: ¿Qué representa el primero?

A6: El área total.

I: ¿Cuál es el área total?

A6: El área total es $y = x^2 + x$.

I: ¿Qué va a hacer, ahora?

A6: Ahora, puedo decir si $y = x^2 + x$ y cojo los dos pequeños los puedo sumar.

I: ¿Qué obtiene cuando los sumas?

A6: Que es lo mismo.

I: ¿Analíticamente o gráficamente?

A6: Gráficamente, analíticamente.

I: ¿Qué puede relacionar gráficamente, cómo puede concluir que son iguales?

A6: Si sumo estas dos, entonces $x^2 + x$, seria igual a la suma de estas dos áreas pequeñas que es $x^2 + x$, y eso me da una igualdad (*la estudiante escribe en una hoja de respuestas*).

I: ¿De qué otra forma lo demostraría gráficamente, qué otros procedimientos diferentes podría utilizar para comprobar la igualdad de la propiedad?

A6: ¿Qué otros procedimientos? Pues partir la primera integral.

I: ¿Que haría a nivel gráfico? ¿Qué piensa en este momento?

A6: Que a nivel gráfico, observo que me está quedando un espacio entre $y=x^2$ y $y=x^2+x$, y que si sumo x^2 y la recta x, veo que esa área gráficamente es más pequeña que la otra.

I: ¿Dónde está quedando un hueco?

A6: Me está quedando un hueco entre el área grande de $y=x^2+x$.

I: ¿Un hueco entre esa y quién?

A6: Entre $y=x^2$, entonces si grafico.

I: ¿Por qué le esta quedando un hueco?

A6: Porque gráficamente estoy viendo que no son iguales, pero inicialmente me están diciendo que es una igualdad.

I: ¿De dónde hasta dónde va x^2?

A6: ¿En el eje X?

I: ¿De dónde hasta dónde va horizontal y verticalmente?

A6: En el eje X va de 0 a 3.

I: ¿Y de dónde hasta donde va x?

A6: Y.

I: ¿De dónde hasta dónde va $y=x^2+x$?

A6: Bueno, si…

I: ¿Qué le daría? Trate de hacer las gráficas por separado.

A6: Tengo la recta que más o menos va.

I: ¿Cuál graficaría primero?

A6: Me dice que las grafique por separado, entonces voy a graficar primero la recta, en la gráfica tengo hasta 3 unidades de partición y la recta me esta mostrando que las 3 unidades pasan del eje X.

I: ¿Cuál es la gráfica de x, cómo quedaría?

A6: Esta es la gráfica de la recta.

I: ¿Qué figura representa?

A6: Un triángulo rectángulo.

I: ¿Cuál va a graficar ahora?

A6: Ahora, la parábola $y=x^2$ que gráficamente habré hacia arriba, también puedo ver que pasa de de la base 3 unidades más o menos.

I: ¿Qué más va a hacer?

A6: La más grande está sobre el 3, ó sea, que el espacio que antes me estaba sobrando lo puedo ocupar cuando la base me esta pasando en el eje x de 3, más o menos 3.5, luego el espacio que estoy ocupando acá, lo puedo utilizar para cubrir el espacio que me estaba faltando entre las 2 parábolas con la de $y = x^2$ y la de $y = x^2 + x$.

I: Gráficamente tiene por separado cada una ¿Cómo hace para demostrar gráficamente eso que me esta diciendo?

A6: Las sumo, esta pequeña con esta.

I: ¿Gráficamente cómo quedaría?

A6: Meto esta acá.

I: ¿Gráficamente cómo lo haría para de mostrar esa igualdad?

A6: No, pues se supone que y igual…

I: ¿Cómo haría en un nuevo gráfico de lo que me está diciendo en palabras?

A6: No, este espacio, en 3, de 3 a 3.5 tengo….

I: ¿Cómo va a demostrar horizontal o vertical si todas tienen el mismo intervalo me lo ha dicho que van de cero hasta a, y a es un punto cualquiera sobre el eje X ?

A6: Es que 3 me da, si la veo.

I: ¿Puede hacerlo como está pensando?

A6: No lo entiendo.

PREGUNTA Nº 7.

I: ¿Qué razones tiene para decir el valor de verdad de las proposiciones en la pregunta número 7?

A6: Bueno…

I: ¿Por qué considera qué la primera proposición es verdadera?

A6: Porque, me están diciendo que la antiderivada de $f(x)$ es igual a la antiderivada $g(x)$ en este intervalo**.**

I: ¿Con qué elementos matemáticos del cálculo integral relaciona la primera proposición?

A6: Con la antiderivación.

I: ¿Esta de acuerdo con el valor de verdad que ha dado?

A6: Si.

I: ¿Podría explicarme el razonamiento que hizo en la proposición 7b?

A6: Dice (*la estudiante lee la pregunta*) que *si* f *es continúa en el intervalo* $[a, b]$, *entonces* f *es Integrable en ese mismo intervalo*, cuando hablo de continuidad estoy afirmando que se puede integrar, pero cuando hablo de una integración no puedo decir que es continua, porque es como cuando miro las funciones trigonometricas, ellas son continuas, pero hay que coger un intervalo para integrarlas, aquí me están diciendo que es continua y si es continua en un intervalo lo puedo integrar.

I: ¿ Está de acuerdo?

A6: Si.

I: ¿Qué elementos matemáticos aparecen implícitos en esa preposición, o qué conceptos que hacen parte de la integral definida, aparecen allí en esa proposición?

A6: Que para integrar una función, necesito que tenga continuidad.

I: ¿Qué elementos matemáticos está manejando en esta proposición?

A6: La integral.

I: ¿Qué más?

A6: La continuidad.

I: ¿Podría explicarme el razonamiento de la proposición 7c?

A6: No la hice.

I: ¿Por qué no la hizo?

A6: Porque no fui capaz.

I: ¿Cuál es la dificultad para razonar sobre esta proposición?

A6: No, es que no se, no encuentro la manera, sé que si resuelvo esa integral, me da -2.

I: ¿Cuál es la dificultad, si le está dando el mismo resultado?

A6: Si me da el mismo valor pero…..

I: ¿Cuál es el valor de verdad?

A6: Para mi es verdadera pero…

I: ¿Por qué tiene dificultad, o, por qué no la hizo?

A6: Porque tengo una duda.

I: ¿Cuál es la duda?

A6: ¿Cuál es la duda? Que la veo rara.

I: ¿En qué sentido la ve rara?

A6: En el sentido que me están colocando un menos.

I: ¿Dónde?

A6: Me están colocando un menos acá cuando están resolviendo la integral para evaluar en ese intervalo, entonces no se de dónde resulta.

I: ¿Cómo la resolvería, si la saca a parte?

A6: Umm, (*la estudiante susurra*)

I: ¿Obtiene el mismo resultado?

A6: Si.

I: ¿Cuál es tu razonamiento, ahora?

A6: Qué es verdadera.

I: ¿Está de acuerdo?

A6: Si, la resuelvo y me da el -2 del que me están hablando.

I: ¿Qué aplicó para resolverla?

A6: Conceptos de integración

I: ¿Qué conceptos de la de integración, aplicó?

A6: La solución de una integral definida.

I: ¿Qué está aplicando para resolverla, alguna regala en especial?

A6: Que si tengo para integrar x^{-2}…

I: ¿Qué más puede argumentar?

A6: Para integrar le sumo 1 al exponente y por procesos algebraicos.

I: ¿Qué conceptos de integral definida está manejando? ¿Qué puede concluir del valor de la proposición?

A6: Qué es verdadera

I: Esta totalmente de acuerdo.

A6: Si.

PREGUNTA Nº 8.

I: ¿Cómo le explicaría a un compañero el significado de la $\int_a^b f(x)\,dx$ en la pregunta número 8?

A6: Que la integral definida es lo que había mencionado antes, el espacio que me esta ocupando el área total y que debe ser continua en un intervalo para poder integrar.

I: Si mañana tuviera que explicar alguien para que aprendiera el concepto de integral definida, ¿Cómo lo haría?

A6: Es que ahora con lo que usted me está preguntando sobre esto, tengo demasiadas dudas.

I: ¿Cuáles dudas, por ejemplo?

A6: No, es que en este momento tengo todos los conceptos errados tengo muchos vacíos que creí haber llenado y estoy demasiado equivocada en muchas cosas, entonces en este momento no me puedo explicar ni a mi misma, no creo poder explicarle a nadie eso, porque no estoy segura de lo que sé y de lo que no sé, eso es lo que me está pasando.

I: ¿Cuál es su propia definición en este momento de integral definida?

A6: ¿La integral definida para mi en este momento?

I: Si.

A6: Lo que pienso es que es el proceso límite de una suma de Riemann, o sea cuando hago particiones y hallo el área de cada una de esas particiones, las sumo y me da el área total, pero con la integral definida no hallo una aproximación, hallo el valor real del área.

I: ¿Por qué en la definición utiliza unos conceptos que tiene memorizados del cálculo y lo hace con mucha propiedad, pero cuando le digo que si podría, explicarle a alguien cómo se desarrolla, el concepto de integral definida tiene dificultad?

A6: Porque de esa manera, sí lo podría explicar.

I: Si.

A6: O sea, si tengo un área le podría explicar a alguien que si hago particiones cuando las sume eso me va a dar una aproximación del área; si voy hallar es un valor real, no aproximado utilizo la integral Definida, así puedo explicar esto, pero tengo otras cosas en las que no sé.

I: ¿Cómo cuáles?

A6: Vacía, como por ejemplo, el valor absoluto de una función, como la pregunta que usted me hizo ahora, cuando gráficamente no pude demostrar eso, entonces es ahí donde sé que tengo conceptos claros pero hay otras cosas que me están fallando gráficamente y no puedo demostrar cosas como estas.

I: Muchas gracias.

A6: Bueno a usted.

ENTREVISTA (A7).

PREGUNTA Nº 1.

I: ¿Podría explicarme cómo obtuvo la respuesta a la pregunta número 1?

A7: Al punto a de la pregunta 1, si.

I: O, lo puede hacer en general.

A7: La pregunta decía que el área de la región rayada es mayor que 12 y menor que 48 había que probar eso, entonces intente hacerlo geométricamente o gráficamente mejor.

I: ¿Que quiere decir gráficamente, cómo lo hizo?

A7: Hicimos lo siguiente, tenemos esto que es un 3 y tenemos este gráfico que nos proporcionaba usted; la idea era mostrar que la medida de esta área podría estar en medio de otras dos medidas, de otras dos áreas, entonces una podría ser el área de este triángulo que obviamente se ve que el área que usted nos dice mostrar es mayor y aquí podemos ver que si construimos un rectángulo, esa área de la que usted nos habla, es menor que la del rectángulo (*el estudiante traza los gráficos y hace los cálculos en una hoja de respuestas*) .

I: ¿Cuál seria el área de ese rectángulo que forma en la parte sombreada de la gráfica?

A7: La del rectángulo, bueno el área del rectángulo, es base por altura, la base es esta distancia que tenemos acá.

I: ¿Qué está calculando ahí?

A7: Aquí.

I: Si.

A7: Estoy calculando la medida de una longitud.

I: ¿Para hallar qué?

A7: Para hallar la el área de este rectángulo de base 6, que es el valor absoluto de la distancia que hay de 3 a nueve.

I: ¿Cómo obtiene la altura?

A7: La altura, haciendo un análisis gráfico podríamos decir que la curva cuando x, vale 2 la curva vale 8 eso seria la altura, eso podría hacerlo uno evaluando la función en 2.

I: ¿Qué valor obtendría al calcular el área?

A7: Necesitaría la función.

I: Me dice que está calculando el área del triángulo ¿Cómo lo haría?

A7: Primero vamos con el área del rectángulo, entonces el área del rectángulo es base por altura, este rectángulo tiene de base 6 que es esta longitud y de altura 8, sabemos que el área del rectángulo, es 6×8, entonces el área del rectángulo es 48 (*el estudiante escribe en una hoja de respuestas*).

I: ¿Qué representa esa área de 48?

A7: Representa el área de un rectángulo de base 6 y de altura 8.

I: ¿Qué representa con relación a la pregunta?

A7: Con relación a la pregunta representa un área mayor que el área de la región proporcionada en el ejercicio.

I: ¿Cómo demostraría el área menor?

A7: Un área menor que ésta, entonces ya habíamos hablado de un triángulo de base igual a la del rectángulo.

I: ¿Cómo aproximaría el área del triangulo?

A7: El área del triángulo es base por altura sobre 2, o, la mitad del área del rectángulo, entonces el área del triángulo, es 24, esta área representa una área menor, que el área de la figura que usted nos presenta.

I: ¿?

A7: ¿Las cotas?

I: Si.

A7: ¿A qué cotas se refiere?

I: A la cota menor que es 12 y a la cota mayor que es 48.

A7: ¿Por qué las justifico?

I: Si, de esa manera

A7: No entiendo la pregunta.

I: Se dice que el área está entre 12 y 48.

A7: Si

I: ¿Por qué justifica el área en este rango, utilizando el rectángulo y el triángulo?

A7: Ah, bueno.

I: ¿Qué lo ha llevado a pensar de esa manera?

A7: El área de la región que usted nos muestra en el gráfico, es un poco mayor que el área del triángulo y el área del triángulo es 24, pero esa misma área es menor notablemente que el área del rectángulo y el área del rectángulo es 48.

I: ¿Existe otra forma más exacta de ajustar esas cotas?

A7: Yo diría que la integral es la forma precisa.

I: ¿Qué quiere decir que sea la precisa?

A7: Que si calculamos esa área con una integral de Riemann.

I: ¿Qué le piden calcular o aproximar?

A7: Pienso que me piden aproximar.

I: ¿Qué otros procedimientos utilizaría para aproximar antes que utilizar la integral, podría utilizar otras herramientas?

A7: Si, podríamos utilizar rectángulos

I: ¿Cómo seria lo de los rectángulos?

A7: Podríamos empezar primero a dividir el intervalo.

I: ¿Podría hacer una gráfica nuevamente?

A7: Bueno, una aproximación, no la más apropiada, pero si es una aproximación la podríamos ver (*el estudiante hace un gráfico y calcula en una hoja de respuestas*).

I: ¿Que significa aproximar?

A7: Aproximar, como acercarse.

I: ¿Cuando dice acercarse es con relación a qué?

A7: A una medida real o precisa.

I: ¿En éste caso a qué se refiere?

A7: A la medida de un área.

I: ¿En ésta gráfica a qué quiere acercarse?

A7: No le entiendo la pregunta.

I: Reemplace los rectángulos.

A7: Por eso le digo, podríamos hacer una aproximación no la más apropiada pero si es una aproximación, podríamos construir un rectángulo de base 3, y altura 4 creo que es esto, tenemos un rectángulo y acá podríamos construir otro rectángulo y calcular el área de este primer rectángulo y esta otra es una buena aproximación.

I: ¿Por qué es buena aproximación?

A7: Porque lo que le hace falta a esta área de estos triángulos no es mucha para ser el área real o el área que usted nos pide calcular.

I: ¿Hasta dónde va esa área?

A7: ¿Cómo así que hasta donde va esa área?

I: ¿Dónde limita esa área, de dónde hasta dónde va?

A7: Esa área es una suma, depende.

I: ¿Qué más podría hacerle al gráfico, queda todavía área sombreada?

A7: No sé si lo que usted me pregunta es que si haciendo rectángulo más pequeños…

I: Seria otra forma, aquí ha hecho 2 rectángulos y está cubriendo una parte del área ¿Qué más podría hacer para cubrir el área total, en esta misma gráfica?

A7: En esta podríamos construir 2 triángulos sobre los rectángulos.

I: ¿Como seria, indíquelos por favor?

A7: Bueno, vamos a tomar estos triángulos.

I: ¿Cómo son esos triángulos, inscritos o circunscritos?

A7: Son inscritos.

I: ¿Por qué son inscritos?

A7: La definición exacta no la tengo, pero si podríamos hablar de que están dentro de una área o que está delimitada por algo.

I: ¿Están por fuera o por dentro del área sombreada?

A7: ¿Quiénes los rectángulos?

I: Los triángulos.

A7: Los triángulos están circunscritos.

I: ¿Por qué?

A7: Porque, pareciera que están como por fuera.

I: ¿Puede trabajar rectángulos inscritos y triángulos circunscritos?

A7: No sabría responderle.

I: ¿Qué le permitiría aproximar más, cuando están inscritos o cuando están circunscritos?

A7: Cuando están inscritos.

I: ¿Cuál seria el procedimiento para aproximar el área, para ajustarla dentro de las condiciones dadas en el enunciado del problema?

A7: Bueno.

I: ¿Cuáles serian las áreas de los rectángulos y de los triángulos?

A7: En ese caso no calculemos dos áreas de 2 triángulos, ni dos áreas de 2 rectángulos, sino calculemos dos áreas de 2 trapecios.

I: ¿Cómo seria?

A7: Calcular estas áreas que tenemos acá.

I: ¿Cómo las calcularía?

A7: Vamos a calcular primero teniendo en cuenta que estos son dos rectángulos y estos son dos triángulos y después vamos a sumar.

I: Bueno.

A7: Tenemos (*la gráfica aparece en una hoja de respuestas*) un triángulo, un rectángulo de base 3 y de altura 4, o sea, un rectángulo de área 12, tenemos otro rectángulo de base 3 y de altura 2, entonces tenemos un rectángulo de área 6, sobre ellos tenemos 2 triángulos, uno de base 3, de altura 4, entonces tenemos un triangulo de área 12 y tenemos otro triángulo de base 3, de altura 2, de área 3, (*está pensando*), entonces tenemos 2 rectángulos uno de área 12 unidades, otro de área 6 unidades y tenemos sobre ellos 2 triángulos de área 6 y el otro de área 3.

I: ¿Cuál es el área total?

A7: Entonces el área total vamos a llamarla a_t es igual, a la suma de las áreas de los 2 rectángulo, más la suma de las áreas de los 2 triángulos, entonces esto es 12+6+6+3, o sea 18 y 24, 27, unidades cuadradas (*el estudiante va escribiendo estos valores en una hoja de respuestas*).

I: ¿Cuál de los dos procedimientos se aproxima más al área?

A7: Este nuevo procedimiento.

I: ¿Cómo seria calculando los trapecios que mencionaba anteriormente?

A7: Bueno.

I: A partir de la misma gráfica.

A7: Tenemos un trapecio de base mayor 8 y de base menor 4 unidades y de altura 3, bueno no recuerdo la fórmula en estos momentos, entonces dice que el área del trapecio es que no recuerdo cuál es, la suma de las 2 bases, por la altura sobre 2, estoy viendo éste, entonces $b_1 + b_2$ por la altura sobre 2, entonces vamos a calcular el área del primer trapecio, este trapecio, tiene base mayor 8, base menor 4, esto es 12 por la altura que es 3, sobre 2, esto es igual a 36 sobre 2, esta área es 18. Ahora vamos a calcular la del otro trapecio, que tiene de base mayor 4, base menor 2 y altura 3, este lo vamos a llamar a_1, este a_2, $4 \times 2 \times 3$ sobre 2, esto es, 24 sobre 2, el área del segundo trapecio es 12, luego una buena aproximación del área es la suma de estas 2 áreas que corresponden a los 2 trapecios, luego el área total, es igual a 18 + 12, esto es 30 (*el estudiante grafica y calcula en una hoja de respuestas*) .

I: ¿Cuál de las 3 áreas es más aproximada, cuál es más ajustada?

A7: Es que me confunde.

I: ¿Por qué el tercer procedimiento da por encima del segundo?

A7: Por debajo, a si por encima, pues eso es lo que estoy tratando de aclarar.

I: ¿Podría aplicar otro procedimiento diferente que le permita una mejor aproximación del área y que justifique más las cotas?

A7: ¿Por particiones?

I: El que quiera.

A7: Sigo pensando que el método más preciso es calcular una integral.

I: ¿Cómo calcularía una integral, cómo lo haría?

A7: El área de esa región es la integral, desde 3 hasta 9 de la función ¿Aquí nos dan la función o no?

I: Mire el ejercicio ¿Puede aplicar una integral?

A7: Tendría que tener la función que limita el área.

I: ¿Por qué piensa que debe aplicar la integral para ajustar esas cotas?

A7: Porque es que la integral de Riemann es un proceso de limite.

I: Me puede explicar que le ha hecho pensar así.

A7: Lo que me hace pensar en eso es que, si en vez de construir acá 2 trapecios, construyo por ejemplo 4 trapecios inscritos, esa va a ser una mejor aproximación.

I: ¿Por qué?

A7: Porque esta cubriendo mejor el área, o sea, el área de esos trapecios esta cubriendo mejor esa área que tenemos que calcular pero si no son 4 si no 8 por ejemplo tracios va a ser mucho mejor.

I: ¿Qué quiere decir mucho mejor y por qué?

A7: Va a ser más preciso porque se va a acercar más al área.

I: ¿Qué quiere decir con acercarse más al área o aproximarse a qué?

A7: No se, sigo insistiendo en que estamos es calculando un área.

I: ¿Estamos calculando o aproximando?

A7: Usted me dice aproximándose a qué, le respondo aproximándose a una medida, a la medida de un área.

I: ¿Dónde inicia la gráfica y dónde termina la región sombreada?

A7: ¿El intervalo?

I: ¿Cómo describe el área bajo la gráfica?

A7: ¿El área bajo la gráfica? Es un área bajo una curva.

I: ¿Cuando aproxima el área a qué se esta aproximando?

A7: Al área bajo la curva.

I: ¿Qué otros procedimientos se le ocurren para ajustar más esta área?

A7: ¿Más que cuál?

I: Que los que ha planteado.

A7: ¿Que estos 3?

I: Si.

A7: Construir un sólo trapecio.

I: Me decía ahora que si construía más podría acercar más ¿Qué pasa si construye uno sólo?

A7: No creo.

I: ¿Como buscaría mayores aproximaciones?

A7: Construyendo más trapecios inscritos.

I: Solo trapecios, qué otras figuras geométricas le aproximarían más al área bajo el gráfico.

A7: Los rectángulos

I: ¿Por qué?

A7: No, es que no le entiendo las preguntas.

I: ¿Cómo trazaría los rectángulos para aproximar más el área?

A7: Vamos a calcular el área bajo esta curva.

I: Sí.

A7: Vamos hacerlo por acá ¿Esto es que 9?

I: ¿Cómo seria trazando los rectángulos?

A7: Empecemos por construir acá rectángulos de altura $f(x)$.

PREGUNTA Nº 2.

I: ¿Sabría comentarme como ha resuelto la tarea número 2?

A7: *Sea R la región encerrada por el gráfico de la función* $f(x)$ *(el estudiante lee la pregunta).*

I: ¿Que figuras bajo el grafico se formaron?

A7: Aquí vemos 2 triángulos (*el estudiante traza el gráfico en una hoja de respuestas*).

I: ¿Cómo calculó el área geométricamente?

A7: Geométricamente, es la suma de 2 triángulos de base 2 y de altura 8, que en su defecto podría calcularse el área de un rectángulo.

I: ¿Considera que los triángulos están bien ubicados, que el área sombreada esta bien ubicada?

A7: No.

I: ¿Por qué?

A7: Tenemos por acá, una recta y nos piden calcular la región encerrada por esa función.

I: ¿Cuál seria el área bajo el gráfico, puede sombrear el área que va a calcular?

A7: Espere que todavía no lo he sombreado, sé que es ésta pero pienso por qué no ésta.

I: ¿De dónde y hasta dónde va?

A7: Puede que analíticamente…

I: Qué tal si mira el enunciado del ejercicio y el intervalo en que va a calcular gráficamente el área.

A7: El intervalo es de -2 a 2.

I: ¿Eso le permite ubicar la gráfica?

A7: No.

I: ¿Por qué?

A7: Porque yo aquí veo…

I: ¿De dónde hasta donde te piden calcular gráficamente?

A7: De -2 a 2

I: ¿Qué tiene en la nueva gráfica?

A7: Pero esta si es igual a ésta.

I: ¿Por qué son iguales?

A7: Porque son dos triángulos de la misma base y de igual altura, aunque puede que el gráfico esté mal hecho.

I: ¿Cómo obtuvo el área?

A7: Calculando el área de esos dos triángulos y luego sumándolos o en su defecto, calcular el área de un trapecio porque estos dos completan un trapecio, no un rectángulo estos dos si sumamos estas áreas o lo sobreponemos, podemos ver que se forma un rectángulo de base 2 y altura 8.

I: ¿Qué valor obtuvo al graficar el área?

A7: 16 unidades cuadradas.

I: ¿Qué valor obtuvo al calcular la integral?

A7: 0 unidades cuadradas.

I: ¿Por qué al calcular el área dio un valor y cuando calculó la integral dicho valor dio 0?

A7: Porque si me piden calcular el área con una integral, cuando la calculo me va a dar negativa, entonces haría que las dos áreas se restaran, esta área va a ser negativa y esta positiva, al sumarlas me puede dar 0, si me dicen que calcule esta área utilizando una integral, debo tener en cuenta que ésta me puede dar negativa.

I: ¿Puede dar un área negativa?

A7: No, pero esta integral si.

I: ¿Que le piden calcular, el área o calcular una integral?

A7: ¿En dónde, en el segundo?

I: Si.

A7: Una integral.

I: Entonces, está de acuerdo con el valor de la integral.

A7: Si

I: ¿Cuál es la diferencia entre calcular el área gráficamente y calcular esa integral?

A7: Pienso que si me dicen calcule esta integral y me da cero puede tener sentido, si me dicen calcule la integral que corresponde a este gráfico me parece que así como se plantea aquí, es una integral sin contexto.

I: ¿Qué quiere decir sin contexto?

A7: Que no me esta representando un área.

I: ¿Que puede concluir de los dos resultados obtenidos?

A7: Muchas cosas.

I: ¿Como cuáles?

A7: ¿Cómo cuáles?

I: ¿Cómo son los 2 resultados?

A7: Los dos resultados son diferentes.

I: ¿Por qué son diferentes?

A7: Porque uno es un ejercicio de calcular una integral y el otro es un ejercicio de calcular un área.

I: ¿Cuando le piden calcular el área a qué debe llegar?

A7: Debo obtener un número real positivo.

I: ¿Cuando le piden calcular una integral, cuál puede ser ese valor?

A7: Si la integral es definida puede ser un número real positivo negativo o inclusive cero.

PREGUNTA Nº 3.

I: Sabría comentarme como ha resuelto la tarea número 3?

A7: Primero, grafiqué (*el estudiante hace el gráfico en una hoja de respuestas*).

I: ¿Qué le piden?

A7: Utilizar particiones para aproximar el valor del área.

I: ¿Cómo lo haría?

A7: Primero hacemos el gráfico de la función que es una parábola con vértice en el origen que abre hacia arriba, para hacer una aproximación, podríamos hacerlo con los rectángulos.

I: ¿Cómo seria, trace los rectángulos por favor?

A7: Con los rectángulos, en éste caso con los rectángulos vamos a calcular el área bajo la curva, en el $[0,4]$, entonces esta región esta delimitada por $x = 4$ y $x = 0$ y la función $y = x^2$, podríamos calcular esa área construyendo 2 rectángulos circunscritos.

I: ¿Podría utilizar más, o, podría utilizar menos rectángulos?

A7: Puedo utilizar más, en lugar de ser 2, podrían ser 4 rectángulos.

I: ¿Cuál es la diferencia entre utilizar más o menos, qué le permite alcanzar eso?

A7: Una mejor aproximación al área

I: ¿Cuando utiliza más o cuando utiliza menos?

A7: Cuando utilizo más.

I: ¿Por qué?

A7: Porque estoy cubriendo mejor el área con los rectángulos, si los rectángulos son de menor base, se están aproximando más.

I: ¿Cómo continuaría el proceso?

A7: Bueno estos son dos de altura 2, 3, de altura 8, me doy cuenta de esa altura calculando, 2 y 4 en la función y obtengo las alturas.

I: ¿Qué hace ahora?

A7: Calculo las áreas de esos rectángulos, el área del rectángulo 1 es 4, el área del rectángulo 2 es 16, y el área de esos dos rectángulos, es la suma de los 2, entonces el área total de esos 2

rectángulos es 20.

I: ¿De qué otra forma diferente de la anterior podría calcular el área bajo la gráfica?

A7: Diferente.

I: Si.

A7: ¿A qué se refiere con diferente, utilizando figuras diferentes?

I: Diferente, podría ser con figuras diferentes o utilizando otros procedimientos

A7: Podría ser.

I: ¿Qué piensa cuando le digo que aproxime el área?

A7: En una integral.

I: ¿La integral qué le permite, calcular el área o aproximar el área?

A7: Ah ya, listo.

I: ¿En qué pensaría si le pido aproximar de otra forma, que haría, coméntelo por favor?

A7: No, es que usted me confunde con sus preguntas.

I: ¿Qué otras figuras o de que otra forma o que más haría para aproximarla que se le ocurre coméntelo?

A7: Es que me confunden las preguntas suyas porque me pregunta muchas veces lo mismo, entonces no sé si es que le estoy dando respuestas que no espera o quiere buscar otras, si está buscando otras respuestas, entonces no entiendo.

I: ¿Que otra respuesta tendría a la pregunta que le hago, ya lo ha hecho con dos rectángulos, de qué otra manera podría aproximar además el área?

A7: Vuelvo e insisto, no sé si es que estoy equivocado o qué pero podríamos construir en vez de 2 más rectángulos.

I: ¿Y cómo podría calcular el área?

A7: Si hablamos de calcular, entonces con una integral.

I: ¿Cómo seria con una integral?

A7: Seria la $\int_0^4 x^2\,dx$, si la calculo, entonces esto es: $\int_0^4 x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^4$, esto es 4 al cubo sobre 3 y esto es 16, 40, 64, $\frac{64}{3}$ (*el estudiante hace los cálculos en una hoja de respuestas*).

I: ¿Qué diferencia hay entre ese valor y el anterior?

A7: La precisión.

I: ¿Cuál de los 2 es más preciso?

A7: El de la integral

I: ¿Además de la integral qué otro procedimiento se podría utilizar para calcular el área?

A7: Para calcular esa área, no sé el que estábamos hablando ahora, el de construir rectángulos.

PREGUNTA Nº 4.

I: ¿Puede explicarme como ha resuelto la tarea número 4?

A7: Ahí, lo que hay que calcular es el área bajo una función valor absoluto.

I: ¿Cómo define el valor absoluto de esta función?

A7: El valor absoluto de esa función, habría que redefinirla, como la función va a valer $2x-1$, si x es mayor que 0 y va a valer $-(2x+1)$, si x es menor o igual a 0.

I: ¿Podría decirme cómo ha esbozado el gráfico de la función?

A7: Intenté utilizar la geometría analítica, para buscar el desplazamiento y la amplitud pero…

I: ¿Qué es el desplazamiento y la amplitud, ahí, a qué se refiere con esto?

A7: A los parámetros.

I: ¿Cuáles?

A7: 2 y -1

I: ¿Qué hace con eso?

A7: No, por eso le digo, pensé hacerlo.

I: Si.

A7: Pero no recordaba qué me indicaba este 2 y este -1

I: ¿Está de acuerdo con el gráfico que tiene?

A7: Si.

I: ¿Cómo lo ha hecho?

A7: Teniendo la función, tabulé le di a x tres valores.

I: ¿Cómo ha calculado el área, a partir de la representación gráfica?

A7: Calculando dos integrales, una de 0 a $\frac{1}{2}$ de la función, más otra de $\frac{1}{2}$ a 2.

I: ¿Por qué utiliza dos integrales?

A7: Porque lo que tenemos aquí realmente son dos funciones, habría que calcular la integral de dos funciones.

I: ¿Cuál es el límite común entre ellas?

A7: Es un punto.

I: ¿Cuál es ese punto?

A7: Punto de coordenadas $\frac{1}{2}$.

I: ¿Por qué $\frac{1}{2}$?

A7: Porque, a ver.

I: ¿De dónde obtuvo $\frac{1}{2}$?

A7: Ese $\frac{1}{2}$, lo obtuve, como por inspección, pero…

I: ¿Qué quiere decir por inspección?

A7: Mirando la gráfica, pero podríamos hacer $y = 0$ para saber el corte.

I: ¿Esta de acuerdo con el valor obtenido del área a partir de la integral?

A7: Si.

I: ¿Qué figuras bajo la gráfica se formaron?

A7: 2 triángulos.

I: ¿Podría utilizar otra forma para calcular esa área diferente de la integral?

A7: Calcular el área de los 2 triángulos.

I: ¿Cómo calcularía el área de esos 2 triángulos?

A7: Tenemos dos triángulos, vamos a llamarlos a_1 y a_2, el triángulo a_1 tiene de base $\frac{1}{2}$ y de altura 1.

I: ¿De dónde obtiene la altura, cómo obtiene la altura de ese triángulo?

A7: Evaluando la función en $x = 0$, obtengo un punto.

I: ¿Por qué en $x = 0$?

A7: Porque el intervalo de integración es $[0,2]$, entonces necesito saber de dónde a dónde va la gráfica, y los puntos más apropiados para evaluar son cuando x vale 0 y cuando x vale 2.

I: Continué el procedimiento.

A7: Como el segundo triángulo tiene de base $\frac{3}{2}$ y de altura 3, entonces el área de éste es $\frac{9}{4}$, y el área del primer triángulo es $\frac{1}{4}$ (*el estudiante hace los cálculos en una hoja de respuestas*).

I: ¿Cuál seria el área total?

A7: El área total seria $\frac{1}{4}+\frac{9}{4}$, la suma de las áreas de los dos triángulos esto es $\frac{10}{4}$.

I: ¿Cómo son los valores obtenidos?

A7: Son exactamente iguales

I: ¿Qué puede concluir de los dos procedimientos utilizados anteriormente?

A7: Puedo concluir que los ejercicios están bien desarrollados, porque usando dos métodos me da el mismo valor.

I: Si tuviera que explicarle a un estudiante por primera vez el concepto de integral definida ¿Cuál de los dos métodos utilizaría?

A7: ¿Por primera vez?

