UNIVERSIDAD DE SALAMANCA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA Y DIDÁCTICA DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES

COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA EN EL MARCO DE LA TEORÍA "APOE"

TESIS DOCTORAL

ELIÉCER ALDANA BERMÚDEZ

SALAMANCA, 2011

UNIVERSIDAD DE SALAMANCA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA Y
DIDÁCTICA DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES

COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA EN EL MARCO DE LA TEORÍA "APOE"

Tesis doctoral de
D. Eliécer Aldana Bermúdez

Fdo. Eliécer Aldana Bermúdez

Realizado bajo la dirección de:
Dra. María Teresa González Astudillo

La Dra. María Teresa González Astudillo, profesora de la Facultad de Educación de la Universidad de Salamanca

CERTIFICA

Que la presente memoria titulada *Comprensión del concepto de integral definida en el marco de la teoría "APOE"*, ha sido realizada bajo su dirección por D. Eliécer Aldana Bermúdez y constituye su tesis para optar al grado de doctor.

Y para que conste y tenga los efectos oportunos ante el Departamento de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales de la Universidad de Salamanca, el día de de dos mil once.

Fdo: Mª Teresa González Astudillo

DEDICATORIA

A los estudiantes universitarios, y con especial amor a una de ellas: *Maribel*.

A dos personas ausentes: *Rosa María y Arturo*, quienes dejaron en mí las mejores bases y lucharon para que un día alcanzara grandes metas, ésta es una de ellas.

AGRADECIMIENTOS

Quiero manifestar en primer lugar, con gran satisfacción mi sentimiento de gratitud y admiración a la Directora de esta Tesis, la Dra. María Teresa González Astudillo, por haber aceptado hace más de cinco años, ser la directora de esta investigación, quien con su conocimiento, experiencia, sus sabias orientaciones y su rigor profesional, siempre estuvo presente para motivarme y lograr así mis objetivos. Asimismo, al Dr. D. Modesto Sierra Vázquez, Director del Doctorado en Educación Matemática, del Departamento de Didáctica de la Matemática y Didáctica de las Ciencias Experimentales, de la Facultad de Educación de la Universidad de Salamanca, por su apoyo, su formación y liderazgo. Gracias por estar siempre presentes y por enseñarme y enseñar a otros a buscar la luz y el camino de la investigación en nuestra área: Educación Matemática.

A los Doctores que nos orientaron los diferentes cursos: Dr. Modesto Sierra Vázquez y Dr. José Mª Chamoso Sánchez de la Universidad de Salamanca, al Dr. Tomás Ortega del Rincón de la universidad de Valladolid, a la Dra. Carmen Azcárate de la Universidad Autónoma de Barcelona, al Dr. Salvador Llinares Ciscar de la Universidad de Alicante, al Dr. Ricardo López Fernández de la Universidad de Salamanca, al Dr. Javier Martín Lalanda de la Universidad de Salamanca, al Dr. José Ángel Domínguez Pérez de la Universidad de Salamanca, a la Dra. Inmaculada García Mateos de la Universidad de Salamanca; a todos ellos gracias por haberme permitido aprender de sus sabias experiencias. Igualmente, al Dr. Luis Rico de la Universidad de Granada; por sus reflexiones, enseñanzas, y aprendizajes adquiridos.

A los doctores Dr. Matías Camacho Machín de la Universidad de la Laguna, Dr. Ángel Tocino García de la Universidad de Salamanca, Dr. Rafael Crespo de la Universidad de Valencia y la Dra Myriam Codes Valcarce de la Universidad Pontificia de Salamanca, por las aportaciones y revisiones que realizaron durante el proceso de investigación y de escritura de esta tesis doctoral.

A la Dra. María del Mar González-Tablas Sastre de la Universidad de Salamanca, por su apoyo, ejemplo de superación, y por los sabios consejos recibidos durante mi estancia en España.

A nivel de instituciones, quiero agradecer al Departamento de Didáctica de la Matemática y Didáctica de las Ciencias Experimentales, de la Facultad de Educación de la Universidad de Salamanca, en lo relacionado con mi formación como investigador y como futuro orientador de otros investigadores.

Igualmente un reconocimiento especial para la Universidad del Quindío en Armenia-Colombia, en la que me compete contribuir en los campos de: docencia, investigación y proyección social, y especialmente con la formación de los futuros licenciados en Matemáticas; por haberme concedido la comisión de estudios en el extranjero.

A los profesores y a los estudiantes de la Licenciatura de Matemáticas de la Universidad del Quindío, quienes fueron un recurso humano fundamental y laboratorio de práctica para poder realizar el trabajo de campo objeto de la investigación.

Por último, quiero dar las gracias a mi familia, por su estímulo, confianza y paciencia, dándome siempre su voz de ánimo para la realización de esta Tesis.

Pensamiento

"Cada persona debe pasar aproximadamente por las mismas experiencias por las que pasaron sus antepasados si quiere alcanzar el nivel de pensamiento que muchas generaciones han alcanzado".

(Kline, 1978).

ÍNDICE GENERAL

LISTA DE TABLAS Y ESQUEMAS

CAPÍTULO 1

Capítulo 1. IDENTIFICACIÓN DEL PROBLEMA

El presente estudio trata acerca de la comprensión del Concepto de Integral Definida de estudiantes universitarios en el marco de la teoría "APOE". El estudio de la comprensión de los conceptos matemáticos es un campo de gran interés para la investigación en Educación Matemática, por tanto, en nuestra investigación profundizamos en el desarrollo de la comprensión de éste concepto matemático, concretamente en los distintos niveles de desarrollo del esquema del concepto de Integral Definida, con estudiantes de tercer año de Licenciatura de Matemáticas, en un rango de edad de 18 a 32 años. El ámbito en el que se ubica el trabajo realizado es en el de la línea de investigación en Didáctica del Análisis Matemático y en el campo del Pensamiento Matemático Avanzado.

En este primer capítulo realizaremos unas breves reflexiones sobre el aprendizaje y la comprensión de los conceptos matemáticos para enmarcar el centro de atención de esta tesis doctoral, nos centraremos en el tratamiento de la Integral Definida en los libros de texto del Bachillerato y de Universidad con objeto de entresacar los elementos matemáticos que configuran este concepto, y posteriormente abordaremos la comprensión de Integral Definida como ámbito de investigación. Finalmente formularemos el problema de investigación, así como los objetivos y las hipótesis de la investigación.

1.1. Reflexiones sobre el aprendizaje y comprensión de los conceptos matemáticos.

El Análisis Matemático es una de las materias fundamentales de los planes de estudios universitarios, y su aprendizaje tiene que ver con procesos cognitivos como abstraer, analizar, categorizar, conjeturar, representar, conceptualizar, inducir y visualizar, definir, demostrar, formalizar, generalizar y sintetizar característicos del Pensamiento Matemático Avanzado.

En este sentido, un número importante de investigaciones de tipo cognitivo en Didáctica de las Matemáticas se centran en el estudio de los problemas de aprendizaje del Análisis Matemático. Entre ellos, Dreyfus y Eisenberg (1990) señalan que el Análisis constituye la rama de la Matemática Avanzada que más tiempo ocupa en la enseñanza institucionalizada actual, y su aprendizaje posee un gran número de dificultades no triviales que requieren de su estudio. Por ello, el Análisis resulta ser un campo privilegiado para el planteamiento de problemas de investigación.

Muchos son los conceptos propios del campo del Análisis Matemático que han sido motivo de estudio por parte de algunos investigadores; aquí sólo mencionaremos algunos de los realizados en España como el de Azcárate et al. (1996) en el que se presenta una propuesta sobre el aprendizaje del concepto de Integral a partir de la integración numérica de forma independiente y anterior al concepto de derivada; el de Sierra., González. y López (1999) sobre la evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de bachillerato y COU; o el que estos mismos autores, Sierra., González y López (2000) hicieron sobre las concepciones de los alumnos de bachillerato y COU sobre límite funcional y continuidad; el de Blázquez y Ortega (2001) sobre los sistemas de representación en la enseñanza del límite; o el de González (2002) sobre los sistemas de representación del Análisis Matemático desde una perspectiva histórica utilizados en la enseñanza de los puntos críticos; y varias investigaciones de Camacho et al. (2008) como un estudio de casos sobre el aprendizaje de la Integral Definida en diversos contextos.

En algunas de estas investigaciones se han identificado dificultades y errores persistentes en los estudiantes relacionados con el aprendizaje de los conceptos matemáticos, y sin lugar a dudas todas han sido un aporte fundamental como referencias en el desarrollo posterior de otros estudios que tienen que ver con la comprensión y el aprendizaje de los conceptos matemáticos en general.

Como se ha indicado, algunas investigaciones ponen de manifiesto las dificultades que tienen los alumnos en la construcción de los conceptos, al estar asociados a imágenes débiles de los conceptos matemáticos, a utilizarlos en un nivel exclusivamente algorítmico y/o memorístico y al estar relacionados con concepciones erróneas.

En relación con estos conceptos matemáticos, la memoria del estudiante evoca algo que generalmente no es la definición del concepto, sino lo que se denomina *concept image* (imagen del concepto), que consiste en "toda la estructura cognitiva de un sujeto asociada a un concepto matemático y que incluye todas las imágenes mentales, las propiedades y los procesos asociados al concepto. Se construye a lo largo de los años por experiencias de toda clase y va cambiando según el individuo madura y encuentra nuevos estímulos" Tall y Vinner (1981, p. 152). Esta imagen del concepto está formada por representaciones visuales, recuerdos de experiencias con el concepto y registro de ejemplos. La imagen del concepto, es entonces, toda la estructura cognitiva asociada a una noción matemática, aunque no sea necesariamente coherente en todo momento ya que los estudiantes pueden evocar imágenes contradictorias en momentos diferentes. Una imagen mental (Azcárate y Camacho, 2003) es el conjunto de todas las imágenes asociadas al concepto en la mente del sujeto, incluyendo cualquier tipo de representación del concepto matemático que puede ser gráfica, numérica, o simbólica entre otras. En cambio, la *definición del concepto*, se refiere a "una definición verbal, a un conjunto de palabras para especificar un concepto" (Tall y Vinner, 1981, p. 152).

Asimismo, cuando un estudiante se enfrenta a una tarea con relación a un concepto matemático, generalmente esperamos que la definición sea activada para que le ayude en la resolución de la tarea, sin embargo, eso no es lo que suele ocurrir. Usualmente el estudiante no utiliza la definición y responde de acuerdo a su imagen del concepto. El carácter, adecuado o no, de las imágenes, propiedades y procesos que integran la imagen del concepto puede llevar a la aparición de errores e inconsistencias. El conflicto entre la imagen del concepto y la definición del concepto significa, en la práctica, la ausencia de una verdadera comprensión del concepto por parte del alumno.

Estas reflexiones son fundamentales, teniendo en cuenta el papel que juegan las definiciones y las representaciones mentales en la comprensión y construcción de los conceptos matemáticos. En relación a las definiciones éstas representan, más que cualquier otro aspecto, el conflicto entre la estructura de la propia Matemática y los procesos cognitivos necesarios para la adquisición de un concepto matemático por parte del sujeto (Vinner, 1991).

Se supone que adquirir un concepto significa tener una imagen conceptual de forma que se asocien ciertos significados a la palabra que designa el concepto: imágenes mentales, propiedades, procedimientos, experiencias, sensaciones, además, de tener un dominio de la complejidad y construcción del concepto, porque muchos alumnos recuerdan de memoria la definición de un concepto producto de la instrucción previa pero cuando tienen que utilizarlo no saben cómo hacerlo o lo hacen de forma errónea.

En lo que se refiere a las representaciones, según Dreyfus y Eisenberg (1990) estas tienen una importante función en Matemáticas. Hay que distinguir entre las representaciones simbólicas y las mentales. Las representaciones simbólicas involucran relaciones entre los signos y sus significados, son representaciones externas que tienen una finalidad comunicativa. Las representaciones mentales son aquellas que recogen la generación de imágenes, ejemplos o aspectos de un cierto objeto. Son representaciones internas y propias de cada sujeto.

Estos aspectos, tienen relación con la investigación que aquí presentamos, puesto que el objeto de estudio es la comprensión de un concepto matemático con el objetivo de caracterizar los niveles de desarrollo del esquema del concepto de Integral Definida que tienen los estudiantes universitarios.

El concepto de Integral Definida es uno de los conceptos fundamentales del Análisis Matemático, se incluye en el currículo de diferentes carreras y, en concreto, aparece en el plan de estudios de la Licenciatura de Matemáticas de Colombia; por tanto resulta de interés el análisis de su comprensión. La comprensión de un concepto matemático es básica para la construcción del conocimiento; al respecto, Dreyfus (1991) manifiesta que comprender es un proceso que tiene lugar en la mente del estudiante y es el resultado de una larga secuencia de actividades de aprendizaje durante las cuales ocurren e interactúan una gran cantidad de procesos mentales.

El aprendizaje del concepto de Integral Definida, de acuerdo con nuestra experiencia y los resultados obtenidos en diversas investigaciones, presenta dificultades para los estudiantes que se manifiestan mediante la utilización mecánica, algorítmica y memorística de su definición; no logran establecer una conexión entre el pensamiento numérico, algebraico, geométrico y analítico; tienen problemas para interpretar las gráficas de áreas bajo curvas cuando la gráfica de la función pasa de ser positiva a ser negativa o presenta discontinuidades; en otros casos piensan la integral sólo asociada al concepto de área pero aislada de otros contextos; y demuestran dificultades para aplicar las propiedades de la Integral Definida.

Resumiendo, los problemas en el aprendizaje del concepto de Integral Definida, se pueden sintetizar de la siguiente forma:

- Generalmente los estudiantes identifican “Integral” con “primitiva”. La integral para ellos no comporta ningún proceso de convergencia ni tampoco un aspecto geométrico. Es por tanto, un proceso puramente algebraico, más o menos complicado, de modo que un estudiante puede conocer diversas técnicas de integración e incluso saberlas aplicar, y al mismo tiempo, no ser capaz de aplicarlas al cálculo de un área o ignorar por completo qué son las sumas de Riemann. La primera imagen que evocan muchos estudiantes sobre Integral es la de “hallar una función de la que se conoce la derivada".

- Los estudiantes generalmente identifican las Integrales Definidas con la regla de Barrow, incluso cuando esta no pueda aplicarse. Es el caso de los resultados encontrados por Mundy (1984), donde un porcentaje alto de estudiantes no supo responder a la pregunta: ¿Por qué $\int_{-1}^{1} x^{-2}\,dx = \left[-x^{-1}\right]_{-1}^{1} = (-1) - 1 = -2$, es incorrecto? Esto pone en evidencia que el estudiante no sólo desconoce las condiciones para poder aplicar la regla de Barrow, sino que además muestra una desconexión entre la definición del concepto de Integral Definida y la imagen particular que tiene de este concepto matemático.

- Falta de relación entre el concepto de Integral Definida y el de área. Muchos estudiantes no distinguen entre la Integral Definida como área y la Integral Definida cómo cálculo algebraico, porque no establecen una conexión entre la representación gráfica y la representación algebraica de una función y no son capaces de calcular el área bajo una curva a partir de su gráfica. En otros casos porque el estudiante no tiene los conceptos previos necesarios para resolver la tarea satisfactoriamente. En este sentido, Mundy (1984) encontró también que un 95% de los estudiantes respondieron incorrectamente a la pregunta: Calcular la, $\int_{-3}^{3} |x+2|\,dx$, en la que les planteó varias opciones de respuesta; porque no saben integrar la función valor absoluto y no han logrado establecer una relación entre la representación algebraica formal y la visualización gráfica de la función.

Otros estudios, han demostrado el predomino del modo algebraico sobre el gráfico que tienen los estudiantes al resolver tareas de Cálculo Integral, hay un dominio de los procedimientos algorítmicos frente a los aspectos conceptuales. Al respecto, Orton (1980), (citado por Azcárate et al. 1996, p. 15) pone de manifiesto que existe "un nivel relativamente bueno en la manipulación de los algoritmos algebraicos que aparecen en los cálculos de primitivas de funciones y, sin embargo, dificultades en la conceptualización de los procesos de límite asociados al concepto de Integral Definida; por ejemplo, pocos alumnos fueron capaces de expresar de forma correcta que el valor exacto del área bajo una parte de una parábola se podía obtener como el límite de sumas de franjas rectangulares". Asimismo, hablan de otras dificultades en el cálculo de áreas limitadas por curvas que presentan valores negativos o discontinuidades, y afirman que "en palabras de Orton muchos estudiantes demuestran saber lo que tienen que hacer, pero cuando se les pregunta acerca de su método no saben realmente por qué lo hacen de esta manera" (Azcárate et al. 1996, p. 15).

Por todo lo anterior, consideramos que el aprendizaje del concepto de Integral Definida es un foco importante de investigación, lo que justifica esta investigación. Se tratará de analizar los diferentes niveles de desarrollo del esquema del concepto de Integral Definida que tienen los estudiantes universitarios que acaban de estudiar, por primera vez, éste concepto matemático. Para lo cual primero haremos un análisis estructural del contenido, atendiendo a cómo aparece el desarrollo curricular del concepto de Integral Definida en los libros de texto del bachillerato y de universidad.

1.2. La Integral Definida en los libros de texto del bachillerato y de universidad.

Hemos realizado una revisión de libros de texto de bachillerato y universidad para saber cómo se presenta en ellos el concepto de Integral Definida y, así, determinar los elementos matemáticos que configuran este concepto. Los libros de texto que se escogieron para dicho análisis pertenecen a editoriales de gran difusión a nivel de España en el caso de los textos del bachillerato e internacional como es el caso de los libros de texto universitarios. Son cinco textos de bachillerato y cinco de universidad y a continuación indicamos la referencia correspondiente a cada uno de ellos.

a. Libros de texto de bachillerato.

- Anzola, M. y Vizmanos, J. R. (2003). *Ciencias de la naturaleza y de la Salud y Tecnología. Algoritmo, Matemáticas 2, Bachillerato.* Madrid: SM.
- Biosca, A., Espinet, M. J., Fandos, M. J. y Jimeno, M. (1999). *Matemáticas II,*

Bachillerato. Barcelona: Edebé.

- Colera, J., Olivera, M. J. y Fernández, S**.** (1997). *Matemáticas II, Bachillerato LOGSE*. Madrid: Anaya.
- Abellanas, L., García, J. C. y Martínez, C. (1996). *Matemáticas 2, Bachillerato LOGSE*. Madrid: McGraw-Hill.
- Rodríguez, E., Ayuso, M. B., Pinedo, C., López, S. y Díez, Á. (1993). *Matemáticas II COU.* Zaragoza: Edelvives.

b. Libros de texto universitarios.

- Larson, R., Hostetler, R. P. y Edwars, B. H. (2002). *Cálculo I* (7ª ed.). Madrid: Pirámide.
- Bradley, G. L. y Smith, K. J. (2000). *Cálculo de una variable*. (Vol. 1). Madrid: Prentice Hall.
- García, A., Gutiérrez, A., Rodríguez, G., García, F., López, A. y De la Villa, A. (1994). *Cálculo I Teoría y problemas de Análisis Matemático en una variable.* Madrid: Clagsa.
- Apóstol, T. M. (1991). *Calculus, Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal.* (Vol. 1). (2ª ed.). Barcelona: Reverté.
- Leithold, L. (1982). *El Cálculo con Geometría Analítica* (4ª ed.). México: Harla.

Estos textos se escogieron porque se trataba, en primer lugar, de analizar cómo se empieza a desarrollar el concepto de Integral Definida en el bachillerato y cómo se produce el paso a la universidad ya que la población objeto de esta investigación, no ha estudiado este concepto hasta que inicia sus estudios superiores y, en segundo lugar, porque esto nos permitió determinar los elementos matemáticos que configuran la noción de Integral Definida para hacer la descomposición genética de este concepto.

En cada uno de los dos niveles educativos los textos se consideró cómo está organizada la unidad didáctica de la Integral Definida, qué conceptos se incluyen y qué tipos de problemas se presentan, (ver tablas 1 – 10). Para cada tabla, la columna de la izquierda representa los epígrafes literales de cada texto y la columna de la derecha presenta los conceptos abordados en cada uno de estos epígrafes. En la última fila de cada tabla se describe el enfoque metodológico de las actividades así como un recuento de los problemas y los ejercicios de aplicación teórica y procedimental.

La tabla 11, representa el paso previo al resumen final (tabla 12), y consta de dos columnas, la de la izquierda contiene un listado de los temas más frecuentes que están presentes en todos los libros de texto y la columna de la derecha una descomposición de todos los subtemas correspondientes a cada uno de los elementos matemáticos indicados en la columna de la izquierda.

Finalmente, la tabla 12, contiene la concreción de los elementos matemáticos encontrados para cada uno de los distintos libros de texto. En la columna de la izquierda están ubicados los elementos matemáticos que aparecen reiteradamente en los 10 libros de texto analizados y en cada una de las columnas de la derecha se indica mediante un aspa la presencia de dichos elementos en cada editorial.

El orden en que aparecen los elementos matemáticos tiene que ver, por un lado con la estructura formal como se presenta el concepto matemático en los distintos libros de texto y por otro, con el proceso de construcción mental que hace el alumno del concepto de Integral Definida.

1.2.1. Libros de texto de bachillerato

Este libro de texto de la editorial SM, corresponde a las Matemáticas de segundo de bachillerato, modalidades de Ciencias de la naturaleza y la Salud y Tecnología. En su estructura curricular se identifican tres bloques temáticos: Aritmética y Álgebra, Geometría, y Análisis de funciones, y cada bloque temático está formado de diferentes unidades didácticas. El concepto de Integral Definida aparece al finalizar el bloque temático del Análisis de Funciones en la unidad 19 y el concepto como tal se desarrolla a partir de la página 375 hasta la página 387, como se presenta a continuación.

Editorial	Título	Autores	Ciudad	Año
SM	Ciencias de la Naturaleza y de la Salud y Tecnología. ALGORITMO, Matemáticas 2.	Anzola, M., y Vizmanos, J. R.	Madrid	2003

Contenidos	
Área de trapecios curvilíneos	Explicación gráfica y algebraica.
Área bajo una curva	Aproximación. Regla del Trapecio.
Área por rectángulos superiores e inferiores	Suma superior y suma inferior Área del recinto $R\left(f\left(x\right)\left[a, b\right]\right)$
Integral Definida	Integral definida como límite de rectángulos medios. Signo de la integral Definida: funciones positivas y negativas.
Propiedades de la Integral Definida.	Enuncia cinco propiedades: unión de intervalos, especiales, suma o diferencia y de la constante.
Tasa de variación media e integrales:	Teorema de la media: definición y explicación gráfica y algebraica.
Función Integral	Definición gráfica y analítica.
Derivada de la función Integral.	Definición y explicación gráfica y algebraica.
Integral Definida en $\left[a, b\right]$	Teorema de Barrow: definición y explicación.
Integrales con Calculadora y ordenador.	Instrucciones para el manejo de la calculadora y el ordenador.
Aplicaciones	Área del recinto donde interviene una función positiva y una negativa. Área del recinto donde intervienen dos funciones. Volumen de un cuerpo de revolución. Volumen de un cuerpo por secciones: Teorema de Cavalieri.
Ejercicios	En algunos epígrafes aparecen ejercicios resueltos. Al final de la unidad didáctica aparecen 41 ejercicios de aplicación teórica y procedimental. En las aplicaciones de cada apartado aparecen ejercicios resueltos y un conjunto de 66 de carácter teórico y procedimental para resolver.

Tabla 1.1. Desarrollo de contenidos y actividades sobre la Integral Definida. Editorial SM.

Como puede notarse los elementos matemáticos que aparecen en el libro de texto tienen que ver con el área como aproximación, el área como límite de una suma, la Integral Definida, las propiedades de la Integral Definida, el teorema de valor medio y el teorema de Barrow, desarrollados tanto de forma gráfica utilizando figuras geométricas, como algebraica por medio de fórmulas y expresiones algebraicas, y algún elemento matemático está representado de forma analítica.

El siguiente libro de texto de la editorial Edebé, está estructurado en unidades agrupadas en tres bloques temáticos: Álgebra lineal, Geometría y Análisis. Cada bloque se inicia motivado con una referencia histórica y las unidades están estructuradas en: páginas iniciales (contexto, objetivo, esquema y preparación), desarrollo de la unidad (exposición, ejemplos, ejercicios y aclaraciones), resolución de ejercicios y problemas, organización de conocimientos (mapa conceptual), actividades y estrategias de resolución de problemas. El concepto de Integral Definida se presenta en la unidad 15, al finalizar el bloque temático del Análisis Matemático, a partir de la página 320 hasta la página 341, y viene desarrollado como se muestra a continuación.

Editorial	Título	Autores	Ciudad	Año
Edebé	Matemáticas II Bachillerato	Biosca, A., Espinet, M. J., Fandos, M. J., y Jimeno, M.	Barcelona	1999
Contenidos				
Área bajo una curva.	Describe dos procedimientos gráficos y algebraicos de aproximación del área bajo una curva; a través de las sumas de áreas de rectángulos.			
Integral Definida.	Explicación gráfica, algebraica y analítica de la integral de Riemann. Propiedades: Enuncia y explica 6 propiedades: suma y diferencia de integrales, integral de una constante, unión de intervalos, integrales especiales y uso de La comparación.			
Teoremas de integración.	Teorema del valor medio del Cálculo Integral: Interpretación geométrica. Teorema fundamental del Cálculo: Enunciado y demostración. Regla de Barrow: Explicación, demostración y ejemplos.			
Aplicaciones.	Áreas de figuras planas: Área limitada por la gráfica de una función continua, el eje de las abscisas y las rectas $x=a$ y $x=b$ y Área limitada por la gráfica de dos funciones continuas y las rectas $x=a$ y $x=b$. Volumen de un sólido de revolución: Explicación gráfica y analítica, definición y ejemplo. Aplicaciones en física: Variación del espacio recorrido, variación de la velocidad y trabajo.			
Ejercicios.	Al final de los epígrafes de teoremas y aplicaciones proponen un conjunto variado de resolución de ejercicios y problemas. Finalmente proponen una colección de 33 ejercicios (actividades) de aplicación teórica y procedimental para resolver.			

Tabla 1.2. Desarrollo de contenidos y actividades sobre la Integral Definida. Editorial Edebé.

En la tabla se pone de manifiesto que en la unidad didáctica de Integral Definida aparecen los elementos matemáticos que hacen referencia al área como aproximación utilizando sumas de áreas de rectángulos, la Integral Definida como el límite de una suma de Riemann, las propiedades de la Integral Definida y los teoremas fundamentales y de valor medio. Todos los elementos matemáticos aparecen en los sistemas de representación gráfico, algebraico y algunos de forma analítica.

El libro de la editorial Anaya, que corresponde a las Matemáticas de las modalidades de Ciencias de la naturaleza y de la Salud y Tecnología, en su estructura curricular presenta tres bloques temáticos: Álgebra, Geometría y Funciones, y cada uno de estos bloques temáticos está a su vez organizado en unidades didácticas. Al inicio del texto aparece un apartado sobre resolución de problemas que contiene consejos, estrategias y demostración. El concepto de Integral Definida está en el bloque temático de Funciones, en la unidad 16, al final del texto desde la página 394 hasta la página 414. La unidad se inicia con unas interpretaciones gráficas, un panorama del tema y en el desarrollo las explicaciones van acompañadas de ejemplos. Los elementos matemáticos que van configurando el concepto de Integral Definida han sido desarrollados utilizando los sistemas de representación gráfico y algebraico como vemos en la tabla siguiente.

<table>
<tr><th>Editorial</th><th>Título</th><th>Autores</th><th>Ciudad</th><th>Año</th></tr>
<tr><td>Anaya</td><td>Matemáticas II
2º Bachillerato LOGSE.</td><td>Colera, J., Olivera, M. J., y Fernández, S.</td><td>Madrid</td><td>1997</td></tr>
<tr><th colspan="5">Contenidos</th></tr>
<tr><td colspan="2">Integral Definida</td><td colspan="3">Aproximación al área bajo una curva: explicación gráfica y algebraica.
Integral de una función continua: explicación gráfica y algebraica.
Áreas negativas: explicación para funciones positivas y negativas.
Conclusión y ejemplos representados de forma gráfica y algebraica.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Propiedades de la Integral</td><td colspan="3">A partir del concepto de Integral, enuncian 9 propiedades y en la última se incluye el teorema del valor medio del Cálculo Integral, con su demostración gráfica y analítica.</td></tr>
<tr><td colspan="2">La integral y su relación con la derivada</td><td colspan="3">La función área.
Teorema fundamental del Cálculo: enunciado, demostración y ejemplos.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Regla de Barrow.</td><td colspan="3">Enunciado, demostración y regla práctica (regla de Barrow).</td></tr>
<tr><td colspan="2">Cálculo de áreas Mediante Integrales</td><td colspan="3">Área comprendida entre dos curvas: explicaciones gráficas y algebraicas para funciones que cambian de signo.
Ejemplos.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Volumen de un cuerpo de revolución.</td><td colspan="3">Definición y ejemplos.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ejercicios</td><td colspan="3">En cada uno de los epígrafes excepto en el de las propiedades, aparecen ejercicios resueltos a manera de ejemplo o explicación de la teoría y otros ejercicios propuestos para que los estudiantes los resuelvan.
Al final de la unidad didáctica, se plantea una colección de ejercicios y problemas resueltos y propuestos de aplicación teórica y procedimental.</td></tr>
</table>

Tabla 1.3. Desarrollo de contenidos y actividades sobre la Integral Definida. Editorial Anaya

En la tabla se pueden observar los elementos matemáticos considerados por los autores que configuran el concepto de Integral Definida entre los que podemos apreciar: el concepto de área como aproximación, la Integral Definida, la integral de una función continua y la Integral de funciones positivas y negativas, las propiedades de la Integral Definida, los teoremas fundamentales y el teorema del valor medio.

El libro de texto de la editorial de MacGraw-Hill, tiene una estructura curricular organizada en tres bloques temáticos: Álgebra Lineal, Geometría y Análisis, y cada bloque temático a su vez está dividido en unidades didácticas. El Bloque temático III, corresponde al Análisis y está constituido por 7 unidades didácticas, de las cuales las dos últimas, la 16 y 17, tienen que ver con el desarrollo del concepto de Integral Definida y sus aplicaciones desde la página 364 hasta la 413. Las unidades en las que se desarrolla el concepto de Integral Definida vienen organizadas a partir de objetivos y se incluyen aclaraciones, procedimientos y actividades (ejemplos y/o ejercicios de aplicación), una introducción y una pequeña biografía de Isaac Barrow y de Georg Friedrich Bernhar Riemann. En la siguiente tabla se incluyen los diferentes elementos matemáticos considerados en torno a la Integral Definida.

Editorial	**Título**	**Autores**	**Ciudad**	**Año**
McGraw - Hill	Matemáticas 2 Bachillerato LOGSE	Abellanas, L., García, J. C., y Martínez, C.	Madrid	1996
Contenidos				
El área y la Integral Definida.		Partición del intervalo, sumas inferiores y superiores. Teorema sobre la definición de Integral Definida. Definición de área. Extensiones del concepto de área: funciones negativas y funciones continuas a trozos.		
Propiedades de las Integrales Definidas.		Suma, producto por una constante, positividad, orden y aditividad. Extensión a otros intervalos.		
Cálculo de integrales: S.O.S.		Presenta un ejemplo gráfico y algebraico para calcular el área bajo la curva de $y = x^2$, entre los puntos de las abscisas $x = 1$ y $x = 2$.		
El teorema fundamental del Cálculo.		Enunciado, Demostración e interpretación del teorema a través de la resolución de un problema.		
La regla de Barrow.		Enunciado y demostración del segundo teorema fundamental del Cálculo. Enunciado y demostración del teorema sobre la regla de Barrow.		
Aplicaciones de la Integral.		Área bajo la gráfica de una función positiva. Área limitada por una gráfica arbitraria. Área entre dos gráficas. Volumen de un sólido de sección conocida. Volumen de sólidos de revolución. Valor medio de una función. Integrales con límites variables. Cambios de variable en una Integral Definida.		
Ejercicios.		Al finalizar la unidad en problemas propuestos se plantean algunos ejercicios de aplicación teórica y procedimental. En la autoevaluación se propone a los estudiantes desarrollar algunos ejercicios de comprensión teórica y procedimental.		

Tabla 1.4. Desarrollo de contenidos y actividades sobre la Integral Definida. Editorial McGraw-Hill.

En la tabla podemos apreciar los elementos matemáticos que para estos autores configuran el concepto de Integral Definida: el concepto de área, la Integral Definida de funciones positivas, negativas y continuas a trozos, las propiedades de la Integral Definida, el teorema fundamental del Cálculo y el teorema de valor medio. Para la representación de los elementos matemáticos se usan los sistemas gráfico y algebraico.

El libro de texto del Curso de Orientación Universitaria (COU) de la editorial Edelvives, en su estructura curricular presenta tres capítulos: Elementos de Álgebra lineal, Análisis descriptivo de funciones y gráficas, y Elementos de Probabilidad y Estadística. Cada capítulo ha sido dividido en bloques temáticos y éstos a su vez en temas. En cada tema se hace una exposición teórico-práctica y al final aparecen unas actividades de síntesis que consisten en ejercicios resueltos y propuestos. El concepto de Integral Definida forma parte del capítulo 2 de Análisis descriptivo de funciones y gráficas, se incluye en el bloque temático 4 de Integrales, y se desarrolla en el apartado 4.3 que va desde la página 241 hasta la página 253. En la tabla siguiente se resumen los elementos matemáticos considerados a lo largo del tema.

Editorial	**Título**	**Autores**	**Ciudad**	**Año**
Edelvives	Matemáticas II COU	Rodríguez, E., Ayuso, M. B., Pinedo, C., López, S., y Díez Á.	Zaragoza	1993

Contenidos	
Integral definida.	Definición: Gráfica y algebraica. Ejemplo. Ejemplos: suma de áreas de rectángulos inscritos y circunscritos. Límite de las sumas aproximadas: aquí definen de forma “intuitiva” la integral definida cuando el límite de las sumas tiende a cero. La integral de funciones positivas y negativas.
Teorema del valor medio.	Enunciado. Demostración gráfica y analítica. Ejemplo.
Teorema fundamental.	Enunciado. Demostración gráfica y analítica. Ejemplo.
Regla de Barrow.	Enunciado. Explicación gráfica y algebraica. Ejemplo.
Propiedades de la Integral definida.	Enunciados: Utilizando la definición y la regla de Barrow, se demuestran 5 propiedades. Ejemplos.
Los métodos de integración y la integral definida.	Por cambio de variable: Definición. Ejemplo. Por partes: Definición. Ejemplo.
Cálculo de áreas.	Explicaciones gráficas y analíticas. El área para regiones positivas y negativas. Ejemplos.
Área comprendida entre dos curvas	Explicaciones gráficas y algebraicas. Ejemplos.
Ejercicios resueltos y ejercicios propuestos.	Al finalizar la unidad didáctica se plantean unas actividades de síntesis, estructuradas en 2 ejercicios resueltos y 4 propuestos ambos de aplicación teórica y procedimental.

Tabla 1.5. Desarrollo de contenidos y actividades sobre la Integral Definida. Editorial Edelvives.

En la tabla se evidencia los elementos matemáticos representados tanto gráfica, como algebraicamente y en algún caso de forma analítica que estos consideran que para el desarrollo de la comprensión del concepto de Integral Definida: el área como aproximación por defecto y por exceso, el área como límite de una suma, la Integral Definida de funciones positivas y negativas, las propiedades de la Integral Definida, y los teoremas fundamentales y del valor medio.

1.2.2. Libros de texto universitarios.

El libro de texto de la editorial Pirámide, presenta una estructura curricular formada por un capitulo de preparación al Cálculo y 8 capítulos dedicados al estudio de: Límites y sus propiedades, La derivada, Aplicaciones de la derivada, Integración, Funciones logarítmicas, exponenciales y otras funciones trascendentes, Aplicaciones de la integral, Técnicas de integración, regla de L`Hôpital e integrales impropias y Series infinitas. El concepto de Integral Definida aparece en el capítulo 4, desde la página 253 hasta la 312.

Editorial	**Título**	**Autores**	**Ciudad**	**Año**
Pirámide	Cálculo I 7ª Edición	Larson, R., Hostetler, R. P., y Edwards, B. H.	Madrid	2002
Contenidos				
Área	La notación sigma y ejemplos. Teorema: fórmulas de suma y ejemplo de evaluación de una suma. Área de una región plana y ejemplo gráfico y algebraico. Sumas inferiores y superiores y ejemplo. Teorema: límites de sumas superiores e inferiores. Definición del área de una región plana. Ejemplos de cálculo de área como límite.			
Sumas de Riemann e Integral Definida.	Sumas de Riemann y una partición con subintervalos de distintas anchuras. Definición de sumas de Riemann. Integrales definidas: Definición de la Integral Definida. Teorema: continuidad implica integrabilidad. Cálculo de una integral definida mediante un límite. Teorema: la Integral Definida como área de una región. Ejemplo de áreas de figuras geométricas comunes. Propiedades de las integrales definidas: especiales, aditiva de intervalos, conservación de desigualdades y teorema de propiedades de las integrales definidas y ejemplo			
El teorema Fundamental del Cálculo.	Enunciado, demostración. Y estrategia para usar el teorema fundamental del Cálculo. Ejemplos (3) sobre aplicaciones: cálculo de una integral definida, integral de un valor absoluto y el área acotada por una parábola. El teorema del valor medio y su demostración. Definición del valor medio de una función. Ejemplo: valor medio de una función y velocidad del sonido. El segundo teorema fundamental del Cálculo enunciado, demostración y aplicaciones. Ejemplo de la Integral definida como función.			
Ejercicios	La unidad didáctica está dividida en tres secciones y en cada una de ellas se proponen un conjunto variado de ejercicios de aplicación teórica y procedimental. Los ejercicios son de tipo gráfico y simbólico y los enunciados son verbales.			

Tabla 1.6. Desarrollo de contenidos y actividades sobre Integral Definida. Editorial Pirámide.

En la tabla se aborda el concepto de área como aproximación, el área como límite de una suma, la Integral Definida, propiedades de las integrales definidas, y los teoremas fundamentales del Cálculo del valor medio. Los elementos matemáticos se presentan de forma gráfica, algebraica y analítica y finaliza el capítulo con la integración por sustitución (cambio de variable) y la integración numérica.

El libro de texto de la editorial Prentice Hall, tiene 8 unidades temáticas: Funciones y límites, Técnicas de derivación y aplicaciones, Otras aplicaciones de la derivada, Integración, Funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas inversas, Otras aplicaciones de la integral, Métodos de integración y Series. El concepto de Integral Definida aparece en la unidad 4, a partir de una perspectiva global del capítulo, una presentación motivada mediante un problema de aplicación y el desarrollo de la unidad va de la página 281 a la 353, como sigue.

<table>
<tr><th>Editorial</th><th>Título</th><th>Autores</th><th>Ciudad</th><th>Año</th></tr>
<tr><td>Prentice Hall</td><td>Cálculo de una variable</td><td>Bradley, G. L., y Smith, K. J. (2000).</td><td>Madrid</td><td>2000</td></tr>
<tr><th colspan="5">Contenidos</th></tr>
<tr><td colspan="2">El área como límite de una suma; notación sumatoria.</td><td colspan="3">El área como límite de una suma.
Esquema general de aproximación: explicación gráfica, algebraica y analítica.
Notación sumatoria: reglas básicas y fórmulas para las sumas.
El área en fórmulas sumatorias: ejemplos.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Las sumas de Riemann y la integral definida.</td><td colspan="3">Sumas de Riemann: explicación analítica.
La integral definida: explicación algebraica y analítica.
El área como integral: definición y ejemplos.
La distancia como integral.
Propiedades de la integral definida: de linealidad, de dominación y de subdivisión.</td></tr>
<tr><td colspan="2">El teorema fundamental del Cálculo; integración por cambio de variable.</td><td colspan="3">Teorema fundamental del Cálculo: enunciado y demostración.
Cambio de variable en una integral indefinida.
Cambio de variable en una integral definida.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Introducción a las ecuaciones diferenciales.</td><td colspan="3">Introducción y terminología, Ecuaciones diferenciales de variables separadas. Trayectorias ortogonales. Flujo de un fluido a través de un orificio.
Velocidad de escape de un proyectil.</td></tr>
<tr><td colspan="2">El teorema del valor medio del Cálculo integral; valor medio.</td><td colspan="3">Teorema del valor medio del Cálculo Integral: enunciado y demostración.
Valor medio de una función.
Límites de integración variables.
Regla de Leibniz.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Integración numérica: la regla del trapecio y la de Simpson.</td><td colspan="3">Aproximación por rectángulos: explicaciones gráficas y algebraicas.
Regla del trapecio y de Simpson: explicaciones gráficas y algebraicas.
Estimación del error.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Área comprendida entre dos curvas.</td><td colspan="3">Área comprendida entre dos curvas, y el área por bandas verticales y horizontales.
Dos aplicaciones a la economía.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Repaso del capítulo.</td><td colspan="3">Los problemas iniciales de comprobación calibran el conocimiento de los conceptos.
Otros problemas (Pág. 19-30), sirven para comprobar la comprensión de los conceptos mediante la realización de problemas prácticos.
Los ejercicios de aplicación teórica y procedimental presentan variedades de situaciones para resolver.</td></tr>
</table>

Tabla 1.7. Desarrollo de contenidos y actividades sobre la Integral Definida. Editorial Prentice Hall.

En la tabla se pone de manifiesto que los elementos matemáticos están representados de modo gráfico, algebraico y analítico y son: el esquema general de aproximación, el área como límite de una suma, la integral definida como el límite de una suma Riemann, las propiedades de las integrales definidas y los teoremas fundamentales y del valor medio.

En el libro de texto de la editorial Clagsa su estructura curricular está organizada en dos partes: Métodos Analíticos del Cálculo y Métodos Numéricos, y cada una de éstas a su vez está dividida en capítulos. El texto en general consta de 21 capítulos, de los cuales el capítulo 12 corresponde a lo que los autores llaman Integral de Riemann y se encuentra desarrollada de la página 369 a la página 400, como se observa en la tabla.

Editorial	**Título**	**Autores**	**Ciudad**	**Año**
Clagsa	Cálculo I Teoría y problemas de Análisis Matemático en una variable.	García, A., Gutiérrez, A., Rodríguez, G., García, F., López, A., y De la Villa, A.	Madrid	1994
Contenidos				
Definiciones Generales.		Partición. Sumas superiores e inferiores de Riemann. Refinamiento. Proposición. Integrabilidad. Teorema criterios de integrabilidad de Riemann. Teorema. Integral como límite de una suma.		
Propiedades de la integral definida.		Linealidad, monotonía, acotación y aditiva del intervalo		
La clase de funciones.		Teoremas: enuncian las condiciones suficientes de integrabilidad, como monotonía, continuidad e integrabilidad de una función. Corolario.		
Promedio Integral y Teorema del valor medio		Definición de promedio integral. Teorema del valor medio. Teorema del valor medio generalizado. Definición de media cuadrática.		
Teorema fundamental del cálculo.		Teorema: enunciado. Corolario. Teorema fundamental del Cálculo: enunciado. Corolario regla de Barrow.		
Evaluación de integrales.		Teorema de integración por partes. Primer teorema del cambio de variable. Segundo teorema de cambio de variable.		
Ejercicios		Al finalizar la unidad didáctica se presenta un apartado con un Test de autoevaluación de 11 preguntas de análisis teórico, un conjunto de 29 problemas resueltos de orden teórico y procedimental y por último una colección de 32 ejercicios propuestos también de carácter teórico y procedimental para resolver		

Tabla 1.8. Desarrollo de contenidos y actividades sobre la Integral Definida. Editorial Clagsa.

En la tabla aparecen los elementos matemáticos que van generando el concepto de Integral Definida: particiones, límites de sumas superiores e inferiores de Riemann; es decir los conceptos de área como aproximación, la Integral como límite de una suma, las propiedades de la Integral Definida, los teoremas fundamentales y el teorema de valor medio representados de forma gráfica, algebraica y analítica.

El libro de texto de la editorial Reverté, es teórico, los primeros 4 apartados están dedicados a preparar los elementos teóricos que conforman los 16 bloques temáticos que configuran la estructura curricular del mismo. El concepto de Integral Definida aparece antes que el de derivada, en los apartados 1 y 2 bajo los siguientes epígrafes: los conceptos del Cálculo Integral y algunas aplicaciones de Integración.

Editorial	**Título**	**Autores**	**Ciudad**	**Año**
Reverté	CALCULUS, Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al Álgebra Lineal. (Vol. 1). (2ª ed.).	Apóstol, T. M.	Barcelona	1991

Contenidos	
Definición de integral para funciones escalonadas.	Presenta definiciones, explicaciones analíticas y gráficas.
Propiedades de la integral de una función escalonada.	Teoremas y demostración de las propiedades: aditiva, homogénea, de linealidad, comparación, aditividad respecto al intervalo de integración invarianza frente a una traslación y dilatación o contracción del intervalo de integración.
Otras nociones para integrales.	Explica otras formas de expresar una integral definida.
Integral de funciones más generales.	Definición de integral de una función acotada.
Integrales Superior e Inferior	Enunciado del teorema.
El área de un conjunto de ordenadas expresada como una integral.	Enuncia y demuestra dos teoremas de integrales acotadas en un intervalo.
Observaciones relativas a la teoría y técnica de la integración.	¿Qué funciones acotadas son integrables? Si una función f es integrable, cómo se calcula la integral de f?
Funciones monótona y monótona a trozos.	Presenta la gráfica de funciones crecientes, crecientes en sentido estricto, decreciente en sentido estricto y monótono a trozos.
Integrabilidad de funciones monótonas acotadas.	Enunciado del Teorema de una función monótona y su demostración.
Cálculo de la integral de una función monótona acotada	Teorema y demostración.
Cálculo de la $\int_0^b x^p\,dx$ siendo p entero positivo.	Teorema y demostración.
Integración de polinomios	Explicaciones analíticas.
Propiedades fundamentales de la Integral	Demostraciones.
Algunas aplicaciones de la integración.	El área de una región entre dos gráficas expresada como una integral. Funciones trigonométrica y Coordenadas polares. Volúmenes y al concepto de trabajo. Valor medio de una función.
Ejercicios	En dos apartados de la unidad, plantean ejercicios de aplicación teórica y procedimental. Al finalizar la unidad se proponen una variedad de ejercicios de aplicación teórica y en contextos específicos.

Tabla 1.9. Desarrollo de contenidos y actividades sobre la Integral Definida. Editorial Reverté.

En la tabla se evidencia los elementos matemáticos gráficos, algebraicos y analíticos que constituyen el concepto de Integral Definida: Integral de funciones escalonadas, el área como integral, propiedades de la Integral Definida, las condiciones de existencia de la Integral Definida, los teoremas fundamentales y del valor medio.

Finalmente, el libro de texto de la editorial Harla contiene 20 bloques temáticos organizados en unidades didácticas y cada una a su vez está dividida en distintos apartados. El concepto de Integral Definida se encuentra desarrollado en el capítulo seis, presenta definiciones, ejemplos, demostraciones de los teoremas y ejercicios de carácter procedimental y de aplicación a lo largo de las páginas 392 a la 498, como se manifiesta en la tabla siguiente.

Editorial	**Título**	**Autores**	**Ciudad**	**Año**
Harla	El Cálculo con Geometría Analítica. (4ª ed.).	Leithold, L.	México	1982

Contenidos	
Área.	Definición. Presenta 7 Teoremas que incluyen la sumatoria para realizar los cálculos. Demostración de cada teorema. Ejemplo ilustrativo en cada teorema. Definición analítica de la medida del área de la región y ejemplos.
Integral Definida.	Particiones, suma de Riemann y ejemplo ilustrativo. Definiciones analíticas de integral definida (2). Teorema: Integral de una función continua en un intervalo cerrado y ejemplo. Definición analítica de la medida del área de una región y su respectivo ejemplo. Definiciones (2), con ejemplos ilustrativos.
Propiedades de la Integral Definida.	Presenta nueve teoremas con sus respectivas demostraciones y ejemplos ilustrativos de cómo calcular integrales definidas.
Teorema del valor medio para integrales.	Explicación, ejemplo ilustrativo y demostración con ejemplo. Definición de valor medio o de valor promedio y ejemplo.
Teorema fundamental del Cálculo.	Introducción histórica de los conceptos básicos de la integral definida. Teoremas (2), demostraciones y ejemplos gráficos y algebraicos.
Integración aproximada.	Explicación introductoria. Teorema de la regla trapecial y ejemplo gráfico y algebraico. Teorema del valor aproximado y ejemplo gráfico y algebraico Teorema para una región acotada y demostración. Teorema de la regla de Simpson y ejemplo. Teorema y ejemplos.
Aplicaciones de la Integral Definida.	Área de una región en un plano. Volumen de un sólido de revolución: métodos del disco y del anillo circulares. Volumen de un sólido de revolución: método de las capas cilíndricas. Volumen de un sólido que tiene secciones planas paralelas conocidas. Trabajo mecánico: explicación ejemplo y definición. La longitud de arco de una curva plana.
Ejercicios	Cada sección presenta su definición formal, teorema, demostración, ilustraciones y propone ejercicios complementarios de aplicaciones teóricas y procedimentales.

Tabla 1.10. Desarrollo de contenidos y actividades sobre la Integral Definida. Editorial Harla.

En la tabla se evidencian los elementos matemáticos que para este autor configuran la construcción del concepto de Integral Definida y de sus aplicaciones: la integración numérica como una aproximación del área, la definición de área, las sumas de Riemann, la Integral Definida y la condición suficiente de integrabilidad, las propiedades de la Integral Definida, los teoremas fundamentales y el teorema de valor medio.

El análisis de los libros de texto nos llevó a determinar los contenidos que aparecen reiteradamente y que son comunes a todos los libros de textos estudiados; hemos denominado a estos conceptos elementos matemáticos y configuran el concepto de Integral Definida. La tabla siguiente muestra en la columna de la izquierda los elementos matemáticos y la columna de la derecha una descomposición de cada uno de estos elementos matemáticos.

Elementos Matemáticos	**Descomposición**
El área como aproximación	Definición de área, definición de la medida del área de una región, área de figuras planas, el área acotada por una parábola, área entre curvas, área limitada por una gráfica arbitraria, aproximación al área bajo una curva, aproximación por la regla del trapecio y la de Simpson, área por rectángulos superiores e inferiores, área en fórmulas sumatorias, y esquema general de aproximación.
El área como límite de una suma	Particiones, notación sumatoria, teoremas de formulas de suma, sumas de Riemann, definición de sumas de Riemann, sumas inferiores y superiores, sumas de Riemann y una partición con subintervalos de distintas anchuras, continuidad, teorema del límite de sumas inferiores y superiores.
La integral definida	Definición de la integral como área, la integral definida como el área bajo la gráfica de una función positiva y extensión del concepto de área a funciones negativas y continuas a trozos usando la integral definida, signo de la integral Definida, definición de la integral definida, teorema: continuidad implica integrabilidad, integral de una función continua y cálculo de una integral definida mediante un límite.
Las Propiedades de las Integrales.	Suma, múltiplo constante, positividad, orden, extensión a otros intervalos, monotonía, acotación, homogénea, linealidad, comparación, aditividad respecto al intervalo de integración, invarianza frente a una traslación y dilatación o contracción del intervalo de integración.
Los Teoremas fundamentales del Cálculo	Definición, demostración, interpretación, sustitución en una integral definida, estrategia para usar el teorema fundamental, cálculo de una integral definida, integral de un valor absoluto. Regla de Barrow: La integral y su relación con la derivada, enunciado y demostración del segundo teorema del Cálculo y teorema de integración.
Teorema del valor medio de una función.	Definición, interpretación geométrica, demostración, definición de promedio integral, definición de media cuadrática, valor medio de una función, límites de integración variables y regla de Leibniz.

Tabla 1.11. Descomposición de los Elementos Matemáticos que configuran el concepto de Integral Definida en los libros de texto del Bachillerato y de Universidad

Asimismo, hemos considerado una síntesis o resumen de cómo se presentan estos elementos matemáticos según que el libro de texto corresponda al nivel de bachillerato o universidad y de acuerdo con la editorial a la que pertenece cada libro de texto en la tabla que presentamos a continuación.

Resumen de los Elementos Matemáticos que aparecen reiteradamente sobre Integral Definida en Libros de Texto de Bachillerato y de Universidad según cada editorial										
	EDITORIALES									
Elementos Matemáticos	SM	Edebé	Anaya	MacGraw-Hill	Edelvives	Pirámide	PrenticeHall	Clagsa	Reverte	Harla
El área como aproximación	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
El área como límite de una suma	X	X	X	X	X	X	X	X		X
La Integral Definida	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Propiedades de la Integral Definida	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Teoremas fundamentales y del valor medio	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X

Tabla 1.12. Elementos Matemáticos que configuran el concepto de Integral Definida.

A partir del estudio realizado en los libros de texto podemos concluir que:

- En 8 de los 10 libros de texto, el tema de la Integral comienza con el cálculo de primitivas o antiderivadas y después presentan la Integral Definida.

- Los elementos matemáticos comunes a los libros de texto que configuran el concepto de Integral Definida se pueden agrupar en cinco bloques temáticos que hemos denominado: El área como aproximación, el área como límite de una suma, la Integral Definida, las propiedades de la integral definida y los teoremas fundamentales y del valor medio.

- En 9 de los 10 libros de texto después de presentar los elementos matemáticos que configuran el concepto de la Integral Definida aparece una sección o capítulo dedicado a las aplicaciones de la Integral Definida.

- El concepto de área como aproximación aparece de manera explícita en los libros de texto de bachillerato como de universidad en el desarrollo y construcción del concepto de Integral Definida utilizando particiones y aproximaciones de áreas por defecto y por exceso con rectángulos inscritos y circunscritos. Las aproximaciones numéricas a través de la regla del trapecio y de la de Simpson aparecen en 7 libros de texto.

- El concepto de área como límite de una suma se encuentra de forma explícita en 9 de los 10 libros de texto; de forma intuitiva en los textos de bachillerato y con mayor profundidad conceptual en los libros de textos universitarios.

- Las propiedades de la Integral Definida aparecen como relaciones fundamentales en la construcción y compresión del concepto de Integral Definida y están presentes en todos los textos de bachillerato y de universidad; algunas son comunes a ambos niveles, otras por su complejidad sólo aparecen en los textos universitarios.

- Los teoremas fundamentales y el teorema de valor medio aparecen en los diez libros de texto y constituye un elemento esencial para el cálculo de áreas bajo la curva. La regla de Barrow se presenta generalmente como el segundo teorema fundamental del Cálculo.

- Aunque los elementos matemáticos que configuran el concepto de Integral Definida son comunes tanto en los textos de bachillerato como de universidad, existe diferencias en la profundidad con la que se tratan los contenidos que conforman el concepto, en las relaciones lógicas que se establecen entre ellos y en la cantidad de elementos matemáticos que se utilizan.

- En los libros de texto del bachillerato se aprecia mayor énfasis en la presentación de los elementos matemáticos en los sistemas de representación gráfico y algebraico, y sólo se plantea esporádicamente algún elemento matemático de forma analítica. En los textos universitarios los elementos matemáticos son presentados y explicados en los sistemas de representación gráfico, algebraico y analítico.

- En todos los libros de texto los autores han trabajado sobre la construcción de la Integral de Riemann. La estructura curricular de la unidad didáctica sobre la Integral Definida está organizada en: exposición de los temas, ejemplos, y una gran variedad de ejercicios de aplicación teórica y procedimental.

- Estas conclusiones establecidas a partir de los libros de texto nos permitieron determinar los elementos matemáticos vinculados al concepto de Integral Definida así como el tipo de relaciones lógicas que se podían establecer entre ellos.

1. 3. La comprensión de Integral Definida como ámbito de investigación.

Después de hacer unas reflexiones sobre el aprendizaje y la comprensión de los conceptos matemáticos y de las dificultades que muestran los alumnos en el aprendizaje en particular de la Integral Definida, y de analizar cómo se desarrolla éste concepto en los libros de texto, describimos las aportaciones, que sobre la Integral Definida han sido motivo de estudio y aportación por algunos investigadores.

Las investigaciones sobre la Integral Definida revelan la existencia de dificultades en el aprendizaje y comprensión de este concepto y la necesidad de una mayor indagación en este campo del conocimiento. A continuación se describen algunas investigaciones siguiendo un orden cronológico.

Orton (1983) fue quien realizó una de las primeras investigaciones en torno a este tema en la que manifestó la preocupación de los profesores acerca del hecho que los estudiantes eran capaces de integrar y diferenciar pero demostraban poca comprensión real de estos procesos. El propósito principal de su trabajo fue investigar la comprensión por parte de los estudiantes de distintos aspectos que tienen que ver con el concepto de la integración y la diferenciación. En cuanto a la integración el estudio se realizó a través de entrevistas individuales a 110 estudiantes (16–22 años), que constaban de 38 cuestiones relacionadas con límites, áreas de rectángulos, aproximación del área bajo una curva, cálculo de integrales y cálculo de volúmenes de sólidos de revolución. Entre las conclusiones de la investigación, Orton destaca que:

- Para los estudiantes fueron difíciles las preguntas que se referían a la comprensión de la integración como límite de la suma, por lo que resulta poco viable introducir las integrales de esta forma, dado que el fin último es que los estudiantes sean capaces de integrar y dar respuesta a aplicaciones simples.

- El concepto de límite parece haber sido descuidado en niveles más elementales lo que no ayuda a la etapa siguiente de introducción de las integrales.

- El acceso a las calculadoras hace más fácil la integración numérica; en la práctica, los procedimientos realizados a mano pueden ser tediosos y las ventajas de tener una calculadora resultan más obvias en la integración que en la diferenciación (se trata de sumar números decimales); en definitiva las calculadoras facilitan el cálculo de áreas aproximadas bajo una curva.

- Resulta aconsejable que para la introducción del Cálculo se utilicen tanto diagramas como gráficos.

- Muchos estudiantes mostraron dificultades en la comprensión de la relación entre la Integral Definida y el área bajo la curva, por ejemplo cuando la curva atraviesa uno de los ejes.

Posteriormente, Mundy (1984) realizó el análisis de un cuestionario cumplimentado por 973 estudiantes que habían recibido un curso de Cálculo. Entre las preguntas que debían responder, citaremos algunas por su especial relevancia en nuestra investigación.

Una de ellas era de opción múltiple y se pedía a los estudiantes evaluar la integral: $\int_{-3}^{3} |x+2|\,dx.$, siendo las posibles opciones de respuestas: 0, 9, 12, 13 y 14. Sólo el 5.4% de los estudiantes respondió correctamente a la pregunta. El 24% indicó que era 0, el 22% que era 9 y el 48 % que era 12.

En otra tarea se pedía a los alumnos que argumentaran ¿Por qué es incorrecto?

$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} dx = \int_{-1}^{1} x^{-2} dx = \left. \frac{x^{-1}}{-1} \right|_{-1}^{1} = \left. \frac{-1}{x} \right|_{-1}^{1} = \frac{-1}{1} - \frac{-1}{1} = -2$, y comprobó que un porcentaje considerable de estudiantes no supo responder correctamente la pregunta, porque se limitó a utilizar la regla de Barrow para calcular la integral sin tener en cuenta que la función presenta una discontinuidad en un punto del intervalo. De este estudio concluyó que:

- Los estudiantes no tenían una comprensión visual de que la Integral Definida de funciones positivas puede ser considerada en términos de área bajo una curva.

- La Integral Definida se asocia con la regla de Barrow, aunque no cumpla las condiciones para poder aplicarse.

Por su parte, Turégano (1994) hizo una investigación sobre los conceptos en torno a la medida y el aprendizaje del Cálculo Infinitesimal, con el objetivo de encontrar un modelo dentro del contexto matemático (alternativo a la Integral de Riemann) para elaborar una propuesta didáctica que pudiera utilizarse en la enseñanza de la Integral Definida a estudiantes de secundaria. Para diseñar dicha propuesta parte de la génesis histórica del concepto, del estudio de textos y del currículo. La aplicación de la propuesta le permitió analizar las dificultades que encuentran los estudiantes en la iniciación al Cálculo y determinar si las dificultades de aprendizaje encontradas se pueden rectificar.

Este estudio fue desarrollado en dos fases, la primera en el ámbito de las ideas matemáticas y la segunda en el de la investigación educativa. En la primera fase la investigadora, apoyada en un modelo matemático de "definición de Integral basada en la idea de primera cuadratura" (Turégano, 1994, p. 36), elaboró una propuesta didáctica para enseñar a los estudiantes la Integral Definida a nivel conceptual, y la segunda fase la realizó con estudiantes, utilizando cuestionarios y entrevistas; a partir del análisis del diseño de situaciones didácticas, durante la etapa de aprendizaje, y del estudio de casos obtiene conclusiones, antes, durante y después del aprendizaje. Entre las conclusiones finales (después del aprendizaje) que tienen mayor relación con nuestra investigación están las siguientes:

- Los modelos visuales en la enseñanza del Cálculo mediante el uso del ordenador y la eliminación de cálculos algebraicos favorecen la formación y transformación de intuiciones y la creación de imágenes de los conceptos formales del Cálculo infinitesimal.

- La introducción de la Integral Definida de forma geométrica permite dar sentido a los conceptos de sucesión, límite, número real e Integral Definida en el contexto del cálculo de áreas bajo curvas.

- En el aprendizaje del concepto de Integral, al igual que en el área, los alumnos ponen de manifiesto tres imágenes mentales: “primitiva, operativa y descriptiva” Turégano (1994, p. 248). En la primitiva hacen referencia a la Integral asociada a una fórmula que les permite calcular áreas de figuras irregulares, aquí los alumnos no tienen una imagen específica ni de área ni de Integral, la operativa corresponde a una imagen de Integral como sinónimo de área, donde el alumno no ha logrado integrar todos los elementos subyacentes al concepto de Integral en un sólo concepto y la imagen descriptiva es la articulación geométrica y numérica del concepto, porque logran el paso al límite tanto a nivel de percepción visual como numérico y pueden transferirla a otros contextos.

- Para obtener una imagen descriptiva de Integral es necesario que el estudiante haya construido el concepto de área como magnitud, acepte la divisibilidad infinita de un segmento y la existencia del límite, y tenga una percepción completa de la representación gráfica.

- Las propiedades de las Integrales son justificadas por los alumnos desde dos tendencias: unos sólo pueden obtener esas relaciones en casos concretos y experimentales como por ejemplo, eligen el cálculo numérico para determinar la medida del área y otros las establecen para casos generales las relaciones entre las integrales y las regiones cuya área van a calcular.

En este mismo sentido, Calvo (1997) realizó un estudio cuyo objetivo era preparar las bases para una propuesta didáctica que permitiese a los estudiantes de un primer curso de Cálculo la construcción de la imagen del concepto de Integral Definida (concept image, en el sentido de Vinner, 1991), consistente con su definición formal, y rica en relaciones con los esquemas conceptuales de área y derivada. Uno de los instrumentos que utilizó fue un cuestionario de 10 ítems, que aplicó a 56 estudiantes. Entre las conclusiones de esta investigación tenemos:

- Sugiere utilizar como definiciones de Integral aquéllas que resulten independientes del concepto de derivada y del conjunto de reglas algorítmicas asociadas a su cálculo.

- Propone elegir como definición de Integral, la versión propuesta por Riemann y reformulada más tarde por Darboux en términos de supremos de sumas inferiores e ínfimas de sumas superiores.

- En cuanto a las conexiones con el esquema conceptual de área señala que el éxito en la actividad matemática se relaciona con la posesión, por parte del individuo, de ricos esquemas conceptuales que permitan, no sólo establecer conexiones con otros esquemas conceptuales, sino la existencia (en el propio esquema conceptual) de varias representaciones del mismo concepto relacionadas entre sí, de manera que faciliten el paso de una perspectiva a otra según las exigencias del problema que se ha de resolver.

- En el caso del concepto de Integral Definida, los aspectos o las representaciones cuya existencia y conexiones dan riqueza al esquema conceptual son la algebraica, la numérica y la gráfica.

- Un recurso para plantear a los estudiantes imágenes visuales enriquecedoras del esquema conceptual de Integral Definida consiste, en explorar su relación con el esquema conceptual que tienen de área.

Por otro lado, Czarnocha et al. (2000) realizaron un análisis epistemológico de las aportaciones de matemáticos tales como Cavalieri, Wallis y Roberval al desarrollo del concepto de la Integral Definida. Los sujetos objeto del estudio fueron 32 estudiantes de Ingeniería, Ciencias y Matemáticas, de los cuales 21 habían completado un curso semestral de Cálculo denominado Cálculo, Conceptos, Computación y Aprendizaje Cooperativo (C^4L), en el que habían participado 145 estudiantes; 10 habían completado un curso de dos semestres con clases magistrales al que asistieron un total de 2000 estudiantes; y uno había completado los dos cursos. Se escogieron los estudiantes a partir de las diferencias entre ellos y de forma que hubiera un número razonable de ambos grupos. El método de instrucción incluyó actividades de descubrimiento guiado adaptadas para un aprendizaje cooperativo en un entorno computacional y posteriormente se les realizó una entrevista audiograbada que duró un promedio de una hora. De los resultados concluyeron que:

- Es fascinante observar la percepción demostrada por los estudiantes cuando se les aplicó el método de instrucción, diferente de la que se desarrolló en el salón de clases, posiblemente pudo deberse a la naturaleza de la instrucción o al entorno visual del desarrollo de los conceptos vía ordenador.

- Les impresionó observar a los estudiantes imitar, en una pequeña medida, los argumentos lógicos utilizados por grandes matemáticos.

- La intuición que tienen los estudiantes sobre el método de exhaución y de los indivisibles no deben desaparecer por las clases habituales recibidas; por el contrario recomiendan utilizarlos para que los estudiantes hagan aproximaciones usando en este caso las sumas de Riemann.

- Los profesores, frecuentemente, no tienen la oportunidad de presentar los conceptos de esta forma (desde la instrucción basada en el desarrollo histórico) a los estudiantes; por lo que la instrucción debería organizarse de forma que partiera de la intuición natural de los estudiantes para lograr que finalmente utilicen un método riguroso de cálculo de la Integral Definida.

- Los cursos de Matemáticas, basados en un trabajo histórico están pensados, no solo como cursos de Historia de las Matemáticas, sino que además, ésta forma de instrucción puede servir como elemento para incentivar aun más a los estudiantes que tienen preferencia por las Matemáticas.

En otro estudio, Czarnocha et al. (2001) utilizaron la teoría "APOE" para investigar la comprensión del concepto de Integral Definida. Según estos autores, el desarrollo del esquema de Integral Definida comporta la coordinación de dos esquemas: el esquema visual de la suma de Riemann y el esquema del límite de la sucesión numérica. La Integral Definida comprende construcciones de tipo geométrico y construcciones de tipo numérico (sucesiones infinitas y límites).

Inicialmente estos autores plantearon una descomposición genética del concepto de Integral Definida a partir del concepto de función y las sumas de Riemann como objetos, la coordinación del proceso de función y del proceso de la suma de Riemann, y la aplicación del esquema de límite a las sumas de Riemann para obtener un número (Integral Definida). Para construirla asumieron que los estudiantes parten de una comprensión de las funciones como objeto y de las particiones como acción y desarrollan una comprensión progresiva de las sumas de Riemann como aproximación primero como acción, luego como proceso, y finalmente como objeto. Por último aplican el esquema de límite para obtener un número.
Esta es la descomposición genética inicial utilizada:

1. Considerar la función como un objeto.
2. Pensar la partición como una acción.
3. Una función y una partición como una acción. Construir la suma de Riemann de una función con una partición.
4. El concepto de la suma de Riemann como un proceso. Coordinar el proceso de una función y el proceso de una partición a través de las sumas de Riemann.
5. Concepción de la suma de Riemann como un objeto. Encapsular el proceso del numeral 4. Variaciones de la dependencia de la suma (izquierda, derecha, ajustada, media). Dependiendo de n.

6. La acción de hallar la suma de Riemann y compararla con un área o una solución a una ecuación diferencial. Este hecho es presentado en un nivel indistinto, intuitivo, y requiere mejorar la aproximación.

7. La suma de Riemann como un proceso. Interiorizar el punto 6.

8. Aplicar el esquema de límite para calcular un número.

En esta investigación participaron 32 estudiantes de Ingeniería, Ciencias y Matemáticas. Para analizar el desarrollo del esquema de Integral Definida se utilizó un cuestionario con 10 preguntas y posteriormente realizaron entrevistas individuales a los estudiantes.

Los autores trataron de dar respuesta a las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es la relación que existe entre la descomposición genética inicial y las construcciones mentales que sobre Integral Definida tienen los estudiantes?
- ¿Qué construcciones mentales no realizan los estudiantes?
- ¿Qué se debe modificar a la descomposición genética para acomodarla a la posibilidad de hacer las construcciones mentales requeridas?

El análisis de los datos de las entrevistas puso de manifiesto que: los estudiantes eran capaces de obtener las sumas a partir de particiones de distinto tamaño (2, 3, 4, 5,…n,…); la dificultad de la comprensión como objeto del esquema de la suma de Riemann estaba vinculada a las dificultades que los alumnos tenían con el esquema de límite. El límite de la suma de Riemann era visto como suma infinita de rectángulos de pequeña amplitud, o bien como suma de “líneas”, es decir, como suma de infinitos rectángulos de amplitud 0 (suma del límite de las áreas de los rectángulos) y no como el límite de la suma de las áreas de los rectángulos y esta dificultad influyó en la comprensión del esquema de Integral Definida. Por ello resulta fundamental la comprensión del concepto de límite de una sucesión para que los estudiantes comprendan el concepto de Integral Definida como el límite de sumas parciales. En función de los resultados obtenidos plantearon:

- Una descripción de las construcciones mentales realizadas por los estudiantes sobre la comprensión del concepto de Integral Definida.

- Una modificación de la descomposición genética inicial planteada en los siguientes términos: a) la sucesión como un objeto; b) el esquema del límite de la sucesión; c) el esquema de la suma de Riemann; d) coordinación entre el esquema de la suma de Riemann y el esquema del límite de la sucesión.

- Que el esquema del concepto de la suma de Riemann y la coordinación de este esquema y el esquema de límite no sufrió ningún cambio.

- Que en el ámbito de la instrucción, se enfatice en los planes de estudios los conceptos necesarios, por ejemplo el concepto de función y de límite, para comprender la Integral Definida como el límite de la suma de Riemann.

Otro estudio, es el de Rasslan y Tall (2002) quienes presentan una investigación en la que se explora la imagen del concepto (Vinner, 1991) de Integral Definida que tienen los estudiantes después de haber seguido un curso basado en el “School Mathematics Proyect A-level” (SMP, 1997). En este caso, la integración se introduce mediante actividades de estimación del área comprendida entre la gráfica de una función y el eje de las abscisas, usando para ello figuras y métodos numéricos. Aplicaron un cuestionario a 41 estudiantes de último año de bachillerato (17- 19 años). A partir de este estudio concluyeron que:

- La mayoría de los estudiantes fueron incapaces de definir correctamente la Integral Definida.

- Los estudiantes tienen dificultades para interpretar los problemas de cálculo de áreas como Integrales Definidas en contextos más amplios.

Para conseguir la comprensión del concepto de Integral Definida como área bajo una curva Depool (2004) diseñó un material partiendo de la idea de aproximación y utilizando un programa informático. En su estudio utilizó como marco teórico los Sistemas de Representación Semiótico de Duval (1993, 1995), la visualización de (Zimmermann, 1991; Steen, 1988; Hitt, 1998) y las dificultades y errores de Socas (1987), para luego definir un modelo de competencia cognitivo de Integral Definida.

El estudio se desarrolló en diferentes fases con diferente número de estudiantes universitarios en cada una de ellas y la recogida de datos se realizó mediante cuestionarios (pretest y postest) y entrevistas. Entre las conclusiones más destacadas sobre la comprensión de Integral Definida, encontró que en la mayoría de los casos:

- Cuando se presentan a los estudiantes situaciones en las que deben utilizar representaciones gráficas tienden a proporcionar argumentos algebraicos.

- El cálculo de la Integral Definida es visto por los estudiantes como la aplicación de un procedimiento algorítmico sin una contextualización del problema.

- Cuando se le pide a los estudiantes que justifiquen proposiciones generales en las que intervienen propiedades de las funciones y sus relaciones con la Integral Definida, no proporcionan un argumento coherente para apoyar sus respuestas.

De su parte, Contreras y Ordóñez (2005) hicieron un análisis de los significados personales con estudiantes acerca de la Integral Definida. Este estudio forma parte de un trabajo más amplio, y su objetivo fue estudiar los fenómenos que acontecen en los procesos de enseñanza y aprendizaje del concepto de Integral Definida.

Utilizaron como marco teórico el Enfoque Ontológico Semiótico de la cognición matemática (EOS), (Godino, 2002) y el epistemológico. El enfoque ontológico tiene que ver con los significados personales o las interpretaciones de los símbolos y el epistemológico con la problematización del propio conocimiento matemático. Asumen que el doble enfoque cognitivo e institucional, es fundamental para explicar los fenómenos que se producen en la enseñanza-aprendizaje, abordando la dimensión epistemológica y cognitiva que se evidencia en todo proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. En este doble sentido utilizan los significados personales e institucionales de Godino y Batanero (1994).

Para el estudio aplicaron un cuestionario piloto con 10 ítems a un grupo de 16 estudiantes de 2º de bachillerato, que ya habían recibido una instrucción previa. Algunos de los ítems estaban orientados a indagar sobre la relación entre el área y la Integral Definida, las propiedades de la Integral Definida, y el teorema fundamental del Cálculo. En el análisis tuvieron en cuenta las "entidades primarias": conceptos y propiedades, conflictos semióticos, lenguaje, argumentaciones y acciones. Del análisis y de los resultados pudieron concluir que los estudiantes:

- Demuestran confusión entre Integral Definida y área, porque confunden el concepto analítico de Integral Definida con el de Integral como área.

- Tienen dificultades para a argumentar o justificar sus respuestas.

- Presentan conflictos semióticos para trabajar el concepto de Integral Definida en otros contextos como es el caso del movimiento uniforme de la Física.

- Ponen de manifiesto conflictos asociados a la elección errónea de los límites de integración, y algunos confunden la Integral con la derivada.

- Muestran conflictos semióticos puestos de manifiesto en: resolución de problemas de movimiento uniforme, en la elección errónea de los límites de integración, en el cálculo numérico y en las operaciones propias al evaluar una Integral Definida.

- Utilizan más el lenguaje natural y el analítico, seguido del natural solamente, y sólo en un caso se usan los tres tipos de lenguaje natural, gráfico y analítico.

- Han alcanzado un mayor grado de comprensión de algunos conceptos, cuando además de haber adquirido sus significados son capaces de transferirlos a otros contextos.

En relación con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de Integral Impropia, González-Martín (2006) realizó una investigación en los primeros cursos universitarios para mejorar la comprensión por parte de los estudiantes, partiendo de que la integral impropia es una extensión de la Integral de Riemann. Inicialmente seleccionó un grupo de estudiantes que cursaban primero de la Licenciatura de Matemáticas, a los que les aplicó un cuestionario y una entrevista. Además se elaboró un modelo de competencia cognitivo, (adaptado de Socas, 2001) con la finalidad de estudiar la comprensión del concepto por parte de los estudiantes.

El diseño metodológico que utilizó en su trabajo fue el de las Situaciones Didácticas para crear la Ingeniería Didáctica. El marco teórico utilizado para analizar la comprensión del concepto fue el de los Sistemas de Representación Semióticos de Duval (1993). Entre sus conclusiones, menciona que:

- Los estudiantes prefieren procesos algorítmicos y ajustados a lo que se les pide.

- Las gráficas no son usadas de manera habitual y espontánea por los alumnos y la coordinación entre los registros algebraicos y gráficos no fueron adecuados.

- Para la correcta comprensión del concepto de Integral impropia es necesario visualizar el cálculo de áreas como un proceso dinámico.

- El modelo de competencia que ha elaborado resulta útil para describir el nivel de comprensión cuando entran en juego los registros de representación gráfico y algebraico en el aprendizaje del concepto de Integral impropia.

Otro trabajo es el de, Paschos et al. (2006) quienes desarrollaron un estudio de un caso sobre la abstracción reflexiva en la construcción del concepto de Integral Definida, con una estudiante universitaria de primer curso de Matemáticas. Emplearon la teoría piagetiana de la abstracción reflexiva para describir la construcción del concepto de Integral Definida y analizar las operaciones mentales de esta alumna. Este estudio forma parte de una investigación más amplia que tiene que ver con la introducción del concepto de Integral Definida y del teorema fundamental de Cálculo a los estudiantes universitarios de primer año de Matemáticas

El estudio tiene como propósito interpretar las operaciones mentales utilizadas para la construcción del concepto de Integral Definida, a través de la resolución de un problema de movimiento uniformemente no acelerado, lo que implicó la construcción necesaria de la coordinación de varios objetos matemáticos. A partir de la interpretación de los resultados de la entrevista y de la observación estos autores afirman que:

- La comprensión del mecanismo de "abstracción reflexiva" permitirá decidir y distinguir si los estudiantes llegan a una verdadera comprensión de la definición del concepto de Integral Definida en lugar de tener sólo una percepción empírica de la integración.

- La metodología (diseño de instrucción y desarrollo de actividades) utilizada ayuda a los estudiantes a desarrollar el Pensamiento Matemático Avanzado.

- Algunas modificaciones en la metodología utilizada ayudarían a desarrollar los procesos de aprendizaje en el estudiante, habilitándolo para la construcción de los conceptos matemáticos en general, además del Concepto de Integral Definida.

Por su parte, Boigues y Pastor (2007) utilizaron la teoría Fuzzy como elemento para medir el grado de desarrollo en la comprensión de la Integral. El objetivo de su estudio fue caracterizar el desarrollo de la comprensión de Integral Definida de 87 estudiantes universitarios de Licenciatura de Medio Ambiente, Ingeniería técnica e Ingeniería agrícola, mostrando que la métrica Fuzzy puede determinar la etapa de desarrollo de la comprensión del concepto de un estudiante y obtener así un grado de pertenencia a una etapa.

El marco teórico utilizado es el de la teoría APOE de Asiala et al. (1996) y la teoría de espacio métrico Fuzzy de George. y Veeramani (1994). Para el diseño de la investigación hicieron la siguiente descomposición genética preliminar del concepto (Boigues y Pastor, 2007, p. 150):

"A. Partición de un intervalo $[a, b]$:

El conjunto de elementos cognitivos $EA = \{A0, A1, A2, A3\}$

A.0: Esquema tematizado de intervalo en la recta real.

A.1: Gráficamente se tendría la acción de dividir un segmento en varias partes.

A.2: Analíticamente tendríamos la acción de mostrar un conjunto de valores ordenados, cuyo primer elemento coincidiría con a y con b.

A.3: Interiorización en un proceso de la noción de partición.

Y la relación de equivalencia RA (suponemos las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva) cuyos elementos más destacables serían: $RA2 = \{A1RA2\}$vía identidad de nociones.

B. Sumas de Riemann para una función continua $f(x)$ en un intervalo real $[a, b]$ y con una partición dada.

El conjunto de elementos cognitivos $EB = \{B01, B02, B03, B1, B2, B3\}$

B.01: Esquema tematizado de área de una superficie.

B.02: Esquema tematizado de una función de variable real.

B.03: Esquema tematizado de partición.

B.1: Gráficamente se tendría la acción de construir rectángulos cuyas bases serían los subintervalos definidos por la partición y cuyas alturas serían las imágenes de un punto según un criterio (el máximo, el mínimo,…) y delimitar sus áreas.

B.2: Analíticamente, se tendría la acción de hallar un número que coincide con la suma de las áreas de los rectángulos.

B.3: La interiorización de las acciones llevará a una comprensión de la noción de suma de Riemann a nivel de proceso.

Y la relación de equivalencia RB (suponemos las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva) cuyos elementos más destacables serían: $RB = \{B1RB2\}$vía identidad de nociones.

C. Definir la Integral Definida como la aplicación del esquema límite a una sucesión de sumas de Riemann.

El conjunto de elementos cognitivos $EC = \{C1, C2, C3\}$

C1: Esquema tematizado de sucesión.