I: Si.

A7: El método de los triángulos.

I: ¿Por qué?

A7: Porque, pienso que es algo que ellos ya habrían trabajado el cálculo de áreas de triángulos.

PREGUNTA Nº 5.

I: ¿Cuando le dicen que aproxime un área que hace, en el caso de la pregunta número 5?

A7: Una buena aproximación seria inscribir o circunscribir rectángulos y después sumar el área de esos rectángulos.

I: ¿Cómo obtendría la base de los rectángulos?

A7: Bueno.

I: ¿Cómo obtendría las alturas?

A7: La base de los rectángulos, dependiendo de los rectángulos que vaya a circunscribir o a inscribir.

I: ¿Cómo obtendría la altura?

A7: ¿La altura? No sabría.

I: ¿Podría explicarme el procedimiento que ha utilizado aquí?

A7: Si recuerdo la idea es circunscribir o inscribir una buena cantidad de rectángulos, no me refiero ni a 2, ni a 3, ni a 4, entonces si quiero construir 100 rectángulos debo dividir el intervalo de integración.

I: ¿Basta con sólo circunscribir o inscribir o se deben hacer los dos procedimientos, o qué más se podría hacer para aproximar mejor?

A7: Umm.

I: ¿Qué seria lo ideal?

A7: ¿Lo ideal? Circunscribir o inscribir.

I: ¿Cuál de las dos, o las dos?

A7: Esto depende de lo que vayamos hacer, si queremos inscribirlos o circunscribirlos.

I: ¿Qué permite aproximar más, la inscripción de rectángulos, la circunscripción de rectángulos, ambas o una sola, y en el caso que hiciera las dos qué podría hacer para aproximar más?

A7: A ver.

I: ¿Cuál de las dos o si ambas le permitirían hacer una mejor aproximación?

A7: Bueno ambas no sé cual seria el resultado.

I: ¿Qué podría hacer para aproximar utilizando ambos procedimientos?

A7: ¿Hacer los dos procesos? Tendría que hacer 2 ejercicios diferentes.

I: ¿Eso le permitiría aproximar más o lo mismo, qué piensa en el momento?

A7: Estoy pensando cual seria el resultado de calcular un área, utilizando rectángulos circunscritos e inscritos si ese ejercicio nunca lo he realizado, entonces estoy tratando de imaginarme cual seria el resultado, porque hemos trabajado con rectángulos inscritos o circunscritos, no pondría precisar el resultado si el área es más aproximada o menos aproximada.

I: ¿Podría explicarme lo que ha utilizado en ésta respuesta?

A7: Bueno, iba en que entre más rectángulos tenga inscritos o circunscritos mejor va a ser la aproximación, pero insisto en este caso los estamos inscribiendo.

I: ¿Qué tiene aquí?

A7: Aquí lo que hay que buscar.

I: ¿Qué tiene aquí y qué tiene acá?

A7: Acá lo que tengo es una partición de un intervalo.

I: ¿Qué quería hacer con esto?

A7: En este momento no recuerdo bien que era lo que estaba pensando cuando resolví la prueba.

PREGUNTA Nº 6.

I: ¿Podría explicarme qué quería decir con este razonamiento en la pregunta número 6?

A7: Que quiero decir, pues lo que me piden.

I: ¿Qué le piden?

A7: Me piden mostrar que la $\int_0^a (x^2 + x)\,dx = \int_0^a x^2\,dx + \int_0^a x\,dx$, eso es lo que quise mostrar.

I: ¿Podría explicarme los gráficos de su respuesta?

A7: Primero supuse que si usted me pide justificar, lo di como verdadero, si eso era verdadero con el gráfico que usted me proporcionaba tenia que buscar la forma que esta área bajo la curva, $y = x$, de a hasta b, más el área de la curva $y = x^2$, que la suma de esas dos áreas tenia que dar el área inicial, entonces observe aquí una diferencia entre áreas que podría ser esta misma diferencia y pensé que esa área se podría cubrir si desplazaba la curva, si moviera esta área.

I: ¿Cual área, la de qué función?

A7: El área bajo la curva $y = x^2$ si como si la subiera.

I: ¿Por eso habla de ángulos?

A7: Si, por eso hablo de la rotación, de cómo había que llenar este espacio de alguna manera y pensé que eso se podría hacer con una rotación.

I: ¿Está de acuerdo con el argumento que había planteado y que está planteando?

A7: Si.

I: ¿Qué otra forma se le ocurriría para demostrar esa igualdad?

A7: Otra forma ¿Gráficamente?

I: ¿Además de la gráfica, existiría otra forma?

A7: No.

I: ¿Qué otra forma, podría pensar?

A7: Pensaría en resolver esta integral.

I: ¿Para qué?

A7: Para después compararla con el resultado de esta suma de integrales.

PREGUNTA Nº 7.

I: ¿Que razones tiene para decir el valor de cada una de las proposiciones de la cuestión número 7?

A7: Del punto 7a, desafortunadamente sólo pide responder si es verdadero o falso.

I: ¿Por qué considera que es verdadero?

A7: A eso voy lastimosamente, usted sólo pide decir si es verdadero o falso me limite a responder eso y en estos momentos no me acuerdo del razonamiento que hice para decir que es verdadera.

I: ¿Podría intentarlo?

A7: Estoy pensando como en…

I: ¿Con qué elementos matemáticos del cálculo integral relaciona la primera proposición?

A7: La primera parte de la primera proposición.

I: ¿Si la primera parte, con qué elementos matemáticos la relaciona?

A7: ¿Pero la primera parte?

I: La proposición es toda la expresión, es una proposición compuesta.

A7: Por eso.

I: ¿Con qué elementos matemáticos la relacionas?

A7: Por eso le pregunto, no se.

I: ¿Qué no sabe?

A7: Pienso que hay dos partes en la proposición.

I: ¿Si lo ve así, entonces qué valor toma la proposición en cada parte?

A7: En esta primera parte…

I: ¿Con qué la relaciona?

A7: Con derivadas.

I: ¿La segunda?

A7: Con integrales.

I: ¿Por qué? Con qué parte de las integrales.

A7: Con la definición de una integral definida.

I: ¿Con qué elementos matemáticos relaciona la segunda proposición?

A7: La segunda, con la integral, con la derivada.

I: ¿Cómo lo justifica?

A7: Realizando el ejercicio.

I: ¿Está de acuerdo con el procedimiento que ha utilizado?

A7: Si.

I: ¿Por qué?

A7: Porque, estoy utilizando la definición.

I: ¿Que esta utilizando, ahí?

A7: Estoy utilizando la definición de la integral definida

I: ¿Cuál es la definición de la integral definida?

A7: Que la integral definida de la función $f(x)$ f(x), es igual a,… no recuerdo.

I: ¿Qué esta aplicando cuando resuelve esa integral, esta aplicando la definición de integral o un algoritmo para calcular la integral?

A7: Diría que la definición.

I: ¿Por qué?

A7: Porque, pienso que esa definición incluye….

I: ¿Cuál es la definición para usted?

A7: En estos momentos no recuerdo.

I: ¿Qué es lo que no recuerda?

A7: La integral, no la recuerdo.

I: ¿Si mira la función, los límites de integración y el procedimiento, está de acuerdo con su solución?

A7: Es que uno tiene que tomar partido en algo, o estoy de acuerdo o no estoy de acuerdo.

I: ¿Entonces, está de acuerdo o no está de acuerdo?

A7: Por el hecho que no recuerdo, no puedo decirle que no, por eso tomo esta posición.

I: ¿Cuál?

A7: Que estoy de acuerdo.

PREGUNTA Nº 8.

I: ¿Cómo le explicaría a un compañero en la pregunta número 8, el significado de la expresión $\int_a^b f(x)\,dx$?

A7: Me repite la pregunta.

I: ¿Cómo le explicaría a un compañero el significado de esta integral?

A7: ¿Significado de qué tipo?

I: Significado matemático.

A7: Esa integral es por la definición precisamente que no podría explicarlo ahora, no recuerdo.

I: ¿Cuál es su razonamiento acerca del concepto que había dado?

A7: Que matemáticamente la integral definida, es el límite de una suma de Riemann cuando n tiende a infinito y siendo n el número de particiones, en un $[a,b]$, si n tiende a infinito la norma de la partición p tiende a 0.

I: ¿Qué quiere decir con esta definición que ha utilizado?

A7: Lo que ya veníamos hablando en estos ejercicios.

I: ¿Podría comentarlo, que quiere decir con esos argumentos?

A7: Mmmm.

I: En este momento.

A7: No podría decirle.

I: ¿Cuál es su propia definición de integral definida?

A7: Matemáticamente no podría.

I: Muchas gracias.

A7: Listo.

ENTREVISTA (A8).

PREGUNTA Nº 1.

I**:** **¿**Podría ajustar más esas cotas con rectángulos mayores y con rectángulos menores, cómo lo haría?

A8: Sí, seria reduciendo estos rectángulos mayores a menor tamaño.

I**:** ¿Cuál de las dos formas aproximaría más el área, con los rectángulos que dice que son mayores o con los rectángulos que son menores?

A8: Tendrían esos rectángulos que alinearse con la función que nos está marcando este gráfico.

I**:** ¿Qué función seria?

A8: Esa función ahí.

I**:** ¿Existe una función ahí?

A8: Si, uno encuentra una función ahí, pero seria una función decreciente.

I**:** ¿Por qué decreciente?

A8: Porque tengo entendido que si uno se ubica en la parte izquierda de la gráfica y la ve que va hacia abajo, entonces es porque es decreciente.

I**:** ¿Puede utilizar otros métodos para aproximar esa área?

A8: ¿Otros métodos para esta área?

I: Si.

A8: O sea, ya no utilizando los rectángulos de ninguna clase.

I: Si.

A8: De ningún otro lado.

I: ¿Podría contar con otros métodos, otras formas?

A8: A ver, otra figura geométrica que conocemos es la del triángulo también.

I: ¿Cómo seria la del triángulo?

A8: Esta parte de aquí, da una impresión de triángulo que podría ser aproximada a la imagen que nos están dando allí, sin embargo, ese problema nos formaría otra figura que no es rectángulo, habría que tomar esta línea hasta llegar al punto donde está el nueve (*el estudiante grafica en una hoja de respuestas*).

I: ¿Cuál de las dos aproximaciones sería mejor, la de los rectángulos o la del triángulo?

A8: Sería la del rectángulo, porque la del triángulo siempre va presentando más dificultad para ajustarla al área.

I: ¿Cómo cree que podría conseguir mejores aproximaciones del área, con los rectángulos más grandes o con rectángulos más pequeños?

A8: Entre más pequeños sean los rectángulos, me va a cubrir más parte del área concreta.

I: ¿Por qué?

A8: Porque los rectángulos muy grandes me van a dejar un espacio que no cuenta con área y lo que necesito es calcular nada más la parte rayada, entonces pienso que si se tomara únicamente rectángulos pequeños voy a poder cubrir toda el área con los rectángulos.

I: ¿Qué quiere decir con la expresión cubrir toda el área?

A8: Poder representar esa área mediante una cantidad de rectángulos muy pequeños.

I: ¿Encuentra alguna relación entre los rectángulos que llama superiores y los rectángulos inferiores?

A8: Con los rectángulos más grandes lo que se está buscando es hacerlos cada vez más pequeños, pero no de tamaño, por así decirlo, de un tamaño cualquiera, sino, que se me vayan aproximando al área que está subrayada, entonces ahí, lo que se busca son rectángulos que se ajusten más a la medida del área que tengo.

I: ¿Quiere decir que esas cotas para hallar el área de la región rayada sólo se pueden ajustar más con rectángulos o con triángulos, o tiene otra idea diferente?

A8: Pues, lo que se conoce.

I: ¿Qué, se conoce?

A8: La integral.

I: ¿Por qué la integral, cómo seria con la integral?

A8: ¿Por qué la integral? Porque si estamos hablando de los triángulos y vamos asimilando que son triángulos que vamos a tomar cada vez más pequeños, para que la aproximación del área sea mejor y lo que se conoce de la integral es básicamente con estos triángulos, que se fue mirando una área determinada o sea ir reduciendo los triángulos de tal manera que cubrieran el área en si.

I: ¿Podría plantear aquí una integral?

A8: A ver, la integral aquí se podría plantear conociendo la función, pero cómo se sacaría la función para poder plantear la integral, tenemos la base de 3 a 9 que eso ya nos daría algo para llevarla a la integral, pero sería necesaria la función y esa es la que no veo, no está explicita.

I: ¿Considera que sólo puede hallar el área, si tiene la función?

A8: Si.

I: ¿Por qué?

A8: Porque esa es la que me esta delimitando la parte por decirlo así en este caso, la parte superior de esa área que estoy tomando y es la que me va a dar el limite por donde va el área y como es una curva, entonces en este caso es necesaria la función que es la que me da esa curva.

I: ¿Cuándo utiliza los rectángulos superiores e inferiores qué calcula ahí?

A8: Ahí, estoy calculando el área aproximada.

I: ¿Cuándo utiliza la integral que está hallando?

A8: Estoy hallando también el área.

I: ¿Por qué?

A8: Porque la integral precisamente surgió, tengo entendido de la aproximación de los rectángulos, hasta llegar a ser tan precisa.

I: ¿En este ejercicio qué puede hacer, qué aplica, las áreas de los rectángulos o la integral?

A8: Por lo que ya he mencionado por ejemplo, no tengo la parte de de la función y una de las cosas sería sacar la función.

I: ¿Con cuál de las dos puede trabajar más fácil?

A8: En este caso, creo que con los rectángulos.

I: ¿Por qué?

A8: Por la falta de la función.

I: ¿Fuera de trazar los rectángulos superiores y los inferiores, entonces considera que sólo puede calcular el área a través de la integral, si tuviera la expresión algebraica de la función?

A8: Si, para aplicarla.

I: ¿Además de los rectángulos y de la integral, existe otra forma u otros elementos matemáticos que le permitan aproximar o ajustar las cotas de esa área?

A8: Otro elemento matemático, no lo recuerdo en el momento, no sé si se puede hallar, pues en el momento no recuerdo otra manera de enfrentar esto, además creo que por medio de la integral es que se afrontan estos temas de área, cuando tienen que ver con curvas, este es el método que conozco.

PREGUNTA Nº 2.

I: ¿Puede explicarme cómo ha resuelto la tarea número dos?

A8: Bueno, la tarea número dos en la parte 2b, porque la parte 2a es la gráfica, y es la figura que me da dos triángulos, entonces recurrí al área del triángulo para resolverla.

I: ¿Por qué le da triángulos?

A8: Pues al hacer el gráfico.

I: ¿Qué gráfico obtuvo cuándo graficó la función?

A8: Una línea que cruza por el origen.

I: ¿Por qué se le formaron triángulos?

A8: Los triángulos se formaron para encontrar el área que está encerrada por esas cotas que le dan en la parte de arriba, en esos valores que encierra un área y entonces al hacer la gráfica por donde esta acotada esa área, entonces resultan los triángulos.

I: ¿Por qué ha utilizado este razonamiento?

A8: Por la gráfica.

I: ¿Por qué dice que los triángulos tienen la misma área?

A8: ¿Por qué, tienen la misma área? A ver, qué le podría decir.

I: ¿Considera que tienen la misma área, explíqueme cómo calculó el área de esos triángulos?

A8: Umm.

I: ¿De dónde obtuvo 16?

A8: Primero que todo, teniendo en cuenta que se formaban triángulos.

I: ¿Cómo son esos triángulos?

A8: Esos triángulos, a la vista son triángulos semejantes, son triángulos congruentes.

I: ¿Qué quiere decir que sean congruentes?

A8: Que serian triángulos iguales.

I: ¿Por qué son iguales?

A8: Porque visualmente se puede ver una a similitud, pero claro que eso no sería un argumento bueno para haber mirando.

I: ¿Pero en qué se apoya para decir que son iguales?

A8: ¿Para decir que son iguales?

I: ¿Si, qué elemento tendría ese triángulo para justificar esos argumentos?

A8: Tengo la función y me está partiendo esta parte del plano cartesiano.

I: ¿Cuál es la función?

A8: La función es $4x$ y me está partiendo el plano en esta parte.

I: ¿De dónde, y cómo obtiene el 16?

A8: El 16, fue precisamente de decir que son triángulos congruentes.

I: ¿Entonces, todo triángulo congruente da 16?

A8: No, si no que…

I: ¿Qué quiere decir, entonces?

A8: O sea, según los datos que nos dan.

I: ¿Cuáles son los datos que le dan?

A8: Que la región encerrada por la grafica de la función $f(x) = 4x$ y el eje X, en el intervalo $[-2, 2]$, ó sea, había que graficar esa parte en ese intervalo.

I: Si, eso ya lo dijo que tenia que graficar.

A8: Listo.

I: ¿De dónde obtiene el área de 16?

A8: El 16 es la parte de la función que ésta forma con el eje X, en ese intervalo de $[-2, 2]$.

I: ¿Cuántos triángulos tiene y ese 16 es del área de un triángulo?

A8: En esta parte salen dos triángulos, uno por decir en el primer cuadrante y otro en el tercero.

I: ¿Qué representa ese 16, es uno o son los dos triángulos?

A8: Ese 16 es de toda el área, que se estaría reflejando en éste caso.

I: ¿De dónde obtiene el 16?

A8: De concluir el área de un triángulo.

I: ¿Cómo le halló el área?

A8: Sería base por altura sobre dos.

I: ¿Cuál es la base?

A8: En este caso la base seria dos.

I: ¿Y la altura?

A8: Y la altura seria 8.

I: ¿Cómo obtiene la altura?

A8: La altura al trazar esta parte hasta aquí.

I: ¿Pero de dónde sale el 8?

A8: A ver.

I: Tiene la base que es dos.

A8: Si.

I: ¿Cómo obtiene esa base?

A8: Esa base, me la están dando en el problema, en la pregunta.

I: ¿En qué parte de la pregunta?

A8: En donde me están dando el intervalo $[-2, 2]$.

I: ¿Cómo obtiene la altura?

A8: La altura en esta parte, no sé como la halle en este caso.

I: ¿Podría mirar la función nuevamente?

A8: Si.

I: ¿Qué pasa cuando mira la función?

A8: $4x$, entonces, seria cuando x vale 2, sí, cuando x vale 2.

I: ¿Qué quiere decir?

A8: Miré la función y me doy cuenta que cuando la x vale 2, entonces lógicamente el y, que en este caso sería la altura del triángulo valdría 8.

I: ¿Por qué tiene 16?

A8: Porque esa sería la parte dada de un triángulo, que es la que forma el área en el primer cuadrante de la función, con el eje X y la otra parte seria la de abajo que se forma en el tercer cuadrante, que me da el otro triángulo y por eso hallaría el área de esa manera.

I: ¿Cómo calcula la integral?

A8: La integral la calculé como $\int_{-2}^{2} 4x \, dx = \frac{4x^2}{2} \Big|_{-2}^{2} = 2x^2 \Big|_{-2}^{2} = 0$, cuando calculé toda el área.

I: ¿Es lo mismo calcular el área gráficamente que resolver la integral?

A8: No.

I: ¿Por qué?

A8: Considero que no, porque en este caso el área me dio cero.

I: ¿Está seguro que el área le dio cero?

A8: Bueno, la integral.

I: Ah.

A8: Esta parte de la integral me dio cero y la integral medio un área de cero.

I: ¿El área o la integral?

A8: La integral.

I: ¿Puede la integral dar cero?

A8: Creo que la integral, si puede dar cero.

I: ¿El área puede dar cero?

A8: No, en este caso no, porque es evidente que el área no puede dar cero.

I: ¿Pero la integral si puede dar cero?

A8: Si, la integral si puede dar cero.

I: ¿Qué relación hay, entonces entre el área geométrica y la integral?

A8: ¿Entre el área geométrica y la integral? Es que la integral da cero cuando no hay área, porque está en el mismo punto la integral da cero, cuando tiene los mismos índices evaluados en la mismo punto, entonces allí es donde la integral da cero o sea que prácticamente no habría área y por eso en ésta parte cuando se hizo la integral que me dio cero pues lógicamente dio nula, que no podría dar así, entonces se trabajó la integral en dos intervalos.

I: ¿Qué relación hay entre el número dado por la integral y el que obtuvo del área?

A8: ¿En cuál, en ésta donde me dio cero?

I: Si ¿Existe alguna relación?

A8: No, no encontré ninguna relación.

I: ¿Por qué?

A8: Pienso que de pronto se tomó mal la parte de la integral.

I: ¿Qué quiere decir, que se tomó mal la parte de la integral?

E. Porque en este momento pienso que la función al pasar por el origen pasa por la parte positiva y luego la parte negativa, entonces al tomar esta área así, me va a dar en éste sentido errada el área de la función.

I: ¿Por qué errado?

A8: Porque, el área de la parte abajo como está negativa me podría dar negativa.

I: ¿Por qué al calcular el área le dio un valor positivo y cuando calculó la integral ese valor se volvió cero?

A8: Es como si la parte de abajo negativa estuviera dando un valor, pero ese valor que debía ser el área lo está dando negativo, es decir no me estaría dando un área si no me estaría dando un número y por el hecho de ser área lógicamente no podría dar negativa.

I: ¿Cuál es la diferencia entre calcular un área y calcular una integral definida? ¿Podría explicarlo?

A8: La diferencia es que el área es algo concreto que sabemos que no puede dar negativo, entonces esto sería un factor que va a influir ahí.

I: ¿Por qué un área no puede dar negativa?

A8: Porque el área se conoce como una medida, entonces sería un número positivo.

I: ¿Cuando calcula el área no se puede calcular con la integral?

A8: El área, si.

I: ¿Cuándo no?

A8: Cuando la integral y el área formada por la función están en la parte negativa, en la parte de abajo del eje X , allí hay que tomar el área en valor absoluto.

I: ¿Qué quiere decir en el valor absoluto y por qué en el valor absoluto?

A8: En el valor absoluto, quiere decir que estamos hablando de una medida, en este caso es independiente del valor que me dé el signo, del valor de esa área que en éste caso siempre me va a dar una medida.

I: ¿Qué puede concluir de estos dos resultados?

A8: De los dos resultados cuando me da cero y cuando me da…

I: ¿De los resultados del problema?

A8: ¿Todos? En la parte de los triángulos y al calcular la integral, puedo notar que me dio cero, me estaba dando algo que no debía ser, o sea un error, entonces opté por tomar la integral ya en partes, entonces de eso puedo concluir que al tomar ya la el área de una región por medio de la integral debo tener cuidado de que esté en el los cuadrantes positivos o que esté de pronto en la parte de abajo para así mirar el signó.

PREGUNTA Nº 3.

I: ¿Sabría contarme cómo ha resuelto la tarea número tres?

A8: La tarea numero tres, dice (*el estudiante lee la pregunta*) que *la gráfica de* $y = x^2$ *y el eje* X *, en el intervalo* $[0, 4]$*, es la región de la gráfica de la función, utiliza particiones para aproximar el valor del área de la región R.* Entonces aquí prácticamente, se tomó lo que se estaba haciendo en el problema inicial, empezar a tomar rectángulos cada vez más pequeños.

I: ¿Por qué toma rectángulos?

A8: Porque el rectángulo es la forma que más se acomoda para encontrar el área, es como más fácil ir acomodando para poder asimilar mejor.

I: ¿Qué está haciendo cuando utiliza rectángulos?

A8: ¿Cuándo utilizo rectángulos?

I: Si ¿Qué esta haciendo?

A8: Estoy intentando cobijar el área con esos rectángulos.

I: ¿Qué significa cobijar el área con esos rectángulos?

A8: Esto significa, encontrar esos rectángulos de tal manera que por así decirlo me coincidan.

I: ¿Qué es coincidir?

A8: Hacerlos tan pequeños que me coincidan con la gráfica de la función.

I: ¿Qué es coincidir con la gráfica de la función?

A8: Coincidir, es que ellos me queden exactamente, alineados.

I: ¿Qué es quedar alineados?

A8: Que esos rectángulos queden tan pequeños cosa que…

I: ¿Para qué los quiere hacer alineados y pequeños?

A8: Para que ajusten el área que tengo con la función.

I: ¿Qué están pidiendo en el problema?

A8: Me están pidiendo utilizar particiones para aproximar el valor del área de la región.

I: ¿Qué está haciendo con los rectángulos?

A8: Buscando aproximaciones del área de la región.

I: ¿Qué otras aproximaciones podría hacer diferentes al uso de rectángulos?

A8: Me parece que según lo que he mirado, esa es la manera de abordar este tema, los rectángulos que son más propicios.

I: ¿Por qué usa rectángulos y no otras formas?

A8: Porque las otras formas van a ser más complejas para hallar el área.

I: ¿Cuáles serian las otras formas más complejas?

A8: Por ejemplo, como hablamos ahora el triángulo seria más difícil de acomodar.

I: ¿Qué más podría utilizar fuera de rectángulos y de triángulos?

A8: Me parece que los rectángulos.

I: ¿Cuál sería el ancho de cada rectángulo?

A8: Pues la aproximación, seria ¿El ancho?

I: ¿Cómo obtendría el ancho de cada rectángulo?

A8: El ancho de cada rectángulo seria lo más pequeño que se pudiera calcular.

I: ¿Qué seria el ancho con relación al rectángulo?

A8: El ancho seria, en este caso por así decirlo la base.

I: ¿Qué más necesitaría además de la base?

A8: La altura.

I: ¿Cómo obtiene las alturas?

A8: Las alturas las obtengo haciendo las líneas hasta que sean más aproximadas a la gráfica.

I: ¿Cuántos rectángulos podría trazar?

A8: Los que sean necesarios para obtener una aproximación mayor.

I: Muchos, pocos ¿Cuántos?

A8: Serian en este caso para obtener la aproximación o mejor dicho el valor del área serian muchos.

I: ¿podría obtener el área exacta de esa gráfica?

A8: Si.

I: ¿Cómo?

A8: Haciendo que esos rectángulos que estamos formando sean tan pequeños hasta que por así decirlo sean líneas que me cubran esa área.

I: ¿Además de las líneas, qué más podría utilizar para calcular el área?

A8: ¿Además de las líneas? Otra forma seria que a esta línea habría que sumarle todas esas líneas que nos surgirían aquí.

I: ¿Para qué las suma?

A8: Porque se supone que toda esta área la hemos partido en pequeños líneas, la sectorizamos, la hemos llenado en puras líneas, que en este caso serian rectángulos de base muy pequeña, entonces habría que sumarlos.

I: ¿Para qué los va a sumar?

A8: Para obtener el área total.

I: ¿Qué obtiene ahí, una aproximación o el valor del área?

A8: Obtendría el valor del área.

I: ¿Qué más podría hacer?

A8: ¿Qué más podría hacer, en qué sentido?

I: ¿Qué otras formas podría utilizar, qué otros argumentos tendría para aproximar, qué otros procedimientos podría utilizar diferente a las líneas, a los rectángulos?

A8: ¿Procedimientos de las líneas y rectángulos?

I: ¿Además, de lo que me ha explicado, qué otros elementos podría utilizar para aproximar esa área?

A8: Ya dijimos que seria sumando toda esa parte, la base de esta figura, convirtiendo en unas líneas esta parte de cero a cuatro, convirtiéndolo en una especie de puntos que serian las bases.

I: ¿Qué nombre reciben esos puntos y por qué utiliza esos puntos?

A8: Estos puntos, porque salieron precisamente.

I: ¿Qué está haciendo cuando utiliza esa línea?

A8: Esta línea, me representa, puede ser números.

I: ¿Qué está haciendo, ahí con esa línea?

A8: Esta línea, según en el plano en que esta ubicada, la entiendo como la recta real.

I: ¿Qué hace con esa recta real?

A8: En la recta real sabemos que hay infinidad de puntos y que cada punto pertenece a un número real en el $[0\,,4]$.

I: ¿Qué es lo que está haciendo con esos intervalos sobre esa línea?

A8: Con esos intervalos, los voy haciendo cada vez más puntos.

I: ¿Cómo hizo esos punticos, tienen algún nombre?

A8: Un nombre así especifico no lo recuerdo en el momento.

I: ¿Qué puede concluir del ejercicio?

A8: ¿Qué puedo concluir? Que una manera muy apropiada para aproximar el área de una región, es empezar hacer rectángulos de tal manera que ellos se vayan volviendo muy pequeños o irlos haciendo cada vez más pequeños en la parte del eje X, formando una cantidad de puntos infinitos, porque cada vez debemos hacer la base de ese rectángulo más pequeño.

I: ¿Si son infinitos los puede sumar?

A8: Si lo que pasa es que estos puntos serian infinitos y van haciendo que la norma tienda a cero.

I: ¿Qué es la norma?

A8: La norma en un intervalo es cuando empezamos a dividir cierta línea o la recta real y a cada espacio que me va quedando, empezamos hacer divisiones y de cada división me van a salir otras divisiones y la que va a salir más grande la voy a ir partiendo a la mitad por decir algo.

I: ¿Lo que hace ahí, son particiones?

A8: Son particiones.

PREGUNTA Nº 4.

I: ¿Puede explicarme cómo has resuelto la tarea número 4?

A8: La tarea número 4, prácticamente no la resolví, porque en esta parte dije que no recuerdo y aun en el momento no se me ocurre nada sobre el manejo del valor absoluto.

I: ¿Podría intentarlo en este momento?

A8: Si, podría intentarlo, porque calcular el área limitada por la gráfica de la función $f(x)=|2x-1|$ en el $[0\,,2.]$

I: ¿Cómo se define el valor absoluto?

A8: ¿El valor absoluto?

I: ¿Podría escribirlo en la hoja adicional?

A8: Bueno, el valor absoluto, lo que recuerdo del valor absoluto es que es x, si x es mayor que cero, mayor o igual digamos y $-x$ si x es menor que cero.

I: ¿Podría aplicar esa definición de valor absoluto a ésta función?

A8: Seria, $2x-1$ el valor absoluto si x, es mayor o igual a cero.

I: ¿Cómo podría definir esta función en especial, si tiene definido el valor absoluto de x?

A8: Seria $2x-1$, porque aquí si x es mayor que cero, pero el problema es que aquí en la función ya x esta afectado por 2, si x fuera mayor.

I: ¿Qué podría hacer si está afectado por 2?

A8: Tendría que mirar el valor, pienso en despejar a x.

I: ¿Cómo despejaría x?

A8: A ver con el valor absoluto.

I: ¿Para qué lo despeja?

A8: Lo que pensé en despejarlo fue para encontrar el valor de la x.

I: ¿Para qué quiere encontrar el valor de la x?

A8: Porque el valor absoluto lo definió, si x es mayor que cero.

I: Trate de despejar a x, para ver qué obtiene.

A8: x, aquí dice que esto es $2x-1$, pero si x es mayor que cero $2x-1$.

I: ¿Cómo se despeja una ecuación?

A8: Una ecuación

I: ¿Cómo despejaría, ahí?

A8: Teniendo aquí $2x-1$, primero que todo me falta la igualdad para la ecuación (*el estudiante se ríe*) en este caso estoy intentando es igualarlo con la cuestión del valor absoluto, por lo que tengo la definición del valor absoluto que es mayor o igual a cero, porque en este caso $2x-1$.

I: ¿Cómo se despeja una desigualdad?

A8: Ah, una desigualdad.

I: ¿Qué tiene ahí, una igualdad o una desigualdad?

A8: Pues a ver aquí.

I: ¿Qué tiene una desigualdad o una ecuación?

A8: En este caso, seria una desigualdad.

I: ¿Cómo se resuelve una desigualdad?

A8: Simplemente ésta desigualdad seria.

I: ¿Cómo la despejaría?

A8: Sumando, en este caso tenemos -1, para encontrar el valor de x, entonces a ambos lados tendríamos que sumarle 1.

I: ¿Cuándo despeja qué obtiene?

A8: Ahí, obtendría x, o sea, para qué valores de x se me está cumpliendo esa desigualdad.

I: ¿Qué haría con ese valor, cuánto le daría ahí, por ejemplo x?

A8: En este caso x seria $2x$, esto se dividiría por 2, seria x mayor o igual que esto, seria 1 y aquí x seria mayor o igual a $\frac{1}{2}$.

I: ¿ Qué sería $\frac{1}{2}$ en la gráfica?

A8: En la grafica seria x, si es mayor o igual a $\frac{1}{2}$, porque aquí en la gráfica en la parte de abajo tengo el eje x, x es mayor o igual a $\frac{1}{2}$, en esta parte entiendo que x tiene que ser superior.

I: ¿Podría graficar la función?

A8: Vamos a intentarlo, x mayor o igual a $\frac{1}{2}$, entonces aquí tendríamos 2, la mitad, seria 1 acá en esta parte, entonces aquí seria 1 y $\frac{1}{2}$.

I: ¿Cómo quedaría, entonces la gráfica de ese valor absoluto?

A8: Aquí me dice que esto da $\frac{1}{2}$ si, aquí dijimos que si, si x es mayor que cero y si x es menor que cero, no tendría que hacer el despeje, si x es menor que cero, entonces voy hacer el despeje, si x es menor que cero de $2x-1$ (*el estudiante hace cálculos en una hoja de respuestas*).

I: ¿Para qué hace los despejes?

A8: Eh, pues para encontrar esos valores de x que satisfacen.

I: ¿Para qué los encuentra, para poder hacer qué?

A8: Para poder hacer la gráfica.

I: ¿Cuál seria el esquema de la gráfica, si es mayor que cero cuánto le dio?

A8: Si es mayor que cero me dio $\frac{1}{2}$.

I: ¿Cuánto le daría si es menor que cero?

A8: ¿Si es menor que cero? Creo que eso no lo recuerdo muy bien, menor que cero que es así, aquí me daría lo mismo prácticamente, porque es menor igual, no puede ser.

I: ¿Para qué valores?

A8: Para x menores que $\frac{1}{2}$.

I: ¿Cómo quedaría la gráfica?

A8: Aquí, tengo que para x mayores que $\frac{1}{2}$, mayores o iguales porque en esta parte me da más, cubre igual, mayores o iguales a $\frac{1}{2}$ y menores o iguales a $\frac{1}{2}$ que ésta, estaría cubriendo la misma cantidad.

I: ¿Cómo seria la gráfica, podría trazarla?

A8: A ver, $\frac{1}{2}$ el valor absoluto, lo que yo recuerdo del valor absoluto lo voy hacer por aquí en esta parte de encima, lo que recuerdo de la gráfica el valor absoluto.

I: ¿Cómo sería la gráfica de este valor absoluto?

A8: Entonces seria ubicarme en esta parte.

I: ¿Cómo seria?

A8: Ubicarme en el $\frac{1}{2}$ de la x y trazar una especie así como de V.

I: ¿Cuál seria el área que tendría que calcular?

A8: Y el eje X, entonces seria el área que me cubre estas líneas del valor absoluto.

I: ¿Entre que valores va a calcular el área?

A8: En el intervalo $[0\,,2]$

I: ¿Cómo seria?

A8: El intervalo $[0\,,2]$, pues aquí dijimos que esto valdría 1, por aquí más o menos valdría el 2 y necesito encontrar esta área 0; 2.

I: ¿Podría subrayar el área que va a encontrar?

A8: Seria este pedacito, esta parte de cero hasta $\frac{1}{2}$, me formaría una V aquí, donde la gráfica parte el valor absoluto.

I: ¿Podría decirme cómo hallaría esta área?

A8: Esta área, pues la haría con base a dos integrales.

I: ¿Por qué dos integrales?

A8: Porque, es que aquí en el valor absoluto veo una parte.

I: ¿De dónde hasta dónde va la primera?

A8: Del $\frac{1}{2}$ manejándola desde el cero, seria de cero a $\frac{1}{2}$.

I: ¿Integral de qué función?

A8: En este caso tendría que mirar la función que tengo, la del valor absoluto.

I: ¿Cuál seria la segunda función?

A8: Seria la del valor absoluto, también.

I: ¿Cuál seria la segunda integral, estaría entre qué?

A8: Entre $\frac{1}{2}$ y 2.

I: ¿De qué función?

A8: De la que estamos manejando la del $|2x-1|$.

I: ¿Podría calcular esta área utilizando sólo la integral o podría utilizar otro procedimiento para hallar esta área, qué figura se le formó bajo la gráfica?

A8: Si, se me formó un triángulo, bajo el área.

I: ¿Un triángulo?

A8: Si, porque la gráfica…

I: ¿De dónde hasta donde va el triángulo que me dice?

A8: Porque aquí en $\frac{1}{2}$, seria el vértice que forma la V.

I: ¿Está seguro que es un triángulo?

A8: A ver, porque es que en esta parte de aquí, tengo un valor absoluto, eso es una línea.

I: ¿Cuántos triángulos?

A8: En este caso saldrían dos.

I: ¿Cuáles?

A8: El primero seria desde cero a $\frac{1}{2}$, que seria como base y que subiría pero aquí en esta parte habría que mirar y calcular hasta donde seria la altura.

I: ¿Cómo calcularía esa altura?

A8: Aquí tengo que la gráfica de este valor absoluto me esta cortando el eje Y, pienso que resolviendo estas dos ecuaciones, porque tengo la ecuación cuando $x=0$.

I: ¿Cómo calcularía ya el área con esos triángulos?

A8: Con esos triángulos, aplicando la fórmula del triángulo, $\frac{b \times h}{2}$.

I: ¿Qué haría después?

A8: Después sumaria el triángulo más pequeño que se me formó y el triángulo mas...

I: ¿El área que calcula con los triángulos seria la misma que cuando la calcula con la integral?

A8: Si,

I: ¿Por qué?

A8: Porque la integral es un método, es una herramienta que se puede utilizar también, para encontrar el área porque tengo entendido que funciona en muchas partes, en este momento para el área.

I: ¿Por qué en el cuestionario no lo pudo resolver y ahora si puede resolver el ejercicio?

A8: Por el valor absoluto de pronto, falta de pronto haberse ingeniado más y haber mirado sobre lo el valor absoluto y la definición y de pronto la deficiencia fue al abordar el problema sobre el valor absoluto.

I: ¿Cuál es el problema del valor absoluto?

A8: En realidad aquí, se supone que lo que había que conocer era la definición del valor absoluto, pero no sé el valor absoluto en ese momento.

I: ¿Podría utilizar una sola integral para calcular esta área?

A8: ¿Una sola integral?

I: ¿O, necesariamente necesita dos?

A8: Sí, necesariamente se necesitan dos.

I: ¿Por qué?

A8: Necesariamente se necesitan dos.

I: ¿Por qué?

A8: Porque, es que hasta aquí se verían como si fueran que en el valor absoluto viene primero una línea que me cae sobre ese punto $\frac{1}{2}$ que encontré, que era el eje X y se me forman áreas, un área por así decirlo no continua, sino como separada en el eje X, está separada por ese punto dónde se interceptan como las dos, de manera que forman la V.

I: ¿Qué puede concluir de los resultados obtenidos por las dos formas que me acaba de explicar?

A8: Puedo concluir que el manejo de la integral, para encontrar el área, es un modelo muy efectivo y también que a veces, por ejemplo como en este caso, sé que se podían encontrar los triángulos, también se pueden utilizar estas maneras para hallar el área, pero si es más efectiva la integral.

I: ¿Por qué es más efectiva, si me dice que con los triángulos le da el mismo valor?

A8: Pues es más efectiva, porque aquí, el problema se prestaba para hacerlo, nos daban valores muy visibles, como muy exactos, pero cuando la función ya no forma una figura tan conocida, que le podamos encontrar el valor, entonces ahí la integral va hacer mas efectiva la podríamos aplicar de manera general, mientras que con esta figura seria para casos específicos.

PREGUNTA Nº 5.

I: ¿Cuándo le dicen que aproxime el área, cómo hace el problema número 5?

A8: Tomando rectángulos de base 0.5, para el intervalo $[2\,,3.5]$ y de altura 5.

I: ¿Cómo y por qué obtiene bases de 0.5?

A8: De 0.5 a ver tendríamos que mirar aquí, un poquito, 0.5 tenemos 1; 2 0.5, base 0.5 para intervalos $[2\,,35]$.

I: ¿De dónde obtiene las alturas cómo las obtiene de 5.3 y de 2?

A8: 5.3 y 2; 5.3 en este momento no recuerdo bien, como saqué esta parte, tocaría mirarlo un poco más ¿Cómo fue? Porque, se supone que la función me va a dar puntos específicos que estén en el eje X , podría sacar unos puntos específicos.

I: ¿Cuándo le dicen que aproxime qué hace, qué es lo que primero piensa?

A8: Hacerlo de una manera mas precisa, no hacerlo que me de exacto, sino de la manera más precisa que pueda, eso es lo que busco en éste caso.

I: ¿Qué es aproximar?

A8: Aproximar, es buscar una manera de encontrar un determinado valor, cuando no se tienen datos, o las herramientas precisas para encontrar el valor total, entonces uno se va aproximando a ese valor.

I: ¿Calcular es diferente de aproximar?

A8: Aproximar y calcular si, para mi si.

I: ¿Cuál es la diferencia? ¿Cuándo calcula que hace?

A8: Hallo el valor exacto de lo que me están pidiendo.

I: ¿Cómo calcularía aquí por aproximación?

A8: Aproximadamente, aquí precisamente dije lo mismo de la parte inicial, empecé a tomar rectángulos.

I: ¿Cómo seria tomar rectángulos?

A8: Vamos hacer la gráfica aquí.

I: ¿Qué tipo de rectángulos tomaría?

A8: Rectángulos muy aproximados al área subrayada, rectángulos que me cubran esa parte subrayada que es la que necesito calcular.

I: ¿Qué hace una vez que traza los rectángulos?

A8: Sumar todas esas las áreas de cada rectángulo.

I: ¿Cómo deben ser esos rectángulos?

A8: Pues esos rectángulos, tienen que ser pues muy aproximados, lo que he dicho en casi toda la entrevista, muy aproximados al área que estoy tomando.

I: ¿Qué tipo de rectángulos utilizaría?

A8: Rectángulos, ubicándome sobre el eje X como base y trazando la altura, de tal manera que sea aproximada al área.

I: ¿Cuántas áreas tiene en ésta gráfica?

A8: En esta parte veo dos áreas.

I: ¿Cuáles?

A8: Por la parte de encima del eje X , en el primer cuadrante en la parte de arriba de cero a dos.

I: ¿Cuál es la otra?

A8: La otra es una de 2 como a 3.5, hacia la parte de abajo.

I: ¿Qué pasaría con esas áreas, cómo las calcularía, están en el mismo plano, en el mismo eje?

A8: Pues están en el mismo plano, pero están en diferente cuadrante del plano.

I: ¿Qué haría?

A8: En ésta parte, primero que todo como se ven dos áreas, habría que calcularlas por separado.

I: ¿Qué hace después?

A8: Y después, sumarlas para encontrar el área total subrayada.

I: ¿Cómo aproxima el área que esta bajo el eje OX?

A8: El eje.

I: ¿Igual que la aproximaría la que está por encima del eje OX?

A8: Utilizando el mismo método de los triángulos, seria como la aproximación.

I: ¿Por qué siempre aproxima con rectángulos?

A8: Porque según lo que miramos en el caso anterior, miramos que se nos presto también para que esa área la encontráramos con rectángulos, con triángulos en este caso por ejemplo, pero por lo general siempre se piensa en los rectángulos, porque son mas fácil y a medida que el área de ese rectángulo se va volviendo más pequeña, va ser mucho más fácil el manejo para aproximar, esa área.

I: ¿Qué otros procedimientos podría aplicar para calcular esa área?

A8: Aquí en esta parte de abajo el área que me forma la parte del eje X, la parte negativa del Y, la veo parecida a un triángulo.

I: ¿Qué otros procedimientos podría utilizar?

A8: ¿Otros procedimientos? Para encontrar el área total, seria la integral definida.

I: ¿Cómo seria con la integral definida?

A8: Serian dos integrales.

I: ¿Por qué dos integrales?

A8: Si, porque como tengo dos áreas, entonces calcularía cada área por diferente lado, que seria lo mismo que estaría haciendo con los rectángulos, pero en este caso, seria con el método de la integral, entonces calcularía las áreas con diferente integral, y al sumarlas voy a tener el valor total del área.

I: ¿Por qué las suma?

A8: Porque necesito es el área total y en esta parte estaría encontrando una área de un determinado sector no más.

I: ¿Cuál es la diferencia, entre aproximar mediante rectángulos el área y aplicando la integral?

A8: Porque, con la integral definida lo que hace es trabajar con las sumas de las áreas de esos rectángulos, pero cuando éstas son muy pequeñas no seria como en realidad el mismo proceso, pero con la integral estoy definiendo ese proceso de una manera más precisa.

I: ¿Qué hace con los rectángulos?

A8: Aproximar el área

I: ¿Qué hace con la integral definida?

A8: Encuentro, calculo ya el área.

I: ¿Cuál es la diferencia en resultados?

A8: Pues la diferencia, es que en los rectángulos estoy aproximando, en cambio en la integral ya voy es por el resultado que necesito, el preciso, entonces la diferencia pues la puedo entender, mirando ahora, es que en realidad estoy trabajando con los mismos rectángulos, simplemente es que ya la integral maneja de tal manera estos rectángulos que me permiten calcular el área más rápido.

PREGUNTA Nº 6.

I: ¿Podría explicarme qué quiere decir con el razonamiento de la pregunta 6?

A8: A ver, explique en términos del gráfico, por qué esta $\int_0^a \left(x^2+x\right)dx = \int_0^a x^2\,dx + \int_0^a x\,dx$, dije que por gráfica podía decir que al sumar las áreas de x y x^2 en un intervalo, daría lo mismo que al encontrar el área de x^2+x y como una función, ya que x influye en x^2, haciendo que esta sobrepase una cantidad igual al área del intervalo con x, lo que dije aquí, es que en realidad es porque estoy hallando es dos áreas.

I: ¿Podría explicarme gráficamente los argumentos que acaba de manejar?

A8: ¿Gráficamente? Voy a intentarlo por aquí, tengo la gráfica $y = x$, esto seria y x y por aquí me pasa la otra que es algo así no muy parecida pero igual a y, igual a x^2, $y = x$ y acá encuentro la suma de las 2 $y = x^2 + x$, porque aquí encontramos en esta parte, el razonamiento que hago es que en esta parte de debajo de la grafica $y = x$, al sumarla con la grafica de $y = x^2$ se ve una diferencia cuando miramos $y = x^2 + x$ una diferencia en la parte de arriba como una especie de un pequeño espacio, que pienso que al tener $y = x$ y al sumarle el área del x^2 me va a sobresalir este pedacito en la gráfica, ésta parte que veo que sobresale ahí prácticamente me esta mostrando de más de $y = x^2 + x$,creo que queda ya completamente abarcada al sumar las dos áreas de la parte de debajo de x^2.

I: ¿Dónde empieza F?

A8: F ¿Cuál $y = x$?

I: Si, ¿Dónde empieza la función y hasta dónde llega?

A8: La función, la suma de $x^2 + x$ llegaría hasta cero, pero aquí en la parte de arriba me dice que de cero a "a" me dice que llega a un mismo intervalo, de cero a "a", en la parte de la pregunta aquí lo veo es como de cero a tres.

I: ¿De dónde hasta dónde van en horizontal y en vertical estas gráficas?

A8: En horizontal las veo hasta un punto "a" cualquiera, en este caso podría decir que es tres por los puntos que me dan en esta parte.

I: ¿Cómo obtendría la igualdad de la propiedad?

A8: La igualdad de la propiedad, tendría que encontrar estas dos áreas de la propiedad, para encontrar la igualdad, tengo el mismo intervalo, porque en este caso esas dos áreas no tienen o están en el primer cuadrante y para encontrar las sumas de esas áreas dijimos que calcularía unas dos integrales, lo hice para calcular ahí, podríamos decir que tenemos dos áreas y seria el área limitada por la gráfica $y = x$ y el eje X, y la grafica de $y = x^2$ y el eje X, en este caso estaría tomando dos integrales y las sumaria.

I: ¿Podría justificar numérica y o gráficamente la igualdad sin usar integrales?

A8: Pues gráficamente, en realidad no le veo como mucha relación y numéricamente tendría que recurrir a todas las respectivas áreas que veo allí.

I: ¿Qué es recurrir a las áreas respectivas que ve allí?

A8: Seria encontrar por aproximaciones el área de de la gráfica $y = x$ con el eje X, si $y = x^2$ con el eje X y también hallarle el área a $y = x^2 + x$, entonces encontraría un valor que debe darme el mismo de la suma de las dos primeras.

PREGUNTA Nº 7.

I: ¿Qué razones tiene para dar el valor de verdad de cada proposición de la pregunta 7?

A8: En los apartados 7a, 7b y 7c que aparecen a continuación decir si la afirmación es verdadera o falsa, en caso de ser falsa explique por qué o muestre un contraejemplo, *Si* $F'(x) = G'(x)$ *en el intervalo* $[a, b]$ (*el estudiante lee la pregunta*), entonces la respuesta que di es que es falsa.

I: ¿Por qué es falsa esa proposición?

A8: Porque si las derivadas dan iguales puede ser que ellas difieren en una constante aditiva y por lo tanto el área encerrada por dicha región es diferente o podrían ser diferentes.

I: ¿Eso es lo que esta diciendo la proposición esta seguro?

A8: A ver, Si $F'(x) = G'(x)$ en el intervalo $[a, b]$, entiendo que si las dos derivadas me dan guales en ese intervalo, entonces $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$, interpreté la pregunta de esa manera.

I: ¿Entonces sigue considerando que la proposición es falsa?

A8: Porque si manejo eso como derivadas y lo relaciono con las derivadas me dan un valor determinado que puede ser que ellas difieran en una constante aditiva, sin embargo, aquí me dice que $F'(x) = G'(x)$ en el intervalo $[a, b]$, entonces es porque así precisamente uno podría decir que si ambas si me están dando una igualdad en ese intervalo $[a, b]$, entonces como consecuencia de eso me está dando también una igualdad.

I: ¿Qué es $F(b) - F(a)$?

A8: $F(b) - F(a)$, es la solución a una integral definida en un intervalo $[a, b]$.

I: ¿Qué es $F'(x) = G'(x)$?

A8: $F^{'}(x)$, entiendo que $F^{'}(x)$ es la derivada de la función f que en este caso el $f'(x)$, seria la función que se integró.

I: ¿Qué concluye, que es falsa o que es verdadera?

A8: A ver.

I: ¿Qué piensa en este momento?

A8: Si, estoy pensando en este momento, porque ya con las otras aclaraciones o las observaciones que se han hecho allí, estamos hablando de la integral, esta es la solución de la integral y esta es otra integral que podríamos decir que es la misma, porque ahí, me está igualando eso, yo diría que es verdadera.

I: ¿Considera que la siguiente proposición es falsa? ¿Por qué?

A8: Porque la continuidad no implica la derivabilidad.

I: ¿Esta seguro que ahí, dice derivabilidad?

A8: A ver, leo la pregunta, dice si f es continua en $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$.

I: ¿Esta proposición es falsa o es verdadera?

A8: Es verdadera

I: ¿Por qué?

A8: Porque uno de los requisitos para que f sea integrable es que sea continua.

I: ¿ Por qué la considera en el cuestionario como falsa?

A8: Precisamente, porque la tome como en el problema y me remití a la respuesta que ella tiene que ser F mayúscula de la función f que nos dan para integrar f minúscula, entonces al derivar la F mayúscula, debe dar la función que integre que seria f minúscula, por esa parte de pronto fue.

I: ¿Pero con relación a la a o la b ?

A8: Con relación a la b .

I: ¿Por qué considera la proposición c, verdadera?

A8: Porque aquí la integral de -1 a 1 de …

I: ¿De qué función?

A8: De x^{-2} o sea de $\frac{1}{x^2}$ y $\frac{1}{x^2}$ no es continua en cero, x^2 no es continua en cero.

I: ¿Entonces, es verdadera o es falsa?

A8: Es falso, porque no se puede integrar.

I: ¿Por qué no se puede integrar?

A8: PorquE hay una discontinuidad.

I: ¿En dónde?

A8: En el $[-1\,,1]$, hay una discontinuidad en cero de la función $\frac{1}{x^2}$ que es la que voy a integrar y entonces si una función no es continua, según lo que ya dijimos anteriormente, no se puede integrar.

I: ¿Qué quiere decir que no sea continua?

A8: Que hay un punto que no presenta la gráfica, la discontinuidad es que ella presenta como una ruptura.

I: ¿Entonces, esa función no se podría integrar o existe alguna forma de integrarla?

A8: La podríamos integrar tomando los intervalos en los cuales no hay discontinuidad, esos intervalos en este caso de $[-1\,,0]$ y $[0\,,1]$, porque en esa parte no estaría tomando la discontinuidad.

I: ¿Qué tipo de integral es esa?

A8: Esta integral ¿Qué tipo de integral? A ver, es que las estamos dividiendo como separando en determinados intervalos.

I: ¿Entonces, esa proposición es falsa?

A8: Si

I: ¿Cuál es la razón?

A8: Es falsa, porque la función $\frac{1}{x^2}$ no es continua, en cuando x toma el valor de cero.

PREGUNTA Nº 8.

I: ¿En la pregunta número 8, cómo le explicarías a un compañero el significado de $\int_a^b f(x)dx$? ¿Cómo le explicarías a un compañero el significado de la integral de $\int_a^b f(x)dx$?

A8: ¿Cómo le explicaría a un compañero? En este sentido la $\int_a^b f(x)dx$, le podría decir que me representa un área determinada, aunque también tengo entendido que la integral no es sólo para las áreas, sino que tiene mucha aplicabilidad.

I: ¿Cómo, en qué?

A8: En otros campos que tienen que ver con las particiones y como buscar un resultado a través de particiones.

I: ¿Qué es? ¿Cuál es la relación, entre el área y la integral?

A8: La relación es que el área puede ser hallada mediante la integral, pero no quiere decir que la integral sea exclusivamente para hallar áreas.

I: ¿Qué es la integral?

A8: La integral es un es un método.

I: ¿Un método?

A8: Porque es que no podemos decir.

I: Si en este momento tuviera que explicarle a un estudiante el concepto de integral ¿Cómo lo haría? ¿Qué empezaría diciéndole?

A8: Empezaría primero con una gráfica de una función.

I: ¿Cuál gráfica, por ejemplo?

A8: Podría ser una gráfica de alguna función y tomaría un intervalo y si necesariamente tendría que recurrir al área.

I: ¿Por qué recurre al área si la integral no es un área?

A8: Lo entendí como una aplicación.

I: ¿Una aplicación?

A8: Una aplicación al área.

I: ¿Qué es el área y qué es la integral?

A8: La integral, según todo lo que hemos visto está representando un área en si, y podemos hacer aplicaciones de acuerdo con lo que necesitemos.

I: ¿Podemos decir qué la integral es un área?

A8: Según.

I: ¿Qué es la integral?

A8: La integral según lo que hemos manejado en este cuestionario.

I: ¿Qué tiene en mente en este momento del concepto de integral definida?

A8: Integral definida en este momento pues a mi…

I: Si

A8: Si usted me menciona integral definida inmediatamente a mi mente se me viene un área.

I: ¿Un área?

A8: Un área bajo la curva.

I: ¿Entonces, la integral definida es un área bajo la curva?

A8: Pues inmediatamente no más se me dice integral, me remito a lo que es el área, estaría dando la definición de integral como área.

I: ¿Pero esta de acuerdo que la integral es un área o no estas de acuerdo, tiene otro concepto?

A8: En este momento pienso que la integral si es un área y de acuerdo a lo que pensaba o tenia antes.

I: No a lo que pensaba antes y lo que piensa ahora a través del cuestionario sino lo que tiene en su mente, de lo que ha visto en los cursos y lo que como estudiante de este nivel en matemáticas tiene construido ¿Qué es la integral definida? Independiente de lo que hallamos trabajado en este cuestionario.

A8: Si

I: ¿O en la entrevista?

A8: La integral definida para mi es un área, si la integral definida para mi es un área

I: ¿Qué dice en su respuesta?

A8: El significado es que esta integral es un número el cual representa un área, este número puede ser utilizado de acuerdo a la necesidad planteada por el problema trabajado la integral definida se puede trabajar o emplear cuando necesitamos llegar a un resultado haciendo particiones, haciendo que la norma o sea la distancia más grande de las particiones tienda a cero cuando las particiones tiendan al infinito.

I: Bueno, allí me habla de área, de solución a un problema, de un número de particiones de la norma, entonces ¿Qué es la integral definida para ti en este momento? Es todo eso o es algo en concreto o es algo más?

A8: Porque.

I: ¿Cuál es su propia definición en el momento?

A8: Ya concretando, como concluyendo esta parte así como digo que la integral representa un área y el área según lo que yo veo aquí es un número, que también se puede utilizar de acuerdo a la necesidad del problema planteado, igual el área también la podemos utilizar para algún problema que lo necesitamos esa parte sombreada que la llamamos área la podemos destinar para otra cosa, entonces, o sea todo.

I: ¿Qué es lo de las particiones?

A8: Lo de las particiones es sobre esa parte que se trabaja de la recta real que teníamos en el eje X y que estábamos trabajando con rectángulos, que esas particiones en si son la base del triángulo, las empezamos hacer en esa recta y entonces a medida que vamos haciendo particiones me van quedando unos espacios más grandes y sobre esos espacios que van quedando grandes hago particiones, entonces esas particiones me van llevando a esa base de esos triángulos que estamos manejando.

I: ¿Triángulos?

A8: Perdón, esos rectángulos, sean muy pequeños o sea que esas distancias vayan siendo cada vez menores y eso hace que esa recta que estamos dividiendo, esa norma que dijimos ese espacio tienda a cero.

I: ¿Qué es eso de la norma?

A8: La norma.

I: ¿Qué es una norma?

A8: La norma la entiendo que es esa parte mayor que me va quedando cuando hago la partición en esa recta real.

I: ¿Qué puede concluir, qué es la integral definida?

A8: Un área.

I: Muchas gracias.

A8: Bueno.

ENTREVISTA (A9).

PREGUNTA Nº 1.

I: ¿Podría explicarme como obtuvo la respuesta de la pregunta número 1?

A9: La pregunta dice que la región rayada es mayor que 12 y menor que 48, entonces hice un rectángulo menor dentro de la misma gráfica y vi que esa área era de 12 unidades cuadradas y trace el rectángulo mayor, encerré todo eso y hallé el área que me dio 48, entonces el área tenia que estar entre esas dos (*el estudiante indica con los dedos*).

I: ¿Por qué justifica las cotas de esa forma, eso es lo que dice el enunciado que el área esta entre 12 y 48, me podría explicar sus argumentos?

A9: Partí la gráfica en rectángulos pequeños, porque es más fácil de hallar el área.

I: ¿Cómo lo hizo con rectángulos pequeños, podría rayar en la hoja adicional?

A9: ¿Estamos sobre el primer ítem, el 1a?

I: Si.

A9: Esta gráfica es algo así, tres, seis y nueve y el área que me piden seria ésta más o menos seria hasta 9, lo que hago aquí es un rectángulo (*el estudiante traza las gráficas en una hoja de respuestas*).

I: ¿Para qué traza ese rectángulo?

A9: Para darme una idea de cuanto puede ser el área, porque acá justamente se ve que tengo 2 unidades hacia arriba y que de ancho tengo tres, seis, nueve, tendría 4 (*el estudiante hace los cálculos en una hoja de respuestas*)

I: ¿4 de qué?

A9: Espere un momentito, tres, cuatro, cinco, seis, tendría 6 y el rectángulo 6 de largo por 2 de altura.

I: ¿Qué parte es ese rectángulo con relación al área sombreada?

A9: ¿Qué parte es ese rectángulo? No es una parte de la grafica, es una partición.

I: ¿Qué más podría hacer para justificar las cotas?

A9: ¿Las cotas son las que limitan este?

I: Son los valores entre los cuales está comprendida el área.

A9: Ah ya, como dicen que es mayor que 12, entonces obviamente toda la gráfica tiene que ser mayor que este rectangulito pequeño y tiene que ser menor que el rectángulo grande que dibuje acá (*señala con el dedo*), luego tiene que ser menor que este rectángulo y mayor que el rectángulo chico.

I: ¿Cómo demuestra esos argumentos que me esta dando, cómo los puede explicar?

A9: ¿Cómo los explico? Suponiendo que la gráfica está contenida dentro de un rectángulo pequeño, la encierro en un rectángulo, lo que me está pidiendo es que halle un área delimitada por ese rectángulo, o sea un área más pequeña que ésta.

I: ¿Cómo lo haría?

A9: Si me piden hallar solamente esa área, pues normal, sino conociera la integral, entonces haría particiones más pequeñas.

I: ¿Qué haría en éste caso?

A9: Haría rectangulitos más pequeños para hacer una aproximación.

I: ¿Cómo son esos rectángulos mayores o menores?

A9: Son menores que cada uno, es menor que el área, pero sumados me dan un valor más aproximado del área.

I: ¿Por qué ese valor es más aproximado al área?

A9: Porque, si se fija bien cuando uno está haciendo estos rectángulos quedan pequeños triangulitos acá, esos triángulos no los estoy contando, no me quedan dentro del área, pero a medida que los voy haciendo más cercanos, más pequeños, más angostos, esos triángulos se van haciendo más pequeños.

I: ¿Qué pasa cuando se vuelven más pequeños?

A9: Que el área se va aproximando más.

I: ¿Qué pasaría si los rectángulos fueran de mayor altura?

A9: De mayor altura hacia acá, si fueran de mayor altura me paso del área de la gráfica.

I: ¿Qué es mejor que se pase o que no le sobren los triangulitos?

A9: Que me sobren los triangulitos, porque partiría toda el área en rectángulos más pequeños cada vez.

I: ¿Qué está logrando cuando hace esos rectangulitos cada vez más pequeños?

A9: Me estoy aproximando más al área que me están pidiendo.

I: ¿Qué es aproximarse al área?

A9: ¿Qué es aproximarme al área? Es encontrar básicamente que esos rectángulos tiendan a infinito, o sea usando un concepto de límite tendiendo a infinito me daría el área real.

I: ¿Qué límite calcularía, aquí?

A9: Aquí, hallaría el límite de una sumatoria de Riemann cuando la partición tiende a infinito.

I: ¿Podría aplicar aquí una sumatoria de Riemann?

A9: Si.

I: ¿Cómo seria?

A9: La sumatoria de Riemann lo que me dice es que el área de cada rectángulo seria la base por altura, entonces esta longitud Δx seria la base, que es la distancia que hay entre un punto y otro y la altura la obtengo del valor funcional de $f(\varepsilon_x)$ me parece y eso seria más o menos la sumatoria de todo esto (*el estudiante escribe en una hoja de respuestas*).

I: ¿Cuáles serian los valores aproximados, de acuerdo con lo que está planteando?

A9: Si

I: ¿Cuáles serian numéricamente los valores aproximados?

A9: ¿Numéricamente?

I: ¿Entre qué cotas estarían?

A9: ¿Cómo lo hice acá, en el segundo punto de esta misma pregunta?

I: Si ¿Qué hizo ahí?

A9: Me pedían también dar valores más ajustados a los que me habían dado en la primera.

I: ¿Cómo lo hizo, cuénteme?

A9: Aquí, sólo me estaban pidiendo valores ajustados y no el área realmente, entonces hice lo más sencillo que es exactamente lo que estaba haciendo con los rectángulos, pero un poquito más amplios y usando unidades más fáciles de calcular de 3 a 4, partiéndolo por unidad de 3 a 4, de 4 a 5, de 5 a 6.

I: ¿Qué esta haciendo con eso?

A9: Estoy haciendo una partición.

I: ¿Qué es una partición?

A9: Partir todo este segmento en segmentos más pequeños y usar rectángulos.

I: ¿Para que los hace más pequeños?

A9: Para hallar el área de los rectángulos.

I: ¿Cuál es el área aproximada de esa región?

A9: ¿Aproximada?

I: El área aproximada de esa región.

A9: Me dio 24 unidades de medida cuadrada (*el estudiante calcula en una hoja de respuestas*).

I: ¿Cómo justifica nuevamente ese valor aproximado?

A9: Partiendo de lo que hice acá con el primer rectángulo que dibuje, que tiene una altura de 6 por 2 centímetros, o sea que tendría una área de 12, es que acá los hice como más pequeño, pero resultó más fácil así, mas aproximado.

I: ¿Qué hace después con esas áreas?

A9: Las sumo.

I: ¿Para qué las suma?

A9: Para dar un valor más aproximado, porque si uno se fija bien solamente…

I: ¿Qué valores trabajo, escríbalos por favor?

A9: Los valores de esos rectángulos los voy a sacar acá: tres, cinco, más siete, ocho y nueve, hago el primer rectángulo que hasta acá se supone que vendría el 6, si son 6 hacia arriba serian 6 de altura y 2 centímetros de base, el área de este rectángulo serian 12 unidades métricas cuadradas el segundo va hasta 4, el dibujo que estoy haciendo acá no esta colaborando mucho, pero seria más o menos así y otra vez seria de base 2 y altura de 4, lo que seria 8 unidades métricas cuadradas y el siguiente rectángulo que hice tendría una altura de 2 y de base también 2, creo que seria una área de 4 unidades métricas cuadradas, si sumo todas me va a dar 24 unidades métricas cuadradas que es un área más aproximada que la que me habían dado antes (*el estudiante grafica y calcula en una hoja de respuestas*).

I: ¿Puede utilizar otros métodos para aproximar el área?

A9: ¿Otros métodos para aproximar el área? El único método seria hallar la ecuación de la función y aplicar una integral definida.

I: ¿Para qué sacaría la ecuación?

A9: Para poder integrar la función, o sea buscaría la ecuación de la función.

I: ¿Qué otras gráficas podría utilizar?

A9: Es que en esta gráfica se presta más la de los rectángulos aunque uno podría usar cualquier otra figura geométrica conocida como el triángulo.

I: ¿Cómo seria con el triángulo?

A9: Digo que se puede usar con triángulos también, aunque no seria lo más apropiado porque se supone que lo que estamos buscando es simplificar las cosas, pero podría usar un triángulo acá ya que uno conoce el área del triángulo.

I: ¿Sólo triángulos en toda la parte sombreada?

A9: Si en la parte sombreada.

I: ¿Cómo aproximaría mejor, con triángulos o con rectángulos?

A9: En este dibujo aparentemente (*el estudiante tose frecuentemente*) usaría los triángulos, aunque conociendo el concepto de limite cuando la base de cada rectángulo tiende a infinito.

I: ¿Qué le permite el límite, calcular el área o aproximar el área?

A9: ¿Ese limite? Me permite calcularla.

I: ¿Qué le están pidiendo en el ejercicio?

A9: Aproximarla.

I: ¿Cómo cree que podría conseguir mejores aproximaciones del área, con rectángulos más grandes o más pequeños?

A9: Más pequeños.

I: ¿Por qué?

A9: Porque lo que le dije ahora, el pedazo de los triángulos que queda por fuera del rectángulo que pertenece a la gráfica se va haciendo más pequeño entre más pequeño sea el rectángulo.

I: ¿Cuando se hacen más pequeños, qué nos permite alcanzar?

A9: Nos permite alcanzar una mayor aproximación del área que nos están pidiendo.

I: ¿Qué significa aproximarse al área?

A9: ¿Aproximarme al área? Al área de la gráfica, significa un mejor cálculo del que estoy buscando.

I: ¿Qué significa aproximarse más al área geométricamente?

A9: ¿Geométricamente? No entiendo bien.

I: ¿Cuando construye los rectángulos busca mayor aproximación, pero aproximarse más con los rectángulos es llegar a qué en esa área sombreada?

A9: Es llegar a cubrir totalmente con rectángulos el área que estoy buscando, eso seria lo que estaría buscando.

I: ¿Considera que existe otra forma de aproximar diferente a las que ha enumerado?