C2: Esquema tematizado de límite de una sucesión.

C3: Esquema tematizado de suma de Riemann.

Y la relación RC cuyos subconjuntos más destacables serían $RC1 = \{C1RC3\}$vía construcción de una sucesión de sumas de Riemann y $EC2 = \{C2RC3\}$ vía límite de una sucesión de sumas de Riemann**”**.

La información se obtuvo a partir de un cuestionario y de una entrevista. El cuestionario fue aplicado durante 45`, contenía 8 ítems, y constaba de dos partes: los elementos que utilizaban los estudiantes en el esquema y la coherencia del esquema. La puntuación que dieron fue de 1 para respuestas correctas y de 0 para respuestas erróneas. La entrevista fue aplicada a un grupo reducido de estudiantes para determinar con más exactitud los elementos de la descomposición que manifestaban los estudiantes, y para fijar el grado de adquisición de los elementos asignaron los valores siguientes: 0 si el estudiante no usaba el elemento previsto; 0.25 si el elemento era usado de forma incorrecta; 0.5 si usaba bien el elemento pero después de alguna observación; 0.75 si lo usaba bien pero no acababa de justificar su uso, y 1 si respondía y justificaba según lo previsto.

Para el análisis utilizaron en primer lugar, la teoría APOE teniendo en cuenta las características de los tres niveles de desarrollo de un esquema y la descomposición genética previa, y en segundo lugar, la asignación de un determinado nivel a cada alumno utilizando la métrica Fuzzy.

De los resultados obtenidos estos autores concluyeron:

- Que 3 de los 87 estudiantes estarían en el nivel ínter, puesto que la comprensión de la suma de Riemann alcanza un grado de pertenencia superior a 0.25.

- Que no obstante el grado de desarrollo global respecto al esquema de Integral Definida sería muy bajo.

Por último, Camacho et al. (2008) presentan los resultados de un estudio de casos sobre la Integral Definida en diversos contextos. El objetivo de su investigación, es el de estudiar la forma en que el uso del CAS (*Computer Algebra System*) permite identificar aspectos importantes en la resolución de problemas sobre la Integral en diferentes contextos y analizar si la comprensión de Integral Definida como área determina la concepción de los estudiantes durante la resolución de problemas.

El marco teórico en el cual se apoya la investigación tiene que ver con los sistemas semióticos de representación de Duval (1998); la aproximación instrumental hacia el uso de los CAS de Artigue (2002); la caracterización de las dificultades y errores de Socas (2007) y la clasificación de los problemas en contexto de (Gravemeijer y Doorman, 1999).

En cuanto a la metodología utilizaron un estudio de casos de tipo interpretativo y descriptivo con estudiantes universitarios y del análisis y de los resultados obtenidos concluyeron que:

- Los estudiantes no presentan dificultades cuando trabajan con funciones continuas en problemas situados en un contexto matemático y utilizan diferentes sistemas de representación haciendo conversiones y coordinación entre ellos.

- No obstante tienen dificultades cuando las funciones son continuas a trozos porque presentan dificultades de interpretación.

- En estos casos se produce una falta de coordinación entre los sistemas de representación, tanto en el planteamiento de la Integral como en su resolución.

- Los alumnos manifiestan errores cuando los problemas están en otro contexto, por ejemplo cuando la Integral Definida no está asociada al cálculo del área y tienen que interpretarla como un valor que puede medir longitudes (desplazamientos, arcos de curva,...) haciendo uso incorrecto de la información y de las diferentes representaciones.

Las investigaciones presentadas en este apartado, las hemos considerado como un aporte fundamental dentro del estado de la cuestión, concretamente del concepto de Integral Definida como punto de partida de nuestra investigación, porque nos han aportado información relevante para sistematizar nuestro estudio, aunque con otros objetivos, diferente método de investigación y de análisis, y en distinto ámbito o contexto de investigación.

En todas ellas hay consideraciones comunes que sirven de base en nuestra investigación, como son la complejidad del concepto de Integral Definida, las dificultades y errores persistentes que muestran los alumnos en la comprensión/construcción del concepto, las demandas lógicas que debe establecer un alumno entre los elementos matemáticos y la coordinación de varios sistemas de representación para llegar a un desarrollo del esquema conceptual de Integral Definida; todo esto nos ha permitido formular el problema siguiente de investigación.

1.4. Formulación del problema.

Las dificultades en la comprensión y construcción de los objetos matemáticos y, más concretamente, las dificultades encontradas en el aprendizaje del concepto de Integral Definida, la forma cómo lo presentan los diferentes libros de texto, y cómo algunos de ellos hacen mayor énfasis en los procedimientos algorítmicos y algebraicos, antes que en el significado analítico del concepto y los aportes encontrados en distintos estudios por algunos investigadores, nos han llevado a formular el siguiente problema de investigación:

¿Cómo adquieren los estudiantes el concepto *de Integral Definida*?

Para poder hacer un acercamiento a la respuesta de esa pregunta, a lo largo de esta tesis intentaremos responder a las siguientes preguntas más específicas:

- **¿Cómo podemos caracterizar los niveles de desarrollo del esquema de *Integral Definida*?**
- **¿Qué relaciones y qué elementos matemáticos se manifiestan en cada nivel de desarrollo de la *Integral Definida*?**
- **¿Cómo podemos caracterizar el paso de un nivel de desarrollo al siguiente?**

1.5. Objetivos de la investigación.

Los objetivos planteados en esta investigación van dirigidos a profundizar en la comprensión que tienen los estudiantes de Licenciatura de Matemáticas del concepto de Integral Definida. Así, los objetivos de la investigación quedan resumidos en los siguientes puntos:

1.5.1. Objetivo general.

Estudiar el desarrollo del esquema del concepto de Integral Definida que tienen los estudiantes universitarios en el marco teórico APOE.

1.5.2. Objetivos específicos.

1. Identificar el grado de comprensión del concepto de Integral Definida en estudiantes de Licenciatura de Matemáticas mediante la triada de la teoría APOE.

2. Describir el tipo de relaciones que establecen los alumnos entre los elementos matemáticos que constituyen el concepto de Integral Definida.

3. Establecer las formas de representación usadas por los alumnos para resolver tareas relacionadas con el concepto de Integral Definida y la síntesis entre dichas formas de representación.

CAPÍTULO 2

Capítulo 2. MARCO TEÓRICO

El problema de investigación que nos hemos planteado se centra en la *Comprensión del Concepto de Integral Definida,* y cómo se desarrolla el proceso de construcción del concepto por parte de los estudiantes universitarios. En este apartado se hace una revisión acerca de diferentes referentes teóricos del Pensamiento Matemático Avanzado que describen las formas de conocer un concepto y la manera en la que los estudiantes construyen el conocimiento matemático.

El Pensamiento Matemático Avanzado (PMA) tiene que ver con los procesos mentales propios de las Matemáticas superiores que se enseñan y se aprenden en los últimos años de bachillerato y en especial en el ámbito universitario, y que de acuerdo con Azcárate y Camacho (2003, p. 136-141), este tipo de pensamiento por su naturaleza posee unos procesos característicos entre los que destaca: el nivel de abstracción, formalización del conocimiento, la representación, definición de los conceptos y la demostración.

Asimismo estos investigadores, afirman “que lo que diferencia las Matemáticas elementales de las avanzadas es la complejidad de los contenidos y la forma de controlarla; y los procesos más potentes son aquellos que permiten dicho control, en particular la representación y la abstracción”, además establecen “que en las Matemáticas elementales los objetos se describen, mientras que en las avanzadas estos objetos matemáticos se definen”.

Por su parte, Sánchez-Matamoros, García y Llinares (2006, p. 86), afirman “que lo que parece común a todas las teorías, y que de alguna forma caracterizan el PMA, es concebir la construcción de la comprensión de una noción matemática a través de la construcción de un objeto que se puede manipular en si mismo a partir de un proceso que generalmente es realizado paso a paso (Dörfler, 2002; Meel, 2003; Mason y Jonston-Wilder, 2004; Sfard, 1992; Tall et al. 2000)”. Estos mismos autores (Sánchez-Matamoros et al. 2006), consideran que aunque esta aproximación a la idea de construcción de los conceptos ha generado algunas críticas (Confrey y Costa, 1996), piensan que este planteamiento proporciona recursos conceptuales que tienen suficiente poder explicativo para caracterizar el desarrollo de la comprensión de una noción matemática, y en nuestro caso también lo asumimos para estudiar la comprensión del concepto de Integral Definida.

Por otra parte, Dubinsky y McDonald, (2001) consideran que una teoría de aprendizaje de las Matemáticas nos proporciona explicaciones de los diferentes fenómenos de construcción del conocimiento y comprensión de los conceptos matemáticos por parte de los estudiantes; identificando procesos de aprendizaje, otorgando un carácter explicativo de las construcciones mentales, aplicándola a un amplio campo de fenómenos, interrelacionando ámbitos de aprendizaje, sirviendo como herramienta de análisis de datos y proporcionando un lenguaje para la comunicación de las ideas.

En este sentido, Dubinsky (2000b) establece que la forma como se produce la construcción mental de un concepto matemático por parte del estudiante, puede ser observada desde un marco teórico específico y a través de él dar una explicación de aquello que los estudiantes pueden haber aprendido, porque consideran que una teoría debe ayudar a resolver problemas, a demostrar nuevos teoremas, a realizar aplicaciones dentro de las Matemáticas y a plantear las construcciones mentales que utiliza un estudiante para la comprensión de un concepto.

2.1. Construcción de objetos matemáticos.

Desde esta perspectiva teórica, y como indican Azcárate y Camacho (2003), la complejidad del conocimiento matemático superior, es que, en su mayoría, los conceptos del PMA, pueden jugar el papel de procesos y de objetos, según la situación planteada o el nivel de conceptualización que tenga el alumno.

Al respecto, Sfard (1991), señala que los conceptos matemáticos abstractos pueden ser concebidos desde dos perspectivas. Una como concepciones operacionales (procesos, algoritmos y acciones) y otra como concepciones estructurales (conceptos matemáticos considerados objetos abstractos), donde las concepciones operacionales son previas a las concepciones estructurales. El paso de las concepciones operacionales a las estructurales se realiza a través de tres fases de evolución: Interiorización, Condensación y Reificación.

- **Interiorización**, es la fase en la que el estudiante se familiariza con los procesos que darán lugar al nuevo concepto. Estos procesos son operaciones con objetos matemáticos de nivel elemental y que se van construyendo de forma gradual, en la medida que el sujeto va adquiriendo las habilidades propias de dichos procesos.

- **Condensación,** es un periodo de cambio en el que se concentran largas secuencias de operaciones en unidades más manejables. Aquí, el estudiante se siente capaz de pensar en un proceso dado como un todo, en términos de entrada y salida, sin necesidad de considerar todos los detalles que lo componen. En esta fase se puede dar nombre al concepto que nace, se hace más factible combinar procesos, hacer generalizaciones y aumentar las posibilidades de hacer representaciones del concepto. Este periodo dura mientras la nueva entidad permanece ligada a un cierto proceso.

- **Reificación,** es el momento en que el estudiante es capaz de pensar en la nueva noción como un objeto en sí mismo con sus propias características. La reificación se define en términos más generales como un cambio ontológico, una habilidad repentina para ver algo familiar con una perspectiva totalmente nueva.

En este modelo teórico de la reificación (Sfard, 1992) un concepto matemático pasa de proceso a objeto abstracto y de éste, a un nivel más superior, para construir constructos matemáticos más avanzados. La diferencia entre condensación y reificación radica en que la condensación es un cambio técnico de aproximación que se traduce en la habilidad para trabajar con un proceso sin considerar todos los pasos, constituyéndose de forma gradual y cuantitativa. La reificación sin embargo, debe ser entendida como un salto cualitativo e instantáneo. Aunque un concepto haya sido bien interiorizado y condensado en una entidad propia, no significa que se haya adquirido la capacidad de pensar sobre éste como un todo estructural. En este sentido si no se ha realizado la reificación del concepto, su manejo no deja de ser puramente operacional.

En esta perspectiva teórica, Sfard y Thompson (1994) consideran que el modelo de la reificación resulta útil para la descripción de la comprensión de los conceptos matemáticos; pero esta etapa de la reificación resulta difícil para los alumnos, porque es en esta fase cuando deben ser capaces de pensar en la nueva noción como un objeto matemático como tal, con sus propias características.

Desde este ámbito, Döfler (2002) subraya que los estudiantes construyen objetos matemáticos combinando el objeto en sí mismo con las propiedades y relaciones que lo constituyen, configurando un todo diferente de los elementos que lo conforman. La construcción de objetos matemáticos es interpretada como una decisión del estudiante por tratar algo como una entidad reificada, y por tanto, las construcciones matemáticas tienen que ser admitidas por los estudiantes para que puedan construirse. Razón por la cual, es fundamental en la formación de los objetos matemáticos que la actividad matemática que realicen los estudiantes sea aceptada para que la comprensión resulte una actividad consciente por parte de los estudiantes.

En relación con los objetos matemáticos, Tall et al. (2000) distingue tres tipos de construcciones de objetos mentales en Matemáticas:

- Objetos percibidos: surgen a través de la abstracción empírica desde los objetos del entorno.

- Procepto: es un objeto mental que consiste en un proceso, un concepto producido por dicho proceso y un símbolo que se puede utilizar para representar a cualquiera de los dos.

- Objetos axiomáticos, concebidos por criterios específicos (axiomas o definiciones) cuyas propiedades se deducen por demostración formal.

En este mismo aspecto cognitivo sobre la construcción de los objetos matemáticos, Tall (1991) y Gray y Tall (1994), hacen planteamientos para determinar los procedimientos o procesos de las nociones matemáticas mediante un simbolismo de naturaleza dual que sirva para referirse tanto al procedimiento como al concepto. Además, indican que la ambigüedad simbólica permite la flexibilidad entre el proceso para llevar a cabo una tarea matemática y el concepto que se va a manipular intelectualmente como parte del esquema mental del individuo, que ellos denominan "procepto". Asimismo, establecen una diferencia entre proceso y procedimiento:

- El término **proceso** lo usan de manera general para significar un conocimiento o un proceso matemático.

- El término **procedimiento,** para referirse a un algoritmo específico empleado en la realización de un proceso.

Esta dualidad del simbolismo requiere de la combinación de la comprensión del proceso y del objeto. El término "procepto" lo definen para referirse a la combinación tanto del proceso y del objeto utilizando el mismo símbolo.

Tall (1995 a), clasifica estos “proceptos” en tres categorías:

- Proceptos operacionales: como los aritméticos, que disponen de algoritmos explícitos para la obtención del resultado.

- Proceptos potenciales: como las expresiones algebraicas, que contienen variables, donde pueden evaluarse los proceptos asignándole valores a las variables, o manipulándolos simbólicamente como conceptos matemáticos.

- Proceptos estructurales: como los límites, que tienen un proceso asociado para obtener el resultado pero no tienen un procedimiento invariable para calcularlos.

Para Tall (1995 b) y Tall et al. (2000, 2001), los proceptos son usados por el alumno para representar las ideas matemáticas que requieren símbolos matemáticos, iniciando el desarrollo matemático en las percepciones y en las acciones sobre objetos del entorno de la persona. Las acciones finalizan con éxito cuando se utilizan representaciones simbólicas flexibles como “proceptos”. La sucesión de percepción de objetos externos, realización de acciones en ellos y la reflexión sobre los mismos objetos, es considerada por Gray et al. (1999), como la actividad cognitiva fundamental que puede conducir a la comprensión, o no, de los conceptos matemáticos, influenciados por la actividad desarrollada por el sujeto. Por ejemplo, en la construcción de conceptos geométricos es fundamental la percepción de las figuras y su forma, basando su comprensión en la acción y la reflexión; mientras que para construir el concepto de número y el proceso de contar, la aritmética se apoya en la acción y en la manipulación simbólica.

En este sentido, Barnard y Tall (1997) consideran que la capacidad de los estudiantes para concebir y manipular partes de la estructura del conocimiento matemático es fundamental para el desarrollo del aprendizaje matemático. A estas partes de la estructura cognitiva que se reducen a niveles manejables que contienen la información esencial la denominan “unidad cognitiva”. Por tanto, la construcción del pensamiento matemático se fundamenta en dos factores: la capacidad de condensar la información de las estructuras cognitivas y la habilidad para realizar conexiones entre los procedimientos que originan el mismo proceso, donde se desarrolla el procepto y se forman unidades cognitivas más complejas. Barnard y Tall (1997) y Döfler (2003), dicen que la dualidad proceso-objeto constituye el germen de las teorías sobre la comprensión de los conceptos matemáticos como son las teorías de Dubinsky (1991) y Sfard (1991).

Por su parte, los estudios de Piaget y García (1982) han servido de base a investigaciones relacionadas con el PMA. A partir de estos estudios aparecen interrogantes como: ¿cómo construye el conocimiento el sujeto? y ¿qué tipo de construcciones realiza? ¿qué relaciones establece? Las respuestas teóricas a estos cuestionamientos varían entre los diferentes autores.

2.2. Una aproximación piagetana de la construcción del conocimiento matemático.

A partir de la teoría de Piaget, Tzur y Simon (2004) asumen que los procesos mentales son elementos constituyentes de la comprensión de un concepto matemático, logrando que la transición del proceso al objeto involucre dos fases de transformación conceptual: la fase participativa y la fase anticipadora.

En la fase participativa, los estudiantes aprenden a predecir algunos de los resultados de la actividad, explicando los resultados procedentes de ella. Aquí el conocimiento está disponible en el contexto de la actividad. En la fase anticipadora, el estudiante usa los resultados de la actividad. La relación ya no se limita al momento en que se desarrolla y puede ser utilizada en otras situaciones.

Los estudiantes que se encuentran en la fase participativa no pueden construir el nuevo concepto como un objeto al ser incapaces de usarlo en otras situaciones. Sólo cuando se encuentran en la fase anticipadora pueden establecer el nuevo concepto como objeto, utilizándolo para realizar inferencias en las diferentes situaciones en que pueda ser requerido.

La aproximación al desarrollo de un esquema propuesto por Piaget y García (1982) y la particularización a través de la teoría APOE (Dubinsky, 1991) han servido para fundamentar el estudio de la manera como los estudiantes llegan a comprender los conceptos matemáticos. Dubinsky (1991) propone "la abstracción reflexiva" de Piaget como base teórica para el análisis de la comprensión de los conceptos matemáticos y, plantea (Dubinsky, 2000a) que el origen de la teoría APOE se encuentra en la reformulación de la teoría Piagetana de la Abstracción Reflexiva para ser aplicada al Pensamiento Matemático Avanzado.

2.3. La teoría APOE

Esta teoría se conoce en Inglés como **APOS** de ***A****ction*, ***P****rocess*, ***O****bject*, ***S****chema.* En la literatura española se traduce por **APOE**. Para efectos de esta investigación utilizaremos la sigla APOE. La teoría APOE, desarrollada por Dubinsky (1991) y un grupo de investigadores de **R**esearch in **U**ndergraduate **M**athematics **E**ducation **C**ommunity (**RUMEC**), está basada en una interpretación del constructivismo a partir de la adaptación de algunas ideas del enfoque cognitivo de Piaget al Pensamiento Matemático Avanzado.

Una de estas ideas es la de **"Abstracción Reflexiva"** introducida por Piaget para describir como construyen los individuos las estructuras lógico – matemáticas. Piaget y García (1982, p. 10) definen la abstracción reflexiva, como "el mecanismo por el cual el individuo se mueve de un nivel a otro". Para Piaget, la abstracción reflexiva se lleva a cabo a través de actividades (físicas o mentales) del sujeto que tienen dos partes, necesariamente asociadas: una es la proyección del conocimiento existente a un plano superior del pensamiento, y la otra es la reorganización y reconstrucción de aquel conocimiento para formar nuevas estructuras que son estudiadas desde el enfoque cognitivo. "El mecanismo para pasar de un nivel a otro siempre es la abstracción reflexiva, comprendida en el sentido del razonamiento que hace el sujeto sobre el significado de las operaciones que realiza sobre el objeto matemático y de los resultados que produce en el propio sujeto" (Trigueros, 2005, p. 9).

Dubinsky (1991) afirma que el concepto de “abstracción reflexiva” constituye una poderosa herramienta que dota a los investigadores de una base teórica sólida para la comprensión del desarrollo del Pensamiento Matemático Avanzado.

En este sentido, Dubinsky (1991, 1996) considera que la principal dificultad para aplicar las ideas de Piaget al PMA, ha sido que la teoría de Piaget tiene su origen en la manipulación de objetos físicos, pero a medida que el nivel matemático aumenta, se hace necesario construir nuevos objetos, no físicos sino mentales, y manipularlos para construir las ideas matemáticas. Considera que un problema importante en la Educación Matemática consiste en encontrar sustitutos apropiados para los objetos físicos y cree que los entornos informáticos pueden servir para este propósito. Además piensa, que para explicar las diferencias en las conductas de los estudiantes, es necesario formular hipótesis de tipo mental, ya que para poder explicar y buscar soluciones a estas diferencias, es necesario desarrollar una teoría sobre los procesos mentales, que pueda explicar lo que está ocurriendo en la mente de los estudiantes: “El conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder ante situaciones matemáticas problemáticas, reflexionando sobre ellas en un contexto social construyendo y reconstruyendo acciones, procesos y objetos matemáticos y organizándolos en esquemas con el fin de manejar las situaciones” (Dubinsky, 1996, p. 32-33).

Desde esta perspectiva teórica del conocimiento matemático, Dubinsky (1991, 2000a), y Asiala et al. (1996) consideran que los individuos realizan construcciones mentales para obtener significados de los problemas y situaciones matemáticas; estas construcciones mentales son desarrolladas y controladas por unos mecanismos de construcción, como se explica a continuación.

2.3.1. Las construcciones mentales

Se llaman construcciones mentales a todas aquellas transformaciones que realizan los estudiantes para resolver una tarea y que les permita obtener significado de ellas. En el desarrollo del conocimiento matemático las construcciones mentales pueden ser reconstrucciones exactas (correspondiente a la memoria y a la repetición de métodos previamente conocidos) o adaptaciones de algo previamente aprendido. La última de estas dos es importante en el avance y desarrollo del conocimiento matemático. Las construcciones mentales según DeVries (2001), se caracterizan como sigue:

- **Acción,** es la transformación de un objeto percibida por el estudiante como externa. La transformación se produce como una reacción a una indicación que ofrece información sobre los pasos a seguir. Cuando un sujeto sólo puede realizar este tipo de transformaciones en la resolución de una tarea, decimos que está operando a nivel de acción. Podríamos pensar con respecto al concepto de Integral Definida, que el estudiante tiene un pensamiento a nivel de acción cuando realiza una partición del intervalo en subintervalos para hacer aproximaciones del área por defecto y por exceso.

- **Proceso**, es la interiorización de una acción. Es una construcción producto de una transformación interna, no necesariamente dirigida por un estímulo externo. En el proceso el sujeto puede describir los pasos involucrados en la transformación e incluso puede invertirlos, es decir, tiene más control de la transformación. Asimismo, diríamos que un estudiante puede tener una concepción de proceso en el concepto de Integral Definida, si logra interiorizar las acciones anteriores por aproximaciones repetidas y transformarlas en los límites de las sumas inferiores y superiores de Darboux.

- **Objeto**, es cuando el estudiante reflexiona sobre acciones aplicadas a un proceso concreto, siendo consciente del proceso como una totalidad, aprecia que la transformación (acción o proceso) puede actuar sobre él y es capaz de construir la transformación. Entonces, se dice que el estudiante ha reconstruido este proceso en un objeto cognitivo; es decir que el proceso ha sido “encapsulado” en un objeto. En este sentido diríamos que un estudiante muestra una concepción de objeto cuando es capaz de inferir que si la amplitud de cada subintervalo (no necesariamente de la misma amplitud) se aproxima a cero, el número de subintervalos tiende a infinito y además que si existe el límite de las sumas, obtiene lo que es la Integral Definida, entonces se dice que ha encapsulado el proceso de calcular los límites en el objeto matemático Integral Definida.

- **Esquema**, es una colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que están relacionados, consciente o inconscientemente, en una estructura coherente en la mente del individuo y que puede ser evocada para tratar una situación problemática de esa área de la Matemática. Una función importante y característica de la coherencia de un esquema está en poder determinar qué está en el ámbito del esquema y qué no. Cuando un sujeto se enfrenta a una tarea matemática en concreto, evoca un esquema para resolverla y para llegar a su resolución pone en juego aquellos conceptos de que dispone en ese momento y utiliza relaciones entre esos elementos. En este caso podríamos determinar que un estudiante muestra una concepción de esquema del concepto de Integral Definida por las relaciones lógicas que es capaz de establecer entre los elementos matemáticos que configuran este concepto matemático. Al respecto, Trigueros (2005) afirma que ante una misma situación, diferentes estudiantes pueden utilizar los mismos conceptos y diferentes relaciones lógicas entre estos conceptos. El tipo de relaciones lógicas que cada sujeto establece entre los elementos que utiliza así como el tipo de construcciones que hace sobre el concepto matemático, depende del conocimiento matemático que tenga. Los esquemas son una herramienta conceptual de análisis que permite identificar características de lo que hace el alumno cuando resuelve un problema matemático.

Dubinsky (1996) plantea que una **acción** es una transformación de objetos que el individuo percibe como algo externo. Un sujeto que solamente puede entender una transformación como una acción, sólo puede realizarla reaccionando a indicaciones externas que le proporcionen detalles precisos sobre los pasos que tiene que hacer. Cuando una acción se repite y el alumno puede reflexionar sobre ella, puede **interiorizarse** en un **proceso**. Es decir, se realiza una construcción interna que ejecuta la misma acción, pero ahora no necesariamente dirigida por un estímulo externo. Un estudiante que tiene una concepción de proceso de una transformación puede reflexionar sobre ella, describirla, y hasta puede llegar a **invertir** los pasos. A diferencia de la acción, el estudiante percibe el proceso como algo interno y bajo su control, en lugar de ser una respuesta a indicaciones externas. Cuando un estudiante reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso en particular, toma conciencia del proceso como un todo, realiza aquellas transformaciones (acciones o procesos) que pueden actuar sobre él y puede construir de hecho estas transformaciones, está pensando en este proceso como un **objeto**. En este caso se dice que el proceso ha sido **encapsulado** en un objeto. En el transcurso de la realización de una acción o un proceso sobre un objeto, suele ser necesario **desencapsular** el objeto y volver al proceso del cual se obtuvo a fin de usar sus propiedades y manipularlo. Y los objetos se organizan en **esquemas**, que a su vez se relacionan con otros esquemas.

Para la comprensión de un concepto matemático, el individuo ha de producir acciones: "transformaciones de objetos que son percibidos por el individuo como algo que, en cierta medida, es externo" (Asiala 1996, p. 9), procesos: "construcciones internas que realizan la misma acción, pero que ahora no está necesariamente dirigida por estímulos externos." (Asiala, 1996, p. 10), objetos: " un individuo piensa en operaciones aplicadas a un proceso particular, llega a ser consciente del proceso en su totalidad, se da cuenta de que las transformaciones (ya sean acciones o procesos) pueden actuar sobre el mismo (proceso), y es capaz de construir realmente tales transformaciones, entonces está pensando en este proceso como un objeto. En este caso, decimos que los procesos se han encapsulado en un objeto." (Asiala, 1996, p. 11) y el esquema: "es un nivel de mayor elaboración en la comprensión de un concepto matemático y está relacionado de manera coherente en la mente del estudiante." (Asiala, 1996, p. 12).

2.3.2. Desarrollo de un Esquema

En relación con un **esquema**, Piaget e Inhedler (1978, p. 20) lo definen como "la estructura o la organización de acciones, que se transfieren o se generalizan con motivo de la repetición de una acción determinada en circunstancias iguales o análogas".

El refuerzo de la teoría APOE con la incorporación de las tres fases de desarrollo del esquema propuesto por Piaget y García (1982), ha llevado a perfeccionar la comprensión y explicación de los esquemas. Los tres niveles de desarrollo del esquema para categorizar la comprensión de los conceptos matemáticos, propuesta por la teoría APOE, se puede usar para entender algunos comportamientos de los alumnos fundados en la interacción de los esquemas (Baker et al. 2000). La terna de los niveles: Intra, Inter y Trans permite una comprensión profunda de desarrollo de los esquemas y una mejor explicación de los datos de una investigación (Dubinsky y MacDonalds, 2001).

El paso de un nivel al siguiente no se caracteriza por el aumento de los conocimientos respecto al nivel anterior, sino por una reinterpretación total de los fundamentos conceptuales: "los mecanismos del progreso del conocimiento pueden ser aprehendidos en las transiciones que conducen de un nivel de organización de menor adaptación del sujeto al medio (por conocer), a los niveles secundarios ulteriores" (Piaget y García, 1982, p. 7).

En este mismo sentido se considera que "la sucesión intra, inter y trans que encontramos en todos los conceptos y en todos los niveles, es la expresión de las condiciones que las leyes de asimilación y de equilibración imponen a toda adquisición cognoscitiva" (Piaget y García, 1982, p. 128). Además, cada vez que el sujeto aborda un nuevo concepto, se produce un proceso de equilibración entre la asimilación de los propios esquemas y la acomodación de estos conceptos en una nueva estructura mental.

El desarrollo de un esquema es un proceso dinámico y cambiante, por el que el conocimiento crece según ciertos mecanismos (Piaget y García, 1982), y para el que se pueden considerar tres niveles o fases: Intra, Inter y Trans, denominadas triada, que se suceden según un orden fijo en todas las disciplinas por lo que no se trata de un proceso específico del pensamiento científico. En cada nivel se repiten los mismos cambios que en el proceso total. Estas tres fases del desarrollo de un esquema propuesto por Piaget y García (1982) son definidas del siguiente modo:

- **Nivel intra,** "lo propio de este periodo es el descubrimiento de una acción operatoria cualquiera, y la búsqueda del análisis de sus diversas propiedades internas o de sus consecuencias inmediatas, pero con una doble limitación. En primer lugar, no hay coordinación de esta preoperación con otras en un agrupamiento organizado; pero además el análisis interno de la operación en juego se acompaña de errores que se corregirán progresivamente, así como de lagunas en la inferencia que de ella puedan deducirse" (Piaget y García, 1982, p. 163).

- **Nivel ínter,** "una vez comprendida una operación inicial es posible deducir de ella las operaciones que están implicadas, o de coordinarlas con otras más o menos similares, hasta la constitución de sistemas que involucran ciertas transformaciones. Si bien hay aquí una situación nueva, existen sin embargo limitaciones que provienen del hecho de que las composiciones son restringidas ya que solamente pueden proceder con elementos contiguos" (Piaget y García, 1982, p. 165).

- **Nivel trans,** "es fácil de definir en función de lo que precede, como involucrando, además de las transformaciones, síntesis entre ellas. Dichas síntesis llegan a la construcción de estructuras" (Piaget y García, 1982, p. 167).

Por **síntesis** aquí, entendemos el proceso por el cual a partir de una cosa que se conoce, realizando operaciones con/sobre ella se llega a la conclusión y comprensión de algo que no se conocía.

Asimismo, Piaget y García (1982, p. 162), consideran "que cada fase o nivel (intra, inter o trans) implica a su vez algunas subetapas, y que lo fundamental es que siguen el mismo orden y por las mismas razones". Aunque estos autores no dejan claro cuáles son esas subetapas o subniveles, si que plantean un ejemplo que denominan gran etapa trans y que la dividen en tres subetapas que ellos llaman "trans intra", "trans inter" y "trans trans". En nuestra investigación hablamos de los niveles y subniveles: Intra 1, Intra, Inter 1, Inter y Trans.

La descripción sobre el desarrollo de un esquema, ha sido utilizada en distintas investigaciones a partir de la teoría APOE de Dubinsky (Bodi, 2006; Sánchez – Matamoros, 2004). DeVries (2001), también adapta los niveles de desarrollo de un esquema de la siguiente manera:

- **Nivel intra**, se identifica por centrarse en aspectos individuales aislados de ciertas acciones, procesos y objetos de naturaleza similar. El individuo no ha construido ninguna relación entre ellos. Así por ejemplo, un sujeto entiende el concepto de Integral Definida a nivel intra, cuando no establece relaciones lógicas entre los elementos matemáticos, porque los recuerda de manera aislada, muestra concepciones erróneas en el uso de algunos elementos y establece sólo un intento de conjunción lógica entre los elementos.

- **Nivel ínter**, se caracteriza por la construcción de relaciones entre acciones, procesos y objetos. En este nivel se comienzan a agrupar las informaciones de naturaleza similar. En el concepto de Integral Definida, asumimos que el alumno tiene un pensamiento a nivel inter, porque comienza a establecer relaciones lógicas entre los elementos matemáticos especialmente la conjunción lógica entre los elementos cambiando de sistema de representación, establece además de la conjunción lógica la condicional y aparecen los primeros comienzos de síntesis entre los sistemas de representación gráfico, algebraico y analítico.

- **Nivel trans**, se adquiere cuando se tiene construida una estructura subyacente completa en la que las relaciones descubiertas en el nivel inter son comprendidas dando coherencia al esquema. En nuestra investigación concebimos que un alumno manifiesta un nivel trans de desarrollo del esquema de Integral Definida, cuando establece varias relaciones lógicas (conjunción, condicional y contrario de la condicional) entre los elementos matemáticos gráficos, algebraicos y analíticos, utiliza los elementos necesarios en la resolución de las tareas usando los significados implícitos para tomar decisiones, y establece una síntesis en los sistemas de representación gráfico, algebraico y analítico.

En opinión de Baker et al. (2000), (citado por Bodi, 2006) el uso de estos tres niveles para analizar el conocimiento de los estudiantes ayuda a los investigadores a considerar la riqueza de las situaciones y de los problemas de investigación. Señalan que "en cada nivel de la terna, el estudiante reorganiza el conocimiento adquirido durante el nivel anterior. La progresión es gradual y no necesariamente lineal. En el proceso de aprendizaje se desarrollan diferentes esquemas y el desarrollo y cambio de cada esquema puede describirse usando esa terna" (Baker, 2000 p. 59).

Mientras que el conocimiento se va adquiriendo, "los sujetos construyen esquemas coexistentes, los cuales cambian constantemente variando sus niveles de evolución. Por tanto, en algunas situaciones problemáticas, una persona puede necesitar coordinar varios esquemas. Cada esquema, en sí mismo, se compone de acciones, procesos, objetos, otros esquemas y transformaciones. En particular, un esquema puede depender mucho del desarrollo de uno o más esquemas. En tales casos, se ha de estar preparado para identificar en esos esquemas sus componentes y su multidimensionalidad. Por consiguiente, en la comprensión del desarrollo de un esquema global, se deben identificar no sólo los esquemas componentes del desarrollo de un esquema global, sino también su coordinación. Dentro del esquema global, su coordinación nos conduce a nuevas estructuras que se construyen sobre las propiedades de los esquemas componentes" (Baker et al. 2000, p. 59).

Dubinsky y MacDonald (2001), manifiestan que aunque la sucesión acción, proceso, objeto y esquema se describe de manera lineal, en realidad, cuando un alumno está desarrollando la construcción de un concepto, ese proceso no es tan lineal. Este aspecto también está planteado en la investigación de Asiala et al., (1996).

2.3.3. Los mecanismos de construcción

Las abstracciones reflexivas utilizadas para realizar las construcciones mentales se denominan mecanismos y han sido caracterizados por el grupo de investigadores RUMEC de la siguiente forma:

- **Interiorización**, es la construcción mental de un proceso que tiene que ver con una serie de acciones sobre objetos cognitivos. Las acciones se interiorizan en procesos.

- **Coordinación,** es el acto cognitivo de coger dos o más procesos y usarlos para construir un nuevo proceso. Piaget (1978), (citado por Dubinsky, 1991) usa "coordinaciones de acciones" para referirse a todas las formas de usar una o más acciones para construir nuevas acciones u objetos.

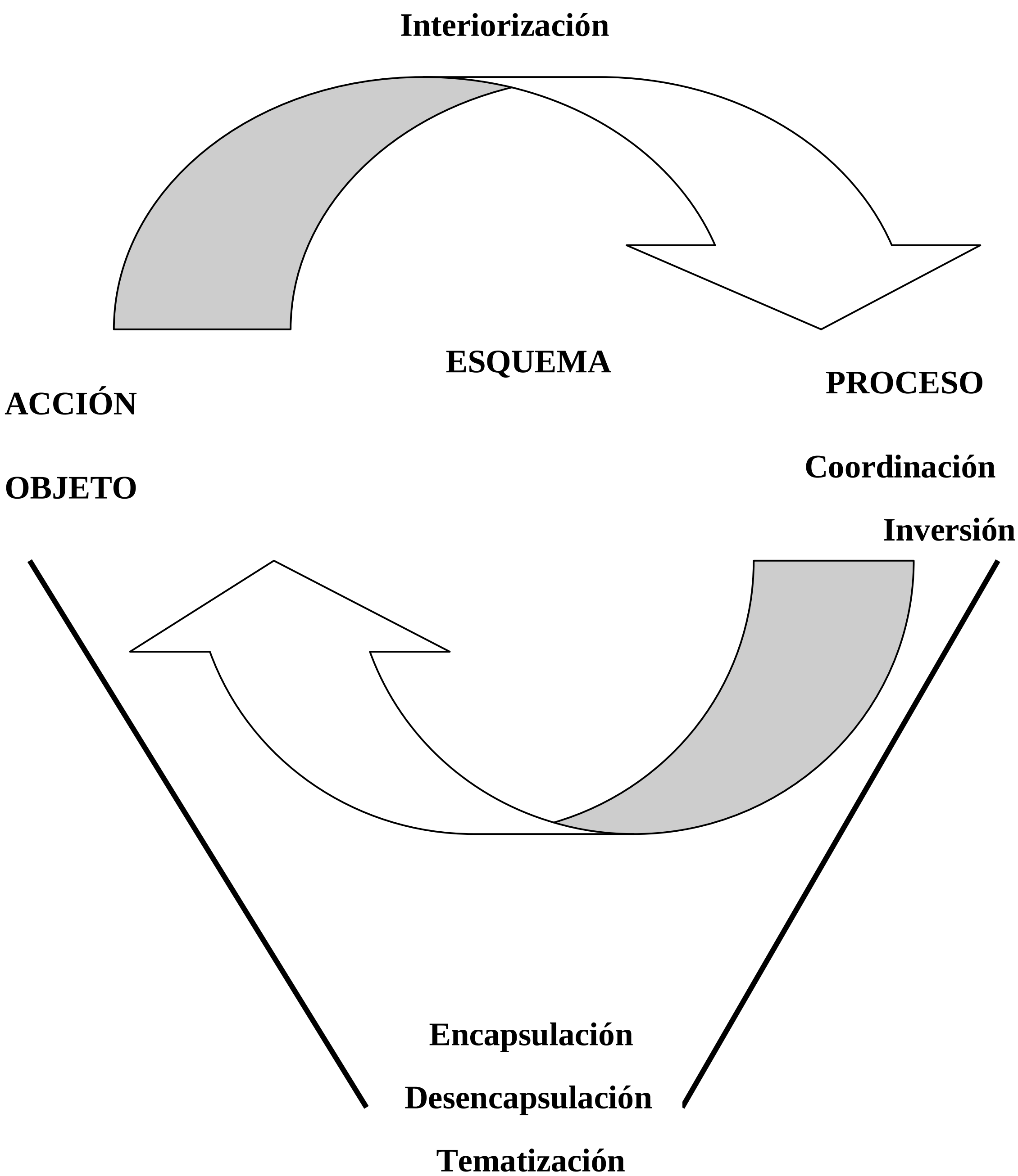
- **Inversión**, una vez que el proceso existe internamente, al sujeto le es posible invertirlo, en el sentido de deshacerlo, para construir un nuevo proceso original. Piaget (1978), (según Dubinsky, 1991) no lo trata en el contexto de la abstracción reflexiva, lo incluye como una forma de construcción adicional.

- **Encapsulación,** es la transformación mental de un proceso dinámico en un objeto cognitivo estático. Este objeto puede ser visto como una entidad total y puede ser transformado mentalmente por otras acciones o procesos. En este caso decimos que el proceso ha sido encapsulado en un objeto cognitivo.

- **Desencapsulación,** es el proceso mental de volverse desde un objeto al proceso desde el cual fue encapsulado el objeto o tuvo su origen.

- **Tematización**, es la reflexión sobre comprensión de un esquema, viéndolo como "un todo", y es capaz de realizar acciones sobre el esquema, entonces se dice que el esquema ha sido tematizado en un objeto, Asiala et al. (1996). En relación con este mecanismo, Piaget y García (1982, p. 103), definen la tematización como: "el paso del uso o aplicación implícita, a la utilización consciente, a la conceptualización".

ABSTRACCIÓN REFLEXIVA



Esquema 2.1. Marco Teórico APOE. Dubinsky, E.

2.3.4. Descomposición Genética

Una descomposición genética está definida como un modelo cognitivo donde se describen las posibles construcciones mentales que un estudiante realiza para entender un concepto a partir de ciertas habilidades cognitivas previas, y son descritas en el marco de la teoría APOE de Dubinsky (1996) y Asiala et al. (1996), donde se trata de explicar el entendimiento de un concepto mediante las construcciones mentales y los mecanismos de construcción.

Las descomposiciones genéticas son una manera de plantear las hipótesis de cómo se construyen los conceptos matemáticos mentalmente. Asiala et al (1996, p. 7), define la descomposición genética del concepto como "conjunto de estructuras mentales que pueden describir cómo se desarrolla el concepto en la mente del alumno". Para el grupo RUMEC la descomposición genética "es el primer paso del análisis teórico de un concepto matemático en término de las construcciones mentales que un aprendiz puede llagar hacer en orden de desarrollar la comprensión del concepto" (DeVries, 2001, p.4). Esta descomposición genética es una vía para aprender conscientemente un concepto matemático por parte del alumno, pensando que la descomposición genética de un concepto no es única; y que "pueden coexistir varias descomposiciones genéticas del mismo concepto en estudio" (Trigueros, 2005, p. 8).

Las investigaciones en Teoría APOE, parten de una descomposición genética inicial del concepto de interés y está constituida por el diseño de un análisis de los instrumentos teóricos que son los elementos del conocimiento y las relaciones lógicas establecidas entre estos elementos que configuran el concepto en cuestión, donde se incluyen las construcciones mentales específicas que un estudiante realiza para aprenderlo. El diseño se basa propiamente en la experiencia del profesor o del investigador y de esta manera se fomenta la construcción de esquemas necesarios para el aprendizaje del concepto que se desea estudiar.

Dubinsky y sus colaboradores basan su trabajo en el análisis teórico de un determinado concepto matemático, el desarrollo de unas determinadas estrategias de enseñanza y aprendizaje, y el análisis de los datos para probar y perfeccionar el análisis teórico inicial y la instrucción. La perspectiva pedagógica correspondiente considera que la comprensión conceptual debe converger hacia una comprensión del formalismo matemático.

2.3.5. Investigaciones en el marco de la teoría "APOE"

Diferentes trabajos de investigación han asumido esta teoría APOE, como marco para analizar la comprensión que tienen los estudiantes de diferentes conceptos matemáticos. La descripción de las construcciones mentales o formas de conocer, los mecanismos de construcción y la triada de desarrollo del esquema, utilizados en la comprensión de los conceptos matemáticos constituyen el eje fundamental de estas investigaciones en el marco de la teoría APOE. Utilizando esta perspectiva teórica se han realizado múltiples investigaciones entre las que se encuentran las siguientes sobre: el concepto de límite (Cottrill et al. 1996); clases laterales, normalidad y grupos cocientes (Asiala et al. 1997); grupos y subgrupos (Brown et al. 1997); regla de la cadena (Clark et al. 1997; Cottrill, 1999); las funciones exponencial y logarítmica (Weber, 2002); cálculo gráfico (Baker et al. 2000; Cooley et al. 2003); inecuaciones (Barbosa, 2003); la derivada (Asiala et al. 1997; Badillo, 2003; Sánchez – Matamoros, 2004; Sánchez – Matamoros, García y Llinares 2006); la divisibilidad (Bodi, 2006); series numéricas (Codes y Sierra, 2004, 2007), entre otras.

La investigación de Cottrill et al. (1996) tiene que ver con los constructos acción, proceso, objeto y esquema en el estudio del concepto de límite, por medio de los cuales tratan de modelizar cómo se desarrolla un concepto matemático en la mente del individuo, denominando descomposición genética del concepto al conjunto estructurado de dichos constructos (Asiala, 1996). Esta descomposición genética se considera como una evolución de cómo adquiere el sujeto la comprensión de los conceptos matemáticos. Para realizarla distinguen cuatro fases: a) Descomposición genética preliminar del concepto; b)

Implementación sobre la instrucción y análisis de la misma; c) Revisión de la descomposición genética preliminar, a la luz del paso b; d) Discusión de cómo las observaciones influyen en los cambios que se han (o no se han) realizado. Como puede observarse, se trata de un verdadero análisis a priori.

En su investigación Cottril et al. (1996), plantearon los objetivos siguientes: reinterpretar la literatura referente al concepto de límite; describir la descomposición genética y hacer propuestas pedagógicas para el aprendizaje del concepto de límite. El estudio se realizó con 25 estudiantes universitarios que cursaban la asignatura de Cálculo.

La instrucción dada a los estudiantes fue a través de prácticas con ordenador, debates, y trabajos de clase en grupos de 3 o 4 estudiantes. Posteriormente se hicieron entrevistas clínicas. El concepto de límite fue revisado a lo largo del proceso de enseñanza. Los resultados obtenidos los llevaron a concluir que existía una fuerte tendencia por parte de los estudiantes a identificar el límite de la función en un punto con el valor de la función en dicho punto. Esta identificación planteó problemas de comprensión cuando el límite no existía. La comprensión estática del límite en un punto podía evolucionar a la evaluación de los límites laterales o a la obtención de los valores cercanos en el dominio estudiado. Cuando los estudiantes pueden dar valores en varios puntos, más o menos próximos al punto, se interioriza en un proceso el concepto de límite, determinando que si $x \to a \ \ entonces \ f(x) \to L$.

Asimismo, consideran que los estudiantes tienen dificultades con el concepto formal de límite por dos razones: una es la propia coordinación de los procesos y que no todos los estudiantes pueden establecerla de inmediato, y la otra se refiere al conocimiento necesario de los cuantificadores para comprender el concepto de límite. Señalan además, que el concepto de límite se puede interiorizar en un proceso, si los estudiantes son capaces de evaluar el concepto de límite en varios puntos más o menos próximos antes de dar el valor del límite de la función. Una conceptualización objeto del límite requiere pensar, por ejemplo, en el límite de la composición de dos funciones como proceso y coordinar la suma de ambas para encapsular en objeto el límite en la función suma.

Además, Cottril et al. (1996) destacan que la concepción dinámica del concepto de límite es más complicada que un simple proceso. Para estos autores el concepto de límite no es estático y configura un esquema muy complejo que es producto de aspectos dinámicos y señalan el insuficiente tratamiento instruccional de la concepción dinámica del concepto de límite. La construcción del esquema de límite requiere de la coordinación de procesos que impliquen fuertes concepciones asi como la comprensión de los cuantificadores del límite, en lugar de los $\varepsilon - \delta$ de la definición formal de límite que resulta difícil para algunos estudiantes.

En el ámbito algebraico, Asiala et al. (1997) hicieron un estudio epistemológico de las clases laterales, de la normalidad y de los grupos cocientes. En la descomposición genética propuesta por estos investigadores, el concepto de grupo lateral es entendido como una acción cuando el estudiante lo observa y lo trabaja como una situación próxima, como si estuviera descrito como la aplicación de una fórmula. La concepción como proceso de la clase lateral permite al estudiante pensar en los subgrupos, sin realizar cálculos. Las clases laterales serán conocidas como objeto cuando el estudiante pueda pensar en cómo se forman éstas o realizar acciones sobre las mismas o hacer comparaciones sobre los cardinales o aplicar el teorema de Lagrange. Asimismo, propusieron la descomposición genética de los conceptos de normalidad y grupos cocientes. El esquema de grupo cociente lo integraban los esquemas de grupo lateral, de operación binaria y de grupo

Los resultados de este estudio, mostraron que la comprensión de los conceptos de Álgebra fue mayor en los estudiantes que recibieron una instrucción experimental. Los estudiantes de este curso alcanzaron concepciones de objeto de los esquemas de clase lateral y de normalidad. La normalidad fue observada por la mayoría como propiedad de un subgrupo que está incluido en un grupo y la comprensión de la idea de grupo fue asociada a un conjunto con ley de composición interna.

Asimismo, Brown et al. (1997) estudiaron la comprensión de los estudiantes sobre grupos y subgrupos. En la investigación utilizaron la teoría APOE para describir las formas de conocer y los mecanismos de construcción de los conceptos por los estudiantes. El estudio se hizo mediante una metodología experimental basada en un programa informático, en la que participaron 51 estudiantes, a los cuales les aplicaron cuestionarios y entrevistas individuales.

En el estudio Brown et al. (1997), además de realizar la descomposición genética, resultó de especial interés el conjunto de las construcciones mentales, denominadas esquemas, que los estudiantes pueden desarrollar para la comprensión del concepto de grupo y subgrupo. La descomposición genética inicial planteada incluyó operaciones binarias, entendidas como funciones lo que implicó la construcción previa del esquema de función previamente construido. El esquema de grupo a su vez comprendía otros esquemas como el de conjunto, operaciones binarias y axiomas que podían relacionarse entre si. Por ejemplo, el esquema de axioma incluía una operación binaria que podía cumplir o no una determinada propiedad o el esquema de subgrupo que contenía los esquemas de grupo, subconjunto y función. Las actividades que plantearon incluían relaciones de congruencia, permutaciones, clases modulares y grupos de simetría.

Los resultados mostraron las distintas formas de comprensión de los estudiantes. Así por ejemplo, las operaciones binarias eran comprendidas como acción cuando los estudiantes no eran capaces de comprender el concepto de relación binaria con ejemplos específicos. La composición de dos simetrías específicas era entendida como proceso cuando los alumnos podían usar ejemplos concretos y generalizarlos. La comprensión de la relación binaria se daba en un nivel superior si la percibían como una función de dos variables.

Por su parte, Clark et al. (1997) analizaron la comprensión de los estudiantes de la regla de la cadena y sus aplicaciones, a través del desarrollo de la triada en un esquema, lo que facilitó la clasificación de las respuestas dadas por los 41 estudiantes que participaron de la investigación y que pertenecían a dos grupos, uno experimental y otro que recibía una enseñanza tradicional. El estudio se llevó a cabo mediante entrevistas realizadas a todos los participantes, y las preguntas tenían que ver con los distintos métodos de derivación, sobre la función integral o la comprensión de la regla de la cadena.

Las preguntas que se plantearon estos investigadores fueron: (a) ¿cómo comprenden los estudiantes la regla de la cadena? (b) ¿cuáles son los conceptos matemáticos necesarios para la comprensión de la regla de la cadena? (c) ¿cómo reconocen y aplican los estudiantes la regla de la cadena en diferentes situaciones matemáticas?

Estos mismos autores, plantearon una descomposición genética inicial que describía la forma que los estudiantes pueden llegar a comprender como objeto el esquema de función, de composición y de diferenciación y describieron además, cómo deberían relacionarse dichos esquemas para desarrollar el esquema de la regla de la cadena y cómo aplicarla en situaciones específicas. Las entrevistas mostraron que algunos alumnos podían generalizar la regla de la cadena de una función concreta realizando acciones y demostrando así una concepción acción de la regla de la cadena. Estas manifestaciones llevaron a los investigadores a usar nuevos elementos de interpretación apoyados en los niveles de desarrollo de un esquema. La redefinición de la descomposición genética planteada inicialmente sobre la regla de la cadena usando la triada se planteó de la forma siguiente: En el nivel intra el estudiante posee una colección de reglas de derivación para encontrar todo tipo de derivadas hasta las consideradas más difíciles, sin que esto suponga que establece relaciones entre ellas. En el nivel inter está caracterizado por la habilidad del alumno para discriminar entre todos los tipos de derivadas y establecer relación entre ellos. En el nivel trans el alumno construye el esquema subyacente de la regla de la cadena vinculando la composición de funciones y la diferenciación, generalizando así dicha regla.

Este estudio se complementa con el de Cottrill (1999) también relativo a la comprensión de la regla de la cadena. Parte de la hipótesis de que la regla de la cadena no es difícil en sí misma, sino que lo que dificulta su comprensión es la composición de funciones. En su estudio participaron 34 estudiantes de la asignatura de Cálculo, distribuidos en dos grupos que recibían enseñanza con dos metodologías diferentes. Las preguntas utilizadas en este estudio son muy similares a las de la investigación mencionada anteriormente.

Los resultados, obtenidos por medio de entrevistas, mostraron diferencias marcadas entre el grupo de control y el experimental; la descomposición genética era consistente y es imprescindible que los alumnos entiendan primero el concepto de composición de funciones para lograr un nivel adecuado de comprensión del concepto de regla de la cadena.

Otra investigación desde esta perspectiva teórica, es la de Weber (2002), sobre la comprensión que tienen los estudiantes de las funciones exponenciales y logarítmicas. El objetivo de este estudio es describir cómo los estudiantes pueden desarrollar la comprensión de estos temas y analizar la comprensión de estos conceptos en los alumnos dentro del contexto teórico.

El estudio fue realizado con 15 estudiantes que habían recibido un curso tradicional de Precalculo en la universidad; el trabajo se desarrolló a partir de entrevistas a los estudiantes. En las entrevistas se hicieron preguntas orientadas a recordar las propiedades de los logaritmos y de los exponentes, a justificar las propiedades y preguntas abiertas destinadas a explorar la comprensión conceptual de estos temas.

Las conclusiones a las que llega el investigador, las obtiene mediante la descripción de las actividades de instrucción y sobre la base del análisis teórico diseñado para fomentar la comprensión de estos conceptos en los estudiantes. El principal hallazgo de este estudio fue que la mayoría de los estudiantes sólo entendían la exponenciación como una acción y no entienden este concepto como un proceso; es decir, que mientras que todos los estudiantes en el estudio podían trabajar casos sencillos de la función exponencial, pocos estudiantes podían razonar sobre el proceso de exponenciación. La comprensión que tienen los estudiantes sobre los logaritmos y exponentes es bastante limitada y muchos de los estudiantes no son capaces de comprender los logaritmos y exponentes como procesos.

Baker et al. (2000) realizaron una investigación sobre la comprensión de los estudiantes acerca de los conceptos de Cálculo utilizados en la resolución de un problema atípico de cálculo gráfico; esbozar la gráfica de una función en intervalos específicos de su dominio conocidas diferentes propiedades de la misma. En esta investigación participaron 41 estudiantes de Ingeniería Ciencias y Matemáticas a los cuales se les realizaron entrevistas. El objetivo era estudiar la conceptualización de la primera y segunda derivada, la continuidad y los límites de la función y analizar la coordinación que establecían los estudiantes cuando esbozaban la gráfica de la función.

De acuerdo con los autores, el esquema de Cálculo gráfico, está caracterizado por una combinación de los niveles del desarrollo en la comprensión de los conceptos de derivada, de límite y de continuidad y requiere la comprensión y coordinación de dos esquemas, el llamado "de las propiedades" de las funciones y el llamado "de intervalo" de dominio específico. El de propiedades implicaba entender cómo los estudiantes coordinan las condiciones analíticas de una función y las relaciones con una propiedad gráfica. El desarrollo del esquema de intervalo involucraba comprender la notación de los intervalos. La utilización y análisis del esquema de "cálculo gráfico" en los tres niveles permitió a los investigadores comprender el comportamiento de algunos estudiantes.

Posteriormente este estudio fue ampliado por Cooley et al. (2003), con el objetivo de observar si los estudiantes eran capaces de "tematizar" el esquema de "cálculo gráfico". Los resultados se obtuvieron de las entrevistas realizadas a 27 estudiantes que mostraron dificultades para establecer relaciones entre los distintos conceptos implicados y el esquema de "cálculo gráfico" fue una herramienta para estudiar la coordinación de los conceptos implicados en los problemas de cálculo gráfico en diferentes contextos de representación. Los autores consideran que para que los estudiantes construyan el esquema de cálculo gráfico se requiere el diseño de estrategias didácticas que permitan un adecuado desarrollo del esquema.

Otro estudio en el marco de esta teoría, es la desarrollada por Barbosa (2003), sobre la comprensión del concepto de inecuación que tienen los estudiantes universitarios. El esquema de inecuación planteado debía ser investigado desde dos construcciones mentales diferentes: interpretación de inecuaciones y resolución de inecuaciones.

En primer lugar, el esquema de interpretación es entendido como un ente matemático que debe describirse y que puede manipularse a través de acciones como operar, analizar, observar equivalencias o verificar conjuntos de números reales que cumplen la inecuación y en segundo lugar, el esquema de resolución consiste en indicar los cambios que están permitidos, las modificaciones que sufre el conjunto solución después del procedimiento mismo, que permite resolver una inecuación con el menor número de operaciones; y desde el punto de vista gráfico este esquema comprende funciones que pueden ser utilizadas para representar la inecuación o para comparar signos de las imágenes. El investigador define lo que significa en el contexto de la investigación los conceptos de interpretar y resolver.

La investigación se llevó a cabo con 136 estudiantes universitarios de Informática y Matemáticas. Se comparó la comprensión del concepto de inecuación entre un grupo control y el experimental; a través de entrevistas. Las preguntas que se planteó Barbosa (2003), fueron: ¿Cuáles son los conceptos previos que se requieren para la comprensión de las inecuaciones?; ¿Cómo construye o comprende el estudiante el concepto de inecuación?; ¿Cuáles son las estructuras mentales y las conexiones con otros conceptos matemáticos necesarios para la comprensión del concepto de inecuación?; ¿Cómo influye la interpretación de inecuación en la resolución de problemas que implican el concepto?

Entre las conclusiones destacan las siguientes: es necesario que los estudiantes utilicen transformaciones adecuadas para hallar la solución de la inecuación; conozcan las condiciones y las razones por las qué realizan esas transformaciones. Asimismo, destaca que un “fuerte esquema de resolución, tanto en el contexto algebraico como gráfico, debe tener un esquema fuerte de interpretación” (Barbosa, 2003, p. 217). Propone que es necesario plantear actividades basadas en el esquema de inecuación que involucren la interpretación y la resolución tanto en la representación algebraica como gráfica.

Para la comprensión gráfica de una función y su derivada Asiala et al. (1997), propusieron una descomposición genética inicial basada en dos modos de representación, el gráfico y el analítico. La encapsulación como objeto del concepto derivada se producirá cuando la recta tangente a una función en un punto se comprenda como: el límite de las rectas secantes (modo gráfico) y el límite de los cocientes incrementales de una función en un punto (modo analítico).

En el estudio participaron 41 estudiantes de Ingeniería y Matemáticas distribuidos en dos grupos, un grupo de 24 estudiantes continuó una enseñanza tradicional y el otro grupo de 17 estudiantes había recibido una instrucción experimental basada en el ciclo de enseñanza "ACE" (actividades, tareas de clase y ejercicios), usando un lenguaje matemático de programación, y el aprendizaje colaborativo. La investigación pretendía hacer un estudio comparativo de ambos grupos.

Para recoger los datos se realizaron entrevistas con preguntas sobre la gráfica y la recta tangente a una función en el punto (5, 4) y sobre la construcción de funciones que cumplieran con determinadas condiciones. El objetivo de las preguntas de las entrevistas fue inferir información sobre cómo los estudiantes comprendían la derivada en los sistemas de representación gráfico y analítico.

Los resultados mostraron que cuando los estudiantes trabajaban con gráficas la función era conocida como proceso. Muchos necesitaban tener una expresión analítica de $f(x)$ que se adaptase a la representación gráfica. La comprensión de la derivada como la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto presentó dificultades cuando los alumnos no comprendían el concepto de función como proceso, porque no entendían que f' (la derivada de f) es una función.

Los estudiantes del curso experimental alcanzaron una comprensión proceso de la función y pocos necesitaron de la expresión analítica de $f(x)$ que se correspondiera con la gráfica. Además, estos estudiantes mostraron una comprensión más completa de f y f' (derivada de f) que los que seguían una instrucción tradicional.

A partir de estos resultados, Asiala et al. (1997), manifiestan que se de debe reforzar la comprensión del concepto de derivada en las representaciones gráfica y analítica. La descomposición genética inicial debe modificarse para dar mayor énfasis a la concepción de función que poseen los estudiantes y a la creación de conexiones entre las interpretaciones analíticas y gráficas.

Desde la línea sobre el conocimiento profesional del profesor, Badillo (2003) realizó una investigación sobre la derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de Matemáticas. El objetivo de esta investigación fue identificar y describir la relación e integración entre el conocimiento del contenido matemático y el conocimiento didáctico del contenido con relación al concepto de derivada de profesores de Matemáticas en ejercicio.

Para el estudio utilizó las categorías teóricas y analíticas que proporcionan el marco de la Teoría APOE y los organizadores del currículo, para el estudio de los componentes del conocimiento profesional del profesor de Matemáticas. En la investigación utilizó la construcción de la descomposición genética del concepto de derivada y el desarrollo de los niveles del esquema del concepto en los sistemas de representación gráfica y analítica. Badillo (2003) parte de la estructura y descripción del conocimiento profesional del profesor y la forma cómo éste lo estructura en su diario de trabajo, para lo cual la autora se centra en la caracterización de las tareas que propone el profesor para enseñar y evaluar este concepto matemático en sus alumnos.

En cuanto al tipo de investigación, utiliza una metodología de estudio de casos, donde busca integrar en el análisis del conocimiento del profesor, las dimensiones institucionales y cognitivas, teniendo en cuenta la delimitación del contexto. A partir de esto, la investigadora definió dos niveles de análisis: análisis macro y análisis micro. El análisis macro tiene que ver con las restricciones institucionales que puede tener el concepto de derivada y que de alguna forma puede condicionar la práctica del profesor (conocimiento matemático, aspectos de formación inicial y diseño curricular) y con el análisis micro, se refiere al conocimiento que tienen los profesores sobre el concepto de derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje.

Del análisis y de los resultados Badillo (2003) hace algunos planteamientos en los siguientes términos:

- Existe confusión entre los macro objetos f ’(a) y f ’(x) y falta de un tratamiento adecuado de las relaciones y diferencias entre estos.

- Estas confusiones se verifican con mayor o menor grado, en todos los libros de textos de Matemáticas de 11º (segundo año de bachillerato) que usan los profesores, porque optan por introducir la derivada como un cociente incremental para definir los macro objetos f ’(a) y f ’(x) y evitan la complejidad semiótica que implica comprender estos macro objetos.

- El mismo fenómeno se evidencia en el conocimiento de los profesores al reproducir los errores y dificultades en la comprensión de estos macro objetos cuando tienen que resolver y diseñar tareas de Matemáticas.

La autora, propone con base en los resultados de los análisis macro, micro y la integración de los dos, algunas sugerencias para la formación permanente del profesorado que permita la solución del problema detectado.

Otro estudio significativo, es el presentado por Sánchez–Matamoros (2004) y Sánchez-Matamoros, García y Llinares (2006), sobre el desarrollo de la comprensión del concepto de derivada en estudiantes de bachillerato y primer curso de Licenciatura de Matemáticas a través de los tres niveles de desarrollo del esquema: Intra, Inter y Trans.

La investigación de Sánchez-Matamoros, García y Llinares (2006), tiene como objetivo estudiar el desarrollo de la comprensión del concepto de *derivada* en el nivel de bachillerato (16- 18 años) y primer año de la universidad.

La investigación estuvo orientada a caracterizar el desarrollo de la comprensión del concepto de derivada en estos alumnos, a partir de la perspectiva teórica de los niveles (intra, inter y trans) de desarrollo del esquema propuesto por Piaget y García (1982). Para este estudio realizaron un análisis previo de la noción de derivada estudiando los elementos matemáticos y las relaciones lógicas que conforman el concepto. Las relaciones lógicas (conjunción lógica, contrarecíproco y equivalencia lógica) se entendieron como la "coordinación entre operaciones", que se establecen entre los elementos matemáticos cuando se resuelve un problema y los elementos matemáticos entendidos por estos autores en los mismos términos piagetianos como "el producto de una disociación o de una segregación en el interior de una totalidad previa" (Piaget, 1963, p. 8).

En el estudio participaron 150 estudiantes, distribuidos así: 50 de 1º de bachillerato, 50 de 2º de bachillerato y 50 de primer curso de Licenciatura de Matemáticas. Para recoger la información utilizaron cuestionarios específicos para cada uno de los grupos de alumnos y entrevistas apoyadas en las respuestas producidas por los estudiantes en el cuestionario.

El análisis de las respuestas de los estudiantes a diferentes problemas de derivadas permitió asignarles un nivel de desarrollo del esquema de derivada. Los resultados obtenidos a partir de los cuestionarios y de las entrevistas indican que el desarrollo del esquema de derivada está vinculado a la capacidad de los estudiantes de relacionar los elementos constitutivos del concepto durante la resolución de problemas.

Los resultados se discuten considerando la actividad mental o la capacidad de los estudiantes para generar información (síntesis) y poder así explicar el desarrollo del esquema de derivada. Asimismo, Sánchez-Matamoros, García y Llinares (2006, p. 96), consideran "que un estudiante pasa de un nivel de desarrollo del esquema a otro por la manera como realiza la síntesis, de los modos de representación".

De su parte, Bodi (2006) también realizó una investigación en el marco teórico APOE, sobre el análisis de la comprensión de la divisibilidad en el conjunto de los números naturales, tuvo como objetivo analizar la comprensión de los alumnos de educación secundaria (12-17 años) de la divisibilidad en el conjunto de los naturales desde la perspectiva del modelo APOE y caracterizar los niveles de desarrollo del esquema de Divisibilidad. Los datos de este estudio se obtuvieron por medio de cuestionarios y entrevistas que fueron aplicados a los estudiantes. Del análisis y de los resultados obtuvo las conclusiones siguientes:

- En los alumnos predomina el nivel Intra del desarrollo del esquema de Divisibilidad, caracterizado porque los estudiantes tienen dificultades para establecer relaciones entre los elementos del esquema; en el nivel inter empiezan a establecer relaciones entre los elementos, aunque con algunas dificultades para indicar que un número es divisible por sus factores compuestos y en el nivel trans ya pueden establecer la mayoría de las relaciones de divisibilidad vinculadas a la representación factorial de los números naturales.

- La tematización del esquema de divisibilidad fue identificada a partir del manejo de las diferentes propiedades de la divisibilidad, en los modos de representación decimal y factorial de los números.

- El uso de las relaciones bicondicionales, de la coordinación y de la relación contrarrecíproca entre los elementos de divisibilidad permitió realizar inferencias correctas en términos de divisores y no divisores, de múltiplos y no múltiplos, admitiendo la idea de la unicidad de la descomposición en factores primos y que cualquier divisor o múltiplo del número debe poder formarse a partir de la representación factorial del mismo.

- Existe correspondencia entre la reificación y la comprensión de los conceptos matemáticos cuando el individuo establece relaciones lógicas entre ellos, independientemente del modo de representación adoptado.

- En este sentido, la descomposición factorial entendida como "procepto" (procedimiento-concepto) ha resultado fundamental para el desarrollo del esquema de Divisibilidad, facilitando el desarrollo gradual del mismo, Bodi (2006, p. 280).

De otra parte, Codes y Sierra (2004) hicieron un estudio piloto sobre enseñanza-aprendizaje con Maple del concepto de convergencia de series numéricas con alumnos del primer curso de la Diplomatura de Informática. El objetivo principal del trabajo fue mejorar el aprendizaje de este concepto en los alumnos de este programa académico, utilizando una instrucción previa apoyada en un programa de cálculo simbólico, y el analisis de las respuestas dadas por los alumnos en la instrucción aplicando la metodología del ciclo de enseñanza ACE.

Los investigadores parten de la formulación de varias hipótesis en los siguientes términos: la instrucción permite que se evidencien algunos obstáculos epistemológicos y didácticos; la génesis del concepto y el contenido de las actividades puede superar algunos obstáculos epistemológicos asociados a las series infinitas; las representaciones gráficas ayudan a los alumnos a resolver los problemas, y la enseñanza de un concepto matemático con una herramienta informática genera interés en el alumno por las Matemáticas y mejora su rendimiento académico.

Para el estudio de este concepto matemático, utilizaron la teoría APOE, a partir de la descomposición genética del concepto de series numéricas y del diseño de instrucción. La instrucción la implementaron con un total de 44 estudiantes de los programas de Gestión y de Sistemas, para lo cual utilizaron un cuestionario previo a la instrucción, uno posterior a la instrucción y otro para evaluar la instrucción recibida. A partir del análisis y de los resultados obtenidos los autores concluyeron:

- Los alumnos mostraron una actitud positiva por el uso de la herramienta informática de cálculo simbólico, aunque muchos consideran que su uso es complicado, porque requiere de conocer el lenguaje de programación.

- Los resultados indican que se debe hacer un uso más sistemático de la herramienta y utilizarla durante todo el curso y no sólo en la instrucción.

- Alto grado de aceptación de los alumnos por el uso del Maple en las representaciones gráficas y comprobación de varias de las hipótesis planteadas en la investigación.

- En la prueba piloto se detectaron algunos obstáculos que se pretenden corregir a lo largo de la nueva instrucción, para alcanzar el objetivo final del estudio.

- Muchos alumnos requieren de una entrevista para precisar más el sentido de los argumentos que dan en las explicaciones de sus respuestas.

A partir de estas conclusiones, los autores plantean continuar con la aplicación de la teoría APOE, haciendo una revisión de la descomposición genética y las modificaciones necesarias a la instrucción previa recibida, que será aplicada de nuevo a los alumnos.

Continuando con Codes y Sierra (2007) estos investigadores, además presentaron otro estudio piloto sobre la noción matemática del concepto de serie numérica, con el propósito de analizar la comprensión de los estudiantes de Ingeniería Informática de este concepto matemático.

La investigación la realizaron en el marco teórico APOE, a partir de la descomposición genética del concepto de serie numérica, lo que les permitió caracterizar los niveles (intra, inter y trans) de desarrollo del esquema de éste concepto y definir subniveles dentro de los niveles (intra e inter) del esquema.

Para el estudio tomaron una muestra de 14 estudiantes, que en el momento estaban recibiendo clase sobre este concepto matemático, para lo cual los alumnos recibieron una instrucción teórica apoyada en un software de cálculo simbólico Maple. La información la obtuvieron a partir de la grabación de todas las clases sobre el tema de sucesiones y series numéricas con aquellos alumnos que de forma voluntaria aceptaron. El análisis de los datos lo establecieron a partir de la formación de dos grupos de trabajo (S1 y S3) utilizando los criterios: participación de los integrantes durante las grabaciones y la diferencia en el nivel de comprensión. A partir del análisis, los investigadores obtuvieron los resultados siguientes:

- Mayor nivel de desarrollo del concepto de serie numérica de un grupo (S1) con respecto al otro (S3) grupo.

- Ninguno de los grupos tuvo manifestaciones de haber alcanzado el nivel trans de desarrollo del esquema.

- Un grupo (S1) mostró características de desarrollo del esquema en nivel inter avanzado.

- El otro grupo (S3) sólo presenta una característica de nivel inter, ubicándose así en el nivel intra avanzado.

Según, Codes y Sierra (2007) los subniveles avanzados señalan la transición de un nivel a otro superior que se manifiesta a través de las acciones que se llevan a cabo sobre los elementos del modelo sucesión y sucesión de sumas parciales.

Las investigaciones presentadas acreditan la potencialidad del marco teórico APOE. La utilización de este marco permite a los investigadores obtener información sobre las características de los significados de los conceptos investigados y sobre las características de la evolución de los mismos (desarrollo de la comprensión). Por otra parte, la descomposición genética de un concepto permite identificar los mecanismos y formas de conocer que deben adquirir los estudiantes para el desarrollo del esquema del concepto matemático. Asimismo, la identificación de los elementos matemáticos y el tipo de relaciones establecidas entre ellos permite determinar los niveles de desarrollo del esquema del concepto que se desea construir o aprender.

CAPÍTULO 3

Capítulo 3. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo describimos los aspectos metodológicos de la investigación, los instrumentos utilizados y el procedimiento de análisis realizado. En primer lugar, desarrollamos el método de investigación utilizado, haciendo referencia al ámbito de la investigación, enumerando las fases de la investigación, presentando los elementos matemáticos, las relaciones lógicas y los sistemas de representación del concepto de Integral Definida así como la descomposición genética inicial del concepto de Integral Definida. A continuación se indica cómo se diseñó y aplicó un precuestionario como instrumento de recogida de datos para posteriormente construir los instrumentos de recogida de los datos definitivos (cuestionario, entrevista y mapa conceptual); indicaremos cómo se aplicaron estos instrumentos y finalmente, presentaremos el procedimiento metodológico utilizado para el análisis de los datos recogidos.

3.1. Método de investigación.

El tipo de investigación que hemos realizado es una "investigación cualitativa orientada a la comprensión**,** cuyo objetivo es describir e interpretar la realidad educativa desde dentro" (Dorio, I., Massot, I. y Sabariego, M., 2009, p. 281); porque tiene que ver con la forma cómo los estudiantes comprenden/construyen el concepto de Integral Definida, es decir, cómo se desarrolla el esquema de Integral Definida en estudiantes de tercer año de Licenciatura de Matemáticas. Se trata de un estudio de casos, que "involucra aspectos descriptivos y explicativos de los temas objeto de estudio" (Bernal, 2006, p. 116); los participantes han sido analizados de forma individual y el análisis global nos ha permitido caracterizar los niveles de desarrollo del esquema de Integral Definida en la población objeto de la investigación.

3.2. Ámbito de la investigación.

Esta investigación se ha realizado en Colombia, en el Departamento del Quindío, en la ciudad de Armenia, concretamente en la Universidad del Quindío. Los estudiantes a los que se refiere tienen un rango de edad entre 18-32 años, pertenecen a la Facultad de Educación y están adscritos al Programa de Matemáticas en el que deben cursar 160 créditos del plan de estudios. La mayoría trabaja y debe costearse sus estudios por lo que los realizan en horario nocturno.

En Colombia el concepto de Integral Definida no está contemplado en los estándares curriculares diseñados por el Ministerio de Educación Nacional (MEN, mayo de 2003) correspondientes a la educación secundaria, por lo que este concepto sólo se estudia cuando se ingresa en la universidad. En el segundo año de bachillerato, en Análisis Matemático, el plan de estudios contempla "funciones, nociones intuitivas de aproximación y límite, y una aproximación del estudiante a la noción de derivada como razón de cambio instantánea en contextos matemáticos y no matemáticos".

En nuestro caso los estudiantes que participaron en la investigación estudian éste concepto en el tercer año (sexto semestre) de la Licenciatura de Matemáticas, después de haber visto el Cálculo diferencial, en el que se incluyen los contenidos de “funciones, límite y continuidad, la derivada y aplicaciones de la derivada” **(Anexo 7).**

La asignatura de Cálculo Integral o Cálculo II tiene 4 créditos y se imparte durante 4 horas semanales de docencia directa (1 crédito equivale a 48 horas, entre docencia directa y el tiempo que debe dedicar el estudiante a preparar la asignatura). El curso total de Cálculo II está previsto para 16 semanas activas de clases, de las cuales las 4 primeras semanas están dedicadas a estudiar únicamente la unidad didáctica correspondiente a la Integral Definida. Por tanto los estudiantes ya habían estudiado el concepto de Integral Definida, en la clase habitual con el profesor de la asignatura que es diferente del investigador, cuando se realizó la investigación.

Los objetivos relacionados con el concepto de Integral Definida de éste curso son: “interpretar correctamente la Integral Definida como límite de una suma Riemann, calcular Integrales Definidas usando el teorema fundamental del Cálculo y utilizar correctamente las propiedades de la Integral Definida para resolver problemas cuya solución conduce a una Integral Definida”.

Además, entre los contenidos de esta asignatura se incluyen: “antiderivadas, notación sigma, propiedades de la sumatoria, particiones, sumas de Riemann, definición de la Integral Definida, funciones integrables, propiedades de la Integral Definida, los teoremas fundamental del Cálculo Integral y teorema del valor medio para integrales (interpretación geométrica). Aplicaciones de la Integral Definida: Área de una región plana, área de una región entre curvas, volúmenes de sólidos de rotación y longitud de una curva plana”.

La metodología de enseñanza utilizada es de tipo magistral, donde el profesor expone los conceptos y los escribe en la pizarra y el estudiante toma apuntes. No se dispone de medios informáticos en la clase. El sistema de evaluación es cuantitativo y va de 0.0 a

5.0. Los estudiantes complementan su aprendizaje utilizando como recurso didáctico algunos libros de texto sugeridos por el profesor como: Larson, R., Hostetler, R. P., y Edwars, B. H. (2002). *Cálculo I* (7ª ed.). Madrid: Pirámide.; Purcell, E. J., Varberg, D., y Rigdon, S. E. (2001). *Cálculo* (8ª ed.). México. Prentice Hall.; Bradley, G. L., y Smith, K. J. (2000). *Cálculo de una variable*. (Vol. 1). Madrid: Prentice Hall.; Edwars, C. H., y Penney, D. E. (1997). *Cálculo Diferencial e Integral* (4ª ed.). México: Prentice Hall.; y Apóstol, T. M. (1991). *Calculus, Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al Álgebra Lineal.* (Vol. 1). (2ª ed.). Barcelona: Reverté, y Leithold, L. (1982). *El Cálculo con Geometría Analítica* (4ª ed.). México: Harla.

Algunos de estos libros de texto junto con otros aparecen en el capítulo 1 fueron utilizados para analizar cómo se desarrolla el concepto de Integral Definida en los libros de texto de bachillerato y universidad; es decir para determinar los elementos matemáticos que configuran el concepto de Integral Definida.

Como podrá notarse las primeras nociones del concepto de Integral Definida en el contexto de la investigación se adquieren en el ámbito universitario, por lo que resulta pertinente el estudio de la comprensión de este concepto de los estudiantes de tercer año de Licenciatura de Matemáticas.

3.3. Fases de la investigación.

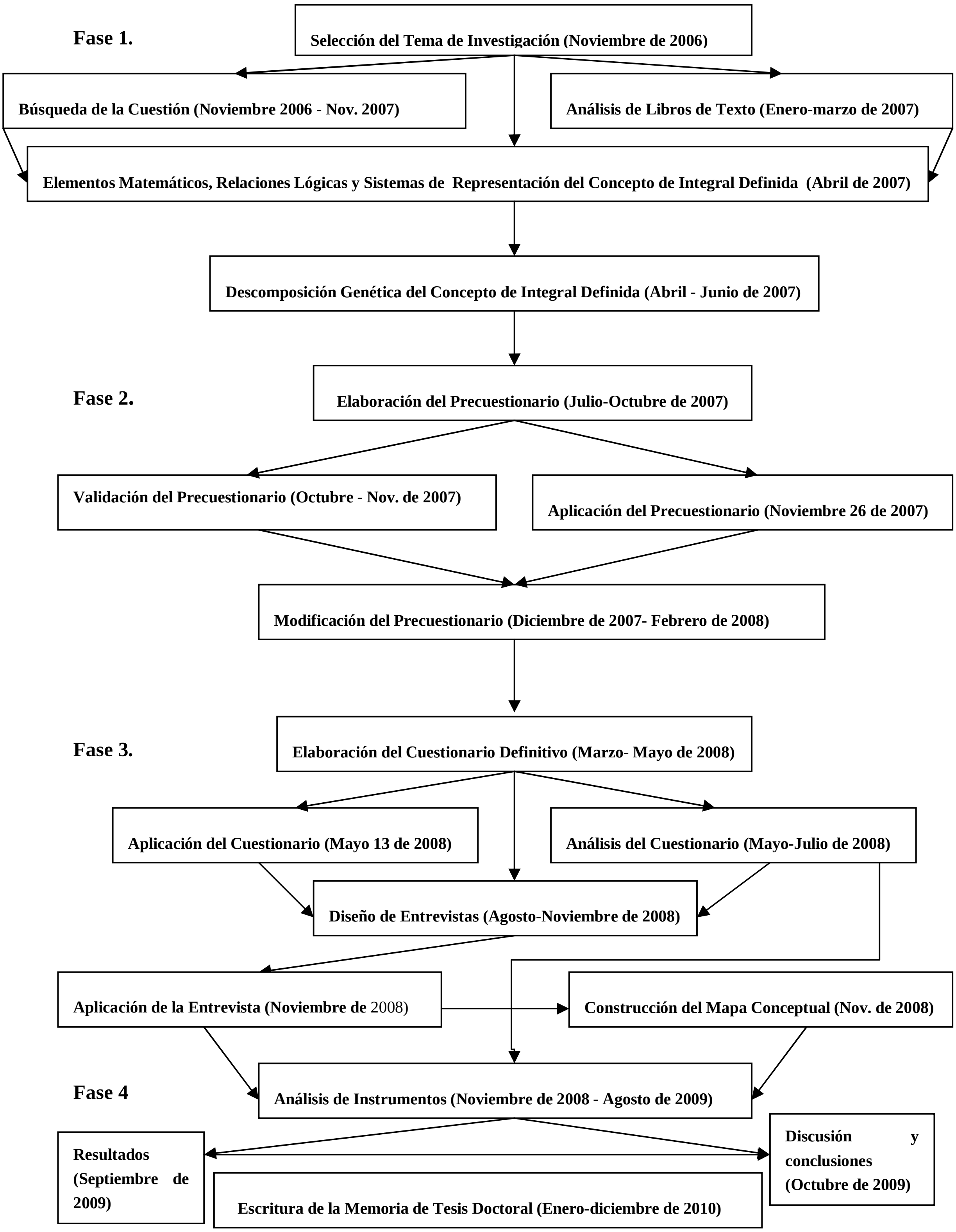
Este apartado tiene que ver con cada una de las etapas en las que se desarrolló la investigación, algunas se produce de forma simultánea, mientras que otras son pasos previos para la fase siguiente. El esquema general de investigación que hemos utilizado de acuerdo con Bisquerra y Sabariego (2009, p. 90) "está constituido por una serie de etapas interconectadas de forma lógica, secuencial y dinámica", las cuales presentamos en el esquema 3.1.