A9: No me he tomado el tiempo suficiente para pensar en otras fórmulas, pero no.

PREGUNTA 2

I: ¿Puede explicarme como ha resuelto la tarea número 2?

A9: Lo primero que me piden en la pregunta número 2 es graficar, entonces tome dos valores de la función sabiendo que es una recta.

I: ¿Qué figuras bajo la gráfica se formaron?

A9: Se formaron 2 triángulos.

I: ¿Cómo calcula el área?

A9: Aquí lo que se está formando es un triángulo rectángulo y debí haber hallado 2 triángulos rectángulos, uno por encima del eje X y otro por debajo del eje X.

I: ¿Qué relación puede establecer entre el área de la región bajo el eje OX y la formada sobre el eje OX?

A9: ¿Qué relación puedo establecer entre ésta y ésta? Que son iguales.

I: ¿Por qué son iguales?

A9: Porque tienen la misma base y la misma altura.

I: ¿Cuál es esa base y cuál es esa altura?

A9: Tienen de base 2 y de altura 4, me parece, si.

I: ¿Cómo ha calculado el área?

A9: Lo que debí haber hecho fue calcular el área de este triángulo completo y como son 2 triángulos iguales, debí haberlos sumado y multiplicado por 2.

I: ¿Por qué son iguales?

A9: Por lo que le dije ahora, tienen igual base e igual altura y por geometría plana, si que son iguales.

I: ¿Qué hizo ahí, cómo lo resolvió?

A9: Ese día lo que hice fue hallar el área de un triángulo y trace una línea que me formó 2 triángulos de base 1 centímetro, pero me quedaba faltando un rectángulo acá y tuve que haber hallado también el área de este rectángulo y luego sume las áreas de los triángulos y los 2 rectángulos que me dieron.

I: ¿Cómo calculó la integral?

A9: Pues ahí, decía solamente que calcularla la integral.

I: ¿Qué valor obtuvo?

A9: Hice la integral y me dio 16.

I: ¿Cómo explica el valor de 16?

A9: (*El estudiante tose*), como aquí decía que simplemente calculara la integral, entonces la calcule como se supone que se debe de calcular.

I: ¿Está de acuerdo con ese resultado?

A9: Hablando de integral, si.

I: ¿Y hablando de otra cosa como qué seria y en qué caso no seria?

A9: En el caso que me pidieran hallar el área.

I: ¿Si le pidieran hallar el área, entonces qué le daría?

A9: La hice acá por este lado, tendría que dividir la integral en dos para aplicar las propiedades de integral.

I: ¿Cuáles propiedades?

A9: No me acuerdo como se llama la propiedad.

I: ¿Por qué aplicaría propiedades?

A9: Porque, me están pidiendo que halle el área desde -2 hasta 2.

I: Si.

A9: Pero habría que partirla desde -2 hasta 0, porque esta área me daría negativa.

I: ¿El área puede dar negativa?

A9: No puede darme negativa, porque se supone que esta midiendo un área y siempre debe ser positiva como la distancia.

I: Si.

A9: O sea, uno no puede recorrer una distancia negativa, siempre mide distancias positivas y áreas también positivas.

I: ¿Cuánto le dio la integral?

A9: Esta integral desde -2 hasta 0 y de 0 hasta 2, para poderlas hacer bien no sé, en esta integral me dio 0, pero no es posible.

I: ¿Cuánto le dio el área gráficamente?

A9: ¿El área gráficamente? Según lo que copie acá me dio 8 unidades métricas cuadradas.

I: ¿El área total?

A9: Ésta creo que está mala mirándola bien, si quiere la hago otra vez.

I: ¿Cuánto le dio el área?

A9: Así con la grafiquita me dio 8 unidades.

I: ¿Qué área es esa?

A9: De toda el área que me están pidiendo.

I: ¿Está seguro que ese es el valor del área total?

A9: (*El estudiante susurra mientras va pensando*), Si, lo que escribí acá ese día fue eso.

I: ¿Qué considera ahora?

A9: No, perdón.

I: ¿Cuál es el área geométricamente?

A9: 16 unidades métricas cuadradas es lo que puse acá, es la misma.

I: ¿Eso es lo que pone, lo que puso o lo que cree que es hoy?

A9: Espere un momento lo que puse ese día fueron 16 unidades métricas cuadradas y lo que yo creo así gráficamente hoy serian (*el estudiante dice en voz baja no lo puedo rayar cierto, perdón).*

I: ¿Cuál cree que es el valor del área gráficamente?

A9: Seria hacer el triángulo que estoy diciendo ahora, que fue lo que debí haber hecho primero, base por la altura que serian 4 y como son 2 triángulos entonces seria 8.

I: ¿Está seguro que el valor del área es 8?

A9: Si, entre esa recta y el eje X y entre esta recta y este eje X sí, seria 8.

I: ¿Cuántos triángulos se formaron?

A9: 2.

I: ¿Cuánto tiene de base cada uno?

A9: Cada uno tiene de base 2.

I: ¿Cuánto de altura?

A9: 4

I: ¿Cuál es la función?

A9: La función es $4x$.

I: ¿Cuál seria la altura y cómo la obtendría?

A9: Hallaría en dónde se corta la recta $x = 2$.

I: ¿Cómo obtendría la altura de ese triángulo?

A9: Geométricamente está aquí.

I: ¿Cuánto es el área gráficamente?

A9: ¿El área gráficamente? 8.

I: ¿Cuál es el valor de la integral?

A9: Me dio cero, pero el área no puede dar cero.

I: ¿Por qué no puede dar cero, qué está calculando la integral o el área?

A9: Cuando me pidieron la integral me dio 16.

I: ¿Le pidieron calcular el área geométricamente y le dio 8, cuando calcula la integral cuánto le da?

A9: ¿Evaluada así?

I: ¿cual es el valor de esta integral?

A9: 16.

I: ¿Por qué el valor de esa integral es diferente de esta otra integral?

A9: Porque intenté sacar lo que le digo, dividirlas.

I: ¿Cuál de las 2 integrales calculó?

A9: ¿Y si no estoy de acuerdo lo podría volver hacer?

I: ¿Qué haría hoy si le piden calcular esta integral?

A9: Si me dicen halle la integral.

I: Si.

A9: Haría lo mismo que hice acá, que seria la $\int_{-2}^{2} 4x\, dx$.

I: ¿Cuánto le daría esa integral?

A9: Esto seria $2x^2$ evaluado desde -2 hasta 2.

I: Si.

A9: Lo que seria igual a 4×2, seria -8, porque seria…

I: Escríbame bien los signos, escríbalo nuevamente.

A9: Acá primero seria evaluado en el 2 positivo, daría 8, luego por el segundo teorema fundamental del cálculo, seria evaluado en $f(b)$ menos $f(a)$, no esto seria lo mismo -8 o sea que este daría cero.

I: ¿Entonces la integral da cero?

A9: Si me dicen halla la integral daría cero.

I: ¿Cuál es la diferencia entre hallar el área gráficamente y calcular la integral?

A9: ¿Entre hallar el área gráficamente y calcular la integral? Primero para hallar el área gráficamente habría que hacer figuras geométricas conocidas, calcular las áreas y sumarlas, y calcular la integral es como hacer una operación cualquiera de multiplicación o de suma, es muy diferente cuando uno hace una operación de suma, multiplicación, división o cualquier otra operación para resolver un problema, lo mismo la integral me sirve es para resolver un problema.

I: ¿Por qué al calcular el área le dio un valor y cuando calculó la integral dicho valor dio cero?

A9: Por lo que le digo es que la pregunta decía calcula la integral, no me decía calcule el área de la figura usando la integral.

I: ¿Cómo justifica que los 2 resultados sean diferentes?

A9: Por eso, precisamente para el primero lo hice usando las figuras geométricas conocidas que fueron los triángulos, calcule esas dos áreas y las sume, mientras que en el otro punto, decía simplemente calcule la integral, entonces estoy calculando la integral sin aplicarla para hallar el área de esa figura.

I: ¿Cuál es la diferencia entre calcular un área y calcular la integral definida?

A9: ¿Cuál es la diferencia? La diferencia es que tendría que tener en cuenta la gráfica, en este caso lo que le dije ahora, tendría que dividir la integral desde -2 hasta 0 y de 0 hasta 2 para poder hallar esa área.

I: ¿Qué puede concluir de los 2 de los resultados obtenidos?

A9: ¿Qué puedo concluir? Que es más fácil calcular la integral definida, teniendo cuidado de lo que se está haciendo.

I: ¿Por qué es más fácil calcular la integral?

A9: En algunas funciones, en esta por ejemplo, es más fácil calcular la integral.

I: ¿Más fácil con relación a qué?

A9: Con relación a hallar el área con figuras geométricas conocidas, ésta en particular.

PREGUNTA 3

I: ¿Sabría comentarme cómo ha resuelto la tarea número 3?

A9: Básicamente lo que hice en el primer punto, dibuje rectángulos.

I: ¿Qué le piden en el ejercicio?

A9: En este me dicen que sea la que sea R la región entre la gráfica de la función $f(x)=x^2$ y el eje X, en el intervalo de $[0\,,4]$ (*el estudiante lee la pregunta*).

I: ¿Qué le piden hacer?

A9: Me piden que utilizando particiones aproxime el valor del área de la región R y lo que hice fue usar los mismos rectángulos que es lo más fácil para hallar el área.

I: ¿Por qué los rectángulos es lo más fácil para aproximar el área?

A9: Porque, primero la fórmula del área del rectángulo es más fácil es base por altura y segundo lo que le había explicado ahora, entre más pequeños los haga me voy acercar a rellenar toda el área que estoy aproximando.

I: ¿Qué valor obtuvo al aproximar el área?

A9: 30 unidades de medida cuadrada.

I: ¿Por qué ha utilizado ese procedimiento?

A9: Porque es el que conocía por la explicación que nos dio el profesor de la sumatoria de Riemann y de lo que es el método exhaustivo.

I: ¿Qué ocurre con las sumas al escoger todos los subintervalos de la partición cada vez más pequeños?

A9: ¿Qué ocurre con la suma? Que el valor que me da se va aproximando más al área que estoy buscando.

I: ¿Cuántos rectángulos podría trazar?

A9: En cualquier área podría trazar infinitos, hablando conceptualmente de lo que uno en matemáticas tiene como conceptos.

I: ¿Cuándo se aproxima más al área usando subestimaciones o sobreestimaciones y por qué?

A9: Subestimaciones, porque entre más pequeños los hago me aproximo más al área.

I: ¿Qué entiende por más pequeños, en longitud o en altura?

A9: En la base, si los hago más pequeños en la base y la altura la hago hasta que toque la gráfica de la curva $f(x)$.

I: ¿Y todos pueden tocar la curva?

A9: Si, como lo hice acá usando de altura el punto donde toca la curva $f(x)$ y usando como base una partición más fina.

I: ¿De qué otra forma diferente a la anterior podría calcular el área bajo la gráfica?

A9: Usando el límite de la sumatoria de Riemann, que en últimas es una integral definida.

I: ¿Cómo plantearía el límite de una sumatoria de Riemann en este ejercicio?

A9: Es que el limite de la sumatoria de Riemann cuando n tiende a infinito y la partición tiende a 0 siempre es la integral definida, pero para evitarme tanto trabajo con la integral definida.

I: ¿Cómo plantea con esta función el límite de una sumatoria de Riemann?

A9: Es que por propiedad transitiva si A es igual a B y B es igual a C pues A tiene que ser igual a C, o sea, si el limite de la sumatoria de Riemann, es una integral definida, porque no puedo más bien hallarla por facilidad, pero ya que es usted lo pide, seria el limite cuando la partición tiende a cero o cuando n tiende a infinito de la sumatoria (*el estudiante dice, debí haber repasado un poquito*).

I: ¿Que expresa el limite de una sumatoria de Riemann?

A9: Expresa como se podría utilizar la máxima aproximación al área, primero la sumatoria de Riemann, cuando uno hace una partición divide un intervalo en n puntos y esos puntitos se van hacer cada vez más pequeños que son la base de los rectángulos al usar la altura como f después usando el valor funcional como altura eso va aproximando, entre más pequeños haga esos rectángulos más voy a rellenar de rectángulos toda el área que estoy aproximando, así que me van a quedar espacios más pequeños, entonces a medida que hago más fina esa partición, me va aproximar al área, por eso cuando usamos el concepto de limite, que es cuando el limite de esos n puntos tienda a infinito, estoy aproximando más el área.

I: ¿Podríamos obtener una respuesta exacta del área bajo la gráfica de $y = x^2$ para $x = 0$ y $x = 4$ a partir de esta secuencia?

A9: Si, usando esa integral definida, porque precisamente es el límite de una sumatoria de Riemann. .

I: ¿Puede dar una fórmula para hallar el límite de la secuencia? ¿Cuál?

A9: Puedo dar una fórmula para hallar el límite de la secuencia usando esta sumatoria.

I: ¿Cuando calcula los limites de una sumatoria cómo son sus valores?

A9: Lo que hago es la sumatoria en general y me va a dar un único valor.

I: ¿Qué valor es ese?

A9: Ese valor me estaría dando el área de la curva.

I: ¿Qué puede concluir de este ejercicio?

A9: ¿Qué puedo concluir de este ejercicio? Lo que hemos estado hablando, que considero que si necesito hallar el área exacta tendría que usar la integral definida, que es mucho más fácil que hacer la sumatoria de Riemann.

I: ¿Por qué es más fácil hallar la integral que hacer la sumatoria?

A9: Porque la integral no es que sea más fácil, sino que hay menos voleo matemático.

I: ¿Cuando habla de voleo a qué se refiere?

A9: Precisamente no hay que confundir difícil con hacer una operación extensa, pero con la sumatoria de Riemann se haría más extensa la operación.

PREGUNTA 4

I: ¿Puede explicarme cómo ha resuelto la tarea número 4?

A9: Esa no la puedo explicar porque no la hice, no la sé.

I: ¿Podría intentarlo nuevamente? ¿Cómo define el valor absoluto?

A9: Como una distancia que se recorre, si es una distancia precisamente.

I: ¿Cómo lo podría expresar por escrito, cómo define por ejemplo el valor absoluto de x?

A9: ¿El valor absoluto de x? Seria x si x es mayor que 0 y seria $-x$ si x es menor que 0.

I: ¿Recuerda la gráfica de esa función?

A9: No me acuerdo de la gráfica como es.

I: ¿Cómo podría definir esta función?

A9: Pues eso, debería ser una recta.

I: ¿Cómo seria, inténtatelo?

A9: ¿Cómo la graficaría? Lo más fácil que habría por hacer seria darle unos dos o tres valores para cuando x valga 1, seria 1, cuando x valga 2 seria 3, cuando x valga 3 seria 5, supongo que esto es una escala real.

I: ¿Dónde cortaría esta recta el eje X?

A9: ¿Dónde?

I: Si.

A9: La cortaría en 0,5.

I: ¿Cómo seria?

A9: Seria como por acá más o menos.

I: Trácela por favor.

A9: Si seria una recta (*el estudiante recibe una regla como ayuda y dicA9: Gracias, si me hubiera dicho que tenia la reglita hasta de pronto me hubiera dado una idea más fácil*).

I: ¿Cuál es el intervalo?

A9: El intervalo de $[0, 2]$.

I: ¿Qué es un valor absoluto, qué le faltaría a esos valores de x, qué valores estaría calculando ahí, según la definición de valor absoluto?

A9: Los x mayores que cero.

I: ¿Qué le faltaría entonces?

A9: ¿Qué me hace falta acá? ¿Los valores negativos? No, porque todos van a ser…

I: Subraye el área que tendría que calcular.

A9: Aquí están, pero tengo un problema, porque me piden el área desde cero a dos, y cero está por fuera de la gráfica, seria desde 0,5 hasta 2 que seria esto y me están pidiendo es toda esta área.

I: ¿Está seguro, qué eso es lo que le están pidiendo?

A9: Acá para ser sincero tengo mis dudas, porque tendría desde cero hasta dos que es éste pedacito.

I: ¿Cómo la calcularía, cuáles son las áreas?

A9: Ahora, si la podría calcular, creo.

I: ¿Cómo la calcularía?

A9: Haría una integral.

I: ¿Qué figura tiene formada?

A9: Tengo 2 triángulos.

I: ¿Cómo lo haría?

A9: Pues acá.

I: ¿Cómo calcularía esa área?

A9: De la manera extremadamente más fácil, seria hallarle el área a estos 2 triángulos que seria…

I: ¿Cómo seria?

A9: El triángulo pequeño, que seria base por altura sobre 2, entonces seria $\frac{1}{2}$ por la altura que esa sino la había hallado todavía, eso es cuando y corte ¿Acá también corta en 0,5, verdad?

I: ¿Tendría que darle valores?

A9: ¿Tendría que darle valores? Que sea igual a -2…

I: ¿De qué otra forma la podría calcular?

A9: ¿Esta altura?

I: Esa área.

A9: ¿Esa área? Usando la integral.

I: ¿Cómo seria?

A9: Seria la integral desde cero hasta $\frac{1}{2}$.

I: ¿Por qué hasta $\frac{1}{2}$?

A9: Porque es que llegaría primero hasta $\frac{1}{2}$.

I: ¿Por qué llega hasta $\frac{1}{2}$?

A9: Porque, es que en $\frac{1}{2}$ corta la gráfica el eje X, entonces esta área está por debajo del eje X o sea que me daría negativa, por lo tanto tendría que anteponerle un signo acá, para asegurar que el área me de positiva.

I: ¿El área de qué función?

A9: El área de la función $|2x-1|$.

I: ¿Cómo lo escribiría?

A9: Acá en este lado.

I: Si.

A9: Así, $2x-1$ de x mas…

I: ¿Más qué?

A9: Más la integral definida desde $\frac{1}{2}$ hasta 2 de la misma función $f(x)$ que seria el valor absoluto de $2x-1$ de x.

I: ¿Está seguro que ese integrando va en valor absoluto?

A9: Así como lo tengo lo puedo quitar.

I: ¿Por qué lo puede quitar?

A9: Porque estoy asegurando acá que el área me de positiva al hacer este pedazo negativo.

I: ¿Cuánto le daría eso al calcularlo?

A9: Quitando un poquito la rigurosidad seria $2x-1$ más ésta que la separo queda el primero $\frac{x^2}{2}-2$ aplicando una propiedad de la integral porque, $2x\ de\ x$ menos el limite de x, ésta evaluada desde cero hasta $\frac{1}{2}$, más lo mismo, acá quedaría $x^2\ -1$ éste tiene un menos acá, $x^2\ -1$ evaluado desde $\frac{1}{2}$ hasta 2, seria $\frac{1}{4}-\frac{1}{2}$ menos cero, mas3, seria 3 - $\frac{1}{4}$.

I: ¿Si calcula con la integral y halla el área de los triángulos cómo serian los resultados?
A9: ¿Cómo profe?
I: ¿Qué valor obtiene, cuándo calcula con la integral?

A9: ¿Así como los halle?

I: Si.

A9: Me daría el área de la región.

I: ¿Qué obtiene con esto?

A9: ¿Cómo? El área de la región subrayada, llegaría a encontrar el área de la región que me están pidiendo.

I: ¿Cómo representó el área?

A9: En unidades métricas cuadradas.

I: ¿Un área de cuánto?

A9: Suponiendo que me de t metros cuadrados, una constante cualquiera.

I: ¿El resultado que le dio al hallar el área usando la integral y el resultado del área a partir de los triángulos seria la misma?

A9: Seria similar o aproximado, en esos triángulos por ser una recta y por ser el triángulo considero que seria lo mismo.

I: ¿El mismo valor?

A9: Si el mismo, si no hubiera sido una recta o cualquier otra gráfica, una parábola alguna cosa, ese y seria más bien como aproximado.

PREGUNTA Nº 5.

I: ¿Cuándo le dicen que aproxime el área en el ejercicio número 5, qué hace?

A9: Cuando me dice que aproxime un área, hago exactamente lo que vengo haciendo en toda la entrevista y en todo el cuestionario, haciendo particiones con figuras geométricas.

I: ¿Qué hizo en este ejercicio, como aproximó el área?

A9: Use varios rectángulos de base y de altura conocida, para hallarles el área y luego las sume y así aproxime el área.

I: ¿De dónde obtuvo ese valor de 7, 88?

A9: ¿De dónde lo obtuve? El primero que hice acá de una partición no regular.

I: ¿Qué es una partición no regular?

A9: Una partición no regular es que las bases de los rectángulos no son las mismas siempre, entonces acá como se ve hay un rectángulo más ancho de base.

I: ¿Considera que esa aproximación es bastante cercana, podría mejorar la aproximación de esa área?

A9: Si.

I: ¿Cómo la podría aproximar mejor?

A9: Haciendo rectángulos más pequeños.

I: Inténtelo en la hoja auxiliar.

A9: Muestre seria algo como así, supongamos que habría que darle valores y haciendo rectangulitos más pequeños, por cuestión de que me quedan rectángulos por fuera.

I: ¿Cómo calcularía las áreas de cada rectangulito de estos?

A9: Seria…

I: ¿Qué valores le daría a esas áreas, cómo las encontraría?

A9: Para hallar una aproximación como más fácil usaría particiones de 1 milímetro de base.

I: Si.

A9: Y para la altura evaluaría en la función y sumaria todas esas áreas.

I: ¿De qué otra forma podría aproximar esa área, qué otros procedimientos puede aplicar para calcular esa área?

A9: ¿Qué otros procedimientos? No en el momento desconozco otros procedimientos aparte del método exhaustivo.

I: ¿Qué es el método exhaustivo?

A9: Es hacer figuras geométricas conocidas dentro para rellenar bien de tal forma que no me queden espacios para hallar lo más aproximado posible el área que me están pidiendo.

I: ¿Qué puede concluir de los resultados obtenidos?

A9: Que una aproximación seria más bien como vaga, por lo que aquí hice muy pocos rectángulos.

I: ¿Esos rectángulos son superiores al área sombreada o inferiores al área sombreada?

A9: Los que hice aquí fueron superiores porque es mucho lo que queda fuera del área.

I: ¿Qué aplicó aquí, una sobrestimación o un a subestimación?

A9: En esta parte, intente hacer una subestimación.

I: ¿Está seguro que es una subestimación?

A9: Pues intente hacer los rectángulos más pequeños que éste.

I: ¿Puede en una parte subestimar y en la otra hacer sobreestimaciones?

A9: Teniendo en cuenta lo que me estaban pidiendo era una aproximación, no se requería una exactitud por eso lo hice así.

I: ¿Qué le permite aproximar más el área, las sobrestimaciones o las subestimaciones?

A9: Las subestimaciones.

I: ¿Por qué las subestimaciones le dan mayor aproximación?

A9: Porque entre más pequeños haga esos rectangulitos me faltarían menos pedazos, ya que los que quedan faltando se van haciendo más chiquitos.

I: ¿Qué pasaría si las subestimaciones son muy delgadas?

A9: ¿Muy delgadas? Cubrirían por completo el área que estoy buscando.

I: ¿Qué le permite aproximar más?

A9: Las subestimaciones.

PREGUNTA Nº 6.

I: ¿Podría explicarme que quiere decir con el razonamiento que realiza en la pregunta número 6?

A9: (*El estudiante lee la pregunta*) *Explique, en términos del gráfico, por qué* $\int_0^a (x^2+x)dx = \int_0^a x^2 dx + \int_0^a x dx$, lo que digo es que al hacer la partición regular, la sumatoria de Riemann y un limite cuando la partición tienda a cero, estos dos limites o integrales definidas sumadas daríán igual a la integral de la función inicial del integrando, en este momento estoy de acuerdo si tuviera que hacer esta integral para hallar el área de x^2.

I: ¿Qué piden en el ejercicio?

A9: Que explique en términos del gráfico la igualdad.

I: ¿Cómo lo haría?

A9: Lo que pasa es que en términos gráficos casi no se ve.

I: ¿Por qué utiliza sólo el registro algebraico para demostrar la propiedad?

A9: Porque gráficamente no se ve muy bien.

I: ¿Qué es lo que no se ve?

A9: Gráficamente no se ve como muy fácil que el área de la recta $y = x$, y la función x^2 sumadas me den el área de $x^2 + x$.

I: Qué tal si lo intenta por separado, lo grafica, lo mira y compara.

A9: A lo mejor lo hago (*El estudiante sonríe*), seria una recta x, suponiendo que esta área fuera hasta acá y la otra área que debí haber manejado como una escala bien, pienso que habría que anteponerlas y así seria más fácil de observar.

I: Trate de hacer lo que me dice.

A9: Pienso que se podría hacer de manera más sencilla, recortando este pedacito y ponerlo.

I: ¿Cómo?

A9: A parte pues es que no…

I: ¿Cómo seria?

A9: Pues recortaría este pedazo de ese y, y los sumaria acá en este lado.

I: ¿Cómo recortaría, explíqueme ese argumento?

A9: Aquí me da una especie de triángulo y lo recortaría bien por donde está limitado.

I: ¿Qué función es esa?

A9: Esta seria $y = x$, lo pegaría por éste lado.

I: ¿A qué función?

A9: A $y = x^2$.

I: Si.

A9: Que me daría una similar y después tendría que restar este pedazo, el que me sobra y mirar si es igual al área de $x^2 + x$ que supongo por concepto que es igual, pero pienso que gráficamente se vería así.

I: ¿Puede ubicarlo en el plano y demostrarlo?

A9: ¿Gráficamente?

I: Solamente si lo recortas lo podría hacer.

A9: Si, veo más bien cómo lo grafico.

I: ¿Qué figuras podría formar bajo el área de la gráfica de cada función?

A9: Bajo la gráfica de $y = x$, quedaría mucho más fácil hacer un triángulo bajo el área de x^2, también seria fácil hacer un triangulo en las tres y me daría un valor bastante aproximado de las áreas de cada uno.

I: ¿Podría justificar numérica y o gráficamente la igualdad de las integrales?

A9: Justificarlo como en especie de demostración.

I: ¿Cómo demostraría más fácil la igualdad, calculando las integrales o gráficamente?

A9: En este lado calculando las integrales, seria mucho más fácil.

I: ¿Qué integrales calcularía?

A9: La primera integral de $x^2 + x$.

I: ¿De dónde a dónde?

A9: De cero a a y luego calculando las otras dos que seria la integral de cero a a de x^2, y la integral de cero a a de x, así seria más fácil demostrar que son iguales.

I: ¿Por qué es más fácil el manejo algebraico que el manejo geométrico?

A9: Por lo que le digo que en ese gráfico no se ve fácil, que geométricamente sean iguales esas áreas.

I: ¿Considera qué son iguales o qué no hay igualdad?

A9: Si considero que son iguales, sin embargo gráficamente no se ve fácilmente que lo sean.

PREGUNTA 7

I: ¿Qué razones tiene para dar el valor de de verdad de cada una de las proposiciones de la pregunta 7?

A9: Dice (*el estudiante lee la pregunta*) *si* $F'(x) = G'(x)$ *en el intervalo* $[a, b]$, *entonces* $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$, digo que eso es cierto, porque cuando dos funciones tienen la misma derivada, ambas difieren en una constante aditiva.

I: ¿Podría explicarme el argumento que maneja en la pregunta 7b?

A9: Lo que hice más bien fue como recurrir un poco al álgebra, de otra manera lo que hice fue que x seria igual a $g(x)+e$ por lo que le digo que si difieren teniendo el concepto que si ambas tienen igual derivadas, si difieren en una constante aditiva, entonces luego dice $f(a)$ es igual a $g(a)$ + e, hice $f(a) - f(b)$ seria igual a $g(a)+c-g(b)+c$ en 2.

I: ¿Cómo explica el argumento de la proposición 7b?

A9: Si f es continua en $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$ y lo primero que se me viene a la cabeza es que si una función es continua entonces es derivable.

I: ¿Con qué elementos matemáticos del cálculo relaciona esta proposición?

A9: ¿Con que elemento?

I: Matemático.

A9: Con derivada.

I: ¿Con la derivada y con qué más?

A9: Con la derivada y la antiderivada.

I: ¿Qué es una antiderivada?

A9: La antiderivada seria como una integral general.

I: ¿Cómo una integral general y qué otro concepto matemático está en esa proposición?

A9: En esta proposición, la integral, si porque me dice que si f es continua es integrable.

I: ¿Cuándo le dice que es integrable?

A9: Cuando f sea continua.

I: ¿Qué es una función continua?

A9: Es la que se hace en un solo trazo sin interrumpirlo, si podría ser así.

I: ¿Está de acuerdo con el valor que le dio a esta proposición 7b?

A9: Si, le dije que era verdadero.

I: ¿Podría argumentarme el valor de verdad de la proposición 7c?

A9: Acá dije que era verdadero, habría que hacer otra vez la integral, la verdad no me acuerdo.

I: Mirando la función que tiene planteada para integrar, sin hacerlos los cálculos, considera que la proposición es correcta, está de acuerdo con el valor que le dio?.

A9: Sin hacerla, creo que si.

I: ¿Por qué?

A9: Hice un poco de trampa, la hice como mentalmente, entonces por fórmula al integrar hallo lo que es la antiderivada y la antiderivada me dice que el exponente le sume uno y lo divide entre n si tengo x^n la antiderivada seria x^{n+1}.

I: ¿Cuál es la función que va a integrar?

A9: x^{-2}

I: ¿En qué intervalo?

A9: Entre -1 y 1.

I: ¿Está de acuerdo con lo que está aplicando ahí, qué elementos matemáticos se están manejando en esa proposición?

A9: ¿Qué elemento matemático? No.

I: ¿Qué elementos implícitos del cálculo están, ahí?

A9: Los límites, porque está el menor, el mayor, la diferencial está también.

I: ¿Qué aplicaron para resolver esa integral?

A9: Aplicaron el segundo teorema fundamental del cálculo.

I: ¿Qué dice el segundo teorema fundamental del cálculo?

A9: Que para resolver esa integral lo que hago es hallar la antiderivada y evaluar $f(b)-f(a)$.

I: ¿Cómo se llama la regla que se conoce en el segundo teorema fundamental del cálculo?

A9: La regla que se conoce, en el segundo teorema fundamental del cálculo.

I: ¿Está de acuerdo que la proposición sea verdadera?

A9: Si

PREGUNTA 8

I: ¿Podría explicarme en la pregunta número 8, el significado de la $\int_a^b f\left(x\right)dx$?

A9: El significado de esa integral es difícil, porque diría que esa integral así como esta hablando simplemente de integral, seria una antiderivada desde a hasta b.

I: ¿Qué es una antiderivada?

A9: ¿Qué es una antiderivada?

I: ¿Qué es para usted una antiderivada o primitiva?

A9: Seria la operación contaría a derivar pues así como existe la suma, también está la resta, seria algo así.

I: ¿Por qué asocia la expresión dada con la antiderivada?

A9: La asocio desde una integral general, porque una integral no definida seria la antiderivada más general, acá ya está en un intervalo que se supone que cuando ya lo aplico a un intervalo es porque quiero hallar algo, sea el área, el volumen o la longitud de arco de cierta gráfica, por eso acá no podría hablar que la integral definida así como está aquí, ya sea área o una sumatoria de Riemann.

I: ¿Cómo le explicaría a una persona el concepto de integral definida?

A9: Ese concepto, explicándole que seria una sumatoria de Riemann, por qué se hace la sumatoria de Riemann, de dónde surgió, explicando primero el método exhaustivo, para llegar al concepto de sumatoria de Riemann, al limite de una sumatoria de Riemann, hasta llegar a definir qué es la integral definida.

I: ¿Qué es para usted la integral definida?

A9: Es el limite de una de una sumatoria de Riemann, cuando la partición tiende a cero y la norma de la partición tienda a cero, o sea cuando el intervalo pequeño tienda a cero, o cuando el número de puntos en los que partí tiendan a infinito.

I: ¿Cuando hallo el límite qué obtengo?

A9: Tendría un valor.

I: ¿Un valor representado en qué?

A9: Depende de lo que estuviera mirando.

I: ¿Qué es un valor?

A9: Un valor cualquiera dos, tres, es un número.

I: ¿Qué le permite encontrar el límite?

A9: Un número real.

I: Muchas gracias.

A9: Me tostó profe.

ENTREVISTA (A10).

PREGUNTA Nº 1.

I: ¿Podría explicarme cómo obtuvo la respuesta a la pregunta número 1?

A10: La pregunta que usted me hizo fue que el área de una región sombreada es mayor que 12 pero menor que 48, lo que me esta pidiendo es más o menos una aproximación del rango en el que encuentra.

I: ¿Cómo lo aproximó?

A10: Geométricamente hice una construcción, aunque el área que usted me pide esta bajo una curva.

I: ¿Cómo hizo esa construcción geométrica, podría explicarme?

A10: Si, la construcción que realice fue la de un triangulo rectángulo, donde la hipotenusa coincide más o menos con la curva y la base del triángulo es la misma de la figura, es la parte sombreada que debo hallar.

I: ¿Con qué valores esta trabajando?

A10: Trabaje con valores de 3 a 9.

I: ¿Podría escribirlos en la gráfica y calcular el valor aproximado?

A10: Si, trace de 3 a 9 la base del triángulo y en ésta base de la gráfica se ve que la altura es 8, lo que hice fue aplicar la fórmula geométrica que dicA10: $\frac{b \times a}{2}$, como tengo de base 6 y de altura 8, entonces multiplico la base por la altura que es 48 y la divido en 2, que me da 24, esa fue la forma como aproxime esa área, como también se puede construir un rectángulo.

I: ¿Cómo seria utilizando rectángulos, pondría indicarlo?

A10: Hago un rectángulo donde el área quede inscrita dentro de ese rectángulo, hallo el área normal del rectángulo y con eso obtengo una aproximación.

I: ¿Cómo seria, puede hacer una aproximación utilizando un gráfico?

A10: Si (*el estudiante traza gráficos en una hoja de respuestas*), construyo un rectángulo, porque conozco la base y la altura, me dice que la base es 6 y la altura es 9, entonces puedo calcular el área de ese rectángulo.

I: ¿Cuál es la altura?