3.3.1. Fase 1: La hemos considerado como el punto de partida de la investigación, **seleccionando el tema de la investigación** que en nuestro caso se trata de la comprensión del Concepto de Integral Definida en el marco teórico APOE, lo que nos ha llevado a formular un problema de investigación, asociado a unos objetivos que centran esta investigación en estudiar la comprensión de los alumnos universitarios colombianos del concepto de Integral Definida, mediante la triada de desarrollo del esquema de APOE, describiendo las relaciones que establecen entre los elementos matemáticos y los modos de representación que son capaces de sintetizar. Para dar respuesta a este estudio se realizó una revisión de la literatura existente sobre investigaciones previas realizadas en torno a esta cuestión, un análisis de cómo aparece el concepto de Integral Definida en los libros de texto que sirvió para determinar los elementos matemáticos que configuran dicho concepto y realizar una descomposición genética inicial del concepto de Integral Definida de acuerdo con el marco teórico de la investigación.

3.3.2. Fase 2: En esta etapa nos referimos a la **selección del método y diseño de la investigación**, en la cual se estableció la muestra de sujetos participantes en la prueba piloto, el diseño del precuestionario, la selección de los problemas que se incluyen en el precuestionario la validación del precuestionario por expertos, la aplicación del precuestionario y modificación del precuestionario.

3.3.3. Fase 3: La consideramos como la fase de **diseño, aplicación y análisis de los instrumentos definitivos** de recogida de datos, e incluye la elaboración del cuestionario definitivo, la selección de los sujetos participantes en la investigación, la aplicación del cuestionario, el análisis del cuestionario, el diseño de las entrevistas, la aplicación de las entrevistas y la construcción del mapa conceptual.

3.3.4. Fase 4: Esta etapa, en nuestro estudio, corresponde al **análisis conjunto de los instrumentos** (cuestionario, entrevista y mapa conceptual), para la obtención de los resultados, las conclusiones y discusión en torno a la investigación, las implicaciones en la enseñanza del concepto y las perspectivas de futuro. Finalmente concluimos esta fase con la escritura de la memoria de Tesis Doctoral.



Esquema 3.1. Fases del desarrollo metodológico de la investigación

3.4. Elementos matemáticos, relaciones lógicas y sistemas de representación del concepto de Integral Definida.

El estudio previo de otras investigaciones y el análisis de los libros de texto, nos llevó a vincular la comprensión del concepto de Integral Definida con los siguientes aspectos:

- Los elementos matemáticos que constituyen el esquema de la Integral Definida.
- Las relaciones lógicas entre los elementos matemáticos.
- Los sistemas de representación.

A. Los elementos matemáticos.

Desde esta perspectiva teórica, un concepto matemático está formado o involucra diferentes elementos matemáticos que lo configuran. Entendemos los elementos matemáticos como *"el producto de una disociación o de una segregación del Concepto de Integral Definida, vinculada al concepto y a sus propiedades"*. Esta es una adaptación de la definición de "elemento" de Piaget (1963, p. 8). Nosotros en esta investigación, igual que Sánchez-Matamoros (2004), no hablamos de colección de acciones, procesos u objetos, que son formas de conocer los elementos matemáticos del concepto, hablamos de colección de elementos matemáticos que configuran el concepto matemático.

Baker et al. (2000) (citado por Sánchez-Matamoros, 2004, p. 79), afirman "que en el propósito de resolver una tarea, las personas "coordinan y sintetizan" las acciones, los procesos y los objetos para formar estructuras, es decir, "coordinan" los elementos que constituyen el concepto matemático, ya que acciones, procesos y objetos son formas de conocer elementos matemáticos del concepto. Una etapa previa en una investigación es determinar cómo se relacionan los elementos matemáticos y qué elementos matemáticos se relacionan, como una manera de llegar a caracterizar el desarrollo del esquema, estas relaciones entre los elementos matemáticos del concepto se realizan por medio de determinadas operaciones cognitivas, llamadas relaciones u operaciones lógicas entre los elementos matemáticos", por lo tanto el desarrollo del esquema del concepto de Integral

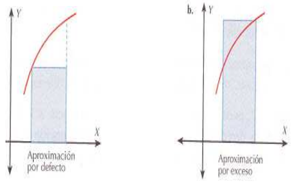
Definida está caracterizado por:

- Los elementos matemáticos que se utilizan,
- las relaciones lógicas que se establecen entre estos elementos y
- los sistemas de representación gráfico, algebraico y analítico.

Con estos planteamientos podemos analizar el desarrollo del pensamiento de un estudiante mediante el uso que hace de los elementos matemáticos dados en distintos sistemas de representación y en su capacidad de establecer las relaciones lógicas entre estos elementos en la resolución de un problema.

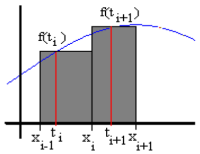
Cuando mencionamos los elementos matemáticos vinculados al concepto hacemos referencia al concepto matemático como tal, es decir a la noción matemática que configura dicho concepto matemático, y hacemos referencia a los sistemas de representación gráfico **G**, algebraico **A** y analítico **AN**, del concepto como tal, porque estos registros de representación son los que resultaron del análisis de los libros de texto en el capítulo 1 de esta tesis, y que comúnmente utilizaron y coordinaron los estudiantes a lo largo de los procedimientos de resolución de las tareas.

La tabla siguiente muestra los elementos matemáticos del concepto de Integral Definida vinculados a los sistemas de representación gráfico, algebraico y analítico que constituyen éste concepto matemático.

<table>
<tr><th rowspan="2">ELEMENTOS MATEMÁTICOS</th><th colspan="3">SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN</th></tr>
<tr><th>GRÁFICO</th><th>ALGEBRAICO</th><th>ANALÍTICO</th></tr>
<tr>
<td>EL ÁREA COMO APROXIMACIÓN (ACA)</td>
<td>
1.APROXIMACIÓN DEL ÁREA DE UNA REGIÓN PLANA
El área de una región con frontera curva puede ser aproximada sumando un conjunto de rectángulos. Aumentamos la exactitud de la aproximación, usando cada vez más rectángulos inscritos y circunscritos.


2. SUMAS INFERIORES Y SUPERIORES
$y=f(x)$


La suma de las áreas de los rectángulos inscritos se llama suma inferior, y la suma de las áreas de los rectángulos circunscritos se llama suma superior.

3. SUMAS DE RIEMANN


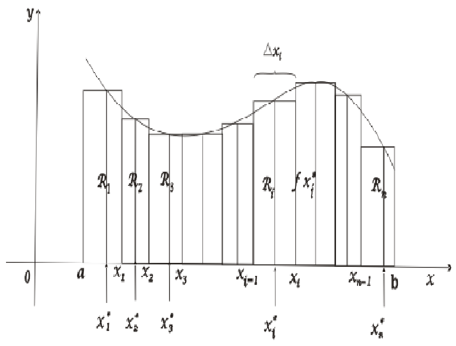
</td>
<td>
1. FÓRMULAS DE ÁREA DE REGIONES PLANAS
En la aproximación del área bajo gráficas se hacen cálculos aproximados utilizando comúnmente la definición de áreas elementales.

1.1. FÓRMULA DEL ÁREA DEL RECTÁNGULO:
$A = b \times h$
1.2. FÓRMULA DEL ÁREA DEL TRIÁNGULO:
$A = \frac{b \times h}{2}$
1.3. FÓRMULA DEL ÁREA DEL CUADRADO:
$A = l \times l$
1.4. FÓRMULA DEL ÁREA DEL TRAPECIO:
$A = \frac{(B+b)}{2}h$
2. SUMA DE UNA SUCESIÓN
La suma de n términos $a_1, a_2, a_3 ..., a_n$ se escribe $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$
donde i es el índice de suma, a_i es el i-ésimo término de la suma, y los límites superior e inferior de la suma son n y 1.
3. CALCULO DE LA SUMA DE UNA SUCESIÓN
2.1. $\sum_{i=1}^{n} c = cn$
2.2. $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
2.3. $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
2.4. $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
</td>
<td>
1. ESQUEMA GENERAL DE APROXIMACIÓN DEL ÁREA DE UNA REGIÓN PLANA
Partición del intervalo $[a,b]$ en n subintervalos de base: $\Delta_x = \frac{(b-a)}{n}$. Sus puntos terminales son: $\overbrace{a+0(\Delta_x)}^{a=x_0} < \overbrace{a+1(\Delta_x)}^{x_1} < \overbrace{a+2(\Delta_x)}^{x_2} < ... < \overbrace{a+n(\Delta_x)}^{x_{n=b}}$
Como f es continua, el teorema de los valores extremos asegura la existencia de un mínimo y de un máximo de $f(x)$ en cada subintervalo.
$f(x_i^*)=$ valor mínimo de $f(x)$ en el i-ésimo subintervalo.
$f(x_i^{**})=$ valor máximo de $f(x)$ en el i-ésimo subintervalo.
Definimos un rectángulo inscrito dentro de la i-ésima subregión, de altura $f(x_i^*)$, y un rectángulo circunscrito que se extiende fuera de esa i-ésima subregión de altura $f(x_i^{**})$. Para cada i, el área del rectángulo inscrito es menor o igual que el área del rectángulo circunscrito. La suma de las áreas de los rectángulos inscritos se llama suma inferior de Darboux y la de los rectángulos circunscritos, suma superior de Darboux.
2. SUMAS INFERIORES Y SUMAS SUPERIORES
2.1. SUMAS INFERIORES
$\underline{S_n} = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\frac{b-a}{n}$
2.2. SUMAS SUPERIORES
$\overline{S_n} = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^{**})\frac{b-a}{n}$.
3. DEFINICIÓN DE LAS SUMAS DE RIEMANN
Ahora consideramos una partición del intervalo $[a,b]$ en n subintervalos no necesariamente de la misma amplitud.
Sea f definida en el intervalo cerrado $[a,b]$ y sea Δ una partición de $[a,b]$ dada por $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$ donde Δ_{x_i} es la amplitud del i-esimo subintervalo. Si c_i es cualquier punto del i-ésimo subintervalo, la suma $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta_{x_i}$, $x_{i-1} \le c_i \le x_i$ es una suma de Riemann de f asociada a la partición Δ.
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2">ELEMENTOS MATEMÁTICOS</th><th colspan="3">SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN</th></tr>
<tr><th>GRÁFICO</th><th>ALGEBRAICO</th><th>ANALÍTICO</th></tr>
<tr>
<td>EL ÁREA COMO LÍMITE DE UNA SUMA (ALS)</td>
<td>1. LÍMITE DE LAS SUMAS INFERIORES Y SUPERIORES

Cada punto x_i^* puede estar en cualquier lugar del subintervalo: en el extremo derecho, en el extremo izquierdo o en algún lugar intermedio.

$y = f\left(x\right)$

</td>
<td></td>
<td>1. DEFINICIÓN DEL LÍMITE DE LA SUMAS INFERIORES Y SUPERIORES.

Sea f continua y no negativa en el intervalo $[a,b]$ Los límites, cuando $n \to \infty$, de las sumas inferiores y superiores son iguales. Es decir,

1.1. LÍMITE INFERIOR 1.2. LÍMITE SUPERIOR

$\underline{S} = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right) \dfrac{b-a}{n}$ $\overline{S} = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} f\left(x_i^{**}\right) \dfrac{b-a}{n}$

donde $f\left(x_i^*\right), f\left(x_i^{**}\right)$ son respectivamente, los valores mínimo y máximo de f en el subintervalo.

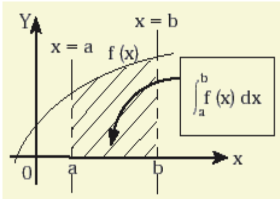
2. DEFINICIÓN DEL ÁREA DE UNA REGIÓN PLANA

Sea f continua y no negativa en el intervalo $[a,b]$.El área de la región limitada por la gráfica de f, el eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ es

Área$= \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} f\left(c_i\right)\Delta_x$, $x_{i-1} \le c_i \le x_i$.</td>
</tr>
</table>

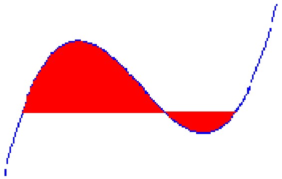
<table>
<tr><th rowspan="2">ELEMENTOS MATEMÁTICOS</th><th colspan="3">SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN</th></tr>
<tr><th>GRÁFICO</th><th>ALGEBRAICO</th><th>ANALÍTICO</th></tr>
<tr>
<td>LA INTEGRAL DEFINIDA (LID)</td>
<td>

1. INTERPRETACIÓN DE INTEGRAL DEFINIDA

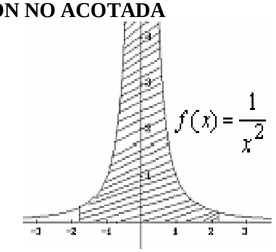


2. FUNCIONES POSITIVAS Y NEGATIVAS

$y = f(x)$



3. FUNCIÓN NO ACOTADA



</td>
<td>

1. LA INTEGRAL DEFINIDA COMO ÁREA DE UNA REGIÓN

Si f es continua y no negativa en el intervalo cerrado $[a,b]$, el área de la región limitada por la gráfica de f, el eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ viene dada por:

ÁREA= $\int_a^b f(x)dx$.

2. PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA DE FUNCIONES POSITIVAS Y NEGATIVAS

2.1. Si $f(x) > 0$ y es integrable en el intervalo $[a,b]$, la integral $\int_a^b f(x)dx > 0$ y el área coincide con el recinto limitado por la gráfica de $f(x)$ y el eje x en el intervalo $[a,b]$.

2.2. Si $f(x) < 0$ y es integrable en el intervalo $[a,b]$, la integral $\int_a^b f(x)dx < 0$ y el área es: $A = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$.

2.3. Si $f(x)$ es integrable y cambia de signo en el intervalo $[a,b]$, la integral nos da la suma algebraica de las áreas que están por encima y por debajo del eje x, cada una con su signo. Aclarando que las áreas siempre son positivas.; entonces, el área se obtiene cambiando de signo a esta última que es negativa o mediante la suma de los " valores absolutos" (de las integrales extendidas a los intervalos en los que conserva el signo) de los recintos.

</td>
<td>

1. DEFINICIÓN DE INTEGRAL DEFINIDA

Si f está definida en el intervalo cerrado $[a,b]$ y el límite $I = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta_{x_i}$ existe, entonces f es integrable en $[a,b]$ y escribimos

$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta_{x_i} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (c_i)\Delta_{x_i} = \int_a^b f(x)dx \cdot$

Este límite se llama la Integral Definida de f entre a y b .El número a se llama límite inferior de integración y el número b límite superior de integración.

2. CONDICIÓN SUFICIENTE: CONTINUIDAD IMPLICA INTEGRABILIDAD

Si una función f es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$, entonces f es integrable en $[a,b]$.

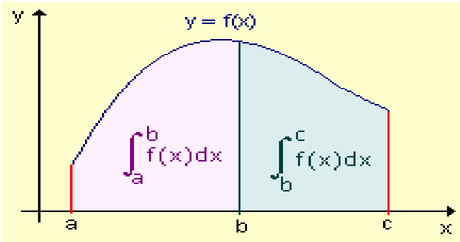
3. INTEGRANDOS QUE SON INFINITOS EN UN PUNTO INTERIOR

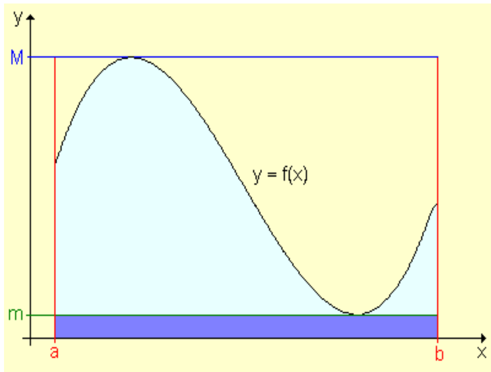
Si f es continua en $[a,b]$, excepto en un número c, en donde $a < c < b$, y supóngase que $\lim_{x\to c} |f(x)| = \infty$. Entonces definimos

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Siempre que ambas integrales converjan. En caso contrario, decimos que $\int_a^b f(x)dx$ diverge.

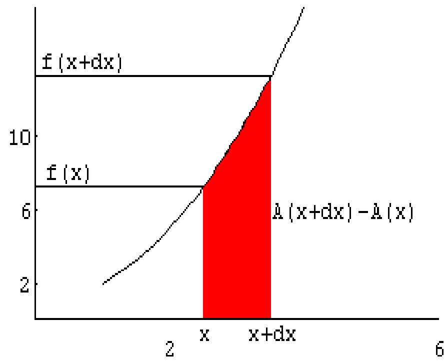
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2">ELEMENTOS MATEMÁTICOS</th><th colspan="3">SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN</th></tr>
<tr><th>GRÁFICO</th><th>ALGEBRAICO</th><th>ANALÍTICO</th></tr>
<tr>
<td>PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA (PID)</td>
<td>1. INTERPRETACIÓN GRÁFICA DE LA UNIÓN DE INTERVALOS


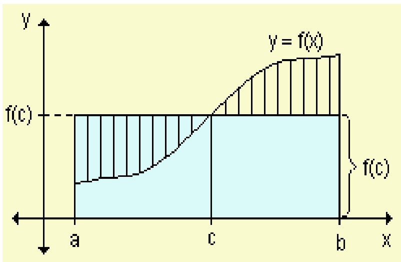
2. INTERPRETACIÓN DE COMPARACIÓN

</td>
<td>1. UNIÓN DE INTERVALOS
Si f es integrable en los tres intervalos cerrados determinados por a, b y c, entonces
$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$
2. REGLA DE LINEALIDAD
Si f y g son integrables en $[a,b]$, también lo es $rf + sg$ para todo par de constantes r, s y $\int_a^b [rf(x) + sg(x)]dx = r\int_a^b f(x)dx + s\int_a^b g(x)dx$
3. CONSERVACIÓN DE DESIGUALDADES
3.1 Si f es integrable y no negativa en el intervalo cerrado $[a,b]$, $0 \le \int_a^b f(x)dx$.
3.2 Si f y g son integrables en el intervalo cerrado $[a,b]$ y $f(x) \le g(x)$ para todo x en $[a,b]$, entonces $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.
4. COMPARACIÓN
Si f es integrable y $m \le f(x) \le M$ para $a \le x \le b$ entonces
$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$.
5. DEFINICIÓN DE INTEGRALES ESPECIALES
5.1 Si f está definida en $x = a$, $\int_a^a f(x)dx = 0$
5.2 Si f es integrable en $[a,b]$, $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$
6. INTEGRAL DE UNA CONSTANTE
$\int_a^b c\,dx = c(b-a)$.
7. TEOREMA DE SIMETRIA
7.1. Si f es una función par, entonces $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$
7.2. Si f es una función impar, entonces $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$</td>
<td></td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2">ELEMENTOS MATEMÁTICOS</th><th colspan="3">SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN</th></tr>
<tr><th>GRÁFICO</th><th>ALGEBRAICO</th><th>ANALÍTICO</th></tr>
<tr>
<td>TEOREMAS FUNDAMENTALES Y DEL VALOR MEDIO (TFV)</td>
<td>

1. EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO (TFC)
Relaciona el Cálculo Integral con el Cálculo Diferencial.



2. EL TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA INTEGRALES (TVM)
El área bajo una curva es mayor que el área de un rectángulo inscrito y menor que la de uno circunscrito. Este teorema afirma que existe ***entre*** el inscrito y el circunscrito, un rectángulo cuya área es la misma que la de la región.



</td>
<td>

1. PRIMERA PARTE: REGLA DE BARROW
Si f es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y F es cualquier función primitiva de f, o sea, que verifique que $F'(x)=f(x)$ en $[a,b]$, entonces $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$.

2. TEOREMA DEL VALOR MEDIO
Si f es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$, existe un número c en $[a,b]$ tal que $\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a)$.

3. VALOR MEDIO DE UNA FUNCIÓN
Si f es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$, el valor medio de f en $[a,b]$ es $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

</td>
<td>

1. SEGUNDA PARTE:

Sea $f(t)$ continua en el intervalo $[a,b]$, y sea G la función definida por la ecuación integral $G(x)=\int_a^x f(t)dt$ para $a\le x\le b$. Entonces G es una primitiva de f en $[a,b]$, **es** decir, $G'(x)=f(x)$.

</td>
</tr>
</table>

Tabla 3.1. Elementos matemáticos Integral Definida

B. Las relaciones lógicas

Los tipos de relaciones lógicas establecidas entre los elementos matemáticos pueden ser:

- **Conjunción lógica** $(A \wedge B)$
- **Condicional** $(A \rightarrow B)$
- **Contraria de la condicional** $(\neg A \rightarrow \neg B)$

Conjunción lógica $(A \wedge B)$

Un estudiante establece **conjunción lógica** cuando relaciona dos o más elementos para hacer inferencias, por ejemplo, al hacer uso de varios elementos matemáticos, por ejemplo:

A) El área como aproximación, mediante la partición del intervalo en subintervalos, la construcción de rectángulos inferiores y superiores cada vez más pequeños, y el cálculo de las respectivas sumas inferiores y superiores:

$$\underline{S_n} = \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right)\frac{b-a}{n}\ , \quad \overline{S_n} = \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^{**}\right)\frac{b-a}{n}\ ,$$

y el elemento matemático

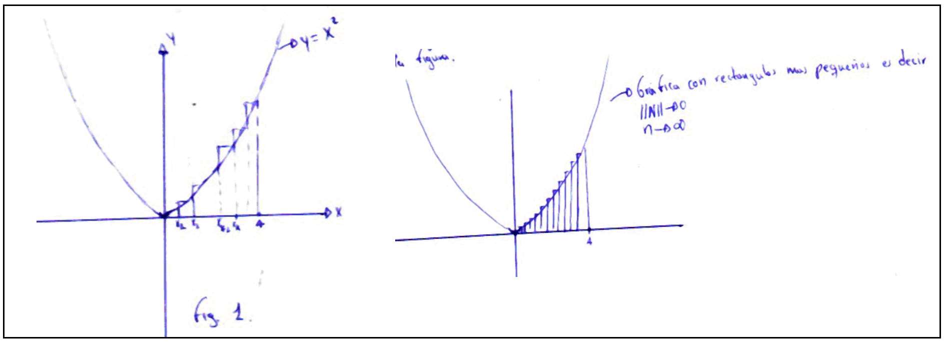
B) El área como límite de una suma, cuando determina los límites de las sumas inferiores y superiores:

$$\underline{S} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right)\frac{b-a}{n}, \qquad \overline{S} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^{**}\right)\frac{b-a}{n}$$

Al considerar conjuntamente esta información (**A y B**), a través de la "**y lógica**", el estudiante puede infiere que cuando calcula el límite, obtiene lo que se denomina la Integral Definida. Así, por ejemplo, una manifestación de este hecho la encontramos en el uso que hace un alumno de los elementos matemáticos **ACA, ALS y LID** en los sistemas **G**, **A** y **AN** en la tarea 3:

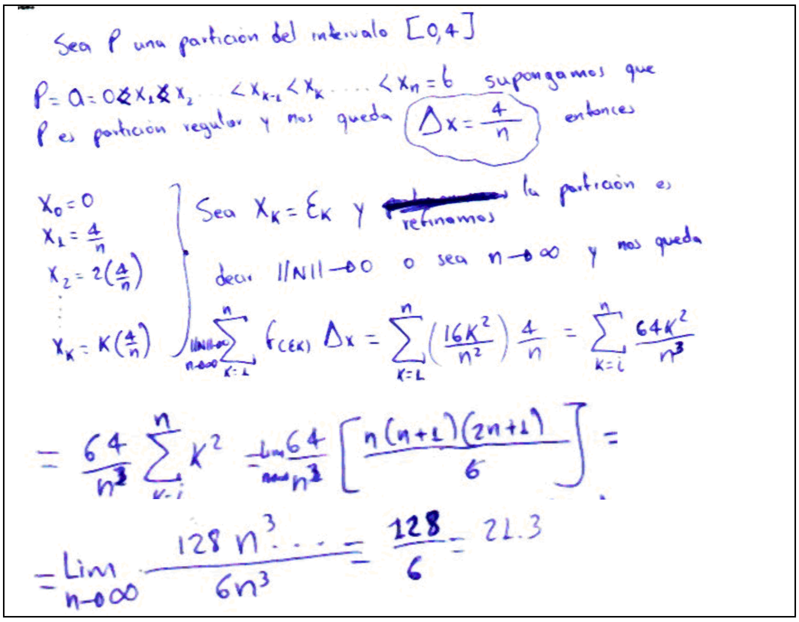
Sea **R,** la región entre la gráfica de la función $f(x) = x^2$ y el eje x, en el intervalo $[0, 4]$ -Utiliza particiones para aproximar el valor del área de la región **R.** -Justifica la respuesta.

Esto es lo que hace cuando responde la tarea:



A11, representación G de la tarea 3 del cuestionario

En la representación gráfica se pone de manifiesto que establece una **conjunción lógica** entre los elementos matemáticos **ACA** y **ALS** porque utiliza particiones, traza rectángulos circunscritos al área y afirma que cuando los rectángulos se hacen cada vez más pequeños, entonces la norma de la partición tiende a cero, entonces el número de particiones n, tiende a infinito.



Sea P una partición del intervalo $[0,4]$

$P = a = 0 < x_1 < x_2 \ldots < x_{k-1} < x_k \ldots < x_n = 6$ supongamos que

P es partición regular y nos queda $\Delta x = \frac{4}{n}$ entonces

$x_0 = 0$

$x_1 = \frac{4}{n}$

$x_2 = 2\left(\frac{4}{n}\right)$

$\vdots$

$x_k = k\left(\frac{4}{n}\right)$

Sea $x_k = \varepsilon_k$ y ~~[illegible]~~ refinamos la partición es decir $||N|| \to 0$ o sea $n \to \infty$ y nos queda

$$\lim_{\substack{||N|| \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{k=1}^{n} f(\varepsilon_k)\,\Delta x = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{16k^2}{n^2}\right)\frac{4}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{64k^2}{n^3}$$

$$= \frac{64}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \lim \frac{64}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{128\,n^3 \ldots}{6n^3} = \frac{128}{6} = 21.3$$

A11, resolución A y AN de la tarea 3 del cuestionario

En esta parte establece una relación entre la representación **G** y los sistemas de representación **A** y **AN** de los elementos matemáticos **ACA** y **ALS,** porque a partir de las graficas anteriores, utiliza el esquema general de aproximación del área, calcula las sumas de Riemann y luego les aplica el límite para dar el valor del área.

En el protocolo esto es lo que dice para justificar la respuesta:

> *I: ¿Sabría comentarme cómo ha resuelto la tarea?*
> *A11: Me piden que utilice particiones, entiendo por partición como coger un intervalo y dividirlo en un conjunto de $n-1$ puntos, donde esos puntos van a ser mayores que el extremo izquierdo, pero menores que el extremo derecho del intervalo, entonces lo que hice fue suponer que los puntos van a ser x_1 , x_2 y que todos estos valores eran mayores que "a" , que era en este caso cero, que era el extremo izquierdo del intervalo y que todos esos puntos eran menores que "b", eso es lo que entendía como particionar, por comodidad tuve en cuenta que iba a particionar esto con una cosa que se llama la partición regular, que es que la longitud de cada intervalo sea la misma.*
> **(A11C3).**

En este caso está mencionando el elemento matemático el **ACA**, porque hace partición, concretamente regulares. Y afirma:

> *A11: La suma de Riemann, se define o entiendo que es particionar y sumar las áreas que se me forman en unos rectangulitos al tomar todas esas áreas, eso es lo que llamo una suma de Riemann y el límite es cuando hago que esa longitud de cada intervalo sea cada vez más pequeña y tienda a cero, es lo que llamamos integral definida, eso fue lo que hice.*
> *I: ¿Qué ocurre con los intervalos (x_{i-1}, x_i), a medida que n crece?*
> *A11: Ella (n), se va haciendo más pequeña.*
> **(A11C3).**

A partir del esquema general de aproximación el alumno utiliza **ACA** y aplica **ALS** para luego establecer conexión con el elemento matemático la **LID**.

Condicional $(A \to B)$

Este tipo de relación se presenta cuando los estudiantes relacionan elementos matemáticos a través de algunas propiedades de la integral, utilizándolas en la resolución de las tareas, por ejemplo, cuando los estudiantes calculan el área de la región comprendida entre la gráfica de una función y el eje de abscisas mediante el cálculo de una integral teniendo en cuenta si la función es positiva, negativa o si cambia de signo. Consideran las implicaciones entre las propiedades de la Integral Definida de funciones positivas y negativas, y son capaces de decidir en la resolución de la tarea:

- *Si* $f(x) > 0$ *es integrable en el intervalo* $[a,b]$*, entonces* $\int_a^b f(x)dx > 0$ *, y el área de la región coincide con el recinto limitado por la gráfica de* $f(x)$ *y el eje* x*, en el intervalo* $[a,b]$.

- *Si* $f(x) < 0$ *es integrable en el intervalo* $[a,b]$*, entonces* $\int_a^b f(x)dx < 0$ *y el área es:* $A = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$

- *Si* $f(x)$ *es integrable y cambia de signo en el intervalo* $[a,b]$*, entonces la integral nos da la suma algebraica de las áreas que están por encima y por debajo del eje* x*, cada una con su signo, y el área se obtiene cambiando de signo (multiplicando por menos uno) a esta última que es negativa o mediante la suma de los* ***valores absolutos*** *de las integrales extendidas a los intervalos en los que conserva el signo.*

Así, se están utilizando las condicionales lógicas:

- Si $f(x) > 0 \; en \, [a,b], entonces \int_a^b f(x)\, dx > 0$

- Si $f(x) < 0 \; en \, [a,b], entonces \int_a^b f(x)\, dx < 0$

- Si $f(x)$ es integrable y cambia de signo en $[a,b], entonces \int_a^b f(x)$ es igual a la suma algebraica de las áreas.

La contraria de la condicional $(\neg A \rightarrow \neg B)$

Esta relación se establece cuando el alumno manifiesta que: **"Si** f **no es continua, entonces no puede aplicar la regla de Barrow"**.

C. Sistemas de representación.

Por sistemas de representación, entendemos, en el ámbito de las matemáticas, notaciones gráficas, algebraicas y analíticas, o bien manifestaciones verbales, por medio de las cuales se expresan los conceptos y procedimientos en esta disciplina, así como sus características y propiedades más relevantes. Estas representaciones se agrupan en diferentes registros de representación que los estudiantes utilizan para lograr la comprensión/construcción del concepto de Integral Definida.

3.5. Descomposición genética de la integral definida.

La descomposición genética del concepto de la Integral Definida, se hizo en primer lugar, a partir de la búsqueda de la cuestión en Tesis Doctorales y en artículos de investigación que tienen que ver con el marco teórico de nuestra investigación y en segundo lugar desde los elementos matemáticos que configuran el concepto de Integral Definida obtenidos del análisis de los libros de texto. Se considera al igual que el grupo RUMEC (DeVries, 2001), que la descomposición genética "es el primer paso del análisis teórico de un concepto matemático en término de las construcciones mentales que un aprendiz puede hacer en orden de desarrollar la comprensión del concepto".

A. Conocimientos Previos

1. El conjunto de los números reales.
   a. Desigualdades, intervalos y conjuntos ordenados.
   b. El número real como objeto matemático.

2. Concepto de función y sistemas de representación.
   a. Concepto de función y clases de funciones.

b. Representación gráfica de funciones.

c. Continuidad y discontinuidad de una función.

3. El concepto de límite como objeto matemático.

4. El concepto de derivada como objeto matemático.

5. Medida del área de una figura plana.

a. Error asociado a una medida.

b. Fórmulas de áreas de regiones planas.

6. La suma de una sucesión.

a. Suma de n términos de una sucesión.

b. Límite de la suma de n términos de una sucesión.

B. El área como aproximación

1. Dada una función $f(x)$ continua y positiva definida en intervalo $[a, b]$**,** la a**cción** de calcular una aproximación **por defecto** del área de la región plana determinada por la función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$.

a. Dividir el intervalo $[a, b]$ en subintervalos.

b. Calcular el **valor mínimo** $f(x_i^*)$ que toma la función en cada subintervalo.

c. Formar rectángulos de base cada subintervalo y de altura el valor mínimo calculado en **1b**.

d. Calcular el área de cada uno de los rectángulos obtenidos.

e. Sumar las áreas calculadas en **1d** y definir el número obtenido como aproximación del área por defecto.

2. Dada una función $f(x)$ continua y positiva definida en el intervalo $[a, b]$**, la acción** de calcular una aproximación **por exceso** del área de la región plana determinada por la función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$.

a. Dividir el intervalo $[a, b]$ en subintervalos.

b. Calcular el **valor máximo** $f(x_i^{**})$ que toma la función en cada subintervalo.

c. Formar rectángulos de base cada subintervalo y de altura el valor máximo calculado en **2b**.

d. Calcular el área de cada uno de los rectángulos obtenidos.

e. Sumar las áreas calculadas en **2d** y definir el número obtenido como aproximación del área por exceso.

3. Interiorización de las acciones anteriores en procesos.

a. Repetir la acción del punto **B1** dividiendo cada subintervalo a la mitad y calcular el área de la región así obtenida.

b. Repetir la acción del punto B2 dividiendo cada subintervalo a la mitad y calcular el área de la región así obtenida.

c. Utilizar los resultados obtenidos en los puntos 3a y 3b del proceso, compararlos y buscar una aproximación mejor del área de la figura.

4. Encapsular el proceso desarrollado en el punto **3a** en el **objeto suma inferior** $\underline{S}_n = \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right) \frac{b-a}{n}$ **.**

5. Encapsular el proceso desarrollado en el punto **3b** en el **objeto suma superior** $\overline{S_n} = \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^{**}\right) \frac{b-a}{n}$

C. El área como límite de una suma

6. Desencapsular los objetos **4 y 5,** y **coordinar** con el proceso **3c** en el proceso del límite de las sumas inferior y superior.

$$\underline{S} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right) \frac{b-a}{n}, \quad \overline{S} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^{**}\right) \frac{b-a}{n}$$

D. La Integral Definida

7. Comprobar que los límites obtenidos en el proceso **6** son iguales, encapsular el proceso en el objeto Integral Definida de la función f en $[a, b]$ **, como** $\int_a^b f(x)\,dx$**.**

8. Desencapsulación del objeto **7** en el proceso de cálculo de la Integral

Definida de una función f en intervalos cerrados con un extremo en a y otro extremo variable.

9. Encapsulación del proceso **8** en el objeto función integral $F(x)=\int_a^x f(x)dx$.

E. El Teorema Fundamental

10. Acción de calcular una función primitiva.

a. Cálculo de la derivada de la función $F(x)$.

b. Comprobación de que la derivada de $F(x)$ es $f(x)$.

c. Definición de $F(x)$ como función primitiva.

d. Expresar la función primitiva como $F(x)+C$.

11. Interiorización de la acción **10** en el proceso de cálculo de una función primitiva.

12. Coordinación del proceso **11** con,

a. El proceso de evaluar una función primitiva en los extremos del intervalo.

b. Calcular la diferencia entre esos valores.

c. Comprobación de que la cantidad así obtenida es igual a $\int_a^b f(x)\,dx$.

F. Generalización del concepto de Integral Definida para funciones no estrictamente positivas y continuas.

13. Aplicar el proceso **11** para el cálculo de Integrales Definidas de funciones positivas continuas.

14. Aplicar el proceso **11** para funciones no estrictamente positivas y continuas dividiendo el intervalo de definición en subintervalos según el signo de la función.

15. Aplicar el proceso **11** para el cálculo de Integrales Definidas de funciones positivas discontinuas.

16. Aplicar el proceso **11** para funciones discontinuas no estrictamente positivas dividiendo el intervalo de definición en subintervalos según el signo de la función.

3.6. Diseño, aplicación y análisis del precuestionario.

En este apartado describimos en primer lugar las características de los participantes en el precuestionario, después presentamos cómo se identificaron y seleccionaron los contenidos del precuestionario, y concluimos el apartado con la aplicación, y la posterior modificación del precuestionario a partir del informe de los expertos y de las respuestas de los estudiantes a las distintas tareas del precuestionario.

3.6.1. Sujetos.

Contestaron el precuestionario 11 estudiantes (4 mujeres y 7 hombres), con un rango de edad entre 18 - 28 años, de tercer año (sexto semestre curricular) de la Licenciatura de Matemáticas de la Universidad del Quindío, Armenia – Colombia, en el mes de noviembre de 2007. Todos los estudiantes habían cursado, en el momento de la realización de la prueba, la asignatura de Cálculo II, en la que los estudiantes ya habían recibido una instrucción previa sobre el concepto de Integral Definida, en la clase habitual con el profesor de la asignatura que es diferente del investigador.

3.6.2 Identificación de los contenidos del precuestionario.

Para identificar los contenidos matemáticos que debían formar parte del precuestionario, en primer lugar, se seleccionaron y analizaron 10 libros de texto, 5 de Bachillerato y 5 de universidad, debido a la importancia que se da a los libros de texto como recurso didáctico en la enseñanza (Cobo y Batanero, 2004). En este diseño se dio especial importancia a los desarrollos curriculares que sobre la Integral Definida hacían las 10 editoriales. Los libros de texto analizados corresponden en su gran mayoría a editoriales de difusión internacional y que son la fuente principal de consulta de los estudiantes a quienes se les aplicó el precuestionario.

Una reseña de este análisis ha sido presentada en el capítulo I. Del análisis realizado de los libros obtuvimos los elementos matemáticos que constituyen el concepto de Integral

Definida presentados en el apartado 3.4, y cuya comprensión del concepto por parte de los alumnos participantes es el objeto de esta Investigación, y que se concretan en:

- El área como aproximación **ACA.**
- El área como límite de una suma **ALS**.
- La Integral Definida **LID**.
- Las propiedades de la Integral Definida **PID**.
- Los teoremas fundamentales y del valor medio **TFV**.

En segundo lugar, una vez seleccionados los elementos matemáticos que constituyen el concepto de la Integral Definida, y de analizar la forma como se presenta el concepto en los libros de texto observados, procedimos a realizar la descomposición genética del concepto, lo que nos permitió determinar el tipo de tareas que debería contener el precuestionario.

3.6.3. Elaboración del precuestionario.

Para la elaboración del precuestionario se tuvieron en cuenta los elementos matemáticos, relaciones lógicas y sistemas de representación del concepto de Integral Definida, y la descomposición genética del concepto de Integral Definida, presentados en los apartados 3.4 y 3.5 respectivamente y, a partir de ellos, se seleccionaron una colección de problemas tomando como referentes (a) el desarrollo curricular identificado en los libros de texto, (b) las actividades planteadas en los mismos (c) los problemas descritos en artículos de revistas de investigación (Orton, 1983; Mundy, 1984; Czarnocha et al., 2000; Czarnocha et al., 2001 y Rasslan y Tall, 2002) y (d) los problemas con algunas modificaciones, que han sido utilizados en Tesis Doctorales sobre la Integral Definida (Turégano, 1994; Calvo, 2001; Depool, 2004 y González-Martín, 2006).

Los problemas seleccionados se clasificaron en función de los cinco elementos matemáticos anteriormente mencionados: El área como aproximación, el área como límite de una suma; la Integral Definida, las propiedades de la Integral Definida y los teoremas fundamentales y del valor medio. Asimismo el diseño del precuestionario se hizo atendiendo a:

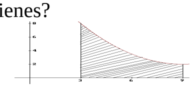
- los objetivos de la investigación,

- y el número máximo de cuestiones que debía contener para que pudieran ser contestados en el transcurso de una clase universitaria habitual.

El formato de presentación del precuestionario constaba de 8 folios, en el primer folio se pedía el nombre del estudiante, la edad y la fecha de realización del precuestionario, y en cada uno de los siguientes folios aparecía una pregunta con el espacio necesario para responderla y justificarla.

Para elaborar las tareas del precuestionario se hizo un banco de preguntas atendiendo a la descomposición genética del concepto en estudio y a los elementos matemáticos, luego seleccionamos aquellas que fueran más representativas del concepto para poder analizar las relaciones lógicas que los estudiantes establecen entre los elementos matemáticos dados en distintos sistemas de representación: gráfico, algebraico y analítico.

La tabla siguiente describe las características de cada una de las tareas del precuestionario atendiendo a los objetivos, enunciado de la tarea, ítems, descriptores, procedencia y variables **(Anexo 1)**. En el ámbito de esta investigación los descriptores los vamos a entender como las palabras claves que definen o caracterizan las particularidades de cada una de las tareas presentadas al estudiante, y las variables como un conjunto de aspectos asociados a cada tarea que puede utilizar el estudiante en las distintas tareas para resolverlos y que se refiere a los diferentes elementos matemáticos así como a las formas de representación gráfica, algebraica y analítica que configuran el concepto de Integral Definida.

OBJETIVOS	TAREAS	ITEMS	DESCRIPTORES	PROCEDENCIA	VARIABLES
Diagnosticar si los estudiantes logran aproximar el área de una región bajo una curva, y cómo lo hacen a pesar de no tener una expresión algebraica que acompañe la gráfica de la función. Comprobar si son capaces de proponer cotas más aproximadas.	**1**. El área de la región rayada es mayor que **12** y menor que **48**. **1a** ¿Por qué? **1b** ¿Puedes dar valores más ajustados? **1c** ¿Cuáles? **1d** ¿Cómo los obtienes? 	**1** **1a** **1b** **1c** **1d**	**1.1** Existe una gráfica asociada a unos valores en el plano cartesiano. **1.2** No aparece una expresión algebraica asociada a la gráfica. **1.3** Carece de la palabra Integral. **1.4** No se puede plantear una Integral Definida. **1.5** Los valores del área son aproximados y se pide ajustarlos más.	Tarea que proviene de modificar un ejercicio del trabajo de Depool (2004).	Aproximación del área. Representación gráfica. Función positiva y continua en $[3, 9]$.
Comprobar los procedimientos utilizados por los estudiantes en el cálculo de áreas y si saben justificar cada uno de los pasos al hallar el valor numérico del área de una región bajo la curva.	**2.** Sea R, la región encerrada por la gráfica de la función $y = f(x) = 4x$ y el eje x, en el intervalo $[-2, 2]$. **2a** Dibuja la gráfica. **2b**. Calcula gráficamente el área de la región R. **2c**. Calcula la $\int_{-2}^{2} 4x\,dx$. **2d**. ¿Son iguales los dos resultados anteriores? ¿Por qué? justifica cada paso.	**2** **2a** **2b** **2c** **2d**	**2.1** Aparece la representación algebraica de la función. **2.2** Existe un intervalo. **2.3** No se tiene una gráfica asociada a la expresión algebraica. **2.4** La función es continua, creciente y acotada. **2.5** El cálculo del área requiere de conceptos básicos. **2.6** Se pide comparar y justificar los procedimientos.	Tarea extraída de modificar un ejercicio del libro de texto de Cálculo de una variable, volumen 1. Gerald L. Bradley, Kart J. Smith. Editorial Prentice Hall. Madrid (2000).	Área bajo gráficas. Representación algebraica. Función positiva y contínua en $[-2, 2]$.
Analizar la forma y el método que los estudiantes utilizan en la resolución de ejercicios sobre el cálculo de áreas.	**3.** Sea R la región entre la gráfica de $f(x) = x^2$ y el Intervalo $[0, 4]$. -Utiliza un procedimiento de aproximación para calcular el área. - Justifica tu respuesta.	**3**	**3.1** Existe una expresión algebraica**.** **3.2** Se da un intervalo. **3.3** Se pide calcular el área. **3.4** No aparece la palabra integral. **3.5** El estudiante debe justificar el procedimiento utilizado. 3.6 No se tiene la gráfica asociada a la expresión	Tarea que proviene de modificar un ejercicio del libro de texto de Cálculo Diferencial e Integral de Edwars y Penney. Cuarta Edición. Editorial Prentice Hall. México 1997.	Concepto de área como una aproximación. Representación algebraica de la función. Función positiva y continua en $[0, 4]$.
Analizar si los estudiantes hacen transferencia de los conocimientos adquiridos y si aplican algunas propiedades de la Integral Definida.	**4.** Calcula el área limitada por la función $f(x) = \int_0^2 \lvert 2x - 1 \rvert\,dx$ con el eje **OX**. - Justifica tu respuesta.	**4**	**4.1** El registro algebraico presenta información implícita. **4.2** Se menciona la palabra área. **4.3** Se da una expresión algebraica. **4.4** Existe una función para integrar. **4.5** El cálculo es sencillo e involucra el área de dos triángulos rectángulos y de conceptos previos.	Ejercicio que proviene de uno similar del libro de texto de Cálculo I, 7ª Edición. Larson, R.; Hostetler, R. P.; Edwars, B. H. Editorial Pirámide. Madrid. 2002.	Propiedad de la unión de intervalos. Teorema fundamental del cálculo. Función no derivable. Representación algebraica.

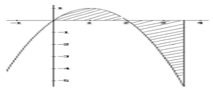
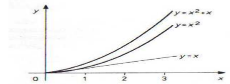
Comprobar si el estudiante comprende cómo calcular el área por medio de la Integral Definida, de regiones que se encuentran por debajo del eje OX y así mismo cómo establece las relaciones con regiones que están por encima del eje OX.	**5.** Dada la siguiente gráfica, calcula el área de la región rayada. - Explica el procedimiento utilizado en el cálculo del área. - Justifica cada paso. 	**5**	**5.1** Se pide calcular el área de la región sombreada. **5.2** Aparece especificada la región positiva y la región negativa. **5.3** No aparece la palabra integral. **5.4** No se da un intervalo de integración, aun que se identifica en la gráfica. **5.5** No existe una expresión algebraica asociada a la función cuadrática. **5.6** La función que se indica es continua. **5.7** No se pide aproximar.	Tarea que proviene de modificar un ejercicio del trabajo de Depool (2004).	Área de regiones positivas y negativas. La Integral Definida como área de una región. Función continua en $[0, 3.5]$.
Determinar qué tipo de argumentos en cuanto a las formas de representación (gráfico, algebraico, numérico) que utilizan los estudiantes para justificar la propiedad aditiva de la Integral Definida.	**6.** Explique, en términos del diagrama o de otra forma, por qué $\int_0^a (x^2+x)dx = \int_0^a x^2dx + \int_0^a xdx$ 	**6**	**6.1** Se pide justificar la propiedad aditiva de la Integral. **6.2** No se menciona la palabra integral, ni área. **6.3** Hay expresiones algebraicas y gráficas relacionadas: una recta y dos curvas. **6.4** No se pide aproximar. **6.5** No existe una región subrayada. **6.6** Las funciones son continuas.	Tarea que proviene de modificar un ejercicio de A. Orton (1983) y Depool (2004).	Propiedad aditiva de la Integral Definida. Representación gráfica y algebraica.
Analizar el nivel de la relación entre la definición del concepto y la imagen del concepto de Integral Definida.	**7. ¿**Cuál es el significado matemático de la Integral Definida de una función $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$?.	**7**	**7.1** Se da una pregunta abierta. **7.2** Aparece una función genérica. **7.3** Se da un intervalo genérico. **7.4** Se pide el concepto de Integral Definida. **7.5** No se da representación gráfica.	Situación que proviene de una de las tareas de Czarnocha., Dubinsky, et al.,(2000); Depool (2004); y del estudio de los libros de texto.	Definición del concepto de Integral Definida.
Analizar la relación que establecen los estudiantes entre la imagen del concepto y la definición del concepto de la Integral Definida.	**8**. En los apartados **8a**, **8b** y **8c**, que aparecen a continuación, decide si la afirmación es verdadera o falsa. En caso de ser falsa, explica por qué o muestra un contraejemplo. **8a** Si $F'(x) = G'(x)$ en el intervalo $[a, b]$, entonces $F(b)-F(a)=G(b)-G(a)$. **8b** Si f es continua en $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$. **8c** $\int_{-1}^{1} x^{-2}\,dx \left[-x^{-1}\right]_{-1}^{1} = (-1)-1=-2$	**8** **8a** **8b** **8c**	**8.1** Se dan tres proposiciones para clasificarlas como verdaderas o falsas. **8.2** Aparece una representación algebraica en cada una de ellas. **8.3** Se pide justificar en caso de ser falsa la proposición. **8.4** Se puede justificar la respuesta por medio de un contraejemplo (en algunos casos). **8.5** Existe una discontinuidad y la función que aparece integrada es no acotada.	Ejercicio que proviene de modificar uno similar del libro de texto de Cálculo I, 7ª Edición. Larson, R.; Hostetler, R. P.; Edwars, B. H. Editorial Pirámide. Madrid. 2002.	Relación entre la función primitiva y el Teorema Fundamental del Cálculo. Teorema: Continuidad implica integrabilidad Continuidad y discontinuidad de funciones.

Tabla 3.2. Precuestionario: objetivos, tareas, ítems, descriptores, procedencia y variables.

3.6.4. Validación del precuestionario por expertos.

Una vez elaborado el precuestionario, éste fue enviado a expertos en el área de Didáctica del Análisis Matemático de algunas universidades españolas con el propósito de que hicieran las valoraciones pertinentes. La solicitud de validación del precuestionario fue enviada acompañada de las tareas del precuestionario, además de la tabla 3.1 anterior y diferentes cuestiones relativas al procedimiento utilizado en el diseño del precuestionario: contexto de la investigación, formulación del problema, objetivos, hipótesis y el diseño metodológico de la investigación.

El informe global emitido por los expertos lo comentaremos a continuación organizado en dos apartados uno relativo a la estructura del precuestionario y otro de aspectos puntuales sobre cada tarea del precuestionario.

A. Sobre la estructura del precuestionario.

Con el propósito de mejorar el instrumento definitivo, los expertos hicieron algunas recomendaciones generales en cuanto a la estructura del cuestionario que ponemos de manifiesto a continuación:

1. La estructura es buena y aunque los descriptores son explícitos pueden ser redundantes porque describen lo mismo que hay en la tarea.
2. El número de ítems es pequeño y se sugiere aumentarlo para luego refinarlo.
3. Los objetivos son claros y las preguntas pertinentes.
4. Algunas tareas podrían presentar bajo grado de dificultad, lo que impediría averiguar el nivel en el que se encuentra el estudiante según la teoría APOE.
5. Aunque se desconoce las competencias de los estudiantes objeto de la investigación, se podría hacer un análisis de conglomerados, porque el grado de dificultad de las tareas es dispar.
6. En cuanto a la formulación del problema hay inquietud si existe alguna instrucción previa en la investigación y en caso de haberla ¿cuál es?
7. Hay una sugerencia de formular el problema en función del nivel de desarrollo de la Integral Definida y su relación con el área.

8. Existe una recomendación de concretar más qué es lo que se quiere indagar en el precuestionario, por ejemplo, qué argumentos utilizan los estudiantes cuando se les pide calcular el área de una región donde desconocen la expresión algebraica de la función, o si son capaces de hacer aproximaciones a partir de los conocimientos previos.

B. Sobre cada una de las tareas del precuestionario.

En cuanto a las tareas, los expertos hacen algunas recomendaciones relacionadas con la forma de la pregunta, las cuales describimos a continuación:

1. **Tarea 1:** Aunque hay un acuerdo que la tarea es correcta, sugieren que puede no ser discriminatoria, porque no distingue a los que saben aproximar áreas de los que no lo saben hacer.

2. **Tarea 2:** Afirman que la tarea puede ser fácil para estudiantes de tercer año de Licenciatura de Matemáticas aunque el objetivo es correcto, por lo que el grado de dificultad podría impedir profundizar en el objetivo, además que se debería cambiar la expresión "área bajo la curva" por "determinada por la recta y el eje OX".

3. **Tarea 3:** Aunque hay un acuerdo de que la tarea es correcta, se sugiere que sea más explícita, por ejemplo pidiéndole a los estudiantes que utilicen particiones.

4. **Tarea 4:** Hay diferentes opiniones al respecto por ejemplo que es correcta, que en los objetivos no se recoge el problema asociado a valor absoluto y que el problema fundamental está en los conocimientos previos que tienen los estudiantes de la función y sugieren modificar la escritura de la función.

5. **Tarea 5:** Aunque hay un acuerdo de que la tarea es correcta, sugieren escribir la expresión algebraica que representa la gráfica de la función.

6. **Tarea 6:** Afirman que la tarea se ajusta a estudiantes de tercer año de Licenciatura de Matemáticas y sugieren justificar otras propiedades de la Integral Definida y que no hablemos de la unión de intervalos, sino de la propiedad de la linealidad.

7. **Tarea 7:** Un experto sugiere que para mejorar la pregunta sería recomendable preguntar como aparece en los descriptores por "el concepto de Integral Definida" que sería algo más específico para los estudiantes.

8. **Tarea 8:** La consideran adecuada y uno señala que la razón es que no es integrable en cualquier intervalo que contenga a cero, pero no por la discontinuidad, por ejemplo la función f(x)=-1 si x<0 y f(x)=1 sí x>0 es integrable en $[-1, 1]$ aunque es discontinua en dicho intervalo.

3.6.5. Aplicación del precuestionario.

Contestaron el precuestionario 11 estudiantes durante un promedio de 3 horas y fue aplicada el 26 de noviembre de 2007 en el horario habitual de la clase de Cálculo Integral, en la cual ya habían recibido una instrucción previa sobre el concepto de Integral Definida a lo largo de 16 horas de clase. En la aplicación del precuestionario participaron todos los alumnos del curso. La profesora del grupo participante y los alumnos sabían de antemano la hora y el proceso de realización de la prueba. Igualmente días previos a la aplicación del precuestionario el investigador fue al salón de clase para animar a los estudiantes a que participaran en la investigación. Los estudiantes fueron informados, verbalmente y por escrito, sobre el propósito de la investigación, el tema, la forma de responder, la confidencialidad de las respuestas, según el Código Ético de la *American Psychological Asociación* (APA) (Bisquerra y Sabariego, 2009, p. 83 – 87).

3.6.6 Modificación del precuestionario.

Este apartado tiene que ver con la modificación que realizamos al precuestionario a partir del informe emitido por los expertos sobre la valoración de cada una de las tareas, y de la confrontación con los resultados detectados en los estudiantes al responder a cada tarea.

A. Sobre la estructura del precuestionario.

En relación con la estructura y organización definitiva del cuestionario a partir del informe emitido por los expertos y las respuestas dadas por los estudiantes nos llevó hacer siguientes consideraciones:

1. Eliminamos la columna de los descriptores por recomendación de uno de los expertos.
2. El número de ítems no se modificó, porque consideramos que era suficiente para una clase habitual y realmente el tiempo que tardaron los estudiantes en resolver las tareas así lo demostró.
3. En cuanto a la disparidad en el grado de dificultad de las tareas comprobamos que aquellas tareas que fueron valoradas como fáciles de resolver los estudiantes tuvieron algunas dificultades como es el caso de la tarea 2, donde los estudiantes no lograron diferenciar entre la Integral como área de una región de la Integral como cálculo algebraico. Asimismo, aquellas tareas consideradas adecuadas para el tipo de estudiantes objeto de la investigación fueron las que causaron mayor dificultad, como el caso de la tarea **6**, para la que sólo uno de los once alumnos intentó dar una justificación de la propiedad de linealidad y lo mismo sucedió con la tarea **8c** del precuestionario donde todos los estudiantes la respondieron incorrectamente.
4. En cuanto a la relación de la integral con el área sí que la hemos tenido en cuenta en los elementos matemáticos que han sido utilizados para el diseño del cuestionario y el análisis de los instrumentos.
5. Encontramos que muchos de los estudiantes hacen algunas aproximaciones utilizando los conocimientos previos, lo que nos permitió comprobar una de las inquietudes de los expertos.
6. Las recomendaciones dadas por algunos expertos y las respuestas dadas por los estudiantes nos llevaron a modificar algunas preguntas como se indican en el

siguiente apartado.

B. Sobre cada una de las tareas del precuestionario.

El resultado de validación del precuestionario nos permitió hacer modificación de algunas tareas para hacerlas más precisas y alcanzar así al objetivo de la investigación, veámoslo a continuación:

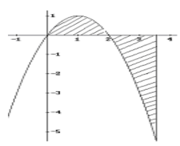
1. **Tarea 1:** No se modificó, porque las respuestas de los estudiantes nos mostraron riqueza en los elementos matemáticos generalmente gráficos y algebraicos que utilizan.

2. **Tarea 2:** Se modificó el enunciado de la pregunta. Se cambió "Sea la función $f(x) = 4x$ y el intervalo $[-2, 2]$**,** por "Sea R, la región encerrada por la gráfica de la función $f(x) = 4x$ y el eje x, en el intervalo $[-2, 2]$**"** y se modificó en la misma tarea la pregunta: "¿Por qué? Justifica cada paso", por sólo "Justifica cada paso".

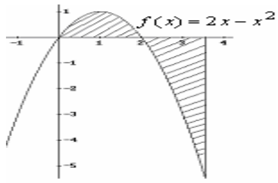
3. **Tarea 3:** Se modificó la forma de la pregunta para hacerla más explícita. Se cambió "Utiliza un procedimiento de aproximación para calcular el área", por "Utiliza particiones para aproximar el valor del área de la región R".

4. **Tarea 4:** Se modificó la pregunta "Calcula el área limitada por la función $f(x) = \int_0^2 |2x-1|\,dx$ con el eje OX"; por "Calcula el área limitada por la gráfica de la función $f(x) = |2x-1|$**,** en el intervalo $[0, 2]$ y el eje x".

5. **Tarea 5:** Se modificó, por la valoración de los expertos y porque 6 estudiantes de los 11 no contestaron la pregunta y 4 lo hicieron incorrectamente. Se cambió "Dada la siguiente gráfica, calcula el área de la región rayada. Explica el procedimiento utilizado en el cálculo del área. Justifica cada paso".



Por "Dada la siguiente gráfica, calcula por aproximación el área de la región rayada. Explica el procedimiento utilizado en el cálculo del área. Justifica cada paso".



6. **Tarea 6:** Se modificó, porque la mayoría de los estudiantes justificaron la propiedad sólo desde el punto de vista algebraico. Se cambió "Explique, en términos del diagrama o de otra forma, porqué $\int_0^a (x^2 + x)dx = \int_0^a x^2 dx + \int_0^a x dx$**?** Por

   "Explique, en términos del gráfico, porqué $\int_0^a (x^2 + x)dx = \int_0^a x^2 dx + \int_0^a x dx$**?**

7. **Tarea 7:** No se cambió, sólo el orden que en el precuestionario figura como la pregunta 7 y pasó a ser la número 8 del cuestionario, porque consideramos que esta pregunta tiene que ver con el concepto imagen que los estudiantes tienen de Integral Definida.

8. **Tarea 8:** No se modificó en su estructura, sólo que en el precuestionario era la pregunta 8 y en el cuestionario pasó a ser la pregunta número 7.

La aplicación del precuestionario nos permitió analizar los aciertos y dificultades detectadas en los estudiantes a la hora de resolver las diferentes tareas, lo que hizo que modificáramos algunas tareas por ejemplo, porque el enunciado era poco preciso o en algunos casos el estudiante necesitaba la expresión algebraica de la gráfica de la función para poder responder la tarea dado que el propósito de la tarea no era encontrar la expresión algebraica de la función, sino las relaciones lógicas y el número de elementos matemáticos que pudiera utilizar en los procedimientos de resolución de las tareas. Una vez recibido el informe de la valoración y recomendaciones hechas por los expertos sobre la validez de cada tarea y de los resultados encontrados en las respuestas de los estudiantes, procedimos a realizar las modificaciones correspondientes a las tareas para diseñar el cuestionario definitivo que será presentado en la siguiente sección.

3.7. Diseño y aplicación del cuestionario definitivo.

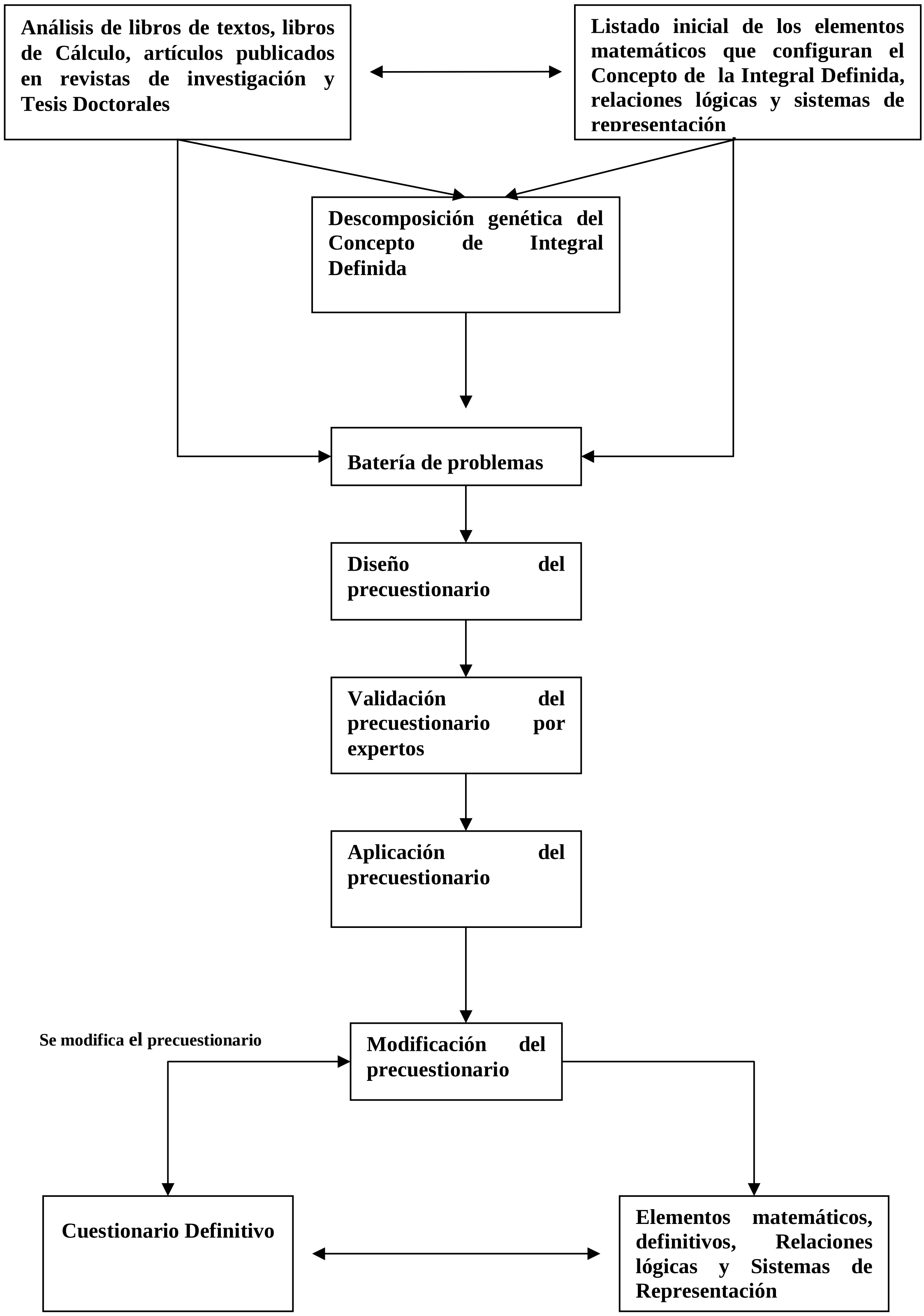
Para seleccionar las cuestiones que debían formar parte del cuestionario definitivo y con el objetivo de que todos los ítems del cuestionario se ajustaran a las características de la investigación tuvimos en cuenta los apartados anteriores. En esta sección vamos a describir, en primer lugar las características de los participantes en la investigación definitiva. En segundo lugar, comentaremos los problemas del cuestionario, la descripción de cada una de las tareas y la aplicación del cuestionario.

3.7.1. Sujetos.

Los participantes fueron 11 estudiantes (2 mujeres y 9 hombres) con un rango de edad entre 20 – 32 años, de tercer año del programa de Licenciatura de Matemáticas de la Universidad del Quindío, Armenia en Colombia. La población elegida para realizar este cuestionario cumple con las mismas condiciones del precuestionario, es decir, es intencional al tratarse de la participación de todos los estudiantes de un grupo ya formado

Los estudiantes en el momento de la aplicación del cuestionario definitivo habían cursado la asignatura de Cálculo II o en su contexto el Cálculo Integral, en el cual ya habían estudiado el concepto de Integral Definida durante las primeras 16 horas de clase del curso, porque este concepto corresponde a la primera unidad didáctica de la asignatura. Por tanto se considera que debería haber una riqueza previa en los elementos matemáticos gráficos, algebraicos y analíticos que utilizan estos estudiantes, y en las relaciones lógicas que establecen entre los elementos matemáticos gráficos, algebraicos y analíticos del concepto objeto de la investigación.

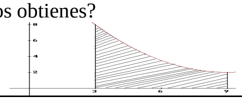
El esquema siguiente muestra el proceso seguido para la elaboración del cuestionario y para determinar los elementos matemáticos, las relaciones lógicas y los sistemas de representación que de manera general ya hemos comentado en el apartado 3.4 de este capítulo.



Esquema 3.2. Proceso de elaboración del cuestionario definitivo

3.7.2. Elaboración del cuestionario.

En cuanto al cuestionario, para su diseño, como ya se ha indicado, tuvimos en cuenta las recomendaciones hechas por los expertos sobre las tareas propuestas en el precuestionario, y las respuestas dadas por los estudiantes en las distintas tareas, lo que nos permitió hacer algunas modificaciones y seleccionar los problemas que debían formar parte del cuestionario definitivo atendiendo, por otro lado, a los elementos matemáticos, a las relaciones lógicas establecidas entre ellos y a los sistemas de representación gráfico, algebraico y analítico todo ello de acuerdo con la descomposición genética inicialmente establecida del concepto de Integral Definida. Se acordó que el cuestionario definitivo estuviese compuesto por ocho problemas de acuerdo con los objetivos de la investigación. A continuación se describen cada una de las tareas según sus objetivos, ítems, procedencia y variables **(Anexo 2)**:

OBJETIVO	TAREAS	ITEM	PROCEDENCIA	VARIABLE
Diagnosticar si los estudiantes logran aproximar el área de una región bajo una curva, y cómo lo hacen a pesar de no tener una expresión algebraica que acompañe la gráfica de la función. Comprobar si son capaces de proponer cotas más aproximadas.	**1**. El área de la región rayada es mayor que **12** y menor que **48**. **1a** ¿Por qué? **1b** ¿Puedes dar valores más ajustados? **1c** ¿Cuáles? **1d** ¿Cómo los obtienes? 	**1** **1a** **1b** **1c** **1d**	Tarea que proviene de modificar un ejercicio del trabajo de Depool (2004).	. Aproximación del área. Representación gráfica. Función positiva y continua en $[3, 9]$.
Comprobar los procedimientos utilizados por los estudiantes en el cálculo de áreas de gráficas y como justifican cada uno de los pasos al hallar el valor numérico del área de una región bajo la gráfica, y mediante la Integral Definida.	**2.** Sea R, la región encerrada por la gráfica de la función $f(x) = 4x$ y el eje x, en el intervalo $[-2, 2]$. **2a** Dibuja la gráfica. **2b**. Calcula gráficamente el área de la región R. **2c**. Calcula la $\int_{-2}^{2} 4x\,dx$. **2d**. ¿Son iguales los dos resultados anteriores? Justifica cada paso.	**2** **2a** **2b** **2c** **2d**	Tarea extraída de modificar un ejercicio del libro de texto de Cálculo de una variable, volumen 1. Gerald L. Bradley, Kart J. Smith. Editorial Prentice Hall. Madrid (2000).	Área bajo gráficas. Representación algebraica. Función positiva y continua en $[-2, 2]$.
Analizar la forma y el método que los estudiantes utilizan en la resolución de ejercicios sobre el cálculo de áreas.	**3.** Sea R la región entre la gráfica de la función $f(x) = x^2$ y el Intervalo $[0, 4]$. -Utiliza particiones para aproximar el valor del área de la región R. -Justifica tu respuesta.	**3**	Tarea que proviene de modificar un ejercicio del libro de texto de Cálculo Diferencial e Integral de Edwars y Penney. Cuarta Edición. Editorial Prentice Hall. México 1997.	Concepto de área como una aproximación. y de área como límite de una suma. Representación algebraica de la función. Función positiva y continua en $[0, 4]$.
Analizar si los estudiantes hacen transferencia de los conocimientos adquiridos a los nuevos y si aplican algunas propiedades de la Integral Definida.	**4.** Calcula el área limitada por la gráfica de la función $f(x)=\|2x-1\|$, en el intervalo $[0, 2]$ y el eje x . -Justifica tu respuesta.	**4**	Ejercicio que proviene de uno similar del libro de texto de Cálculo I, 7ª Edición. Larson, R.; Hostetler, R. P.; Edwars, B. H. Editorial Pirámide. Madrid. 2002.	Propiedad de la unión de intervalos: La Integral Definida de un valor absoluto. Teorema fundamental del cálculo: Regla de Barrow. Representación algebraica. Función no derivable.

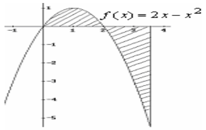
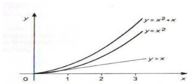
Comprobar si el estudiante comprende cómo calcular el área por medio de la Integral Definida, de regiones que se encuentran por debajo del eje OX y así mismo cómo establece las relaciones con regiones que están por encima del eje OX.	**5.** Dada la siguiente gráfica, calcula por aproximaciones el área de la región rayada. Explica el procedimiento utilizado en el cálculo del área. Justifica cada paso. 	**5**	Tarea que proviene de modificar un ejercicio del trabajo de Depool (2004).	Área de regiones positivas y negativas. La Integral Definida como área de una región. Función continua en $[0, 3.5]$.
Determinar que tipo de argumentos en cuanto a las formas de representación (gráfico, algebraico, numérico) utilizan los estudiantes para justificar la propiedad aditiva de la Integral Definida.	**6.** Explica, en términos del gráfico, porqué $\int_0^a (x^2+x)dx = \int_0^a x^2dx + \int_0^a xdx$ 	**6**	Tarea que proviene de modificar un ejercicio de A. Orton (1983) y Depool (2004).	Propiedad de linealidad de la Integral Definida. Representación gráfica y algebraica.
Analizar la relación que establecen los estudiantes entre la imagen del concepto y la definición del concepto a partir de la condición suficiente que la continuidad implica integrabilidad.	**7**. En los apartados **7a**, **7b** y **7c**, que aparecen a continuación, decide si la afirmación es verdadera o falsa. En caso de ser falsa, explica por qué o muestra un contraejemplo. **7a** Si $F'(x) = G'(x)$ en el intervalo $[a, b]$, entonces $F(b)-F(a)=G(b)-G(a)$. **7b** Si f es continua en $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$. **7c** $\int_{-1}^{1} x^{-2}dx = \left[-x^{-1}\right]_{-1}^{1} = (-1)-1 = -2$	 **7a** **7b** **7c**	Ejercicio que proviene de modificar uno similar del libro de texto de Cálculo I, 7ª Edición. Larson, R.; Hostetler, R. P.; Edwards, B. H. Editorial Pirámide. Madrid. 2002.	Relación entre la función primitiva y el Teorema Fundamental del Cálculo. Función no acotada en el 0
Analizar el nivel de la relación entre la definición del concepto y la imagen del concepto de Integral Definida que tienen los estudiantes universitarios.	**8.** ¿Cuál es el significado matemático de la Integral Definida de una función $y = f(x)$ en un intervalo $[a, b]$?	**8**	Situación que proviene de una de las tareas similares propuestas por Czarnocha; Dubinsky, et al., (2000); Depool (2004); y del estudio de los libros de texto.	Definición del concepto de Integral Definida.

Tabla 3.3. Cuestionario definitivo: objetivos, tareas, ítems, procedencia y variables.

Una vez descritos los problemas del cuestionario pasamos a analizar las relaciones entre los diferentes elementos matemáticos que se espera que el estudiante realice en cada una de ellas:

Tarea 1.

En la resolución de esta tarea no necesariamente el estudiante tiene que hacer uso de las relaciones lógicas, aunque podría mencionar la **Conjunción lógica** $(A \wedge B)$ entre los elementos matemáticos **el área como aproximación, el área como límite de una suma y la Integral Definida** en los sistemas de representación **gráfico, y analítico**, que le permita tomar decisiones de cómo ajustar más las cotas del área bajo la gráfica dada y de calcular el valor exacto del área.

Tarea 2.

En la resolución de la tarea se espera que el estudiante use la relación de la **conjunción lógica** $(A \wedge B)$ entre los elementos matemáticos **El área como aproximación y la Integral Definida** que le permitan hacer inferencias entre el cálculo del área gráficamente y el cálculo algebraico de la Integral Definida**.**
Y la **condicional lógica** $(A \rightarrow B)$ entre los elementos matemáticos: **la Integral Definida**, en los sistemas de representación **gráfico y algebraico**, para relacionar el área y la Integral Definida de funciones que cambian de signo**,** usando para ello el elemento matemático **las propiedades de la integral definida** de funciones positivas y negativas y su relación con el cálculo del área..

Tarea 3.

En esta tarea esperamos que el estudiante establezca la relación de la **Conjunción lógica** $(A \wedge B)$ entre los elementos matemáticos. **El área como aproximación, el área como límite de una suma, la Integral Definida y el teorema fundamental del Cálculo,** estableciendo una síntesis entre los sistemas de representación **gráfico, algebraico y analítico,** para decidir un valor aproximado del área y su valor exacto.

Tarea 4.

El estudiante en la resolución de la tarea debe establecer la relación lógica **conjunción** $(A \wedge B)$ entre los elementos matemáticos. **El área como aproximación, las propiedades de la Integral Definida (unión de intervalos) y el teorema fundamental del Cálculo,** para poder calcular el área de forma gráfica utilizando triángulos y de forma algebraica aplicando la fórmula del rectángulo y la regla de Barrow. En esta tarea es necesario como en otras que el estudiante tenga los conceptos previos referentes al tipo de función que debe integrar, porque de lo contrario se presentan concepciones erróneas en la resolución de la tarea (Mundy, 1984).

Tarea 5.

En esta tarea el estudiante puede hacer uso de las relaciones lógicas de **conjunción** $(A \wedge B)$ **y condicional** $(A \rightarrow B)$ entre los elementos matemáticos: **El área cómo aproximación**, **la Integral Definida**, **las propiedades de la Integral Definida** y **el teorema fundamental** en los sistemas de representación gráfico, algebraico y analítico, para poder decidir sobre un valor del área como aproximación y el cálculo de la integral de funciones positivas y negativas como áreas de una región. En la resolución es necesario hacer uso de una de las propiedades de la Integral Definida de funciones positivas y negativas.

Tarea 6.

En esta tarea se espera que el estudiante en la resolución establezca la relación lógica de la **conjunción** $(A \wedge B)$entre los elementos matemáticos: **El área como aproximación, la Integral Definida y la propiedad de la linealidad de la Integral Definida**, para poder que la propiedad que está dada de forma algebraica se pueda comprobar de forma gráfica y algebraica.

Tarea 7.

En la resolución de la tarea el estudiante puede establecer las relaciones lógicas: la **conjunción** $(A \wedge B)$ entre los elementos matemáticos **la Integral Definida y el teorema fundamental, la condicional y el contrario,** porque debe considerar tanto la continuidad como la discontinuidad de la función, para aplicar o no la regla de Barrow.

En esta tarea, el estudiante hace uso de la **conjunción lógica** para decidir el valor de verdad de la proposición 7a, porque debe relacionar **la Integral Definida** y **el teorema fundamental**, para poder tomar una decisión que le permita resolver la tarea. En el ítem 7b, debe utilizar el elemento matemático **la Integral Definida** por medio de la condición suficiente de existencia de la Integral Definida relacionándola directamente a través de **la condicional**. En 7c podría utilizar **el contrario de la condicional** a la aplicación de **la regla de Barrow**, porque como la función es no acotada no se puede aplicar dicha regla para verificar el valor de verdad o de falsedad de la afirmación.

Tarea 8.

Esta es una pregunta abierta y se pretende que pongan de manifiesto la imagen mental que tienen del concepto haciendo uso especialmente de la **conjunción lógica** entre los elementos matemáticos**: el área como aproximación, el área como límite de una suma y la Integral Definida.**

3.7.3. Aplicación del cuestionario.

Los cuestionarios diseñados se aplicaron el 13 de mayo de 2008. Para la resolución de las diferentes tareas del cuestionario los estudiantes dispusieron de un periodo de tiempo flexible entre 1 y 3 horas aproximadamente y fueron contestados en el horario habitual de la clase de Cálculo Integral. En la aplicación del cuestionario participaron todos los alumnos que asistían al curso regular; se acordó con el profesor del grupo participante y con los alumnos la hora y el proceso de realización de la prueba. Igual que se hizo en el precuestionario, días previos a la aplicación del cuestionario el investigador fue al salón de clase para animar a los estudiantes a que participaran en el proceso de la investigación. Los estudiantes fueron informados verbalmente y por escrito sobre el propósito de la investigación, el tema, la forma de responder, la confidencialidad de las respuestas, según el Código Ético de la *American Psychological Association* (APA), (Bisquerra y Sabariego, 2009, p. 83 – 87) y, sobre todo, se hizo énfasis en que lo más importante era argumentar las respuestas, así como su forma de pensar y comprender las tareas.

El formato de presentación del cuestionario era el siguiente: en el primer folio aparecía en la parte superior que los estudiantes debían completar sus datos y a continuación la primera tarea; a continuación, en cada hoja, se planteaba una de las otras siete tareas que formaban parte del cuestionario para que el estudiante tuviera espacio suficiente que le permitiera resolver y justificar cada tarea.

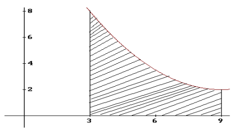
VNiVERSiDAD D SALAMANCA

UNIVERSIDAD DEL QUINDIO

Nombre y Apellidos:____**Edad:**____ **Fecha:**________**Código:**__________

Tarea 1.

1. El área de la región rayada es mayor que **12** y menor que **48**.
1a ¿Por qué?
1b ¿Puedes dar valores más ajustados?
1c ¿Cuáles?
1d ¿Cómo los obtienes?



Tarea 2.