A10: La altura es 8 y con esto me doy cuenta que el área de ese rectángulo seria 48 y la pregunta me esta diciendo que si es mayor que 12 y menor que 48, con eso puedo asegurar de que es menor que 48, porque el área de ese rectángulo es de 48.

I: ¿Puede utilizar otros métodos para calcular el área, cuales?

A10: ¿Para aproximar esa área? El cálculo integral, por medio de una integral definida.

I: ¿La integral que le permite, calcular el área o aproximar el área?

A10: Calcular exactamente.

I: Si queremos aproximar o ajustar más esas cotas ¿Qué otros procedimientos podría utilizar?

A10: Un procedimiento que se puede utilizar para una aproximación más exacta del área diferente al que acabe de hacer geométricamente es el de una sumatoria.

I: ¿Cómo seria con una sumatoria, indique en la hoja adicional?

A10: Seria construir rectángulos.

I: ¿Podría construir los rectángulos?

A10: Tengo acá un área bajo una curva, entonces voy a construir rectángulos de forma que van cubriendo toda esa área ¿Por qué le digo que es una aproximación? porque es la parte superior de los rectángulos, esa área que está acotada por una curva.

I: ¿Cómo serian esos rectángulos?

A10: Serian rectángulos que vayan desde la base hasta la curva, pero que no se ajustan exactamente a la curva y aquí lo que tengo es una aproximación.

I: Si

A10: Y lo que queda faltando del triangulo que se ajusta a la curva seria como el margen de error que seria una aproximación más exacta.

I: ¿Cómo podría calcular el área de cada rectángulo?

A10: Puedo particionar esa base total que va de 3 a 9, o sea 6 unidades donde tengo opciones de construir y pensar en cuántos rectángulos puedo dividir esa área, ya que tengo valores conocidos y me dicen que son 6 puedo dividir eso en 2, pero tengo una aproximación muy poca porque daría un desperdicio más grande en la parte superior de cada rectángulo.

I: ¿Qué valores numéricos le podría dar a cada rectángulo?

A10: Puedo colocar valores numéricos de longitud 1 en la base.

I: ¿Cómo seria? Escríbelo por favor

A10: De acá a acá tengo uno y como acá tengo 3 serian 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, y 9, no hasta 6, me quedarían de 1 a 6.

I: ¿Cómo obtiene las alturas?

A10: Cuando tengo 6 rectángulos de la misma base de 1 unidad de longitud y de altura puedo tomar la función y evaluarla en el valor que corresponde.

I: ¿Cuál función?

A10: Acá tengo un error, porque no tengo la función de la curva.

I: ¿Cómo aproximaría el área?

A10: Resulta que tengo la altura de cada uno para aproximar, la primer altura la conozco porque me dice que la parte más alta mide 8.

I: ¿Cómo obtiene las otras alturas?

A10: Puedo construir otros segmentos, pero en forma horizontal para hallar los cortes porque la gráfica esta ubicada en un plano cartesiano.

I: ¿Cómo serian esos segmentos horizontales?

A10: Como tengo acá un plano cartesiano y unos valores establecidos que van desde 1 hasta 8 y el área parte desde la base del plano cartesiano, entonces para empezar a construir segmentos hacia arriba, para construir los rectángulos, puedo construir segmentos o rectas que sean paralelas al eje X .

I: ¿Qué le permite esto?

A10: Esto me permite empezar a aproximar cortes hasta que coincida con la altura de un triángulo como que se intercepte una recta construida hacia arriba (*el estudiante traza el gráfico*).

I: ¿Cómo quedaría?

A10: Construyo una recta hacía arriba, hasta que esta recta corte la curva, al trazar una paralela hacia el eje Y, pero párlela al eje X, eso es lo que voy haciendo una aproximación.

I: ¿Qué hace después?

A10: Con eso logre establecer la altura de todos los rectángulos, ya tengo la altura y las bases establecidas, entonces hallo las áreas.

I: ¿Cuál seria el paso siguiente?

A10: El paso siguiente seria sumar las áreas.

I: ¿Para qué sumas las áreas?

A10: Para tener las áreas, es como unas suba áreas porque las tomé y subdividí.

I: ¿Qué le permite encontrar este procedimiento?

A10: Una aproximación más acertada del área bajo de la curva que me están pidiendo.

I: ¿Podría utilizar otro método diferente que te permita mejor aproximación del área y que justifique más las cotas?

A10: Una forma seria haciendo una integral definida.

I: ¿La integral le permite aproximar?

A10: Para aproximar puedo usar un método, no sé si será método o fórmula que se llama la sumatoria de Riemann.

I: ¿En qué consiste?

A10: Consiste en tomar un área y particionarla en cierta cantidad de rectángulos.

I: ¿En este ejercicio lo puede aplicar?

A10: ¿En este ejercicio? No me acuerdo bien, pero creo que si lo puedo aplicar.

I: ¿Qué le permite la suma de Riemann, calcular o aproximar el área?

A10: Aquí me nace una duda, porque la suma de Riemann lleva implícito el concepto de límite, entonces si puedo es calcular el área.

I: ¿Cuándo sólo aplica la sumatoria?

A10: No, porque es que no sé si de pronto me olvide del tema, pero lo que entiendo de la sumatoria de Riemann o del proceso limite, es lograr que sea muy cerca, muy corta la longitud de los intervalos, cosa que se formen infinitos rectángulos con poca distancia y al sumarlos, entonces se ajustarían muy bien a la curva, así lograría una mayor aproximación, pero lo que si sé ¿cómo le digo a usted? Es que si le aplica el proceso del límite se juntaría tanto que no habría margen de error, creo que puedo hallar el área total con este procedimiento.

PREGUNTA Nº 2.

I: ¿Puede explicarme cómo ha resuelto la tarea número 2?

A10: El ejercicio número 2 nos hace una pregunta, se la voy a leer, dice que *sea **R**, la región encerrada por el gráfico de la función* $f(x)=4x$ *y el eje* x, es decir tengo una función, pero aquí me están dando el intervalo que es $[-2, 2]$, o sea que el área se encuentra en la entre esos dos puntos, entonces hago una construcción, porque tengo los puntos donde se encuentra el área.

I: ¿Qué figuras bajo la gráfica se formaron?

A10: Encontré la gráfica de una recta.

I: Si.

A10: Pero como me están dando el intervalo $x=2$ $x=-2$, lo que hago son unas rectas que al extenderse cortan la gráfica, y lo que encuentro es que se forman 2 triángulos.

I: ¿Cómo calcula gráficamente el área?

A10: Gráficamente las puedo calcular por separado, porque tengo un punto donde esa recta me corta el eje X, la cual se divide en 2 áreas, una que está por debajo del eje X y otra que está por encima del eje X.

I: ¿Qué relación puede establecer ente el área de la región bajo el eje OX y la región formada sobre el eje OX?

A10: ¿Qué relación puedo formar? Una relación que se evidencia como 2 triángulos opuestos por el vértice.

I: ¿Cómo son esos triángulos?

A10: Son semejantes.

I: ¿Por qué son semejantes?

A10: Porque hay un teorema que dice que si 2 rectas se cruzan en un mismo vértice, los ángulos que se forman, son de igual tamaño.

I: ¿Gráficamente qué valor obtuvo al calcular el área de los triángulos?

A10: Al calcular el primer triángulo se forma una base que es igual a 2 unidades de longitud.

I: ¿Cómo obtiene la altura?

A10: La altura, igual como se hizo el otro gráficamente.

I: Si.

A10: Grafique la altura que se ve reflejada en el eje Y, porque la base se me refleja en el eje X, en este caso.

I: ¿Por qué se le refleja en el eje X?

A10: Porque cuando grafico encuentro en el eje X, primero que todo las trazas de las rectas me forman triángulos rectángulos y como sé que lo opuesto al triángulo rectángulo es la hipotenusa, entonces me aseguro que esa sea una base, porque se ve más corta que la altura que está al otro lado y con eso que es lo que hago es que me voy a la geometría.

I: ¿Cómo a la geometría?

A10: Si, porque tengo las bases y tengo la altura del triángulo.

I: ¿Cuáles son las bases?

A10: La base que se ve reflejada en el eje X, que es de longitud 2.

I: ¿Cómo obtiene la altura de ese triángulo?

A10: la altura de ese triángulo, la obtuve…

I: ¿Qué valor obtuviste?

A10: Obtuve una altura de 8.

I: ¿Cómo obtuvo ese 8?

A10: Le di valores

I: ¿A quién?

A10: Como tengo la función $f(x)=4x$ y el corte con el eje X que es -2, entonces lo que hago es tomar esto y lo reemplazo en la función.

I: ¿Qué obtiene con eso?

A10: Obtengo las dos alturas.

I: ¿Cuál es el valor del área de cada triángulo?

A10: Como tengo una base de longitud 2 y una altura 8, me remito a aplicar la fórmula del triángulo para hallar el área, en el primer triángulo lo que hallo es la altura que como dije es 8 y la base es 2 hallo el producto y por fórmula lo divido entre 2, y así obtengo el área de un triángulo y me da igual a 8, como voy a hallar es toda el área encuentro un triángulo por debajo y otro por encima, luego sumo las dos áreas y me daría un área total de 16 unidades de medida cuadrada.

I: ¿Por qué suma las áreas?

A10: Porque me pide que halle el área que está formada por esa función y el eje X.

I: ¿Qué valor obtuvo al calcular la integral?

A10: De acuerdo a la integral definida, en este ejercicio obtengo el mismo valor.

I: ¿Cuál es el mismo valor?

A10: Por geometría obtuve 16 unidades de medidas cuadradas y por la integral definida obtuve las mismas 16 unidades cuadradas.

I: ¿Qué le piden calcular el área o calcular la integral?

A10: En la pregunta me piden calcular la integral.

I: ¿Cómo calcula la integral?

A10: ¿Calcular la integral? Bueno, es una integral definida, aquí me remito es hacer unas operaciones.

I: ¿Por qué obtuvo 16 al calcular la integral?

A10: Porque, hay una operación que dice ¿Cómo se resuelve una integral definida? Y eso es lo que me piden que haga, entonces implícitamente qué es lo que hago, cojo esa integral y le aplico ese proceso para resolverla, que es hallar una antiderivada de la función que me dan para integrar, para que calcule la integral de $4x$.

I: ¿Qué valor obtuvo al calcularla?

A10: 16 unidades de medida cuadradas.

I: ¿Está de acuerdo con ese valor?

A10: Si estoy de acuerdo.

I: ¿Por qué habla de unidades cuadradas?

A10: Porque estamos hablando de un área.

I: ¿Está seguro?

A10: Si estoy seguro.

I: ¿Seguro de qué?

A10: Que en este momento voy a hallar un área.

I: ¿Qué le piden en el ejercicio?

A10: Acá me están hablando de una región.

I: ¿Qué le piden en el ítem $2c$?

A10: Me dicen que calcule la integral.

I: ¿Entonces?

A10: Entonces, hay un error conceptual.

I: ¿Por qué, dónde esta el error?

A10: Para mi, el error es conceptual.

I: ¿Cuál es?

A10: Porque primero me remití a hallar un área, no se porque lo hice geométricamente y cuando calculo la integral tengo que comparar un área y el error es que a mí en ningún momento me dijeron que hallara un área.

I: ¿Qué relación hay entre esa área geométrica y esa integral?

A10: La relación es que geométricamente puedo hallar un área y con la integral también, esa es la relación como más exacta.

I: ¿Es lo mismo calcular el área gráficamente que resolver la integral indicada?

A10: Si me piden que halle esa área por medio de una integral si es lo mismo, pero si me piden que halle una integral, no es lo mismo.

I: ¿Está de acuerdo con el procedimiento que utilizó?

A10: No, aquí cometí un error porque resolví algo y llegue a una respuesta que no me estaban pidiendo.

I: ¿Significan lo mismo, el área y la integral definida?

A10: No, no significan lo mismo.

I: ¿Se puede decir que el área es igual a la integral? ¿Por qué?

A10: ¿El área es igual a la integral definida? No es igual.

I: ¿Por qué?

A10: Porque es que la integral sirve para hallar un área, pero no estoy diciendo que una integral es igual a un área lo que estoy diciendo es que se puede aplicar para hallar un área.

I: ¿Qué relación hay entre ese número dado por la integral y el que puede calcular del área?

A10: La relación es que es igual, pero que no significan lo mismo.

I: ¿Qué quiere decir que es igual, pero que no significan lo mismo?

A10: En valor numérico es el mismo, pero puede tener otra connotación, otro significado.

I: ¿Cuál es la diferencia ente calcular el área y calcular una integral definida?

A10: ¿Cuál es la diferencia? Es calcular el área con la misma integral.

I: ¿Cuál es la diferencien ente calcular el área y calcular una integra definida?

A10: ¿Calcular el área? Venga a ver ¿La diferencia? La diferencia entre calcular un área y desarrollar una integral, es que no siempre al calcular una integral obtengo un área.

I: ¿Por qué?

A10: Porque puedo usar la integral para otras cosas y no siempre es para hallar un área, entonces usted me puede poner por ejemplo a que desarrolle un proceso, hacer una operación.

I: ¿Qué puede concluir de los dos resultados obtenidos?

A10: ¿De los valores numéricos?

I: Si.

A10: Ya entendí, lo que puedo concluir es que con otros procedimientos como geométricos y aritméticos se puede llegar a obtener los mismos a valores que con la integral.

I: ¿Qué puede concluir con los dos resultados que obtuvo?

A10: Una igualdad

I: ¿Por qué son iguales? ¿Está de a cuerdo?

A10: Estoy de acuerdo en que llevan a un mismo valor, porque signifiquen lo mismo los dos resultados.

I: ¿Por que?

A10: Estoy de acuerdo, porque en el primer procedimiento me limite hallar el área y en el segundo aunque resolví la integral sin pensar que era un área, obtuve el mismo valor.

I: ¿Considera que la integral está bien calculada?

A10: Este bien calculado, porque lo que hice fue que conociendo el método anterior y el valor obtenido, volví a calcular la misma integral pero aplicando otra operación.

I: ¿Pero que le pedían calcular la integral o calcular el área?

A10: Calcular el área.

I: ¿Está bien calculada esa integral?

A10: si

I: ¿Por qué?

A10: Porque, obtuve el mismo valor con otro método.

I: ¿Por qué tenia que obtener el mismo valor?

A10: Porque estoy aplicándole a una misma función diferentes métodos

I: ¿Pero qué le pedían, en cada ítem de la pregunta?

A10: Me decían solamente que calculara una integral y en la otra pregunta me decían que calculara gráficamente el área de la región.

I: ¿Tienen que ser iguales los dos resultados?

A10: Si.

I: ¿O es lo que usted piensa?

A10: No, dieron iguales y debe de ser así.

I: ¿Por qué debe de ser así?

A10: Porque trabaje con los mismos datos que me dieron en un problema y en el otro, por eso debe dar igual.

PREGUNTA Nº 3.

I: ¿Sabría comentarme como ha resuelto la tarea número 3?

A10: La tarea número tres dice que hay una región entre la gráfica de la función $f(x) = x^2$ y el eje X, en el intervalo $[0, 4]$, me piden que utilice particiones para aproximar el valor del área de la región, si grafico lo que encuentro es un área que está bajo una curva y el eje X y me dieron la longitud donde se encuentra esa área, además me dicen que use particiones para poder aproximar el área.

I: ¿Cómo divide el intervalo en subintervalos?

A10: Lo que pienso es hacer particiones de ese intervalo en subintervalos.

I: ¿Qué son las particiones?

A10: Es dividirlo.

I: ¿Para qué lo hace?

A10: Lo divido para hacer construcciones.

I: ¿Qué busca con esas construcciones?

A10: Hacer construcciones geométricas.

I: ¿Para qué?

A10: Para formar rectángulos.

I: ¿Para qué quiere esos rectángulos?

A10: Para hallar el área, porque es más fácil hallar el área de un rectángulo, entonces por eso lo que hago es construir rectángulos.

I: ¿Cuántos rectángulos?

A10: n rectángulos.

I: ¿Para qué n rectángulos?

A10: Para conseguir los rectángulos que más pueda.

I: ¿Eso qué le permite?

A10: Es que los rectángulos bajo el área de esa región tienen en la parte recta un rectángulo, ahora cuando hablamos de rectángulo es porque no estamos hablando de figuras geométricas con parte recta.

I: Si.

A10: Ahora, construyo rectángulos porque sé hallarles el área que va desde el eje X hasta la curva de la función que es donde esta el área, por qué construyo rectángulos para poder hallar el área de esa cantidad de rectángulos como un área general, eso es lo que se me ocurre en este ejercicio, es hacer una partición del intervalo en n partes y tengo una longitud n, y lo que voy a hacer es particionarlo en partes mucho más pequeñas.

I: ¿Para qué hace eso?

A10: Para la construcción de los rectángulos, es decir para subdividir el intervalo.

I: ¿Qué valor obtendría de eso?

A10: ¿Que valor?

I: Si.

A10: Como a qué quiero llegar, más bien a qué quiero llegar.

I: Si.

A10: Lo que quiero es construir tantos rectángulos, de tal forma que la base quede muy pequeña.

I: ¿Qué sucede cuando los intervalos de la partición se hacen cada vez más pequeños?

A10: Que me llevan a una aproximación mas exacta.

I: ¿Cuándo se aproxima más al área, cuando usas más o menos particiones?

E. Cuando uso más.

I: ¿Por qué?

A10: Cuando uso más porque entre más pequeña sea la longitud de la base del rectángulo que estoy construyendo más se aproxima a la curva que es donde se encuentra la región sombreada.

I: ¿De qué otra forma diferente a la anterior podría calcular el área bajo la gráfica?

A10: ¿De qué otra forma? Haciendo uso de la integral definida.

I: ¿Cuál seria la integral definida, ahí?

A10: Pues tengo la función $f(x)=x^2$ y tengo el intervalo donde se encuentra definida esa función que es $[0,4]$, estos serian los límites de integración de esta función, entonces puedo llevar eso a la siguiente integral definida: $\int_0^4 f(x^2)dx$, al aplicar una operación obtengo que eso es igual al cubo de x sobre 3, y eso lo debo evaluar en el limite de integración para resolverla.

I: ¿Podría explicarme cómo ha resuelto esta parte del ejercicio del gráfico que tiene en su respuesta?

A10: Aquí me piden que haga una aproximación, lo que se me ocurrió fue construir 2 rectángulos como tengo la longitud del intervalo que es de 4 unidades, lo que hice fue dividir eso en 2.

I: ¿Qué le permite eso?

A10: Me permite formar 2 rectángulos, un rectángulo tiene de altura 4, como tengo el valor de la base reemplazo ese valor en la ecuación original que es el cuadrado de x.

I: ¿Y qué obtiene?

A10: La altura de un rectángulo y luego hago lo mismo con el siguiente porque tengo construidos los 2 rectángulos y conociendo la base y la altura, hallo el área de los 2 rectángulos.

I: ¿Qué puede concluir de los valores obtenidos en los diferentes procedimientos?

A10: Lo que puedo concluir es que son aproximaciones de esa área, como tengo 2 aproximaciones en el segundo procedimiento sumo esas 2 áreas y obtengo otra aproximación, entonces lo que puedo concluir de esos 2 métodos es que no son eficaces para hallar un área bajo una curva.

I: ¿Por qué?

A10: Porque en cuestiones geométricas, en este caso lo que usa son rectángulos, donde se encuentra que la gráfica es una curva, entonces me quedarían rectángulos pero en una parte de la curva.

PREGUNTA Nº 4.

I: ¿Puede explicarme cómo ha resuelto la tarea número 4?

A10: El ejercicio número 4 nos dice *(El estudiante lee la pregunta) Calcula el área limitada por la gráfica de la función* $f(x)=|2x-1|$, *en el intervalo* $[0, 2]$ *y el eje* x, lo que hice aquí primero que todo fue una construcción geométrica.

I: ¿Podría decirme como ha esbozado el gráfico de la función f ?

A10: Si por supuesto, lo que hago acá es darle valores a la función para obtener los cortes en el eje x, no, ya los tengo.

I: ¿Cuál es el corte en el eje x?

A10: El intervalo $[0 , 2]$, como quien dice el corte en el eje x es el 2.

I: ¿De dónde obtiene 2?

A10: Me remito acá, no acá tengo un error, tengo el intervalo que es $[0\,,2]$, lo que hago es reemplazar esos valores, venga miro acá una cosa (*el estudiante susurra*), lo que hago es hallar los cortes, lo que puedo hacer es que como la función es $f(x)$ es igual a $2x-1$, puedo darle valores a x, en el primer caso le doy el valor de $x=0$, para obtener el corte en el eje, hago $y=0$ y logro el corte en el eje x.

I: ¿Para qué hace esto?

A10: Para hacer el bosquejo de la gráfica, porque lo que entiendo con la función que me dan es que la gráfica es una línea y con eso obtengo la gráfica de la función que es la línea, y como tengo los cortes en el eje x lo que hago es unir los puntos del intervalo

I: ¿Cómo calcula el área a partir de la representación gráfica?

A10: La calcule geométricamente

I: ¿Cómo geométricamente?

A10: En la gráfica lo que se me forman son 2 triángulos, uno por encima del eje X y otro por debajo, pero la función me dice que es valor absoluto.

I: Si

A10: Lo que hago es construir la gráfica y me aparece un triángulo por debajo y uno por encima, pero como me dicen que es el valor absoluto, entonces me remito a trabajar la parte positiva, a transponer el triángulo que esta por debajo del X, hacia arriba del eje X.

I: ¿Por qué?

A10: Porque me están pidiendo que halle esa área pero en valor absoluto y entiendo que el valor absoluto de una función, es su parte positiva y como encuentro que un área esta en la parte negativa de de la función del eje X.

I: ¿Cómo calcula luego el área?

A10: Al transponer la figura sobre el eje X, encuentro que se forman 2 triángulos y uno está seguido del otro y hallo el área de un triángulo aplicando la fórmula geométrica base por altura.

I: ¿Cuál es el área de cada triángulo?

A10: Encuentro que el corte del primer triángulo, tiene base de 0 a 0,5, entonces sé que la base es 0,5 del primer triángulo.

I: ¿Cómo obtiene la altura?

A10: La altura la obtuve cuando usted me dio la función original y encontré un corte en el eje Y, éste corte me está dando la altura de un triángulo.

I: ¿Qué altura?

A10: Me dio de altura 1 y base 0,5

I: ¿Qué área obtuvo de ese?

A10: Obtuve el área de 0,5 por 1 dividido 2

I: ¿Cómo obtuvo el área del segundo?

A10: Tengo un corte que es de 0,5, ahí nace el segundo triángulo de 0,5 y va hasta 2, o sea que la distancia mide 1,5.

I: ¿Cómo obtiene la altura?

A10: La altura, la obtuve reemplazando la función $2x-1$ y obtengo el corte en el eje X que es 2.

I: ¿Cuánto obtuvo de altura?

A10: Obtuve una altura de 3 en el segundo triangulo, la base es 1,5, al hacer el procedimiento base por altura dividido 2, luego el área total de ese que me están pidiendo es 2,5.

I: ¿Podría utilizar otro procedimiento para calcular el área, cuál?

A10: Otro procedimiento, como tengo la función y el intervalo donde está definida la función puedo aplicar la integral definida.

I: ¿Cómo plantearía la integral definida?

A10: La integral definida, tiene una propiedad.

I: ¿Qué propiedad?

A10: La propiedad aditiva

I: ¿En qué consiste?

A10: Consiste en que usted teniendo una función y teniendo los limites de integración puede tomar un valor x.

I: ¿Cómo seria podría plantearla?

A10: Usted, tiene una función definida en un intervalo y tomar un valor x que esté entre ese intervalo y plantear una integral de esa función de un punto dado de ese x que utilizo al otro extremo como quien dice coger un limite de integración y que en este caso seria el cero y utilizarlo hasta un x que se encuentre en el intervalo $[0\,,2]$, en éste caso utilizo el 0,5.

I: ¿De qué función?

A10: De la función original.

I: ¿Cómo seria esa integral?

A10: Tengo un corte que me dio 0,5, y 3 valores de x, el 0, el 0,5 y el 2 que se cuentan en ese intervalo, entonces aquí está definida la función también, luego tomo una integral de 0 a 0,5 de la función.

I: ¿Cómo expresaría esa integral?

A10: Expresaría la integral definida de 0 a 0,5

I: ¿De quién?

A10: De $f(x)$ que es igual pues a al valor absoluto de $2x-1$.

I: ¿Qué más haría?

A10: Aquí tengo sólo una parte, entonces lo que debo hacer ahora es sumarle.

I: ¿Qué le va a sumar?

A10: Otra integral definida que se forma.

I: ¿De dónde a dónde?

A10: Que seria del valor hasta donde el que tome que fue 0,5, que es un valor como opcional hasta el limite superior.

I: ¿Por qué es opcional?

A10: Porque puedo tomar otro valor, en este caso tomo solamente éste porque lo conozco.

I: ¿Por qué lo conoce?

A10: Porque este valor se encuentra dentro del $[0, 2]$.

I: ¿Qué representa ese 0,5 en la gráfica?

A10: Ese 0,5 un corte.

I: ¿Por qué lo toma, por ser opcional o por ser un corte?

A10: Acá, porque es un corte.

I: ¿De quién?

A10: De la integral de la función que usted me dio, valor absoluto de -1.

I: ¿Está de acuerdo con el planteamiento de de esas integrales?

A10: Si estoy de acuerdo.

I: ¿Está seguro de las expresiones que tiene dentro del integrando?

A10: Si señor, estoy seguro

I: ¿Al calcular esa integral, obtendría el mismo valor que el que obtuvo con el procedimiento geométrico anterior?

A10: Si

I: ¿Por qué?

A10: Porque aquí, estoy hablando de un área que geométricamente se puede hallar exacta, porque se encuentra formada por 2 figuras geométricas llamadas triángulos.

I: ¿Cómo calcularía esas integrales?

A10: ¿Cómo la calcularía? Me remitiría aplicar un procedimiento.

I: ¿Cómo define el valor absoluto de una función?

A10: Como la parte positiva de esa función, o como la parte que se encuentra sobre el eje X de esa función

I: ¿Y recuerda en este momento como integrar estas funciones?

A10: En este momento no recuerdo como se integra estas funciones.

PREGUNTA Nº 5.

I: ¿Cuando le dicen que aproxime un área que hace en la pregunta número 5?

A10: Para aproximar un área puedo buscar un método.

I: ¿Podría explicarme como aproxima el área de la pregunta 5?

A10: Me dicen que tengo la función $f(x) = 2x - x^2$ y encuentro que se forman 2 áreas.

I: ¿Cómo calcula el valor de esta área por aproximación?

A10: Para aproximación, puede ser por un triángulo

I: ¿Cómo seria por un triángulo? Podría dibujarlo.

A10: La función que me están dando, está representando un área bajo la curva, hay una parte que refleja un triángulo, un segmento de ese triángulo un lado que es semicurvo, una aproximación aquí seria hallar el área bajo la curva y puedo aplicar el método de la integral definida.

I: ¿Qué le piden, aproximar el área o calcular el área?

A10: Me están diciendo que calcule por aproximaciones el área de la región rayada, en este caso lo que me toca hacer es calcular no aproximar.

I: Calcular por aproximación

A10: Ah, si.

I: ¿Qué puede hacer?

A10: Aquí tengo 2 áreas, que las veo como en 2 tramos, el primer tramo es un área que está comprendida bajo la curva y el eje X, para esta área puedo usar un una integral definida, porque tengo la función y el intervalo donde se encuentra definida la función, hay otra parte de esa región que forma como un triángulo y geométricamente podría aproximar más el área a partir de ese triangulo.

I: ¿Cómo serian las gráficas?

A10: Puedo tomar primero esta integral la de la función que me dieron

I: ¿Por qué utiliza sólo la integral y no otro procedimiento?

A10: Porque es el más preciso.

I: ¿Qué le piden calcular el área o aproximar el área?

A10: Me dicen aproximarla, pero es más fácil realizar este procedimiento por medio de una integral definida que por otro método.

I: ¿Qué puede concluir de los resultados obtenidos al aproximar el área utilizando las figuras que señaló y al calcular la integral?

A10: Si procedo haciendo uso de dos métodos, el geométrico y por medio de la integral, en el geométrico obtengo una aproximación, pero si me remito solamente a usar lo que es la integral definida, obtengo una respuesta más precisa.

PREGUNTA Nº 6.

I: ¿Podría explicarme que quiere decir con el razonamiento que ha utilizado en la pregunta número 6 y cómo demostraría la propiedad desde el punto de vista gráfico?

A10: Me están dando 3 funciones, sus gráficas y las integrales de esas funciones con su respectivo intervalo, no están definidas.

I: ¿Cómo podría a partir de la gráfica demostrar que se cumple esa igualdad o propiedad?

A10: Bueno venga a ver.

I: ¿De dónde hasta donde va horizontal y verticalmente cada función, cómo la graficaría?

A10: Las tres funciones se encuentran en el mismo intervalo, en el intervalo de 0 a a, la primera gráfica que observo es una recta.

I: ¿Podría esbozar la gráfica?

A10: Por separado.

I: Si.

A10: Esta es una gráfica que me dan y me están diciendo que es como si a esa variable de la función le hubiera aplicado como un procedimiento.

I: ¿Qué quiere decir como un procedimiento?

A10: Haberle aplicado un cambio, tengo una variable normal que es x y la elevo al cuadrado, lo que encuentro es un cambio y eso es lo que encuentro acá, después me aparece otra función y su gráfica tiene un comportamiento algo similar, sólo que está cambiando es la concavidad, a la variable independiente de la función se le esta aplicando un procedimiento, primero la variable x se elevó al cuadrado, en el segundo caso se le sumo a la variable que está al cuadrado la primera función que es $y = x$, y se obtuvo otra gráfica y que encuentro con eso que la grafica esta como cambiando de sentido, es decir cada que modifico la variable la gráfica de la función cambia.

I: ¿En término de áreas cómo demostraría la igualdad?

A10: La igualdad del área.

I: ¿Podría justificar numérica y o gráficamente la igualdad sin usar integrales?

A10: No.

I: ¿Por qué?

A10: Porque si quiero demostrar lo que me están pidiendo aquí, es hablar de áreas y es como le decía anteriormente.

I: ¿Pero ahí, no le hablan de áreas?

A10: Usted me pedía que mostrara el área.

I: Podría sombrear y comparar las áreas que representa la gráfica de cada función.

A10: Si por supuesto, puedo comparar las áreas

I: ¿Qué concluye al compararlas?

A10: Que puedo sombrear cada gráfica que se me forma por cada función y utilizar para cada función la integral definida.

I: ¿Por qué?

A10: Porque es una forma de obtener un valor numérico.

I: ¿Para qué quiere el valor numérico?

A10: Para mirar la igualdad de las tres funciones.

PREGUNTA Nº 7.

I: ¿Qué razones tiene para dar el valor de verdad de cada proposición en la pregunta numero 7?

A10: En la primera respondí que es verdadero.

I: ¿Por qué?

A10: Por lo que me están diciendo.

I: ¿Cuáles son los criterios que lo llevan a este razonamiento?

A10: Los criterios que me llevan al razonamiento es el método de cómo se resuelve una integral definida

I: ¿Qué elementos matemáticos hay implícitos en esta proposición?

A10: Implícitos, derivadas e integración.

I: ¿Cómo justifica el valor de verdad de la proposición 7b?

A10: ¿Cómo lo justifico? Me están diciendo hay una función continua y definida en un intervalo y que entonces f, es integrable en cada intervalo, justifico que si es verdadero, porque eso es una condición que debe cumplir una función para poderla integrar.

I: ¿Con qué elementos matemáticos justifica esa proposición?

A10: Un elemento que me respalda es la integral definida.

I: ¿Por qué?

A10: Porque la integral definida plantea esa condición.

I: ¿Qué conceptos hay en esa proposición?

A10: Me esta diciendo que si f es continua en un intervalo $[a, b]$, entonces f es integrable.

I: ¿Entonces, qué conceptos se manejan aquí?

A10: Continuidad e integrabilidad.

I: ¿Cómo justifica el valor de verdad que le dio a la proposición 7c, por qué considera que es falso?

A10: Considero que es falso porque me remito a me plantear una integral y al valor que debe dar y al desarrollarla me da un valor diferente al que me presentan.

I: ¿Qué valor obtuvo?

A10: 2, y el valor que da el ejercicio es -2.

I: Considera que el problema está es en el signo de la respuesta.

A10: En el signo no, en el desarrollo.

I: ¿Qué quiere decir en el desarrollo, en qué varia el desarrollo planteado en la proposición y el que usted hace?

A10: Un procedimiento

I: ¿Esta de acuerdo con el procedimiento que usted realizó?

A10: Si estoy de acuerdo.

I: ¿Qué elementos del cálculo integral se aplicaron en el desarrollo de esa integral?

A10: El concepto que más se aplico fue el de integral.

I: ¿Aparece alguna regla en especial del cálculo integral, ahí?

A10: No

I: ¿Por qué?

A10: Porque es hablar del concepto que aparece implícito aquí, el de la integral definidla.

I: ¿Por qué?

A10: Porque es el centro del calculo integral.

I: ¿No encuentra ningún problema o dificultad al resolver la integral de esa función?

A10: No

I: ¿Por qué?

A10: Porque es una función.

I: ¿Qué función tiene, puede leer la función?

A10: x.

I: ¿Podría escribirla?

A10: x^{-2} x^{-2}

I: ¿Qué seria eso?

A10: La función que me están pidiendo que integre en el intervalo $[-1,1]$ y una forma de resolverla primero que todo es…

I: ¿Cómo puedo expresar la nueva expresión que escribió de la función?

A10: La nueva expresión es la integral definida desde -1 a 1 de la función 1 sobre el cuadrado de x.

I: ¿Qué tipo de función es esa?

A10: Es una función…

I: ¿Entre qué valores esta integrándose esa función?

A10: Entre -1 y 1.

I: ¿Dónde esta la variable?