2. Sea R, la región encerrada por la gráfica de la función $f(x) = 4x$ y el eje x, en el intervalo $[-2, 2]$.
2a Dibuja la gráfica.
2b. Calcula gráficamente el área de la región R.
2c. Calcula la $\int_{-2}^{2} 4x\,dx$.
2d. ¿Son iguales los dos resultados anteriores? Justifica cada paso.

Tarea 3.

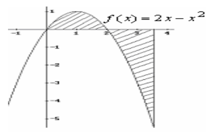
Sea R la región entre la gráfica de la función $f(x) = x^2$ y el Intervalo $[0, 4]$. Utiliza particiones para aproximar el valor del área de la región R. Justifica tu respuesta.

Tarea 4.

4. Calcula el área limitada por la gráfica de la función $f(x) = |2x - 1|$, en el intervalo $[0, 2]$ y el eje x. Justifica tu respuesta.

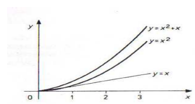
Tarea 5.

5. Dada la siguiente gráfica, calcula por aproximación el área de la región rayada. Explica el procedimiento utilizado en el cálculo del área. Justifica cada paso.



Tarea 6.

6. Explique, en términos del gráfico, porqué $\int_0^a (x^2 + x)dx = \int_0^a x^2 dx + \int_0^a x dx$



Tarea 7.

7. En los apartados **7a**, **7b** y **7c**, que aparecen a continuación, decide si la afirmación es verdadera o falsa. En caso de ser falsa, explica por qué o muestra un contraejemplo.

7a Si $F'(x) = G'(x)$ en el intervalo $[a, b]$, entonces $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$.

7b Si f es continua en $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$.

7c $\int_{-1}^{1} x^{-2} dx = [-x^{-1}]_{-1}^{1} = (-1) - 1 = -2$

Tarea 8.

8. ¿Cuál es el significado matemático de la Integral Definida de una función $y = f(x)$ en un intervalo $[a, b]$?

Tabla 3.4. Tareas del cuestionario.

En la tabla anterior se presenta el cuestionario con las preguntas seguidas sin espacio entre ellas para que se pueda ver de forma global.

3.8. Las entrevistas.

Las entrevistas realizadas a los estudiantes universitarios fueron entrevistas semiestructuradas que aportaron a la investigación información sobre la comprensión que tienen del concepto de Integral Definida. De acuerdo con Bernal (2006, p. 226), la entrevista semiestructurada es aquella que tiene cierto “grado relativo de flexibilidad tanto en el formato como en el orden y los términos de realización de la misma para las diferentes personas a quienes está dirigida”. Asimismo, según Ginsburg et al. (1983), la entrevista semiestructurada, es un método mixto, en el que el entrevistador pide al estudiante que exprese todo lo que va haciendo y pensando (pensando en voz alta) y, que para facilitar la verbalización, el entrevistador va haciendo preguntas que ayuden a profundizar en la forma de pensar del alumno.

Las entrevistas fueron realizadas a todos los estudiantes durante el mes de noviembre de 2008, después de la aplicación del cuestionario y de haber hecho un análisis previo, de la forma en la que cada uno de ellos había resuelto las diferentes tareas. El diseño de la entrevista realizada a cada alumno se hizo en función de las respuestas que había dado en el cuestionario. En el **Anexo 4** se pueden ver las preguntas establecidas para cada alumno. Las entrevistas se realizaron de manera individual, tuvieron una duración aproximada de hora y media, y fueron audiograbadas en el centro audiovisual de la misma universidad a la que pertenece la población objeto de la investigación. Se hicieron un total de 11 entrevistas para cada una de las cuales se concertó previamente con los estudiantes la hora y fecha. Durante la realización de la entrevista, a medida que se hacia la grabación, el entrevistador iba tomando nota de todos aquellos aspectos que pudieran arrojar más información de la ofrecida verbalmente.

Los estudiantes, antes de la entrevista, tenían acceso a su cuestionario con el propósito de que recordaran las tareas y la forma cómo las habían resuelto, además se les entregaba papel y lápiz para que pudieran justificar los procedimientos de resolución utilizados y se les animaba a participar en la entrevista continuamente. El investigador, por su parte, disponía de un guión de entrevista previamente elaborado de acuerdo con los resultados obtenidos por cada alumno individualmente en el cuestionario. El objetivo era recoger aquellos aspectos no visibles en los procedimientos y la justificación que habían hecho los estudiantes por escrito al responder las tareas del cuestionario. El entrevistador, cuando lo consideró necesario, reformuló o agregó información adicional a través de nuevas preguntas y de orientaciones para estimular la reflexión del estudiante.

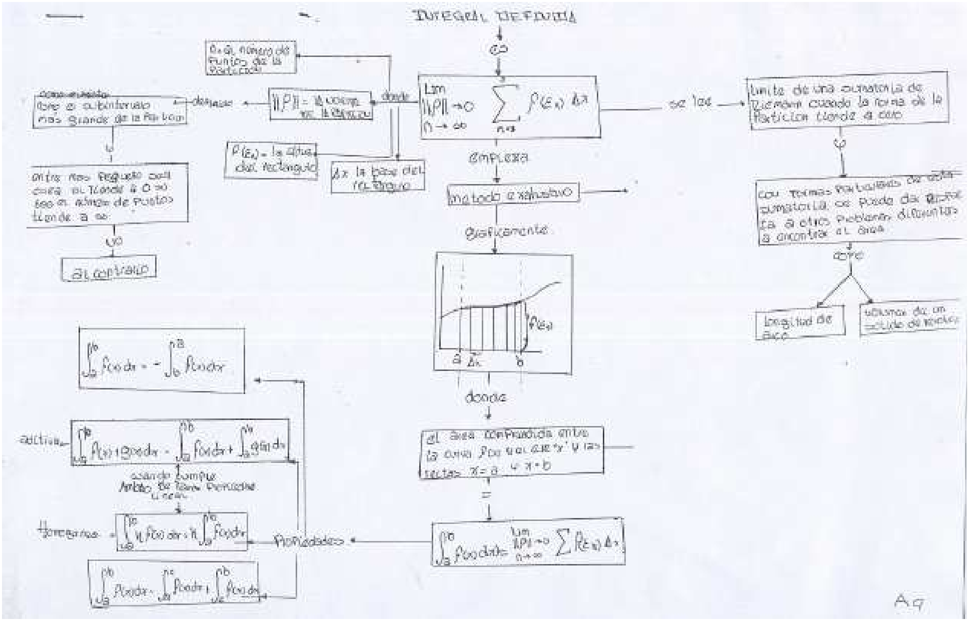
La trascripción de las entrevistas se realizó en los meses de noviembre y diciembre de 2008 y enero de 2009 **(Anexo 5).** Se utilizó un seudónimo para cada estudiante con el fin de ocultar su identidad, este nombre figurado es con el que se identifican a lo largo de esta investigación. La grabación y transcripción de las entrevistas se hizo siguiendo las recomendaciones hechas por Farías y Montero (2005), y posteriormente se hizo la depuración de los protocolos de las entrevistas y la reducción de la información.

3.9. Los mapas conceptuales.

Los mapas conceptuales fueron elaborados durante el mes de noviembre de 2008 por cada uno de los estudiantes después de haberles realizado la entrevista. Algunos de los estudiantes ya tenían nociones de cómo elaborar mapas conceptuales, sin embargo se les facilitó una síntesis sobre cómo elaborar mapas conceptuales de Matemáticas, apoyados en un documento de Huerta, Galán y Granel (2000), quienes afirman que "un mapa conceptual de Matemáticas en un sentido amplio, es una representación de una estructura matemática, el pensamiento en términos de conceptos matemáticos y las relaciones entre los conceptos matemáticos, es decir, proposiciones matemáticas" (Huerta, Galán y Granel, 2000, p. 2).

Después de la lectura de una síntesis del artículo, de su estudio personal y la aclaración de algunas inquietudes por parte del investigador, elaboraron mapas conceptuales de manera individual en presencia del investigador sin hacer uso de los libros de texto o de los apuntes **(Anexo 6),** porque lo que se pretendía con el mapa conceptual era que reflejara la imagen del concepto que tenían de Integral Definida en ese momento. Para su elaboración cada estudiante dispuso de regla, lápiz y papel y de un tiempo aproximado de una hora. Durante la realización del mapa no se dieron explicaciones ni se realizó ningún tipo de grabación.

Cada mapa, igual que los cuestionarios y las entrevistas, se identifica mediante el seudónimo que identifica a cada estudiante. El siguiente es un mapa conceptual elaborado por uno de los estudiantes.



A9, mapa conceptual que representa el concepto de integral definida

Este mapa conceptual pone de manifiesto la imagen del concepto de Integral Definida. Los elementos matemáticos que configuran el concepto de Integral Definida de este alumno son **el área como aproximación**, **el área como límite de una suma Riemann**, **la Integral Definida** y **las propiedades de las integrales** consideradas en los sistemas de representación gráfico, algebraico y analítico. Como puede notarse no aparece en el mapa explícitamente el elemento matemático **el teorema fundamental del Cálculo**, lo que sí se plantean son aplicaciones de la Integral Definida a otros contextos específicos.

Están presentes los elementos matemáticos: **el área como aproximación**, cuando menciona la partición del intervalo, haciendo la construcción de rectángulos cada vez más pequeños y planteando las sumas de Riemann; **el área como límite de una suma** al plantear el límite de la sumatoria cuando la norma de la partición tiende a cero y el número de subintervalos tiende a infinito; y **las propiedades de la Integral Definida**, cuando menciona algunas de ellas como la aditiva, la lineal y la homogénea.

En general lo que expuso este alumno en el mapa conceptual incluyó los mismos elementos matemáticos que utilizó tanto en el cuestionario como en la entrevista; aunque muchos de estos elementos los recuerda y tiene dificultad con algunos para utilizarlos de forma correcta en la resolución de las tareas. Por todo lo anterior, tanto el cuestionario como la entrevista y el mapa conceptual nos proporcionan información sobre la comprensión de los estudiantes acerca del concepto de Integral Definida. El uso conjunto de los tres instrumentos aplicados en la recogida de datos permitió realizar una triangulación entendida "como el uso de dos o más métodos de recogida de datos en el estudio de algún aspecto del comportamiento humano" (Cohen y Manion, 2002, p. 331), para determinar el nivel de desarrollo del esquema del concepto de Integral Definida que tenían estos estudiantes.

3.10. Procedimiento de análisis.

El análisis de los datos es un "proceso dinámico y se trata de obtener una comprensión más profunda de lo que se está estudiando" (Taylor y Bogdan, 1984, p. 159). En nuestra investigación este procedimiento de análisis permitirá: La caracterización de los esquema de Integral Definida de cada uno de los alumnos participantes en esta investigación a partir de los instrumentos teóricos (elementos del conocimiento matemático y relaciones lógicas entre dichos elementos del conocimiento matemático) descritos en los apartados anteriores, y el análisis de las respuestas dadas por los estudiantes a los cuestionarios, la justificación de dichas respuestas en las entrevistas, y la representación del concepto de Integral Definida puesto de manifiesto en los mapas conceptuales.

3.10.1. Los niveles de desarrollo del esquema del concepto de Integral Definida.

A partir del marco teórico que planteamos en el capítulo 2 de esta memoria y de los aspectos metodológicos que hemos desarrollado en los apartados anteriores, asumimos que el desarrollo del esquema de Integral Definida viene caracterizado por los elementos matemáticos gráficos, algebraicos y analíticos y por las relaciones lógicas que se establecen entre ellos. Por tanto el procedimiento de análisis debe permitir identificar los elementos matemáticos que los alumnos utilizan en forma **G, A y AN** y las relaciones lógicas que los estudiantes establecen para hacer inferencias sobre el desarrollo del esquema del concepto de Integral Definida que tienen estos estudiantes.

Desde el análisis teórico y la revisión de las investigaciones previas, vamos a identificar las características propias de cada uno de los diferentes niveles de desarrollo de un esquema para el caso concreto de la Integral Definida, asumiendo que existe una construcción progresiva de este esquema, entendida como el aumento del uso de elementos matemáticos y de relaciones lógicas de manera continua y ascendente en la resolución de las tareas. A continuación describimos la interpretación de los distintos niveles y subniveles de desarrollo del esquema del concepto de Integral Definida que resulta de una adaptación de la caracterización realizada por Sánchez Matamoros (2004) para el esquema de la derivada:

EL NIVEL INTRA 1

Este nivel de desarrollo del esquema se caracteriza porque el estudiante demuestra:

1. No establecer relaciones lógicas entre los elementos matemáticos

Esta situación se presenta cuando el estudiante no es capaz de resolver la tarea, porque desconoce los elementos matemáticos necesarios para su resolución y a pesar de intentarlo no logra establecer ningún tipo de relación lógica, ni usar los elementos que le permiten hacer una comprensión mínima de la cuestión, y puede mencionarlos pero el uso de los mismos le presenta conflictos.

2. Recordar sólo algún elemento matemático a lo largo de todo el cuestionario, vinculado sólo a un sistema de representación, gráfico, algebraico o analítico

Esta característica se presenta cuando el estudiante menciona de memoria y generalmente de forma reiterada por lo menos un elemento matemático como producto de la instrucción previa, pero sólo es capaz de utilizarlo en la resolución de la tarea desde un sistema de representación, es decir que no logra establecer una transformación entre los sistemas de representación gráfico, algebraico y analítico.

3. Recordar elementos matemáticos con errores

Es propio de este subnivel de desarrollo del esquema que un estudiante al tratar de resolver una tarea recuerde algunos elementos matemáticos y cuando intenta aplicarlos lo haga con concepciones erróneas y/o de forma incorrecta y por tanto los procedimientos que utiliza en la resolución de las tareas sean incorrectos.

EL NIVEL INTRA

Este nivel está caracterizado porque el estudiante suele:

1. **Mostrar dificultades en establecer relaciones lógicas (conjunción lógica) entre elementos matemáticos. (Intento de relación "conjunción lógica")**

La relación lógica que más habitualmente usan los alumnos en la construcción del esquema de Integral Definida es la de **conjunción lógica**, entre los elementos matemáticos representados de forma **G** y **A**. En general, en este nivel aunque el estudiante no suele establecer relaciones lógicas cuando intenta establecer conjunción lógica tiene dificultades para hacerlo, porque normalmente los elementos matemáticos que recuerda son de memoria y al usarlos lo hace de forma inconclusa.

2. Recordar algunos elementos matemáticos de forma aislada

En este nivel de desarrollo del esquema de Integral Definida el estudiante suele utilizar uno o varios elementos matemáticos pero de forma aislada o inconexa. Esto se presenta porque el estudiante recurre a un sólo elemento matemático representado de forma **G**, **A** o **AN**, y puede suceder porque la resolución de la tarea sólo exige el uso de un elemento matemático o varios de ellos pero no es capaz de utilizarlos conjuntamente para resolver la tarea. En ocasiones, además, suele mencionar algunos elementos matemáticos sin saber cómo aplicarlos en la resolución de la tarea.

3. No tener sintetizados los sistemas de representación

Es propio de este nivel que el alumno logre utilizar uno o varios elementos matemáticos, pero no sea capaz de coordinar el uso de estos entre los sistemas de representación gráfica y algebraica, es decir que la resolución que el alumno hace de la tarea depende mucho si la información dada o la que él mismo produce proviene de un registro gráfico o algebraico.

NIVEL INTER 1

1. Usar la conjunción lógica ("y lógica") de forma correcta entre elementos matemáticos dados en el mismo sistema de representación

Es propio de este nivel de desarrollo que el alumno empiece a establecer conjunción lógica entre elementos matemáticos utilizando el mismo sistema de representación. Generalmente los alumnos establecen con más regularidad conjunción lógica entre elementos matemáticos en modo gráfico y algebraico.

2. Recordar algunos elementos matemáticos gráficos, algebraicos y/ o analíticos

Esta categoría tiene que ver con el uso parcial que el alumno hace de algunos elementos matemáticos que recuerda y que utiliza en la resolución de las tareas en alguno de los tres sistemas de representación, pero que generalmente en este nivel de desarrollo del esquema lo hace de forma gráfica y algebraica, aunque algunas veces suele recordar algunos elementos matemáticos de forma analítica.

3. Tener esbozo de síntesis de los sistemas de representación gráfico y algebraico

Una manifestación de esta característica se establece generalmente cuando el estudiante al resolver una tarea coordina parcialmente el uso de algunos elementos matemáticos cambiando de sistema de representación, es decir que para el alumno la tarea la resuelve pero dependiendo del sistema de representación que utilice.

NIVEL INTER

Este nivel está caracterizado porque el estudiante puede:

1. Usar diferentes relaciones lógicas entre elementos matemáticos de forma correcta salvo alguna excepción (generalmente en el mismo sistema de representación)

En este estado se comienza a establecer más de una relación lógica entre los elementos matemáticos usando generalmente en el mismo sistema de representación. Se evidencia además, una tendencia a utilizar frecuentemente la conjunción lógica y la condicional entre elementos matemáticos, el estudiante relaciona dos o más elementos matemáticos, aunque algunas veces el razonamiento puede ser inconcluso; es decir que el razonamiento que hace el estudiante es incompleto porque no logra concluir la tarea.

2. Recordar los elementos matemáticos necesarios en la resolución de la tarea en varios sistemas de representación (gráfico, algebraico y/o analítico)

En este estado de desarrollo de la construcción del esquema de Integral Definida el estudiante suele empezar a recordar y a utilizar los elementos matemáticos necesarios que le permiten hacer un razonamiento lógico y poder resolver así la tarea coordinando generalmente los sistemas de transformación gráfico, algebraico y/o analítico.

3. Tener esbozo de síntesis de los sistemas de representación gráfico, algebraico y analítico

Una manifestación de esta característica en este nivel de desarrollo del esquema sucede cuando el estudiante es capaz de utilizar los mismos elementos matemáticos cambiando entre los sistema de representación **G, A** y **AN**, porque la solución de la tarea depende de lo que sabe hacer con los elementos matemáticos que conoce y de la transformación entre sistemas de representación.

NIVEL TRANS

Este nivel está caracterizado porque el estudiante puede:

1. Usar diferentes relaciones lógicas (conjunción lógica, condicional y la contraria de la condicional) entre los elementos matemáticos de forma correcta

La conjunción lógica es la relación que más utilizan los estudiantes en la resolución de las tareas, seguida de la condicional y la relación que menos utilizan los estudiantes es la del contrario de la condicional.

2. Recordar los elementos matemáticos necesarios en la resolución de la tarea, usando los significados implícitos para tomar decisiones

Es propio de este nivel que los estudiantes utilicen los elementos que configuran el concepto de Integral Definida de forma correcta y establezcan las relaciones lógicas necesarias en la resolución de las tareas. Una evidencia de este hecho se presenta cuando el estudiante a lo largo del cuestionario resuelve correctamente todas las tareas.

3. Tener síntesis en los sistemas de representación gráfico, algebraico y analítico

En este nivel de desarrollo del esquema de Integral Definida el estudiante ha logrado construir una estructura coherente del esquema del concepto mediante las relaciones establecidas en el nivel **inter**. Esta coherencia le permite decidir cuál es el ámbito de aplicación del esquema. Además, los estudiantes son capaces de utilizar los elementos matemáticos en la resolución de la tarea independientemente del sistema de representación gráfico, algebraico, analítico o los tres a la vez. Un ejemplo que pone de manifiesto este hecho es el uso que hace un estudiante del elemento matemático **el área**

como aproximación de forma gráfica **usando figuras planas y algebraica aplicando las fórmulas adecuadas para hallar el área de figuras planas,** del elemento el **área como límite de una suma, en el registro de representación analítico** calculando el límite de las sumas de Riemann, para inferir que el límite de la suma es el elemento matemático **la Integral Definida.**

La siguiente tabla sintetiza las características generales de cada uno de los niveles y subniveles de desarrollo del esquema del concepto de Integral Definida.

NIVEL	CARACTERÍSTICAS
INTRA 1	• No establecer relaciones lógicas entre los elementos matemáticos. • Recordar sólo algún elemento matemático a lo largo de todo el cuestionario, vinculado sólo a un sistema de representación, gráfico, algebraico o analítico. • Recordar elementos matemáticos con errores.
INTRA	• Mostrar dificultades en establecer relaciones lógicas (conjunción lógica) entre elementos matemáticos. (Intento de relación "conjunción lógica"). • Recordar algunos elementos matemáticos de forma aislada. • No tener sintetizados los sistemas de representación.
INTER 1	• Usar la conjunción lógica ("y lógica") de forma correcta entre elementos matemáticos dados en el mismo sistema de representación. • Recordar algunos elementos matemáticos gráficos, algebraicos y/ o analíticos. • Tener esbozo de síntesis de los sistemas de representación gráfico y algebraico.
INTER	• Usar diferentes relaciones lógicas entre elementos matemáticos de forma correcta salvo alguna excepción (generalmente en el mismo sistema de representación) • Recordar los elementos matemáticos necesarios en la resolución de la tarea en varios sistemas de representación (gráfico, algebraico y/o analítico). • Tener esbozo de síntesis de los sistemas de representación gráfico, algebraico y analítico.
TRANS	• Usar diferentes relaciones lógicas (conjunción lógica, condicional y la contraria de la condicional) entre los elementos matemáticos de forma correcta. • Recordar los elementos matemáticos necesarios en la resolución de la tarea, usando los significados implícitos para tomar decisiones. • Tener síntesis en los sistemas de representación gráfico, algebraico y analítico.

Tabla 3.5. Caracterización de los niveles y subniveles de desarrollo del esquema de Integral Definida

La caracterización de estos niveles permitió realizar el análisis de las respuestas de los estudiantes a las tareas del cuestionario conjuntamente con las transcripciones de las entrevistas y los mapas conceptuales para determinar cómo se comprende del concepto de Integral Definida.

Para establecer el nivel en el que se encuentra cada uno se analizó su comportamiento global en el cuestionario, la entrevista y el mapa conceptual, de forma que un alumno estará en el nivel TRANS si a lo largo de todas las tareas ha establecido relaciones lógicas entre los elementos matemáticos, los ha utilizado correctamente y se ha producido una síntesis entre las diferentes formas de representación.

Para poder realizar esta clasificación de los alumnos de acuerdo a los diferentes niveles del esquema descritos anteriormente, se ha realizado un análisis en diferentes etapas que se describe a continuación.

3.10.2. Fases del análisis.

Los estudios previos sobre distintos trabajos de investigación y la aplicación del precuestionario nos permitieron determinar un procedimiento de análisis conjunto de los cuestionarios, entrevistas y mapas conceptuales para todos los estudiantes del grupo por tratarse de una población pequeña. Esto permitió realizar un estudio de todas las tareas para cada estudiante así como establecer las diferencias entre ellos en cada una de las tareas siendo necesario realizar un procedimiento de análisis con tres fases que describimos a continuación.

Fase 1.

En la primera fase del análisis se hizo una revisión de las justificaciones dadas por cada estudiante en el cuestionario definitivo, lo que nos permitió sistematizar esta primera información en diversas categorías para cada pregunta. El análisis previo de los cuestionarios nos permitió elaborar y aplicar el guión de las entrevistas para cada alumno. Asimismo, los alumnos en esta misma fase realizaron un mapa conceptual.

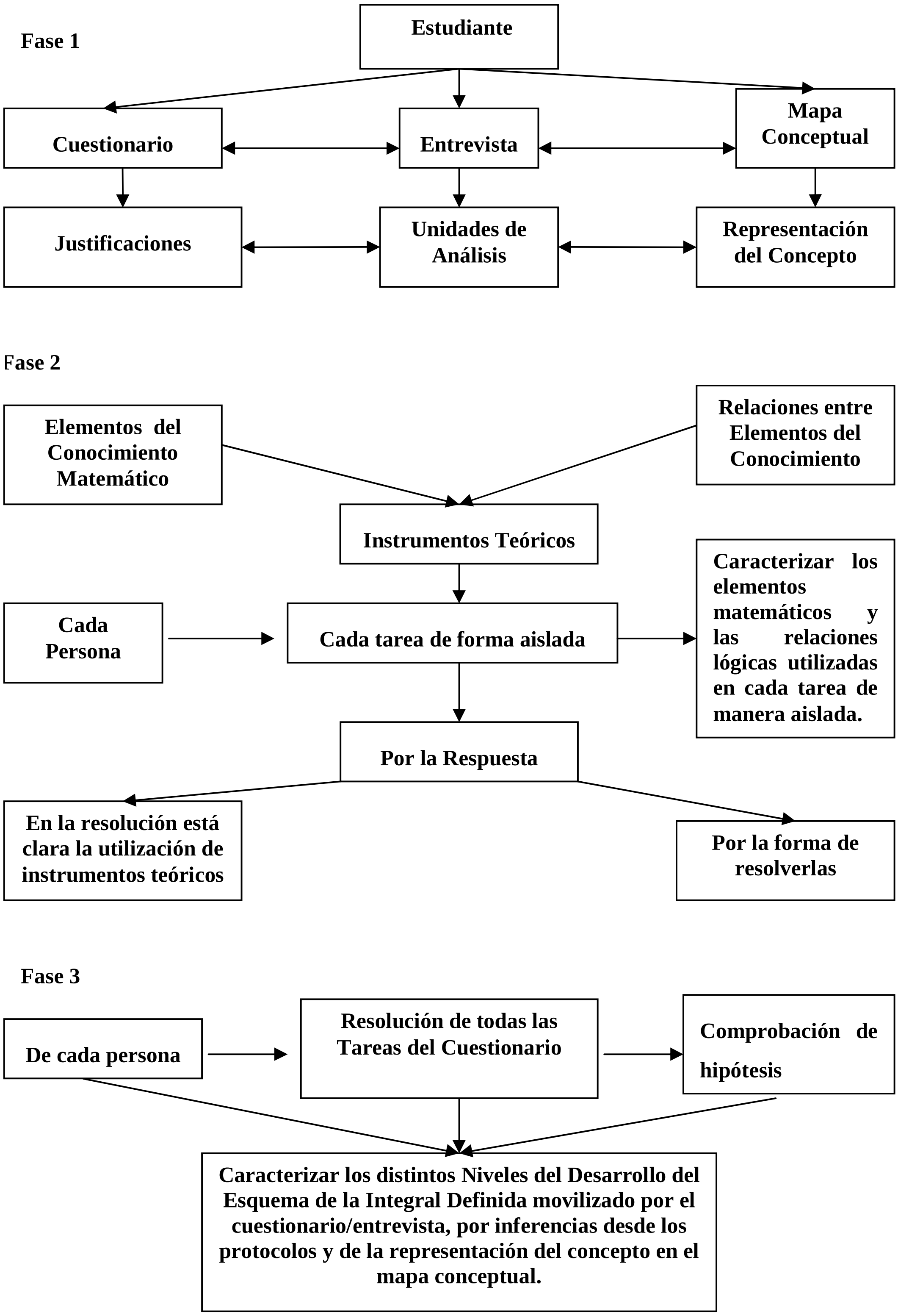
Fase 2.

En esta segunda fase se analiza cada tarea de forma aislada a través de los instrumentos teóricos (elementos matemáticos usados en diferentes representaciones gráfica, algebraica y analítica, y sus relaciones lógicas), utilizando de manera conjunta el cuestionario, la entrevista y el mapa conceptual, lo que nos permitirá establecer las diferencias entre los alumnos y nos ayudará posteriormente a caracterizar la comprensión de Integral Definida por parte de cada sujeto. Previo a este análisis se hizo una lectura detenida de las transcripciones de las entrevistas, identificándose las unidades de análisis, es decir, el conjunto de frases que a lo largo del la entrevista ha expresado el estudiante mostrando el uso o no de los distintos elementos matemáticos. Asimismo, se hizo un análisis del mapa conceptual para identificar la forma cómo los alumnos comprenden y representan el concepto de Integral Definida.

Fase 3.

Las particularidades de cada tarea y la forma cómo la había resuelto cada estudiante nos llevó a esta tercera fase en la que tratamos de estudiar de forma global como un mismo estudiante ha resuelto todas las tareas del cuestionario. Esto nos permitió obtener una información más detallada de cada individuo según la forma de resolver todas las tareas del cuestionario, así como los aciertos o errores cometidos y establecer los niveles de desarrollo del esquema para cada uno de ellos, lo que nos permitiría comprobar las hipótesis planteadas en el capítulo 1. Así por ejemplo, las respuestas dadas por un mismo estudiante nos indicaban si al utilizar uno o más elementos matemáticos cambiaba de representación o si los relacionaba. Esto nos llevó a caracterizar los distintos niveles de desarrollo del esquema de Integral Definida en que se encontraba cada uno de los 11 estudiantes usando conjuntamente las respuestas al cuestionario, la entrevista y el mapa conceptual.

En el esquema siguiente especificamos cada una de las acciones establecidas para las fases anteriores que nos permitió realizar el análisis de los datos a partir de los instrumentos aplicados para recoger la información.



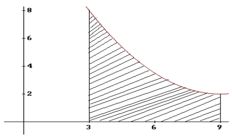
Esquema 3.3. Fases de análisis

En lo que sigue a continuación mostraremos cómo se procedió en cada una de las fases del análisis de los instrumentos aplicados:

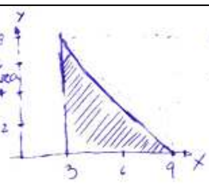
3.10.2.1. Primera fase.

En la fase 1 se analizan las respuestas del cuestionario. En este caso se presenta el procedimiento de análisis del cuestionario en la resolución que hace el alumno A7 de la tarea 1 **(A7C1)** que era la siguiente**:**

Tarea 1.
El área de la región rayada es mayor que **12** y menor que **48**.
1a ¿Por qué?
1b ¿Puedes dar valores más ajustados?
1c ¿Cuáles?
1d ¿Cómo los obtienes?



A continuación se pueden ver las justificaciones dadas por el alumno A7 a cada uno de los apartados de la tarea 1.

ITEM	JUSTIFICACIONES
1 a	el area del triangulo construido es algo menor que el area figura inicialmente propuesta  entonces $\frac{6 \times 8}{2}$ = Area del Triangulo. Como vemos: 24, que corresponde al area del triangulo, es mayor que doce y menor que 48 Esto es una aproximacion al area real. Si construimos un rectangulo sobre la figura inicialmente propuesta, observamos que el area del rectangulo es notablemente mayor que el area de la figura inicialmente propuesta.

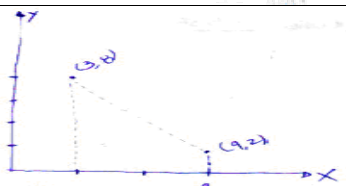
1b	obviamente es posible dar valores tan ajustados que llegan a ser precisos, exactos. podemos calcular este valor con una suma Riemmani conociendo la funcion que delimita el area sombreada
1c	un valor mas ajustado de esta area podria ser 30 u² puesto que si construimos una recta que une los puntos (3,8) y (9,2) y calculamos la funcion de esta recta, entonces podriamos tomar esta funcion como la que delimita un area muy aproximada a la real.
1d	 $m = \frac{2-8}{9-3} = \frac{-6}{6} = -1$ $3-x = -1(8-y)$ $3-x = -8+y$ $y = -x+11$ luego $A_\triangle = \int_3^9 (-x+11)\,dx$ ó calculando el Area de un trapecio de base mayor 8, base menor 2 y altura 6 entonces $A_\triangle = \frac{(8+2)6}{2} = \frac{60}{2} = 30\,u^2$

Tabla 3.6. Justificaciones de A7C1

A partir de esas justificaciones obtuvimos las categorías que nos permitieron sistematizar y organizar la información que proporcionó el alumno A7 en el proceso de resolución de la tarea 1 del cuestionario C1.

ITEM	CATEGORIA	ALUMNO
1a	• Justifica las cotas por aproximaciones geométricas	A7
1b	• Afirma que sí se pueden dar valores más ajustados	A7
1c	• Propone una aproximación geométrica	A7
1d	• Plantea integrar una función para aproximar más el área	A7

Tabla 3.7. Categorías de A7C1

Este mismo procedimiento metodológico de análisis nos permitió analizar las justificaciones dadas por todos los estudiantes al resolver cada una de las tareas del cuestionario hasta organizar dichas justificaciones en categorías que pueden verse en el **Anexo 3** del cuestionario.

3.10.2.2. Segunda fase.

A continuación, **en la fase 2 se analiza cada tarea de forma aislada**, usando los tres instrumentos aplicados para recoger la información.

Las entrevistas se organizaron en tablas de cinco columnas. En la primera de ellas se hace referencia a las intervenciones del investigador y del alumno numerándolas secuencialmente del **1** en adelante a medida que se van sucediendo. En la segunda se incluye la transcripción de la entrevista. Para identificar las intervenciones del investigador/entrevistador se utilizó la letra **I**, y las del entrevistado o el alumno con la letra **A**, seguida de un numeral que se les asignó para mantener su anonimato, por ejemplo, el alumno 7 se identifica como **A7**, y la expresión completa **A7E1,** significa el **A**lumno **7** en la **E**ntrevista de la tarea **1,** mientras que se ha usado la letra **C** para hacer referencia al cuestionario y la **M,** al mapa conceptual.

En la tercera se indica un código que de acuerdo con Gil (1994, p. 72-83) debe estar representado por tres letras mayúsculas, dependiendo de cada investigación, y que en nuestra investigación hace referencia a los elementos matemáticos usados **ACA:** el área como aproximación; **ALS:** el área como límite de una suma; **LID:** la Integral Definida; **PID:** las propiedades de la Integral Definida y **TFV:** el teorema fundamental y del valor medio.

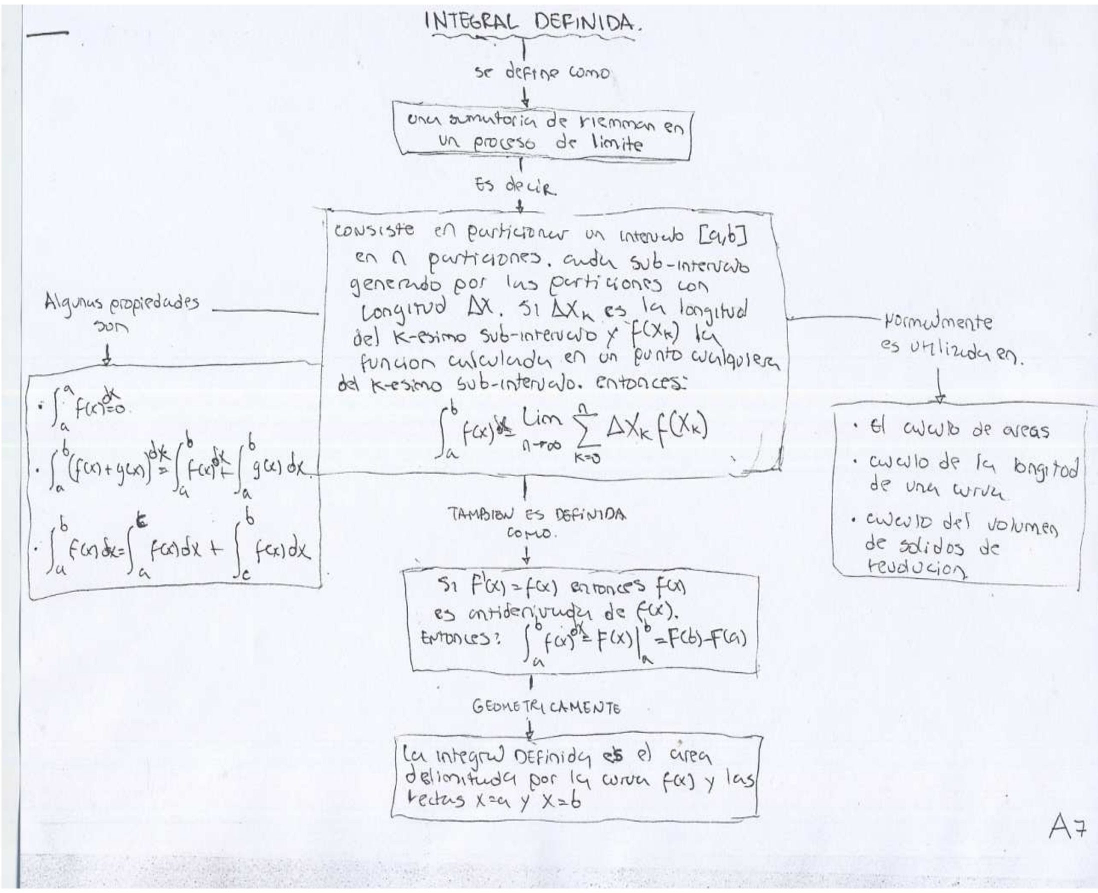
En la cuarta se hace referencia a las unidades de análisis, es decir, aquellos que corresponden a un mismo elemento o criterio temático (Gil, 1991, p. 72-83). Así por ejemplo, en el caso de **A7E1R2-6**, **R** representa las respuestas que da el alumno en ese trozo de la transcripción, en este caso nos referimos a las intervenciones que hace sólo el alumno desde la respuesta **2** hasta la seis **(2-6).**

En la quinta se pone de manifiesto los comentarios que el entrevistador pudo registrar de aquellas acciones que realizó el estudiante durante la entrevista. Por ejemplo, traza, dibuja, grafica, calcula, y señala, las cuales están codificadas dentro de la misma categoría porque se refieren al mismo elemento matemático que el estudiante utiliza en el momento de la entrevista y que aparecen en el análisis de los extractos de los protocolos. A continuación se puede observar una de las tablas construidas.

Nº	**I: ENTREVISTADOR** **A7: ENTREVISTADO**	**CÓDIGO DE LA CATEGORÍA**	**UNIDAD DE ANÁLISIS**	**COMENTARIO**
A7E1	**TAREA Nº 1.**	ACA: EL ÁREA COMO APROXIMACIÓN	SEGMENTOS	ACCIONES DEL ALUMNO
1.	I: ¿Podría explicarme cómo obtuvo la respuesta a la pregunta número 1?			
2.	A7: Al punto a de la pregunta 1, si.			
3.	I: O, lo puede hacer en general.			
4.	A7: La pregunta decía que el área de la región rayada es mayor que 12 y menor que 48 había que probar eso, entonces intente hacerlo geométricamente o gráficamente mejor.			
5.	I: ¿Que quiere decir gráficamente, cómo lo hizo?			
6.	A7: Hicimos lo siguiente, tenemos esto que es un 3 y tenemos este gráfico que nos proporcionaba usted; la idea era mostrar que la medida de esta área podría estar en medio de otras dos medidas, de otras dos áreas, entonces una podría ser el área de este triángulo que obviamente se ve que el área que usted nos dice mostrar es mayor y aquí podemos ver que si construimos un rectángulo, esa área de la que usted nos habla, es menor que la del rectángulo.	Justifica el área aproximada usando procedimientos geométricos diferentes y compara los resultados.	A7E1R2-6	*Traza los gráficos y hace los cálculos en una hoja de respuestas.*

Tabla 3.8. Protocolo de entrevista A7C1

En esta misma fase se hizo el análisis del al mapa conceptual que junto con el cuestionario y la entrevista nos permitió complementar la información y poder hacer una interpretación global del esquema que tiene construido el estudiante de Integral Definida. Veamos éste ejemplo:



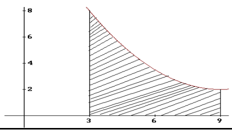
A7, mapa conceptual que representa el concepto de integral definida

Este mapa conceptual pone de manifiesto que el estudiante muestra, en la columna del centro, los elementos matemáticos **A y AN,** el **ALS** y **LID,** y el **TFV** de forma **A**; en la columna de la izquierda recuerda el elemento matemático **PID** de forma **A,** y en la columna de la derecha menciona las aplicaciones de la **LID,** en ámbitos de aplicación diversos.

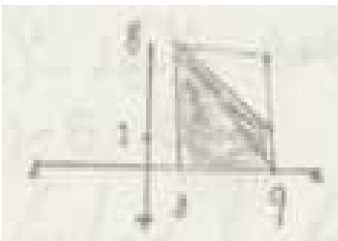
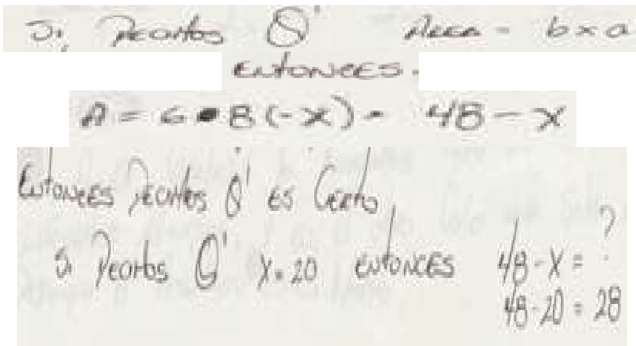
En lo que sigue, a continuación, reflejamos las diferencias entre alumnos para ver que una misma tarea se resuelve de muy diversas formas resaltando por un lado, los diferentes tipos de divisiones que hacen los alumnos de una figura: triángulos, rectángulos, cuadrados, trapecios; por otro lado, si algunos utilizan particiones en intervalos regulares; cómo utilizan el elemento **ACA**; si hacen trasformaciones de unos registros de representación a otros, por ejemplo de **G** a **A** de **G** a **AN**; si son capaces de hacer mejores aproximaciones; y si utilizan algún otro elemento matemático.

Este hecho de analizar cada tarea de forma aislada lo vamos a mostrar en relación con la tarea 1, escogiendo las diferentes formas en que varios alumnos resolvieron esa tarea**:**

1. El área de la región rayada es mayor que **12** y menor que **48**.
1a ¿Por qué?
1b ¿Puedes dar valores más ajustados?
1c ¿Cuáles?
1d ¿Cómo los obtienes?



Este es el episodio de un alumno que utiliza el elemento matemático el **ACA**, cambiando de un sistema de representación **G** a uno **A**.

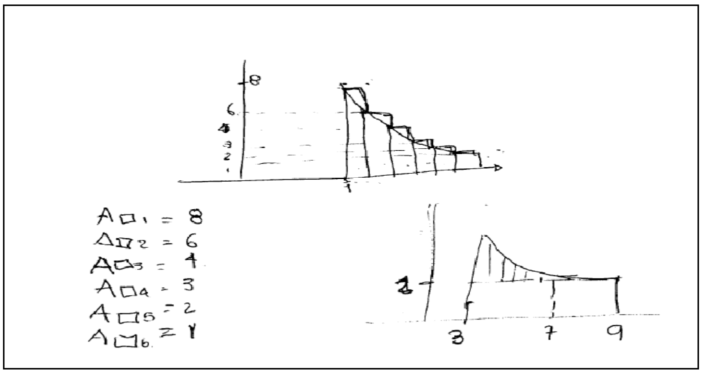
A5, representación G y A de la tarea 5 del cuestionario

Este alumno recurre a figuras geométricas sencillas (rectángulo, triángulo, trapecio) para aproximar el área que se le pide. Utiliza el elemento matemático el **ACA**, de forma **G** y **A**, porque forma un rectángulo, traza una diagonal para formar dos triángulos rectángulos, uno de ellos cubre parte del área sombreada, y sobre la hipotenusa de éste traza otro triángulo, tratando de cubrir toda el área sombreada. Aplica la fórmula del área del rectángulo, encuentra el área del rectángulo, llama x a la región que está por encima de la sombreada, le da por tanteo el valor de 20 y calcula el valor aproximado del área bajo la gráfica como 28 unidades cuadradas. Así justifica la tarea:

I: ¿Podría explicarme esa expresión de dónde la obtuvo, 6×8*?*
A5: El área es igual a base por altura, entonces armamos el cuadrado…
I: ¿Por qué le resta x*?*
A5: Porque, no sabemos cuánto vale el área que tenemos en blanco….
I: ¿Me podría explicar más sus argumentos?
A5: Como nos han dado la escala, entonces formamos el cuadrado y sabemos que el área es base por altura, le restamos la x *que es el área que formamos, para que nos diera el cuadrado y le trazamos una línea para hacer la base por altura.*
I: ¿Existe otra forma de ajustar las cotas?
A5: Posiblemente por sumatorias de Riemann, pero no sé.
I: ¿Cómo sería por una sumatoria de Riemann?
A5: No, tocaría hallarle el área a cada uno, pero no, eso es complicado, no me acuerdo.
(A5E5).

En el protocolo pone de manifiesto por un lado que trabaja en el registro gráfico y por otro en el algebraico. En el gráfico busca una forma geométrica que le pueda ayudar para calcular el área pedida y en el algebraico calcula mediante fórmulas el área de la figura. Para la primera aproximación utiliza la fórmula del área del rectángulo de base 6 unidades y de altura 8 unidades. Posteriormente, para buscar aproximaciones mejores traza gráficamente una de las diagonales del rectángulo tratando de cubrir el área sombreada y se forman así dos triángulos. Esta construcción, finalmente, no la utiliza porque numéricamente del área del rectángulo resta la región en blanco x, que está por encima de la parte sombreada; supone sin ninguna justificación que la región en blanco puede tener un área de 20 unidades cuadradas, reemplaza en la expresión algebraica y obtiene así un valor aproximado de 28 unidades cuadradas. Como puede notarse cuando se le pregunta por otras formas de aproximación recuerda el nombre de las sumas de Riemann, pero dice que es difícil y además que no sabe cómo hacerlo. Utiliza sólo el **ACA**, menciona las sumas de Riemann, pero no es capaz de construir rectángulos que aproximen mejor el área.

En el siguiente ejemplo un alumno responde a la misma tarea usando una partición del intervalo de integración y construyendo rectángulos superiores:



A4, resolución G de la tarea 1 durante la entrevista

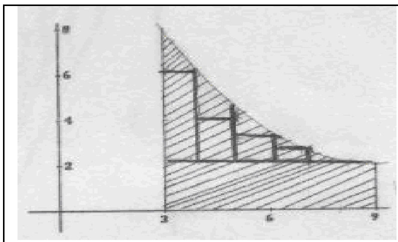
En la resolución de la tarea se puede ver que recuerda y utiliza el elemento matemático el **ACA** de forma **G**, realizando una partición del $[3,9]$ en 6 subintervalos, traza 6 rectángulos de longitud de la base una unidad y los prolonga verticalmente hasta que el extremo izquierdo corta a la curva, proyecta esa altura sobre el eje y para poder calcularla, determina el área de cada uno de los rectángulos, y finalmente suma dichas áreas. Como se le pide una aproximación gráfica del área, obtiene por este método 24 unidades cuadradas. Realiza la aproximación de forma incorrecta porque, por ejemplo, el último rectángulo le debería dar un área mayor que 2 (al estar calculando el área por exceso) y le ha asignado un valor de 1 unidad cuadrada. Cuando se le pide justificar, estos son sus argumentos:

A4: … como no teníamos la ecuación, tendríamos que haberla hallado y evaluarla en los puntos 3 y 9.
I: Le piden ajustar más el área de esa región ¿Qué piensa, cómo lo haría?
A4: Haciendo particiones.
I: ¿Cómo seria, trate de hacerlo?
A4: Espere y vera más o menos (dibuja en una hoja de respuestas).
I: ¿Para qué traza los rectángulos?
A4: Para hallarles el área y sumarla para poder tener un área más aproximada.
I: ¿Cuánto le daría el área aproximada calculándolos todos?
A4: Me daría 24.
I: ¿Podría aplicar otro procedimiento diferente que le permita mejor aproximación del área y que justifique más las cotas?
A4: Hallando la expresión calculamos la Integral Definida de 3 a 9.
I: ¿Qué le permite esto, ajustar el área o calcular el área exacta?
A4: Calcular esa área.
I: ¿Qué más podría utilizar para ajustar más los valores?
A4: Particionando más chiquito y teniendo en cuenta estos que están fuera. .

(A4E1).

Este alumno, es capaz de hacer una partición del intervalo en subintervalos regulares y calcular una aproximación del área **ACA** por exceso coordinando los registros gráfico **G** y algebraico **A**, puesto que para calcular la altura de cada rectángulo (aunque lo hace de forma incorrecta) se fija en la representación gráfica de la función que luego sustituye en la fórmula del área del rectángulo. Además, considera que al hacer más divisiones va a obtener una aproximación mejor del área, luego utiliza la representación analítica **AN** y señala que para calcular el área de forma exacta debería calcular la integral definida **LID**. Pero reconoce que para calcular tanto las sumas de Riemann como la integral definida necesita la expresión algebraica de la función.

En el siguiente ejemplo el alumno A6 hace menos particiones que el anterior y utiliza el elemento matemático **ACA**, de forma **G** y **A**: y sugiere otro procedimiento mediante un refinamiento de la partición considerada.



3 a 4 -> 1 un
2 a 6 -> 4 un > 4 un²

4 a 5 -> 1 un
2 a 4 -> 2 un > 2 un²

5 a 6 -> 1 un
2 a 3 -> 1 un > 1 un²

6 a 7 -> 1 un.
2 a 2.5 -> 0.5 u > 0.5 un²

12 un² + 4 un² + 2 un² + 1 un² + .5 un²
19.5 un²

A6, resolución G y A de la tarea 1 durante la entrevista

Por la forma como responde utiliza el elemento matemático **ACA** de forma **G** y **A**, porque traza rectángulos inferiores sobre la región sombreada y hace una aproximación del área por defecto. Utiliza la fórmula del área del rectángulo, calcula el área del rectángulo mayor de base 6 unidades y de altura 2 unidades, calcula el área de los otros 4 rectángulos cuya base es de 1 unidad y de altura la mitad de la del rectángulo anterior, suma las áreas parciales y obtiene el área total aproximada.

Durante la entrevista manifiesta lo siguiente:

A6: ...Tiene que ser mayor que 12 porque tomando el rectángulo de abajo da 12 y

está sobrando un espacio, eso quiere decir que es mayor que 12 (señala el gráfico).
I: ¿Cómo justifica que sea menor que 48?
A6: Menor que 48, por los otros rectángulos que tengo.
I: ¿Cuál es el valor de las áreas de esos rectángulos que están entre la curva y el rectángulo base?
A6: Tengo uno de base 1, de 3 a 4 me da una unidad y de altura me está dando de 2 hasta 6, me da 4 por 1 me da 4 unidades cuadradas, de la misma manera hago las particiones, más o menos el primero lo tome de 3 a 4 en el eje x, *el segundo lo tomo de 4 a 5 que sería mi base y la altura seria de 2 a 4, este da 2 por 1 me da dos unidades cuadradas de área seria mi segundo rectángulo y el tercer rectángulo seria de 5 a 6 en la base, que sería una unidad y de altura 2 hasta 3, sería una unidad, esto me da, uno por uno me da una unidad cuadrada, el que sigue en la base sería de 6 a 7 que sería una unidad y de altura aproximadamente una unidad, que sería de 2 a 2.5 la anterior la tome a 3, éste está dando en la mitad, entonces de 2 a 2.5, me da 0. 5, entonces da 1 por 0.5 me da 1.5 unidades cuadradas.*
I: ¿Cómo obtiene el área total?
A6: El área total la obtengo haciendo la sumatoria de todas las unidades que me dieron, pero de todas maneras me están sobrando unos espacios, y es ahí donde hago mis aproximaciones entonces voy a decir que 12 + 4, 16 + 2, 18 +1, 19, 19.5, ahora puedo aproximar los espacios que me quedaron, entonces puedo decir que eso me va a dar más de 20 y menos de 30. (hace cálculos en una hoja).

(A6E1).

Se puede observar que utiliza el mismo elemento para describir lo que hace tanto de forma **G** como **A**, justifica la cota inferior y la superior aproximando el área por defecto y por exceso respectivamente. Para calcular una aproximación mejor divide el intervalo en 6 subintervalos, construye un rectángulo en la base de la figura de 2x6 y sobre él construye rectángulos inferiores para aproximar el área bajo la curva. Luego calcula las áreas de cada rectángulo mostrando cierta coordinación entre los aspectos gráficos y los algebraicos. Aunque se fija en el gráfico para calcular las áreas de los rectángulos sólo calcula las correspondientes a 4 rectángulos (le falta el construido desde la abscisa 7 a la abscisa 8) y en el último que calcula realiza mal la multiplicación puesto que dice que 1 por 0.5 es 1.5. Finalmente suma esas áreas y para obtener una aproximación del área.

I: ¿Podría aplicar otro procedimiento diferente que le permita mejor aproximación del área y justificar más las cotas?
A6: Haciendo más particiones.
I: ¿Cómo sería?
A6: Refinando particiones.
I: ¿Qué es refinar particiones?
A6: Refinar particiones es partir los rectángulos que tengo en más rectángulos, en rectángulos cada vez más pequeños para hacer que el área sea más aproximada.
(A6E1).

En esta parte del protocolo se pone en evidencia además, que piensa el elemento matemático **ACA** de forma **AN** cuando menciona particiones refinadas y forma rectángulos para poder calcular una aproximación mejor.

En el siguiente procedimiento de resolución un alumno utiliza varios elementos matemáticos, coordina varios sistemas de representación y usa distintas formas de aproximación del área bajo la curva de la gráfica.

Inicialmente en el cuestionario representa un triángulo rectángulo de base 6 y altura 8 para ajustar el área de la figura por defecto y un rectángulo de base 6 y altura 8 para ajustarla por exceso.

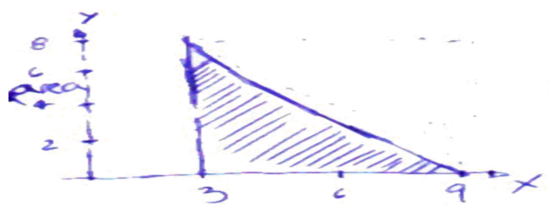


Figura 1.

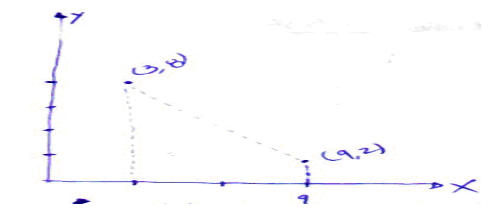


Figura 2.

A7, representación G de la tarea 1 del cuestionario

Está utilizando el elemento **ACA** de forma **G** y **A** para justificar que el área de la figura que le piden es mayor que 12 y menor que 48. Además, en la figura 2, se puede ver cómo el estudiante determina dos puntos sobre la gráfica de la función y traza un trapecio de base mayor 8, de base menor 2 y de altura 6 para dar una mejor aproximación del área bajo la curva.

Además, establece una transformación de un sistema de representación **G**, a uno de representación **A**, utilizando el mismo elemento matemático el **ACA**:

entonces. $\frac{6\times 8}{2}$ = Area del Triangulo. como vemos: 24, que corresponde al area del triangulo, es mayor que doce y menor que 48	ó calculando el Area de un trapecio de base mayor 8, base menor 2 y altura 6 entonces $A_D = \frac{(8+2)6}{2} = \frac{60}{2} = 30u^2$
Procedimiento 1.	**Procedimiento 2.**

A7, resolución A de la tarea 1 del cuestionario

El procedimiento 1 está ligado a la figura 1, puesto que el estudiante aplica la fórmula del área del triángulo y del rectángulo (aunque no aparezca de forma explícita) para aproximar el área por defecto y por exceso y justificar de esta manera las cotas. En el procedimiento 2, se pone en evidencia que trata de ajustar más el área formando un trapecio y calcula su área.

Para aproximar mejor el área, este alumno ajusta la función relacionando los registros **G** y **A** planteando la expresión algebraica de una función lineal que le permite posteriormente integrar esa función en los extremos del intervalo correspondientes al área que se pide y usar de esta forma el elemento matemático el **TFV** de forma **A**:

$$m = \frac{2-8}{9-3} = \frac{-6}{6} = -1$$
$$3-x = -1(8-y)$$
$$3-x = -8+y$$
$$y = -x+11.$$

Luego

$$A_D = \int_3^9 (-x+11)\,dx.$$

A7, resolución A de la tarea 1 del cuestionario

Está utilizando el elemento matemático **TFV** a partir del gráfico y de los conocimientos que tiene de geometría analítica, porque utiliza dos puntos de la gráfica del trapecio para hallar la pendiente de la recta y luego la ecuación de punto – pendiente de una recta, de esta manera encuentra la ecuación de una recta y plantea una Integral Definida, aunque no la calcula, puesto que su valor coincide con el que obtuvo cuando calculó el área del trapecio.

Cuando el estudiante en la entrevista justifica los procedimientos utilizados en la resolución de la tarea continua utilizando el mismo elemento matemático **ACA,** de forma **G** y **A**:

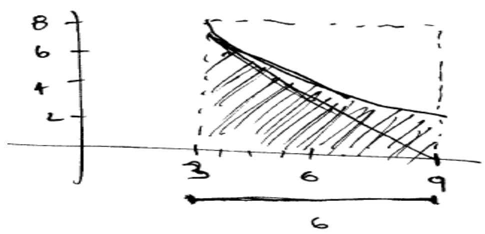


Figura 3.

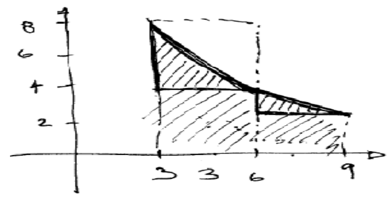


Figura 4

A7, representación G de la tarea 1 durante la entrevista

En la figura 3, forma un triángulo de base 6 por 8 de altura, para ajustar el área por defecto y un rectángulo de base 6 por 8 de altura para calcular una aproximación del área por exceso. En la figura 4, construye dos rectángulos de base 3 unidades cada uno y de altura 4 y 2 respectivamente y sobre cada uno de ellos forma dos triángulos de igual base que los rectángulos y de alturas 4 y 2 unidades, buscando cubrir el área sombreada. Además, esto también lo hace de forma A, para mejorar la aproximación:

$$A_\square = 6 \times a$$
$$A_\square = 6 \times 8$$
$$A_\square = 48.$$
$$A_\triangle = \frac{6 \times a}{2}$$
$$A_\triangle = 24.$$

Procedimiento 3.

$$A_\square = 3 \times 4 = 12.$$
$$A_\square = 3 \times 2 = 6.$$
$$A_\triangle = \frac{3 \times 4}{2} = 6.$$
$$A_\triangle = \frac{3 \times 2}{2} = 3.$$
$$A_T = A_\square + A_\square + A_\triangle + A_\triangle$$
$$A_T = 12 + 6 + 6 + 3.$$
$$A_T = 27.u^2.$$

Procedimiento 4.

A7, resolución A de la tarea 1durante la entrevista

Lo significativo de este alumno es que cada vez demuestra lo que hace con los elementos que conoce tratando siempre de conseguir mejores aproximaciones, para lo que utiliza dos procedimientos distintos para ajustar el área, en primer lugar, en el procedimiento 3 que corresponde a la figura 3, utiliza la fórmula del área del triángulo para aproximar el área por defecto y aplica la fórmula del área del rectángulo para aproximar el área por exceso, y de esta manera justifica que el área es superior a 24 unidades cuadradas, pero inferior a 48 unidades cuadradas. En segundo lugar en el procedimiento 4 de la figura 4, forma en la base de la región sombreada rectángulos, calcula sus áreas respectivamente de 12 y 6 unidades cuadradas, y para cubrir el área sombreada sobre cada rectángulo forma un triángulo de áreas 6 y 3 unidades cuadradas respectivamente, suma las áreas aproximantes de los rectángulos y de los triángulos y obtiene un valor aproximado del área de 27 unidades cuadradas.

Estos son algunos de los argumentos que expresa este alumno durante la entrevista para justificar los procedimientos:

I: ¿Existe otra forma más exacta de ajustar esas cotas?
A7: Yo diría que la integral es la forma precisa.
I: ¿Cuál de los dos procedimientos se aproxima más al área?
A7: Este nuevo procedimiento.
I: ¿Cómo calcularía una integral, cómo lo haría?
A7: El área de esa región es la integral, desde 3 hasta 9 de la función ¿Aquí nos dan la función o no? Tendría que tener la función que limita el área.
I: ¿Por qué piensa que debe aplicar la integral para ajustar esas cotas?
A7: Porque es que la integral de Riemann es un proceso de límite.
(A7E1).

Este alumno está usando el elemento matemático **ACA** de forma **G**, porque utiliza triángulos, rectángulos y trapecios para aproximar el área, y de forma **A**, porque utiliza las fórmulas del triángulo, rectángulo y trapecio para ajustar el área; pero también menciona particiones y el elemento matemático **LID** como una forma precisa de calcular el área.

De forma global, en la resolución de la tarea el estudiante establece una conjunción lógica entre los elementos matemáticos **ACA**, **LID y TFV** de forma **G** y **A** para ajustar el área, porque utiliza diferentes formas de aproximación por defecto y por exceso, utiliza una partición del intervalo y varias construcciones gráficas, muestra sus conocimientos previos para encontrar una función y plantear el cálculo de la integral como otra forma de aproximación del área.

Otro hecho significativo es el del alumno **A1** cuando responde la tarea utilizando un nuevo elemento matemático **TFV** de forma **A.** Lo que se evidencia a continuación es la relación que establece, asumiendo que el área bajo la curva siempre es mayor que la de un rectángulo inferior y menor que la de uno superior. Se trata de que el estudiante ajuste más las cotas y las justifique, entonces veamos cómo lo hace de forma **A**:

I: ¿De dónde obtiene el valor de 4?
A1: Cuando la función toma el valor de $f(4)$*, aplicándole el valor medio para integrales* (lo indica en la grafica del cuestionario)…
I: ¿Cómo toma ese valor medio?
A1: Porque la función está entre 0 *y* 8*, entonces saqué el valor promedio* (se refiere a la mitad entre 0 y 8).
I: ¿Para qué le sirve ese valor?
A1: Con base en ese valor del punto medio y la longitud de la medida del segmento del intervalo puedo aplicarle el valor medio para integrales y así puedo hallar el área de la región.
(A1E1).

$$AR = 4(9-3) = 24$$

A1, resolución A de la tarea 1 del cuestionario

En el protocolo se infiere que el estudiante utiliza el elemento matemático **TFV** de forma **G** y **A** pero erróneamente, cuando usa el punto medio de la altura y lo multiplica por la diferencia de los extremos de la longitud de la base; puesto que el teorema de valor medio del cálculo integral no dice como calcular ese punto, simplemente afirma su existencia.

Este estudiante utiliza los elementos matemáticos **ACA** y **TFV,** en los sistemas de representación **G** y **A** respectivamente. Utiliza el elemento matemático el **ACA**, usando un rectángulo inferior y uno superior, calcula el área de cada uno de los rectángulos y establece comparaciones y, a partir de la misma gráfica, aplica el elemento matemático

TFV de forma errónea para integrales, estableciendo así una relación del área que hay entre el rectángulo inscrito y el circunscrito.

3.10.2.3. Tercera fase.

En esta **fase 3 se analizó de forma global, cómo un mismo estudiante ha resuelto todas las tareas** a lo largo del cuestionario, las ha justificado en la entrevista y cómo ha representado el concepto de Integral Definida en el mapa conceptual para asignar a cada alumno un cierto nivel de desarrollo del esquema. Esta fase nos permitió centrarnos en el tipo de relaciones que establece, entre qué elementos matemáticos las establece y si relaciona las diferentes formas de representación.

A partir de este análisis pudimos observar en conjunto el nivel de desarrollo del esquema del concepto de Integral Definida de cada estudiante, ya que el análisis se hizo uno a uno y nos permitió ver cómo se va produciendo una transición de un nivel a otro. Sólo al final de esta fase podemos establecer el nivel de desarrollo del esquema de Integral Definida que alcanza un estudiante por el uso que hace de los elementos matemáticos que configuran dicho concepto matemático y según las relaciones que establece entre los modos de representación **G, A** y **AN**. Estos resultados se presentan en el próximo capítulo.

CAPITULO 4

Capítulo 4. RESULTADOS

En este capítulo comenzamos presentando el análisis de cada uno de los alumnos organizados por niveles de desarrollo del esquema del concepto de Integral Definida, según las relaciones lógicas que establecen entre los elementos matemáticos que utilizan en la resolución de las distintas tareas del cuestionario y la coordinación que establecen entre los sistemas de representación gráfico, algebraico y analítico. Estas descripciones surgen no sólo de las respuestas al cuestionario, sino de los protocolos de las entrevistas, y de la representación en un mapa conceptual de dicho concepto matemático. Así se ha tratado de caracterizar, de forma descriptiva y explicativa dichos niveles de desarrollo del esquema del concepto de Integral Definida.

4.1. Análisis de cada uno de los alumnos

Las fases del análisis, descritas en el capítulo anterior, nos permitieron encontrar evidencias de cómo utilizan los estudiantes los elementos matemáticos relativos a la Integral Definida; algunos los recuerdan como producto de una instrucción previa, pero no saben utilizarlos en el desarrollo de las tareas o, cuando los utilizan, lo hacen con errores, porque demuestran que no tienen encapsulado el concepto de Integral Definida como un objeto matemático; otros, a pesar de establecer un intento de conjunción lógica, no lograron concluir la resolución de algunas tareas y no establecen una síntesis entre los diferentes sistemas de representación; un grupo mayoritario de estudiantes logró establecer con alguna dificultad la conjunción lógica y/o la condicional y conseguir una síntesis entre los sistemas de representación, de forma **G** y **A**; encontramos un grupo que establece parcialmente algunas relaciones lógicas (conjunción, condicional) entre los elementos matemáticos implícitos necesarios en la resolución de la tarea y establece parcialmente una síntesis entre los sistemas de representación **G, A y AN;** y, finalmente, hay sólo un alumno que alcanza un nivel más avanzado de desarrollo del esquema.

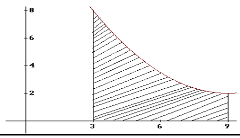
Cada una de las tareas del cuestionario estaba diseñada para que los alumnos pudieran establecer relaciones lógicas entre los elementos matemáticos utilizando diferentes formas de representación **G, A y AN** para mostrar, de esta forma, el desarrollo del esquema del concepto de Integral Definida y poder organizarlos en niveles. Como se ha comentado en el capítulo anterior, los niveles de desarrollo están caracterizados adaptando la descripción de Sánchez-Matamoros (2004) para el caso de la Integral Definida.

4.1.1. Nivel intra 1

Este subnivel de desarrollo del esquema se caracteriza porque los alumnos no son capaces de establecer ninguna relación lógica entre los elementos matemáticos, recuerdan los elementos matemáticos de memoria y se muestran incapaces de utilizarlos en la resolución de las tareas, utilizan elementos matemáticos sólo en las formas de representación **G** y **A** mostrando algunas concepciones erróneas y resuelven algunas tareas de forma incorrecta.

Entre los alumnos con los que se ha realizado este estudio, A5 **no es capaz de establecer relaciones lógicas entre los elementos matemáticos,** es decir utiliza algunos elementos matemáticos de forma aislada**.** Por ejemplo en la tarea 1.

El área de la región rayada es mayor que **12** y menor que **48**.
a. ¿Por qué?
b. ¿Puede dar valores más ajustados?
c. ¿Cuáles?
d. ¿Cómo los obtiene?

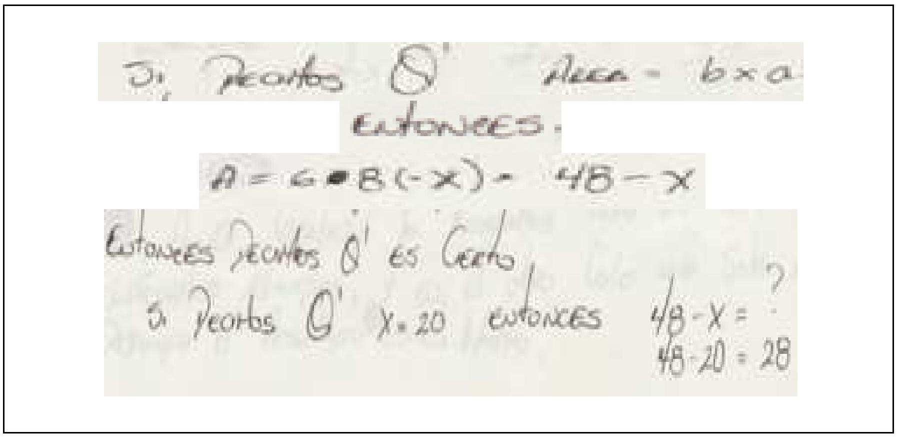


Representa gráficamente la función y realiza una aproximación gráfica por exceso y por defecto del área bajo la curva.

A5, representación G de la tarea 1 del cuestionario

Está utilizando el elemento matemático **ACA** de forma **G**, porque forma un rectángulo, traza su diagonal para formar dos triángulos rectángulos, uno de ellos cubre parte del área sombreada, y sobre la hipotenusa de éste traza otro triángulo, tratando de cubrir el resto del área sombreada.

Para dar la aproximación del área de forma **A** calcula el área del rectángulo y luego da una aproximación restando cierta cantidad que él considera adecuada.



A5, resolución A de la tarea 1 del cuestionario

Está utilizando el elemento matemático **ACA** de forma **A** porque parte de la fórmula del área del rectángulo para calcular su área, llama *x* a la región que está por encima de la sombreada, le da por tanteo el valor de 20 y calcula el valor aproximado del área bajo la gráfica como 28 unidades cuadradas.

Durante la entrevista reconoce que no es capaz de hacerlo de otra manera:

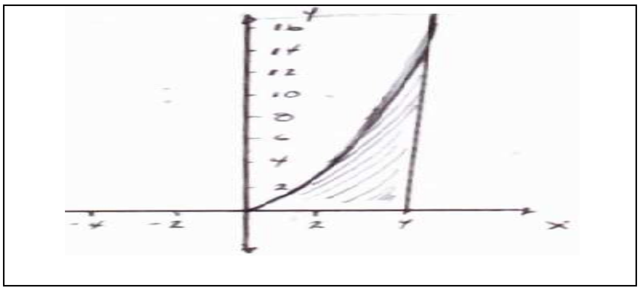
A5: Decimos que el área es igual a base por altura, entonces armamos el cuadro y tratamos de hacer una línea para hallar el área.
I: ¿Por qué le resta x?
A5: Porque, no sabemos cuánto vale el área que tenemos en blanco, con la que formamos el cuadro, para hallar los otros valores.
I: ¿Por qué justifica las cotas de esa forma?
A5: No, son valores que uno le da como para hacerlos.
I: ¿Existe otra forma de ajustar las cotas?
A5: Posiblemente por sumatorias de Riemann, pero no sé.
I: ¿Cómo sería por una sumatoria de Riemann?
A5: No, tocaría hallarle el área a cada uno, pero no, eso es complicado, pero sinceramente en este momento no me acuerdo.
(A5E5).

Aunque en este extracto menciona un cuadro, en realidad se está refiriendo al rectángulo que ha construido de forma gráfica de base 6 unidades y de altura 8 unidades. Como puede notarse el estudiante no utiliza ni el triángulo, ni el trapecio que trazó sobre la región sombreada para aproximar y, cuando se le pregunta por otras formas de aproximación, recuerda el elemento matemático de las sumas de Riemann, pero no es capaz ni siquiera de plantearlas.

Además en la tarea 3:

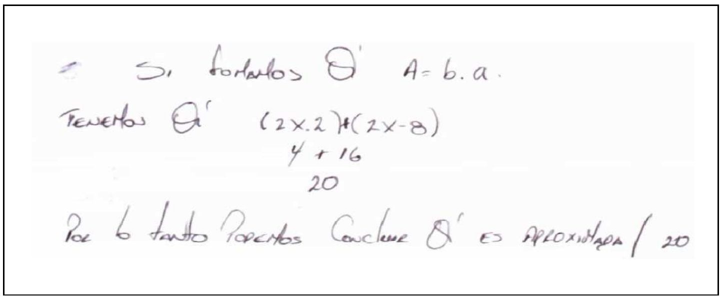
Sea R la región entre la gráfica de la función $f(x)=x^2$ y el Intervalo [0,4] -Utiliza particiones para aproximar el valor del área de la región R. -Justifica tu respuesta.

Este alumno representa de forma **G** la función:



A5, representación G de la tarea 3 del cuestionario

Aunque hay un intento de utilizar el elemento matemático **ACA** de forma **G** porque dibuja la función, no logra hacer ningún tipo de aproximación utilizando éste elemento matemático. Recurre a un cálculo algebraico **A** utilizando el elemento matemático **ACA**, para obtener unos valores aproximados.



A5, resolución A de la tarea 3 del cuestionario

Para ello, subdivide el intervalo en dos subintervalos de longitud de la base 2 unidades cada uno y, para cada uno de ellos, calcula el área aplicando la fórmula del área de un rectángulo, uno de ellos de altura 2 y otro de altura 8. No hay coordinación entre los cálculos algebraicos y la representación gráfica puesto que las alturas no se corresponden con ninguna figura geométrica que haya representado en la gráfica y tampoco se corresponden con los puntos por los que pasa la curva.

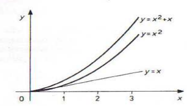
Durante la entrevista, cuando se le pregunta por los cálculos que realizó en el cuestionario, no es capaz de establecer un razonamiento lógico que los justifique.

I: ¿La expresión 2×2 *de dónde la obtiene?*
A5: Porque ésta es la base que sería…
I: ¿Qué quiere decir con que ésta es la base?
A5: Que queremos hallar el área y necesitamos saber cuál es la base de la figura que nos dan, entonces decimos que 2×2.
I: ¿De dónde obtiene $2\times 2+2\times 8$*? ¿De dónde obtuvo ésta expresión?*
A5: Tiene que ser de la figura.
I: ¿Cómo de la figura, cómo la obtuvo, de dónde la sacó, qué haría en este momento?
A5: No, no me acuerdo profe.
(A5E3).

Se pone de manifiesto que utiliza los conocimientos que tiene para graficar la función cuadrática, recuerda la fórmula del área del rectángulo y utiliza un cálculo numérico para aproximar el área, pero no lo sabe justificar y no coordina los sistemas gráficos y algebraicos, por lo que podemos inferir que este alumno sólo menciona algunos elementos matemáticos de manera aislada sin coordinar los diferentes sistemas de representación.

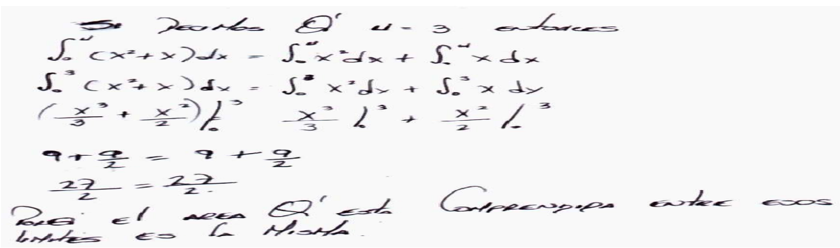
Para resolver la tarea 6:

Dada la gráfica de estas funciones, explicar en términos del gráfico, por qué



$$\int_0^a \left(x^2+x\right)dx=\int_0^a x^2dx+\int_0^a xdx.$$

Utiliza un procedimiento exclusivamente algebraico, a pesar de que la tarea dice que se explique la propiedad en términos gráficos.



Si decimos Q' a = 3 entonces

$\int_0^a (x^2+x)dx = \int_0^a x^2dx + \int_0^a x\,dx$

$\int_0^3 (x^2+x)dx = \int_0^3 x^2dy + \int_0^3 x\,dy$

$\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^3 \quad \frac{x^3}{3}\Big|_0^3 + \frac{x^2}{2}\Big|_0^3$

$9+\frac{9}{2} = 9+\frac{9}{2}$

$\frac{27}{2} = \frac{27}{2}.$

Porque el area Q' esta comprendida entre esos limites es la misma.

A5, resolución A de la tarea 6 del cuestionario

Por la forma como responde se pone de manifiesto que utiliza el elemento matemático **TFV** de forma **A** porque utiliza, para demostrar la propiedad de linealidad, el cálculo de la integral en el intervalo [0, 3] mediante la regla de Barrow a ambos lados de la igualdad. Se limita a desarrollar las integrales propuestas en el ejercicio, y como no es capaz de hacerlo cuando uno de los límites del intervalo de integración viene dado por una letra (a), la sustituye por un número que relaciona con la gráfica (ya que 3 es el último número que aparece en la escala del eje de abscisas) y comprueba que numéricamente obtiene el mismo resultado a ambos lados de la igualdad. Durante la entrevista él mismo señala que no es capaz de justificar la propiedad de forma **G**.

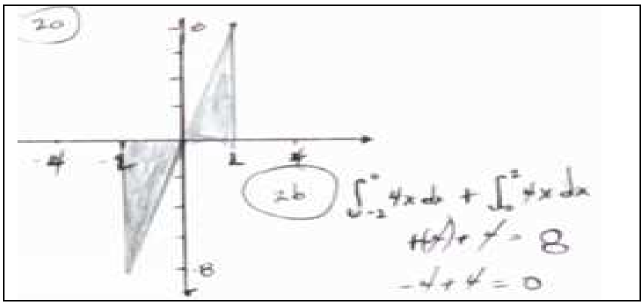
I: ¿Podría explicarme que quiere decir con este razonamiento?
A5: Aquí, nos dan las integrales en unos intervalos, pero el intervalo superior está limitado por u*, entonces reemplazamos.*
I: Es de cero a a*, todos tienen el mismo intervalo de cero a* a*.*
A5: Lo tomé como u*, porque no se ve bien, entonces le damos un valor más o menos aproximado a la gráfica y lo resolvemos.*
I: ¿Podría demostrarlo gráficamente?
A5: No
(A5E6).

Por alguna deficiencia en las fotocopias, no es capaz de distinguir el extremo superior del intervalo de integración (a) al que cambió la denominación y lo llamó u y, como no puede manejar la integral como un objeto, le da un valor numérico a esta variable y luego calcula las integrales que constituyen la propiedad para demostrarla, obteniendo una igualdad numérica; no logra utilizar los elementos matemáticos necesarios para demostrar la propiedad de la unión de intervalos de forma **G**.

Otra característica de este nivel consiste en **recordar algún elemento matemático a lo largo de todo el cuestionario, vinculado sólo a un sistema de representación, gráfico, algebraico o analítico.** Esto se pone de manifiesto en la manera que tiene este alumno de resolver, por ejemplo, la tarea 2:

Sea **R**, la región encerrada por el gráfico de la función $f(x)=4x$ y el eje x, en el intervalo $[-2,\ 2]$. a. Dibujar la gráfica. b. Calcular gráficamente el área de la región R. c. Calcular la $\int_{-2}^{2} 4x\ dx$ d. ¿Son iguales los dos resultados anteriores? Justificar cada paso.

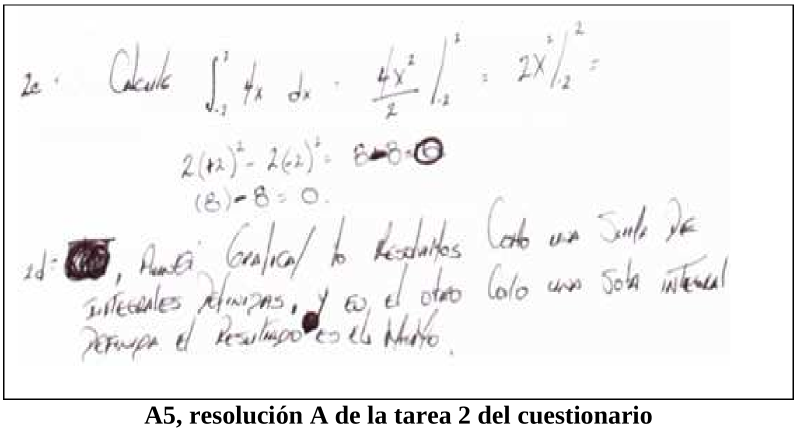
Para calcular el área, en el cuestionario recurre al elemento matemático **LID** de forma **A:**



A5, representación G y A de la tarea 2 del cuestionario

Para ello dibuja la función correctamente, pero no es capaz de utilizar **ACA** para calcular el área de forma **G** ni **A** y utiliza **TFV** como un cálculo algebraico y de forma incorrecta porque aplica mal la regla de Barrow y no se da cuenta que el valor del área no puede ser cero.