A10: Esta en el denominador, bueno el problema que encuentro acá, que detecto.

I: ¿Hay algún problema, cuál es el problema que detecta?

A10: El problema es que para integrar una función en un intervalo dado, la condición inicial es que la función debe de estar definida.

I: ¿Qué pasa en la proposición si el denominador se hace cero?

A10: Aparece una indeterminación.

I: ¿Puede aplicar la misma regla?

A10: No para una integral definida.

I: ¿Cómo lo haría?

A10: ¿Cómo lo haría?

I: ¿Por qué no puede aplicar la misma regla?

A10: Porque la primer condición es que para integrar una función debe estar definida en todos los x de un intervalo.

I: ¿Qué problemas encuentra para integrar esta función?

A10: El problema que encuentro es que no está definida en $x = 0$

I: ¿Por qué?

A10: Porque el valor de cero está en el intervalo y la función debe estar definida en todos los puntos de ese intervalo.

I: ¿Qué es lo que no se puede aplicar?

A10: ¿Qué no puedo aplicar?

I: ¿Qué está mal aplicado en la solución de ese ejercicio?

A10: Lo que esta mal aplicado en ese ejercicio, es el procedimiento para resolver una integral definida.

I: ¿Qué elementos matemáticos están aplicando en ese procedimiento?

A10: Antiderivadas.

I: ¿Y qué más?

A10: Lo que hice fue rescribir esa función.

I: Si.

A10: Al rescribirla encuentro que no puedo integrarla.

I: ¿Está de acuerdo con el valor que le había dado?

A10: Con este razonamiento que acabo de hacer, no.

I: ¿Qué valor le dio a la proposición?

A10: Dije que era falso.

I: ¿Esta de acuerdo que la proposición sea falsa?

A10: Si.

I: ¿Por qué continúa considerando que la proposición es falsa?

A10: ¿Por qué sigue siendo falsa? Porque no se puede integrar.

I: ¿Y la razón es la que había dado del signo o la discontinuidad en $x = 0$?

A10: La razón es la discontinuidad.

I: ¿Por qué?

A10: Porque para poder integrar una función debe ser continua.

PREGUNTA Nº 8.

I: ¿Cómo le explicaría a un compañero el significado de la $\int_a^b f(x)\,dx$?

A10: A un compañero de mi nivel académico.

I: Si, o a una persona que quisiera explicarle el significado de esa integral ¿Qué haría?

A10: Me remontaría hablarle de lo que es el proceso límite de lo que es la partición de un intervalo de la suma de áreas y de aproximaciones, para luego hacerle entender que una integral definida como la que me presentan acá, es una suma.

I: ¿Una suma de qué?

A10: Puede ser una suma de áreas, o de lo que sea, pero el principio es que la integral definida es una suma para mí.

I: ¿Por qué es una suma?

A10: Pienso que es una suma porque de aquí surge la integral, de un problema de hallar sumas, pero no encontrar un valor exacto sino aproximaciones en ciertos casos, como en el caso de sumar áreas que están bajo una curva, donde no se puede definir con exactitud un valor numérico, pero es una suma de áreas, que puede ser más precisa.

I: ¿Cuál es su propia definición de integral definida?

A10: La integral definida es un operador.

I: ¿Qué quiere decir que sea un operador?

A10: Es un operador que cumple con unas características, propiedades, condiciones y actúa sobre las funciones.

I: Si tuviera que explicarle a alguien o buscar la forma que un estudiante llegara a comprender el concepto de integral definida ¿Qué pasos seguiría para lograr en él que pudiera adquirir, ese concepto?

A10: Un paso seria no conducirlo a que desarrolle áreas con una integral definida, porque el estudiante termina pensando es que una integral definida, es un área.

I: ¿Cuáles serian los pasos que usted utilizaría?

A10: Me remontaría más atrás.

I: ¿Qué haría más atrás?

A10: Le hablaría de límites, cuando él entienda qué es un límite.

I: ¿Comenzaría directamente con un limite?

A10: Le enseñaría como se aproximan unas áreas por medio de sumatorias, lo iría llevando secuencialmente hasta que el note que con esos métodos no hay precisión, entonces hay que hacer uso de otro para llevarle a lo que es la integral definida, seria una forma de hacerle entender, para cuando hagamos aplicaciones sepamos que estos métodos se van suprimiendo, por unos más precisos, cosa que otros métodos no lo son, pero no le enseñaría hallar una área con la integral definida en primer momento, como hacen en otras carreras cuando hallan masas, volúmenes y otros y termina el estudiante pensando que eso es una integral definida.

I: Muchas gracias.

A10: De nada profesor, a usted.

ENTREVISTA (A11).

PREGUNTA Nº 1.

I: ¿Podría explicarme como obtuvo esta respuesta de la pregunta número1?

A11: Bueno, lo primero que hice o se me vino a la mente fue formar el rectángulo de base 6 y de altura 2, el cual me daba 6, después se me estaba formando otro triángulo rectángulo que era de base igual a 6, pero ya de altura seria igual a 6 y por último lo que hice fue sumar esas dos áreas de esos dos, del triángulo y del rectángulo.

I: ¿Por qué utilizó esos argumentos para justificar las cotas de esa forma?

A11: Me pareció que era como la manera más exacta o la más aproximada al área de la curva.

I: ¿Existe otra forma más exacta de ajustar las cotas?

A11: Viéndolo acá, pensaría que básicamente sería lo mismo que en el trapecio, prácticamente la misma área.

I: ¿Cómo seria con el trapecio, podría explicarlo?

A11: Seria el trapecio formado, de base igual a 6, de altura igual a 8, de la semibase pequeña seria 2 de altura y la diagonal, me quedaría ya formando como el trapecio, tendría la base, la semibase, la altura y simplemente aplicar la fórmula (*el estudiante grafica en una hoja de respuestas*).

I: ¿Podría calcularlo?

A11: Si, porque el área de un trapecio simplemente es igual a la semisuma de las bases en éste caso $8+2$, por la altura que es 6 y dividido sobre 2, 30 que seria la fórmula: $\frac{(8+2)\times 6}{2}=30$, aquí obtengo la misma respuesta que me dio formando el área de los dos triángulos.

I: ¿Puede utilizar otros métodos para aproximar el área, cuáles?

A11: ¿Más aproximados no, más aproximados no se me viene a la mente?

I: ¿Cómo cree que podría conseguir mejores aproximaciones del área, con rectángulos más grandes o más pequeños?

A11: Haciendo rectángulos más pequeños.

I: ¿Cómo seria, podría indicarlo?

A11: El problema lo tengo es en esta curva, lo que haría seria simplemente tomar la recta $y=6$ y la recta $x=4$, entonces daría el área de ese rectángulo, porque tendría la base, la altura, no hay problema, hallaría esa área y tendría una porción más aproximada de un pedazo de la curva de la figura, y repitiendo ese proceso debería hallar el área.

I: ¿Cómo continuaría el procedimiento del área bajo la curva?

A11: Entonces, simplemente lo que haría es disminuir la recta “ y ” o sea la recta $y=6$, la empiezo a disminuir.

I: ¿Cómo seria?

A11: O sea, ya no la tomo $y = 6$, sino valores más pequeños $y = 5$; $y = 4$.

I: ¿Cómo seria, indique cada paso?

A11: Ya tomé la recta $y = 6$, ahora voy a tomar la recta $y = 5$ y lo que hago es mover un poquito la recta x, igual que en éste caso la tomé como $x = 4$, luego un poco más, $x = 5$ y calculo el área de ese rectángulo.

I: ¿Podría subrayar el área en la gráfica?

A11: Espere lo hago aquí bien bonito, porque es que como se supone que la curva viene así, entonces lo que digo, es que cada vez que bajo esta recta estoy formando este triangulito, voy dando exactamente un área más aproximada de la curva (*el estudiante grafica en una hoja de respuestas*).

I: ¿Cómo seria, cuántos rectángulos trazaría?

A11: ¿Cuántos rectángulos? Construiría unos 7 rectángulos, para sacar un área más o menos aproximada.

I: ¿Cómo seria, hágalo por favor?

A11: A ver, de paca puede ser 1, por acá puede ser el otro.

I: ¿Cómo son esos rectángulos?

A11: Las dimensiones o la pregunta ¿Cómo geométricamente?

I: ¿Cómo son geométricamente?

A11: A ver ¿Cómo le explico acá?

I: ¿Cómo son sus áreas?

A11: Sus áreas son menores a medida que tomo el valor de “ x ” más grandecito y “ y ” más pequeño, el área se va reduciendo.

I: ¿Cómo calcularía el área de cada uno de los rectángulos?

A11: Al trazar la recta me quedaría formando aquí el que tengo, tengo la base que en éste caso seria 4 y tengo la altura que la llame “ y ”.

I: ¿Por qué 4?

A11: Porque estoy tomando el x más pequeñito, estoy formando rectángulos moviendo el eje X en el intervalo de 3 a 9, entonces este pedacito lo tomé hasta acá, vale 3 y lo dividí hasta 4.

I: Si.

A11: Tengo la base que vale 1, tengo ésta que la llame $y = 6$, entonces a parte más aproximada no hay problema, 6 la altura, tengo $y = 6$, entonces un triángulo va a ser igual a 6 que seria el primero.

I: Saque los valores.

A11: Una forma más aproximada del primero seria tener ya un rectángulo de área 6, el segundo lo que hago es la recta $y = 6$, la bajo una unidad, y tendría la altura que es 5 y la base lo que hago es correr la recta $x = 4$, la corro hasta 5, y tengo la base igual a 1, entonces ya tengo una área de 5 (*el estudiante escribe los valores en la gráfica que va trazando*).

I: ¿Cómo sería con el siguiente?

A11: Repito el proceso hasta llegar más o menos al área, hasta el intervalo, hasta la recta $x = 9$.

I: ¿Cuánto daría el área aproximada de esos rectángulos?

A11: Aquí, seria 5, aquí me daría 4, el otro seria 4, para éste se supone que debería ser 3, porque acá va bajando, va a llegar a un punto en que y vale 2 y vale 1, el área de eso seria, 6; 11; 6; 11; 15; 18; 21; 22; 22, así aproximada 22 y me faltaría calcular el área, que se está formando entre la curva y la recta $y = 6$ y la curva en la parte superior.

I: ¿Podría escribir el valor que obtuvo anteriormente?

A11: A la suma de esas áreas.

I: Si.

A11: Seria 11; 20; 11; 15; 18; 20; 21

I: ¿Qué le falta?

A11: Me faltaría calcular el área formada por el la recta $y = 6$ y la curva que está cayendo en el intervalo de esa curva $y = 6$ y $y = 8$.

I: ¿Cómo la calcularía?

A11: Para mi, seria prácticamente repetir el procedimiento, e ir corriendo la "y" lo mismo, simplemente lo que hago es bajar la "y" en ese intervalo de 2, lo empiezo a bajar y a formar triangulitos, rectangulitos y tomar esas áreas que me van quedando en ese pedacito.

I: ¿Cuánto le daría esa área aproximada?

A11: Toca calcularla.

I: De ese triangulito.

A11: Ese.

I: ¿De qué otra forma podría calcularla?

A11: Es que la más aproximada seria la de los rectangulitos.

I: ¿Cuánto le daría aproximadamente?

A11: Una forma no tan aproximada seria la del triangulito, esa siempre no es muy aproximada, la más aproximada seria la de los rectangulitos.

I: ¿Cómo calcularía le de los rectangulitos?

A11: Es el mismo procedimiento de la anterior, lo que hago es bajar la recta $y = 8$, la empiezo a bajar a tomar valores en 7 y en ese intervalo que va de 3, lo tengo de 3 a 4, porque acá supuse que valía, de 3 a 4, por acá va el 4, de 3 a 4, lo que hago es trazar triangulitos la altura la conozco, que en este caso me esta valiendo 2.

I: ¿Cuál es la base?

A11: La base me estaría valiendo menos de la unidad, puede ser $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$.

I: ¿Cuál seria un área aproximada, de ese triangulito?

A11: Un área muy aproximada, seria tomar la base muy pequeña, un valor muy pequeño y la altura lo más grandecita que pueda, en este caso lo más grande seria 2, para el área más aproximada de esa parte, tendría que tomar unos rectangulitos de base muy pequeña y de altura pues lo más grande posible, que en este caso seria 2, para calcularle el área a esa parte y cuánto, depende del valor de la base con que los haga, pueden ser 10, 20.

I: ¿Podría aplicar otro procedimiento diferente que le permita una mejor aproximación del área y que justifique más las cotas?

A11: No creo, para mí el más exacto seria el de los rectangulitos.

I: ¿Por qué?

A11: Porque, ese es exactamente el procedimiento que se hace cuando se va a demostrar y a comprender lo que es el área entre curvas.

I: ¿Qué clase de rectángulos trazó, cómo son esos rectángulos, están por encima del área o por debajo?

A11: Estos rectángulos que estoy trabajando están debajo del área, están por debajo de la curva, dentro del área que estoy trabajando, estos rectángulo se llaman rectángulos inscritos.

I: ¿Por qué se llaman inscritos?

A11: Porque están dentro, o sea no están fuera de la curva.

I: ¿Qué le daría una mejor aproximación, los inscritos o los circunscritos?

A11: Creo que los inscritos.

I: ¿Por qué?

A11: Porque en eso no tengo perdida de área

I: ¿Qué otro procedimiento se le ocurriría para aproximar el área?

A11: Aparte de estos rectángulos.

I: Aparte de los procedimientos que ha utilizado y de lo que me acaba de contar.

A11: No, en este momento no pensaría en un procedimiento más aproximado, no conozco, no se me viene a la mente.

I: ¿Qué le hace falta por aproximar de esa área bajo la curva?

A11: Seria el valor aproximado de esto.

I: ¿Qué valor aproximado daría incluyendo la parte del triángulo?

A11: Cuando plantee el ejercicio medio 30, y con lo que acabo de hacer se ve que el área de 30 es demasiado grande, porque tendría que ser que esta área del pequeñito valdría 9 y la verdad no creo que valga 9, le pongo un valor aproximado de 6, 5 unidades cuadradas.

I: ¿Cuánto sería el área aproximada para esta gráfica?

A11: Para toda la gráfica, seria 25, 26.

I: ¿Cuánto le agregaría a ese 21 y cuál seria el total?

A11: Entonces, el área total seria igual a 21 unidades cuadradas, más 5 unidades cuadradas seria 26 unidades cuadradas.

PREGUNTA Nº 2.

I: ¿Puede explicarme cómo ha resuelto la tarea número 2?

A11: Bueno, lo primero que hice como me pedían graficar, fue entonces simplemente graficar, no hay nada del otro mundo, grafiqué sencillamente.

I: ¿Qué figura se formó bajo la gráfica de la función?

A11: La gráfica de $y = x$, simplemente lo que me forma es lo que se conoce como la función identidad y el área que se forma es la de dos triángulos.

I: ¿Cómo obtuvo el área gráficamente?

A11: Gráficamente, lo que hice fue tomar los 2 triángulos que me formaban la base igual a 2 y la altura recuerdo que es 8.

I: ¿Cómo obtuvo la altura?

A11: Muy sencillo, porque lo que se hacia aquí, era la gráfica y me daban el intervalo, luego lo que hice fue tomar la recta $y = 2$; $x = 2$, y trazar una perpendicular en donde me cortara la gráfica en ese punto y esa era la altura.

I: ¿Qué otra forma tiene de obtener la altura?

A11: ¿Qué otra forma tengo?

I: ¿De que otra manera puede obtener la altura?

A11: Seria resolviendo el sistema de ecuaciones, estoy pensando en resolver el sistema de ecuaciones.

I: ¿Por qué resolver el sistema de ecuaciones, cuáles ecuaciones?

A11: Tengo la función y la gráfica de $y = 4x$ y la recta $x = 2$ y con eso alcanzaría a ubicar el punto de corte entre esos puntos.

I: ¿Cómo sería?

A11: Lo que haría sería usar el método de igualación, que me queda más fácil y tengo el sistema de ecuaciones: $y = 4x$ y $x = 2$, aplicando el método de sustitución que es el más fácil, me quedaría que y igual, cuando x vale 2, me quedaría 4 por 2 ocho, entonces tengo el punto de corte en $y = 8$ que es lo que me están dando.

I: ¿Cómo y cuánto obtuvo de área gráficamente?

A11: ¿Total?

I: Si.

A11: Lo que hice, fue que el área del primer triángulo era la base que es 2 por altura que es 8, 16 dividido 8 me daba 8, dije que los triángulos eran semejantes por criterios de semejanza.

I: ¿Cuáles son los criterios de semejanza?

A11: Lo que maneje aquí, fue el criterio de Lado Ángulo Lado (L, A, L), por eso le puse que las áreas eran iguales, porque los triángulos eran semejantes.

I: ¿Qué relación puede establecer entre el área de la región bajo el eje OX y la región formada sobre el eje OX ?

A11: Venga, perdón ¿Cuál es la relación?

I: ¿Qué puede establecer entre la región que esta por encima y la que esta por debajo del eje OX ?

A11: Es como área, la relación que hay, pues que son iguales.

I: ¿Por qué son iguales?

A11: Por los mismos criterios que le maneje ahora.

I: ¿Qué puede concluir de ese procedimiento geométrico?

A11: Que una cosa es calcular áreas y otra cosa muy distinta es calcular integrales.

I: ¿Cuánto obtuvo hablando de áreas y cuánto obtuvo al calcular la integral?

A11: Cero.

I: ¿Por qué?

A11: Porque resulta que no me piden calcular el área formada por la curva $y = 4x$ en el intervalo -2, 2, simplemente lo que me dicen es calcule la integral y entiendo que la integral definida es un número, entonces obviamente al calcular la integral me iba a dar un número, pero no me estaban preguntando que calculara el área formada por esa curva que era ya otra cosa muy distinta, por eso al calcular la integral me daba cero, pero como área no era cero.

I: ¿Que relación hay entre esa área geométrica y la integral?

A11: Eso depende, porque la relación está en que si me piden que calcule el área, pero si me dicen que calcule la integral no le vería la relación, porque como área me está dando un valor, pero como integral al calcular la integral me esta dando otro.

I: ¿Significan lo mismo el área y la integral definida?

A11: ¿significan lo mismo el área y la integral definida? No.

I: ¿Por qué?

A11: Porque, cuando hablamos de área ya estamos hablando como de una superficie, cuando hablamos de integrales estamos hablando de números que no necesariamente tienen que representar un área, pueden representar muchas cosas, entonces no puedo decir que el área es igual a una integral, sólo si la contextualizo, pero por definición no es igual.

I: ¿Por qué al calcular el área dio un valor y cuando calculó la integral dicho valor dio cero?

A11: Por lo mismo, porque la pregunta no estaba enfatizada en calcular el área, me pedían era resolver la integral y como repito la integral definida para mi es un numero, entonces lo que me iba a dar era un número, pero ya como área tendrían que haberme hecho otro tipo de pregunta.

I: ¿Cómo justifica que los dos resultados sean diferentes?

A11: Por lo anterior.

I: ¿Qué quiere decir por lo anterior?

A11: Que al resolver la integral me esta dando un número, pero no sé que quiere decir ese número, porque no me están contextualizando, no me están preguntando qué representa ese número, en cambio como área me iba a dar el área total de la figura que era diferente de calcular la integral.

I: ¿Qué puede concluir de los resultados obtenidos?

A11: Que a la hora de de tener en cuenta las aplicaciones de la integral es importante que cuando vamos hallar o a calcular áreas, hay que tener en cuenta la gráfica para saber en qué intervalos voy a calcular las integrales, porque se puede presentar el caso del ejercicio que daba cero, pero como área había que graficar y tomarla por intervalos.

PREGUNTA Nº 3.

I: ¿Sabría comentarme cómo ha resuelto la tarea número 3?

A11: Lo que me piden es que utilice particiones, entiendo por partición como coger un intervalo y dividirlo en un conjunto de $n-1$ puntos, donde esos puntos van a ser mayores que el extremo izquierdo, pero menores que el extremo derecho del intervalo, entonces lo que hice fue suponer que los puntos van a ser x_1 , x_2 y que todos estos valores eran mayores que “a” , que era en este caso cero, que era el extremo izquierdo del intervalo y que todos esos puntos eran menores que “b”, eso es lo que entendía como particionar, por comodidad tuve en cuenta que iba a particionar esto con una cosa que se llama la partición regular, que es que la longitud de cada intervalo sea la misma.

I: ¿Qué quiere decir que sea la misma?

A11: Que al tomar la longitud de cada intervalo tiene que ser la misma, en el cual estoy trabajando, por ejemplo, si divido eso en 3 intervalos, entonces que esa distancia entre ellos sea la misma.

I: ¿Qué característica debe tener para que sea la misma?

A11: La longitud, después de eso lo que hice fue más que todo aplicar la definición de integral definida y la suma de Riemann.

I: ¿Qué es una suma de Riemann?

A11: La suma de Riemann, se define o entiendo que es particionar un segmento y sumar las áreas que se me forman teniendo en cuenta unos rectangulitos que se forman al tomar todas esas áreas, es lo que llamo una suma de Riemann y el limite es cuando hago que esa longitud de cada intervalo sea cada vez más pequeña y tienda a cero, es lo que llamamos integral definida, eso fue lo que hice en el ejercicio.

I: ¿Qué ocurre con los intervalos (x_{i-1}, x_i), a medida que n crece?

A11: ¿A medida que n crece?

I: Si, a medida que n crece.

A11: Ella (n), se va haciendo más pequeña.

I: ¿Esta secuencia puede ser continuada indefinidamente, haciendo rectángulos de base cada vez más pequeña?

A11: Si.

I: ¿Por qué?

A11: Me repite la pregunta por favor.

I: ¿Por qué ésta secuencia se puede continuar indefinidamente haciendo rectángulos con la base cada vez más pequeña?

A11: Entiendo que si se puede hacer, siempre y cuando esos valores o si esas longitudes son tan pequeñas, pero que nunca vayan a coger al otro intervalo, me explico por decir, estoy tomando un intervalo entre x_{k-1} y x_k, puedo hacer la base de x_k cada vez más pequeña en ese intervalo, pero no tomarlo hasta x_{k-1}, porque ya seria cero.

I: ¿Cuándo se aproxima más al área cuándo usa más o menos particiones?

A11: No, cuando particiono más el intervalo que es lo que llamamos refinar la partición.

I: ¿Cuándo se aproxima más al área, cuándo usa subestimaciones o sobreestimaciones y por qué?

A11: Subestimaciones.

I: ¿Y sobreestimaciones?

A11: Sobreestimaciones ¿Qué dice, cómo lo tomaría?

I: ¿Qué está por encima de la curva o por debajo?

A11: No, para mí cuando están por debajo.

I: ¿Cómo concluye su respuesta?

A11: Lo que hice aquí fue aplicar la definición matemáticamente de la integral definida, que se define como el limite de una suma de Riemann, ahí lo escribí y cogía la función y tomaba un ε_k cualquiera, quien era ese ε_k, era cualquier punto que estaba en cualquier intervalo, en cualquier parte del intervalo lo que hacia era coger ese punto que lo llame ε_k y lo evalué en la función y lo multiplique por la altura, de cada rectángulo, que en ese caso lo llame Δ_x y al hacer esa suma obtuve el valor de la integral.

I: ¿Qué obtuvo aquí, una aproximación o el valor exacto del área?

A11: No, entiendo que es una aproximación.

I: ¿Qué valor obtuvo?

A11: Acá obtuve 21, 3, pero por lo menos me dio positivo.

I: ¿Qué le es más fácil, aproximar el área, o calcular el área utilizando fórmulas?

A11: Es más fácil calcular el área utilizando fórmulas siempre y cuando esas fórmulas sean conocidas, el problema es calcular este tipo de áreas entre curvas cuando no hay fórmulas, lo único seria calcular la integral cosa que tampoco es fácil.

I: ¿Qué puede concluir de los valores obtenidos?

A11: Tendría que plantear la integral y resolverla.

I: ¿Por qué, qué le piden calcular el área o aproximar el área?

A11: Lo que piden aquí, es que calcule el área, pero utilizando las particiones.

I: ¿Está seguro que le piden calcular el área?

A11: Aproximar el área, pero por el método de particiones.

I: ¿Cuando le piden aproximar el área qué hace, utiliza la integral o busca otros procedimientos diferentes?

A11: No, si es aproximar el área tengo que buscar los procedimientos anteriores porque ya el cálculo exacto seria resolver la integral.

PREGUNTA Nº 4.

I: ¿Puede explicarme como ha resuelto la tarea número 4?

A11: Bueno, en este ejercicio tuve muchos problemas, porque primero que todo tuve problemas a la hora de graficar, la gráfica me quedó mal hecha.

I: ¿Por qué?

A11: Porque, resulta que me piden la gráfica del $|2x-1|$, entonces una forma, que hice, fue graficar cuando x valga $\frac{1}{2}$, me va a dar cero, en $x, \frac{1}{2}$ tengo donde se corta el eje X, y simplemente era tomar otro valor cuando x valiera 2, me quedaba 3, luego en $2x$ me daba 3, entonces un bosquejo de la gráfica más o menos seria como una V, esa seria la forma de graficar (*el estudiante grafica en una hoja de respuestas*).

I: ¿Cómo puede calcular el área bajo esa gráfica?

A11: Como el intervalo es de 0 a 2, entonces el área seria la que está formada entre 0 y $\frac{1}{2}$, hasta 2, para resolver esa área, primero que todo aplico la definición de valor absoluto que como sabemos es positiva, el valor absoluto de x es igual a x, si x es mayor que cero y menos x, si x, es menor que cero, así, mismo aplico la definición en $2x-1$ para concluir que $2x-1$, es menor para todos los x menores que $\frac{1}{2}$ y $2x-1$ es mayor para los x mayores que $\frac{1}{2}$, por lo cual planteo integrales, aplicando la propiedad que se llama aditiva con respeto al intervalo.

I: ¿Cómo seria?

A11: Las dos integrales serian, la integral de cero a un medio.

I: ¿Por qué utiliza dos integrales?

A11: Porque, la función está definida en dos intervalos, uno que es cuando sea menos $2x+1$ que es en el intervalo cuando los x sean menores que $\frac{1}{2}$ y está definida como $2x-1$ para los x mayores que $\frac{1}{2}$.

I: ¿Podría continuarlo?

A11: Si, las dos integrales que plantearía serian de cero a un medio, pero estoy diciendo que ella es negativa, por lo cual le pongo el menos a la integral y me queda la integral de $2x-1$ de x, más el $\frac{1}{2}$ a 2 de quien, de $2x-1$ de “x” y eso lo hago por la propiedad aditiva con respecto al intervalo, y sería resolver estas dos integrales, para resolverlas aplico lo que llaman el segundo teorema fundamental del cálculo, entonces aplicando todas las propiedades me quedaría seria $-\frac{1}{2}$ de cero a $\frac{1}{2}$ de $2x$ de x, más de cero a $\frac{1}{2}$ de uno de x, más la integral de $\frac{1}{2}$ a 2 dos de $2x$ de dx, menos la integral de dos, de $\frac{1}{2}$ a 2 de dx, teniendo esas 4 integrales, simplemente sería resolverlas, entonces me quedaría $2x^2$ me queda x^2 evaluado desde 0 a $\frac{1}{2}$, más la integral de x de cero a $\frac{1}{2}$, más, x^2 desde $\frac{1}{2}$ a 2, más la integral de x evaluado de $\frac{1}{2}$ a 2, entonces continuamos haciendo el ejercicio y me quedaría $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ que seria el $\frac{1}{4}-\frac{1}{4}$, por el teorema fundamental del calculo, la evaluó en cero me queda cero, no hay problema menos cero, más el $\frac{1}{2}$ menos cero, no hay problema, más dos, seria en 2, seria 4 menos $\frac{1}{4}$ más esto aquí, es x, si seria 2 menos $\frac{1}{2}$, entonces seria todo esto, me quedaría $-\frac{2}{4}$ muestre a ver que se me cancela por acá $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ me quedaría más 4 esto ya lo sumé esto me quedaría $\frac{-2+16}{4}$ que es igual a -14, que seria $\frac{14}{4}$ el área (*el estudiante va narrando y copiando los cálculos en la hoja de respuestas*).

I: ¿Podría calcular el área bajo esa gráfica de manera diferente?

A11: ¿De otra manera?

I: ¿Qué figuras se han formado bajo el gráfico?

A11: ¿Geométricas? Entonces, se me forma aquí en el intervalo de $\frac{1}{2}$ a 2, un triángulo rectángulo de base 2 menos $\frac{1}{2}$ y de altura tenemos 3 (*el estudiante grafica en una hoja de respuestas*).

I: ¿Cómo obtiene la altura?

A11: La altura, muestre a ver si me perdí ya con esto, acá tengo 2 menos $\frac{1}{2}$, aquí me tocaría trazar la recta $x=2$ y la gráfica, entonces me tocaría hacer el mismo procedimiento anterior para resolver el sistema de ecuaciones.

I: ¿Cómo seria?

A11: Entonces, ya sé que de aquí, acá, la grafica es $2x-1$, o sea, que tengo $y=2x-1$ y de aquí, acá tengo la otra que es, $x=2$ resolviendo estos dos sistemas de ecuaciones encontraría el valor, como x vale 2, me quedaría 2×2, cuatro, menos uno, tres, lo que dice que “y” vale 3, y ya tengo la altura.

I: ¿Cómo calcularía el área?

A11: El área, tengo la base que es 2 y recordemos que el área de un rectángulo es base por altura sobre 2, tengo la base que es 2 menos $\frac{1}{2}$ que eso seria $\frac{3}{2}$ la base, por la altura que es 3 sobre 2, me quedaría $\frac{9}{2}$ sobre 2, me quedaría igual a 9, tengo una el área aproximada de ese triángulo que es 9 (*el estudiante hace los cálculos en una hoja de respuestas*).

I: ¿Qué le faltaría?

A11: Me faltaría calcular el área en el intervalo de 0 a $\frac{1}{2}$.

I: ¿Qué figura se te forma, ahí?

A11: Se me forma otro triángulo.

I: ¿Podría calcular el área de ese triángulo?

A11: Si, el procedimiento es prácticamente el mismo, tomo la función "y" , tengo la base que la conozco es $\frac{1}{2}$, me faltaría la altura, para calcular la altura seria un procedimiento similar, aquí la función seria $1-2x$, tengo que $x=0$, entonces al reemplazar por sustitución me quedaría que "y" vale 1, entonces tengo la altura que es 1, tendría un triangulo de base $\frac{1}{2}$ y de altura 1, entonces aplicando la fórmula quedaría, la base por la altura que es $\frac{1}{2}$ de base por altura que es $\frac{1}{2}$ sobre 2, me quedaría 1, o sea, que tengo el área de ese triángulo que es 1, más el área del otro triángulo grande seria 9; 10, seria el valor aproximado de esa área.

I: ¿Cómo son los dos valores el geométrico y el que obtuviste a partir de la integral?

A11: Muestre a ver si me quedo bien hecho, pues aquí se ve como muy diferentes.

I: ¿Por qué?

A11: Habría que mirar el planteamiento como resolví la integral, porque gráficamente, geométricamente me está dando el área 10, pero al hacer la integral me está dando 3 y pedazo o sea, que de pronto tuve un problema fue al resolver la integral.

I: ¿Cómo son los dos resultados que obtiene usando el cálculo geométrico y aplicando el cálculo de la integral definida?

A11: El calculo geométrico es un valor aproximado y el de la integral debe ser exacto o sea que deben ser valores como muy cercanos.

I: ¿En este caso, ese cálculo geométrico le daría exacto o aproximado?

A11: No, aproximado.

I: ¿Por qué?

A11: Porque se me está perdiendo digámoslo así, como un sector de área que no se alcanza.

I: ¿Por qué, esas líneas son rectas o son curvas, las que forman la gráfica de esa función?

A11: No, esas son líneas rectas.

I: ¿Por qué dice que se pierden?

A11: Aquí seria porque exactamente no se ve, porque la gráfica esta mal hecha.

I: ¿Qué puede concluir de los dos procedimientos anteriores, el geométrico y el que hace analítico a partir de la integral?

A11: No, debe ser igual, debe ser exacto, sólo que aquí gráficamente se ve bien.

PREGUNTA Nº 5.

I: ¿Cuándo le dicen que aproxime un área, que hace en la pregunta número 5?

A11: Entiendo por aproximar un área, que es el valor cercano al área de la curva, entonces lo que hice fue tener en cuenta las figuras geométricas que se me estaban formando y calculé el área a esas figuras, por ejemplo en el intervalo de 1 a 2 se me estaba formando un triángulo isósceles, lo que hice fue calcular el área de ese triángulo.

I: ¿Este triángulo queda inscrito o circunscrito?

A11: Inscrito.

I: ¿Cómo es?

A11: Con una pérdida de área.

I: ¿Con una perdida de área?

A11: Y en cambio lo que hice fue que como acá tengo una perdida de área, la repuse porque resulta que en el otro rectángulo, el triángulo tenia una perdida de área, acá el valor del área del triángulo era mayor al de la curva donde el área me estaba sobrando un poquitico, entonces la compensé con la que me faltaba en el otro (*el estudiante señala la respuesta dada en el cuestionario*).

I: ¿Puedo en un procedimiento de aproximación utilizar en una parte del eje figuras circunscritas y en la otra inscritas?

A11: Si, entiendo que si, que no hay problema.

I: ¿Por qué?

A11: Porque es que eso no me va a alterar en nada, simplemente es un valor aproximado, no me están pidiendo el valor exacto.

I: ¿La figura que tiene bajo el eje OX está inscrita o circunscrita?

A11: La que está bajo el eje OX está circunscrita, no inscrita, esa seria circunscrita ¿En la figura me pregunta por el triángulo o por la gráfica?

I: Por el triángulo que formó.

A11: El triángulo seria un triángulo, circunscrito.

I: ¿Y el qué está sobre el eje X ?

A11: Es inscrito.

I: ¿Qué hace una vez que aproxima el área que está por encima del eje OX y la que está bajo el eje OX?