Cuando calcula la integral lo hace de forma **A.**



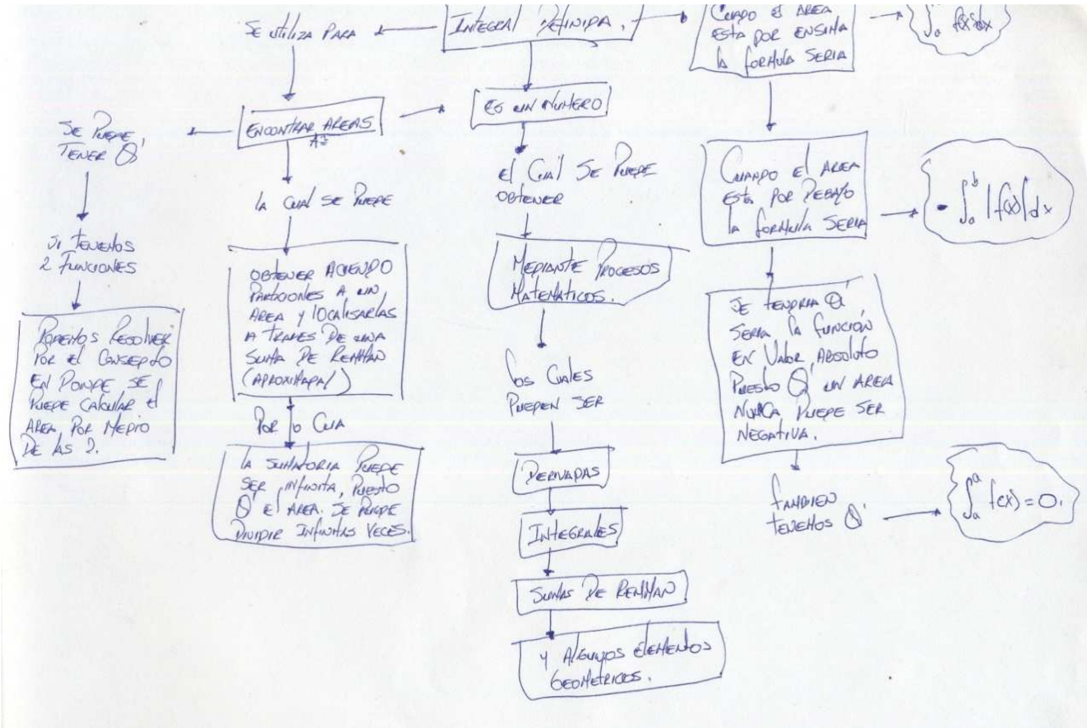
A5, resolución A de la tarea 2 del cuestionario

Aplica el elemento matemático **TFV** utilizando la regla de Barrow y cómo no fue capaz de utilizar **LID** como área de una región obtiene el mismo resultado anterior, entonces identifica la Integral Definida con la Integral como área de una región:

I: ¿Cómo calculó el área gráficamente?
A5: Por eso, por una integral.
I: ¿Qué le piden aplicar la integral o calcular gráficamente?
A5: No, aplicar gráficamente, hallar el área de éste triángulo y restarle éste.
I: ¿Cómo sería?
A5: Con la Integral Definida.
I: ¿El área de un triángulo se haya con la Integral Definida?
A5: No, no me acuerdo, porque es que aquí me dice calcular gráficamente la región.
I: ¿Qué valor obtuvo al calcular la integral?
A5: Supuestamente cero.
I: ¿Por qué da cero la integral?
A5: Porque al evaluarlo primero en la parte superior y en la inferior me daría cero.
I: ¿Un área puede dar cero?
A5: No...
I: ¿Cómo calcularía el área?
A5: No, no me acuerdo profe.
(A5E2).

En el extracto de la entrevista se pone de manifiesto que no es capaz de aplicar el elemento matemático **ACA** y utiliza el elemento matemático **TFV**. Es evidente que el estudiante tiene dificultad con el elemento **ACA** de forma **G** y aunque asocia el cálculo del área con elemento matemático **LID,** la calcula de forma **A** y obtiene como resultado cero, pero a pesar de esto es consciente que el área no puede ser cero y ésta situación le genera un conflicto.

En este mismo sentido, para confrontar la información anterior mostramos a continuación el mapa conceptual que realizó este alumno para representar la imagen que tiene del concepto de Integral Definida, en la cual se pone en evidencia, igual que lo hizo tanto en el cuestionario como en la entrevista, que también recuerda sólo algunos elementos matemáticos en los sistemas de representación **G** y/o **A**.



A5, mapa conceptual que representa el concepto de Integral Definida

En este mapa conceptual recuerda los elementos matemáticos **ACA, LID** y **PID** de forma **G** y **A;** pero no menciona los elementos **TFV**, ni tampoco **ALS,** este último elemento tampoco lo aplicó ni lo mencionó en la resolución de las tareas del cuestionario y durante la entrevista y. comprobamos que aunque es capaz de mencionar algunos elementos matemáticos, cuando tiene que utilizarlos en la resolución de las tareas no sabe cómo hacerlo, porque los recuerda de memoria producto de la instrucción previa.

Además, este alumno **recuerda algunos elementos matemáticos con errores** en las tareas 4, 5, 7c y 8. Sus errores están relacionados con cálculos incorrectos (relacionados con los signos que se obtienen al aplicar la regla de Barrow), el desconocimiento de la función valor absoluto, el cálculo incorrecto de la primitiva de alguna función, su falta de capacidad en el manejo del registro gráfico o el desconocimiento de las condiciones para aplicar la regla de Barrow y concepciones erróneas de la Integral Definida y de las sumas de Riemann.

Así en la tarea 4

Calcular el área limitada por la gráfica de la función $f(x) = \lvert 2x-1 \rvert$, en el intervalo $[0, 2]$ y el eje x. Justificar la respuesta.

El alumno no realizó ninguna gráfica de la función por lo que responde de forma exclusivamente **A** en el cuestionario:

$$\int_0^2 |2x-1|dx = \left|\frac{2x^2}{2}\right|_0^2 = |x^2|_0^2 = 4$$

A5, resolución A de la tarea 4 del cuestionario

En esa respuesta se puede observar que el alumno, por un lado no tiene en cuenta que la función que está integrando es la función valor absoluto y prescinde de dicho valor absoluto, y por otra parte, la primitiva asociada a esa función no es correcta, sólo ha integrado una parte de la función, no ha tenido en cuenta el -1 de la función. Los errores están asociados tanto a su desconocimiento de la función valor absoluto como a la aplicación de la regla de Barrow.

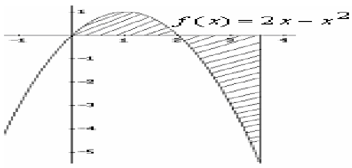
Además, como no ha representado gráficamente la función, no tiene otros recursos para calcular el área que se le pide y, en la entrevista, no es capaz de desarrollar una justificación a los cálculos que hace:

I: ¿Considera qué esa función está bien integrada?
A5: Pues no se profe, en este momento no se, pues yo la hice así pero…
I: ¿Si le piden calcular el área, por qué aplicó la integral?
A5: ¿Si me piden calcular el área?
I: Si le piden calcular el área de una función valor absoluto ¿Por qué aplica la integral de esa función?
A5: Porque con ella también la puedo hallar.
(A5E4).

Al igual que hizo en la tarea 2, este alumno demuestra que cuando se le pide el cálculo de un área inmediatamente lo asocia con la Integral Definida sin darse cuenta que podría haber formas más sencillas para calcular esas áreas, como cuando el área formada es simplemente un triángulo.

También comete algunos errores en la resolución de la tarea 5 cuando tiene que utilizar las propiedades de la integral definida de funciones positivas y negativas.

Dada la gráfica de $f(x) = 2x - x^2$, calcular por aproximaciones el área de la región rayada. Justificar el procedimiento utilizado.



Para responder a esta tarea, el alumno no calcula ninguna aproximación sino que se limita a aplicar la regla de Barrow.

$$\int_0^2 2x - x^2\,dx - \int_2^4 2x - x^2\,dx$$
$$\int_0^2 2x - x^2\,dx - \int_2^4 2x - x^2\,dx$$
$$x^2 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 - x^2 - \frac{x^3}{3}\Big|_2^4$$
$$4 - \frac{8}{3} - \left[4 - \frac{8}{3} - \left(16 - \frac{64}{3}\right)\right]$$
$$\frac{4}{3} - \left[\frac{4}{3} - \frac{48 - 64}{3}\right]$$
$$\frac{4}{3} - \left[\frac{4}{3} + \frac{12}{3}\right]$$
$$\frac{4}{3} - \left[\frac{16}{3}\right]$$
$$\frac{4}{3} - \frac{16}{3} = -\frac{12}{3}$$

A5, resolución A de la tarea 5 del cuestionario

Por la forma como responde pone de manifiesto que utiliza el elemento matemático **TFV** (concretamente la regla de Barrow) para realizar un cálculo algebraico que le da como resultado un número negativo que no puede ser el área geométrica de la región. Este alumno no ha aplicado correctamente la regla de Barrow al sustituir en los extremos de los intervalos de integración, no ha utilizado el signo negativo correctamente y por eso el resultado le da negativo. Además no utilizó el paréntesis necesario para indicar cuál era la función que estaba en el integrando en cada integral y supuso que el extremo derecho del segundo intervalo de integración era 4 cuando en la gráfica se indica el 3,5.

Durante la entrevista menciona la propiedad del cálculo de áreas de funciones no estrictamente positivas.

> *A5: …hay una fórmula que dice que cuando uno tiene dos áreas hay que mirar la que está por arriba y la que está por debajo, entonces se tiene la que está por arriba y se le resta la que está por debajo y se evalúa en los intervalos dados.*
> *I: ¿Por qué se resta?*
> *A5: Porque está por debajo, si no estoy mal, es porque está por debajo.*
> *I: ¿Siempre que esté por debajo se resta? ¿Cuál es ese criterio?*
> *A5: ¿Cuál es el criterio? No.*
> *I: ¿De qué forma podría aproximar el área?*
> *A5:¿De qué otra forma lo puedo hacer? Pues con particiones, con una suma de Riemann, pero no.*
> *I: ¿Cómo sería con particiones? ¿Podría comentarlo?*
> *A5: (El estudiante se ríe), los divide en rectángulos y empieza hallar el área.*
> **(A5E5).**

En el extracto se pone de manifiesto que menciona una relación entre los elementos matemáticos **ACA** y **TFV**; pero, por un lado no es capaz de dar una aproximación del área utilizando el elemento matemático **ACA** de forma **G** ni **A** y, por otro, cuando calcula el área usando la regla de Barrow lo hace de forma errónea al confundirse con los signos.

También comete errores cuando trata de resolver la tarea 7c.

Considerar el valor de verdad o de falsedad de la afirmación $\int_{-1}^{1} x^{-2}\,dx = \left[-x^{-1}\right]_{-1}^{1} = (-1) - 1 = -2$ y en caso de ser falsa, explicar por qué o dar un contraejemplo.

En el cuestionario responde de forma exclusivamente algebraica mediante el siguiente razonamiento.

$$\int_{-1}^{1} x^{-2} dx = \left(-x^{-1}\right) \Big|_{-1}^{1} = -\frac{1}{x^{1}} = 2$$

A5, resolución A de la tarea 7c del cuestionario

El procedimiento algebraico que utiliza para resolver la tarea pone de manifiesto que desconoce las condiciones necesarias para poder aplicar la regla de Barrow, porque encuentra la primitiva de la función y la evalúa en los límites de integración, no se da cuenta que la función tiene una discontinuidad en un punto del intervalo; es decir, desconoce las condiciones para poder aplicar ciertos elementos matemáticos que debe utilizar para justificar el valor de verdad/falsedad de la proposición.

En la entrevista insiste en que el procedimiento de solución es correcto aunque la solución final no sea igual a la que él obtuvo:

> *I: ¿Qué valor le dio a la proposición 7c y por qué?*
> *A5: Dicen que va de -1 a 1, dije que era falsa.*
> *I: ¿Por qué la considera falsa?*
> *A5: Porque la resolví, no sé, si está bien, me dio lo contrario, un número contrario a la respuesta anterior que nos dan.*
> *I: ¿Qué aplicaron ahí, para resolver esa integral?*
> *A5: En lo que hemos visto, en la integral, se integra la función, la evaluamos en los intervalos, que es -1 y 1 y solucionamos.*
> *I: ¿Está de acuerdo con el procedimiento más no con la respuesta?*
> *A5: No, la respuesta supuestamente es falsa, porque me dio lo contrario es por el procedimiento.*
> **(A5E7C).**

Asocia el concepto de Integral Definida con un algoritmo para calcularla sin tener en cuenta las condiciones para poder aplicarlo y por eso considera válido el procedimiento, pero la solución final no es igual a la suya porque comete un error en el signo de la respuesta, al ser sus cálculos numéricos incorrectos, y por tanto piensa que la afirmación es falsa por esa diferencia en el signo.

En esta otra situación (tarea 8) demuestra que recuerda elementos matemáticos con errores en:

¿Cuál es el significado matemático de la Integral Definida de la función $y=f(x)$ en un intervalo $[a,b]$?

El estudiante responde utilizando los argumentos siguientes:

I: ¿Cómo le explicaría a un compañero el significado de la Integral Definida?

A5: Dice que el significado matemático, es que la Integral Definida es un límite y donde el intervalo digámoslo $[a,b]$ *está dividido en subintervalos infinitos, los cuales al sumarse en una suma de Riemann nos va a dar un valor numérico.*
I: ¿Qué quiere decir en una suma de Riemann y un intervalo infinito?
A5: Una suma de Riemann, es por ejemplo las particiones, o sea, la integral es un número y la suma de Riemann son las particiones que yo puedo hacerle a ese intervalo y sumarlo infinitas veces.
(A5E8).

En el protocolo se pone de manifiesto que el estudiante recuerda el elemento matemático **ACA** cuando menciona las particiones de un intervalo en subintervalos pero lo hace de forma errónea puesto que asocia la subdivisión del intervalo directamente con las sumas de Riemann sin tener en cuenta la función y. además, en lugar de considerar infinitos subintervalos habla de subintervalos infinitos. Esta puede ser la razón por la que este estudiante no sabe utilizar los elementos matemáticos en la resolución de las tareas del cuestionario.

De manera global, por la forma como resolvió las tareas a lo largo de todo el cuestionario, el modo de justificar las respuestas en la entrevista y la comprensión del concepto de Integral Definida que refleja en el mapa conceptual, podemos afirmar que el estudiante recuerda los elementos matemáticos que constituyen el concepto de Integral Definida de memoria y con dificultades, porque los menciona pero no es capaz de aplicarlos en la resolución de las tareas y, cuando intenta utilizarlos, además de hacerlo de forma inconexa, muestra concepciones erróneas. No es capaz de manejar el registro **G** y en el registro **A** comete muchos errores. Por todo lo anterior, consideramos que se encuentra en el nivel **Intra 1,** de desarrollo del esquema del concepto de Integral Definida.

En la tabla siguiente se presentan las relaciones lógicas que establece, los elementos matemáticos que usa y los sistemas de representación que pone en juego a lo largo de la investigación aunque lo haga con errores y que pueden caracterizar el desarrollo del esquema de la Integral Definida en el nivel **Intra 1.**

<table>
<tr><th>NIVEL</th><th>CARACTERÍSTCAS</th><th>ELEMENTOS MATEMÁTICOS</th><th>SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN</th></tr>
<tr><td>INTRA 1</td><td>No establecer relaciones lógicas entre los elementos matemáticos.

Recordar sólo algún elemento matemático a lo largo de todo el cuestionario, vinculado sólo a un sistema de representación, gráfico, algebraico o analítico.

Recordar elementos matemáticos con errores.</td><td>El área como aproximación: (G, A)
-Aproximación del área de una región plana.
-Fórmula del área del rectángulo.
-Fórmula del área del triángulo.
-Partición del intervalo.
-Sumas de Riemann.
El área como límite de una suma:(AN)
-El límite de las sumas.
La Integral Definida: (A)
-La definición analítica de integral definida.
-La integral definida como área de una región.
- La integral definida como cálculo algebraico
-La integral de funciones positivas y negativas.
-Propiedades de la integral definida de funciones positivas y negativas.
Propiedades de la Integral Definida:(A)
-Integrales especiales.
-De linealidad.
Teoremas fundamentales:(A)
-Regla de Barrow.</td><td>Gráfico
Algebraico
Analítico</td></tr>
</table>

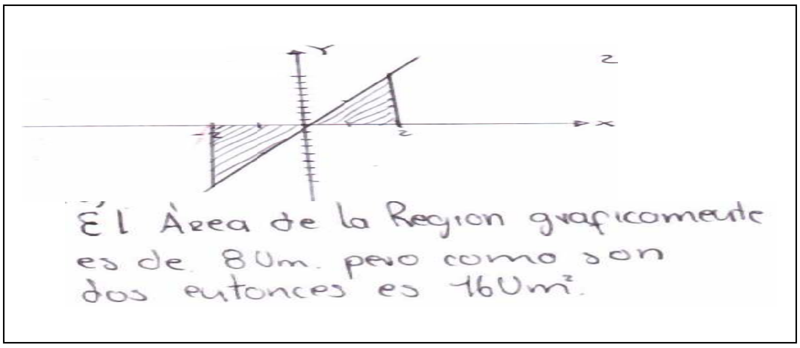
Tabla 4.1. Relaciones lógicas, elementos matemáticos y sistemas de representación que caracterizan los niveles de desarrollo del esquema de integral definida en A5

4.1.2. Nivel intra

En este nivel, los alumnos suelen utilizar algún intento de conjunción lógica entre elementos matemáticos, recordar elementos matemáticos inconexos de forma aislada y utilizarlos en la resolución de las tareas y no tener sintetizados los modos de representación especialmente el **AN**. Por ejemplo la alumna **A4 muestra dificultades para establecer relaciones lógicas (conjunción lógica) entre elementos matemáticos. (Intento de relación "conjunción lógica")**, es decir, trata de establecer una **conjunción lógica** entre ciertos elementos matemáticos pero, a pesar de los intentos, no lo logra y no resuelve correctamente la tarea. Así, en la tarea 2:

Sea **R**, la región encerrada por el gráfico de la función $f(x)=4x$ y el eje x, en el intervalo $[-2, 2]$. a. Dibujar la gráfica. b. Calcular gráficamente el área de la región R. c. Calcular la $\int_{-2}^{2} 4x\, dx$. d. ¿Son iguales los dos resultados anteriores? Justificar cada paso.

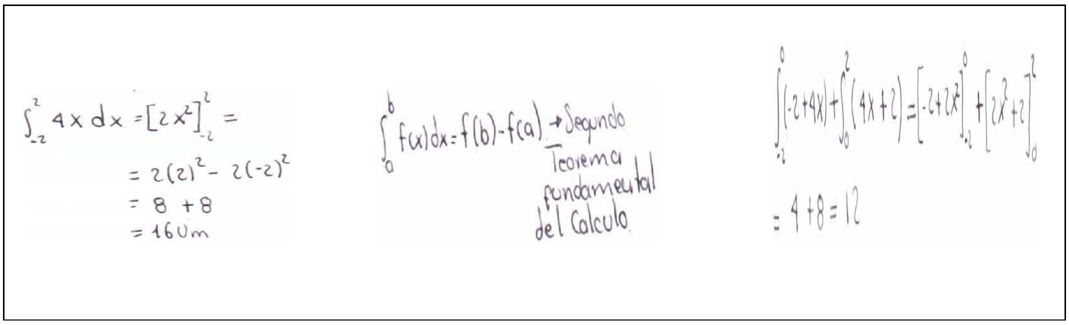
Esta alumna representa gráficamente la función y utiliza esta representación para calcular gráficamente el área que se le pide.



A4, representación G de la tarea 2 del cuestionario

Ha utilizado el elemento matemático **ACA** de forma **G**, porque traza la gráfica de la función, forma dos triángulos rectángulos simétricos, uno sobre el eje x y el otro bajo el eje x, calcula el área de un triángulo y como los triángulos son iguales la duplica y obtiene el área total.

Cuando se le plantea calcular la integral, esto es lo que hace:



A4, resolución A de la tarea 2 del cuestionario

Utiliza el elemento matemático **TFV** de forma **A,** aunque como sus cálculos son incorrectos al cambiar el signo menos (-) por un signo más obtiene el mismo resultado que le dio el área gráficamente, justifica el procedimiento afirmando que aplica el elemento matemático **TFV** y luego hace otro cálculo de la integral de forma errónea aplicando el elemento **LID,** concretamente la integración de funciones positivas y negativas, porque lo que hace esta alumna es sumar incorrectamente a cada integrando los extremos del intervalo $[-2, 2]$ de integración.

En el protocolo explica cómo resolvió la tarea, indicando que lo primero que hizo fue representar gráficamente la función mostrando que tiene una concepción proceso de la función lineal, puesto que aunque sí sabe que la gráfica es una recta, para poder representarla tiene que ir dando valores a la función, cuando la expresión algebraica le podría haber bastado para poder representarla.

A4:…..le di valores a la x, para poder hallar la recta y dibujarla….
I: ¿Qué figuras se formaron bajo la línea recta?
A4: Triángulos rectángulos.
I: ¿Cómo ha calculado el área gráficamente?
A4: El área del triángulo es base por altura sobre 2, luego tengo de base 2 y de altura 8, entonces dos por ocho 16 y dividido entre 2, ocho. Como tengo otra figura igual, es sólo multiplicar por 2 y obtengo las 16 unidades de medida cuadrada.
I: ¿El área que está bajo el eje OX es igual que la que está por encima del eje OX?
A4: No, porque es igual pero con signo contrario.
I: ¿Cómo son las áreas entonces?
A4: Las áreas deben ser siempre positivas.
(A4E2).

Demuestra que es capaz de calcular correctamente el área de forma **G** a partir del área de dos triángulos rectángulos de los que conoce fácilmente sus dimensiones pero, cuando se le pregunta si el área que está por encima del eje OX es igual al área que está por debajo del eje OX son iguales, se contradice porque dice que son iguales pero de signo contrario y afirma que las áreas deben ser positivas.

I: ¿Cómo ha calculado la integral?
A4: Así como le explique, calculé la $\int_{-2}^{2} 4x\,dx$ *y la resolví integrando normal, evaluando en estos 2 puntos y teniendo en cuenta el teorema* (hace referencia al cuestionario).
I: ¿Cuánto dio el valor de esa integral?
A4: Me dio 16
(A4E2).

En cuanto al cálculo de la integral, aunque está planteada correctamente, al final se confunde con un signo y le da un resultado erróneo. En cierto momento de la entrevista se da cuenta del error que ha cometido:

I: ¿Está segura que ese valor es correcto?
A4: No.
I: ¿Por qué?
A4: Porque, cuando le doy el valor de $f(b)-f(a)$, $f(b)$ *seria 2 y al reemplazarlo* 2^2 *es 4 por 2 ocho, menos el* $f(a)$ *seria -2. y* -2^2 *4 positivo por -2 menos 8, entonces ahí se me cancela o sea me daría* 0 *y un área no puede dar* 0.
(A4E2).

Y finalmente, calcula correctamente el valor de la integral afirmando que el resultado debe ser cero, esto le plantea cierto conflicto que le hace dudar de la solución correcta:

I: ¿Qué le piden calcular el área o calcular la integral?
A4: Me piden calcular la integral.
I: ¿Está de acuerdo con lo que hizo y por qué?
A4: Pues de acuerdo no, porque me equivoque acá.
I: ¿Cuál sería el valor correcto?
A4: Cero.
(A4E2).

Cuando se le pregunta por la diferencia entre la Integral Definida y el área señala:

I: ¿Significan lo mismo el área y la integral definida?
A4: No.
I: ¿Por qué?
A4: La integral definida es el proceso limite de una suma de Riemann.
I: ¿Qué es el área?
A4: El área es la integral definida entre un intervalo cerrado $[a\ ,b]$ *de la función evaluada en este intervalo.*
(A4E2).

Esto demuestra que, aunque reconoce que son diferentes, no sabe identificar correctamente por qué lo son, es decir, es capaz de mencionar varios elementos matemáticos como **ACA y LID** de manera aislada, pero no es capaz de relacionarlos. Además recurre a ciertos elementos matemáticos que no son suficientes para sacarla de la confusión:

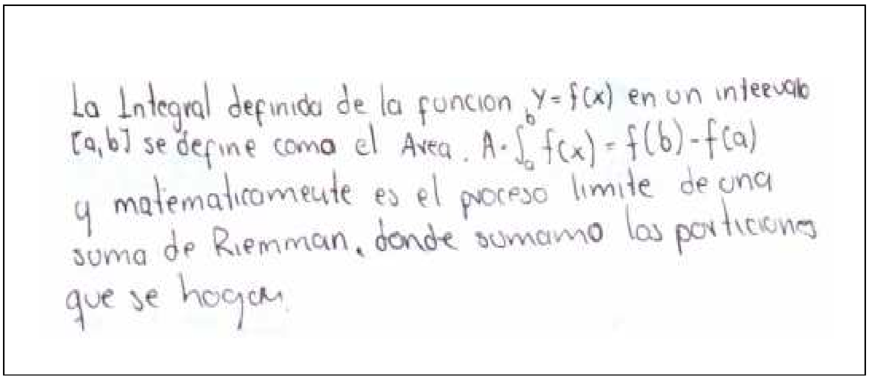
I: ¿Cómo son los dos resultados?
A4: Diferentes.
I: ¿Por qué son diferentes?
A4: Porque la tome negativa y a mí no me importó que estuviera debajo del eje x.
I: ¿El área es negativa o es positiva?
A4: Es que ya entre en duda ya me puso a pensar más (se ríe).
I: ¿Cómo debe ser un área?
A4: Positiva.
I: ¿Qué puede concluir de los resultados obtenidos?
A4: Que es muy diferente calcular la integral y hallar el área gráficamente.
I: ¿Por qué?
A4: Porque acá sé que la integral de una función debe ser continua y si es continua en ese intervalo es integrable.
(A4E2).

Como se puede ver en el extracto anterior, se da cuenta de que el área y la Integral Definida son cosas distintas pero esto lo intenta relacionar con la condición suficiente de que la continuidad implica integrabilidad sin que explique por qué esto marca la diferencia entre esas dos cosas. No ha sido capaz de relacionar los elementos matemáticos **PID** con **LID**, lo que le habría permitido diferenciar entre el área y la integral definida, y en cambio menciona otros elementos matemáticos que no le permiten salir del conflicto en el que se encuentra. Así menciona los elementos **ACA**, **ALS** y **LID** sin llegar a ninguna conclusión clara.

Además en la tarea 8, no es capaz de relacionar los diferentes elementos matemáticos, es decir sólo es capaz de hacer intentos de conjunción lógica:

¿Cuál es el significado matemático de la Integral Definida de la función $y=f(x)$ en un intervalo $[a,b]$?

Esto es lo que responde verbalmente de forma **A**:



La Integral definida de la funcion $y = f(x)$ en un intervalo
$[a,b]$ se define como el Area. $A = \int_a^b f(x) = f(b) - f(a)$
y matematicamente es el proceso limite de una
suma de Riemman, donde sumamo los particiones
que se hagan

A4, representación A de la tarea 8 del cuestionario

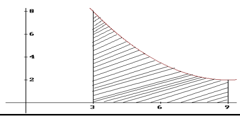
La imagen que tiene del concepto de Integral Definida le lleva a distinguir entre el área y la Integral Definida. Para ella, el área está asociada a la aplicación de la regla de Barrow, es decir, la identifica con un procedimiento exclusivamente algebraico mientras que, matemáticamente, considera que es el proceso límite de una suma de Riemann. Es decir, lo que trata es de relacionar por un lado dos elementos matemáticos **LID** y **TFV** y por otro **LID** con **ALS**.

I: ¿Cómo le explicaría a un compañero el concepto de Integral Definida?
A4: Que la Integral Definida es un proceso limite de una suma de Riemann y que una suma de Riemann son unas particiones que se hacen para llegar a una aproximación.
I: ¿Qué quiere decir que la integral es el límite de una suma de Riemann?
A4: Que es la suma de todos esos pedacitos que estoy cogiendo de la integral y los estoy evaluando en ese intervalo y sumando.
I: ¿Cuál es su propia definición de integral definida?
A4: Que la integral definida en el $[a\ , b]$ es igual al proceso limite de una suma de Riemann. Al proceso que se llega cuando trabajo con la integral definida de una función evaluada en un intervalo, a un valor positivo.
I: ¿Siempre positivo?
A4: No. Un valor numérico.
(A4E8).

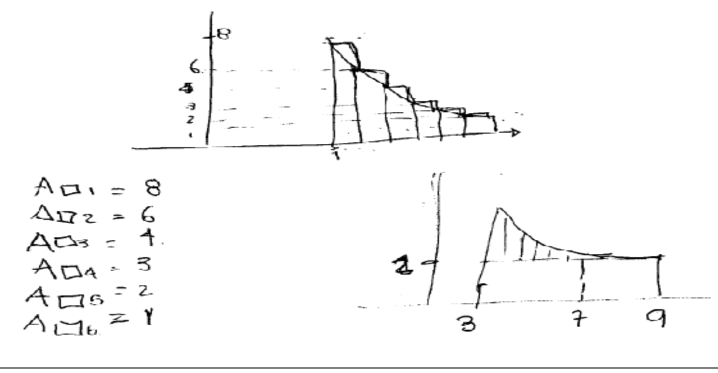
En este protocolo se pone de manifiesto que esta alumna recuerda una definición analítica del concepto de Integral Definida, porque la asocia con el límite de una sumatoria de Riemann, evoca una imagen del esquema general de aproximación y lo expresa verbalmente, trata de exponer un procedimiento del paso de las aproximaciones al límite de dichas aproximaciones y relaciona ese valor posiblemente con el área porque dice que este procedimiento le permite llegar a un valor positivo, pero luego cuando se le pregunta que si ese valor siempre es positivo, responde afirmando que es un valor numérico. Por la forma cómo responde esta tarea podemos inferir que esta alumna menciona varios elementos matemáticos **ACA, ALS, LID y TFV**, producto de la instrucción previa, pero a lo largo del cuestionario y de la entrevista demostró que desconoce algunos de estos elementos matemáticos y las condiciones necesarias para relacionarlos y aplicarlos en la resolución de las tareas.

Esta alumna es capaz de **recordar algunos elementos matemáticos de forma aislada,** por ejemplo, en la tarea 1:

El área de la región rayada es mayor que **12** y menor que **48**.
a. ¿Por qué?
b. ¿Puede dar valores más ajustados?
c. ¿Cuáles?
d. ¿Cómo los obtiene?



Para resolverla representa gráficamente la función dividiendo el intervalo en el que hay que calcular el área en subintervalos regulares:



A4, representación G de la tarea 1 del cuestionario

Está utilizando el elemento matemático **ACA** de forma **G** porque divide el intervalo $[3, 9]$ en 6 subintervalos, traza 6 rectángulos superiores de longitud de la base una unidad y de altura la proyección del extremo superior izquierdo de cada rectángulo sobre el eje *y*, calcula el área de cada uno de los rectángulos, y obtiene una aproximación gráfica del área de 24 unidades cuadradas. Así justifica el procedimiento de resolución:

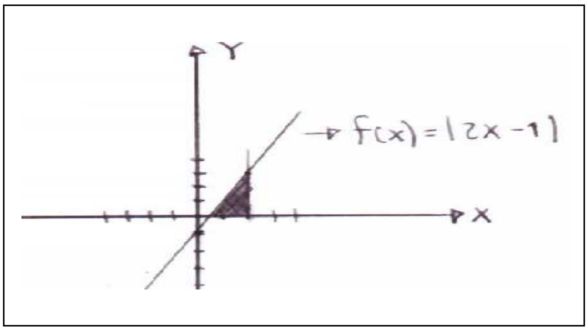
> *A4: … la explique cómo puse ahí, porque no teníamos la ecuación, tendríamos que haberla hallado y evaluarla en los puntos 3 y 9.*
> *I: Le piden ajustar más el área de esa región ¿Qué piensa, cómo lo haría?*
> *A4: Haciendo particiones. Espere y vera más o menos* (dibuja en una hoja).
> *I: ¿Para qué traza los rectángulos?*
> *A4: Para hallarles el área y sumarla para poder tener un área más aproximada.*
> *I: ¿Cuánto le daría el área aproximada calculándolos todos?*
> *A4: Me daría 24.*
> *I: ¿Podría aplicar otro procedimiento diferente que le permita mejor aproximación del área y que justifique más las cotas?*
> *A4: Hallando la expresión calculamos* ***la Integral Definida*** *de 3 a 9.*
> *I: ¿Qué le permite esto, ajustar el área entre esos 2 valores o calcular el área exacta?*
> *A4: Calcular esa área.*
> *I: ¿Qué más podría utilizar para ajustar más los valores?*
> *A4: Particionando más chiquito y teniendo en cuenta estos que están fuera.*
> *I: ¿Cómo sería más chiquito, que quiere decir que sean más chiquitos?*
> *A4: Los triángulos* **(A4E1).**

En el protocolo se pone de manifiesto que, por un lado, tiene dificultad para aproximar el área porque necesita la expresión algebraica de la gráfica de la función para calcularla mediante la regla de Barrow. Como no puede hacerlo de esa forma, usa particiones y hace una aproximación del área por exceso utilizando rectángulos superiores que recubran el área bajo la gráfica; calcula sus áreas aplicando la fórmula del área del rectángulo y recuerda, de manera implícita, el elemento matemático **ALS** de forma **A,** cuando afirma que si hace particiones más pequeñas, “los triángulos que van quedando por fuera serán más pequeños” y el valor del área será más ajustado.

En cuanto a la tarea 4:

Calcular el área limitada por la gráfica de la función $f(x)=\|2x-1\|$, en el intervalo $[0, 2]$ y el eje x. Justificar la respuesta.

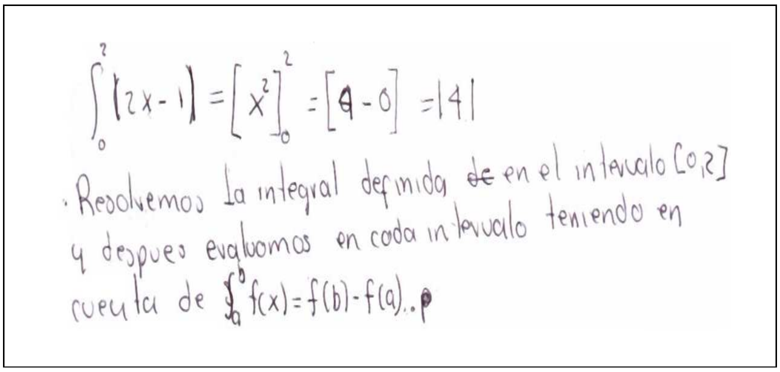
Primeramente representa gráficamente la función como si fuera una función lineal:



A4, representación G de la tarea 4 del cuestionario

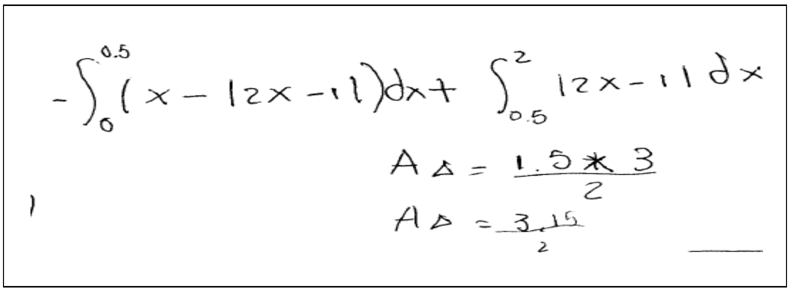
No se da cuenta de que se trata de la función valor absoluto y forma un sólo triángulo bajo la gráfica de la función.

A partir de la gráfica utiliza dos procedimientos de resolución en el sistema de representación **A**:



A4, resolución A de la tarea 4 del cuestionario

Ha utilizado los elementos matemáticos **LID** y **TFV** de forma **A**, pero incorrectamente porque calcula la integral como si el integrando fuera una función lineal y además de manera incorrecta porque no determina la primitiva correctamente, integra un sólo término de la función y no tiene en cuenta el -1 que está en el integrando.



A4, resolución A de la tarea 4 durante la entrevista

Durante la entrevista utiliza un procedimiento **A** incorrecto, porque plantea el cálculo como una suma de integrales utilizando el elemento matemático **LID**, concretamente la propiedad de las funciones positivas y negativas. Trata de calcular el área de manera **A** nuevamente, pero no lo consigue, porque plantea incorrectamente la función del integrando como si fuera una función lineal, le antepone un menos a la primera integral y le agrega una x y luego le resta la función en valor absoluto. Para tratar de comprender lo que ha hecho en el cuadro anterior hemos de recurrir al protocolo de la entrevista en el que para explicar esa suma de dos integrales recurre a la representación gráfica de la función y dice:

A4: ….primero grafiqué la función.

I: ¿Qué figura se formó bajo la recta?
A4: 2 triángulos.
I: ¿Qué le piden hallar?
A4: El área limitada por la gráfica de la función…
(A4E4)

Esta alumna pone de manifiesto que tiene dudas del planteamiento que hace porque tiene un conflicto entre la definición del valor absoluto y la propiedad que debe aplicar para calcular el área como se muestra a continuación.

I: ¿Qué integrales está planteando?
A4 Si es 0,5 es que no sé, entonces lo voy a tomar como si fuera 0,5 (escribe en la hoja)
I: ¿De qué función?
A4: La que está por encima sería el eje x*, menos la que está por debajo que sería* $2x-1$ *menos acá, antes de la integral, porque está por debajo del eje* x*, más la integral de 0,5 a 2 de la curva que está por encima, menos la otra, entonces seria* $2x-1$ *diferencial de* x (va diciendo y escribiendo en una hoja).
I: ¿Está segura que esa integral está bien planteada?

A4: No. Porque estoy dudando.
I: ¿Por qué lo duda?
A4: Lo dudo porque, sé que cuando estoy trabajando con el valor absoluto, una es negativa y la otra es positiva…
(A4E4).

La propia representación gráfica le plantea dudas al darse cuenta de que está integrando una función valor absoluto. Eso le impide dar una solución a la tarea utilizando el elemento matemático **ACA** e intenta utilizar el elemento matemático **TFV,** pero desconoce los elementos matemáticos necesarios y determina de forma errónea una primitiva de la función. Ha considerado que el área que hay que calcular se encuentra entre la función f(x)=2x-1 y el eje x; ha confundido el eje x con la función f(x)=x y ha calculado el área entre esas dos curvas (f(x)=2x-1 y f(x)=x), lo que le conduce a error.
Cuando se insiste en que busque alternativas para calcular el área, recurre a la Geometría:

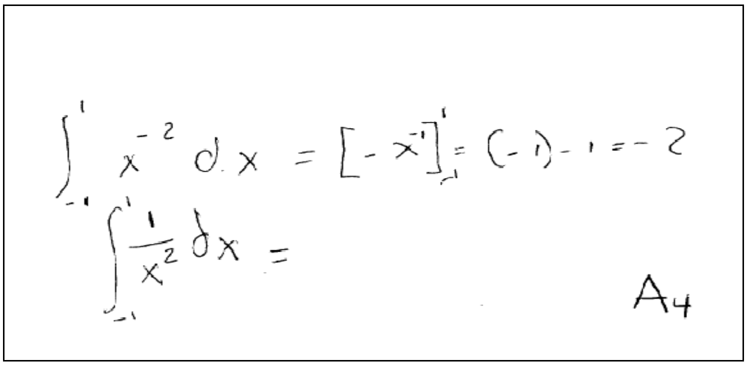
I: ¿Podría calcular el área de esa figura sin recurrir a la integral, cómo lo haría?
A4: Como el área del triángulo.
I: ¿Cómo calcularía la altura con ese valor de la base?
A4: Teniendo en cuenta donde se intercepta la función y conociendo el $[0\ ,\ 2]$.
I: ¿Qué triángulo está calculando?
A4: El grande.
I: ¿Cuánto daría el área de cada uno?
A4: Esto me da uno, uno punto, 1,3 más o menos.
I: ¿El área total de quién?
A4: No, el área de éste (se refiere al triángulo que está sobre el eje x).
(A4E4).

Menciona de nuevo, por tanto, al elemento matemático **ACA** pero sigue sin resolver la tarea de forma **G** utilizando la fórmula del triángulo, porque no es capaz de coordinar la representación gráfica con la algebraica; aunque la representación gráfica es incorrecta el área sería la misma que si considera la función lineal f(x)=2x-1 y no debería haber tenido problemas en la coordinación entre los dos registros el gráfico y el algebraico.

Esta es otra situación dónde se muestra que esta alumna utiliza de forma aislada el elemento matemático **TFV** utilizando la regla de Barrow, en la tarea 7c:

> Considerar el valor de verdad o de falsedad de la afirmación $\int_{-1}^{1} x^{-2}\,dx = \left[-x^{-1}\right]_{-1}^{1} = (-1) - 1 = -$
> y en caso de ser falsa, explicar por qué o dar un contraejemplo.

I: ¿Cómo justifica el valor de verdad?
A4: Aquí, es un igual, porque me están diciendo que la $\int_{-1}^{1} x^{-2}\,dx = \left[-x^{-1}\right]_{-1}^{1} = (-1) - 1 = -2$, *entonces integre normalmente, por la fórmula de la potencia:* x^{-2} *seria* $x^{-2}+1$, *sobre el mismo* $n+1$.
I: ¿Qué función está integrando y de dónde hasta dónde?
A4: De -1 a 1
I: ¿De qué función?
A4: ¿De qué función? Esta x^{-2}, *que la puedo escribir como* $\frac{1}{x^2}$ *?*
I: ¿Puede integrar esta función así como está planteada? ¿Por qué?
A4: No se si lo pueda, igual me va a dar 1, si evaluó en $x^2 - 1$ *me daría 1, entonces la integral es 1.*
A4: ¿Con qué elementos matemáticos se relaciona esa proposición?
A4: El teorema fundamental.
I: ¿Puede integrar esa función como la tiene expresada?
A4: Evaluándola en cero, o sea partiendo la integral de -1 a cero y de 1 a cero.
I: ¿Cómo seria y por qué?
A4: No, no sé.
(A4E7c).

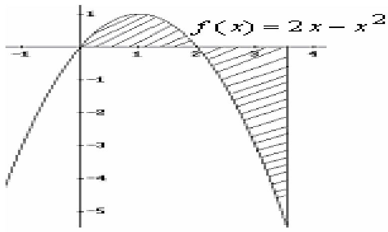


A4, resolución A de la tarea 7c durante la entrevista

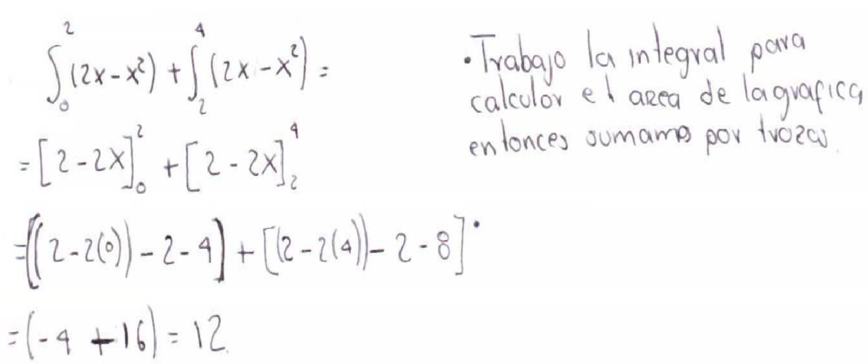
Durante la entrevista esta alumna utiliza el elemento matemático **TFV** de forma aislada e incorrecta porque desconoce las condiciones necesarias para poder aplicar la regla de Barrow. En el protocolo pone de manifiesto que inicialmente está de acuerdo con la forma como aparece calculada la integral, que integra usando la fórmula de la potencia, pero afirma que el resultado que obtiene es uno y luego, durante la entrevista, calcula nuevamente la integral y obtiene el mismo valor que se le presenta en el enunciado de la tarea, menciona el teorema fundamental y representa bien la función racional, pero la integra sin darse cuenta que presenta una discontinuidad en una parte del intervalo, y finalmente dice que no sabe resolver la cuestión.

En la tarea 5 esta alumna ha intentado utilizar los elementos matemáticos **ACA**, **LID**, **PID** y **TFV**, pero de forma inconexa y sin **coordinar los diferentes registros de representación G** y **A**.

Dada la gráfica de $f(x) = 2x - x^2$, calcular por aproximaciones el área de la región rayada. Justificar el procedimiento utilizado.



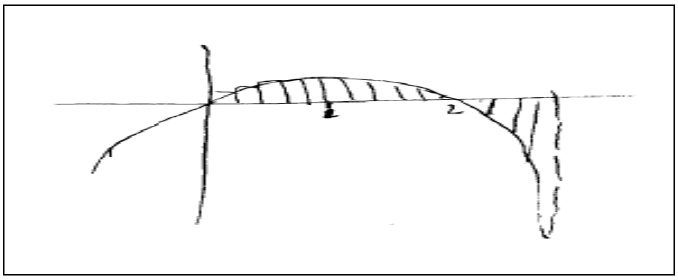
En lugar de calcular el área que se le pide por aproximaciones, directamente plantea una integral **LID** de forma A:



A4, resolución A de la tarea 5 del cuestionario

El planteamiento le lleva a utilizar el elemento matemático **LID** para el cálculo del área de funciones positivas y negativas y realizar un cálculo algebraico del área sombreada sobe el eje x y el área bajo el eje x; aplica incorrectamente el elemento matemático **TFV** (regla de Barrow), porque cuando trata de hallar la primitiva de la función, lo que hace es derivar la función que tiene en el integrando.

Durante la entrevista plantea un boceto de la gráfica dividiendo el intervalo de integración en subintervalos y dibujando las ordenadas correspondientes a esas subdivisiones:



A4, representación G de la tarea 5 durante la entrevista

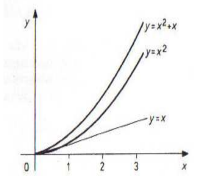
En la representación **G** se observa que trata de utilizar el elemento matemático **ACA**. Además, durante la entrevista menciona esas particiones, pero no logra resolver la tarea y tampoco es capaz de verbalizar el proceso para calcular una aproximación al área:

I: ¿Para qué hace particiones?
A4: Para poder tener una aproximación más exacta del área.
I: ¿Qué figuras forman esas áreas?
A4: Puede ser con rectángulos.
I: ¿Cómo quedarían, cómo los trazaría?
A4: No igual que trace las otras y aquí trabajaría lo mismo (grafica en una hoja).
I: ¿Cómo hallaría las bases de esos rectángulos?
A4: Teniendo en cuenta la escala que me están dando de cero a cuatro, entonces una es de cero a dos.
I: ¿Cómo le daría el valor a la base?
A4: Haciendo un refinamiento pequeño de esas particiones por ejemplo, de uno.
I: ¿Para qué?
A4: Para que no me queden así como...
(A4E5).

Está intentando utilizar el elemento matemático **ACA** de forma **G**, pero no es capaz de coordinar los sistemas de representación gráfico, algebraico y analítico que le permitan concluir la tarea. Para determinar los rectángulos necesita establecer no sólo la base sino también la altura para ello debe coordinar el sistema gráfico y el algebraico, luego debe calcular el área de cada rectángulo utilizando el sistema algebraico, sumar esas áreas **A** y calcular el límite si quiere obtener un resultado exacto para lo que necesitaría utilizar el sistema analítico.

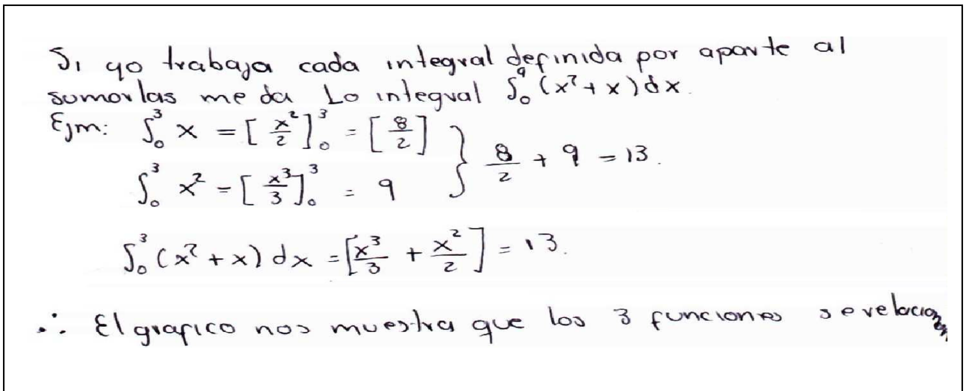
En cuanto a la tarea 6:

Dada la gráfica de estas funciones, explicar en términos del gráfico, por qué



$$\int_0^a \left(x^2 + x\right)dx = \int_0^a x^2\,dx + \int_0^a x\,dx \,.$$

En el cuestionario no fue capaz de responder de forma gráfica, sólo fue capaz de abordar la tarea de forma algebraica. Este es el procedimiento de resolución que utiliza esta alumna:



Si yo trabajo cada integral definida por aparte al sumarlas me da Lo integral $\int_0^9 (x^2+x)\,dx$.

Ejm: $\int_0^3 x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3 = \left[\frac{8}{2}\right]$

$\int_0^3 x^2 = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 9$ $\Big\}$ $\frac{8}{2} + 9 = 13.$

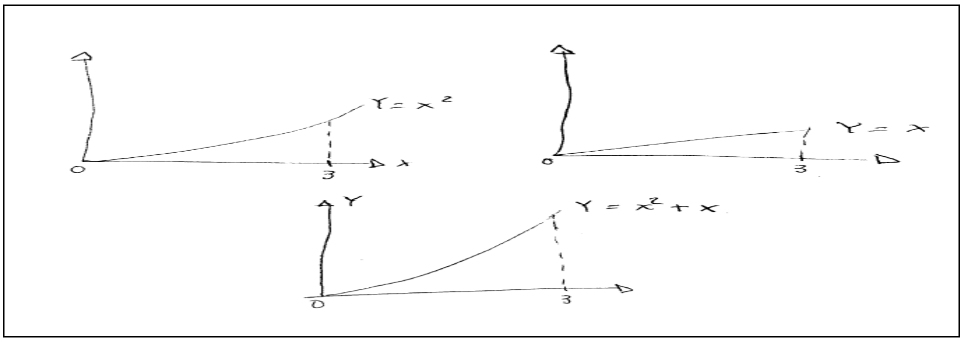
$\int_0^3 (x^2+x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right] = 13.$

∴ El grafico nos muestra que los 3 funciones se relacion

A4, resolución A de la tarea 6 del cuestionario

Para ello utiliza el elemento matemático **TFV** de forma **A**. Como no es capaz de comprobar la propiedad cuando uno de los extremos del intervalo no es un número sustituye la variable a por el valor 3, e integra cada término de la igualdad que trata de comprobar aplicando el elemento matemático **TFV** (regla de Barrow) y compara los resultados, como son iguales afirma que las integrales si se relacionan.

Durante la entrevista esto es lo que hace esta alumna de forma **G**.



A4, representación G de la tarea 6 durante la entrevista

En la representación gráfica se observa que dibuja por separado cada función, pero no es capaz de coordinar la representación gráfica con la representación algebraica de las funciones, lo que no le permite establecer relaciones para justificar la propiedad de la linealidad:

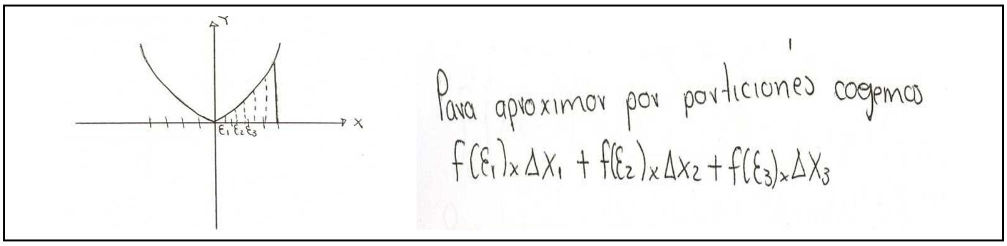
I: ¿Cómo lo podría demostrar gráficamente?
A4: No sé, como demostrarlo, analíticamente si, por aparte las sumo y si me dan.
I: ¿Gráficamente no se le ocurre algo, cómo podría hacerlo, inténtalo?
A4: Una es, bueno la otra, entonces tomando en cuenta el intervalo que me dan y al sumar esta $y = x$ *y la de la parábola me van a formar estas 3 gráficas* (se refiere a las gráficas anteriores).
I: Ahí, no dice hasta 3, sino hasta a*.*
A4: Pero se supone que todas llegan hasta ese mismo a*, veo que como el* a *puede ser cualquier número y siempre el mismo en las tres gráficas.*
I: Horizontalmente y verticalmente se extiende hasta ahí ¿Cómo demuestra que una suma es igual a la otra?
A4: Verticalmente las curvas siempre van a crecer.
I: Si, ya las tiene por separado ¿Qué relación puede establecer?
A4: Que las dos llegan a un a *que es el mismo para todas y que al sumarlas van a dar la función grande.*
(A4E6).

En esta parte se evidencia que recuerda cosas y aplica los conocimientos que tiene para representar funciones lineales y cuadráticas, pero que no logra justificar de forma **G** la propiedad de la linealidad ya que recurre al registro algebraico para comprobar la igualdad porque tiene dificultad con el registro gráfico que era lo que se esperaba que hiciera en la resolución de la tarea.

Además en la tarea 3:

Sea R la región entre la gráfica de la función $f(x)=x^2$ y el Intervalo [0,4] -Utiliza particiones para aproximar el valor del área de la región R. -Justifica tu respuesta.

Esta alumna demuestra que **no tiene sintetizados los diferentes modos de representación**. Así, para resolver la tarea, lo primero que hace es una representación gráfica de la función, divide el intervalo mediante una partición en subintervalos iguales pero sólo marca las abscisas y las ordenadas de la partición, no dibuja los rectángulos necesarios para mostrar gráficamente la aproximación del área. Dado que sólo divide el área mediante líneas paralelas podemos deducir que tiene una concepción del área de los indivisibles.



A4, representación G y A de la tarea 3 del cuestionario

En el sistema algebraico, plantea una suma sin indicar su significado, relacionándolo parcialmente con la gráfica al utilizar las abscisas en ambos sistemas.

Durante la entrevista tampoco fue capaz de construir los rectángulos ni de calcular sus alturas y mostró una idea de límite como aproximación como se puede percibir en el siguiente extracto:

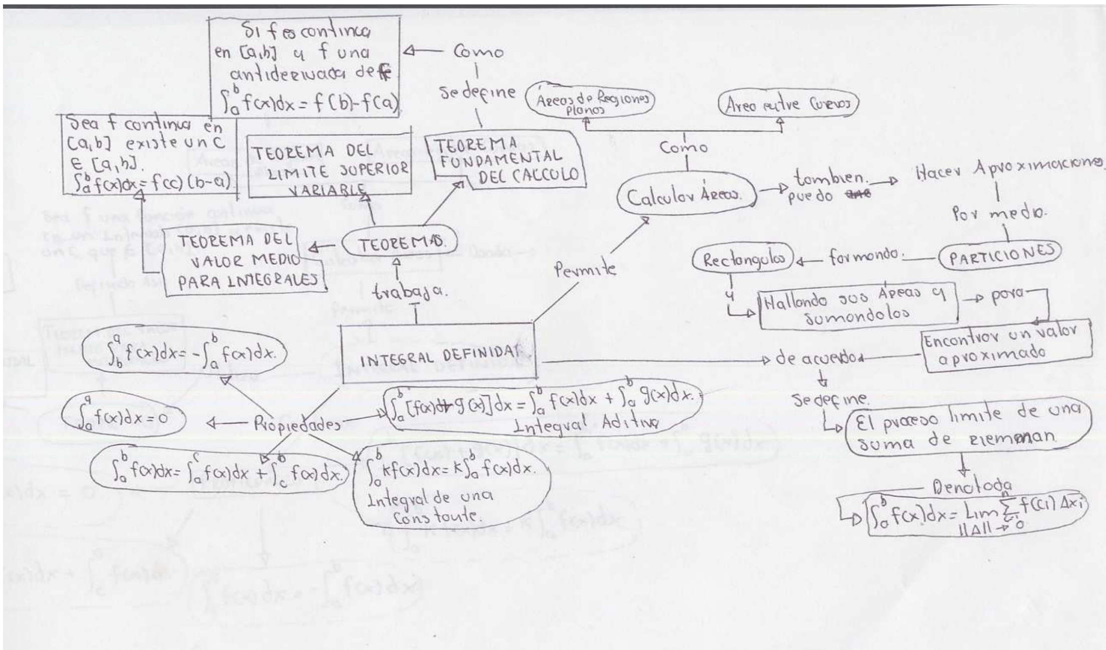
I: ¿Una suma de Riemann le da el valor exacto del área o una aproximación?
A4: Yo sé que una suma de Riemann es un proceso limite.
I: ¿Qué es un proceso límite?
A4: La integral definida.
I: ¿Cuando aplica el proceso límite está hallando el valor del área o lo está aproximando?
A4: La estoy aproximando, porque la estoy calculando en este intervalo cerrado.
(A4, E3).

Asocia de forma incorrecta el concepto de área como aproximación con la Integral Definida.

I: ¿Podría explicarme cuando le dicen que aproxime un área que hace?
A4: Qué aproxime el área de la región rayada…
I: ¿Qué hace?
A4: Trabajo la integral.
(A4E3).

En este episodio la alumna demuestra una concepción de suma de Riemann como un proceso límite y afirma, incorrectamente, que cuando aplica el límite como un proceso está aproximando el valor del área y que la Integral Definida le permite aproximar el área. Las imágenes mentales que tiene esta alumna las evoca producto de una instrucción previa, pero muchas de ellas, cuando tiene que utilizarlas en la resolución de las tareas, no sabe cómo hacerlo.

Además en el mapa conceptual, esta misma alumna pone de manifiesto la forma como tiene estructurada la imagen del concepto de Integral Definida. En la representación mental que presenta de este concepto matemático se aprecia que recuerda los elementos matemáticos **ACA**, cuando menciona aproximaciones haciendo particiones, trazando rectángulos y calculando sus áreas; el elemento **ALS y LID** cuando asocia la Integral Definida como el proceso límite de una suma de Riemann; asimismo plantea el elemento **PID** para referirse a las propiedades básicas de la Integral Definida, y define el elemento matemático **TFV** y señala que este elemento se aplica para trabajar la Integral Definida.



A4, mapa conceptual que representa el concepto de integral definida

De manera general en el mapa conceptual se pone en evidencia cómo la alumna recuerda y estructura los cinco elementos matemáticos que se han venido trabajando a lo largo de la investigación **ACA, ALS, LID, PID** y **TFV**, pero que muchos de estos elementos los recuerda y utiliza con errores, y aunque está demostrado que tanto en el cuestionario como en la entrevista y en el mapa conceptual los menciona tiene dificultad para aplicarlos en la resolución de las tareas.

Además se pone de manifiesto que esta alumna recuerda y hace uso con mayor frecuencia de los elementos matemáticos **ACA** y **TFV** y el elemento matemático que menos utiliza a lo largo de todo el cuestionario es **ALS,** también se aprecia que en algunos de estos elementos muestra concepciones erróneas por la forma como los recuerda y usa en la resolución de las tareas. Distingue entre la integral asociada con el área de una región y que "matemáticamente" es el proceso límite de una suma de Riemann.

Por la forma como esta alumna resolvió las diferentes tareas a lo largo de todo el cuestionario, por la manera como fueron justificadas esas respuestas a través de la entrevista, consideramos que se encuentra en el nivel **íntra** de desarrollo del esquema.

La tabla siguiente representa las relaciones lógicas, los elementos matemáticos y los sistemas de representación utilizados por esta alumna en el nivel **intra 1 e intra.**

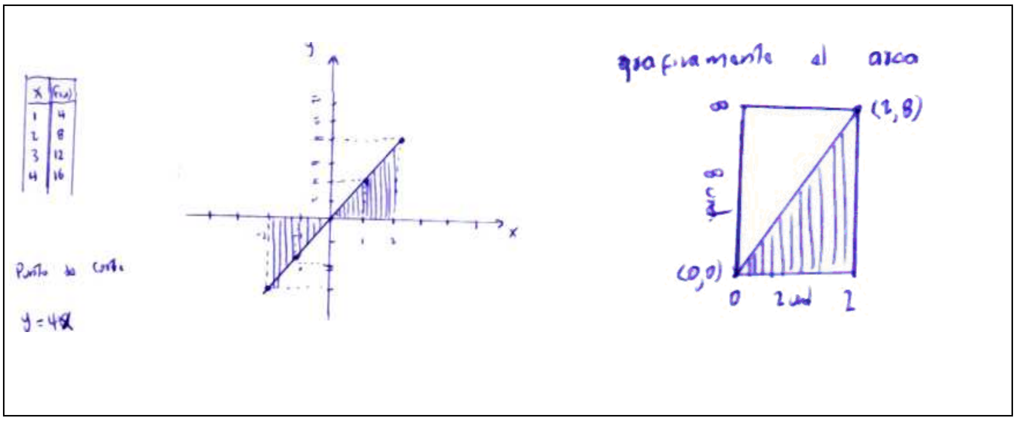
NIVEL	CARACTERÍSTCAS	ELEMENTOS MATEMÁTICOS	SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN
INTRA 1	**Recordar elementos matemáticos con errores.**	El área como límite de una suma: (AN) -El límite de las sumas. La Integral Definida: (A) -La definición analítica de integral definida. Los teoremas fundamentales: (A) -Regla de Barrow.	**Algebraico** **Analítico**
INTRA	**Mostrar dificultades en establecer relaciones lógicas (conjunción lógica) entre elementos matemáticos. (Intento de relación "conjunción lógica").** **Recordar algunos elementos matemáticos de forma aislada.** **No tener sintetizados los sistemas de representación gráfico, algebraico y analítico.**	El área como aproximación: (G, A) -Aproximación del área de una región plana. -Fórmula del área del rectángulo. -Fórmula del área del cuadrado -Fórmula del área del triángulo. -Partición del intervalo. -Sumas de Riemann. El área como límite de una suma: (AN) -El límite de las sumas. La Integral Definida: (G, A, AN) -La integral definida como área de una región. -La integral definida como cálculo algebraico -La definición analítica de integral definida. -La integral de funciones positivas y negativas. Las propiedades de la Integral Definida:(A) -De las funciones positivas y negativas. -Integrales especiales -Unión de intervalos. -Linealidad Los teoremas fundamentales y del valor medio: (A) -Regla de Barrow. -Valor medio de una función.	**Gráfico** **Algebraico** **Analítico**

Tabla 4.2. Relaciones lógicas, elementos matemáticos y sistemas de representación que caracterizan los niveles de desarrollo del esquema de Integral Definida en A4

En este mismo **nivel intra** de desarrollo del esquema del concepto de Integral Definida, el alumno A3 suele **mostrar dificultades en establecer relaciones lógicas (conjunción lógica) entre elementos matemáticos. (Intento de conjunción lógica).** Una manifestación de este hecho la tenemos en la tarea 2:

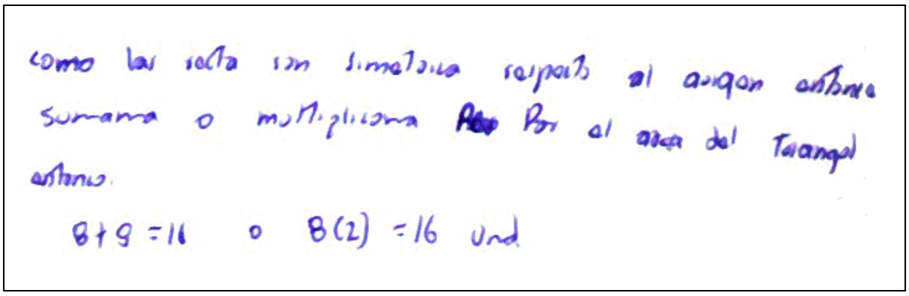
Sea **R**, la región encerrada por el gráfico de la función $f(x) = 4x$ y el eje x, en el intervalo $[-2, 2]$.
a. Dibujar la gráfica.
b. Calcular gráficamente el área de la región.
c. Calcular la $\int_{-2}^{2} 4x\ dx$.
d. ¿Son iguales los dos resultados anteriores? Justificar cada paso.

Esta es la forma **G** como responde inicialmente la tarea.



A3, representación G de la tarea 2 del cuestionario

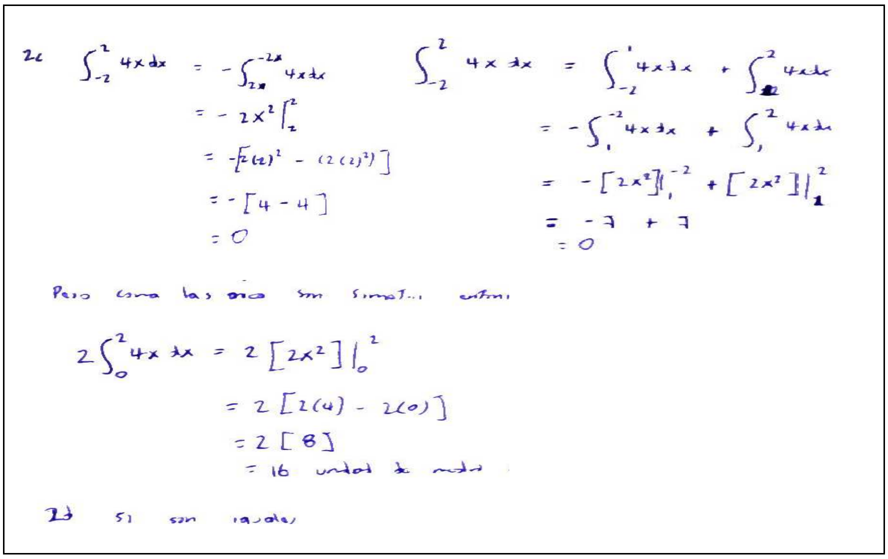
Como puede notarse, pone de manifiesto que utiliza correctamente el elemento matemático **ACA** de forma **G**. Usando los conocimientos que tiene de la función lineal, forma dos triángulos rectángulos, uno por encima del eje x y el otro por debajo del eje x, además amplía el primer cuadrante dibujando un cuadrado y trazando una diagonal para indicar que el área sombreada que tiene que calcular corresponde al área de uno de los triángulos. Calcula el área de los triángulos de forma **A:**



A3, resolución A de la tarea 2 del cuestionario

Para ello, halla el área del triángulo formado bajo la diagonal del cuadrado que está representado en la gráfica por separado y utiliza los criterios de simetría para inferir que los dos triángulos formados son iguales y por tanto el área de uno la suma dos veces o, lo que es lo mismo, la multiplica por dos como se puede ver en los cálculos que realiza.

Por otro lado calcula la integral que se le pide:



A3, resolución A de la tarea 2 del cuestionario

Utiliza tres procedimientos diferentes: por un lado calcula la integral invirtiendo los límites de integración para lo que le antepone un signo menos y hace un cálculo numérico incorrecto, aunque el resultado es correcto; en el segundo procedimiento aplica el elemento matemático **PID** y establece intento de conjunción lógica entre **ACA y PID** utilizando una de las propiedades de simetría de la integrales, pero la aplica incorrectamente, porque no se da cuenta de que la función es impar y tal como tiene planteada la propiedad se utiliza para funciones pares; y, finalmente, en la integral de la derecha calcula otra integral utilizando **LID,** en concreto la integral de funciones positivas y negativas y también hace cálculos numéricos incorrectamente, aunque el resultado es correcto. En definitiva tiene dos resultados posibles: 16 o 0 y esto le generará un conflicto que mostrará durante la entrevista:

A3: Al calcular la integral, obtuve las mismas 16 unidades porque llegué al mismo resultado.
I: ¿Por qué?
A3: Porque el paso anterior fue de una manera intuitiva y con esto lo que hice fue comprobarlo de una manera matemática que de pronto las integrales de estas funciones tienen una manera hallarle su área, una manera matemática o una solución intuitiva.
I: ¿Cuánto le dio esa integral?
A3: Me dio 16 unidades.
I: ¿Está seguro de ese valor?
A3: Me dio cero.
I: ¿Está de acuerdo con ese valor?

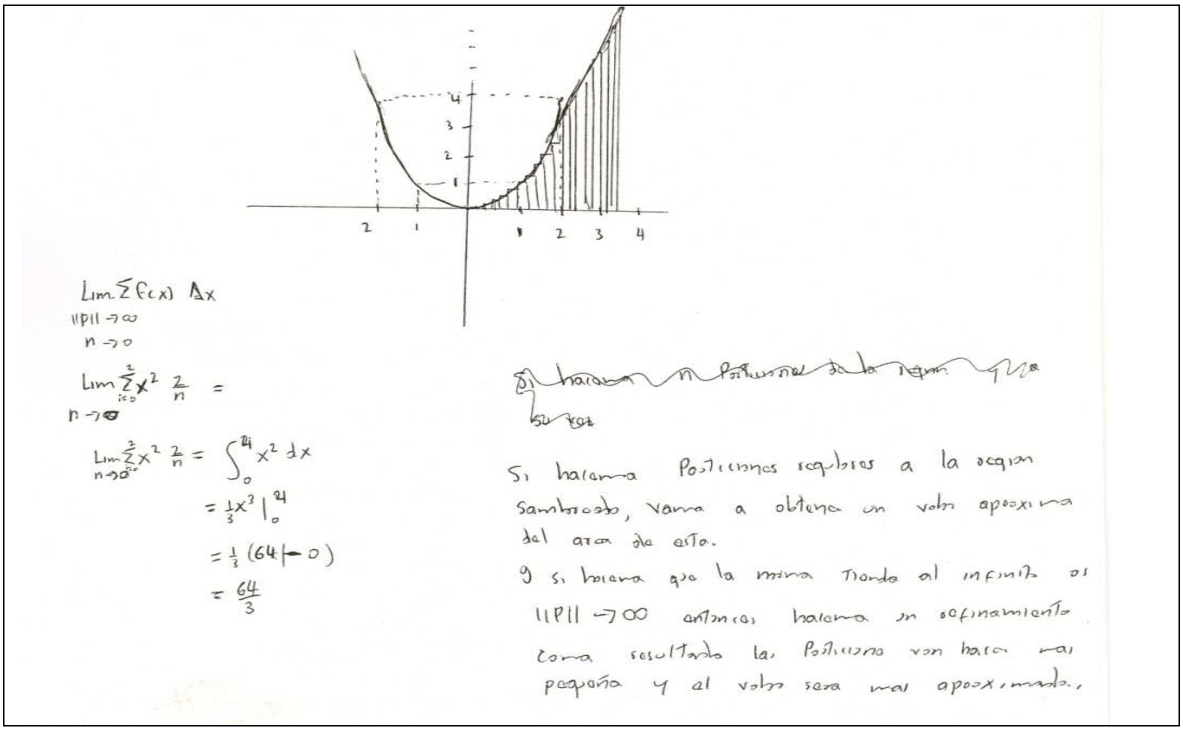
A3: …si lo resolvemos de manera lógica como una integral obtenemos cero, pero generaba una controversia con la respuesta intuitiva que me había dado.
I: ¿Por qué controversia?
A3: Porque de pronto el resultado de la integral si era correcto, pues era lo que me estaban pidiendo, pero de manera intuitiva o mental me decía que esa respuesta no era correcta porque había deducido que el área sombreada era 16.
I: ¿Por qué esta relacionando el área con esa integral?
A3: Porque al ver una gráfica sombreada, la interpreto como una integral y si la quisiera resolver aplicando una integral y me da cero, sé que de pronto hay un error. Es que mi pensamiento choca en el sentido en que sé que el resultado puede ser correcto con lo que me están pidiendo, pero no es correcto con lo que veo gráficamente, de pronto por eso es mi choque de pensamiento, si simplemente me están diciendo calcule esa integral, lo que hago es usando los conocimientos de la integral resolverla y obtengo un resultado, sin tener en cuenta si es correcto o no, el hecho es que obtuve un resultado.
(A3, C2).

Este alumno no distingue entre el cálculo del área de una región y el concepto de Integral Definida que realmente era lo que se le pedía en esta parte de la tarea. Tiene una concepción fuerte de la integral como área y esto lo refleja en la imagen que tiene del concepto de Integral Definida, además cuando utiliza el elemento matemático **ACA** lo considera intuitivo, como de simple observación gráfica, y de tanteo, pero el elemento matemático **LID** lo considera como algo matemático que sí corresponde al valor del área. Se da cuenta que el área gráficamente no puede ser cero y, por eso, al relacionar la representación **G** con el cálculo **A** de la integral entra en conflicto aunque también afirma que el cálculo de la integral puede dar como resultado cero.

Además, en la tarea 3.

Sea R la región entre la gráfica de la función $f(x)=x^2$ y el Intervalo [0,4] **-**Utiliza particiones para aproximar el valor del área de la región R. **-**Justifica tu respuesta.

El alumno hace una representación gráfica de la función, divide gráficamente el intervalo mediante una partición regular y construye bastantes rectángulos para aproximar el área, por lo que está utilizando el elemento matemático **ACA** de forma **G**. Plantea la expresión del límite de una suma de Riemann pero confunde las tendencias de la longitud de la partición y la cantidad de divisiones del intervalo. Aunque plantea ese límite, no es capaz de calcular el área ni siquiera por aproximación por lo que recurre a integrar la función utilizando la regla de Barrow.



A3, resolución G, A y AN de la tarea 3 del cuestionario

Para dar una aproximación al área recurre al elemento matemático **ALS de manera aislada** y con dos limitaciones, la primera que utiliza de forma incorrecta el límite diciendo que la norma tiende a infinito cuando el número de subintervalos tiende a cero y la segunda que no logra establecer la sumatoria de Riemann, que en realidad era lo que se pretendía para la resolución de esta tarea; y finalmente lo que hace es utilizar los elementos matemáticos **LID** y **TFV** concretamente la regla de Barrow, para calcular el valor exacto del área bajo la curva.

Durante la entrevista, para justificar lo que ha hecho, insiste en la confusión que tiene entre el tamaño de cada subintervalo y la cantidad de subintervalos que se forman.

I: ¿Sabría comentarme cómo ha resuelto la tarea?
A3: Primero seria graficar la función que me están dando $f(x) = x^2$ ***(****grafica en una hoja de respuestas)…*

A3: Como están hablando de particiones, entonces utilizaría primero una partición regular.
I: ¿Qué quiere decir una partición regular?
A3: Coger ese intervalo y dividirlo en subintervalos de igual tamaño.
I: ¿Cuántos va a tazar, cuál es la diferencia al trazar más o trazar menos?
A3: Al trazar más particiones voy a aproximarme más, si hago n particiones cada vez más pequeñas obtengo un valor más aproximado aplicando la sumatoria de Riemann, que dice que si a esos subintervalos los hacemos que tiendan hacia el infinito, que cada vez sean más pequeños que se aproximen a cero; por eso estábamos trabajando con limites y la fórmula de Riemann nos dice que el limite cuando el intervalo tiende al infinito va a ser la sumatoria de la función la que es x^2 , tendríamos que hallar Δ_x, pero Δ_x sabemos que es la diferencia del intervalo sobre n y el intervalo es $[0 , 4]$, seria 4 menos cero nos da 4 que seria 4/n, pero aquí me dio2/n.
(A3E3).

Además muestra una concepción procesual del límite, indicando que cuando se tiende a infinito entonces se va a obtener un valor más aproximado del área de la región sombreada

I: ¿Qué haría para aproximar esta área?
A3: Trazar rectas paralelas que estén debajo de la curva (el estudiante traza rectas sobre la gráfica de la curva).
I: ¿Como llegaría a un valor aproximado de esta área?
A3: Tenemos el límite de una partición cuando tiende al infinito de la sumatoria de la función x^2 de $\Delta(x)$, que $\Delta(x)$ es la diferencia del intervalo, que sería 4/n esto lo puedo expresar como una integral porque la sumatoria de Riemann me lleva a una integral definida
(A3E3).

Como la función es $f(x)=x^2$ va a confundir los rectángulos con los que se aproxima el área de la función con cuadrados, es decir está considerando el área formada por líneas rectas correspondientes a ordenadas para cada punto de la división del intervalo, que dada la función con la que está trabajando, considera que son cuadrados por lo que se puede deducir que tiene la intuición de indivisibles en relación con el área de la figura.

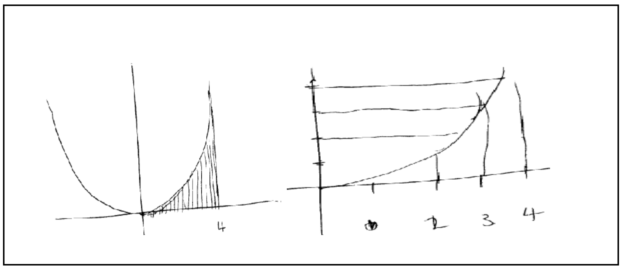
I: ¿Qué haría en este caso, qué haría para aproximar?
A3: En este caso trabajaría con rectángulos y como me están pidiendo particiones, entonces me inclino hacerlas de 1×1.
I: ¿Cómo sería?

A3: Que pueden ser cuadrados de lado 1×1, *entonces obtengo cuadrados de* 1×1, *de* 2×2 *de* 3×3 *y otro cuadrado de* 4×4, *así estaría abarcando el* $[0\ ,\ 4]$, *y dentro de cada cuadrado va a estar sombreada una parte de la curva, y sería entrar a trabajar con los cuadrados independientemente.*
I: ¿Qué va a formar con esas particiones?
A3: Voy a formar cuadrados, porque los estoy uniendo.
I: ¿Cuadrados o rectángulos qué está formando?
A3: Son cuadrados, sino que se ven como rectángulos, pero son cuadrados.
I: Escriba los valores que va obteniendo de cada uno.
A3: Acá tengo un cuadrado de 1x1, pero como puedo observar, la parte sombreada es sólo una parte, entonces el cuadrado tendría que subdividirlo en partes iguales de tal manera que esas partes que me queden divididas y completamente sombreadas.
(A3E3).

Durante la entrevista también plantea el cálculo del límite de las sumas de Riemann, pero vuelve a confundir las dos tendencias que ha expresado en el cuestionario y no se percata del error.

I: ¿Cuál es el valor?
A3: Si conozco la sumatoria de Riemann, podría utilizar la sumatoria de Riemann
I: Lo que le piden realmente es aproximar haciendo particiones.
A3: Como la parte sombreada yo la puedo subdividir en intervalos, tales que cada intervalo sea lo más pequeño posible para que me dé un valor más aproximado a esa área sombreada. Esos subintervalos los llamaríamos Δx, *entonces nuestro* Δx *seria igual a la diferencia del intervalo sobre n. Que nos dio 4/n.*
I: ¿Qué representa este 4/n?
A3: Este 4/n nos representa el valor en que se debe dividir el intervalo para llegar a un valor aproximado del área y ese 4/n lo sustituimos en la fórmula de Riemann y tenemos el límite cuando la partición tienda al infinito de la sumatoria.
I: ¿Cómo calcula esto aplicando el límite de la sumatoria de Riemann?
A3: Haciendo la suma de estas particiones cuando tienda al infinito.
I: ¿Cómo sería?
A3: Esto sería igual al límite cuando n tiende a cero de la sumatoria de n, desde cero hasta 4 que es el intervalo que nos están dando de x^2 *entonces empezamos a desarrollar esto cuando n valga cero nos daría el punto inicial que sería cero, más cuando n valga 1 nos daría* $4x^2$, *cuando n valga 2 nos daría* $2x^2$, *cuando n vale cero el valor seria cero, cuando n valga 1 nos daría la sumatoria* $4x^2$.
(A3E3).

Este razonamiento lo apoya mediante una gráfica:



A3, representación G de la tarea 3 durante la entrevista

En el gráfico de la izquierda se aprecia que el alumno utiliza particiones y traza líneas perpendiculares al eje *x*, y en la gráfica de la derecha traza una subdivisión menos fina para reflexionar sobre lo que está haciendo y poder formularlo de forma matemática. Finalmente logra dar cierta expresión analítica correspondiente a la gráfica anterior que no le sirve para calcular el área correspondiente.

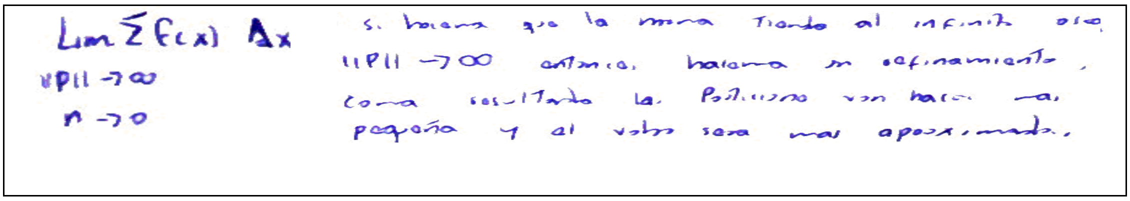
$$\lim_{p \to \infty} \sum x^2 \, \frac{4}{n}$$

A3, representación AN de la tarea 3 durante la entrevista

Este alumno, a lo largo de la tarea, ha demostrado que es capaz de relacionar el límite de la suma de Riemann con la integral definida y su cálculo mediante la regla de Barrow con lo que está utilizando cuatro elementos matemáticos: **ACA, ALS, LID, TFV** pero no es capaz de hacerlo correctamente y de utilizar diferentes sistemas de representación al mismo tiempo y cuando lo **intenta lo hace con dificultad e incluso con errores**.

Por la forma como plantea el límite y cómo lo describe en la entrevista, se evidencia que este alumno no maneja de forma correcta el elemento matemático **ALS** ya que tiene problemas para coordinar los sistemas de representación gráfico, algebraico y analítico.

Además por la forma cómo resolvió la tarea este alumno pone de manifiesto errores con el límite de la sumatoria.



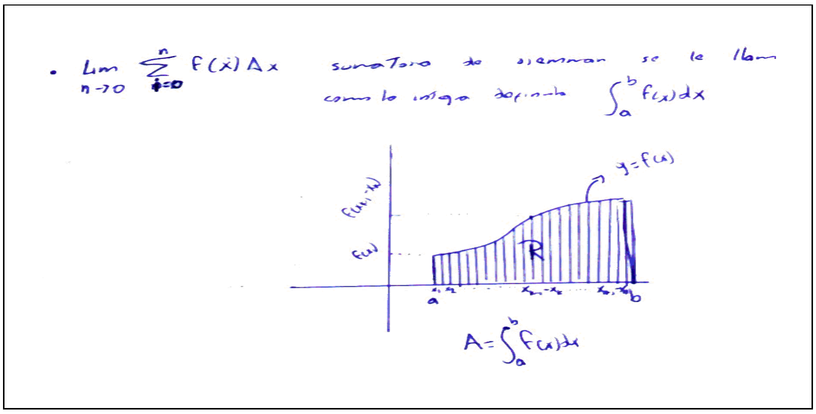
A3, representación A y AN de la tarea 3 del cuestionario

Maneja de forma errónea el concepto de límite de una sumatoria Riemann, porque considera la longitud del intervalo como infinita y el número de particiones del intervalo como cero; justamente al contrario de la definición formal del límite de la sumatoria de Riemann, donde se indica que si la norma o la longitud del intervalo tiende a cero**,** el número de particiones del intervalo **(n),** tiende a infinito.

Este alumno continúa cometiendo el mismo error en la tarea 8, al representar el límite de la sumatoria.

¿Cuál es el significado matemático de la Integral Definida de la función $y = f(x)$ en un intervalo $[a, b]$?

Esto es lo que manifiesta en el cuestionario:



A3, representación G, A y AN de la tarea 8 del cuestionario

Este alumno utiliza el elemento matemático **LID**, de forma **G, A y AN**, porque utiliza la gráfica para indicar el área bajo la región **R**, establece de forma **A** los extremos del intervalo y la función que representa la gráfica bajo la curva y de forma **AN** plantea la subdivisión del intervalo y el límite de la sumatoria de Riemann, sólo que escribe incorrectamente el límite de la sumatoria porque confunde la tendencia de la norma de la partición con la cantidad de subintervalos que se forman.

Durante la entrevista afirma lo siguiente:

I: ¿Cómo le explicarías a un compañero el significado de $\int_a^b f(x)\,dx$*?*
A3: Por medio de la gráfica en pocas palabras le trataría de dar a entender el teorema cuando me hablan de una integral.
I: ¿Teorema o la definición?
A3: Perdón, la definición, entonces tomo una curva cualquiera en este caso voy a tomar el primer cuadrante como para facilitar el ejercicio, tomo el gráfico de una curva cualquiera, la cual voy a denominar $y=f(x)$*, esa curva la voy a limitar por 2 rectas paralelas en* x*, de las cuales una la voy a llamar* ***a*** *y la otra* ***b*** *la parte interna la voy a sombrear y a denominar región R, luego le explicaría a mi compañero que* $f(x)$ *es una curva trazada en ese cuadrante la cual debe ser continua dentro de ese intervalo, como otro punto es que esa curva va a estar limitada por la curva superior* $y=f(x)$ *y por la recta* x *o el eje* x*, entonces va a estar limitada de arriba hacia abajo y verticalmente por las 2 rectas perpendiculares* $x=a$ *y* $x=b$*,entonces la integral la represento primero como el límite inferior, el valor menor de ese intervalo en este caso a y el límite superior,*(el alumno se refiere a los límites de integración, "$\int_a^b f(x)\,dx$") *el valor mayor en este caso b , entonces mi función va a estar limitada por ese intervalo y la integral de la función y la función es* $f(x)$ *con diferencial de* x *por qué diferencial de* x*, porque como estamos hablando de funciones continuas, entonces por eso trabajamos con la diferencial* (grafica en una hoja).
I: ¿Cómo lo llevaría a que el comprendiera el concepto de integral Definida?
A3: Primero que todo lo haría con la sumatoria de Riemann, y luego con el límite de esa sumatoria, porque fue la manera en que me lo enseñaron y como de pronto pude entender un poco mejor de que se trataba la integral definida.
(A3E8).

Aquí muestra que tiene una imagen gráfica de la integral, que conoce el procedimiento de construcción del concepto de la integral pasando de lo **G**, a lo **A** y también menciona lo **AN**, pero lo hace con más dificultad.

Este alumno además, utiliza de forma incorrecta un intento de conjunción lógica. Por ejemplo en la tarea 7b:

En el apartado **7b** que aparecen a continuación, decide si la afirmación es verdadera o falsa. En caso de ser falsa, explica por qué o muestra un contraejemplo.
Si f es continua en $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$.

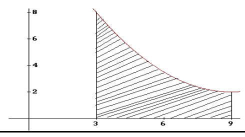
En la entrevista expresa la siguiente idea:

I: ¿Cuáles son los criterios que lo llevan al razonamiento de la proposición 7b?
A3: El teorema de la integral definida, porque aquí nos están diciendo que si una función es continua en un intervalo cerrado, entonces es integrable en el cerrado y el teorema de la integral definida nos dice que si una función es continua en un intervalo cerrado y derivable en el abierto.
I: ¿Cuáles son sus argumentos?
A3: Si viéndolo desde este punto, porque me están hablando del mismo intervalo y si la función es continua en ese intervalo, también es derivable e integrable **(A3E7b).**

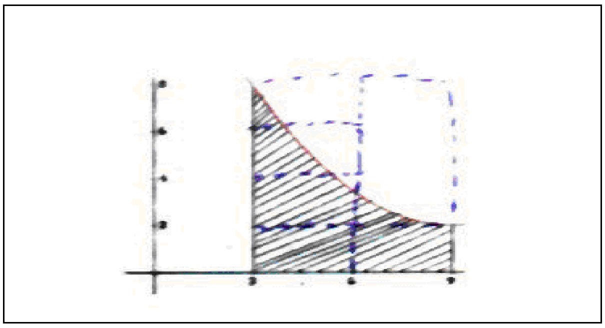
Este alumno identifica continuidad con derivabilidad e integrabilidad cuando utiliza el elemento matemático **LID** haciendo referencia a la condición suficiente de existencia de la integral, **continuidad implica integrabilidad** pero que en la derivada esta condición no se cumple, porque la **derivabilidad implica continuidad** y no al contrario ya que el recíproco de este teorema es falso.

Este alumno demuestra **no tener sintetizados los sistemas de representación,** porque en la tarea 1, aunque consigue justificar las cotas, no consigue dar mejores aproximaciones.

El área de la región rayada es mayor que **12** y menor que **48**.
a. ¿Por qué?
b. ¿Puede dar valores más ajustados?
c. ¿Cuáles?
d. ¿Cómo los obtiene?



Lo primero que hace es representar el gráfico para buscar formas geométricas con las que calcular una aproximación al área.



A3, representación G de la tarea 1 del cuestionario

De esta forma pone de manifiesto que recuerda el elemento matemático **ACA** de forma G. Utiliza la fórmula del área del rectángulo, construye un rectángulo superior de $6 \times 8 = 48$ unidades cuadradas, es decir un área mayor que la sombreada y ajusta más el área trazando 5 rectángulos de base 3 unidades y de altura 2 unidades y obtiene así un área aproximada de 30 unidades cuadradas.

Cuando se le interroga estos son sus argumentos:

I: ¿Qué más podría hacer para aproximar el área?
A3: Analizando la gráfica, veo que el área del rectángulo grande me dio 48 unidades cuadradas y sé que hay rectángulos que me están quedando en blanco, o sea que el área sombreada es menor que 48, ahora es mayor que 12, porque con sólo 2 rectángulos tengo 12 unidades cuadradas de área, y en realidad tengo 1; 2; 3, 4, diría que por simple observación, podría obtener 4 rectángulos completamente sombreados, o sea si las partes que están parcialmente sombreadas y las que están en blanco las reemplazo por una parte que ya está parcialmente sombreada, me darían 4 rectángulos sombreados, que seria 24 unidades cuadradas de área.
(A3E1).

Este alumno es capaz de utilizar el elemento matemático **ACA,** correctamente aplicando la fórmula del área del rectángulo. De esta forma, es capaz de justificar la cota superior calculando el área del rectángulo grande de 48 unidades cuadradas de área que cubre más que el área sombreada, y la cota inferior calculando un rectángulo menor de 12 unidades cuadradas de área que es menor que al área sombreada; y es capaz de ajustar más las cotas calculando el área de 4 rectángulos que dan una aproximación mejor, obteniendo así un valor aproximado de 24 unidades cuadradas de área. Además está coordinando los sistemas de representación gráfico y algebraico puesto que para calcular las áreas de los rectángulos los datos los obtiene de la representación gráfica de la función.

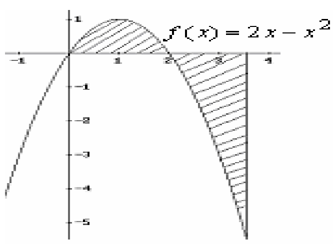
Durante la entrevista este alumno, en la resolución de la misma tarea comete algunos errores porque confunde la noción de cálculo aproximado con cálculo exacto e indica que la integral le permite obtener una aproximación del área. Además asigna a la Integral Definida un papel de fórmula, es decir, lo reduce a un cálculo algebraico.

I: Como le piden aproximar el área para ajustarla ¿Qué sería más recomendado?
A3: Para obtener un área más aproximada seria utilizar la fórmula de la integral definida…
I: ¿Podría aproximar más esa área?
A3: Si, utilizando la integral definida, porque aquí la podríamos utilizar tenemos los valores.
(A3E1).

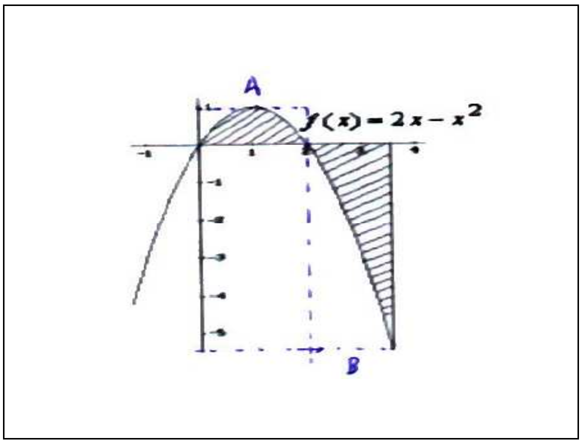
Durante la resolución de la tarea muestra un uso incorrecto del elemento matemático **LID** como una fórmula que le permite integrar para aproximar si dispone de una función y de los valores del intervalo.

Aunque en la tarea anterior el alumno ha sido capaz de coordinar dos sistemas de representación, en la tarea 5, muestra algunas dificultades:

Dada la gráfica de $f(x) = 2x - x^2$, calcular por aproximaciones el área de la región rayada. Justificar el procedimiento utilizado.

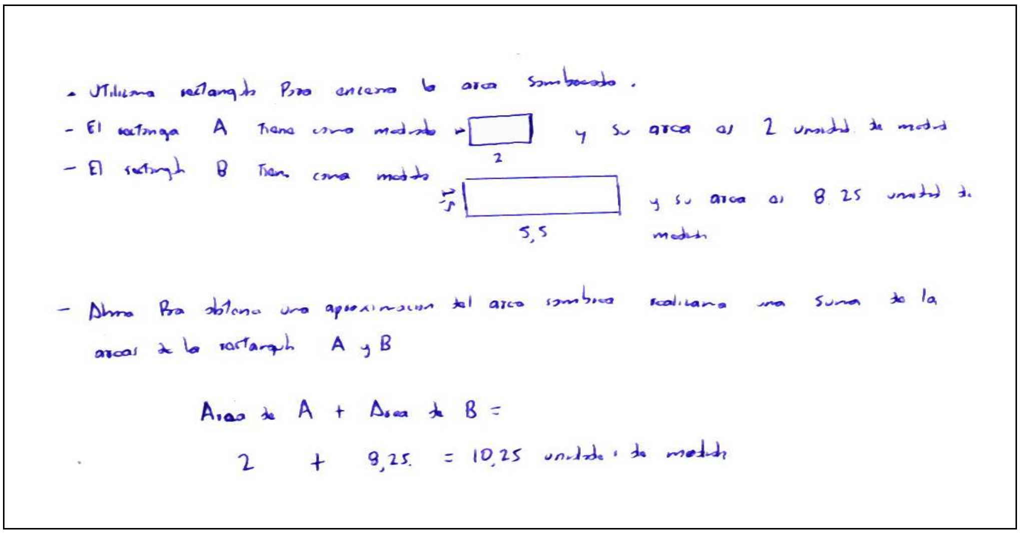


Inicialmente, en el cuestionario, utiliza un recubrimiento del área por medio de rectángulos y calcula el área de esos rectángulos, pero no es capaz de coordinar los dos registros de representación **G** y **A** para dar una aproximación correcta del área solicitada. En la siguiente imagen se puede ver la división del intervalo en dos subintervalos que hizo el alumno y los rectángulos que construyó para calcular el área.



A3, representación G de la tarea 5 del cuestionario

Como parte de la gráfica está por encima del eje de abscisas y parte por debajo, utiliza precisamente esta división para determinar los rectángulos, un rectángulo ***A*** por encima del eje x y un rectángulo ***B*** por debajo del eje x, con los que calcula una aproximación del área por exceso.



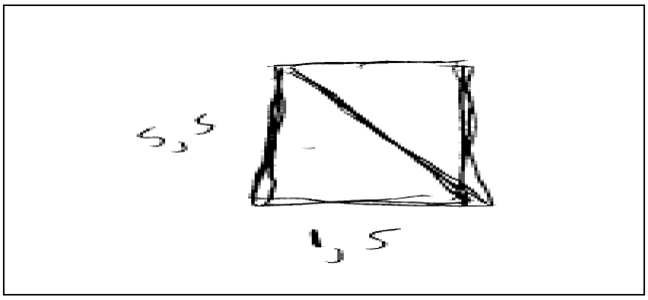
A3, resolución G y A de la tarea 5 del cuestionario

Por la forma como responde pone en evidencia que no coordina los dos registros de representación gráfico y algebraico. Establece una aproximación exclusivamente de forma **G** por exceso del área sin utilizar la expresión algebraica de la función que representa la gráfica, no usa la expresión algebraica de la función para calcular la altura del segundo rectángulo, sólo se fija en la representación gráfica. Durante la entrevista se observa el procedimiento usado, puesto que justifica así la resolución de la tarea:

I: ¿Cuando le dicen que aproxime un área qué hace?
A3:… trazo un rectángulo que vaya desde el punto 2 en x hasta -5,5 en y, y trazo una línea paralela al eje y que vaya de 2 en x, hasta 5,5 en $-y$ (traza la gráfica).
I: ¿De dónde obtiene 5,5?
A3: De una manera intuitiva…
I: ¿Qué quiere decir de manera intuitiva?
A3: Intuitiva, es que observo la gráfica y puedo decir qué estoy trabajando y cómo puedo hallar el área.
I: ¿Qué puede concluir de los resultados obtenidos y por qué?
A3: Puedo concluir, que de una manera intuitiva llegaría a un valor aproximado del valor del área, pero si me piden el valor exacto utilizaría la integral definida haciendo uso de la función y del intervalo que tengo.
(A3E5).

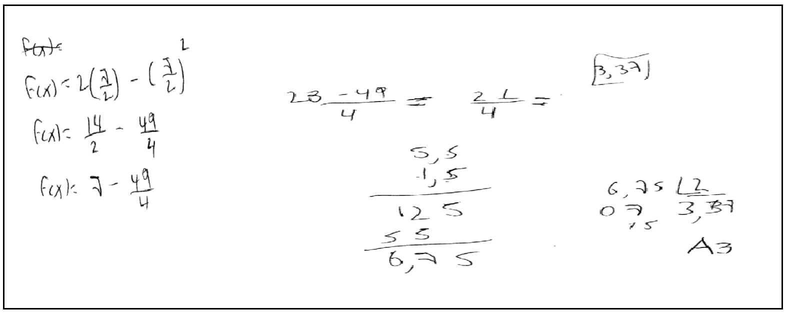
En este episodio reafirma verbalmente lo que hizo antes y muestra una concepción del elemento matemático **ACA** sólo como una intuición producto de una observación **G** para determinar los valores aproximados de los dos rectángulos. De esta forma sólo es capaz de dar una aproximación por exceso del área pero no de calcular el valor del área y, aunque recuerda el elemento matemático **LID** no lo aplica en la resolución de la tarea. Pero, cuando se le pide aproximar mejor el área, es capaz de utilizar el elemento matemático **ACA** de forma **G** y **A.** Aunque esos cálculos los hace de forma correcta, cuando vuelve a la representación gráfica recurre de nuevo a lo mismo que hizo en el cuestionario, un rectángulo de altura 5,5:

I: ¿De qué otra forma podría aproximar el área?
A3: Si observamos la gráfica el punto donde se encuentra la base es 1,5 y el punto de corte de la altura seria en 3,5.
I: ¿Cómo seria, calcúlela?
A3: Si $f(x) = 2\times 3{,}5-(3{,}5)^2$, entonces $f(x)=$ es igual a 2 $\times\frac{7}{2}-(\frac{7}{2})^2$, entonces va a ser igual a $\frac{14}{2}$ sobre 2 menos $\frac{49}{4}$, $f(x)$ va a ser igual a $7-\frac{9}{4}$ (susurra) *y 21 dividido 4. Como tengo la altura y sé que el área de un rectángulo es lado por lado, obtengo el área del rectángulo mayor y trazo una diagonal que me forma 2 triángulos, uno de los cuales va a estar conformado por la parte sombreada, entonces el área que me dio el rectángulo lo divido por 2 y esa me da el valor aproximado del triángulo.*
I: ¿Cuánto le dio el área bajo el eje OX?
A3: Seria de 3,37 unidades aproximadamente el área de abajo.
(A3E5).



A3, representación G de la tarea 5 durante la entrevista

Se pone en evidencia que trata de mejorar la aproximación del área bajo el eje x trazando una diagonal que le permite ajustar mejor el área sombreada, utiliza la fórmula del área del rectángulo y del triángulo, indica la base sobre el eje x de 1,5 y obtiene la altura evaluando la función en la longitud del intervalo de 5, 25; pero luego toma de altura un valor de 5,5 y finalmente se confunde en los cálculos y da una aproximación incorrecta (según el planteamiento realizado) del área por debajo del eje x.



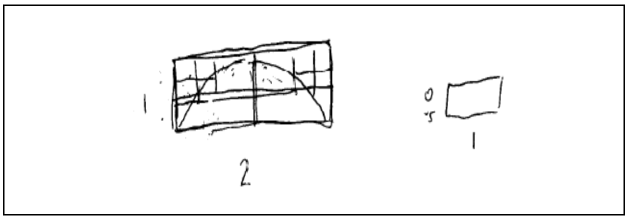
A3, representación A de la tarea 5 durante la entrevista

El estudiante calcula el área del rectángulo y luego la divide en dos para obtener el área del triángulo que representa el área de la región sombreada, pero se observa que el cálculo que hace del área del rectángulo es incorrecto ya que debería ser de 7,875 unidades cuadradas, que al dividirlo entre dos sería 3,9375 y él obtiene 6,75 del área del rectángulo y al dividirlo entre dos obtiene un valor de 3,37 unidades cuadradas que no corresponde con los valores que representa la gráfica.

En cuanto al área de la parte de la gráfica que está sobre el eje x, para obtener una aproximación mejor, expresa el siguiente razonamiento durante la entrevista:

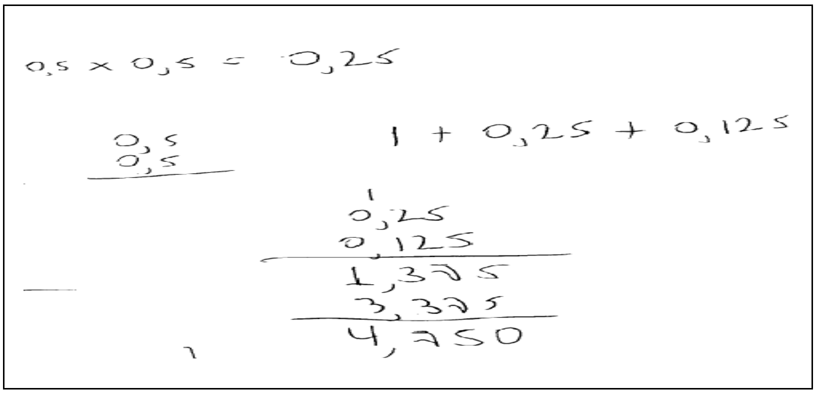
I: ¿Cómo calcula la parte sombreada que está sobre OX?
A3: Bueno, tengo un rectángulo de 2×1 *que a su vez lo voy a dividir en 4 rectángulos iguales, los cuales van a tener como área* 1×0.5, *le hallo el área a 2 subrectangulos, el área del rectángulo mayor fue 2, pero como voy a trabajar con 2, entonces ya tendría una unidad hallada, trabajaría con los otros 2, estos 2 que me quedan los divido en 2 me queda 0,5, se me formarían 2 cuadrados, se me formarían 4 cuadrados de 0,5 por 0,5, estos 2 quedarían cubiertos de área 0,5 por 0,5.*
I: ¿Por qué?
A3: Porque seria 0,5 por 0,5, que seria 0,25, me faltaría este pedacito, si parto uno de los cuadrados en 4 partes iguales obtengo 4 cuadrados de 0,25 por 0,25 igual a 0,125, luego tendría 1 + 0,25 más, pero 0,25 son 2, más 0,125, haría la sumatoria de esto y me quedaría 1,025 eso me daría 1,375 más lo que obtuve anteriormente, que fue 3,37 me daría 4,75 el área de las 2 partes sombreadas (hace cálculos en voz baja).
(A3E5).

El alumno hace la siguiente representación gráfica para explicar su razonamiento durante la entrevista:



A3, representación G de la tarea 5 durante la entrevista

Va dividiendo los rectángulos íniciales a la mitad para ir obteniendo mejores aproximaciones. Con la primera subdivisión, obtiene cuatro rectángulos de base 1 y de altura 0,5. Dos de esos rectángulos cubren la parte de abajo del área por lo tanto ahí tiene un área de 1 unidad cuadrada. Los dos rectángulos de la parte de arriba los divide, cada uno, en dos cuadrados que tiene cada uno un área de 0,5x0,5=0,25 unidades cuadradas. Dos de esos cuadrados (los centrales) le cubren otra gran parte del área y ahí tendría 0,5 unidades cuadradas, pero en lugar de considerar dos de esos cuadrados, no se da cuenta y sólo considera uno de ellos y por eso escribe 0,25. Finalmente, cada uno de los cuadrados de los extremos los divide en cuatro cuadrados de área 0,25x0,25= 0,0625, pero él se confunde en los cálculos y le asigna una medida de 0,125 unidades cuadradas. Realiza la suma de las cantidades obtenidas para establecer el área por aproximación. Percibimos que el alumno utiliza el elemento matemático **ACA** de forma **G** para calcular el área que está por encima del eje x, subdividiéndola mediante rectángulos. A continuación se pueden ver los cálculos realizados por este alumno:



A3, resolución A de la tarea 5 durante la entrevista

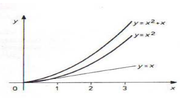
Aquí se puede ver que realiza algunos cálculos de forma incorrecta, por ejemplo cuando manifiesta que 0.25×0.25 es igual a 0,125 y otros valores tampoco coinciden con lo que manifiesta en el desarrollo del protocolo en la entrevista.

En general, el alumno no establece síntesis entre los sistemas de representación **G** y **A**, porque en lo gráfico se queda siempre en el plano intuitivo de la observación como él mismo lo menciona y no los coordina con los elementos algebraicos, además algunos cálculos numéricos los hace de forma incorrecta, y por tanto no logra dar una aproximación mejor del área y tampoco establecer esa área de forma analítica.

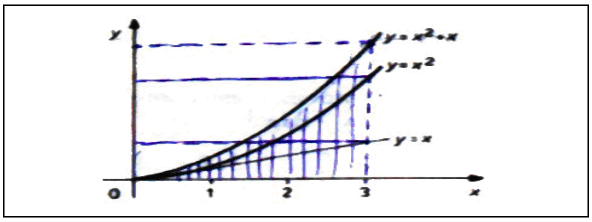
En la resolución que hace de la tarea 6.

Dada la gráfica de estas funciones, explicar en términos del gráfico,

por qué $\int_0^a (x^2 + x)dx = \int_0^a x^2 dx + \int_0^a x dx$.

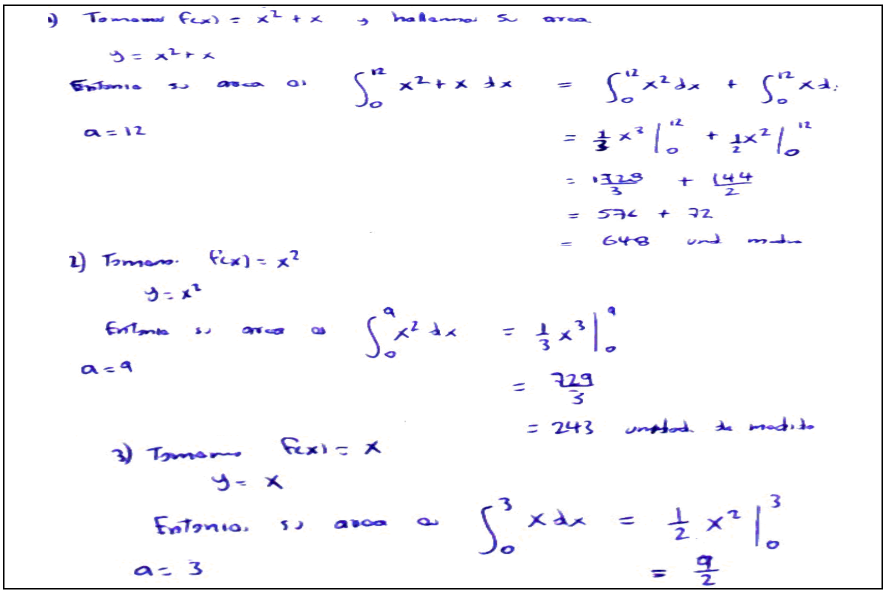


En el cuestionario, dibuja la gráfica de la función para realizar el razonamiento sobre ella:



A3, representación G de la tarea 6 del cuestionario

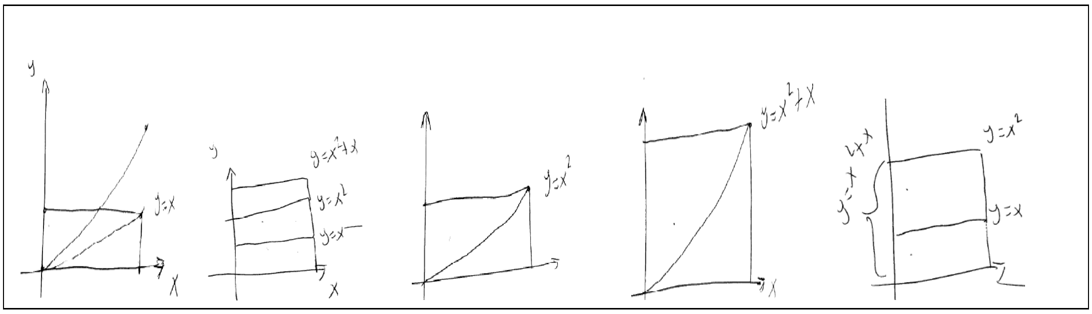
Intenta utilizar, inicialmente, el elemento matemático **ACA** de forma **G** trazando rectas paralelas al eje y para marcar el área comprendida por las tres gráficas y forma tres rectángulos de la misma longitud de la base 3 unidades, y con altura variable que asocia con el eje y. Además, el estudiante, en el cuestionario, manifiesta verbalmente que el rectángulo más grande es igual a la suma del mediano, más el pequeño; que el rectángulo mediano es igual a la resta entre el grande y el pequeño y finalmente que el rectángulo pequeño es igual a la resta entre el grande y el mediano. Pero para resolver la tarea, en lugar de hacerlo de forma gráfica, realiza una comprobación algebraica.



A3, resolución A de la tarea 6 del cuestionario

Es decir, calcula las tres integrales, pero les cambia los límites de integración, por lo que está confundiendo las dos variables x e y, no se da cuenta que los límites de integración se refieren al intervalo en el eje x y está calculando para cada una de esas tres funciones el extremos superior del intervalo sustituyendo el valor x=3 en $f(x)=x$, $f(x)=x^2$ y $f(x)=x^2+x$, lo que le da como límites 3, 9 y 12 respectivamente con lo que demuestra la falta de síntesis entre los sistemas **G** y **A.**

Durante la entrevista cuando se le pregunta realiza las siguientes gráficas:



A3, representación G de la tarea 6 durante la entrevista

La forma como relaciona las gráficas de las funciones para demostrar la propiedad se describen en el protocolo siguiente:

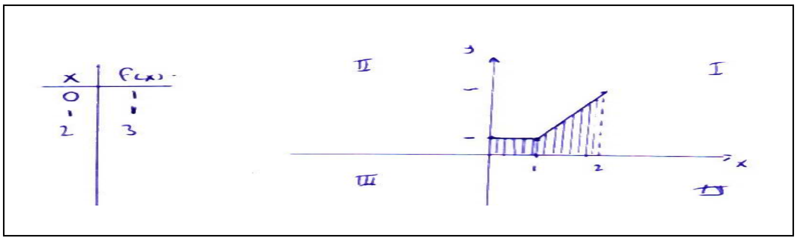
I: ¿Qué le piden en el ejercicio?
A3: El ejercicio me dice que explique el por qué de esa igualdad.
I: ¿En términos de qué?
A3: En términos de la gráfica, porque esa igualdad se puede expresar de manera gráfica, nos están mostrando la suma de las áreas de 3 gráficas que tienen una área bajo la curva, pero que la suma de las áreas independientes es igual al área total, entonces si le hallamos primero el área a una curva, le hallamos el área a la siguiente curva y finalmente hallamos el área de la otra curva, y si sumamos las 3 áreas nos debe dar algo igual.
I: ¿Cómo sería gráficamente, trate de hacerlo?
A3: Como me dicen acá, haría el rectángulo de uno que fue lo que utilice, luego haría el rectángulo del otro.
I: ¿Por qué rectángulos?
A3: Porque es una de las formas más fácil, la que más se utiliza para hallar un valor aproximado del área.
I: ¿Qué va hacer aquí en la gráfica?
A3: Mostrar que gráficamente nos están indicando 3 curvas, lo que quise hacer fue trazar líneas horizontales desde el punto de corte de la función hasta el eje x, ahí se me formaron 3 rectángulos, entonces lo que quise demostrar fue que el área de este rectángulo más el área de este otro me debe dar esta (grafica en una hoja).
I: ¿Qué función representa cada gráfica?
A3: ¿Qué función? Esta me representa $y = x$, esta representa $y = x^2$ y esta a $y = x^2 + x$.
I: ¿Qué quiere demostrar con eso?
A3: Lo que quise demostrar fue que la suma del rectángulo formado por la función $y = x$ más el área del rectángulo $y = x^2$, la suma de estos 2 rectángulos, es igual al área del rectángulo de $y = x^2 + x$.
(A3E6).

Tanto en la representación gráfica como en el protocolo de la entrevista se pone de manifiesto que el estudiante utiliza el elemento matemático **ACA** de forma **G** y establece una comparación geométrica de las áreas, relacionando la función $f(x)=x^2+x$ con el rectángulo de mayor altura, la función $f(x)=x^2$ con el rectángulo del centro y la función $f(x)=x$ con el rectángulo más pequeño o de menor altura, utiliza los conocimientos que tiene de aproximación de áreas por exceso para poder relacionar las áreas, pero no establece una síntesis en los sistemas de representación.

En este sentido, la falta de síntesis entre los sistemas de representación gráfico y algebraico lo conduce a no poder resolver la tarea 4 de forma correcta**.**

Calcular el área limitada por la gráfica de la función $f(x)=\|2x-1\|$, en el intervalo $[0, 2]$ y el eje x. Justificar la respuesta.

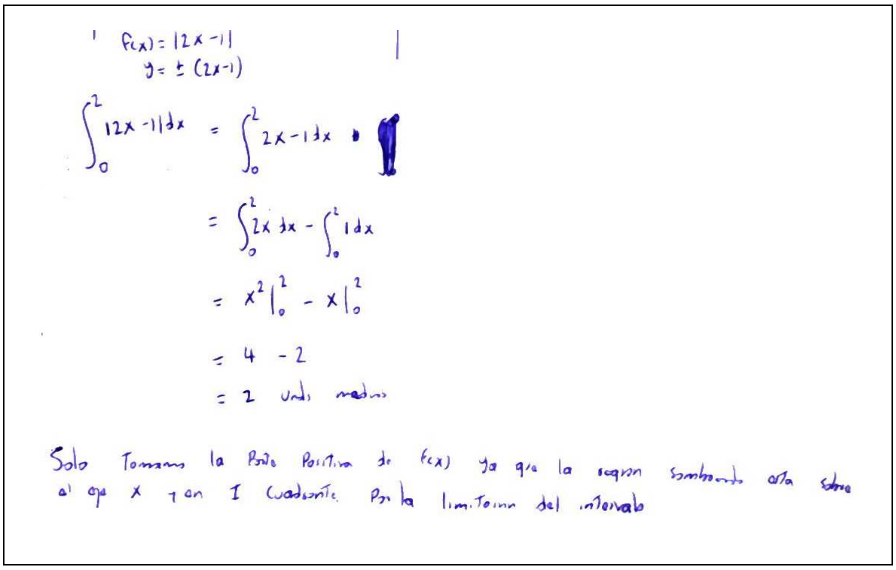
Para representar gráficamente la función parte de una tabla de valores que le conduce a una representación errónea.



A3, representación G y A de la tarea 4 del cuestionario

De esta forma le resulta una gráfica que va a influir luego en el cálculo del área correspondiente. Utiliza sus conocimientos de la función valor absoluto para asignar correctamente el valor 1 a x=0, pero no es capaz de coordinar la expresión algebraica con la expresión tabular y la gráfica.

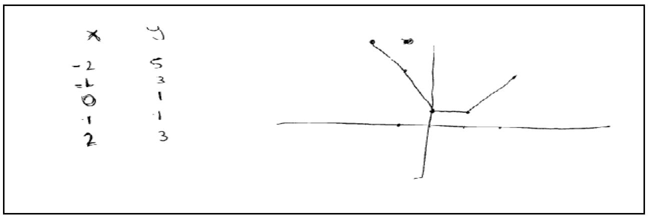
Una vez representada gráficamente la función, para calcular esa área utiliza el elemento matemático **TFV** de forma **A**:



A3, resolución A de la tarea 4 del cuestionario

En primer lugar asigna a la función valor absoluto el resultado de una raíz cuadrada, con un valor positivo y otro negativo, pero especifica que toma la parte positiva, y en segundo lugar calcula una integral de forma **A** utilizando **TFV** (regla de Barrow) y no utiliza la unión de intervalos sólo integra en el intervalo (0, 2). Durante la entrevista se da cuenta de que ha representado la función de forma incorrecta.

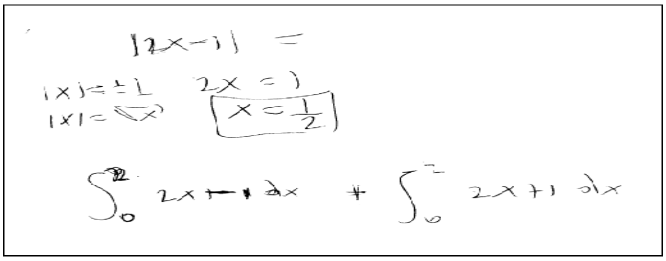
I: ¿Podría calcular el área a partir del gráfico, o de qué otra forma lo podría hacer?
A3: Si a partir del gráfico lo podría hacer.
I: ¿Cortaría la gráfica de esa función en alguna parte el eje x?
A3: La corta en y, en 1.
I: ¿Por qué, de dónde lo obtiene?
A3: Igualando $f(x)$ a cero y despejando x, obtengo $\frac{1}{2}$ y la gráfica no me estaría coincidiendo con el valor absoluto de x.
(A3E4).



A3, representación G de la tarea 4 durante la entrevista

Responde de forma **G** reafirmando lo mismo que había hecho en el cuestionario, y, aunque encuentra un punto común en el intervalo donde la función corta el eje x, el boceto que hace de la gráfica sigue siendo incorrecto y por tanto no logra calcular el área de forma **G** correctamente. Verbalmente responde utilizando el elemento matemático **TFV** de forma algebraica:

I: ¿Qué otra forma podría utilizar para calcular esa área?
A3: Me dan la función y el intervalo la puedo resolver con una integral definida.
I: ¿Cómo sería con una integral definida?
A3: Seria la $\int_0^2 |2x-1|\, dx$ *que expresa los valores positivos y negativos*
I: ¿Cuáles son los positivos?
A3: El valor absoluto lo que hace es que los valores positivos y los valores negativos los expresa como positivos, entonces sí quiero trabajarlo como una integral, tendría que hacer una suma de integrales que vaya de cero a 2.
I: ¿De 0 *a 2?*
A3: De 0 *a 2 de* $2x-1$ *más la integral de* 0 *a 2 de* $2x+1$ *para poder tomar los valores positivos y negativos, para discriminar los valores positivos y negativos de de la función, para no dejar ningún valor suelto.*
(A3E4).



A3, resolución A de la tarea 4 durante la entrevista

Define el valor absoluto de x, como la raíz cuadrada x. Para calcular el corte con el eje x despeja x y calcular correctamente dicho corte pero, al plantear la integral, no divide el intervalo de integración en dos subintervalos en función del corte que ha calculado y no determina correctamente cuál debería ser el integrando en cada uno de esos subintervalos ya que de 0 a ½ debería ser la función f(x)=1-2x y de ½ a 2 debería ser 2x-1. El problema reside fundamentalmente en la representación gráfica que ha hecho que no le permite visualizar el área que tiene que calcular correctamente.

A lo largo del desarrollo de la tarea, tanto en el cuestionario como en la entrevista, el alumno necesitaba establecer una conjunción lógica entre los elementos matemáticos

LID, PID y TFV en los sistemas de representación **G y A,** para poder inferir el valor del área de la región en el intervalo dado; pero se pone en evidencia que, aunque recuerda los elementos matemáticos e intenta relacionarlos, no logra resolver la tarea debido a la forma incorrecta en que ha representado gráficamente la función.

Por todo lo anterior, y por la forma como el estudiante resolvió las diferentes tareas a lo largo de todo el cuestionario, por la manera como fueron justificadas estas respuestas a través de la entrevista, consideramos que el estudiante se encuentra en el nivel **intra** de desarrollo del esquema.

La tabla siguiente representa las relaciones lógicas, los elementos matemáticos y los sistemas de representación utilizados por el alumno tanto en el nivel **intra 1**, como en el **intra.**

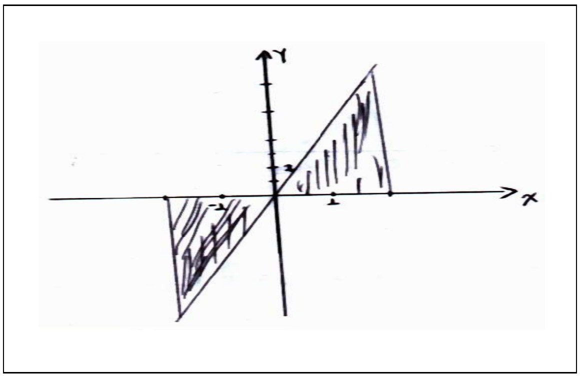
NIVEL	CARACTERÍSTCAS	ELEMENTOS MATEMÁTICOS	SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN
INTRA 1	**Recordar elementos matemáticos con errores.**	**El área como límite de una suma: (AN)** -El límite de las sumas de Riemann. **La Integral Definida: (A)** -La definición analítica de integral definida. -Condición suficiente: continuidad implica integralidad.	**Algebraico** **Analítico**
INTRA	**Mostrar dificultades en establecer relaciones lógicas (conjunción lógica) entre elementos matemáticos. (Intento de relación "conjunción lógica").** **Recordar algunos elementos matemáticos de forma aislada.** **No tener sintetizados los sistemas de representación.**	**El área como aproximación: (G,A)** -Aproximación del área de una región plana. -Fórmula del área del rectángulo. -Fórmula del área del cuadrado. -Fórmula del área del triángulo. -Partición del intervalo. -Sumas de Riemann. **El área como límite de una suma: (A, AN)** -Limite de una suma Riemann. **La Integral Definida: (G, A)** -La integral definida como área de una región. -La integral definida como cálculo algebraico. -Condición suficiente: continuidad implica integralidad. **Las propiedades de la Integral Definida:(A)** -Unión de intervalos. -Simetría. **Los teoremas fundamentales:(A)** -Regla de Barrow.	**Gráfico** **Algebraico** **Analítico**

Tabla4. 3. Relaciones lógicas, elementos matemáticos y sistemas de representación que caracterizan los niveles de desarrollo del esquema de integral definida en A3

También en este mismo **nivel intra**, el alumno A6**,** suele **mostrar dificultades en establecer relaciones lógicas (conjunción lógica) entre elementos matemáticos. (Intento de relación “conjunción lógica”).** Por ejemplo, en la tarea 2.

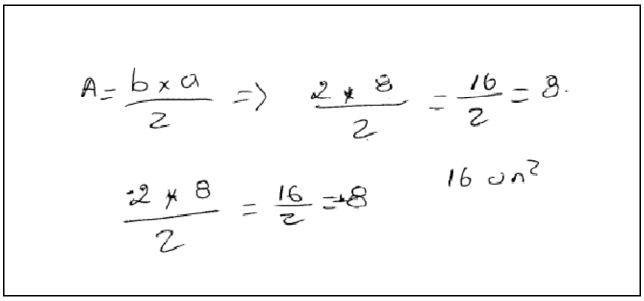
Sea **R**, la región encerrada por el gráfico de la función $f(x)=4x$ y el eje x, en el intervalo $[-2,\,2]$. a. Dibujar la gráfica. b. Calcular gráficamente el área de la región. c. Calcular la $\int_{-2}^{2} 4x\,dx$. d. ¿Son iguales los dos resultados anteriores? Justificar cada paso.

En el cuestionario, lo primero que hace es representar gráficamente la función.



A6, representación G de la tarea 2 del cuestionario

Sombrea el área que hay que calcular identificando claramente dos triángulos rectángulos simétricos, uno por encima y otro bajo el eje x, pero no llega a calcularla. En cambio, durante la entrevista sí es capaz de dar un valor para el área:



A6, resolución A de la tarea 2 durante la entrevista

Para ello, recurre al elemento matemático **ACA** de forma **A**, porque aplica la fórmula del área del triángulo, calcula el área del triángulo que está por encima del eje x y luego calcula el área del triángulo que está bajo el eje x, aunque a la base de este segundo triángulo le asigna una medida de longitud negativa -2. En el trascurso de la entrevista no expresa ese valor negativo de la base y además manifiesta que el área no puede ser negativa y por tanto suma las áreas y obtiene el área total.

I. ¿Cuándo grafica la función qué figura bajo la curva se formaron?
A6: Dos triángulos, uno por debajo del eje x y uno por encima del eje x.
I: ¿Gráficamente, cómo calcula esa área?
A6: Si, tengo que el área es base por la altura sobre dos, mi base es 2, mi altura es 8, sobre 2, eso me da 16, dividido 2 me da 8, esa es el área del triángulo rectángulo que está por encima del eje x.
I: ¿Cómo obtiene el área del que está bajo el eje x?
A6: Igual, es que tengo una base que es 2 unidades, una altura que es el mismo 8 y sobre 2 eso me da 16, dividido 2, me da 8,
I: ¿Cuánto da el área de toda la gráfica?
A6: Me da 16 unidades cuadradas.
I: ¿De dónde obtiene las 16 unidades cuadradas?
A6: De sumar las dos áreas la que está por encima y la que está por debajo sin tomar el signo obviamente un área no me puede dar negativa.
I: ¿Qué relación puedes establecer entre el área de la región bajo el eje ox y la región formada sobre el eje ox ?
A6: La relación que hay entre ellas dos, es que son las mismas, que ocupan el mismo espacio, estando en diferente posición.
(A6E2).

En cuanto al cálculo de la integral en el cuestionario da la siguiente solución:

$$\int_{-2}^{2} 4x\,dx = \left[2x^2\right]_{-2}^{2} = 8-8=0$$

A6, resolución A de la tarea 2 del cuestionario

Utiliza el elemento matemático **TFV**, para calcular la integral de forma **A** utilizando la regla de Barrow. Y demuestra que comprende la tarea:

I: ¿Por qué al calcular el área dio un valor y cuando calculó la integral dio cero?
A6: Porque cuando calculo la integral debo saber que en ese momento debo anteceder a la integral un menos indicando que el área está por debajo del eje x
I: ¿Qué le piden calcular?
A6: La integral.

I: ¿Cómo son los dos resultados?
A6: Los dos resultados son diferentes.
I: ¿Qué relación hay entre los dos procedimientos?
A6: Que en la integral no me están pidiendo que calcule el área, simplemente me piden que calcule la integral y la integral se me anula.
(A6E2).

En este extracto de entrevista se pone de manifiesto que esta alumna distingue entre el cálculo de la integral como área de una región del cálculo algebraico de la Integral Definida.

Además esta alumna muestra una concepción errónea de la continuidad puesto que indica que como la función corta al eje x, entonces no es continua.

A6: … dice que la región encerada por la recta $f(x)=4x$ y el eje x, lo que pasa es que en ese intervalo $[2,2]$ no está definida, y sabemos que para calcular la integral definida debe ser continua, cuando grafique el punto (0.0), ella no está definida, entonces tengo que tomar esta gráfica (señala con el dedo).
I: ¿Quién no está definida?
A6: La función $f(x)=4x$ y el eje de x.
I: ¿Esa función no es continua?
A6: En este intervalo desde -2 hasta 2, no.
I: ¿Por qué?
A6: Porque ella se me está cortando en el eje x y ahí, no hay una continuidad.
A6: El de 0.0, es un punto, pero me está cortando la recta.
I: ¿Entonces, por eso no es continua?
A6: Cuando se corta en más de un punto deja de ser continua.
I: ¿En cuántos puntos se está cortando?
E. Pues si está sobre el eje x, cuando trace una línea vertical ella se va a cortar.
(A6E2).

De forma global por los procedimientos que utilizó esta alumna consideramos que resolvió la tarea correctamente, pero también pone en evidencia que tiene una construcción errónea del concepto de continuidad, lo que no le permite hacer algunos razonamientos para justificar correctamente la tarea.

En el ejercicio 7c, se comprueba de nuevo las dificultades que tiene esta alumna, pero en este caso, al contrario de la pregunta anterior, no se da cuenta de que la función presenta una discontinuidad, y con el razonamiento que había hecho antes se tenía que haber dado cuenta que se aplica de manera errónea el elemento matemático **TFV** de forma **A**:

I: ¿Podría explicarme el razonamiento de la proposición 7c?
A6: No, es que no sé, no encuentro la manera, sé que si resuelvo esa integral, da -2.
I: ¿Por qué tiene dificultad, o, por qué no la hizo?
A6: Porque tengo una duda.
I: ¿Cuál es la duda?
A6: Me están colocando un menos acá cuando están resolviendo la integral para evaluar en ese intervalo, entonces no sé de dónde resulta.
I: ¿Cómo la resolvería?
A6: Umm, (susurra)
I: ¿Cuál es su razonamiento, ahora?
A6: Qué es verdadera, la resuelvo y me da el -2 del que me están hablando.
I: ¿Qué aplicó para resolverla?
A6: La solución de una integral definida, le sumo 1 al exponente y por procesos algebraicos.
(A6E7c).

$$\int_{-1}^{1} x^{-2}\,dx \Big| = \left(x^{-1}\right)\Big|_{-1}^{1} = \left(\frac{1}{x}\right)\Big|_{-1}^{1} \quad -1 -1 = -2$$

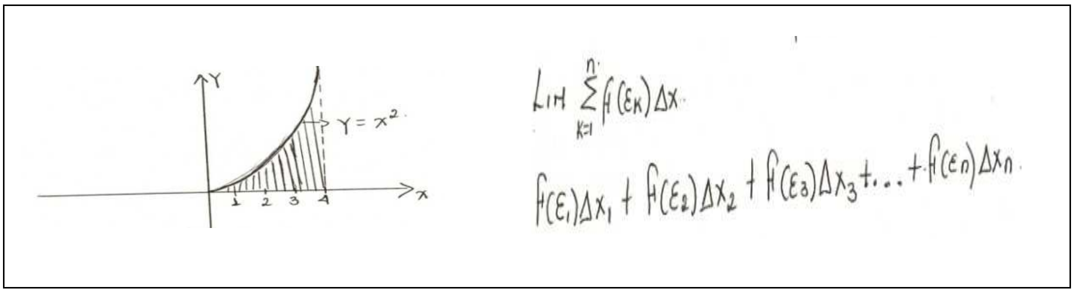
A6, resolución A de la tarea 7c del cuestionario

No tiene en cuenta las condiciones necesarias para poder aplicar la regla de Barrow porque la función presenta una discontinuidad en un punto del intervalo. Esto nos indica que no tiene interiorizados los conceptos necesarios para resolver correctamente la tarea.

Para la tarea 3.

Sea R la región entre la gráfica de la función $f(x)=x^2$ y el Intervalo [0,4] -Utiliza particiones para aproximar el valor del área de la región R. -Justifica tu respuesta.

Representa gráficamente la función y divide el intervalo mediante líneas verticales como si tuviera la intuición de los indivisibles. Desde el punto de vista algebraico, plantea el área como el límite de una suma de Riemann.



A6, representación G y A de la tarea 3 del cuestionario

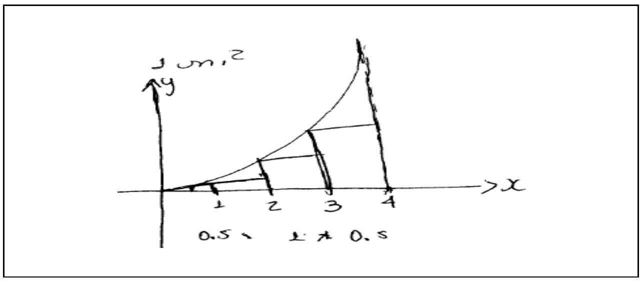
Recurre al elemento matemático **ALS** de forma **G** y **A**, por la forma en que ha representado la gráfica de la función y ha rellenado el área a calcular mediante líneas verticales y porque plantea algebraicamente el límite de una suma de Riemann, pero deja inconclusa la tarea. Esto mismo queda reflejado en la entrevista cuando dice:

A6: ... estas particiones las puedo calcular como el proceso limite de una suma de Riemann, que consiste en que cada partición épsilon la voy a evaluar en la función dada y la multiplico por la longitud del intervalo para conocer el valor de cada rectángulo, cuando calcule las áreas de cada uno de estos rectángulos, sumo esas particiones y obtengo una aproximación del área total.
(A6E3).

Para dar una aproximación del área señala:

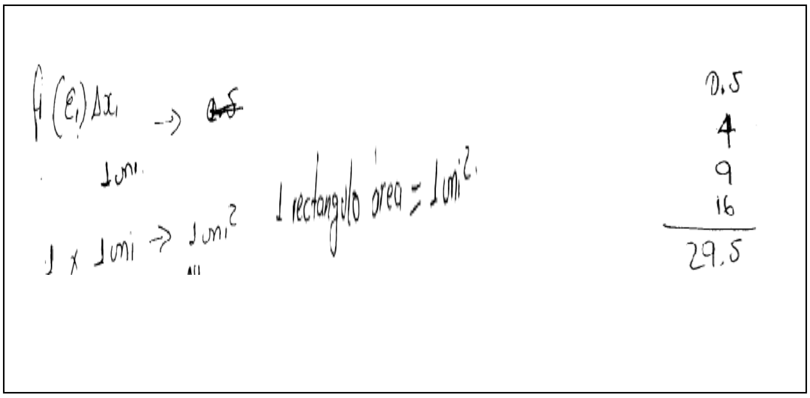
I: ¿Cómo lo haría hasta obtener un valor aproximado?
E. Con rectángulos.
I: ¿Cómo halla el área de cada uno?
A6: Hallo el área como la base por la altura y luego las sumo.
(A6E3).

Por ello, vuelve a representar gráficamente la función y aproxima el área mediante rectángulos inferiores fácilmente identificables mediante la escala de los ejes cartesianos:



A6, representación G de la tarea 3 durante la entrevista

Utiliza el elemento matemático **ACA** de forma **G**, porque dibuja la función, hace 4 particiones, traza 4 rectángulos inferiores bajo la curva para poder dar una aproximación del área solicitada. Además, resuelve la tarea de forma algebraica:



A6, resolución A de la tarea 3 durante la entrevista

Para ello determina una partición del intervalo de longitud 0.5 el primer subintervalo y de 1 unidad los siguientes. Una vez determinada la partición pasa al cálculo de las áreas de los rectángulos formados a partir de ella calculando la altura de cada uno de ellos evaluando la función en ε_k, para $k = 1,2,3,4$. En este momento se manifiesta que no coordina el registro gráfico con el algebraico puesto que, aunque dibuja rectángulos inferiores, las áreas las calcula para rectángulos superiores.

Cuando describe cómo va calculando las áreas de cada rectángulo, señala que el primero lo tiene que construir a partir de 0.5 porque no puede construir un rectángulo en el 0, porque está construyendo gráficamente rectángulos inferiores. Cuando tiene que hallar su altura, no evalúa el valor de la abscisa correspondiente en x^2, sino identifica la altura con la abscisa, en este caso 0.5 (el resto de los rectángulos van a tener de base 1). Además, para calcular el área del rectángulo tendría que multiplicar 0.5 por 0.5 y ella está considerando que el área es 0.5 en lugar de 0.25. Finalmente señala que el área calculada de esta forma es una aproximación por defecto cuando, en realidad, está calculando el área de rectángulos superiores, puesto que no está coordinando los dos registros, el gráfico y el algebraico.

I: ¿Cómo obtiene el área?

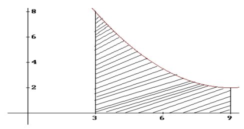
A6: El área es la función evaluada.
I: ¿Qué va a evaluar?
A6: x^2
I: ¿En qué valor va a evaluar a x^2*?*
A6: En 0.5
I: ¿Por qué en 0.5?
A6: Porque es mi altura
I: ¿Halle el área de cada uno, cómo sería?
A6: Del primer rectángulo me da de longitud 0.5 de base por 0.5 de altura.
I: ¿Cómo obtiene la base?
A6: La base no la puedo tomar desde 0 porque ahí, no se me forman rectángulos.
I: ¿Cuál sería el área del primero?
A6: El área del primero seria 0.5 por 0.5 de altura
I: ¿Cuál sería el valor, entonces?
A6: Seria 0,5+4+9+16=29,5
I: ¿Ese 29,5 qué representa?
A6: La cota más baja que puede tomar el área de la gráfica.
(A6E3).

Finalmente, suma las áreas de los rectángulos para obtener una aproximación del área solicitada.

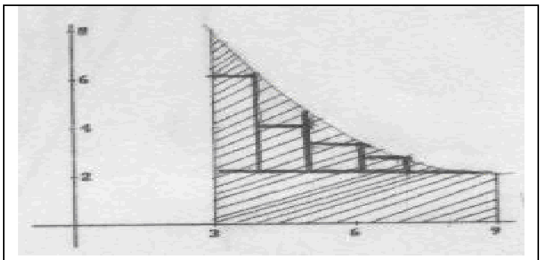
Esta alumna hace un un intento de conjunción lógica entre los elementos matemáticos **ACA**, **ALS** y **LID.** De forma **G** representa rectángulos inferiores al área bajo la curva para hacer una aproximación por defecto, de forma **A** utiliza la fórmula del área del rectángulo, aunque como no hay coordinación con el registro **G** lo hace con rectángulos superiores y de forma **AN** menciona particiones las sumas de Riemann y el límite de la sumatoria Riemann; pero está demostrado que estos elementos los recuerda de manera aislada, porque no logra utilizar los elementos necesarios en la resolución de las tareas; utiliza únicamente el elemento matemático **ACA** y no consigue una síntesis entre los sistemas gráfico y algebraico, para ella son sistemas independientes. No se da cuenta de que, aunque realiza una aproximación del área por defecto, obtiene un valor superior al valor real del área y, cuando se le pide aproximar más el área, sólo es capaz de mencionar que podría hacer cada partición más fina pero no es capaz de hacerlo.

A lo largo de la tarea 1, esta alumna **recuerda algunos elementos matemáticos de forma aislada.** Por ejemplo en la tarea 1.

El área de la región rayada es mayor que **12** y menor que **48**.
a. ¿Por qué?
b. ¿Puede dar valores más ajustados?
c. ¿Cuáles?
d. ¿Cómo los obtiene?



Aunque en el cuestionario, no es capaz de justificar las cotas que se le han dado en el ejercicio, señala que “a simple vista un valor más ajustado sería 32 unidades a 40”, y lo primero que hace es representar gráficamente la función e inscribir rectángulos bajo la gráfica de la función para aproximar el área por defecto.

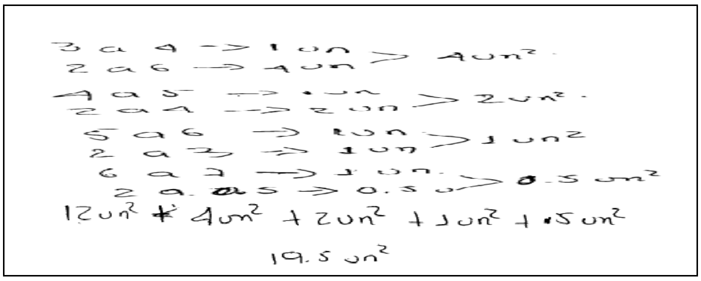


A6, representación G de la tarea 1 del cuestionario

Durante la entrevista es capaz de expresar un razonamiento y, a partir de esa representación gráfica, primero justifica las cotas establecidas en la pregunta de la siguiente forma:

A6: ...Tiene que ser mayor que 12 porque tomando el rectángulo de abajo da 12 y está sobrando un espacio, eso quiere decir que es mayor que 12 (señala sobre el gráfico).
I: ¿Cómo justifica que sea menor que 48?
A6: Menor que 48, por los otros rectángulos que tengo.
(A6C1).

Luego consigue dar una mejor estimación del área de forma **A:**


3 a 4 -> 1 un > 4un².
2 a 6 -> 4 un
4 a 5 -> 1 un > 2un².
2 a 4 -> 2 un
5 a 6 -> 1 un > 1 un²
2 a 3 -> 1 un
6 a 7 -> 1 un. > 0.5 un²
2 a 2.5 -> 0.5 u
12un² + 4un² + 2un² + 1un² + .5un²
19.5 un²

A6, resolución A de la tarea 1 durante la entrevista

Mediante el uso del elemento matemático **ACA** de forma **A**, calcula el área de cada rectángulo: el mayor de base 6 unidades y de altura 2 unidades, y la de los otros 4 que ha dibujado y que tienen de base 1 unidad y cuya altura ha establecido que es la mitad de la del rectángulo anterior. Suma las áreas parciales y obtiene el área total aproximada. Ella razona de la siguiente forma:

I: ¿Cuál es el valor de las áreas de los rectángulos que están entre la curva y el rectángulo base?
A6: Tengo uno de base uno, de 3 a 4 me da una unidad y de altura me está dando de 2 hasta 6, me da 4 por 1 me da 4 unidades cuadradas, de la misma manera hago las particiones, más o menos el primero lo tome de 2 a 4 en el eje x, el segundo lo tomo de 4 a 5 que sería mi base y la altura seria de 2 a 4, este da 2 por 1 me da dos unidades cuadras de área seria mi segundo rectángulo y el tercer rectángulo seria de 5 a 6 en la base, que sería una unidad y de altura 2 hasta 3, sería una unidad, esto me da, uno por uno me da una unidad cuadrada, el que sigue en la base seria de 6 a 7 que sería una unidad y de altura aproximadamente una unidad, que sería de 2 a 2.5 la anterior la tome a 3, éste me está dando más o menos en la mitad, entonces de 2 a 2.5, me da 0. 5, entonces esta me da 1 por 0. 5 me da 1.5 unidades cuadradas.
I: ¿Cómo obtiene el área total?
A6: … haciendo la sumatoria de todas las unidades que me dieron, pero de todas maneras me están sobrando unos espacios, y es ahí donde hago mis aproximaciones entonces voy a decir que 12 + 4, 16 + 2, 18 +1, 19, 19.5 dentro de lo que tome, ahora puedo aproximar los espacios que quedaron que no he tomado, entonces puedo decir que eso va a dar más de 20 y menos de 30. **(A6E1).**

Para resolver esta tarea aplica el elemento matemático **ACA** y describe lo que hace tanto de forma **G** como **A**, justifica la cota inferior y la superior aproximando el área por defecto. Aplica la fórmula del área del rectángulo para calcular el área de cada uno de los rectángulos inferiores, suma las áreas aproximantes y obtiene el área aproximada. Cuando se le pregunta cómo podría aproximar más el área contesta:

A6: Haciendo más particiones.

I: ¿Cómo sería?
A6: Refinando particiones.
I: ¿Qué es refinar particiones?
A6: Refinar particiones es partir los rectángulos que tengo en más rectángulos, en rectángulos cada vez más pequeños para hacer que el área sea más aproximada.
(A6E1).

Para realizar esta tarea ha recurrido al elemento **ACA** de forma **G** y **A,** aunque también ha mencionado el refinamiento de particiones.

A lo largo de esta tarea, además de reconocer que necesitaría la expresión algebraica de la función para aproximar mejor el área, **recuerda elementos matemáticos con errores.**

I: ¿Puede utilizar otros métodos para aproximar el área, cuáles?
A6: Para aproximar el área si, podría utilizar otros métodos siempre y cuando conociera en este momento la ecuación de la curva, podría utilizar una integral definida para hallar el área que está ocupando esa curva con el eje $x$en ese intervalo de 3 a 9.
I: ¿Qué le permite la integral definida, calcular el área o aproximar el valor de área?
A6: Aproximar el valor del área.
I: ¿Qué está haciendo ahora, calculando o aproximando?
A6: Estoy aproximando, porque no tengo la certeza con las puntas que me quedan en la gráfica.
(A6E1).

Aquí demuestra una concepción errónea en el elemento matemático **LID** cuando afirma que la Integral Definida sólo le permite aproximar el valor del área.

En la tarea 4, tampoco es capaz de relacionar varios elementos matemáticos. Sólo **recuerda algunos elementos aislados y con errores**.

Calcular el área limitada por la gráfica de la función $f(x) = \|2x-1\|$, en el intervalo $[0, 2]$ y el eje x. Justificar la respuesta.

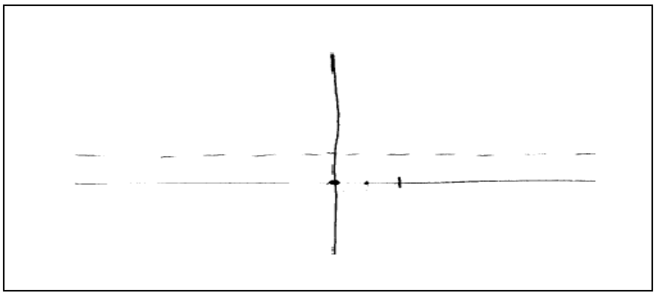
En el cuestionario resuelve la tarea de forma **A**:

$$A = \int_0^2 (2x-1)\, dx = x^2 \Big|_0^2 = 4$$

A6, resolución G de la tarea 4 del cuestionario

Indica que "como trata con la función valor absoluto, puedo deducir que esa función es positiva" por ello el integrando es la función considerada en la tarea, pero prescindiendo del valor absoluto. Para calcular la integral utiliza el elemento matemático **TFV** pero, además, cuando aplica la regla de Barrow, determina de forma incorrecta una primitiva de la función con lo que el resultado final es incorrecto.

Durante la entrevista intenta representar gráficamente la función:



A6, representación G de la tarea 4 durante la entrevista

Dicha gráfica no se corresponde ni con el integrando que utilizó en el cuestionario, ni con la gráfica de la función valor absoluto.

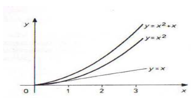
Esto es lo qué dice en el protocolo para justificar los procedimientos que utiliza:

A6: …el valor absoluto me está diciendo que el área va a dar positivo.
I: ¿Podría decirme cómo esbozaría el gráfico de esta función?
A6 Cuando x *valga* $\frac{1}{2}$*, la función vale 0 y ese es un punto por donde pasa la gráfica.*
I: ¿Cómo quedaría la gráfica?
A6: Me está mostrando una recta que se está desplazando una unid. (susurra y traza)
I: ¿Cómo calcularía el área?
A6: Por la integral la calcularía en el intervalo que me están dando de 0 a 2 y el eje x.
I: ¿Qué valor obtendría?
A6: Cuando la hallé me dio 4.
I: ¿Está de acuerdo con ese valor del área?
A6: No estoy muy segura porque no estoy manejando muy bien el valor absoluto **(A6E1).**

Por un lado, esta alumna relaciona erróneamente el que la función sea siempre positiva con que el área sea positiva. Además afirma que la función pasa por el punto (1/2,0), lo que no coincide con la gráfica que realizó puesto que no corta al eje x. De esta forma demuestra que **no coordina los registros de representación gráfico y algebraico**. Asocia el área con el elemento matemático **LID** ya que señala que para calcular el área utilizaría la integral, como efectivamente hizo, pero como ha representado de forma incorrecta la gráfica y tiene una concepción errónea de la función valor absoluto no es capaz de plantear correctamente la integral que debe hacer para calcular el área que se le pide. Se puede afirmar, por lo tanto, que no logra relacionar los elementos matemáticos, ni establecer las relaciones lógicas necesarias para la resolución de la tarea, tanto de forma **G** como **A**.

En la tarea 6.

Dada la gráfica de estas funciones, explicar en términos del gráfico, por qué $\int_0^a (x^2+x)dx = \int_0^a x^2 dx + \int_0^a x dx$.

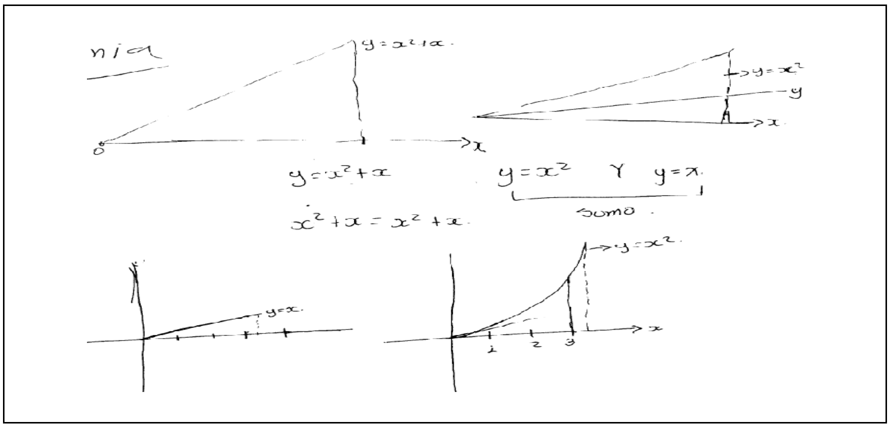


Esta alumna no es capaz de establecer un razonamiento gráfico cuando contesta al cuestionario y simplemente indica que "analizando numéricamente las áreas por separado; primero de la Integral Definida de $y = x^2 + x$ con el eje x me da igual que sumando las integrales definidas de $y = x^2$ con el eje x y y=x con el eje x, me da una igualdad, esto tomando a α (límite superior) como un valor arbitrario pero para todas las integrales el mismo". Es decir, ve la igualdad anterior como una identidad y no es capaz de considerar el por qué. Durante la entrevista justifica esta solución algebraica basándose en el elemento matemático **PID**:

A6: … por propiedades puedo decir que la integral que me dan $\int_0^a (x^2+x)dx$, *la puedo separar y me da la igualdad, por medio del gráfico me están diciendo que la*

grande contiene a las dos pequeñas, que la grande $y = x^2 + x$, da igual a la integral de $y = x^2$ más la integral de x.
(A6 E6).

Cuando se le pide que dé un razonamiento gráfico, hace las siguientes representaciones gráficas:



A6, representación G de la tarea 6 durante la entrevista

Representa por separado cada una de las funciones y delimita la región determinada por cada una de ellas a partir del origen y con el eje x. Utiliza el elemento matemático **ACA** de forma **G**, porque en lugar de representar la gráfica de la función $y=x^2+x$ la aproxima mediante un triángulo que recubre su área.

I: ¿Por qué utiliza sólo el registro algebraico?
A6: Gráficamente podría hacer un triángulo que me ocuparía el área del grande.
(A6 E6).

Luego compara las áreas geométricas y las suma para comprobar la igualdad, aunque en su intervención no se distingue si está hablando de las funciones o de las gráficas:

I: ¿Qué estaría representando ese triángulo?
A6: El área del gráfico grande está representando la suma de los dos pequeños.
I: ¿Qué más haría para demostrar que esa propiedad se cumple gráficamente?

A6: Ahora, puedo decir si $y = x^2 + x$ *y cojo los dos pequeños los puedo sumar.*
I: ¿Qué puede relacionar gráficamente, cómo puede concluir que son iguales? A6: Si sumo estas dos, $x^2 + x$*, seria la suma de estas dos áreas pequeñas que es* $x^2 + x$ *y eso da una igualdad* (escribe en una hoja).
(A6E6).

Aunque inicialmente recurrió al elemento matemático **PID** de forma algebraica para resolver la tarea utiliza de manera aislada el elemento matemático **ACA** de forma **G**, cuando dibuja por separado el área delimitada por cada función, para comparar luego el área de forma geométrica, pero no concluye la resolución de la tarea.

En la tarea 8, ella misma reconoce los problemas que tiene con el registro gráfico:

¿Cuál es el significado matemático de la Integral Definida de la función $y = f(x)$ en un intervalo $[a, b]$?

Inicialmente identifica la integral definida con el cálculo del área bajo una curva:

I: ¿Cómo le explicaría a un compañero el significado de la $\int_a^b f(x)\,dx$*?*
A6: Que la integral definida es el espacio que me está ocupando el área total y que debe ser continua en un intervalo para poder integrar.

Pero, al insistir en que desarrolle esa idea, expresa sus dificultades con el registro gráfico.

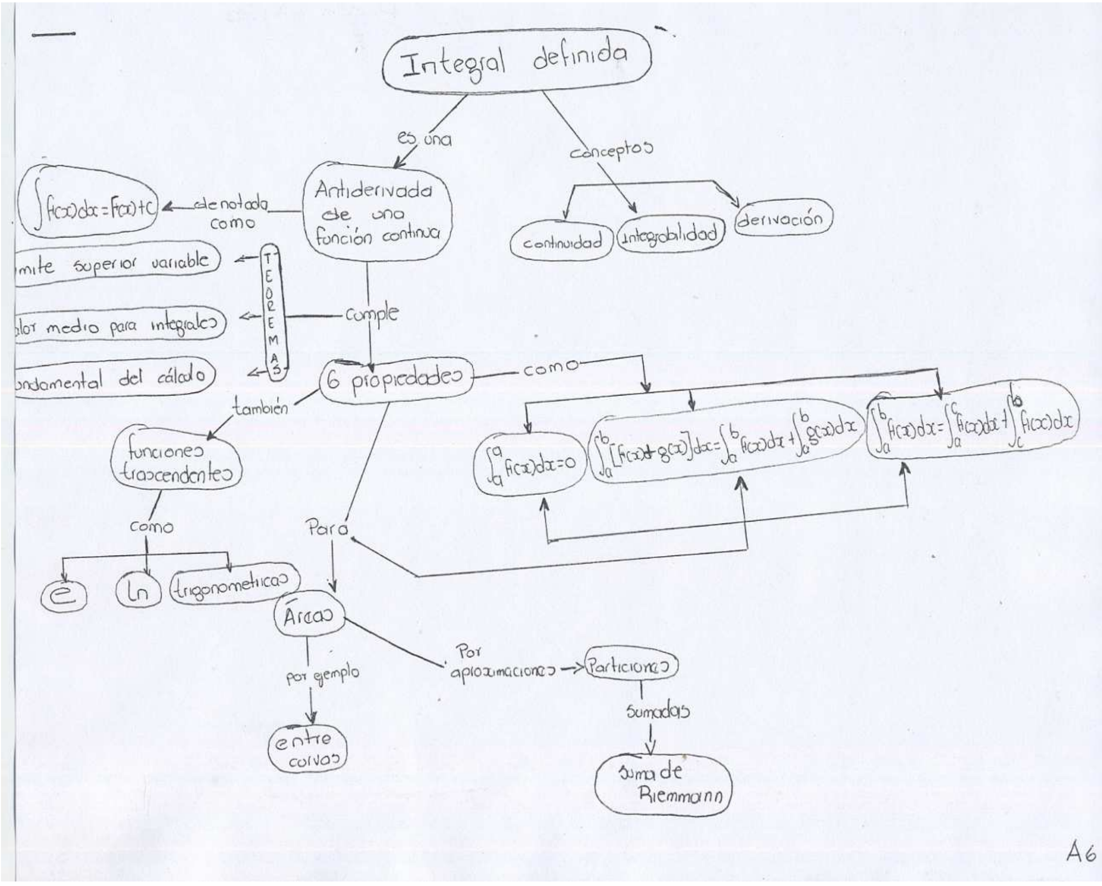
I: Si mañana tuviera que explicar el concepto de integral definida, ¿Cómo lo haría?
A6: Es que ahora que usted me está preguntando sobre esto, tengo demasiadas dudas.
I: ¿Cuáles dudas, por ejemplo?
A6: No, tengo todos los conceptos errados tengo muchos vacíos que creí haber llenado.
I: ¿Cuál es su propia definición en este momento de integral definida?
A6: Lo que pienso es que es el proceso límite de una suma de Riemann, cuando hago particiones y hallo el área de cada una de esas particiones, las sumo y me da el área total, pero con la integral definida no hallo una aproximación, hallo el valor del área.
I: ¿Por qué en la definición utiliza unos conceptos y lo hace con mucha propiedad, pero cuando le digo que si podría, explicarle a alguien tiene dificultad?

A6: Porque de esa manera, sí lo podría explicar, si tengo un área le podría explicar a alguien que si hago particiones cuando las sume eso me va a dar una aproximación del área; si voy hallar es un valor real, no aproximado utilizo la integral Definida, así puedo explicar esto, pero tengo otras cosas en las que no sé.
I: ¿Cómo cuáles?
A6: Como por ejemplo, el valor absoluto de una función, como la pregunta que me hizo ahora, cuando gráficamente no pude demostrar eso, es ahí donde sé que tengo conceptos claros pero hay cosas que me están fallando gráficamente y no puedo demostrar.

(A6E8).

Para responder a esta pregunta menciona algunos elementos matemáticos, pero muestra que tiene muchas dificultades. Por un lado, identifica el elemento matemático **LID** con el cálculo del área y, por otro ha trasformado una condición suficiente en una condición necesaria, lo cual no es cierto; porque lo que dice la condición suficiente es que **si una función f es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$, entonces f es integrable en $[a,b]$**, pero existen funciones que sin ser continuas son integrables; afirma que tiene conflictos para utilizar los elementos matemáticos y finalmente menciona el elemento matemático **ALS**, demuestra que recuerda los conceptos pero que no es capaz de utilizarlos para resolver las tareas del cuestionario y lo pone de manifiesto cuando afirma que gráficamente tiene dificultades para manejar esos elementos matemáticos y aplicarlos en la resolución de las tareas.

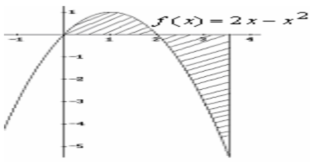
En este mismo sentido el mapa conceptual que presentamos a continuación representa la imagen mental que esta alumna tiene sobre el concepto de Integral Definida, en el cual también muestra cómo recuerda los elementos matemáticos que para ella configuran el concepto de Integral Definida.



A6, mapa conceptual que representa el concepto de Integral Definida

Por la representación mental que esta alumna hace de este concepto matemático se aprecia que recuerda los elementos matemáticos **ACA**, cuando menciona particiones y sumas de Riemann; **LID**, asociada a una antiderivada; **PID**, porque plantea algunas propiedades en concreto la integral de una constante y la propiedad de la unión de intervalos, y el elemento matemático **TFV,** pero no aparece representado el elemento matemático **ALS**. Estos mismos elementos los recuerda tanto en el cuestionario como en la entrevista de manera aislada y con dificultad como ella misma lo manifiesta en la resolución de algunas tareas del cuestionario y en las justificaciones que hace durante la entrevista. Estos elementos los plantea en un registro casi exclusivamente algebraico que demuestra los problemas que tiene con el registro gráfico. Podemos considerar que esta alumna **no tiene sintetizados los sistemas de representación** porque en la tarea 5:

Dada la gráfica de $f(x) = 2x - x^2$, calcular por aproximaciones el área de la región rayada. Justificar el procedimiento utilizado.



Responde de forma exclusivamente algebraica sin tener en cuenta que se le pide que lo haga por medio de aproximaciones:

$$A = \int_0^2 (2x - x^2)dx + \int_2^4 -(2x - x^2)dx$$
$$A = \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 + \left[-\left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\right]_2^4$$
$$A = \left(4 - \frac{8}{3}\right) + \left[\left(16 + \frac{64}{3}\right) - \left(4 + \frac{8}{3}\right)\right]$$
$$A = \frac{4}{3} + \frac{92}{3} = 32.$$

A6, resolución A de la tarea 5 del cuestionario

Utiliza los elementos matemáticos **LID, TFV y PID** de forma **A** para calcular el área sombreada. Decide utilizar la Integral Definida para calcular el área; divide el intervalo en dos dependiendo de si la gráfica de la función está por encima o por debajo del eje x; para el intervalo [2,4] cambia de signo la integral al ser la función negativa, calcula correctamente una primitiva y aplica la regla de Barrow pero se confunde al hacer las sustituciones en los extremos del segundo intervalo olvidándose del signo negativo. Finalmente hace cálculos algebraicos incorrectos que no le permiten obtener el valor real del área.