A11: ¿Qué hice?

I: Si ¿Qué hace?

A11: Lo que le dije anteriormente, como sabia que tenia una perdida de área acá, me faltaba al formar la curva que estaba por encima del eje OX, aquí tenia como un faltante del área de la curva que estaba formándose en la parte de la gráfica que estaba debajo de la curva del eje OX, entonces lo que hice fue asumir que ese pedazo podía compensar el que faltaba acá.

I: ¿Qué otras aproximaciones geométricas y o numéricas, puede realizar?

A11: Otras geométricas y /o numéricas muestre a ver, pues es que aquí no se forma mucho que digamos, geométricas no veo más figuras, como más aproximadas y numéricas, seria plantearle integrales.

I: ¿Qué le permite la integral, aproximar o calcular el área?

A11: No, aquí seria calcular, lo que me piden es aproximaciones, pero geométricas no le vería como, no veo cómo formar aquí otras figuras, las cuales me permitan aproximar el área.

I: ¿De qué manera calcularía el área de ésta región sombreada?

A11: ¿Pero, geométricamente?

I: Como quiera.

A11: Si me piden calcular el área, entonces lo que haría aplicando la definición y planteando una integral, mejor dicho dos integrales y la primera seria una integral de de cero a dos, de la función $2x-x^2$ y la segunda sería otra integral, bueno acá se supone que la otra integral seria de 2 a 3,5, teniendo en cuenta que ésta área que me va a dar va a ser negativa, porque está debajo del eje X.

I: ¿Cómo calculó las áreas de los triángulos que están por encima del eje OX y por debajo el eje OX?

A11: Lo que hice fue la altura.

I: ¿Cómo obtuvo la altura?

A11: La altura aquí, se ve por escala que daba en 1.

I:¿Y del que está bajo el eje OX?

A11: La altura muestre a ver, la forma correcta seria lo que siempre he hecho.

I: ¿Qué?

A11: Plantear el sistema de ecuaciones y la recta y, igual tengo la recta x, muestre a ver cómo me quedaría, necesito hallar esta altura, entonces me quedaría para hallar ésta altura, 5, cómo hago para hallar éste punto.

I: ¿Cuánto tiene de base?

A11: No, la base la tomé como si fuera escala y dije que era 1,5.

I: ¿De dónde obtuvo 5?

A11: 5, no asumí que esto cortaba acá.

I: ¿Cómo calcularía en este momento la altura?

A11: La altura

I: Si.

A11: Hallar esta recta, cómo la hallaría acá, muestre a ver, cuál es el valor de esto.

I: ¿Tiene formadas las figuras por encima y bajo el eje OX, a qué valor aproximado llegó?

A11: ¿Cómo área?

I: Si ¿Cómo área aproximada, a qué valor llego?

A11: Acá me quedaba que era 5, me quedaba el valor aproximado que es 3 punto y pedazo el área aproximada de esto.

I: ¿Qué tiene por la parte de encima?

A11: Me dio una unidad.

I: ¿Y cuánto obtuvo en total?

A11: Cuatro y pedazo de área.

I: ¿Está de acuerdo con ese valor aproximado o lo podría ajustar más?

A11: Como lo que pide el ejercicio es aproximar, estaría de acuerdo.

I: ¿Considera que en este momento se podría aproximar más?

A11: No le veo, cómo lo aproximo más.

PREGUNTA Nº 6.

I: ¿Podría explicarme qué quiere decir con este razonamiento de la pregunta número 6?

A11: Esta no la entendí bien.

I: Observe las gráficas y trate de hacerlo.

A11: Si, aquí lo que tenia…

I: ¿Qué tal si las dibuja por separado?

A11: Bueno, entonces $y = x$, acá teníamos la parábola $y = x^2$ esta parte es $y = x^2$ y teníamos uno, dos, seria como inclinada, geométricamente lo que entiendo es que esta área tienen que ser igual a ésta otra, porque lo que me pedían era que demostrara gráficamente.

I: Si.

A11: Aquí cómo, para dónde pega uno, no es que aquí gráficamente, es que eso no lo veo sinceramente, me quedé con la duda , no veo que eso se cumpla.

I: ¿Qué no se cumple?

A11: Que el área.

I: ¿Qué tal si grafica por separado cada función?

A11: El problema es que no tengo aquí una escala para trabajar, entonces la gráfica me queda mal hecha, tengo $y = x$, en un intervalo cualquiera, en este caso 1, 2, 3 y tengo la otra grafica $y = x^2$ en el mismo intervalo 1, 2, 3, entonces me dicen que el área en este mismo intervalo para estas dos curvas va a ser igual al área de esta $y = x^2 + x$, pero lo que entiendo es que el área de esas curvas, vea las curvas por separado en ese intervalo, esa área que me forma, es igual al área formada por la curva grande en ese mismo intervalo, eso es lo que entiendo (*el estudiante gráfica por separado cada función en una hoja de respuestas*).

I: Si, eso es lo que tiene que demostrar.

A11: Pero es que no le veo a eso, no me cuadra a mi el ejercicio.

I: ¿Qué hace cuando tiene una función, cómo traza la gráfica?

A11: Me tocaría que calcular, pero es que muestre gráficamente, porque acá seria como calcular el área en este pedacito.

I: ¿Qué figuras podría formar con cada una de ellas bajo la gráfica?

A11: Con cada una ¿Qué figuras? ¿Gráficamente? Bueno, se me forman son como triángulos, entonces seria formar triangulitos, pero como le digo el problema aquí va a ser que no tengo la escala.

I: ¿Qué figuras se forman?

A11: Triángulos.

I: No, en total del área bajo la curva de cada una de ellas.

A11: ¿Qué figuras se me forman?

I: Si, cuando traza la gráfica de la primera.

A11: $y = x$, aquí la tengo.

I: ¿Qué figuras puede formar ahí?

A11: Un triángulo, como por acá seria el triángulo.

I: ¿Qué figura puede formar con la siguiente?

A11: Seria otro triángulo, porque esto sigue acá, así lo entiendo.

I: ¿Qué figura sería la siguiente?

A11: Seria, exactamente también otro triángulo.

I: ¿Qué puede comparar después entre ellos?

A11: Que el triángulo más grande es el de la curva $y = x^2 + x$, eso es lo que se ve geométricamente, que el triángulo más grande es ese, el de la figura $y = x^2 + x$.

I: ¿Cómo lo obtiene a partir de las otras?

A11: ¿Pero cómo lo obtengo? Muestre acá hombre, pero es que aquí tengo este triangulito, que seria como sobreponerlo.

I:¿Cómo seria?

A11: Seria como trazar sobre esta grande, trazar $y = x$, y sobre esa sobreponer el triángulo este, vamos a suponer que va por acá, así lo sobrepongo aquí, y lo mismo haría con este, trazaría sobre esta grafica $y = x^2$, sobrepongo este triángulo que la representa a ella acá, como me quedaría esta parábola va como más parada, entonces el triángulo representativo a éste seria como así, seria como sobreponer los triángulos de cada gráfica sobre la parábola grande y como el triángulo de la parábola $x^2 + x$ es mayor, es la suma de esos dos, pero es que no se bien (*el estudiante grafica lo que va diciendo en una hoja de respuestas*).

I: ¿Qué otros procedimientos diferentes podría utilizar para comprobar la igualdad de la propiedad?

A11: ¿Qué otros procedimientos? Seria como calcular el área, me piden que demuestre esa igualdad diferente, lo que haría ahí, seria calcular el área en cualquier intervalo, por decir de cero a uno, o de cero a dos de la función $y = x$, por medio de la integral definida calculo esa área, calculo el área en el mismo intervalo de la anterior por medio de la integral definida de la función $y = x^2$, sumo esas dos áreas y me debe dar el área al calcular la integral de $y = x^2 + x$ en ese mismo intervalo, y eso me debe dar lo mismo, así lo haría, ésta seria otra forma.

I: ¿Por qué?

A11: ¿Por qué lo haría así? Porque es la única forma en la que le vería que si se mantiene la igualdad, porque gráficamente no la veo.

PREGUNTA Nº 7.

I: ¿Qué razones tiene para decir el valor de cada una de las proposiciones en la pregunta 7?

A11: ¿Qué razones tengo? Lo que entiendo acá, es que me dicen que si tengo la derivada de una función $f(x)$, en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces que al evaluarlas en esos extremos del intervalo van a ser iguales a otra función, también que va a ser la misma derivada.

I: ¿Por qué considera que es falsa esa proposición?

A11: Falsa, porque tome que esto se cumplía, pero como integral, al resolver la $\int_a^b f(x)dx$ y ahora supuse que esto se cumple como integral.

I: ¿Continúa pensando lo mismo?

A11: Si, porque de hecho se supone que la integral, por el segundo teorema del cálculo me garantiza es eso, que puedo evaluar los valores de la función en los extremos, siempre y cuando esa función sea la antiderivada de la otra, pero como le digo puse que era falso porque ese $F(b) - F(a)$ es igual, pero cuando tengo una integral, la $\int_a^b f(x)dx$, aquí, no me plantean integrales.

I: ¿Qué le plantean, aquí?

A11: Aquí, me plantean es como una igualdad cualquiera, porque me dicen que si tres es igual a dos más uno, entonces que dos es igual a uno más uno y cosas así, o sea me plantean es una igualdad, pero no entiendo.

I: ¿Con qué elementos del cálculo integral relaciona esa proposición?

A11: ¿Con qué elementos? Bueno pues ese $F(b) - F(a)$ los asocio con la parte de del segundo teorema fundamental del cálculo, y esa f prima como la antiderivada de la función f.

I: ¿Qué es la antiderivada?

A11: Entiendo que la antiderivada en el cálculo es otra función, la cual puedo derivar y me da la original.

I: ¿Qué relación hay entre la antiderivada y la integral?

A11: ¿Qué relación hay? Pues que son las mismas, eso entiendo.

I: ¿Por qué me dice que la una es la derivada y que la otra es la integral y que le dan una igualdad y que tiene relación con el teorema fundamental?

A11: Me enredó antes, espere a ver (*el estudiante se ríe*), si porque entiendo que la antiderivada es la misma integral que le ponen el chulito ahí, pero es lo mismo.

I: Continúa estando de acuerdo con su razonamiento ¿Por qué?

A11: Lo que acá entiendo es que para que esto sea verdad y con lo que acabamos de reflexionar, esto se cumple, porque es la misma integral $f(x)$, eso valdría la misma $f^{`}$ que es la misma integral, pero es que esto no es lo que me están dando aquí, porque $f(x)^{'}$ es igual a $f(x)^{'}$, pero es que no estaría en desacuerdo con esto.

I: ¿Por qué?

A11: Por lo mismo, porque acá estamos diciendo que la $\int f\,(x)\,dx$ es la misma antiderivada y la antiderivada, es simplemente tener $f(x)^{'}$, o sea tengo estas dos cosas que son como las mismas.

I: ¿Cómo justifica el valor de verdad de la proposición 7b?

A11: Esto es que si f es continua en el $[a,b]$, entonces f es continua, lo tome como requisito, porque la definición dice que dada, una función $f(x)$ en un intervalo $[a,b]$ siempre y cuando f sea continua.

I: ¿Qué valor de verdad le da a la proposición 7b?

A11: ¿Qué valor?

I: Si.

A11: Para mi es verdadera.

I: ¿Por qué verdadera?

A11: Porque, por definición la función tiene que ser continúa en ese intervalo.

I: ¿Con qué elementos matemáticos se relaciona esa proposición?

A11: La 7b

I: Si.

A11: ¿Con qué elementos matemáticos?

I: Si, con qué conceptos.

A11: Continuidad.

I: ¿Qué mas?

A11: Con continuidad.

I: ¿Qué valor de verdad le da a la proposición 7c?

A11: Puse que era falsa, lo que hice fue aplicar el segundo teorema fundamental del cálculo, resolví la integral.

I: ¿Y está de acuerdo?

A11: Entonces, me dio diferente.

I: ¿Por qué le dio diferente, que valor le dio?

A11: Me dio 12 y acá da -2, vamos a suponer que está bien hecho el ejercicio, entonces puse que era falso.

I: ¿Está de acuerdo en el procedimiento planteado en el ejercicio y con el procedimiento que ha desarrollado?

A11: Ah por supuesto, pues voy a suponer que el mío esta bien, vamos a analizar el que plantean, porque acá lo que plantean es -1 +1 y era -1, acá va el igual, si lo puse por ahí, y seria si estaría evaluado de -1 a 1, pues hasta aquí van bien, tocaría es mirar si al evaluarlo, como le digo la verdad cuando cogí el ejercicio lo que hice fue mirar si esto es verdadero o no, pues la hago y ya.

I: ¿Qué elementos matemáticos se han aplicado en esa proposición?

A11: Aquí, aplicaron lo que fue el teorema fundamental del cálculo que se aplica es para integrales definidas.

I: ¿Considera que aquí, se puede aplicar el teorema fundamental del cálculo?

A11: Me tocaría resolverlo, entonces esto se haría así de -1 a 1 de 1 sobre x^2, si, no hay problema, porque esto va acá.

I: ¿Por qué, no hay problema?

A11: Muestre cuando esto valga de -1 a 1, estaría el problema.

I: ¿Cuál problema?

A11: Entonces el problema ahí, seria que en ese intervalo la función no es continua.

I: ¿Qué pasa, por qué no es continua?

A11: Porque ella cuando x valga cero presenta una discontinuidad infinita, o sea ahí no tiene el requisito para poder aplicar el teorema fundamental del cálculo.

I: ¿Cuál requisito?

A11: Que la función sea continúa en el intervalo $[a, b]$.

I: ¿Se puede aplicar esa regla?

A11: No.

I: ¿Por qué?

A11: Porque no es continúa en ese intervalo

I: ¿Qué regla aplicaron ahí?

A11: No ahí, asumieron que se podía aplicar.

I: ¿Pero qué regla aplicaron?

A11: Ah, la regla de las potencias para integral, la entiendo como una técnica.

I: ¿Que regla del cálculo aplicaron ahí, para resolver ese ejercicio?

A11: ¿Qué regla, regla o teorema o cómo lo dice usted?

I: Bueno teorema, pero dentro de ese teorema hay una regla ¿Qué teorema aplicaron ahí?

A11: Aquí, lo que entiendo que aplicaron fue el del segundo teorema fundamental del cálculo, que si conozco la antiderivada de esta función, la evaluó en los extremos, como le digo el problema acá es la continuidad, que no cumple ese requisito.

I: ¿Podemos aplicar la regla de Barrow al ejercicio?

A11: ¿La qué?

I: La regla de Barrow.

A11: Ah no pues ahí, si me esta hablando en chino, porque esa si no la conozco, entonces si.

I: ¿Qué pasa en la proposición c si el denominador se hace cero?

A11: En la c, si el denominador se hace cero, pues como le digo se presenta una discontinuidad infinita y entonces eso ya se llamaría una integral impropia.

I: ¿Puede aplicar la misma regla?

A11: Lo que hace uno...

I: ¿Cómo lo haría?

A11: Porque para calcular esta integral de -1 a 1 de $\frac{1}{x}$ ella presenta una discontinuidad infinita en el integrando y no se puede integrar.
I: ¿Por qué la continuidad implica integrabilidad?
A11: Porque ese es el teorema de existencia de la integral y si f no es integrable, es porque la función no es continua en ese intervalo.

A11: ¿Cómo se llama esta integral?

I: Si.

A11: Una integral definida.

I: No, me dijo ahora que era una integral…

A11: Impropia.

I: ¿Por qué, qué es una integral impropia?

A11: Entiendo que una integral impropia, es aquella que posee en el integrando una discontinuidad infinita o alguno de sus limites laterales, limite superior inferior tiende a infinito.

I: ¿Cómo se resolvería?

A11: Lo que hace uno es evalúa un limite, o sea lo que nosotros debemos hacer es calcular integrales de funciones definidas.

I: Si.

A11: Entonces, lo que hago es evaluar un limite, llámemelo t, cuando t tienda a cero por la izquierda, entonces de -1 a t de $\frac{1}{x}$, mas el limite, cuando t tienda a cero por la derecha, de t a 1 de $\frac{1}{x}$ (*el estudiante plantea esto en una hoja de respuestas*).

I: ¿Por qué la continuidad implica integralidad?

A11: Porque estaría derivando y la derivada implica continuidad, entonces seria como esa cadena.

PREGUNTA Nº 8.

I: ¿Cómo le explicaría en la pregunta número 8 a un compañero el significado de la $\int_a^b f(x)\,dx$?

A11: A un compañero.

I: Si.

A11: Lo que le explicaría a un compañero es que geométricamente me representa el área formada por la curva $y = f(x)$, la rectas $x = a$ y $x = b$, y que esa área es lo que llamamos geométricamente la integral definida y le diría que esto es un número que geométricamente representa esto.

I: ¿Qué quiere decir con que la integral es un número que representa la solución a un problema?

A11: ¿Qué quiero decir con eso?

I: ¿Qué quiere decir que la integral representa un número?

A11: Lo que entiendo es que al resolver eso, no me va a dar una función me va a dar es un valor cualquiera, y que su significado depende del contexto en que esté planteada, pero eso nunca me puede dar una función a diferencia de la integral indefinida.

I: ¿Cuál es su propia definición de integral definida?

A11: Para mi es como un número que hay que contextualizarlo para poder darle una buena interpretación.

I: ¿Qué significa contextualizar un número?

A11: Que cuando estamos hablando de área, eso me representa un área, que cuando estamos hablando de volúmenes, entonces de volúmenes y no calcular el área o calcular la integral sin saber ese número a que va a dar respuesta o sea de que me sirve conocer cuanto vale la integral definida, para que me va a servir ese número entonces, primero sé para que lo voy aplicar y después la resuelvo, luego dónde lo veo y cómo lo veo.

I: Suponiendo que va la semana próxima a un grupo de estudiantes a llevarlos a comprender el concepto de integral definida por primera vez, qué pasos, cuál seria la secuencia que desarrollaría, los procedimientos para poder llevar al estudiante a lograr que comprenda el concepto de integral definida.

A11: Bueno.

I: ¿Cómo iniciaría?

A11: Bueno, iniciaría primero con un poquito de historia, entonces les hablaría del problema de calcular el área de una curva y que eso se le atribuye a Arquímedes que fue el primero que lo planteó a través del método exhaustivo, luego le hablaría primero un poquito de historia, lo pondría un poquito como en el contexto, que cuando vamos hablar de eso es resolver área entre curvas y que de ahí salió la integral y después de eso empezaría ya lo que es manejar en el plano, entonces tomaría una curva cualquiera y empezaría hacer más o menos lo de los triangulitos de área cada vez más pequeña, hasta que él entienda ese procedimiento que es lo que llamamos suma de Riemann y después le entraría ya con la definición de limite, teniendo en cuenta que el maneja limites porque si le voy hablar de limites y el no maneja limites, entonces nunca me va a entender, pero empezaría por ahí, un poquito de historia para que él vea eso para que sirve, de dónde salió y que no lo vea así como tan abstracto, eso para qué me sirve, empezaría con la parte clave que seria entender el área de los rectángulos, a través de rectángulos cada vez más pequeños.

I: ¿Qué quiere mostrarle con el área a partir de de rectángulos?

A11: Lo que le quería mostrar a él, es que puedo calcular esta área ya no como lo harían ellos que seria lo que hacemos todos, que es formando las figuras geométricas, si no que puedo dar un valor más aproximado..

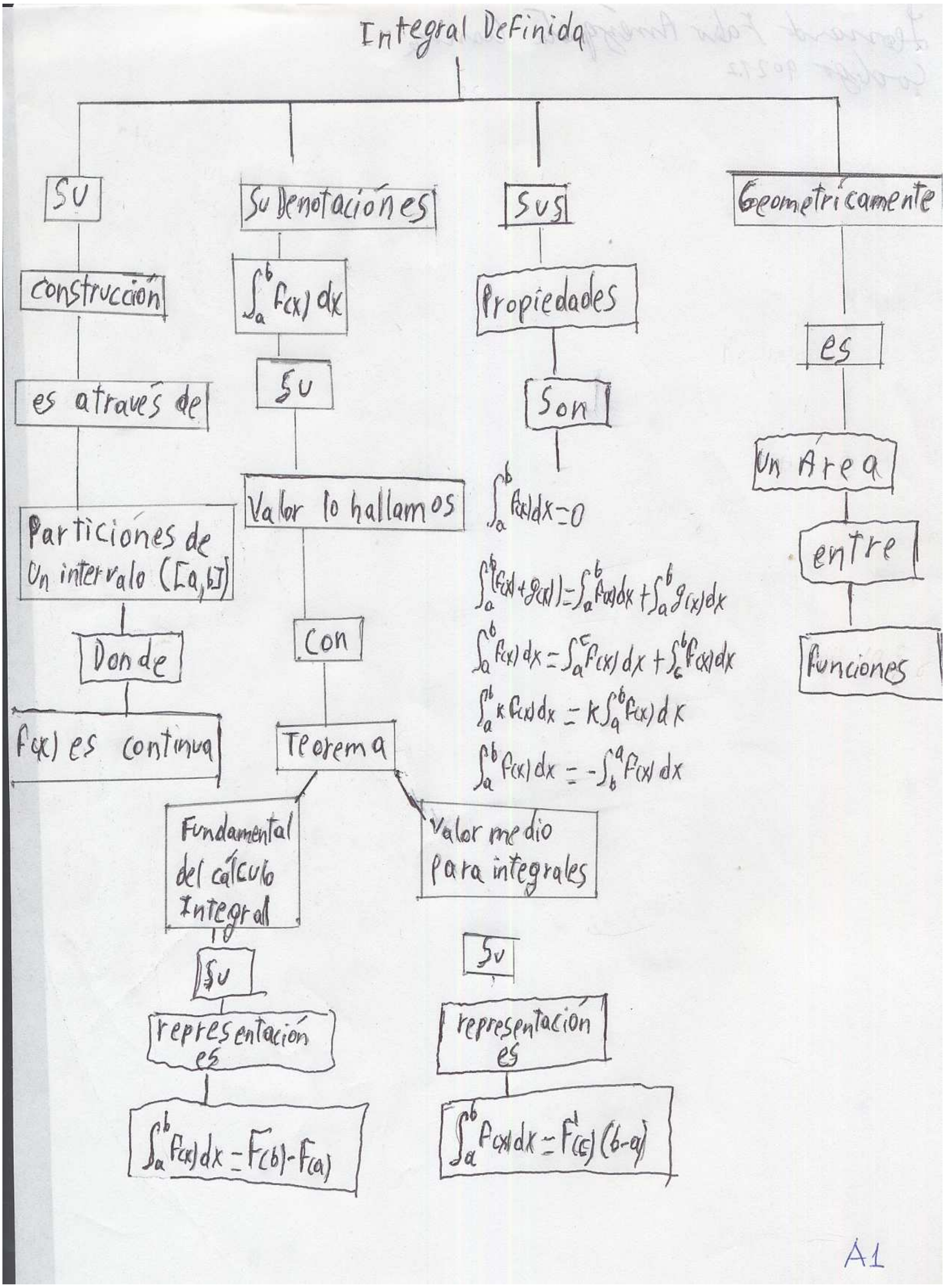
I: ¿Partiría de aproximaciones?

A11: De aproximaciones hasta entender este procedimiento, si él me entiende este procedimiento ya iría a la parte del cálculo, más de los limites, haría primero esto para que me entienda.

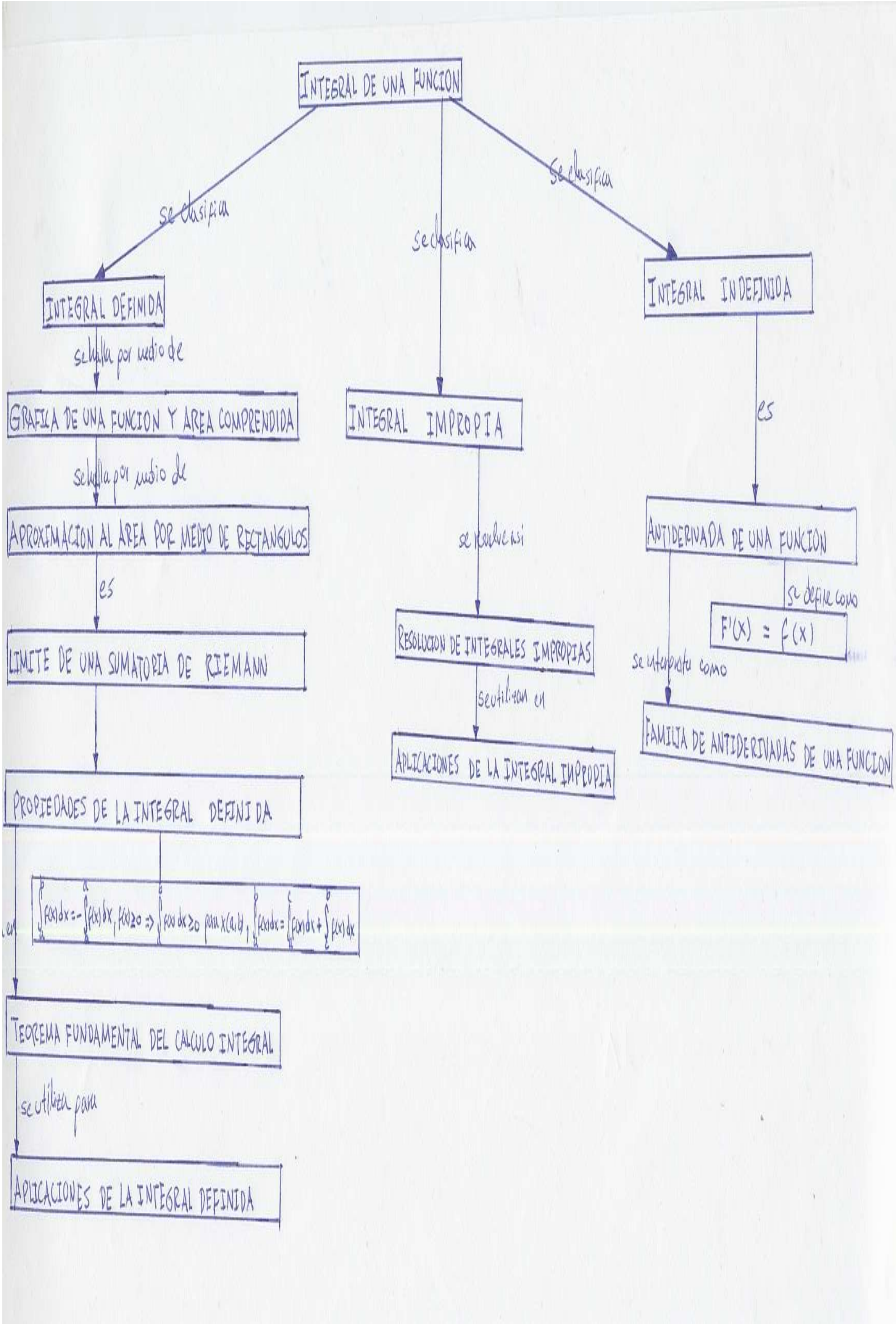
I: Muchas gracias.

A11: Listo, no.

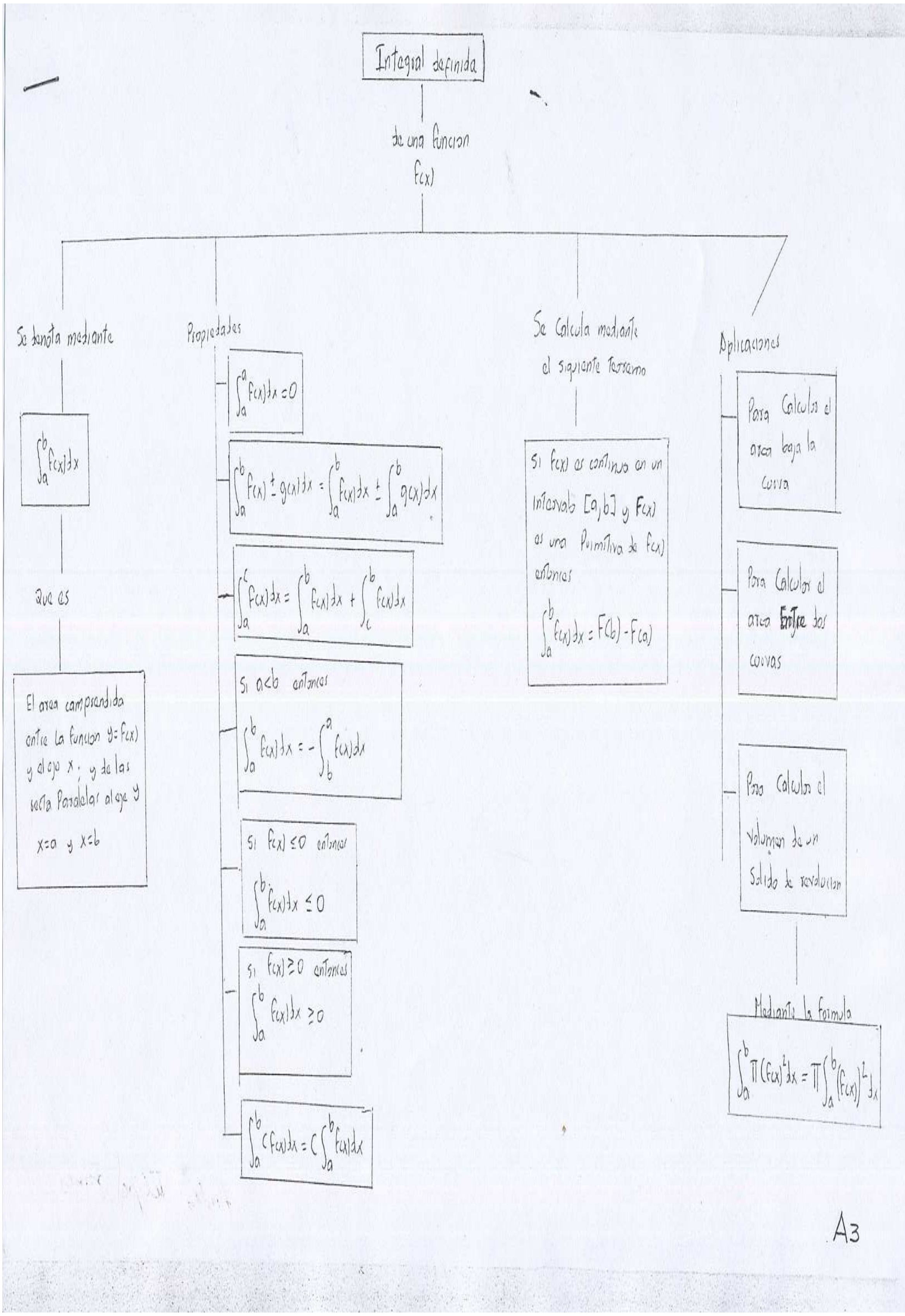
Anexo 6: Mapas conceptuales.



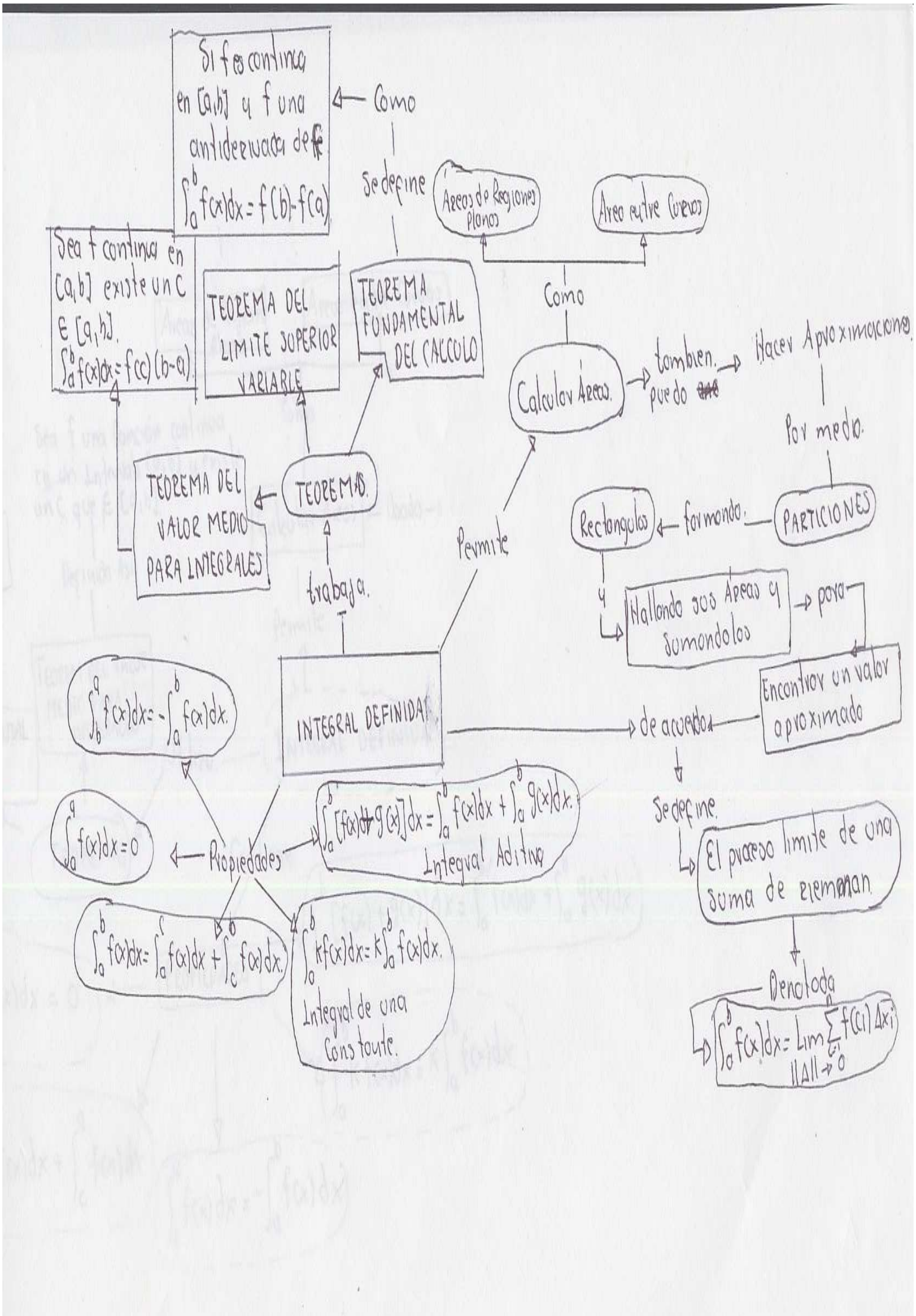
A1, mapa conceptual que representa el concepto de Integral Definida.