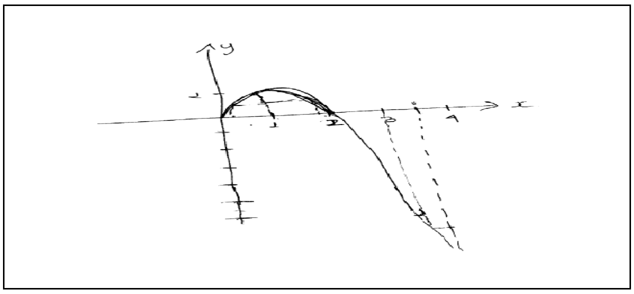
Durante la entrevista, se da cuenta que se le pide que trate de hacerlo por aproximaciones y que con el cálculo anterior lo ha hecho de forma exacta:

A6: Me dicen que aproxime el área y me dan una curva partida en 2 en el eje x *, entonces con una integral definida puedo hallar el área.*
I: ¿Qué le pide el ejercicio?
A6: Aproximar el área. La integral definida me da un valor exacto.
(A6E5).

Por ello menciona la subdivisión del intervalo y la utilización de rectángulos para poder aproximar el área:

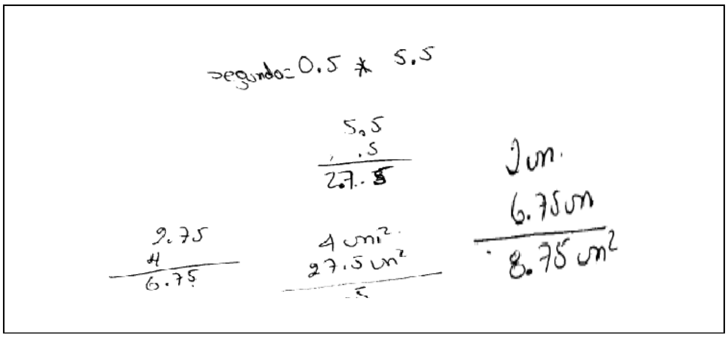
I: ¿Cómo aproximaría el área?
A6: Por particiones puedo sacar rectángulos, que me ocupen el área de las gráficas.
I: ¿Cómo seria, trácelos?
A6: La primera curva se está moviendo en el eje x, 2 unidades y en el eje y positivo hasta 1, me dan una parábola que abre hacia abajo, entonces particiono.
(A6E5).

Para ayudarse en su razonamiento realiza nuevamente la gráfica de la función y utiliza el elemento matemático **ACA** de forma **G** intentando aproximar el área mediante rectángulos inferiores:



A6, representación G de la tarea 5 durante la entrevista

Hace cálculos algebraicos apropiados para aproximar el área.



A6, resolución A de la tarea 5 durante la entrevista

Para ello, divide el intervalo en dos subintervalos según que la gráfica esté por encima del eje x o por debajo. Recubre el área correspondiente al intervalo [0,2] mediante dos rectángulos idénticos de medidas 1x1, con lo que obtiene una aproximación de esa parte del área de 2 unidades cuadradas:

A6: La primera curva se está moviendo en el eje x 2 unidades, y en el eje y positivo hasta 1, me está dando una parábola que abre hacia abajo, entones como particiona el primer rectángulo y tomo de base un
I: ¿Cómo obtiene la altura?
A6: La altura, si miro a la gráfica la altura está dando hasta 1
I: Si
A6: Me dicen que la función de esa curva es $f(x)=2x-x^2$, entonces esa unidad la puedo evaluar en la función y me da el valor de la altura
(A6E5).

Para el primero de esos rectángulos no tiene problemas en calcular la altura, evalúa la función en $f(1)$. No se da cuenta que de esta forma está suponiendo que el rectángulo es superior y ella lo ha dibujado inferior. Para el segundo, esto además le va a dar problemas porque piensa que la altura vendrá determinada por $f(2)$ y eso le da una altura de 0 que no concuerda con la representación gráfica, por lo que podemos deducir que no está coordinando el registro gráfico con el algebraico lo que le lleva a una confusión. Esto tiene que ver con el crecimiento y decrecimiento de la función. Esta alumna tiende a evaluar la función en el extremo derecho del intervalo; si la función es creciente eso le permite calcular la altura de rectángulos superiores, por eso se produce el error en el primer rectángulo. Y si la función es decreciente calcula la altura de rectángulos inferiores, lo que no le coincide con la gráfica que ha hecho porque tendría un rectángulo de altura 0. Como el resultado que obtiene no es el que espera decide que hay que evaluar la función en 1, en lugar de 2, con lo que sigue utilizando rectángulos superiores, pero, además, según su razonamiento, no porque sea el lugar correspondiente a la abscisa de la altura del rectángulo sino porque la base del rectángulo es de una unidad:

I:… ¿Cómo obtiene el área del segundo?
A6: El área del segundo, evaluando la función en 2, que es $2x-x^2$, 2 por 2 y 2 al cuadrado da 4, menos 4 me da 0
I: ¿Por qué en 2?
A6: No en 1, que es la longitud del intervalo, que es la base.
I: ¿Cuándo da el área?
A6: La base a estoy cogiendo desde 1 hasta 2.
I: ¿Cuánto es el área del segundo?

A6: 1
I: ¿Cuánto da el área total sobre el eje OX?
A6: 2 unidades sobre el eje x
(A6E5).

A continuación calcula el área que está bajo el eje x, y obtiene un valor aproximado de 2 unidades cuadradas.

I: ¿Cómo calcularía el área bajo el eje OX?
A6: Lo mismo con particiones.
I: ¿Cómo sería?
A6: Tengo la misma curva que se extiende de forma decreciente y que no alcanza a partir en 4, aproximadamente en 3.5 y tiene una recta paralela al eje Y, que corta con la gráfica de la parábola, los valores del eje Y están dando negativos, y la gráfica según la estoy viendo va más o menos hasta -0.5.
I: ¿Qué figuras va a formar bajo el eje OX?
A6: Rectángulos.
I: ¿Cuántos rectángulos trazaría?
A6: 2, uno que tiene de longitud 1 unidad de base
I: ¿Cómo obtiene la altura de ese rectángulo?
A6: Evalúo la función
I: ¿Cuánto le daría?
A6: 1 una unidad para el primero y el segundo sería…
I: ¿Cuánto mide el área
A6: ¿El área ¿1
I: ¿El área de ese rectángulo es 1?
A6: Es la base por la altura
I: ¿Cómo obtiene la altura?
A6: Pero es que la altura la puedo tomar viendo las unidades en las que me están partiendo el eje y de la gráfica que me dieron inicialmente, que va hasta -5 y puedo decir que si la base es 1, la altura la puedo tomar hasta 4 y calcula el área del rectángulo como la base por la altura y obtengo 4 unidades cuadradas.
(A6E5).

Se aprecia que no es capaz de coordinar los registros gráfico y algebraico por varias razones. En primer lugar no se da cuenta que está calculando el área por defecto y en ese caso no existiría ningún rectángulo en el intervalo [2,3]. Además, para calcular la altura de ese rectángulo no evalúa la función en un punto del intervalo sino que se fía de la gráfica que hizo y escoge un valor de forma intuitiva.

Le queda el cálculo del área del último rectángulo para el que le ocurre algo parecido puesto que no se da cuenta de que tiene que calcular el área por defecto y en lugar de evaluar la función en x=4 considera como altura de ese rectángulo la correspondiente al extremo derecho del intervalo y por eso le da un valor de 5,5:

I: ¿Cómo calcularía el segundo?
A6: De la misma manera, pero el segundo ya tendría de base 0,5.
I: ¿Cómo obtienes esa área?
A6: Pues multiplicando 0,5x5,5
(A6E5).

Finalmente obtiene una aproximación del área bajo la curva sumando los resultados anteriores:

I: ¿Cómo obtiene el área total por aproximación?
A6: Entonces, 2 unidades que están por encima y 6.75 que están por debajo me dan 8.75 aproximando al área total.
(A6E5).

Cuando se le pregunta que si puede obtener mejores aproximaciones menciona que lo podría hacer utilizando más particiones.

I: ¿Cómo obtendría mejores aproximaciones?
A6: Haciendo más particiones.
(A6E5).

Esta alumna no logra concluir el desarrollo de la tarea, porque en el cuestionario sólo proporcionó una resolución algebraica mediante el uso del **TFV** sin abordar la tarea por aproximaciones y durante la entrevista aplica el elemento matemático **PID**, en concreto las propiedades de la integral de funciones positivas y negativas a partir de las subdivisiones del intervalo y calcula el área por utilizando el elemento **ACA** de forma **G** y **A**, pero sin ser capaz de coordinar los dos registros.

Los elementos matemáticos que recuerda son **ACA**, **LID** y **TFV**, algunos de ellos los utiliza en la resolución de las tareas, y los elementos matemáticos que menos utilizó a lo largo del cuestionario son **ALS** y **PID**. Asimismo recuerda y utiliza de forma errónea el elemento matemático **LID,** porque afirma que la Integral Definida le permite aproximar el valor del área, y **TFV** porque no tiene en cuenta que para aplicar la regla de Barrow, la función ha de ser continua.

Por la forma como esta alumna resolvió las diferentes tareas a lo largo de todo el cuestionario, cómo fueron justificadas esas respuestas en la entrevista, y por la comprensión del concepto de Integral Definida que refleja en el mapa conceptual, consideramos que esta alumna se encuentra en el nivel **intra,** de desarrollo del esquema del concepto de Integral Definida.

En la tabla siguiente se resumen las relaciones lógicas, los elementos matemáticos y los sistemas de representación utilizados por esta alumna correspondiente tanto en el nivel **intra 1** como en el nivel **intra.**

NIVEL	CARACTERÍSTCAS	ELEMENTOS MATEMÁTICOS	SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN
INTRA 1	**Recordar elementos matemáticos con errores.**	**La Integral Definida: (A)** -La definición analítica de integral definida. Condición suficiente: continuidad implica integrabilidad. **Los teoremas fundamentales: (A)** -Regla de Barrow.	**Algebraico** **Analítico**
INTRA	**Mostrar dificultades en establecer relaciones lógicas (conjunción lógica) entre elementos matemáticos. (Intento de relación “conjunción lógica”).** **Recordar algunos elementos matemáticos de forma aislada.** **No tener sintetizados los sistemas de representación.**	**El área como aproximación:(G,A)** -Aproximación del área de una región plana. -Fórmula del área del rectángulo. -Fórmula del área del triángulo. -Partición del intervalo. -Sumas de Riemann. **El área como límite de una suma:(G,A)** -Límite de las sumas. **La Integral Definida:(G.A)** -La integral definida como área de una región. -La definición analítica de integral definida. -Funciones positivas y negativas. -Condición suficiente: continuidad implica integrabilidad. **Las propiedades de la integral definida: (G,A)** -Integrales especiales -Unión de intervalos. -De linealidad. -De las funciones positivas y negativas. **Los teoremas fundamentales y del valor medio: (G, A):** -Regla de Barrow -Antiderivada de una función continua	**Gráfico** **Algebraico** **Analítico**

Tabla 4.4. Relaciones lógicas, elementos matemáticos y sistemas de representación que caracterizan los niveles de desarrollo del esquema de integral definida en A6.

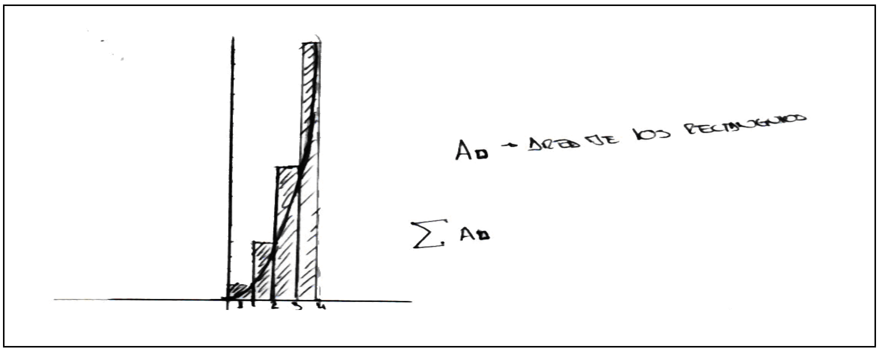
4.1.3. Nivel ínter 1

En este subnivel de desarrollo del esquema del concepto de Integral Definida es característico que el sujeto sea capaz de usar la conjunción lógica (y lógica) de forma correcta entre elementos matemáticos dados en el mismo sistema de representación; recordar algunos elementos matemáticos gráficos, algebraicos y/ o analíticos, y tener esbozo de síntesis de los sistemas de representación gráfico y algebraico.

Entre los alumnos con quienes se realizó este estudio, **A9** muestra **tener esbozo de síntesis de los sistemas de representación gráfico y algebraico.** Por ejemplo en la tarea 3.

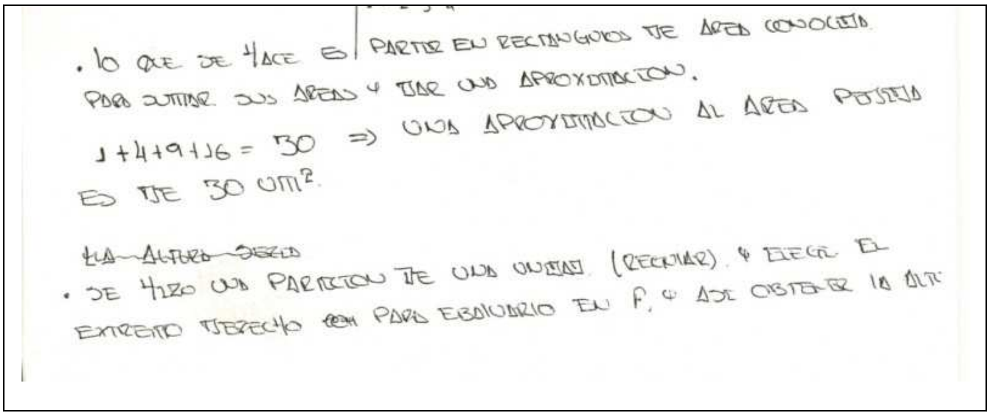
Sea R la región entre la gráfica de la función $f(x)=x^2$ y el Intervalo [0,4] **-**Utiliza particiones para aproximar el valor del área de la región R. **-**Justifica tu respuesta.

Para responder a la tarea lo primero que hace es una representación **G** de la función:



A9, representación G de la tarea 3 del cuestionario

Para ello utiliza el elemento matemático **ACA** de forma **G** realizando una partición en la que cada subintervalo tiene una longitud de una unidad. Traza 4 rectángulos superiores para hacer una aproximación del área por exceso y, calcula sus áreas y las suma.



. LO QUE SE HACE ES PARTIR EN RECTÁNGULOS DE ÁREA CONOCIDA PARA SUMAR SUS ÁREAS Y DAR UNA APROXIMACIÓN.

$1+4+9+16 = 30 \Rightarrow$ UNA APROXIMACIÓN AL ÁREA POSIBLE ES DE 30 cm^2.

~~LA ALTURA SERÍA~~

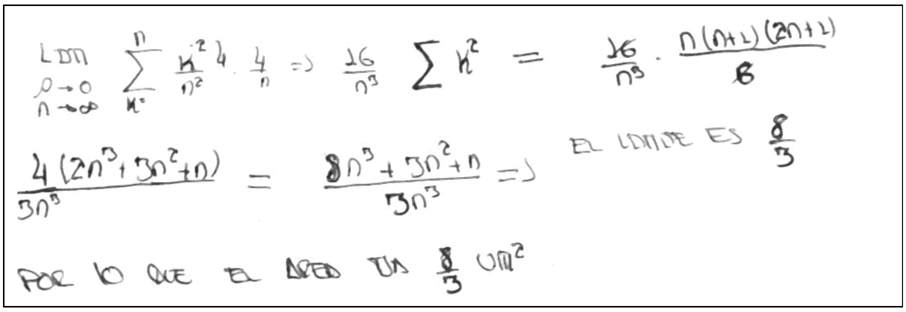
. SE HIZO UNA PARTICIÓN DE UNA UNIDAD (REGULAR) Y ELEGÍ EL EXTREMO DERECHO PARA EVALUARLO EN F, Y ASÍ OBTENER LA ALT

A9, resolución A de la tarea 3 del cuestionario

Ha sido capaz de coordinar la representación **G** con la **A** para calcular la altura de cada rectángulo sustituyendo la abscisa correspondiente en la expresión algebraica de la función, aplicar la fórmula del área del rectángulo, calcular el área de cada rectángulo, sumar esas áreas y obtener el área total aproximada por exceso. Pero durante la entrevista se observa que confunde las subestimaciones con la idea de hacer la partición con subintervalos cada vez más pequeños.

I: ¿Cuándo se aproxima más al área usando subestimaciones o sobreestimaciones y por qué?
A9: Subestimaciones, porque entre más pequeños los hago me aproximo más al área.
(A9E3).

Para dar un valor exacto del área el alumno trata de calcular el límite de una sumatoria de Riemann.



$$\lim_{\substack{p\to 0\\ n\to\infty}} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2}4 \cdot \frac{4}{n} \Rightarrow \frac{16}{n^3}\sum k^2 = \frac{16}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\frac{4(2n^3+3n^2+n)}{3n^3} = \frac{8n^3+3n^2+n}{3n^3} \Rightarrow$$ EL LÍMITE ES $\frac{8}{3}$

POR LO QUE EL ÁREA ES $\frac{8}{3}$ cm^2

A9, resolución A y AN de la tarea 3 del cuestionario

Aquí utiliza el elemento matemático **ALS** de forma **AN.** Para ello calcula la base de cada subintervalo para una partición determinada, evalúa la abscisa en la expresión algebraica de la función para determinar la altura, plantea la sumatoria de Riemann, y calcula el límite de la sumatoria, aunque el cálculo algebraico que hace es incorrecto puesto que multiplica la expresión por 4 dos veces cuando sólo tiene que aparecer una vez.

Durante la entrevista relaciona el límite de la suma de Riemann con la Integral Definida.

I: ¿De qué otra forma diferente a la anterior podría calcular el área bajo la gráfica?
A9: Usando el límite de la sumatoria de Riemann, que en últimas es una integral definida.
I: ¿Cómo plantearía el límite de una sumatoria de Riemann en este ejercicio?
A9: Es que el límite de la sumatoria de Riemann cuando n tiende a infinito y la partición tiende a 0 siempre es la integral definida, pero para evitarme tanto trabajo con la integral definida.
(A9E3).

De esta forma se esboza además un intento de conjunción lógica entre el elemento matemático **ACA** de forma **G** y el elemento matemático **ALS** de forma **AN,** porque menciona las particiones, la construcción de rectángulos inferiores y afirma que si traza rectángulos cada vez de menos longitud en la base, se aproxima más a la curva y lo relaciona con el límite de las sumas Riemann obtenidas de las áreas aproximantes de los rectángulos y además asegura que cuando está calculando el límite de la sumatoria lo que está aplicando es la Integral Definida. Pero considera que el elemento **ALS** de forma **AN** sólo permite conseguir una aproximación del área lo que indica una concepción errónea del concepto de límite.

I: ¿Que expresa el límite de una sumatoria de Riemann?
A9: Expresa como se podría utilizar la máxima aproximación al área, primero la sumatoria de Riemann, cuando uno hace una partición divide un intervalo en n puntos y esos puntitos se van hacer cada vez más pequeños que son la base de los rectángulos al usar la altura como f después usando el valor funcional como altura eso va aproximando, entre más pequeños haga esos rectángulos más voy a rellenar de rectángulos toda el área que estoy aproximando, así que me van a quedar espacios más pequeños, entonces a medida que hago más fina esa partición,

me va aproximar al área, por eso cuando usamos el concepto de limite, que es cuando el límite de esos n puntos tienda a infinito, estoy aproximando más el área. **(A9E3).**

De manera global durante la resolución de la tarea se puede inferir que este alumno establece conjunción lógica entre los elementos matemáticos **ACA, ALS**, y **LID** y ha coordinado los sistemas de representación **G**, **A** y **AN**, pero menciona incorrectamente el límite como una aproximación.

En la tarea 8:

¿Cuál es el significado matemático de la Integral Definida de la función $y = f(x)$ en un intervalo $[a, b]$?

Para responder la tarea este alumno expresa verbalmente un esbozo de síntesis entre los sistemas de representación.

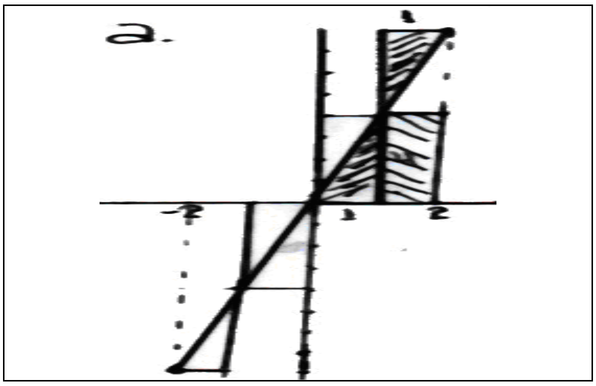
I: ¿Cómo le explicaría a una persona el concepto de integral definida?
A9: Ese concepto, explicándole que sería una sumatoria de Riemann, por qué se hace la sumatoria de Riemann, de dónde surgió, explicando primero el método exhaustivo, para llegar al concepto de sumatoria de Riemann, al límite de una sumatoria de Riemann, hasta llegar a definir qué es la integral definida.
I: ¿Qué es para usted la integral definida?
A9: Es el límite de una de una sumatoria de Riemann, cuando la partición tiende a cero y la norma de la partición tienda a cero, o sea cuando el intervalo pequeño tienda a cero, o cuando el número de puntos en los que partí tiendan a infinito.
(A9E8).

En este extracto se aprecia que el alumno menciona los elementos matemáticos **ACA**, **ALS** y **LID** de forma **AN,** pero ha demostrado a lo largo de otras tareas que cuando tiene que aplicarlos los deja inconclusos.

Además este alumno puede **usar la conjunción lógica (“y lógica”) de forma correcta entre elementos matemáticos dados en el mismo sistema de representación.** Por ejemplo, en la tarea 2.

Sea **R**, la región encerrada por el gráfico de la función $f(x) = 4x$ y el eje x, en el intervalo $[-2, 2]$.
a. Dibujar la gráfica.
b. Calcular gráficamente el área de la región.
c. Calcular la $\int_{-2}^{2} 4x\, dx$
d. ¿Son iguales los dos resultados anteriores? Justificar cada paso.

En el cuestionario este alumno en primer lugar representa la gráfica de la función:



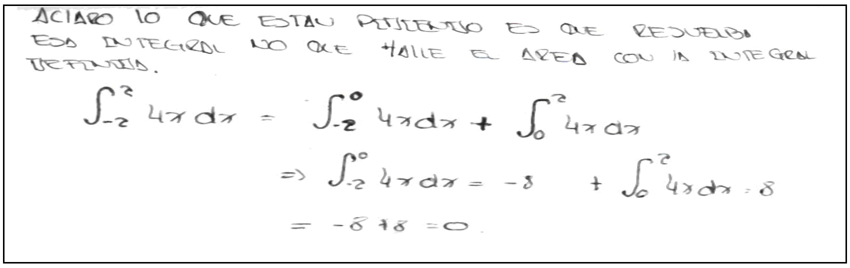
A9, representación G de la tarea 2 del cuestionario

Para calcular el área, aplica el elemento matemático **ACA** de forma **G.** Traza cuatro triángulos de base 1 y altura 4. Les calcula su área y obtiene un valor de 2 unidades cuadradas para cada uno de ellos, con lo que obtiene un total de 8 unidades cuadradas. Luego calcula el área de dos rectángulos de base 1 y altura 4, con lo que obtiene un total de 8 unidades cuadradas que sumadas al resultado anterior le da un total de 16 unidades cuadradas. Coordina la representación **G** con la **A** y utiliza el elemento matemático **ACA** de forma **A** para obtener las alturas de cada uno de los triángulos y rectángulos formados. En la entrevista se da cuenta que lo podía haber resuelto más fácilmente utilizando sólo dos triángulos rectángulos:

I: ¿Qué figuras bajo la gráfica se formaron?
A9: Se formaron 2 triángulos.
I: ¿Cómo calcula el área?
A9: Aquí se forma es un triángulo y debí haber hallado 2 triángulos rectángulos, uno por encima del eje x y otro por debajo del eje x.

I: ¿Qué relación puede establecer entre el área de la región bajo el eje OX y la formada sobre el eje OX?
A9: Que son iguales, porque tienen la misma base y la misma altura.
I: ¿Cómo ha calculado el área?
A9: Lo que debí haber hecho fue calcular el área de este triángulo completo y como son 2 triángulos iguales, debí multiplicar por 2.
I: ¿Qué hizo ahí, cómo lo resolvió?
A9: Ese día lo que hice fue hallar el área de un triángulo y trace una línea que me formó 2 triángulos de base 1 pero me quedaba faltando un rectángulo acá y tuve que haber hallado también el área de este rectángulo y luego sume las áreas de los triángulos y los 2 rectángulos que me dieron. …..
I: ¿Cuánto le dio el área gráficamente?
A9: 16 unidades métricas cuadradas es lo que puse acá, es la misma.
(A9E2).

En cuanto al cálculo de la integral, en el cuestionario da la siguiente solución de forma **A**:


ACLARO LO QUE ESTAN PIDIENDO ES QUE RESUELVA ESA INTEGRAL NO QUE HALLE EL AREA CON LA INTEGRAL DEFINIDA.

$$\int_{-2}^{2} 4x\,dx = \int_{-2}^{0} 4x\,dx + \int_{0}^{2} 4x\,dx$$
$$\Rightarrow \int_{-2}^{0} 4x\,dx = -8 \quad + \int_{0}^{2} 4x\,dx = 8$$
$$= -8 + 8 = 0.$$

A9, 2ª resolución A de la tarea 2 del cuestionario

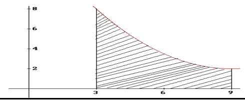
Recurre al elemento matemático **TFV** distinguiendo entre la Integral Definida y su aplicación al cálculo de áreas de figuras planas.

I: ¿Cuál es el valor de la integral?
A9: Me dio cero, pero el área no puede dar cero. Acá primero seria evaluado en el 2 positivo, daría 8, luego por el segundo teorema fundamental del cálculo, seria evaluado en $f(b)$ menos $f(a)$, no esto sería lo mismo -8 o sea que este daría cero, pero si fuera calculada como área no puede dar cero.
(A9E2).

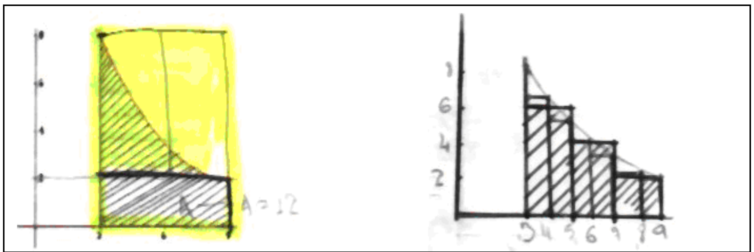
En este extracto se pone de manifiesto que el alumno ha resuelto correctamente la tarea, porque está utilizando los elementos matemáticos **LID,** y **TFV** desde el punto de vista **A**, y ha demostrado que distingue entre la Integral Definida como cálculo algebraico y su aplicación al cálculo de áreas.

En la tarea 1.

El área de la región rayada es mayor que **12** y menor que **48**.
a. ¿Por qué?
b. ¿Puede dar valores más ajustados?
c. ¿Cuáles?
d. ¿Cómo los obtiene?



En el cuestionario hace inicialmente unas construcciones geométricas y justifica las cotas por comparación de áreas usando el elemento matemático **ACA** de forma **G**.

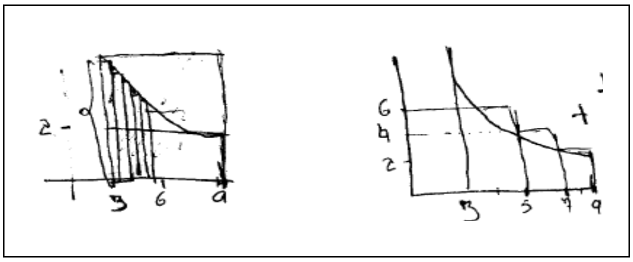


A9, representación G de la tarea 1 del cuestionario

Para justificar la cota inferior traza sobre la gráfica de la izquierda un rectángulo de base 6 unidades y de altura 2 con lo que obtiene un área de 12 unidades cuadradas que es menor que la sombreada y para justificar la cota superior traza un rectángulo de base 6 unidades y altura 8, con lo que obtiene un área de 48 unidades cuadradas que es superior al área sombreada. En la gráfica de la derecha muestra otro procedimiento para obtener una mejor aproximación, para lo cual hace dos particiones regulares, una en la que cada subintervalo tiene de longitud 2 unidades y en la otra tienen una longitud de 1 unidad. Para la primera calcula gráficamente las alturas de los rectángulos construidos sobre cada subintervalo y obtiene 2, 4, y 6 unidades respectivamente, como si se tratara de una función lineal. Calcula sus áreas y obtiene una aproximación de 24 unidades cuadradas.

A9, resolución A de la tarea 1 del cuestionario

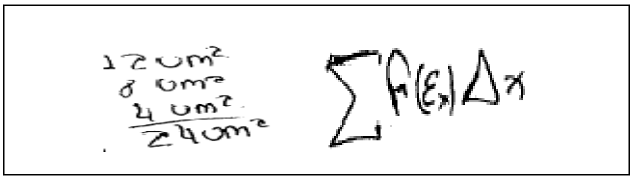
Durante la entrevista representa nuevamente la función y muestra dos particiones de forma **G**:



A9, representación G de la tarea 1 durante la entrevista

Podemos observar que la gráfica de la izquierda representa en primer lugar dos rectángulos, para mostrar la acotación dada en la pregunta del cuestionario y posteriormente realiza una partición más fina para la que traza rectángulos muy finos que aproximan más el área bajo la gráfica. La gráfica de la derecha representa una aproximación del área por exceso, para lo cual traza tres rectángulos superiores.

Luego intenta coordinar la representación **G** con unos cálculos algebraicos para obtener un valor aproximado del área bajo el gráfico:



A9, resolución A de la tarea 1 durante la entrevista

Se puede apreciar que los cálculos que hace para aproximar el área por exceso de la región coinciden con los que presentó en la solución de la tarea en el cuestionario y que justifica de la siguiente forma:

I: ¿Por qué ese valor es más aproximado al área?
A9: Porque, si se fija bien cuando uno está haciendo estos rectángulos quedan pequeños triangulitos acá, esos triángulos no los estoy contando, no me quedan dentro del área, pero a medida que los voy haciendo más cercanos, más pequeños, más angostos, esos triángulos se van haciendo más pequeños.
I: ¿Qué está logrando cuando hace esos rectangulitos cada vez más pequeños?
A9: Me estoy aproximando más al área que me están pidiendo…
I: ¿Cuáles serian los valores aproximados, de acuerdo con lo que está planteando?

A9: Aquí, sólo me estaban pidiendo valores ajustados y no el área realmente, entonces hice lo más sencillo que es exactamente lo que estaba haciendo con los rectángulos, pero un poquito más amplios y usando unidades más fáciles de calcular de 3 a 4, partiéndolo por unidad de 3 a 4, de 4 a 5, de 5 a 6.
I: ¿Cuál es el área aproximada de esa región?
A9: Me dio 24 unidades de medida cuadrada.
(A9E1).

Intenta relacionar los elementos matemáticos **ACA** y **ALS** pero sólo es capaz de mencionarlos, no utilizarlos:

I: ¿Qué es aproximarse al área?
A9: Es encontrar básicamente que esos rectángulos tiendan a infinito, o sea usando un concepto de límite tendiendo a infinito me daría el área real.
I: ¿Qué límite calcularía, aquí?
A9: Hallaría el límite de una sumatoria Riemann cuando la partición tiende a infinito.
I: ¿Podría aplicar aquí una sumatoria de Riemann?
A9: Si, la sumatoria de Riemann lo que me dice es que el área de cada rectángulo seria la base por altura, entonces esta longitud Δx seria la base, que es la distancia que hay entre un punto y otro y la altura la obtengo del valor funcional de $f(\varepsilon_x)$ me parece y eso sería más o menos la sumatoria de todo esto (escribe las respuestas).
(A9E1).

Se puede apreciar algún error como cuando dice que los rectángulos tienden a infinito que luego corrige indicando que es la partición la que tiende a infinito.

Cuando se le pregunta si puede utilizar otras formas de aproximación, menciona el elemento matemático **LID** de forma **A** pero manifiesta que necesita de la expresión algebraica de la función.

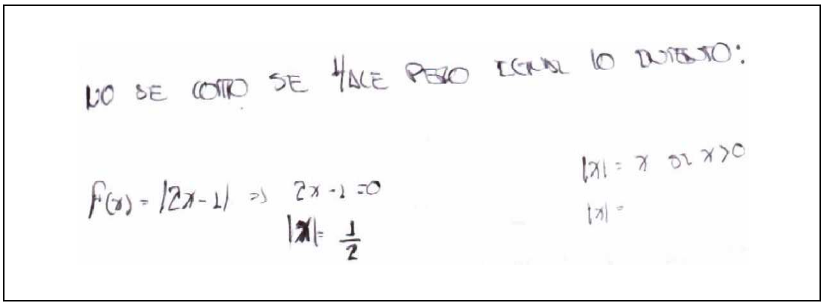
I: ¿Puede utilizar otros métodos para aproximar el área?
A9: ¿Otros métodos para aproximar el área? El único método seria hallar la ecuación de la función y aplicar una integral definida.
(A9E1).

Por la forma como resuelve la tarea se aprecia en general que establece un intento de conjunción lógica entre los elementos matemáticos **ACA, ALS** y **LID** cuando utiliza particiones, construye los rectángulos, plantea una suma de Riemann, y menciona el proceso límite de una suma.

En la tarea 4:

Calcular el área limitada por la gráfica de la función $f(x)=\|2x-1\|$, en el intervalo $[0, 2]$ y el eje x. Justificar la respuesta.

Primero manifiesta que no sabe cómo resolverla, pero hace un intento y trata de recordar la función valor absoluto de x, para poder aplicarlo a la función que aparece en la pregunta.

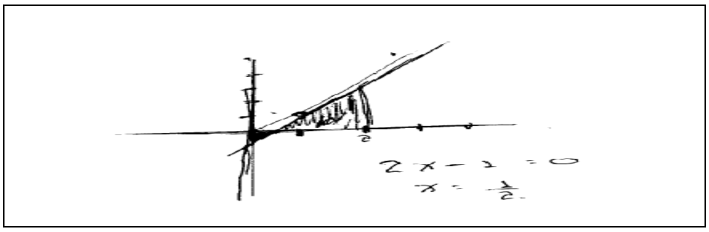


A9, representación A la tarea 4 en el cuestionario

A9: El valor absoluto de x, es x si x es mayor que 0 y seria $-x$ si x es menor que 0. **(A9E4).**

Además, durante la entrevista representa gráficamente la función siguiendo el siguiente razonamiento:

A9: Lo más fácil sería darle dos o tres valores cuando x valga 1, seria 1, cuando x valga 2 seria 3, cuando x valga 3 seria 5
I: ¿Dónde cortaría esta recta el eje x?
A9: La cortaría en 0,5. Si sería una recta.
A9: Aquí están, pero tengo un problema, porque me piden el área desde cero a dos, y cero está por fuera de la gráfica, seria desde 0,5 hasta 2 que sería esto y me están pidiendo es toda esta área.
(A9E4).



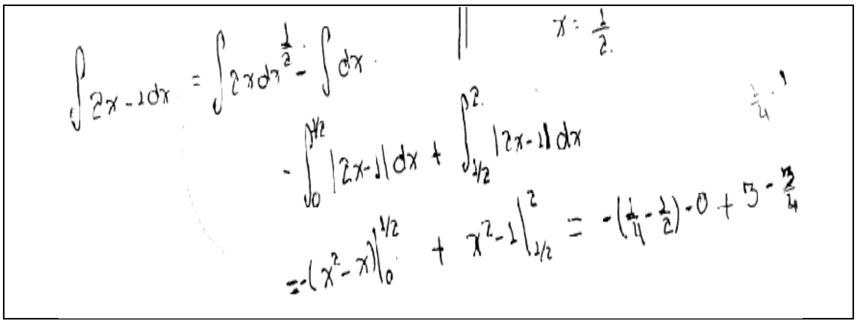
A9, representación G de la tarea 4 durante la entrevista

Para calcular el corte con el eje x, despeja el valor de x en la función, y traza la gráfica como si se tratara de una función lineal, sin tener en cuenta que tiene que graficar la función valor absoluto. Forma dos triángulos determinados por la gráfica y el eje x, uno de forma correcta entre la gráfica de la función y el eje x, y otro de forma incorrecta bajo el eje x. Para calcular el área pedida lo hace de dos formas, utilizando el elemento **ACA** de forma **G** que sólo aplica a uno de los triángulos:

I: ¿Qué figura tiene formada?
A9: Tengo 2 triángulos. De la manera más fácil, seria hallarle el área a estos 2 triángulos que sería…
I: ¿Cómo sería?
A9: El triángulo pequeño, que sería base por altura sobre 2, seria $\frac{1}{2}$ *por la altura en* y **(A9E4).**

Para la segunda forma aplica el elemento matemático **LID** con un procedimiento **A**.

A9: …Usando la integral.
I: ¿Cómo sería?
A9: Seria la integral desde cero hasta $\frac{1}{2}$.
I: ¿Por qué hasta $\frac{1}{2}$ *?*
A9: Porque, en $\frac{1}{2}$ *corta la gráfica el eje* x*, esta área está por debajo del eje* x *que daría negativa, tendría que anteponerle un signo, para que el área de positiva.*
I: ¿Cómo lo escribiría?
A9: Así, $2x-1$*e dx mas la integral definida desde* $\frac{1}{2}$ *hasta 2 de la función* $f(x)$ *que sería el valor absoluto de* $2x-1$ *dx.*
I: ¿Está seguro que ese integrando va en valor absoluto?
A9: Así como lo tengo lo puedo quitar.
I: ¿Por qué lo puede quitar?
A9: Porque estoy asegurando que el área me dé positiva al hacer este pedazo negativo.
I: ¿El resultado que le dio al hallar el área usando la integral y el resultado del área a partir de los triángulos seria la misma?
A9: En esos triángulos por ser una recta y el triángulo considero que sería la misma área.
(A9E4).



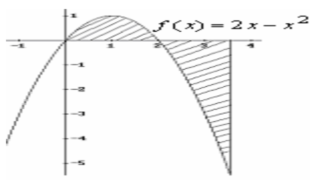
A9, resolución A de la tarea 4 durante la entrevista

A partir de la representación gráfica realizada, utiliza los elementos matemáticos **LID, TFV y PID,** en concreto la propiedad de la unión de intervalos, de forma **A**, cuando plantea una integral y la subdivide en dos integrales según que la función sea positiva o negativa (lo que no se corresponde con esta tarea porque la función siempre es positiva) luego aplica el **TFV** como si se tratara de una función lineal, de hecho una de las primitivas (la segunda) está mal calculada. Finalmente al sustituir en los extremos del intervalo se confunde en los cálculos aritméticos.

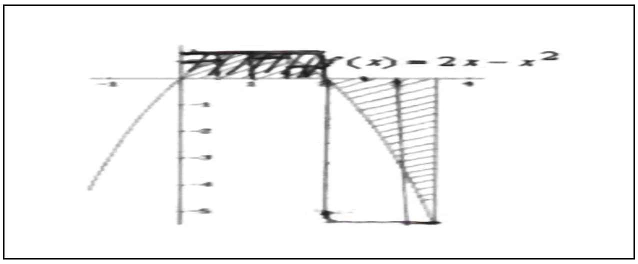
De forma global se puede inferir que el alumno establece un intento de conjunción lógica entre los elementos matemáticos **ACA, LID** y **PID** de forma **G** y **A**, pero no logra establecer una conjunción lógica correcta entre ellos para resolver la tarea correctamente, de hecho la representación gráfica de la función y cierto desconocimiento de la función valor absoluto son los que determinan su resolución.

Además este alumno **recuerda algunos elementos matemáticos de forma aislada.** Por ejemplo en la tarea 5:

Dada la gráfica de $f(x) = 2x - x^2$, calcular por aproximaciones el área de la región rayada. Justificar el procedimiento utilizado.

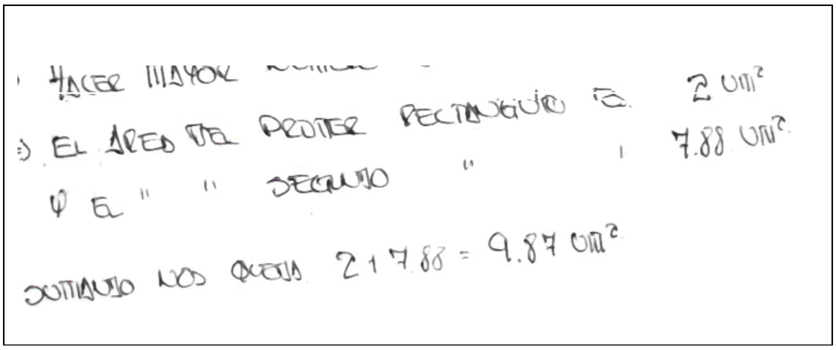


Lo primero que hace este alumno es tratar de cubrir la región sombreada para poder dar una aproximación del área:



(A9, representación G de la tarea 5 del cuestionario)

Para ello hace uso del elemento matemático **ACA** de forma **G,** utiliza una partición con dos subintervalos y para aproximar el área por exceso traza sendos rectángulos superiores para cubrir el área sombreada tanto por encima del eje x, como bajo el eje x. Una vez construidos los rectángulos realiza un procedimiento **A** para aproximar el área sumando las áreas de los dos rectángulos**:**



A9, representación A de la tarea 5 del cuestionario

En este caso no es capaz de coordinar los registros **G** y la **A,** no indica cómo obtiene los valores de las áreas de cada uno de los rectángulos que luego suma para dar un valor aproximado del área total.

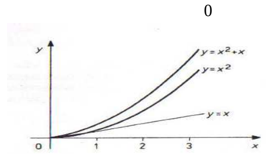
Durante la entrevista, cuando se le pide que consiga una aproximación mejor, menciona verbalmente algunos elementos matemáticos que no mencionó en el cuestionario, pero que no es capaz de utilizarlos para concluir la tarea, sólo es capaz de mencionarlos:

I: ¿Cómo la podría aproximar mejor?
A9: Para hallar una aproximación usaría particiones de 1 milímetro de base y la altura evaluaría en la función y sumaria todas esas áreas.
I: ¿De qué otra forma podría aproximar, qué otros procedimientos puede aplicar?
A9: No en el momento desconozco otros procedimientos aparte del método exhaustivo.
I: ¿Qué es el método exhaustivo?
A9: Hacer figuras conocidas para rellenar bien de tal forma que no me queden espacios para hallar lo más aproximado posible el área.
I: ¿Qué puede concluir de los resultados obtenidos?
A9: Que una aproximación seria más bien como vaga, por lo que aquí hice muy pocos rectángulos.
(A9E5)

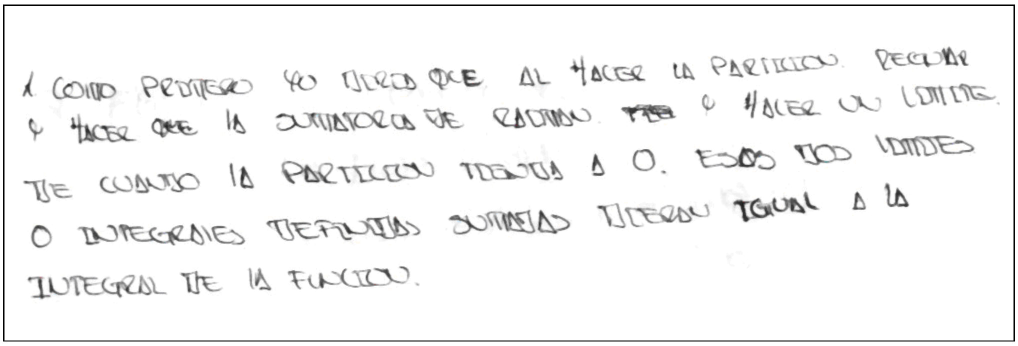
Para resolver la tarea hace uso del elemento matemático **ACA** de forma **G y A** de manera aislada, porque no establece relación lógica con otros elementos matemáticos que le permitan obtener mejores aproximaciones o calcular el área. Menciona que podría utilizar particiones más finas para aproximar mejor construyendo rectángulos de menor base que cubran más el área sombreada, afirma que no conoce otras formas de aproximación además del método exhaustivo, y es consciente que el valor obtenido no es una buena aproximación del área bajo el gráfico.

Para resolver la tarea 6:

Explique, en términos del gráfico, porqué $\int_0^a \left(x^2 + x\right)dx = \int_0^a x^2dx + \int_0^a xdx$



En el cuestionario verbalmente expresa lo siguiente:

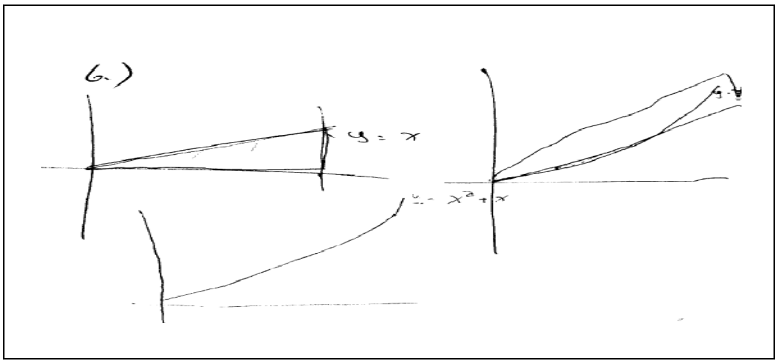

1 COMO PRIMERO YO DIRIA QUE AL HACER LA PARTICION REGULAR Y HACER QUE LA SUMATORIA DE RIEMANN Y HACER UN LIMITE DE CUANDO LA PARTICION TIENDA A 0. ESTOS DOS LIMITES O INTEGRALES DEFINIDAS SUMADAS DIERAN IGUAL A LA INTEGRAL DE LA FUNCION.

A9, representación verbal de la tarea 6 del cuestionario

En la entrevista se limita a reproducir el mismo argumento que había escrito:

I: ¿Podría explicarme el razonamiento que realiza en la pregunta?
A9:Lo que digo es que al hacer la partición regular, la sumatoria de Riemann y un límite cuando la partición tienda a cero, estos dos limites o integrales definidas sumadas darían igual a la integral de la función inicial del integrando, en este momento estoy de acuerdo si tuviera que hacer esta integral para hallar el área de x^2. **(A9E6).**

Lo que demuestra que recuerda algunos elementos matemáticos **ACA**, **ALS** y **LID**, pero de memoria y de forma inconexa porque no es capaz de tomar decisiones a partir de ellos para resolver esta tarea. Durante la entrevista hace una representación gráfica de cada una de las funciones de los integrandos:



A9, representación G de la tara 6 durante la entrevista

Pero, aunque se insiste en que aporte un razonamiento gráfico de la propiedad de linealidad sólo es capaz de recurrir al elemento matemático **ACA** sin ser capaz de concluir correctamente la tarea.

I: ¿Por qué utiliza sólo el registro algebraico para demostrar la propiedad?
A9: Gráficamente no se ve como muy fácil que el área de la recta $y = x$, y la función x^2 sumadas me den el área de $x^2 + x$.
A9: Pienso que se podría hacer de manera sencilla, recortando este pedacito y ponerlo.
I: ¿Qué figuras podría formar bajo el área de la gráfica de cada función?
A9: Bajo la gráfica de $y = x$, quedaría mucho más fácil hacer un triángulo bajo el área de x^2, también sería fácil hacer un triangulo en las tres y me daría un valor bastante aproximado de las áreas de cada uno.
I: ¿Podría justificar numérica y o gráficamente la igualdad de las integrales?
A9: Justificarlo como en especie de demostración.
(A9E6).

En la tarea 7b recuerda algunos elementos matemáticos de forma aislada y con errores.

En el apartado **7b,** que aparece a continuación, decidir si la afirmación es verdadera o falsa. En caso de ser falsa, explicar por qué o mostrar un contraejemplo. **7b** Si f es continua en $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$

El argumento es incorrecto puesto que utiliza una propiedad incorrecta de la derivabilidad y, además, la aplica a la integrabilidad:

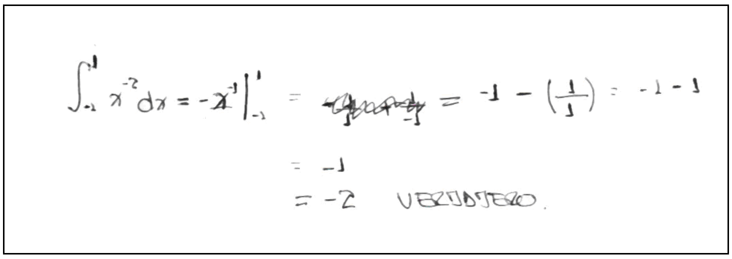
I: ¿Cómo explica el argumento de la proposición 7b?
*A9: Si f es continua en $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$ y lo primero que se me viene a la cabeza es que **si una función es continua entonces es derivable***
(A9E7b).

La **derivabilidad implica continuidad** y no al contrario, además **el recíproco de este teorema no es cierto**. Traslada esta misma propiedad errónea a la integrabilidad por similitud.

También responde la tarea 7c cometiendo algunos errores:

Considerar el valor de verdad o de falsedad de la afirmación $\int_{-1}^{1} x^{-2}\,dx = \left[-x^{-1}\right]_{-1}^{1} = (-1) - 1 = -2$ y en caso de ser falsa, explicar por qué o dar un contraejemplo.

En cuanto al cuestionario esto es lo que hace inicialmente cuando responde la tarea:



A9, resolución A de la tarea 7c del cuestionario

Utiliza el elemento matemático **TFV** aplicando la regla de Barrow incorrectamente, porque no tiene en cuenta que la función es discontinua en un punto del intervalo de integración y, por tanto, no reúne las condiciones necesarias para poder aplicarla. De hecho, durante la entrevista se confirma su convencimiento del razonamiento que hizo:

I: ¿Qué aplicaron para resolver esa integral?
A9: Aplicaron el segundo teorema fundamental del cálculo.
I: ¿Qué dice el segundo teorema fundamental del cálculo?
A9: Que para resolver esa integral lo que hago es hallar la antiderivada y evaluar $f(b) - f(a)$.
(A9E7b).

Aunque, en el mapa conceptual este alumno considera que los elementos matemáticos que configuran el concepto de la Integral Definida son: **ACA, ALS, LID, PID y TFV** considerados en todos los sistemas de representación **G, A** y **AN,** en la realización de las tareas ha mostrado que sólo los recuerda y que tiene dificultad con algunos de ellos para utilizarlos de forma correcta.

De manera global se pone de manifiesto que los elementos matemáticos que mejor recuerda son **ACA, ALS y LID,** y sólo en algunas ocasiones **TFV** con concepciones erróneas. El elemento matemático que menos utiliza durante el desarrollo de las tareas es **PID**.

Por la forma como el estudiante resolvió las diferentes tareas a lo largo de todo el cuestionario, por la manera como fueron justificadas esas respuestas a través de la entrevista, consideramos que el alumno se encuentra en el nivel **inter 1** de desarrollo del esquema del concepto de Integral Definida.

La tabla siguiente representa las relaciones lógicas, los elementos matemáticos y los sistemas de representación utilizados por el alumno tanto en el nivel **intra** como en el **inter 1.**

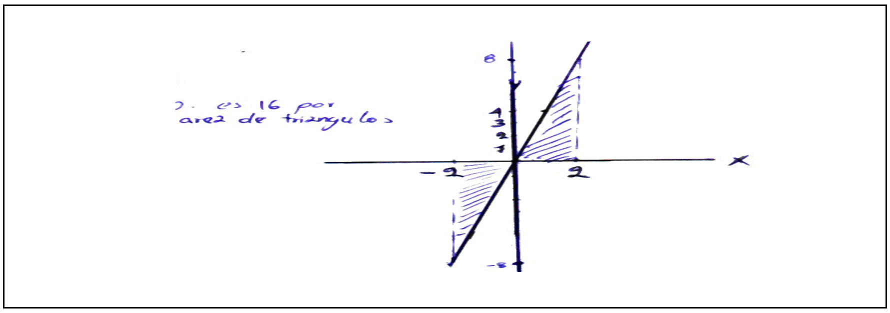
NIVEL	CARACTERÍSTCAS	ELEMENTOS MATEMÁTICOS	SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN
INTRA	**Recordar algunos elementos matemáticos de forma aislada.**	**El área como aproximación:(G, A)** -Aproximación del área de una región plana. -Fórmula del área del rectángulo. -Fórmula del área del triángulo. -Partición del intervalo. -Sumas de Riemann. **El área como límite de una suma: (G, A)** -Límite de las sumas. **La integral definida: (G, A)** -La integral definida como área de una región. -La definición analítica de integral definida. La integral definida como cálculo algebraico. -La integral de funciones positivas y negativas. -Condición suficiente: continuidad implica integrabilidad. -La integral definida en otros contextos. **Las propiedades de la integral definida: (G, A)** -Constante -Integrales especiales. -Unión de intervalos. -Linealidad. **El teorema fundamental: (A)** -Antiderivada de una función continua. -La regla de Barrow.	**Gráfico** **Algebraico** **Analítico**
INTER 1	**Usar la conjunción lógica ("y lógica") de forma correcta entre elementos matemáticos dados en el mismo sistema de representación.** **Tener esbozo de síntesis de los sistemas de representación gráfico y algebraico.**	**El área como aproximación:(G, A)** -Aproximación del área de una región plana. -Fórmula del área del rectángulo. -Fórmula del área del triángulo -Partición del intervalo. -Sumas de Riemann. **El área como límite de una suma: (G, A)** -El límite de las sumas. **La integral definida: (G, A)** -La integral definida como área de una región. -La integral definida como cálculo algebraico. -La definición analítica de integral definida. **Las propiedades de la integral definida: (G, A)** -De la integral de funciones positivas y negativas. -Unión de intervalos. **El teorema fundamental: (A)** -Regla de Barrow.	**Gráfico** **Algebraico** **Analítico**

Tabla 4.5. Relaciones lógicas, elementos matemáticos y sistemas de representación que caracterizan los niveles de desarrollo del esquema de integral definida en A9

El alumno **A8,** también en el nivel **inter 1**, es capaz **de usar la conjunción lógica ("y lógica") de forma correcta entre elementos matemáticos dados en el mismo sistema de representación).** Por ejemplo en la tarea 2.

Sea **R**, la región encerrada por el gráfico de la función $f(x) = 4x$ y el eje x, en el intervalo $[-2, 2]$. a. Dibujar la gráfica, calcular gráficamente el área de la región. b. Calcular la $\int_{-2}^{2} 4x\, dx$ c. ¿Son iguales los dos resultados anteriores? Justificar cada paso.

En el cuestionario lo primero que hace el alumno es representar la función de forma **G**.

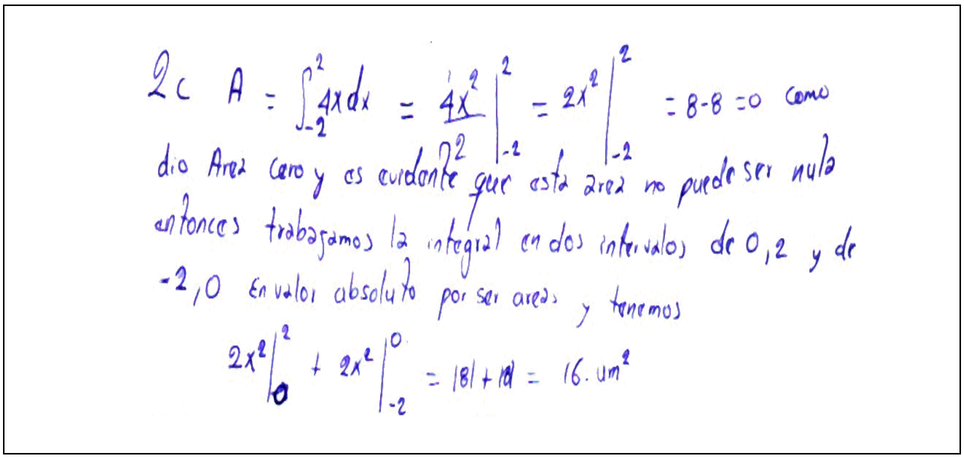


A8, representación G de la tarea 2 del cuestionario

Para calcular el área gráficamente utiliza el elemento matemático **ACA** porque dibuja la gráfica de la función, forma dos triángulos rectángulos iguales, uno por encima del eje y otro bajo el eje x, subraya la región de la que va a calcular el área, aplica de manera implícita la fórmula del área del triángulo para calcularla y obtiene como resultado 16 unidades cuadradas. Esto mismo lo expresa durante la entrevista:

I: ¿Puede explicarme cómo ha resuelto la tarea?
A8: Al hacer el gráfico tengo una línea que cruza por el origen y por donde esta acotada esa área, resultan dos triángulos.
I: ¿Cómo son esos triángulos?
A8: Esos triángulos, a la vista son triángulos semejantes, son triángulos congruentes.
I: ¿De dónde, y cómo obtiene el 16?
A8: Ese 16 es de toda el área, que se estaría reflejando en éste caso.
(**A8E2).**

Una vez calculada el área, a partir del registro gráfico coordina un procedimiento algebraico y establece una diferencia entre la integral como cálculo algebraico y la integral como área de una región.



2c $A = \int_{-2}^{2} 4x\,dx = \frac{4x^2}{2}\Big|_{-2}^{2} = 2x^2\Big|_{-2}^{2} = 8-8 = 0$ como dio Area cero y es evidente que esta area no puede ser nula entonces trabajamos la integral en dos intervalos de 0,2 y de -2,0 en valor absoluto por ser areas y tenemos

$2x^2\Big|_{0}^{2} + 2x^2\Big|_{-2}^{0} = |8| + |8| = 16.\ um^2$

A8, resolución A de la tarea 2 del cuestionario

Para ello en primer lugar utiliza el elemento matemático **TFV** aplicando la regla de Barrow, porque halla la primitiva de la función, la evalúa en los extremos del intervalo y obtiene como resultado de la integral, cero. En segundo lugar se pone de manifiesto que utiliza una propiedad de la integral de funciones positivas y negativas cuando calcula la segunda integral pensada como área de una región, aunque se evidencian algunos errores en el uso del signo menos y del valor absoluto en el procedimiento. Durante la entrevista razona de la forma siguiente:

I: ¿Cómo calcula la integral?
A8: La integral la calculé como $\int_{-2}^{2} 4x\,dx = \frac{4x^2}{2}\Big|_{-2}^{2} = 2x^2\Big|_{-2}^{2} = 0$
I: ¿Puede la integral dar cero?
A8: Creo que la integral, si puede dar cero.
I: ¿El área puede dar cero?
A8: No, en este caso no, porque es evidente que el área no puede dar cero.
(A8E2)

En este extracto de entrevista, igual que en el cuestionario, para calcular la integral recurre al elemento matemático **TFV** de forma **A** y el alumno es consciente que el valor obtenido no representa el área porque el área no puede ser cero.

Por la forma como responde la tarea y los argumentos que utiliza para justificar los procedimientos gráficos y algebraicos este alumno establece **conjunción lógica** entre los elementos matemáticos **ACA** y **TFV** de forma **G** y **A**; porque a partir del uso conjunto de estos elementos infiere el área de la región y la distingue del concepto de Integral Definida.

Además cuando justifica la resolución de la cuestión.

I: ¿Qué relación hay entre el número dado por la integral y el que obtuvo del área?
E. Porque en este momento pienso que la función al pasar por el origen cambia de signo.
I: ¿Por qué al calcular el área le dio un valor positivo y cuando calculó la integral ese valor se volvió cero?
A8: Es como si la parte de abajo da un valor negativo, pero ese valor como área debe ser positivo, es decir no me estaría dando un área, me estaría dando un número y por el hecho de ser área lógicamente no podría dar negativa.
I: ¿Cuál es la diferencia entre calcular un área y calcular una integral definida? ¿Podría explicarlo?
A8: La diferencia es que el área es algo concreto que sabemos que no puede dar negativo, entonces cuando la integral y el área formada por la función que toma valores positivos y negativos, en la parte de abajo del eje x*, allí hay que tomar el área en valor absoluto.*
(A8C2).

Aplica condicional lógica en el elemento matemático **LID**, cuando usa las propiedades de la Integral Definida de funciones positivas y negativas, para decidir cuando la Integral Definida representa un valor real cualquiera y cuáles son las condiciones necesarias para que represente el área bajo la gráfica de una región como él mismo lo afirma en la entrevista cuando dice: *"el área no puede dar negativa, entonces cuando la integral toma valores negativos, en la parte de abajo del eje* x*, hay que tomar el área en valor absoluto".* Pero menciona de manera incorrecta el elemento matemático **LID** cuando se refiere en la justificación a la expresión *"área nula o cero"* como se muestra:

I: ¿Es lo mismo calcular el área gráficamente que resolver la integral?

A8: No.
I: ¿Por qué?
A8: Considero que no, porque en este caso el área me dio cero.
I: ¿Está seguro que el área le dio cero?
A8: Bueno, la integral. Esta parte de la integral me dio cero y la integral medio un área de cero….
I: ¿Qué relación hay, entonces entre el área geométrica y la integral?
*A8: Es que la integral da cero cuando no hay área, porque está en el mismo punto la integral da cero, cuando tiene los mismos índices evaluados en la mismo punto, entonces allí es donde la integral da cero o sea que prácticamente no habría área y por eso en ésta parte cuando se hizo la integral que me dio cero pues lógicamente dio nula…***(A8E2).**

En el protocolo se evidencia que tiene una concepción de la Integral Definida pensada como área y, en algunas ocasiones, afirma de forma incorrecta, que la integral le dio un área de cero o nula, que la integral da cero cuando no hay área, además afirma que da cero cuando se evalúa en los mismos límites, no se da cuenta que los límites del intervalo son de signo contrario.

Asimismo, en la respuesta verbal de la tarea 8.

¿Cuál es el significado matemático de la Integral Definida de la función $y=f(x)$ en un intervalo $[a,b]$?

El alumno considera el elemento matemático **LID** de forma **A** como un método, lo que nos indica su concepción de la integral.

I: ¿Qué es la integral?
A8: La integral es un es un método.
(A8E8).

Por la forma como responde tiene una imagen procedimental del objeto matemático la Integral Definida.

En la resolución de la tarea 7c este alumno es capaz de establecer una condicional lógica.

Considerar el valor de verdad o de falsedad de la afirmación $\int_{-1}^{1} x^{-2}\,dx = \left[-x^{-1}\right]_{-1}^{1} = (-1) - 1 = -2$ y en caso de ser falsa, explicar por qué o dar un contraejemplo.

Esta es la forma como justifica verbalmente la resolución de la tarea durante la entrevista:

I: ¿Por qué considera la proposición c, verdadera?
A8: Porque aquí la integral de -1 a 1 de… (se refiere a la respuesta del cuestionario).
I: ¿De qué función?
A8: De x^{-2} *o sea de* $\frac{1}{x^2}$ *y* $\frac{1}{x^2}$ *no es continua en cero,* x^2 *no es continua en cero.*
I: ¿Entonces, es verdadera o es falsa?
A8: Es falso, porque no se puede integrar.
I: ¿Por qué no se puede integrar?
A8: Porque hay una discontinuidad.
I: ¿En dónde?
A8: En el $[-1,1]$*, hay una discontinuidad en cero de la función* $\frac{1}{x^2}$*, entonces no es continua,*
I: ¿Qué quiere decir que no sea continua?
A8: Que hay un punto que presenta discontinuidad es como una ruptura.
I: ¿Entonces, esa función no se podría integrar o existe alguna forma de integrarla?
A8: La podríamos integrar tomando los intervalos en los cuales no hay discontinuidad.
(A8E7c).

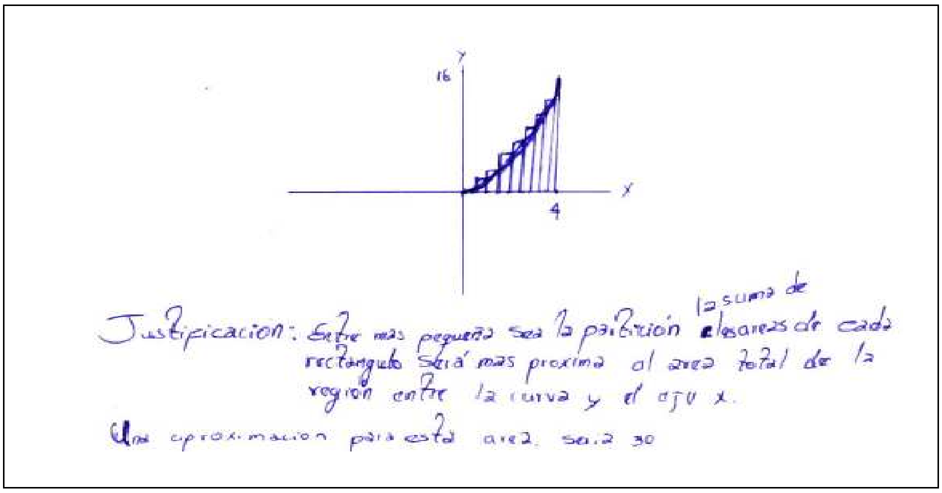
En este episodio el alumno establece la condicional lógica en el elemento matemático **TFV** de forma **A,** cuando pone de manifiesto que, aunque en el cuestionario consideró la proposición como verdadera, durante la entrevista afirma que la proposición es falsa y justifica su valor de falsedad afirmando que la función es discontinua en $x=0$, y que por tanto no se puede integrar así como está planteada, porque presenta una discontinuidad y que sólo se podría hacer en aquellos intervalos en los cuales la función no presenta discontinuidad.

Pero este alumno, en otras ocasiones, **muestra dificultades en establecer**

relaciones lógicas (conjunción lógica) entre elementos matemáticos y no tener sintetizados los sistemas de representación. Por ejemplo, en la tarea 3.

> Sea R la región entre la gráfica de la función $f(x)=x^2$ y el Intervalo [0,4]
> -Utiliza particiones para aproximar el valor del área de la región R.
> -Justifica tu respuesta.

En el cuestionario lo primero que hace el alumno es una representación **G** de la función:



A8, representación G de la tarea 3 del cuestionario

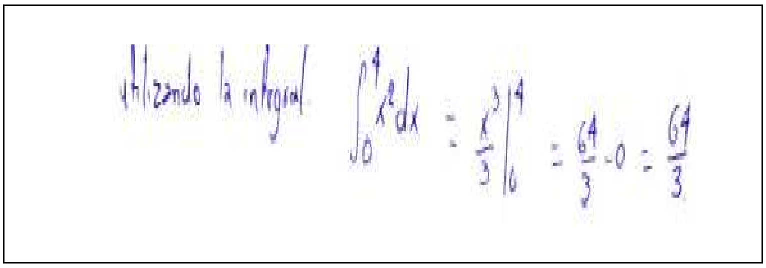
Para ello traza la gráfica de la función, construye rectángulos superiores para aproximar el área por exceso y manifiesta que, cuanto más pequeña sea la partición, la suma de las áreas de cada rectángulo se aproximará más al área que representa la región bajo el gráfico y de manera intuitiva da un valor aproximado de 30 unidades cuadradas.

Cuando se le preguntó sobre cómo había resuelto la tarea lo explica de la siguiente forma:

I: ¿Sabría contarme cómo ha resuelto la tarea?
A8: Aquí sería tomar rectángulos cada vez más pequeños.
I: ¿Por qué toma rectángulos?
A8: Porque el rectángulo es la forma que más se acomoda para encontrar el área,

I: ¿Qué está haciendo cuando utiliza rectángulos?
A8: Hacerlos tan pequeños que me coincidan con la gráfica de la función, que ellos me queden exactamente, alineados.
I: ¿Qué están pidiendo en el problema?
A8: Me están pidiendo utilizar particiones para aproximar el valor del área de la región.
I: ¿Cuántos rectángulos podría trazar?
A8: Haciendo que esos rectángulos que estamos formando sean tan pequeños hasta que por así decirlo sean líneas que me cubran esa área.
I: ¿Para qué los va a sumar?
A8: Para obtener el área total.
I: ¿Además, de lo que me ha explicado, qué otros elementos podría utilizar?
A8: Haciendo que la norma tienda a cero cuando estos puntos tiendan a infinito.
(A8E3).

Como se puede observar recuerda los elementos matemáticos, pero no logra utilizar aquellos que son necesarios en el desarrollo de la tarea y, cuando se da cuenta que no logra establecer conexión entre las particiones, las sumas de Riemann y el paso al límite de la sumatoria, entonces decide calcular la Integral Definida de la siguiente forma:



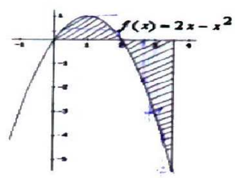
A8, resolución A de la tarea 3 del cuestionario

Para lo cual recurre al elemento matemático **TFV**, aplica la regla de Barrow, halla la primitiva de la función, la evalúa en los límites de integración correspondientes y obtiene el valor exacto del área bajo el gráfico de la función.

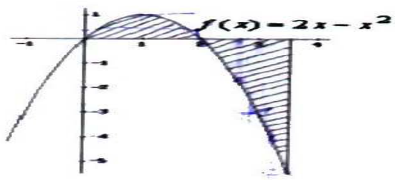
De forma global consideramos que establece un intento de conjunción lógica y no muestra tener síntesis entre los elementos matemáticos **ACA** y **LID** de forma **G y A** cuando utiliza particiones traza rectángulos, da una idea de límite de la partición, menciona la condición que si la norma de la partición tiende a cero, entonces el número de particiones tiende a infinito, pero de forma inconexa, porque no utiliza estos elementos matemáticos para resolver la tarea y, finalmente, recurre al cálculo de la Integral Definida para hallar el área de la región.

En la resolución de la tarea 5:

Dada la gráfica de $f(x)=2x-x^2$, calcular por aproximaciones el área de la región rayada. Justificar el procedimiento utilizado



En el cuestionario intenta aproximar el área mediante rectángulos:



tomando rectangulos de base 0.5 para el intervalo [2, 3.5]
y de altura 5, 3 y 2 tendriamos una aproximación del area de
esta parte de curva seria 5
y la parte de intervalo [0,2], sabemos que es menor el area que 2

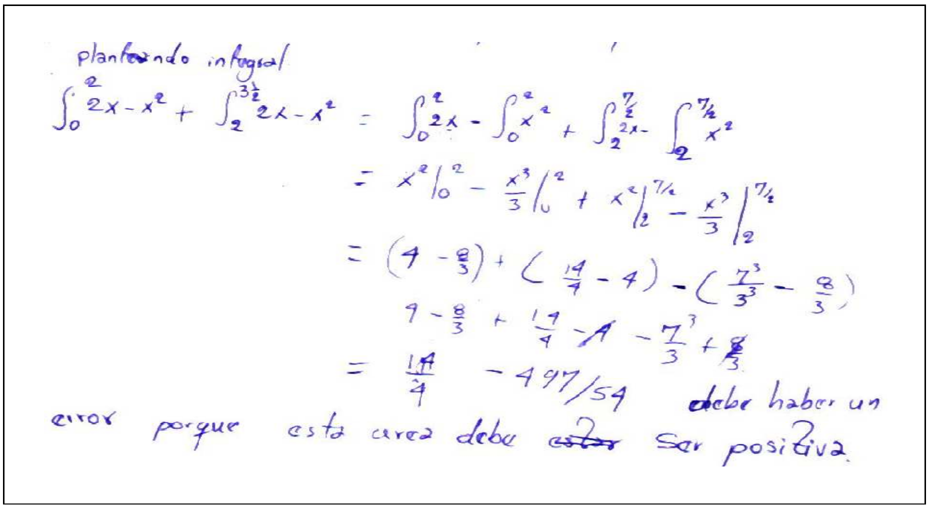
A8, representación G de la tarea 5 del cuestionario

En la resolución gráfica se pone de manifiesto que trata de hace una aproximación por exceso del área bajo la gráfica, porque traza algunos rectángulos superiores al área sombreada por encima y bajo el eje x; y de forma **A** cuando afirma que para aproximar el área bajo el eje $x$divide el intervalo $[2, 3.5]$, en subintervalos de longitud 0.5, considera los rectángulos que se forman con esa base asignando a las alturas valores aproximados apoyándose en la gráfica porque no utiliza la función para evaluarla en los extremos de cada subintervalo y establece que el área aproximada bajo el eje x es de 5 unidades cuadradas; y para aproximar el área por encima del eje x, tiene dos subintervalos en el intervalo [0,2] sobre los que construye dos rectángulos de altura 1, por tanto manifiesta que el área aproximada por encima del eje x es de 2 unidades cuadradas.

Durante la entrevista hace una descripción del procedimiento utilizado:

I: ¿Cuándo le dicen que aproxime el área, qué hace?
A8: Tomando rectángulos de base 0.5, para el intervalo $[2\,,3.5]$ *y de altura 5.*
I: ¿De dónde obtiene las alturas cómo las obtiene de 5.3 y de 2?
A8: 5.3 y 2; en este momento no recuerdo bien como saqué esta parte…
I: ¿Qué hace una vez que traza los rectángulos?
A8: Sumar todas esas las áreas de cada rectángulo.
I: ¿Qué tipo de rectángulos utilizaría?
A8: Rectángulos, ubicándome sobre el eje X como base y trazando la altura, de tal manera que sea aproximada al área.
I: ¿Cuántas áreas tiene en ésta gráfica?
A8: Encima del eje X, en el primer cuadrante de cero a dos .La otra es una de 2 como a 3.5, hacia la parte de abajo.
I: ¿Cómo aproxima el área que bajo el eje OX y la que está por encima del eje OX?
A8: Utilizando el mismo método de los rectángulos, sería como la aproximación.
(A8E5).

Utiliza el elemento matemático **ACA** de forma **G** porque menciona un procedimiento de construcción de rectángulos, determinando la base y la altura de cada rectángulo para calcular las áreas aproximantes, sumarlas y obtener un valor aproximado del área; pero como no es capaz de utilizar el elemento matemático **ALS** entonces, igual que en la tarea anterior, toma la decisión de aplicar **LID** de forma **A** para calcular el área de la región sombreada.



planteando integral

$$\int_0^2 2x-x^2 + \int_2^{3\frac{1}{2}} 2x-x^2 = \int_0^2 2x - \int_0^2 x^2 + \int_2^{\frac{7}{2}} 2x - \int_2^{7/2} x^2$$

$$= x^2\Big|_0^2 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 + x^2\Big|_2^{7/2} - \frac{x^3}{3}\Big|_2^{7/2}$$

$$= \left(4-\frac{8}{3}\right) + \left(\frac{49}{4}-4\right) - \left(\frac{7^3}{3^3}-\frac{8}{3}\right)$$

$$4-\frac{8}{3} + \frac{49}{4} - \cancel{4} - \frac{7^3}{3} + \frac{8}{3}$$

$$= \frac{49}{4} - 497/54$$

debe haber un error porque esta area debe ~~estar~~ ser positiva.

A8, representación A de la tarea 5 del cuestionario

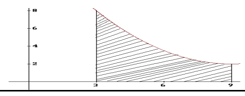
Plantea la suma de dos integrales correctamente, aunque no escribe el diferencial dx. La primera integral representa el área que está sobre el eje x, y la segunda integral representa el área que está bajo el eje x. Utiliza también el elemento matemático **TFV** cuando aplica la regla de Barrow para hallar la primitiva, pero cuando evalúa la función en los límites de integración comete errores en los cálculos numéricos; por tanto llega a un valor incorrecto del que es consciente ya que señala que hay un error porque el área debe ser positiva. Cuando se le pregunta al alumno qué otros procedimientos podría utilizar, piensa nuevamente en el elemento matemático **LID** de forma **A**:

A8: ¿Otros procedimientos? Para encontrar el área total, seria la integral definida.
I: ¿Cómo sería con la integral definida?
A8: Serian dos integrales.
I: ¿Por qué dos integrales?
A8: Si, porque como tengo dos áreas, entonces calcularía cada área por diferente lado, que sería lo mismo que estaría haciendo con los rectángulos, pero en este caso, sería con el método de la integral, entonces calcularía las áreas con diferente integral, y al sumarlas voy a tener el valor total del área.
(A8E5).

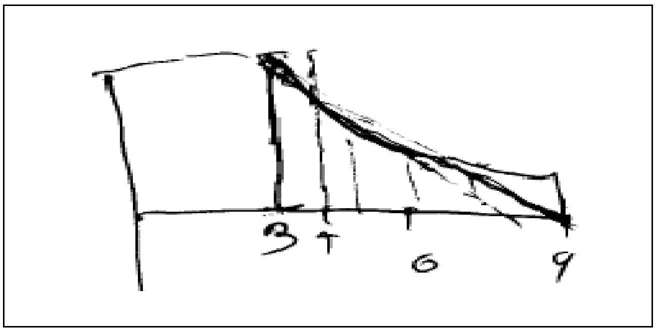
Establece intentos de conjunción lógica entre los mismos elementos matemáticos **ACA, LID** y **TFC**; porque utiliza particiones, hace aproximaciones con rectángulos, menciona el cálculo de sus área y la suma de todas ellas, pero no logra calcular las sumas de Riemann para aproximar, por lo tanto tampoco hace una conexión con el paso al límite para calcular el área, y termina calculando el área por medio de la integral definida, utilizando el teorema fundamental a través de la regla de Barrow.

Asimismo este alumno **recuerda algunos elementos matemáticos de forma aislada.** Por ejemplo en la tarea 1.

El área de la región rayada es mayor que **12** y menor que **48**.
a. ¿Por qué?
b. ¿Puede dar valores más ajustados?
c. ¿Cuáles?
d. ¿Cómo los obtiene?



Como en el cuestionario este alumno no fue capaz de ajustar mejor las cotas, durante la entrevista lo primero que hace es un boceto de forma **G** para aproximar el área:



A8, representación G de la tarea 1 del cuestionario

En el gráfico se observa que utiliza un intento de aproximación indicando algunos rectángulos, pero no logra hacer una aproximación durante la resolución de la tarea. En el protocolo describe el siguiente procedimiento de aproximación recordando algunos elementos:

I: ¿Cómo cree que podría conseguir mejores aproximaciones del área, con los rectángulos más grandes o con rectángulos más pequeños?
A8: Entre más pequeños sean los rectángulos, me va a cubrir más parte del área concreta.
I: ¿Por qué?

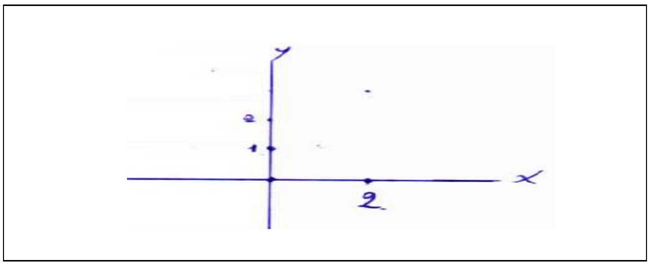
A8: Porque los rectángulos muy grandes me van a dejar un espacio que no cuenta con área y lo que necesito es calcular nada más la parte rayada, entonces pienso que si se tomara únicamente rectángulos pequeños voy a poder cubrir toda el área con los rectángulos…
I: ¿Considera que sólo puede hallar el área, si tiene una expresión algebraica que represente la gráfica de la función?
A8: Si.
I: ¿Por qué?
A8: Porque esa es la que me está delimitando la parte superior de esa área y es la que me va a dar el limite por donde va el área y como es una curva, entonces en este caso es necesaria la función que es la que me da esa curva para integrar.
I: ¿Cuándo utiliza los rectángulos superiores e inferiores qué hace con esto?
A8: Ahí, estoy calculando el área aproximada.
I: ¿Cuándo utiliza la integral que está hallando?
A8: Estoy hallando también el área.
I: ¿Por qué?
A8: Porque la integral precisamente surgió, tengo entendido de la aproximación de los rectángulos, hasta llegar a ser tan precisa.
I: ¿Fuera de trazar los rectángulos superiores y los inferiores, entonces considera que sólo puede calcular el área a través de la integral, si tuviera la expresión algebraica de la función?
A8: Si, para aplicarla.
I: ¿Además de los rectángulos y de la integral, existe otra forma u otros elementos matemáticos que le permitan aproximar o ajustar las cotas de esa área?
A8: Otro elemento matemático, no lo recuerdo en el momento, no sé si se puede hallar, pues en el momento no recuerdo otra manera de enfrentar esto, además creo que por medio de la integral es que se afrontan estos temas de área, cuando tienen que ver con curvas, este es el método que conozco
(A8E1).