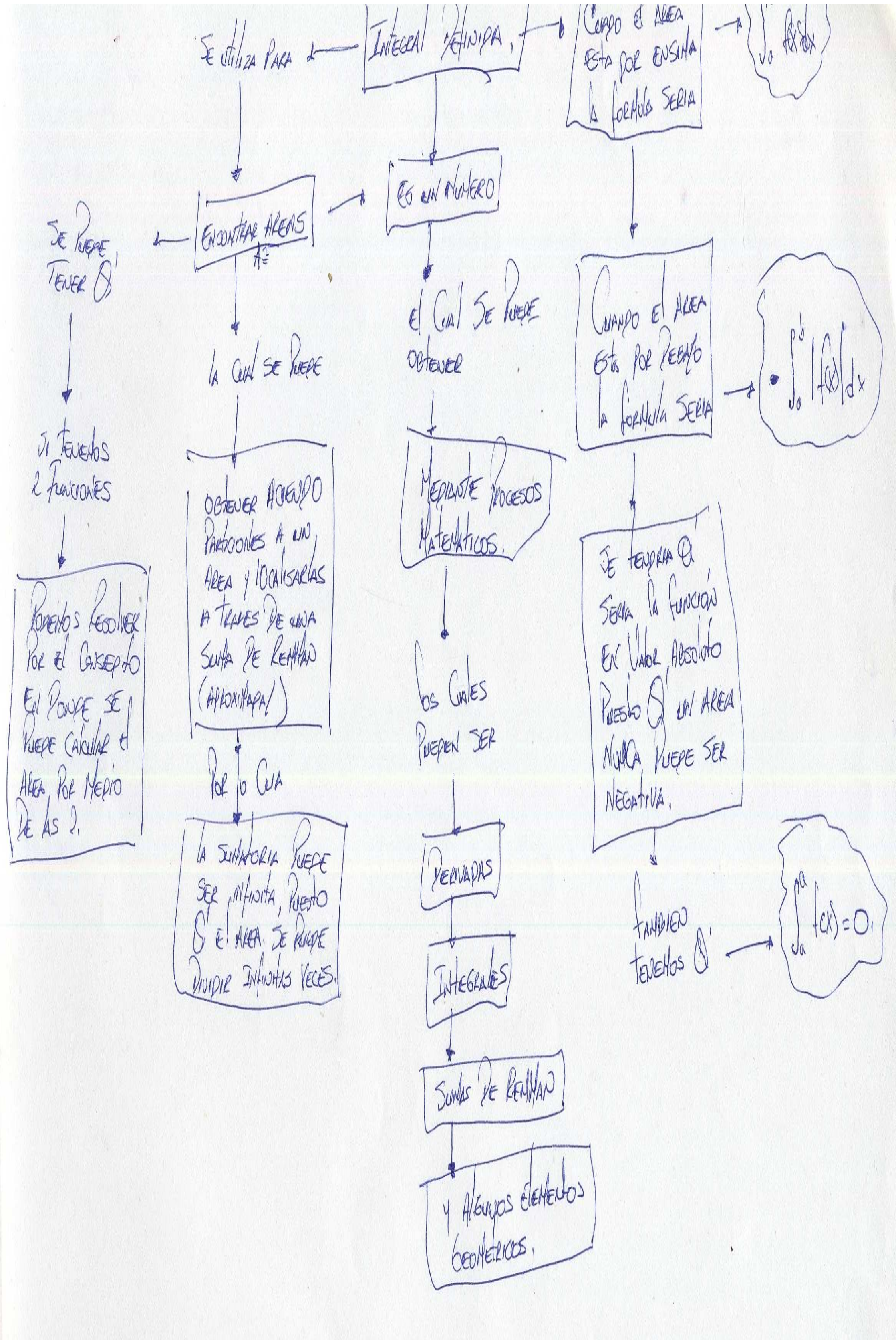
A2, mapa conceptual que representa el concepto de Integral Definida.



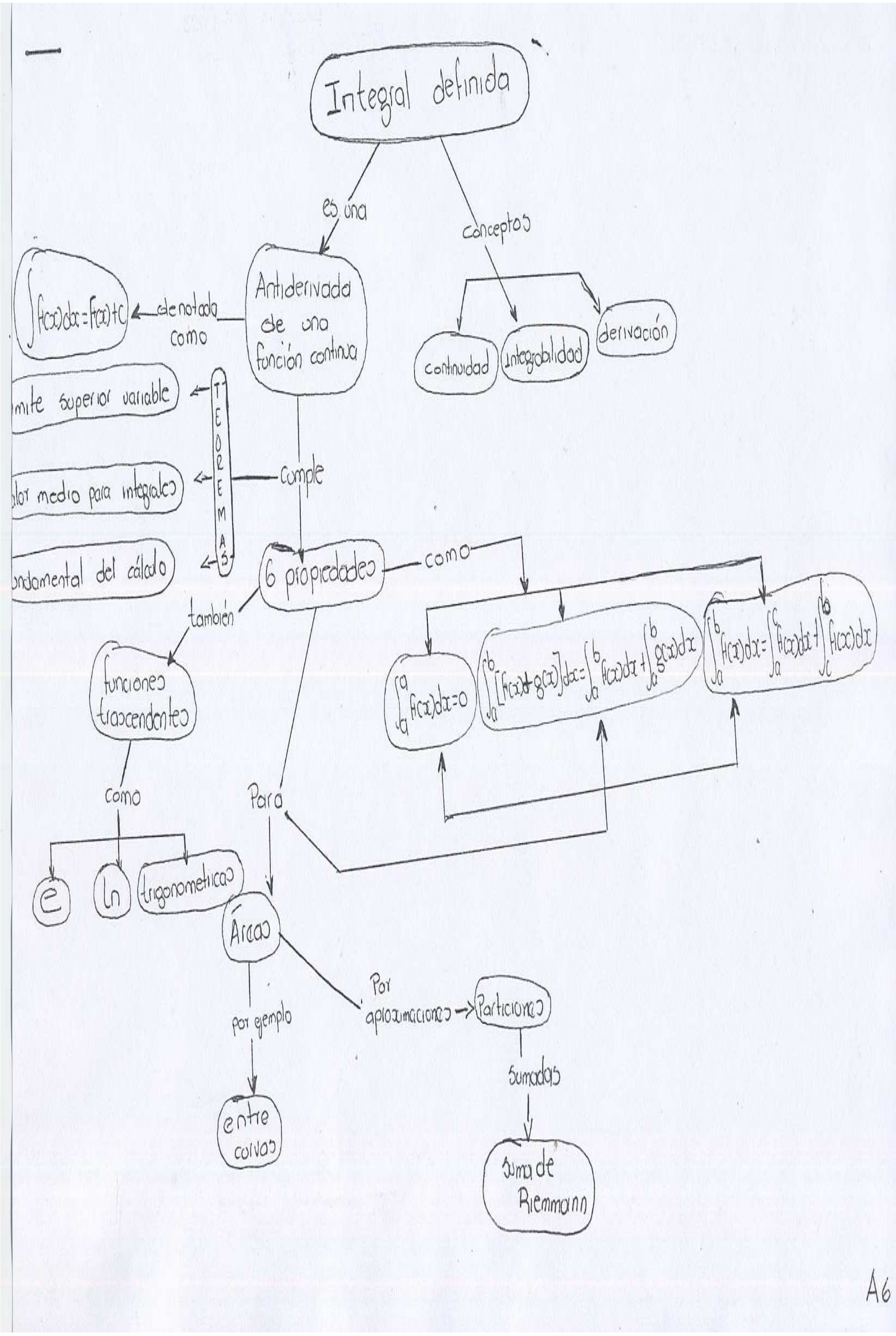
A3, mapa conceptual que representa el concepto de Integral Definida.



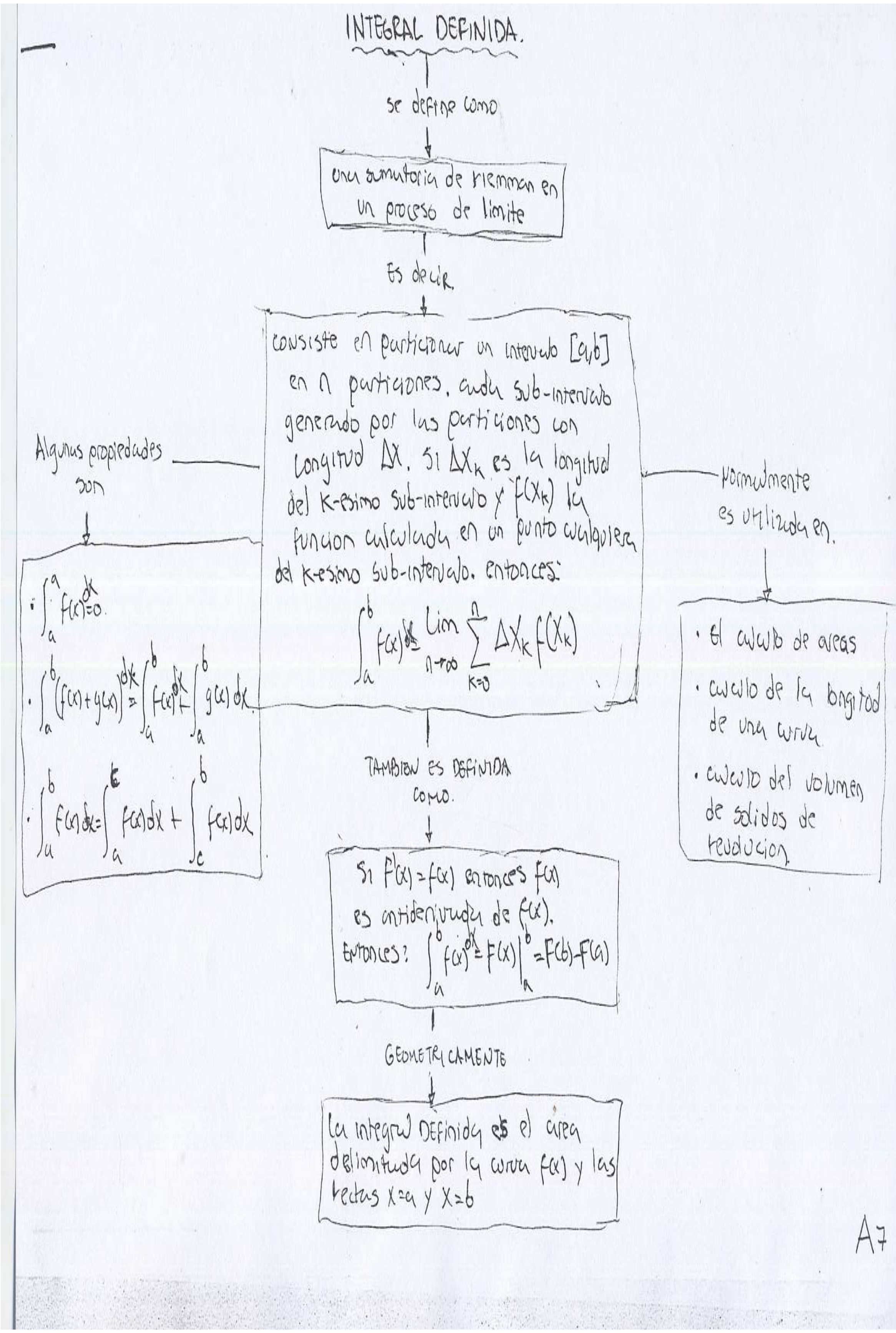
A4, mapa conceptual que representa el concepto de Integral Definida.



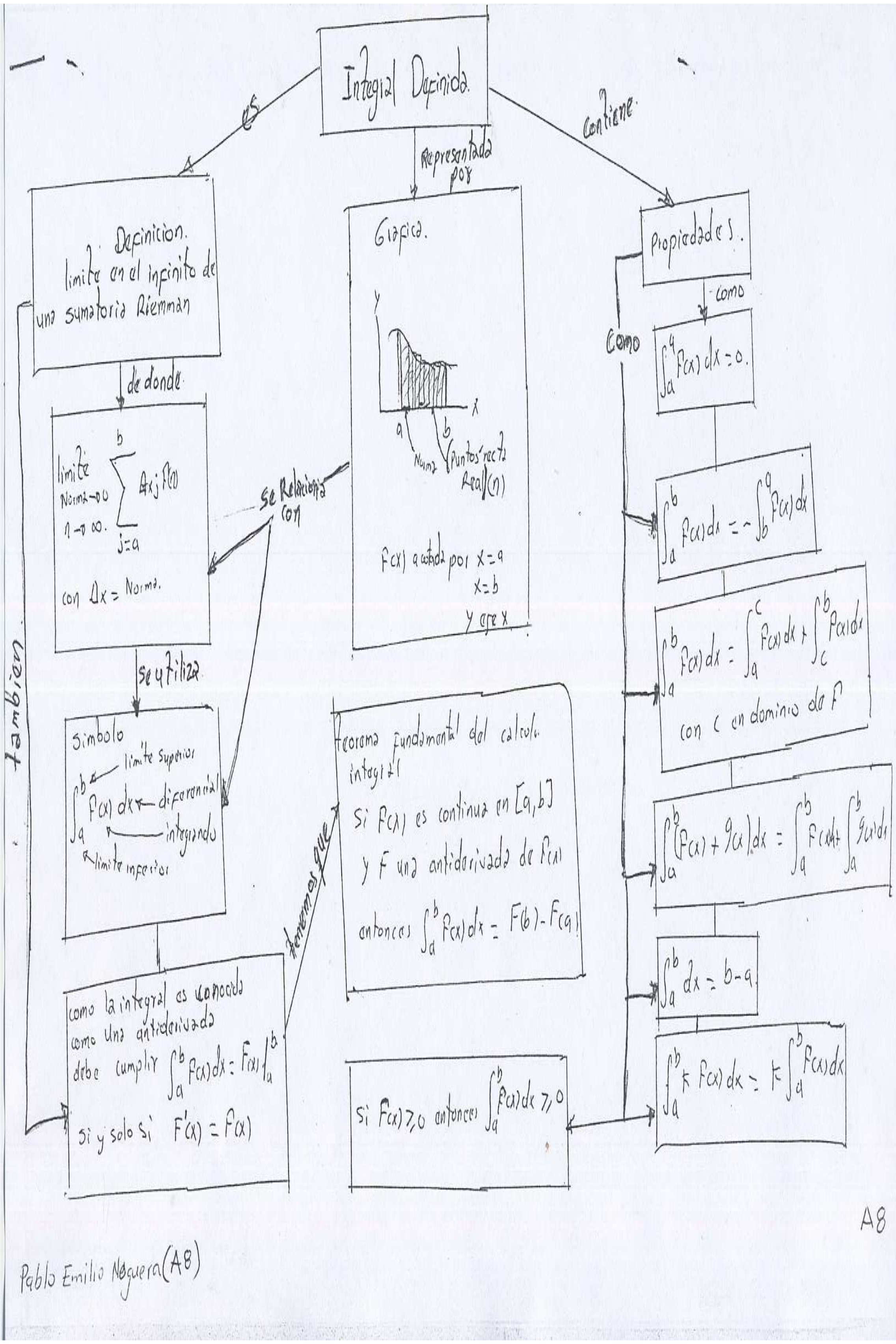
A5, mapa conceptual que representa el concepto de Integral Definida.



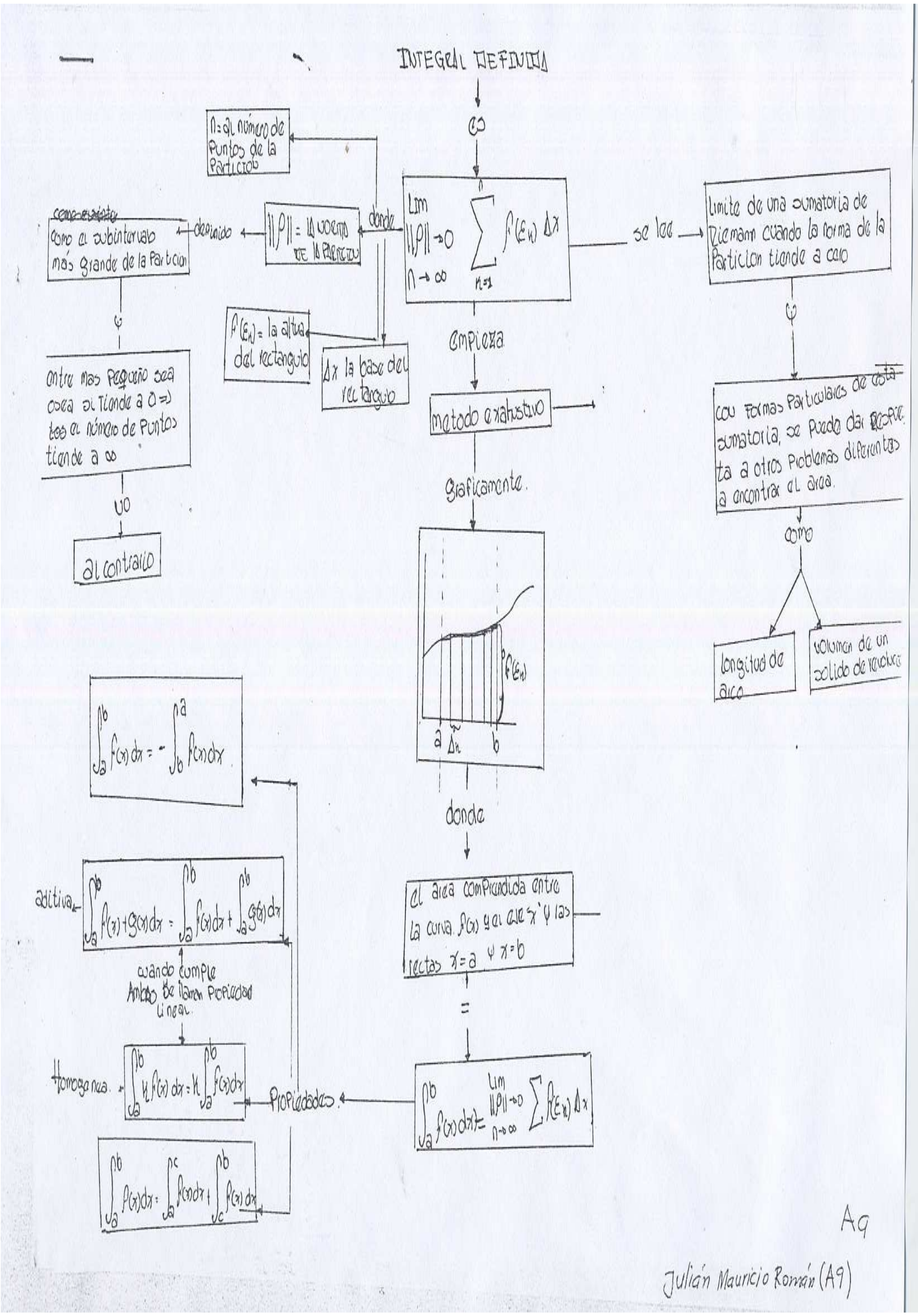
A6, mapa conceptual que representa el concepto de Integral Definida.



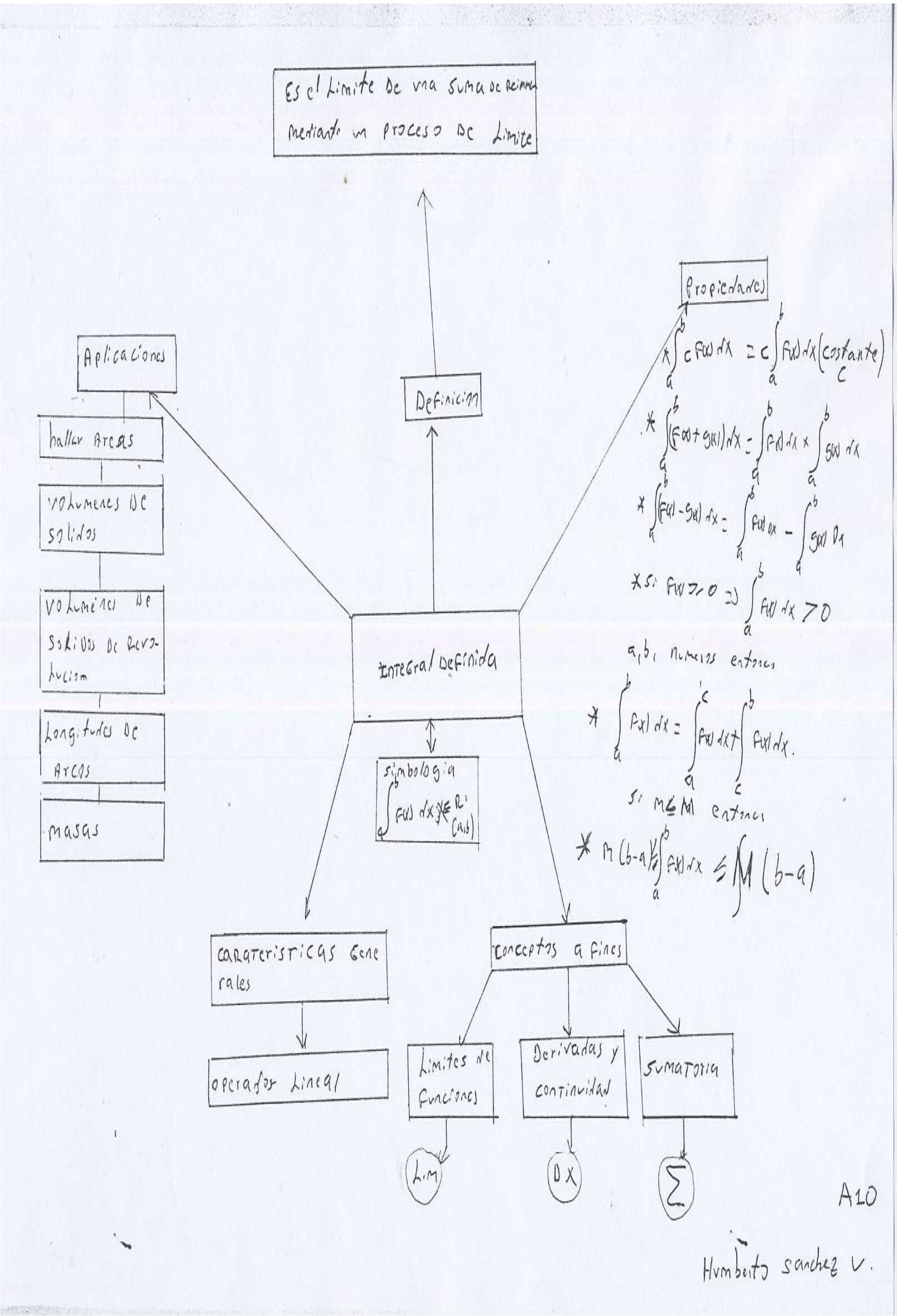
A7, mapa conceptual que representa el concepto de Integral Definida.



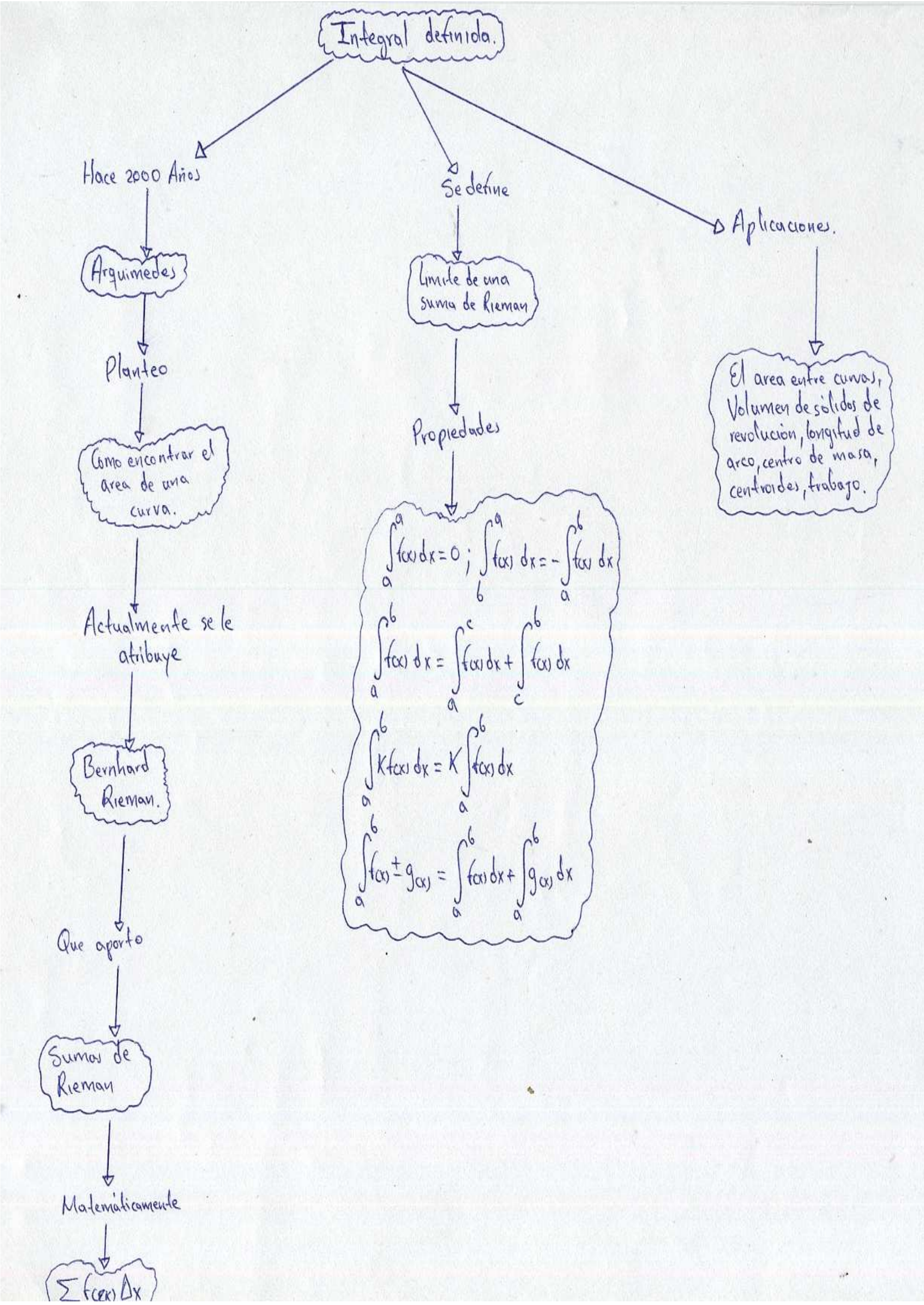
A8, mapa conceptual que representa el concepto de Integral Definida.



A9, mapa conceptual que representa el concepto de Integral Definida.



A10, mapa conceptual que representa el concepto de Integral Definida.



A11, mapa conceptual que representa el concepto de Integral Definida.

Anexo 7: Plan de estudios de la Licenciatura de Matemáticas.

Fecha del reporte 11-08-2009 17:00:06 Académico - Academusoft 3.2

Consultar Pensum

Metodología	Modalidad
PRESENCIAL	UNIVERSITARIA

Programa	Jornada	No. Periodos
LICENCIATURA EN MATEMATICAS	NOCTURNA	12

Descripción	Fecha de Inicio	Estado
PLAN LICENCIATURA EN MATEMATICAS JORNADA NOCTURNA EN CREDITOS-OFERTA	2005-1	EN OFERTA

Periodo: 1

Código	Nombre de la Asignatura	HT	HP	HTP	Horas ó Créditos	Requisitos
160610103	ARITMETICA	4	0	-	4	
160610102	INTRODUCCION AL PENSAMIENTO LOGICOMATEMATICO	4	0	-	4	
160060004	PROFICIENCIA EN IDIOMA EXTRANJERO	2	0	-	2	
160050004	PROFICIENCIA EN ESPAÑOL	2	0	-	2	
160070101	PROCESO DEL DESARROLLO HUMANO	4	0	-	4	

Periodo: 2

Código	Nombre de la Asignatura	HT	HP	HTP	Horas ó Créditos	Requisitos
160610203	ALGEBRA	4	0	-	4	R- 160610103
160610202	INFORMATICA BASICA	2	2	-	3	
160610204	INGLES I	4	0	-	2	R- 160060004
140060001	CONSTITUCION POLITICA	2	0	-	2	

Periodo: 3

Código	Nombre de la Asignatura	HT	HP	HTP	Horas ó Créditos	Requisitos
160610304	GEOMETRIA EUCLIDIANA	4	0	-	3	
160610303	INGLES II	4	0	-	2	R- 160610204
140050002	MEDIO AMBIENTE	3	0	-	3	
160070201	DESARROLLO DEL PENSAMIENTO	4	0	-	4	
160070501	EDUCACION, CULTURA Y SOCIEDAD	4	0	-	3	

Periodo: 4

Código	Nombre de la Asignatura	HT	HP	HTP	Horas ó Créditos	Requisitos
160610401	GEOMETRIA ANALITICA	4	0	-	3	R- 160610304
160610404	TRIGONOMETRIA	4	0	-	3	R- 160610304
160630401	ACTIVIDAD ELECTIVA COMPLEMENTARIA I	3	0	-	3	
160070301	FUNDAMENTOS EDUCATIVOS Y PEDAGOGICOS	4	0	-	4	
160070401	HISTORIA Y EPISTEMOLOGIA DE LA PEDAGOGIA	4	0	-	4	

Periodo: 5

Código	Nombre de la Asignatura	HT	HP	HTP	Horas ó Créditos	Requisitos
160610503	ALGEBRA LINEAL	4	0	-	3	R- 160610203
160610501	CALCULO I	4	0	-	4	R- 160610401 R- 160610404
160630501	ACTIVIDAD ELECTIVA COMPLEMENTARIA II	3	0	-	3	
160070601	LOS LENGUAJES ESCOLARES Y LOS PROCESOS DIDACTICOS	4	0	-	3	
160060002	DEPORTE FORMATIVO	0	2	-	2	

Periodo: 6

Código	Nombre de la Asignatura	HT	HP	HTP	Horas ó Créditos	Requisitos
160610603	CALCULO II	4	0	-	4	R- 160610501
160610602	DIDACTICA CONTEMPORANEA	4	0	-	3	C- 160610501
160610604	MATEMATICAS DISCRETAS	4	0	-	3	R- 160610102 R- 160610503
160610601	METODOS ESTADISTICOS	4	0	-	3	R- 160610501
130050003	CREATIVIDAD EMPRESARIAL	2	0	-	2	

Periodo: 7

Código	Nombre de la Asignatura	HT	HP	HTP	Horas ó Créditos	Requisitos
160680705	SEMINARIO DE INVESTIGACION	4	0	-	3	R- 160610603
160610703	CALCULO III	4	0	-	4	R- 160610603
160620702	DIDACTICA DE LAS MATEMATICAS	4	0	-	4	R- 160610602
160610701	HISTORIA DE LAS MATEMATICAS	4	0	-	3	R- 160610503
160610704	PROBABILIDAD	4	0	-	3	R- 160610601 R- 160610604

Periodo: 8

Código	Nombre de la Asignatura	HT	HP	HTP	Horas ó Créditos	Requisitos
160610804	CALCULO IV	4	0	-	4	R- 160610703

Pág. 1

180610801	EPISTEMOLOGIA DE LAS MATEMATICAS	4	0	-	3	R- 180610701
180610802	INFERENCIA ESTADISTICA	4	0	-	3	R- 180610704
180640803	TOPICOS DE INVESTIGACION I	4	0	-	3	R- 180680705
Periodo: 9						
Código	Nombre de la Asignatura	HT	HP	HTP	Horas ó Créditos	Requisitos
180640902	TOPICOS DE INVESTIGACION II	4	0	-	3	R- 180640803
180620901	ECUACIONES DIFERNCIALES	4	0	-	3	R- 180610804
180620903	RESOLUCION DE PROBLEMAS	4	0	-	3	R- 180620702
Periodo: 10						
Código	Nombre de la Asignatura	HT	HP	HTP	Horas ó Créditos	Requisitos
180631001	ACTIVIDAD ELECTIVA COMPLEMENTARIA III	3	0	-	3	
180641002	TOPICOS DE INVESTIGACION III	4	0	-	3	R- 180640902
180621003	PRACTICA DOCENTE I	0	4	-	4	R- 180610603 R- 180620903
180621001	VARIABLE COMPLEJA	4	0	-	3	R- 180610804
Periodo: 11						
Código	Nombre de la Asignatura	HT	HP	HTP	Horas ó Créditos	Requisitos
180621102	ANALISIS REAL	4	0	-	4	R- 180620901
180070601	POLITICAS EDUCATIVAS COLOMBIANAS	4	0	-	3	
180621103	PRACTICA DOCENTE II	0	4	-	4	R- 180621003
Periodo: 12						
Código	Nombre de la Asignatura	HT	HP	HTP	Horas ó Créditos	Requisitos
180631201	ACTIVIDAD ELECTIVA COMPLEMENTARIA IV	3	0	-	3	
140060003	ETICA	3	0	-	3	
180070701	TENDENCIAS PEDAGOGICAS Y DESARROLLO CURRICULAR	4	0	-	3	
Tipos de Requisito: R - Requisito, C - Correquisito, N - Nota mínima						