En este extracto de entrevista se puede apreciar que este alumno recuerda los elementos matemáticos **ACA** y **LID** pero no los utiliza para resolver la tarea de forma **G** o **A**, menciona una aproximación del área utilizando rectángulos y un triángulo, asegura que cuanto más pequeños sean los rectángulos van a cubrir más el área, es consciente de que necesita la expresión algebraica de la función para poder calcular el área de forma más precisa con una integral y, finalmente, manifiesta que desconoce otras formas para aproximar el área.

En la tarea 4:

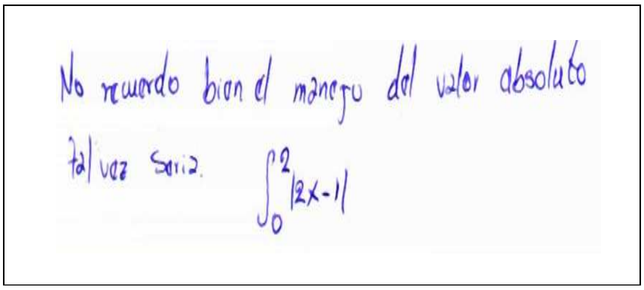
Calcular el área limitada por la gráfica de la función $f(x)=\lvert 2x-1\rvert$, en el intervalo $[0,2]$ y el eje x. Justificar la respuesta.

En el cuestionario no logra responder ni de forma **G**, ni **A**:



A8, representación G de la tarea 4 del cuestionario

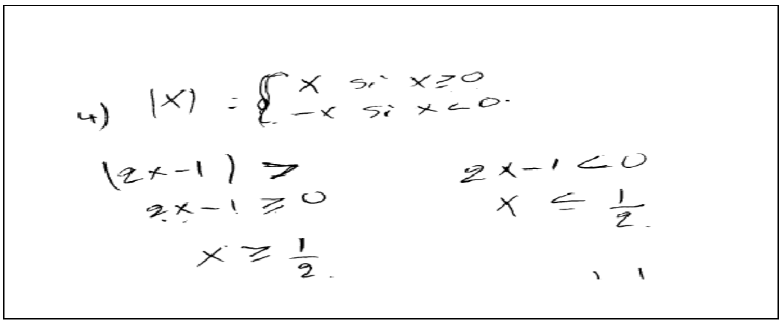
Cuando intenta hacer una gráfica de la función se evidencia que no sabe cómo representar la función planteada en la tarea.



A8, representación A de la tarea 4 del cuestionario

Entonces relaciona la integral con el área y plantea la integral de la función valor absoluto, pero tampoco logra resolver la tarea.

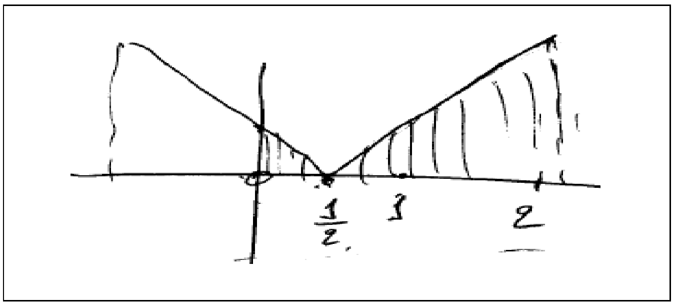
Durante la entrevista lo intenta nuevamente y lo primero que realiza es un procedimiento de forma **A**:



A8, resolución A de la tarea 4 durante la entrevista

Para ello recurre a la definición de valor absoluto de x, y lo aplica con algunos errores algebraicos a la función planteada en la tarea, resuelve las dos desigualdades y obtiene los valores: $x \geq \frac{1}{2}$, y $x \leq \frac{1}{2}$.

A partir de la representación **A** el alumno coordina la representación **G** de la función.



A8, representación G de la tarea 4 durante la entrevista

Para ello recurre al elemento matemático **ACA** de forma **G,** porque dibuja de forma correcta la gráfica de la función, forma dos triángulos rectángulos correspondientes al área solicitada en el intervalo dado, encuentra el punto de corte con el eje x que corresponde a la solución de las desigualdades planteadas en el procedimiento algebraico anterior, pero no logra calcular el área de los triángulos que tiene formados bajo la gráfica de la función.

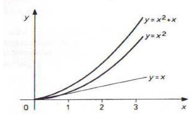
I: ¿Puede explicarme cómo has resuelto la tarea?
A8: prácticamente no la resolví, porque no recuerdo y aun en el momento no se me ocurre nada sobre el manejo del valor absoluto.
I: ¿Podría intentarlo en este momento?
A8: Bueno, lo que recuerdo del valor absoluto es que es x, si x es mayor o igual, y $-x$ si x es menor que cero.
I: ¿Cómo se despeja una ecuación?
A8: seria $2x$, esto se dividiría por 2, sería x mayor o igual, seria 1 y aquí x seria mayor o igual a $\frac{1}{2}$.
I: ¿Cómo sería la gráfica, podría trazarla?
A8: Ubicarme en el $\frac{1}{2}$ de la x y trazar una especie así como de V.
I: ¿Cuál sería el área que tendría que calcular?
A8: Y el eje X , entonces sería el área que me cubre estas líneas del valor absoluto.

I: ¿Entre que valores va a calcular el área?
A8: El intervalo $[0\,,2]$ *, pues aquí dijimos que esto valdría 1, por aquí más o menos valdría el 2 y necesito encontrar esta área 0; 2.*
I: ¿Podría decirme cómo hallaría esta área?
A8: Esta área, pues la haría con base a dos integrales.
I: ¿Por qué dos integrales?
A8: Porque, es que aquí en el valor absoluto veo una parte.
I: ¿De dónde hasta dónde va la primera?
A8: Del $\frac{1}{2}$ *manejándola desde el cero, seria de cero a* $\frac{1}{2}$.
I: ¿Cuál sería la segunda integral, estaría entre qué?
A8: Entre $\frac{1}{2}$ *y 2.*
I: ¿El área que calcula con los triángulos seria la misma que cuando la calcula con la integral?
A8: Si, porque la integral es un método, es una herramienta que se puede utilizar, para encontrar el área.
(A8E4).

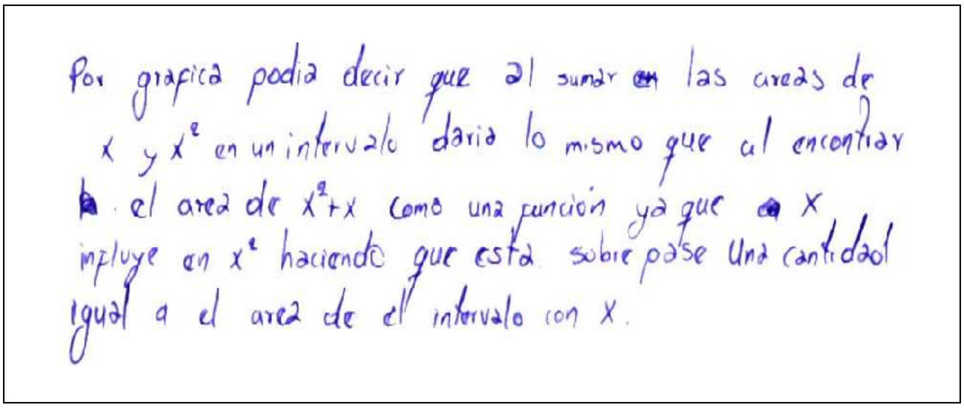
Recurre a los elementos matemáticos **ACA y LID** de forma **G** y **A**, pero no logra utilizarlos para poder resolver la tarea. Se pone de manifiesto que a nivel gráfico logra representar la función, pero no es capaz de calcular el área bajo el gráfico utilizando el elemento matemático **ACA** y, cuando intenta utilizar **LID,** menciona que debe partir la integral en dos. También menciona el elemento **PID,** en concreto la propiedad de la unión de intervalos que es uno de los elementos necesarios en la resolución de la tarea pero no lo utiliza para dar una respuesta a la pregunta planteada.

En la tarea 6.

Explique, en términos del gráfico, porqué $\int_0^a (x^2+x)dx = \int_0^a x^2dx + \int_0^a xdx$



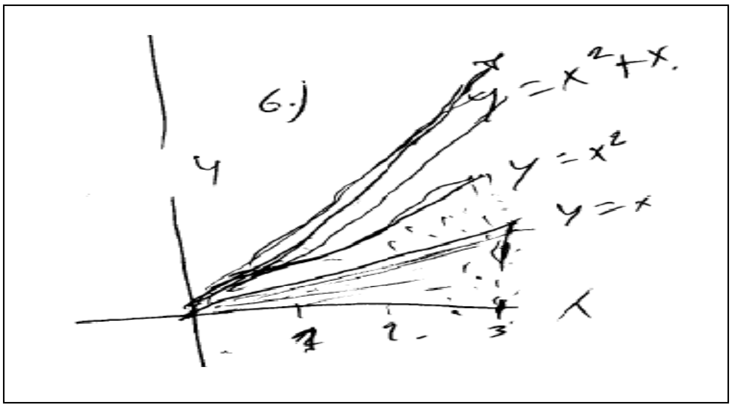
Durante la entrevista este alumno justifica la tarea de forma verbal:


Por grafica podia decir que al sumar las areas de x y x² en un intervalo daria lo mismo que al encontrar el area de x²+x como una función ya que x influye en x² haciendo que esta sobrepase una cantidad igual a el area de el intervalo con x.

A8, representación verbal de la tarea 4 del cuestionario

Recurre al elemento matemático **ACA** de forma **G**, porque menciona el área que representaría la gráfica da cada función por separado x^2 y x, luego afirma que este área sería igual a la suma de las áreas que representan la gráfica de la función $x^2 + x$.

Durante la entrevista trata de hacer un boceto de la gráfica:



A8, representación G durante la entrevista

Representa en un mismo plano las tres funciones y deja como un espacio por encima para indicar que las áreas son iguales gráficamente. Para justificar los procedimientos gráficos utiliza los argumentos siguientes:

I: ¿Podría explicarme qué quiere decir con el razonamiento de la pregunta?

A8: A ver, dije que por gráfica podía decir que al sumar las áreas de x y x^2 en un intervalo, daría lo mismo que al encontrar el área de $x^2 + x$, ya que x influye en x^2, haciendo que esta sobrepase una cantidad igual al área del intervalo con x, lo que dije aquí, es que en realidad es porque estoy hallando es dos áreas.
I: ¿Podría explicarme gráficamente los argumentos que acaba de manejar?
A8: Voy a intentarlo, tengo la gráfica $y = x$, y la otra $y = x^2$ y acá encuentro la suma de las dos $y = x^2 + x$, el razonamiento que hago es que en esta parte de debajo de la grafica $y = x$, al sumarla con la grafica de $y = x^2$ se ve una diferencia cuando miramos $y = x^2 + x$ una diferencia en la parte de arriba como una especie de un pequeño espacio, que pienso que al tener $y = x$ y al sumarle el área del x^2 me va a sobresalir este pedacito en la gráfica, ésta parte que veo que sobresale ahí me está mostrando de más de $y = x^2 + x$, queda abarcada al sumar las dos áreas de la parte de debajo de x^2.
I: ¿De dónde hasta dónde van en horizontal y en vertical estas gráficas?
A8: En horizontal las veo hasta un punto "a" cualquiera, en este caso podría decir que es tres por los puntos que me dan en esta parte.
I: ¿Podría justificar numérica y o gráficamente la igualdad sin usar integrales?
A8: Gráficamente no le veo como mucha relación y numéricamente tendría que recurrir a las áreas por aproximaciones de la gráfica $y = x$ con el eje x, si $y = x^2$ con el eje x y también hallarle el área a $y = x^2 + x$, entonces encontraría un valor que debe dar el mismo que la suma de las dos primeras.
(A8E4).

En el protocolo se evidencia que utiliza el elemento matemático **ACA** de forma **G**, tratando de establecer un complemento de las áreas, pero recurre a un procedimiento algebraico para tratar de comprobar la propiedad.

De forma general, los elementos matemáticos que más recuerda el alumno son **ACA** y **LID,** aunque con algunos errores, y alcanzó a establecer conjunción lógica entre **ACA** y **LID.** Es capaz de aplicar la condicional lógica en el elemento matemático **LID**, pero no utiliza en ninguna de las tareas el elemento matemático **ALS** y tampoco logra establecer una síntesis entre los sistemas de representación **G, A y AN**.

Por la forma como el alumno resolvió las diferentes tareas a lo largo de todo el cuestionario, por la manera como fueron justificadas esas respuestas a través de la entrevista consideramos que el alumno se encuentra en el nivel **inter 1** de desarrollo del esquema.

La tabla siguiente representa las relaciones lógicas, los elementos matemáticos y los sistemas de representación utilizados por el alumno tanto en el nivel **intra** como en el **ínter 1.**

NIVEL	CARACTERÍSTCAS	ELEMENTOS MATEMÁTICOS	SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN
INTRA	**Mostrar dificultades en establecer relaciones lógicas (conjunción lógica) entre elementos matemáticos. (Intento de relación "conjunción lógica").** **Recordar algunos elementos matemáticos de forma aislada.** **No tener sintetizados los sistemas de representación.**	**El área como aproximación: (G, A)** -Aproximación del área de una región plana. -Fórmula del área del rectángulo. -Fórmula del área del triángulo. -Partición del intervalo. -Sumas de Riemann. **El área como límite de una suma:(AN)** -El límite de las sumas. **La integral definida: (A)** -La integral definida como área de una región. -La definición analítica de integral definida. -Funciones positivas y negativas. **Las propiedades de la integral definida: (A)** -Integrales especiales. -Unión de intervalos. -Linealidad. -Integral de una constante. -Simetría. -Comparación. **Los teoremas fundamentales: (A)** -Antiderivada de una función continúa. -Regla de Barrow.	**Gráfico** **Algebraico** **Analítico**
INTER 1	**Usar la conjunción lógica ("y lógica") de forma correcta entre elementos matemáticos dados en el mismo sistema de representación.**	**El área como aproximación: (G, A)** -Aproximación del área de una región plana, -Fórmula del área del triángulo. **La integral definida: (A)** -La integral definida como área de una región. -La definición analítica de integral definida. -Funciones positivas y negativas. -Condición suficiente: continuidad implica integralidad. **Las propiedades de la integral definida: (A)** -De las funciones positivas y negativas. **Los teoremas fundamentales: (A)** -Regla de Barrow.	**Gráfico** **Algebraico**

Tabla 4.6. Relaciones lógicas, elementos matemáticos y sistemas de representación que caracterizan los niveles de desarrollo del esquema de integral definida en A8.

Además en el nivel **inter 1** el alumno **A1,** puede **recordar algunos elementos matemáticos gráficos, algebraicos y/o analíticos.** Por ejemplo en la tarea 8:

¿Cuál es el significado matemático de la Integral Definida de la función $y = f(x)$ en un intervalo $[a, b]$?

Durante la entrevista recuerda algunos elementos matemáticos de forma verbal:

I: ¿Cuál es su propia definición de integral definida?
A1: Mi propia definición, es hallar el área, geométricamente o es hallar el área que hay entre una curva y una recta o entre varias curvas en un intervalo.
I: ¿Entonces una integral definida es un área?
A1: Geométricamente es un área, pero en si es un proceso limite de una suma Riemanniana.
I: ¿Si tuviera que explicar el concepto de integral definida cómo lo haría?
A1: Comenzaría explicándole qué es una partición, luego construiríamos los rectángulos que tienen como longitud la partición del subintervalo y de altura la función evaluada en el extremo derecho de cada subintervalo, así hallaríamos una aproximación del área de esa curva y luego hallamos la suma de todas las áreas de cada uno de los rectángulos y obtendremos la aproximación de esa área, luego a través de un proceso del límite de esa suma Riemanniana. (Hace referencia al paso del límite a la definición analítica de integral definida)
(A1E8).

El estudiante tiene una imagen del concepto de Integral Definida asociada a los elementos matemáticos **ACA** y **ALS** en los sistemas de representación **G, A** y **AN**, aunque no logra integrarlos totalmente porque, al realizar las tareas, cuando utiliza estos mismos elementos matemáticos, generalmente lo hace de forma **A**, algunas veces los usa de forma **G** y otros tan sólo los menciona de forma **AN** pero no es capaz de utilizarlos en este registro y tiene algunas concepciones erróneas con el concepto de límite**.**

I: ¿Cómo le explicaría a un compañero el significado de la $\int_a^b f(x)\,dx$*?*
A1: Que es un proceso del límite de una sumatoria de Riemann.
I: ¿Qué quiere decir un proceso del límite de una sumatoria de Riemann?
A1: Eh…
I: ¿Qué es un límite?
A1: ¿Un límite? Es cuando hallamos un valor donde la función presenta algún problema.
I: ¿Un problema?

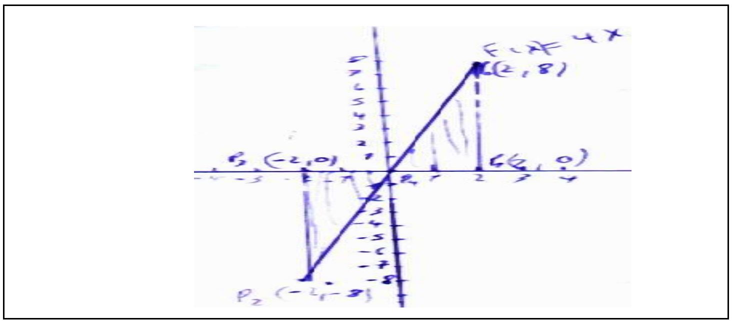
A1: Por ejemplo, cuando tenemos $f(x)=\dfrac{1}{x}$*, entonces hallamos el límite, cuando la variable independiente, en este caso* x *tienda a ese valor que no puede tomar el cero, porque ahí la función no está definida.*
(A1E8).

En este extracto de entrevista el alumno recuerda los elementos matemáticos **ALS** y **LID**, pero demuestra una concepción incorrecta de límite, cuando lo relaciona exclusivamente con el estudio de discontinuidades porque afirma que "*¿Un límite? Es cuando hallamos un valor donde la función presenta algún problema*".

Además de lo anterior, este alumno **muestra dificultades para establecer relaciones lógicas (conjunción lógica) entre elementos matemáticos.** Esta situación la encontramos en la tarea 2.

Sea **R**, la región encerrada por el gráfico de la función $f(x)=4x$ y el eje x, en el intervalo $[-2,\,2]$. a. Dibujar la gráfica. b. Calcular gráficamente el área de la región. c. Calcular la $\int_{-2}^{2} 4x\,dx$ d. ¿Son iguales los dos resultados anteriores? Justificar cada paso.

Este alumno lo primero que hace es la representación **G** de la función:

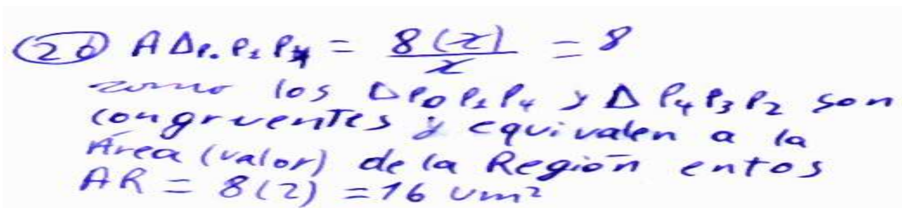


A1, representación G de la tarea 2 del cuestionario

Para ello traza los ejes de coordenadas y, a partir de tres puntos de la función localiza sus coordenadas y dibuja la gráfica de la función, forma dos triángulos rectángulos iguales, uno por encima y otro bajo el eje x.

A1:… grafiqué hallando puntos, dándole valores a la función $f(x)=4x$.
I: ¿Qué figura geométrica se formó bajo la recta?
A1: Entre el eje x *y la recta que va del origen hacia arriba, resulto un rectángulo e igualmente de la recta hacia abajo, otro rectángulo.*
I: ¿Rectángulo?
A1: Digo del triángulo rectángulo, si el triángulo rectángulo. (Corrige triángulo rectángulo).

A partir de esa representación realiza el siguiente procedimiento **A.**


(2b) $A\Delta p_0 p_1 p_4 = \frac{8(2)}{2} = 8$
como los $\Delta p_0 p_1 p_4$ y $\Delta p_4 p_3 p_2$ son congruentes y equivalen a la Área (valor) de la Región entos
$AR = 8(2) = 16$ um²

A1, resolución A de la tarea 2 del cuestionario

Nombra los dos triángulos a partir de sus vértices como $p_{0,}\ p_{1,}\ p_4$ el primer triángulo y $p_{4,}\ p_{3,}\ p_2$ como el segundo triángulo, calcula el área de uno de ellos utilizando la fórmula del área del triángulo y afirma que, como los dos triángulos son congruentes, tienen el mismo área y basta, entonces, multiplicar por 2 el área para hallar el área total determinada por la gráfica de la función indicada y el eje x. Así lo justifica durante la entrevista.

I: ¿Cómo calcula el área gráficamente?
A1: Sé que el área del triángulo rectángulo es igual a base por altura sobre 2 o de cualquier triángulo, entonces me dio 8, como los triángulos $p_0\ \ p_1$ *y* p_4*, y el triángulo* $p_4\ \ p_3\ \ p_2$ *son congruentes y equivalentes, el valor del área de la región es igual a 16.*
I: ¿Por qué son congruentes?
A1: Por ángulos opuestos, por el teorema lado, ángulo, lado, porque tienen igual lado e igual ángulo, entonces el área me dio 16 u^2.
(A1E2).

En este extracto de entrevista se aprecia que este alumno aplica el elemento matemático **ACA** de forma **G y A**, cuando grafica la función y utiliza conocimientos previos de geometría para hallar el área de la región subrayada, coordinado los sistemas de representación gráfico y algebraico.

En cuanto al cálculo de la integral en el cuestionario da la siguiente solución de forma **A**:

$$\int_{-2}^{2} 4x\,dx = 4\int_{-2}^{2} x\,dx = 4\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{2}$$
$$4\left[\frac{4}{2} - \frac{4}{2}\right] = 0$$

A1, resolución A de la tarea 2 del cuestionario

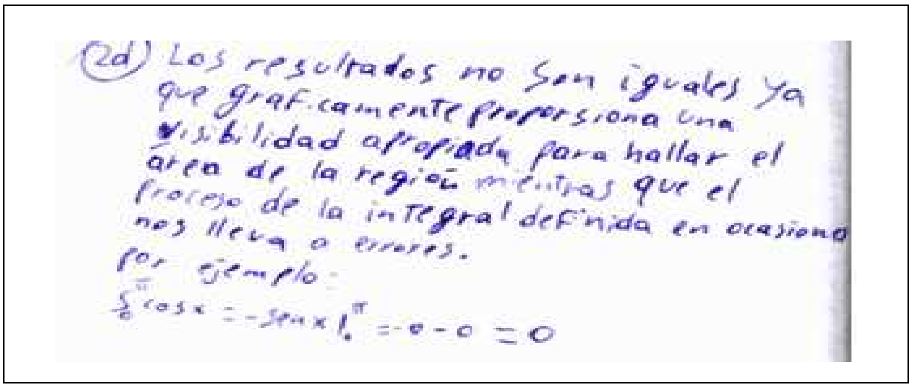
Por la forma cómo resuelve la tarea se pone de manifiesto que utiliza el elemento matemático **PID** porque aplica la propiedad para la integración del producto de una constante por una función y el **TFV** aplicando la regla de Barrow, porque halla la primitiva de la función, la evalúa en los extremos del intervalo y hace la suma algebraica correspondiente.

I: ¿Cómo calculó la integral?
A1: Aplicándole el teorema, aplicando primero la propiedad de la integral definida de una constante por una función que es igual a la constante por la integral definida de la función.
(A1E2).

Este alumno muestra la relación que establece entre el cálculo de áreas y la Integral Definida.

I: ¿Significan lo mismo el área y la integral definida?
A1: No.
I: ¿Por qué?
A1: La integral definida viene siendo el proceso del límite de una sumatoria de Riemann y geométricamente es el área de una figura plana.
(A1E2).

A pesar de ello muestra contradicciones en los razonamientos que hace para la resolución de la tarea.


(2d) Los resultados no son iguales ya que graficamente proporsiona una visibilidad apropiada para hallar el área de la región mientras que el proceso de la integral definida en ocasiones nos lleva a errores.
Por ejemplo:
$\int_0^{\pi} \cos x = -\operatorname{sen} x \Big|_0^{\pi} = -0 - 0 = 0$

A1, representación verbal de la tarea 1 del cuestionario

En este episodio se aprecia las incoherencias que tiene este alumno sobre la Integral Definida cuando manifiesta que geométricamente es el área de una región plana, y en ésta misma tarea razona sobre éste concepto diciendo que en ocasiones nos lleva a errores y plantea un ejemplo.

Con el objetivo de distinguir entre el cálculo del área de una región plana y la integral definida, aplica las propiedades de la integral de funciones positivas y negativas:

I: ¿Por qué al calcular el área le dio un valor y cuando calculó la integral dicho valor dio cero?
A1: Porque, no le apliqué la propiedad cuando la función está por debajo del eje x y cuando la función está por encima del eje x que viene siendo desde -2 hasta 0, más la integral desde 0 hasta 2.
I: ¿Cuál es la diferencia entre calcular el área y calcular una integral definida, podría explicármelo?
A1: Es cuando vamos a aplicarle las propiedades de la integral.
I: ¿Cuáles propiedades?
A1: Como son por ejemplo, la propiedad que me faltó acá que es la propiedad de la suma con respeto a los limites de integración, en este caso hasta cero, debemos tener en cuenta lo que hacemos, porque entonces integrando no vamos a obtener un resultado acorde a lo que nos plantea el gráfico o hallar el área aplicando la integral.
(A1E2).

En este apartado el alumno utiliza el elemento matemático **PID** de forma **G** cuando pone de manifiesto la propiedad para calcular el área de una región que está por encima y bajo el eje x.

En la tarea 3 no es capaz de realizar las conjunciones lógicas necesarias para poder resolverla.

> Sea R la región entre la gráfica de la función $f(x)=x^2$ y el Intervalo [0,4]
> -Utiliza particiones para aproximar el valor del área de la región R.
> -Justifica tu respuesta.

Responde verbalmente explicando un procedimiento **AN**.

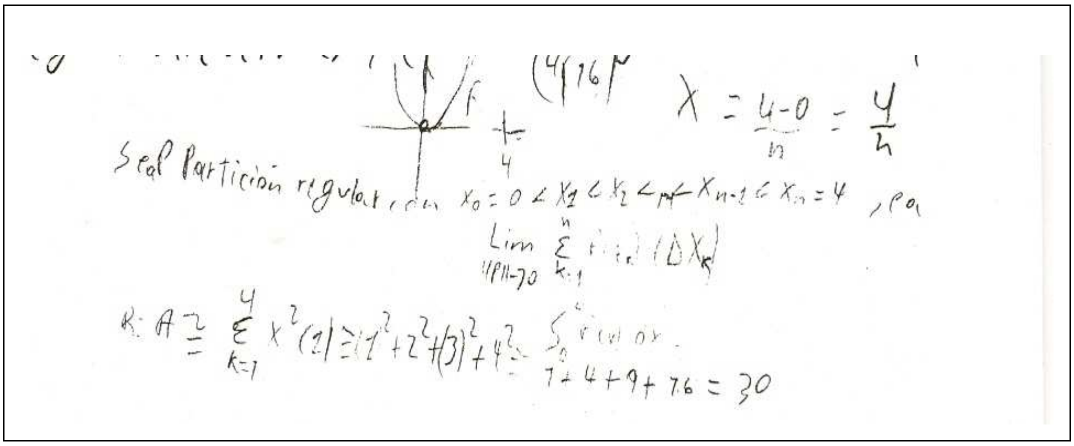
> Particionamos a $[0,4]$ regularmente $\Delta x = \frac{4-0}{4} = 1$
> $AR \cong \sum_{k=1}^{4} (x_k)^2 \Delta x =$
> Justifica: Por medio de la partición haciendo que la $\|P\| \to 0$ $(n \to 100)$ Norma tienda a cero a la integral definida es el valor exacto del área de la región
> de una suma de Riemann que es igual

A1, respuesta verbal de la tarea 3 del cuestionario

El alumno menciona los elementos matemáticos **ACA** de forma **A**, realizando una partición del intervalo y planteando las sumas de Riemann; el elemento **ALS** de forma **AN** describiendo el límite de una suma Riemann y **LID** de forma **G** como el valor exacto del área de una región, pero no establece conexión entre estos elementos porque no es capaz de aplicarlos en la resolución de la tarea. Durante la entrevista señala:

I: ¿Sabría comentarme como ha resuelto la tarea número 3?
A1: A través de particiones del intervalo.
I: ¿Qué son las particiones?
A1: Partir el intervalo $[0\ ,4]$ *en varios subíntervalos en este caso lo dividí regularmente.*
I: ¿Para qué hace esas particiones?
A1: Para hallar la altura de los rectángulos evaluando la función. …
I: ¿Cómo obtendría las áreas de los rectángulos?
A1: De base la longitud del subintervalo que en este caso viene siendo 1, por la altura que sería la función evaluada en el extremo derecho de cada uno de los intervalos.
(A1E3).

Calcula una aproximación del área por exceso aunque en la entrevista dice lo contrario por lo que podemos inferir que no está coordinando la representación gráfica con la algebraica.



A1, resolución A y AN de la tarea 3 del cuestionario

Esto lo explica durante la entrevista de la siguiente forma:

I: ¿Cómo calcula las alturas de los rectángulos usando las particiones?
A1: Evaluando la función…
I: ¿Esos rectángulos son superiores o inferiores, qué tipo de rectángulos está trazando?
A1: Inferiores.
(A1E3).

A continuación divide el intervalo en cinco partes y expresa la suma de las áreas correspondientes a los rectángulos construidos sobre esas partes, pero como no está coordinando los dos sistemas, el gráfico y el algebraico, no está evaluando los valores de las abscisas adecuadas en la función. En realidad es como si hubiera hecho cuatro divisiones pero está considerando un rectángulo de más y la medida de la base de cada uno de esos rectángulos, la hubiera obtenido mediante la división en cinco partes iguales. No se está dando cuenta de que cuando obtiene cuatro subintervalos, en realidad tiene cinco abscisas porque cada subintervalo viene determinado por la distancia entre dos de esas abscisas.

$$\sum_{k=0}^{4}(x_k^2)\frac{4}{5} = \frac{4}{5}(0)+\frac{4}{5}(1)+\frac{4}{5}(4)+\frac{4}{5}(9)+\frac{4(16)}{5} = \frac{4}{5}+\cancel{16}+\frac{36}{5}$$

A1, resolución A de la tarea 3 del cuestionario

En la entrevista no consigue afinar la partición, insiste siempre en la misma, aunque menciona el proceso de paso al límite, con lo que sólo utiliza un elemento matemático: el área como aproximación y no hay síntesis entre los sistemas de representación, sólo utiliza el algebraico.

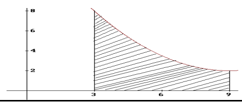
También en esta ocasión este alumno manifiesta una concepción incorrecta del concepto de límite, en este caso, vinculándolo con la idea de aproximación:

I: ¿Cuántos rectángulos debe trazar para aproximar el área?
A1: ¿Para aproximar el área? A través de un proceso del límite, puedo hallar la aproximación.
I: ¿Cómo es un proceso de límite, qué quiere decir con esto?
A1: A través de la integral, como proceso limite de una sumatoria de Riemann, cuando la norma tienda a cero.
(A1E3).

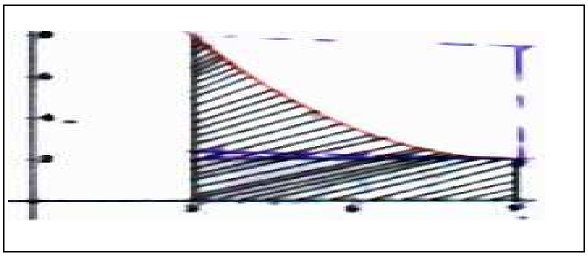
No es capaz de establecer una conexión entre **ACA** y **ALS** y utiliza el concepto de límite de forma incorrecta para tratar de definir **LID**.

Para resolver la tarea 1.

El área de la región rayada es mayor que **12** y menor que **48**.
a. ¿Por qué?
b. ¿Puede dar valores más ajustados?
c. ¿Cuáles?
d. ¿Cómo los obtiene?



Trata de cubrir la figura mediante figuras geométricas sencillas que le permitan aproximar el área.



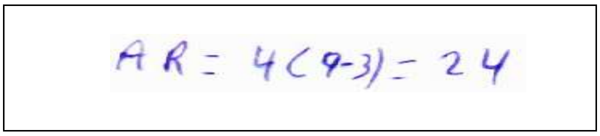
A1, representación G de la tarea 1 del cuestionario

Construye dos rectángulos, uno superior de base 6 unidades y de altura 8 unidades para ajustar el área por exceso, y otro rectángulo inferior también de base 6 unidades y de altura 2 unidades para ajustar el área por defecto.

I: ¿Cuáles son las dos áreas?
A1: El área del rectángulo mayor que es 6 *por* 8 *igual a* 48 *unidades cuadradas y el área del rectángulo menor que viene siendo 12, seis por dos doce, porque es el mismo y tiene la misma base.*
(A1E1).

En este extracto de entrevista el alumno aplica el elemento matemático **ACA** de forma **G** y **A** justificando las cotas que se le plantean en la tarea.

Par dar una mejor aproximación del área, a partir de esta representación gráfica el alumno hace el siguiente cálculo algebraico.



A, resolución A de la tarea 1 del cuestionario

Que justifica de la siguiente forma:

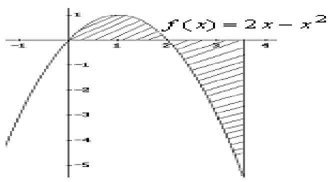
I: ¿Qué quiere decir esta expresión que tiene aquí $AR = 4$*?*
A1: $AR = 4$ *, el área del rectángulo.*
I: ¿De dónde obtiene el valor de 4?
A1: Cuando la función toma el valor de $f(4)$*, aplicándole el valor medio para integrales* (lo indica en la gráfica del cuestionario).
I: ¿Cómo toma ese valor medio?
A1: Porque la función está entre 0 *y* 8 *, entonces saqué el valor promedio.*
I: ¿Para qué le sirve ese valor?
A1: Con base en ese valor promedio y la longitud de la medida del segmento del intervalo puedo aplicarle el valor medio para integrales y así puedo hallar el área de la región
(A1E1).

En el protocolo se evidencia que utiliza de forma incorrecta el elemento matemático **TFV** (Teorema de valor medio) de forma **G y A** cuando considera que el punto para el que se cumple ese teorema es la media de los valores extremos que toma la función. Para aplicar el teorema (según él) multiplica ese valor por la diferencia de los extremos de la longitud de la base.

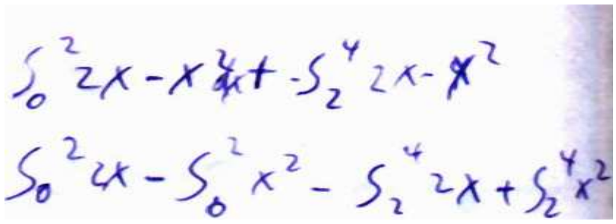
Podríamos decir que este alumno establece un intento de de conjunción lógica entre los elementos matemáticos **ACA** y **TFV** en los sistemas de representación **G y A** respectivamente. Utiliza el elemento matemático **ACA**, usando un rectángulo inferior y uno superior, calcula el área de cada uno de los rectángulos y establece comparaciones y a partir de la misma gráfica, pero aplica de forma incorrecta el elemento matemático **TVM**, tratando de establecer una relación del área que hay entre el rectángulo inferior y el rectángulo superior.

Además este alumno **recuerda algunos elementos matemáticos de forma aislada.** Por ejemplo en la tarea 5:

Dada la gráfica de $f(x) = 2x - x^2$, calcular por aproximaciones el área de la región rayada. Justificar el procedimiento utilizado.



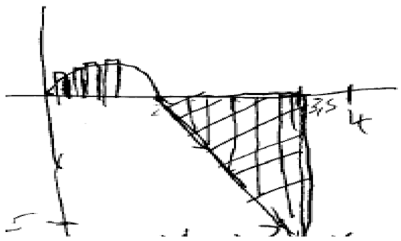
En el cuestionario responde exclusivamente de forma algebraica y con errores en la escritura de las expresiones utilizadas sin tener en cuenta que se le pide que lo haga por medio de aproximaciones.



A1, representación A de la tarea 5 del cuestionario

Trata de aplicar **PID**, concretamente las propiedades de la integral de funciones positivas y negativas (antepone el signo menos a la segunda integral de la primera línea), pero no incluye los paréntesis correspondientes, desaparece el diferencial dx, el extremo del segundo intervalo debería ser 3,5 y él ha tomado 4, y no es capaz de concluir el cálculo algebraico que tiene planteado. En la segunda línea trata de aplicar las propiedades algebraicas de la integración.

Durante la entrevista cuando se le insiste en cómo aproximaría el área responde de forma **G** aplicando **ACA**:



A1, representación G de la tarea 5 durante la entrevista

Para ello traza rectángulos que ajustan la gráfica de la función cuando toma valores positivos y, sombrea la parte en la que la función toma valores negativos, pero no es capaz de dar una aproximación del área.

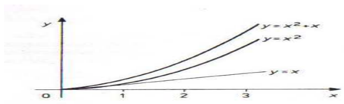
A1: A través de particiones.
I: ¿Cómo sería?
A1: Particionando el intervalo de cero a dos.
I: ¿Cómo particiona, cuál sería el bosquejo de la gráfica?
A1: Con rectángulos… (Grafica en una hoja).

I: ¿Cómo seria, podría trazar los rectángulos?
A1: Haría la partición regular que viene siendo $\Delta x = 3{,}5 - 2$ *dos rectángulos…*
I: Sobre el eje OX trazó rectángulos ¿Qué hace bajo el eje OX?
A1: Bajo éste también, porque esa es la otra parte del área de la figura.
I: ¿Cuántos? Veo líneas horizontales, oblicuas y verticales, cuáles son los rectángulos?
A1: Espere un momento, los rectángulos....no….
(A1E5).

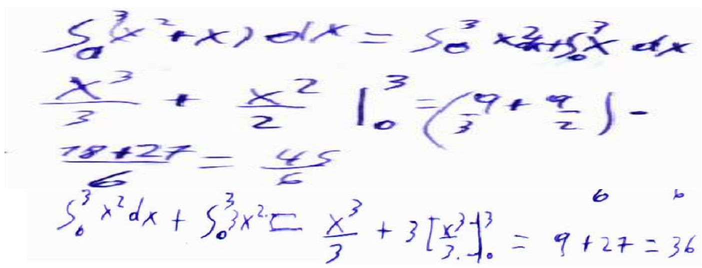
De manera global aunque este alumno menciona los elementos matemáticos **ACA** y **LID**, en el desarrollo de esta tarea, tanto en el cuestionario como durante la entrevista y lo refleja en el mapa conceptual, los evoca de manera aislada, porque cuando tiene que utilizarlos no logra establecer una coordinación entre ellos.

En la tarea 6.

Explique, en términos del gráfico, por qué $\int_0^a \left(x^2 + x\right)dx = \int_0^a x^2 dx + \int_0^a x dx$



En el cuestionario, a pesar de que se le pide que lo haga de forma **G**, el alumno realizó un procedimiento de forma **A**:



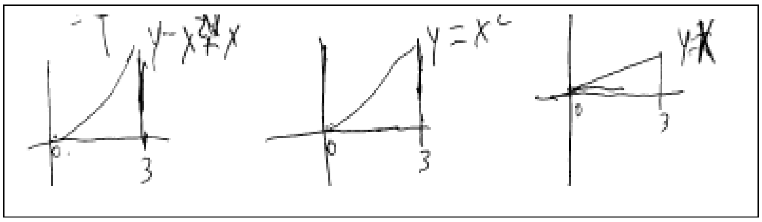
A1, resolución A de la tarea 6 del cuestionario

Para realizar este cálculo algebraico intentó resolver por separado cada miembro de la igualdad, sin darse cuenta que está aplicando la misma propiedad que tiene que demostrar, y pone de manifiesto el predominio del pensamiento algebraico sobre el gráfico cuando utiliza dos procedimientos algebraicos de cálculo de la integral. En el primero plantea la integral en el intervalo $[0,3]$ como una suma de las integrales y hace un cálculo incorrecto aplicando el teorema fundamental (la regla de Barrow), y en el segundo hace una suma incorrecta de integrales porque escribe un coeficiente que no corresponde con la función que debe integrar y por tanto obtiene resultados incorrectos y diferentes así que no logra comprobar la igualdad algebraicamente.

Durante la entrevista muestra que tiene dificultad para aplicar **PID** de forma **G**:

I: ¿Podría explicarme que quiere decir con este razonamiento de la pregunta número 6?
A1: Explique en términos del gráfico por qué (lee parte de la pregunta y dice: espera un momento que estoy observando).
I: ¿Por qué utiliza sólo el registro algebraico para demostrar la propiedad?
A1: Si, espera que ya estoy mirando el gráfico, porque la trabaje a través de la integral, pero acá me dicen que a través del gráfico.
(A1E6).

El alumno trata de seguir la instrucción de la tarea y, a pesar de ser consciente que debe explicar gráficamente la propiedad, no es capaz de hacerlo. Consigue hacer un gráfico para ayudarse con la explicación gráfica:



A1, representación G de la tarea 6 durante la entrevista

Representa por separado cada una de las funciones y trata de justificar éste procedimiento basándose en el elemento matemático **PID** sin conseguirlo.

I: ¿Cómo lo haría gráficamente? Inténtelo…
A1: Tengo la región de la curva comprendida entre 0 y 3 (dibuja tres gráficas)
I: ¿Cómo demuestra la igualdad con esas tres gráficas que tiene por separado?
A1: Espera un momento pienso un poquito.
I: ¿Podría compararla?
A1: *Comparo, seis, cero, si, comparando tenemos la misma área* (susurra y piensa).
I: ¿El área de quién, qué pasa gráficamente?

A1 ¿Gráficamente? ……aplicando las propiedades de la integral definida, si hallamos la integral de cada uno de las funciones.
I: ¿Tiene otra forma de demostrar la propiedad?
A1: No, si sumamos esas áreas no se da esa propiedad.
(A1E6).

Para tratar de explicar la propiedad recuerda los elementos matemáticos **LID** y **PID** pero tiene dificultad porque no logra vincular los elementos matemáticos gráficos y algebraicos necesarios y porque, por los errores que él mismo ha cometido, no fue capaz de comprobar el resultado algebraico.

En la tarea 4**.**

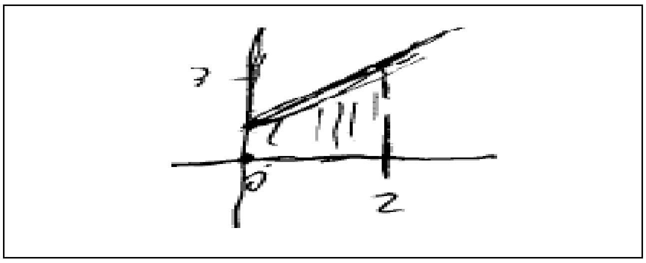
Calcular el área limitada por la gráfica de la función $f(x)=\|2x-1\|$, en el intervalo $[0,2]$ y el eje x. Justificar la respuesta.

En el cuestionario lo primero que hace es plantear una integral de forma **A**.

A1, representación A de la tarea 4 del cuestionario

A pesar de que en la tarea no se ha mencionado la palabra integral, este alumno plantea el elemento matemático **LID**, y pone de manifiesto que con valor absoluto no ha trabajado mucho.

En la entrevista trata de hacer una representación **G,** aunque no es correcta:



A1, representación G de la tarea 4 durante la entrevista

Esa representación no le permite coordinar los registros **G** y **A**, para poder calcular el área de la región utilizando el elemento matemático **ACA**, además, por desconocimiento de la función valor absoluto, piensa que se siente más seguro calculando **LID** de forma **A**.

I: ¿Puede explicarme cómo ha resuelto la tarea número 4?
A1: Es que realmente, con valores absolutos casi no he trabajado. ..
I: ¿Qué haría con esta función, inténtelo por favor?
A1: Pues la función siempre va a ser positiva.
I: ¿Por qué positiva?
A1: Porque el valor absoluto de un número va a ser positivo.
(A1E4).

En primer lugar se evidencia que el alumno tiene un desconocimiento de la función valor absoluto y que la representación gráfica es incorrecta porque la dibuja como si se tratará de una función lineal. En segundo lugar, a pesar de que el alumno menciona que la función sólo puede ser positiva, no se da cuenta de que si prolonga la gráfica a la izquierda, tal como ha hecho la gráfica, en algún momento se va a hacer negativa, con lo que se contradicen los aspectos gráficos con los algebraicos.

Para resolver la tarea no tiene en cuenta la representación gráfica y utiliza únicamente el elemento matemático **LID** de forma **A**:

$$\int_0^2 2x-1\,dx = \int_0^2 2x - \int_0^2 1\,dx =$$

A1, representación A de la tarea 4 durante la entrevista

Para ello resuelve la integral de una diferencia como la diferencia de integrales, cometiendo errores sintácticos como el olvido de los paréntesis o del diferencial de x, dx . Durante la entrevista justifica esta solución algebraica basándose en los elementos matemáticos **LID** y **PID.**

A1: Porque, sabemos que la integral geométricamente es el área de esa región y la curva es continua en ese intervalo.
I: ¿Cuántas integrales necesitaría?
A1: Una integral definida, de $2x-1$ *con respecto a* x *entre* 0 *y* 2 *y a esa integral le aplicamos las propiedades.*
I: ¿Cuáles propiedades?
A1: Las propiedades de la integral definida que viene siendo…
I: ¿Qué propiedades aplicaría?
A1: La propiedad de la suma, que dice que la integral de una suma es igual a la suma de las integrales definidas, esta es la propiedad aditiva con respecto al integrando.
I: ¿Qué puede concluir de lo que me acaba de explicar?
A1: Qué viene siendo ésta, igual a ésta, de 0*, a,* 2 *de* $2x$ *, menos la integral de* 0 *a* 2 *de* 1 *con respecto a* x*, y ahí podemos efectuar la integración* (habla y escribe).
I: ¿Está seguro que este planteamiento es correcto?
A1: Si señor.
(A1E4).

En este episodio se aprecia que el alumno asocia la integral con el área de una región, infiere que si la función es continua es integrable, pone de manifiesto que no tiene en mente que es la integral de un valor absoluto porque calcula la integral como si se tratara de una función lineal y utiliza una propiedad que no corresponde a la que se plantea en la tarea, estos indicios demuestran que no tiene los conceptos previos necesarios implícitos en la resolución de la tarea.

En la tarea 7b.

Decir si la afirmación es verdadera o falsa. En caso de ser falsa, explicar por qué o mostrar un contraejemplo. 7b. *Si* f *es continua en* $[a, b]$*, entonces* f *es integrable en* $[a, b]$.

En la entrevista menciona de forma incorrecta el elemento matemático **LID** cuando utiliza el reciproco de la condición suficiente: *Si* f *es continua en* $[a, b]$*, entonces* f *es integrable en* $[a, b]$, que no es cierto.

I: ¿Cuáles son los criterios que le llevan a este razonamiento?
A1: Porque, la integración incluye, continuidad.
(A1E7b).

Utiliza el elemento matemático **LID** de forma **AN**, y lo utiliza de forma incorrecta cuando afirma que la integración incluye continuidad, porque una función puede ser integrable pero no necesariamente tiene que ser continua en todo un intervalo.

Además este alumno suele recordar algunos elementos matemáticos de forma aislada y con errores. Por ejemplo en la tarea 7c.

Considerar el valor de verdad o de falsedad de la afirmación $\int_{-1}^{1} x^{-2}\, dx = \left[-x^{-1}\right]_{-1}^{1} = (-1) - 1 = -2$ y en caso de ser falsa, explicar por qué o dar un contraejemplo.

En el cuestionario responde de forma verbal la tarea:

$\int_{-1}^{1} x^{-2}\, dx = \left[-x^{-1}\right]_{-1}^{1} = (-1) - 1 = -2$	F ya que el valor debe ser positivo

A1, repuesta verbal de la tarea 7c del cuestionario

Aquí el alumno considera la afirmación como falsa, y la justifica asegurando que *"el valor debe ser positivo"*, porque lo está considerando como área, cuando confunde el cálculo de la integral con el cálculo del área afirmando que el valor debe ser positivo.

En la entrevista trata de nuevo de comprobar la afirmación realizando otra vez el procedimiento **A**:

$$\int_{-1}^{1} x^{-2}\, dx = -2x^{-1} \Big|_{-1}^{1} = -[1-(-1)] = -$$

A1, resolución A de la tarea 7c durante la entrevista

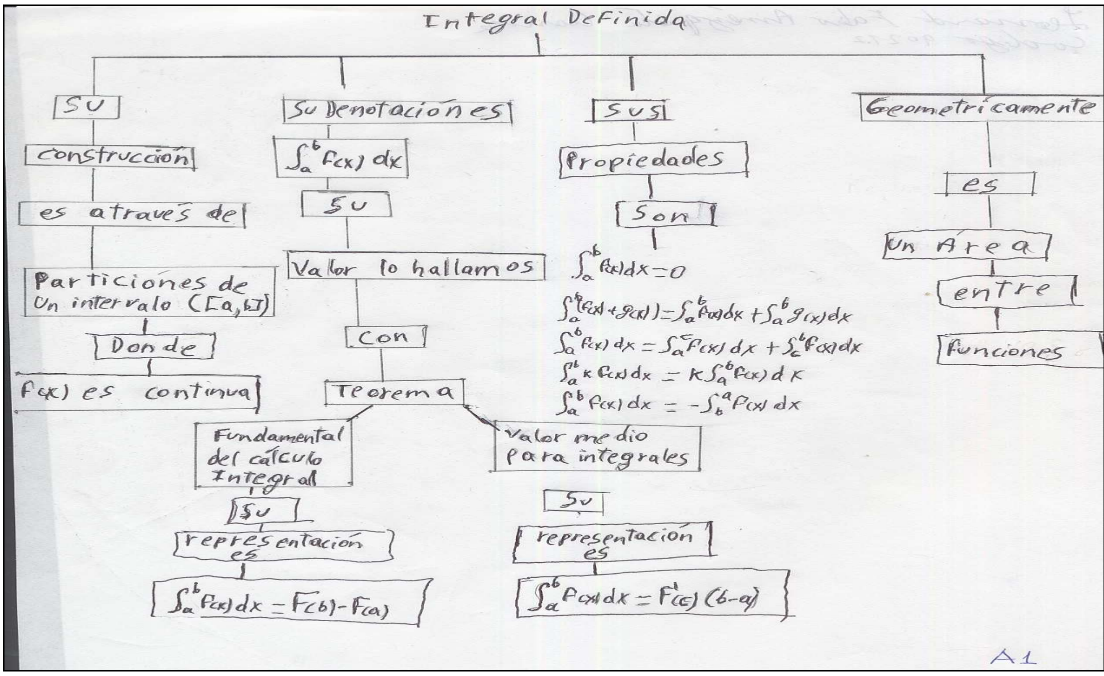
Para ello realiza el mismo cálculo algebraico incorrecto de la integral que aparece en la tarea y. aunque no concluye el resultado, éste hubiera sido el mismo que el planteado en la pregunta por lo que modifica su valor de falsedad de la proposición indicando que es verdadera.

> *I: ¿Considera que el argumento de la proposición* 7 *c* *es válido?*
> *A1: Acá, la puse falsa*
> *I: ¿Está de acuerdo con ese valor?*
> *A1: La integral como le decía está bien hecha pero…*
> *I: ¿Está seguro que está bien hecha?*
> *A1: Integrando si está bien hecha, pero el valor no* (hace cálculos)
> *I: ¿Quiere decir que el problema está es en el signo de la respuesta?…*
> *A1: Si me piden hallar un área está mal hecha, pero si me piden hallar la integral está bien hecha.*
> *I: ¿Qué le plantean en este ejercicio?*
> *A1: La integral, entonces está bien hecha y contesté que es falsa.*
> *I: Entonces, no está de acuerdo hoy con la respuesta.*
> *A1: No, no estoy de acuerdo.*
> *I: ¿Por qué?*
> *A1: Porque está bien hecha la integral.*
> **(A1E7c).**

En el protocolo pone de manifiesto que el valor de verdad de la proposición está asociado con el signo de la respuesta porque considera la afirmación incorrecta cuando relaciona la Integral Definida como área y la considera verdadera si se trata de la Integral Definida como cálculo algebraico. Consideramos que utiliza el elemento matemático **TFV** como un cálculo algebraico (aplicación de la regla de Barrow), pero no tiene en cuenta la discontinuidad de la función; es decir, el alumno desconoce las condiciones para poder aplicar la regla de Barrow.

De manera global, por la forma como resolvió las tareas a lo largo de todo el cuestionario, el modo de justificar las respuestas en la entrevista y la comprensión del concepto de Integral Definida que refleja en el mapa conceptual siguiente, podemos afirmar que el alumno utiliza los elementos matemáticos que constituyen el concepto de Integral Definida desde un pensamiento algebraico y operativo, presenta algunas dificultades con las representaciones gráficas y recuerda de memoria algunos de estos elementos matemáticos, además tiene dificultad con el condicional porque no está muy claro si lo entiende como condición necesaria, suficiente o lo utiliza en los dos sentidos, menciona algunos elementos matemáticos con errores de modo analítico, y no es capaz de resolver las tareas porque, aunque evoca los elementos matemáticos, no es capaz de utilizarlos.

En el mapa conceptual se observa la imagen del concepto de Integral Definida que tiene este alumno.



A1,

A1, mapa conceptual que representa el concepto de Integral Definida

Para él los elementos matemáticos que configuran el concepto matemático de Integral Definida y que él recuerda son: **ACA**, **LID**, **PID** y **TFV**, pero no considera el elemento matemático **ALS** de forma **AN** siendo el mismo elemento con que el alumno a lo largo de todo el cuestionario no logró establecer relaciones lógicas y utilizó con dificultad e incluso con algunos errores, como con el concepto de límite y de continuidad.

En general, observamos que el estudiante utiliza con alguna dificultad la conjunción entre los elementos matemáticos **ACA** y **LID**; **TFV** como cálculo aplicando la regla de Barrow de forma errónea; **PID** cuando tiene que utilizar la integral como área en los sistemas de representación **G** y en especial el **A**. Es capaz de verbalizar los aspectos teóricos que tiene que ver con el elemento **ALS** de forma **AN**, pero no de ponerlos en práctica.

Por la forma como el estudiante resolvió las diferentes tareas a lo largo de todo el cuestionario, cómo fueron justificadas esas respuestas a través de la entrevista y por la forma como estructura en el mapa conceptual el concepto de Integral Definida, consideramos que el alumno se encuentra en el nivel **inter 1** de desarrollo del esquema del concepto de Integral Definida.

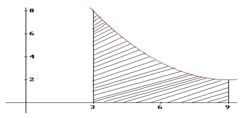
La tabla siguiente representa las relaciones lógicas, los elementos matemáticos y los sistemas de representación utilizados por el alumno tanto en el nivel **intra** como en el **inter 1.**

NIVEL	CARACTERÍSTCAS	ELEMENTOS MATEMÁTICOS	SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN
INTRA	**Mostrar dificultades en establecer relaciones lógicas (conjunción lógica) entre elementos matemáticos. (Intento de relación "conjunción lógica").** **Recordar algunos elementos matemáticos de forma aislada.** **No tener sintetizados los sistemas de representación.**	**El área como aproximación:(G. A)** -Aproximación del área de una región plana. -Fórmula del área del rectángulo. -Fórmula del área del triángulo. -Fórmula del área del trapecio. -Partición del intervalo. -Sumas de Riemann **El área como límite de una suma: (AN)** -Límite de las sumas. **La integral definida: (G, A)** -La integral definida como área de una región. -La definición analítica de la integral definida -Condición suficiente: continuidad implica integralidad. **Las propiedades de la integral definida: (A)** -Integrales especiales -Unión de intervalos - Regla de linealidad. -El área de funciones positivas y negativas. **Teoremas fundamentales y del valor medio: (A)** -Regla de Barrow. -Valor medio de una función.	**Gráfico** **Algebraico** **Analítico**
INTER 1	**Recordar algunos elementos matemáticos gráficos, algebraicos y/ o analíticos.**	**El área como aproximación:(G. A)** -Aproximación del área de una región plana. -Fórmula del área del rectángulo. -Partición del intervalo. -Sumas de Riemann. **El área como límite de una suma: (AN)** -Límite de las sumas - **La integral definida: (G, A)** -La integral definida como área de una región. -La integral definida como cálculo algebraico. -Definición analítica de la integral definida. **Teoremas fundamentales y del valor medio: (A)** -Regla de Barrow.	**Gráfico** **Algebraico** **Analítico**

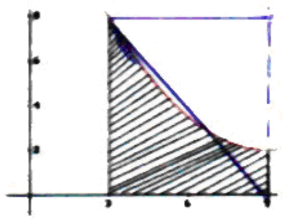
Tabla 4.7. Relaciones lógicas, elementos matemáticos y sistemas de representación que caracterizan los niveles de desarrollo del esquema de integral definida en A1

Asimismo en este nivel **inter 1**, **A10** puede **recordar algunos elementos matemáticos gráficos, algebraicos y/o analíticos.** Por ejemplo en la tarea 1**.**

El área de la región rayada es mayor que **12** y menor que **48**.
a. ¿Por qué?
b. ¿Puede dar valores más ajustados?
c. ¿Cuáles?
d. ¿Cómo los obtiene?

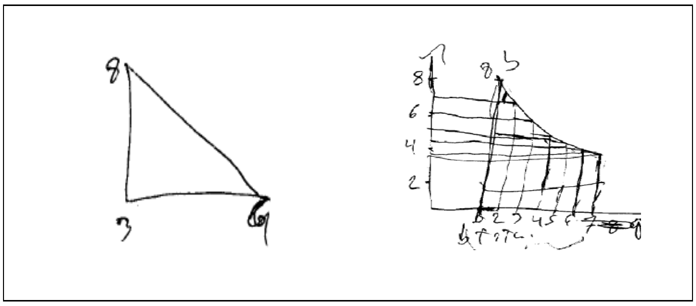


En el cuestionario trata de cubrir el área solicitada mediante figuras geométricas.



A10, representación G de la tarea 1 del cuestionario

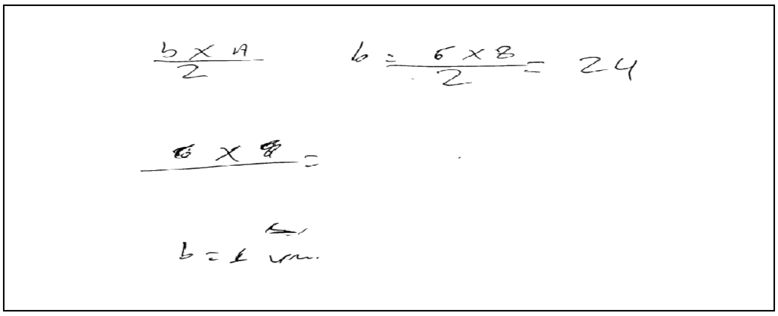
Para ello utiliza el elemento matemático **ACA** de forma **G** cubriendo el área mediante un rectángulo de base 6 y de altura 8, y muestra que su área, de 48 unidades cuadradas, es mayor que la sombreada y luego divide el rectángulo por su diagonal en dos triángulos iguales uno de los cuales cubre casi toda el área sombreada, para indicar que el área aproximada de 24 unidades cuadradas es inferior que la sombreada. Además, durante la entrevista realiza la siguiente gráfica en la que hace una partición del intervalo [3,9] y construye rectángulos inferiores para recubrir el área:



A10, representación G de la tarea 1 durante la entrevista

I: ¿Qué otros procedimientos podría utilizar?
A10: Tengo acá un área bajo una curva, entonces voy a construir rectángulos de forma que van cubriendo toda esa área
I: ¿Cómo serian esos rectángulos?
A10: Particionando la base de 3 a 9, o sea 6 unidades donde tengo opciones de pensar en cuántos rectángulos puedo dividir esa área
I: ¿Qué valores numéricos le podría dar a cada rectángulo?
A10: Puedo colocar valores numéricos de longitud 1 en la base, tengo uno y como acá tengo 3 serian 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, y 9, no hasta 6.
I: ¿Cómo obtiene las alturas?
A10: Puedo construir otros segmentos, en forma horizontal para hallar los cortes porque la gráfica está ubicada en un plano cartesiano, ya tengo la altura y las bases establecidas, entonces hallo las áreas.
(A10E1).

Pero así no logra obtener una aproximación y lo que hace es calcular el área del triángulo que, tanto en el cuestionario como durante la entrevista, considera que cubre la mayor parte del área sombreada.



A10, resolución A de la tarea 1 durante la entrevista

También menciona otros elementos matemáticos relacionados con esta tarea pero no logra aplicarlos, por ejemplo **ALS**:

A10: Para aproximar puedo usar un método, no sé si será método o fórmula que se llama la sumatoria de Riemann.

I: ¿Qué le permite la suma de Riemann, calcular o aproximar el área?
A10: Aquí me nace una duda, porque la suma de Riemann lleva implícito el concepto de límite, entonces si puedo es calcular el área.
I: ¿Cuándo sólo aplica la sumatoria?
A10: No, porque es que no sé si de pronto me olvide del tema, pero lo que entiendo de la sumatoria de Riemann o del proceso limite, es lograr que sea muy cerca, muy corta la longitud de los intervalos, cosa que se formen infinitos rectángulos con poca distancia y al sumarlos, entonces se ajustarían muy bien a la curva, así lograría una mayor aproximación, pero lo que sí sé ¿cómo le digo a usted? Es que si le aplica el proceso del límite se juntaría tanto que no habría margen de error, creo que puedo hallar el área total con este procedimiento.
(A10E1).

O el elemento matemático **LID** como área de una región.

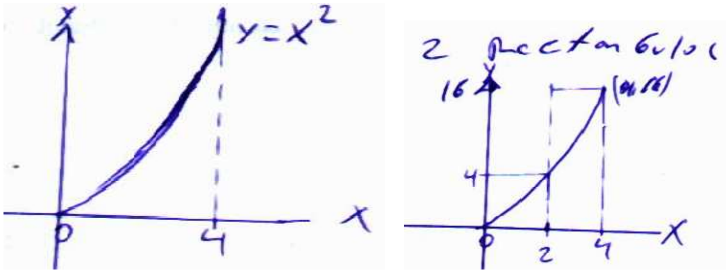
A10: Por medio de una Integral Definida.
I: ¿La integral qué le permite?
A10: Calcular exactamente.
(A10E1).

A lo largo del desarrollo de la tarea muestra que recuerda los elementos matemáticos **ACA, ALS** y **LID** en los sistemas de representación **G, A y AN,** aunque el único que consigue es aplicar es **ACA** y no logra obtener una mejor aproximación del área; los otros elementos matemáticos sólo los recuerda de forma teórica pero no los utiliza en la resolución de la tarea.

Además este alumno **muestra tener esbozo de síntesis de los sistemas de representación gráfico y algebraico.** Por ejemplo en la tarea 3:

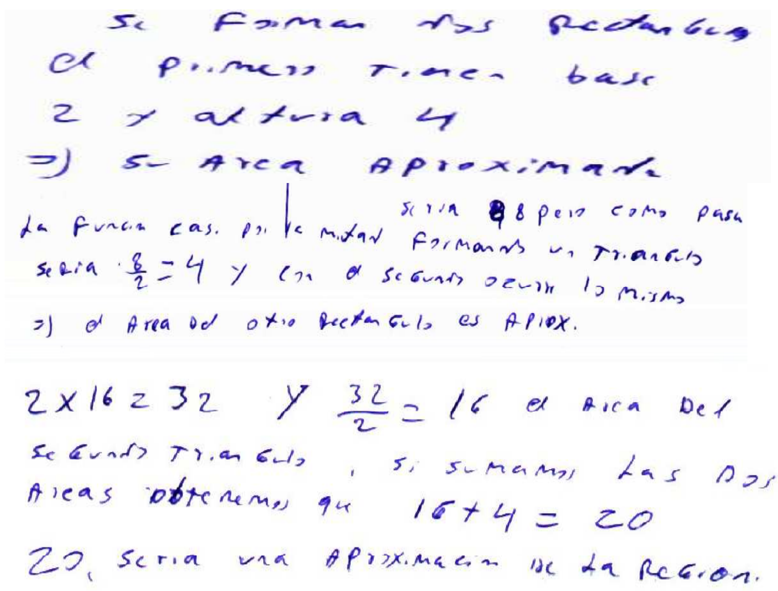
Sea R la región entre la gráfica de la función $f(x)=x^2$ y el Intervalo [0,4] **-**Utiliza particiones para aproximar el valor del área de la región R. **-**Justifica tu respuesta.

En el cuestionario lo primero que hace es representar la función de forma **G**:



A10, representación G de la tarea 3 del cuestionario

Para aproximar el área aplica el elemento matemático **ACA**


se forman dos rectangulos
el primero tiene base
2 y altura 4
⇒ su area aproximada
sería 8 pero como pasa
la funcion casi por la mitad formamos un triangulo
sería $\frac{8}{2} = 4$ y con el segundo sería lo mismo
⇒ el area del otro rectangulo es aprox.
$2 \times 16 = 32$ y $\frac{32}{2} = 16$ el area del
segundo triangulo, si sumamos las dos
areas obtenemos que $16 + 4 = 20$
20, sería una aproximacion de la region.

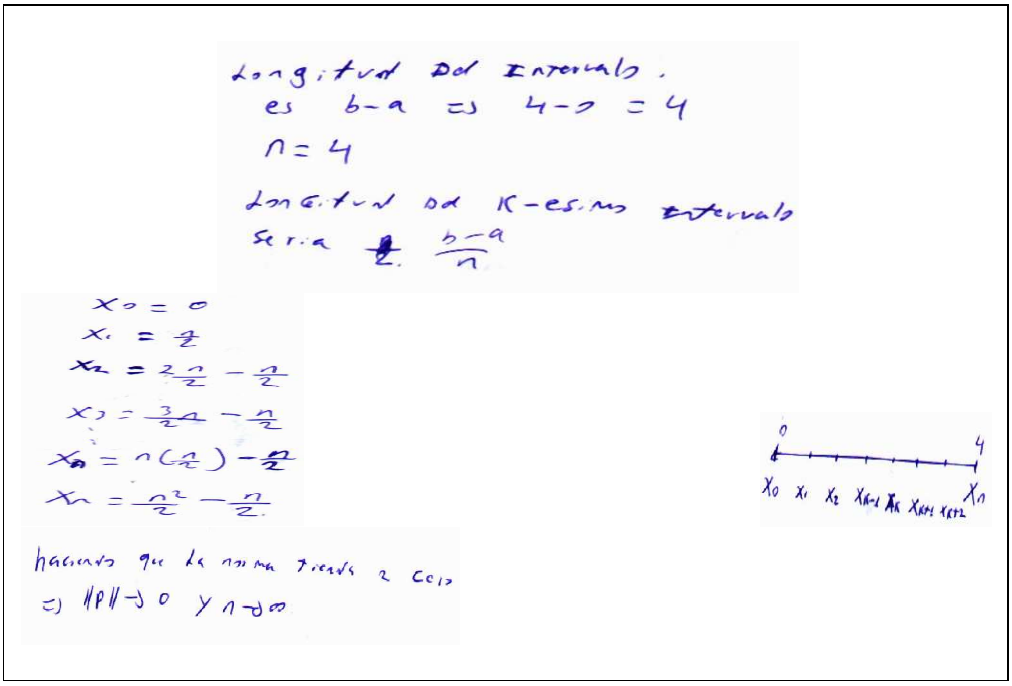
A10, resolución A de la tarea 3 del cuestionario

El alumno divide numérica y gráficamente el intervalo mediante una partición en subintervalos iguales y construye dos rectángulos superiores aunque calcula el área por defecto porque divide cada rectángulo en dos triángulos y suma las áreas de esos triángulos. Este alumno coordina la representación **G** con el procedimiento **A** porque, a partir de la gráfica, calcula el área de los dos triángulos.

Durante la entrevista justifica el razonamiento apoyado en la representación **G**.

I: ¿Podría explicarme cómo ha resuelto esta parte del ejercicio del gráfico que tiene en su respuesta?
A10: Aquí lo que se me ocurrió fue construir 2 rectángulos como tengo el intervalo que es de 4 unidades, lo que hago es dividir eso en 2.
I: ¿Qué le permite eso?
A10: Me permite formar 2 rectángulos, un rectángulo de altura 4, el valor de la base reemplazo en la ecuación que es el cuadrado de x.
I: ¿Y qué obtiene?
A10: La altura de un rectángulo y hago lo mismo con el siguiente porque conociendo la base y la altura, hallo el área de los 2 rectángulos.
(A10E3).

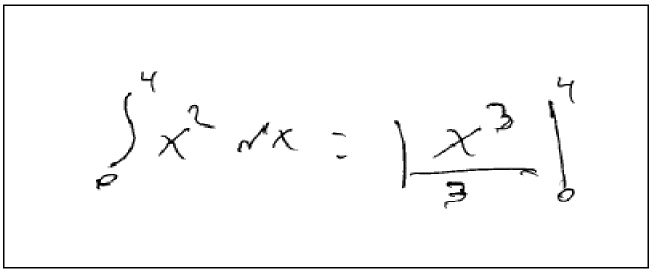
Además recurre al elemento matemático **ALS** para poder calcular el área de forma exacta:



A10, representación A de la tarea 3 del cuestionario

Usa una partición genérica para la que halla la base de cada subintervalo, utiliza la implicación correctamente “si $\|\Delta\| \to 0 \; implica\, que \; n \to \infty$”, pero no es capaz de construir las sumas de Riemann, y tampoco de aplicar el límite de las sumas inferiores y superiores, y por tanto el proceso analítico de resolución no es concluyente.

Como en el cuestionario no fue capaz de dar un valor aproximado del área usando particiones, entonces durante la entrevista decide calcularla mediante una integral.



A10, resolución A de la tarea 3 durante la entrevista

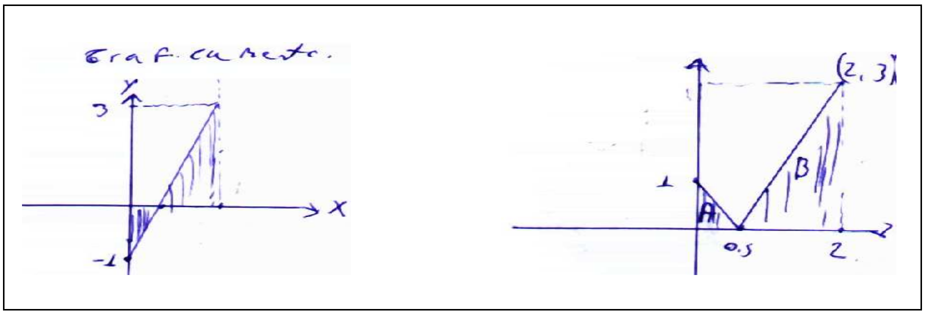
A10: ¿De qué otra forma? Haciendo uso de la integral definida.
I: ¿Cuál sería la integral definida, ahí?
A10: la siguiente integral definida: $\int_0^4 f(x^2)dx$*, al aplicar una operación obtengo el cubo de* x *sobre 3, y eso lo debo evaluar en el límite de integración para resolverla.* **(A10E3).**

Aquí se pone de manifiesto que utiliza otra vez el elemento matemático **LID** de forma **A**, porque plantea correctamente la integral pensada como área de una región, calcula una primitiva de la función pero obtiene el área correspondiente a esta tarea.

Este alumno **muestra dificultades en establecer relaciones lógicas (conjunción lógica) entre elementos matemáticos.** Esta característica la encontramos en la tarea 4.

Calcular el área limitada por la gráfica de la función $f(x)=\|2x-1\|$, en el intervalo $[0, 2]$ y el eje x. Justificar la respuesta.

En el cuestionario lo primero que hace es una representación gráfica de la función:

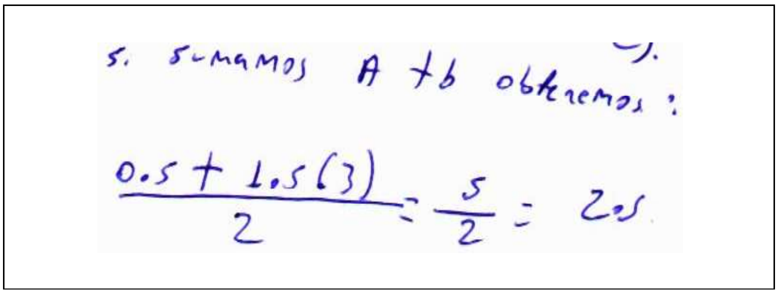


A10, representación G de la tarea 4 del cuestionario

Para realizar la representación gráfica primero hace la representación de la función lineal y luego la del valor absoluto:

A10: Porque me están pidiendo que halle esa área pero en valor absoluto y entiendo que el valor absoluto de una función, es su parte positiva y como encuentro que un área está en la parte negativa de la función del eje x.

A partir de la representación **G** calcula el área de los triángulos y muestra que es capaz de coordinar dos representaciones **G** y **A**:



A10, representación A de la tarea 4 del cuestionario

Utiliza el elemento matemático **ACA** de forma **A**, cuando aplica la fórmula del área del triángulo, calcula las áreas de los triángulos **A** y **B,** las suma y obtiene correctamente el área limitada por la función en el intervalo indicado.

I: ¿Cómo calcula luego el área?
A10: Al transponer la figura sobre el eje x*, encuentro que se forman 2 triángulos y uno está seguido del otro y hallo el área de un triángulo aplicando la fórmula geométrica base por altura.*
I: ¿Cuál es el área de cada triángulo?
A10: El primero me dio de altura 1 y base 0,5 el área es 0,5 por 1 dividido 2

I: ¿Cómo obtuvo el área del segundo?
A10: Obtuve una altura de 3, la base es 1,5, luego base por altura dividido 2, l entonces el área total que me están pidiendo es 2,5.
(A10E4).

Además el alumno calcula el área mediante la Integral Definida.

otra forma sería

$$\int_0^{0.5}(2x-1)\,dx + \int_{0.5}^{2}(2x-1)\,dx.$$

A10, resolución A de la tarea 4 del cuestionario

Recurre a los elementos matemáticos **LID** y **PID** de forma **A** cuando plantea una suma de integrales pero lo hace de forma incorrecta porque no tiene en cuenta que la función que tiene que integrar es la función valor absoluto; expresa correctamente los límites de integración haciendo uso de la propiedad de la unión de intervalos pero no termina de calcular el área utilizando estos elementos matemáticos.

Durante la entrevista intenta nuevamente utilizar los elementos **LID y PID**:

$$\int_0^2 Fx \qquad \int_0^{0.5} F(x)\,|2x-1|\,dx + \int_{0.5}^{2}|2x-1|\,dx$$

A10, resolución A de la tarea 4 durante la entrevista

A10: …como tengo la función y el intervalo donde está definida la función puedo aplicar la integral definida.
I: ¿Cómo plantearía la integral definida?
A10: La integral definida, tiene una propiedad.
I: ¿Qué propiedad?
A10: La propiedad aditiva
I: ¿Cómo sería esa integral?

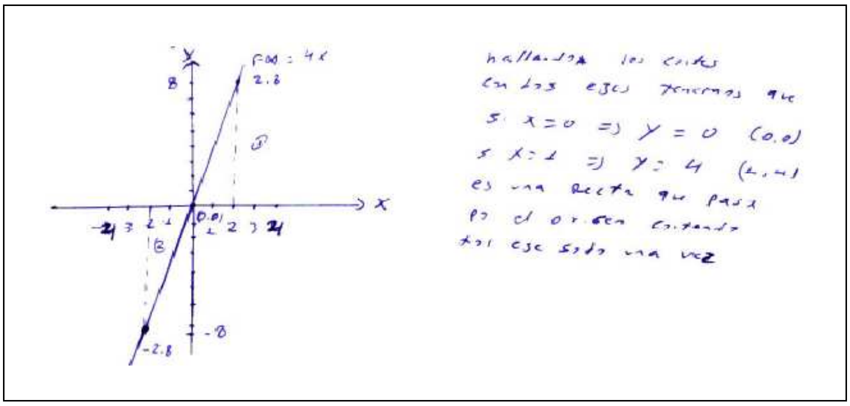
A10: Tengo un corte que me dio 0,5, y 3 valores de x, el 0, el 0,5 y el 2 que se cuentan en ese intervalo, entonces aquí está definida la función también, luego tomo una integral de 0 a 0,5 de la función.
I: ¿Está de acuerdo con el planteamiento de esas integrales?
A10: Si estoy de acuerdo.
I: ¿Al calcular esa integral, obtendría el mismo valor que el que obtuvo con el procedimiento geométrico anterior?
A10: Si. Porque, estoy hablando de un área que geométricamente se puede hallar exacta, porque se encuentra formada por 2 figuras llamadas triángulos.
I: ¿Cómo calcularía esas integrales?
A10: Me remitiría aplicar un procedimiento, como la parte positiva de esa función se encuentra sobre el eje x.
I: ¿Recuerda cómo integrar estas funciones?
A10: En este momento no recuerdo como se integra estas funciones.
(A10E4).

Aplica la propiedad de la unión del intervalo pero presenta conflicto con el elemento matemático **TFV**, porque no sabe cómo hallar la primitiva de la función para poder aplicar la regla de Barrow.

En la resolución de la tarea 2.

Sea **R**, la región encerrada por el gráfico de la función $f(x) = 4x$ y el eje x, en el intervalo $[-2, 2]$.
a. Dibujar la gráfica.
b. Calcular gráficamente el área de la región.
c. Calcular la $\int_{-2}^{2} 4x\, dx$
d. ¿Son iguales los dos resultados anteriores? Justificar cada paso.

Este alumno, inicialmente, lo que hace es una representación **G** de la función:



A10, representación G de la tarea 2 del cuestionario

A partir de la representación gráfica coordina los cálculos algebraicos:

hallando el área del triángulo uno tenemos que:

la base es 2 y de altura 8 entonces aplicando la fórmula geométrica tenemos que

$\frac{2\times 8}{2} = 8$ uml

Ahora sumando las áreas de los triángulos uno y dos

tenemos que el área total es 16 uml

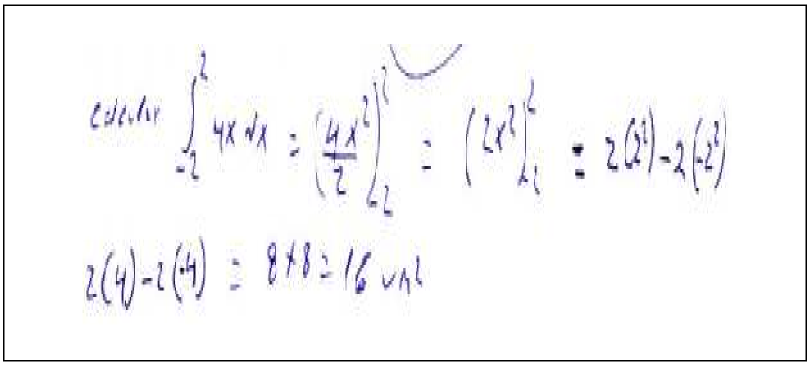
A10, resolución A de la tarea 2 del cuestionario

Para ello aplica el elemento matemático **ACA** de forma **A**, calcula el área del triángulo 1 usando la fórmula del área del triángulo y, como tiene dos triángulos, multiplica el resultado por 2 y obtiene el área total de 16 unidades cuadradas.

I: ¿Puede explicarme cómo ha resuelto la tarea número 2?
A10: Encontré la gráfica de una recta, como me están dando el intervalo $x=2$ $x=-2$*, encuentro es que se forman 2 triángulos.*
I: ¿Cómo calcula gráficamente el área?
A10: Gráficamente las puedo calcular por separado, porque tengo un punto donde esa recta me corta el eje x*, la cual se divide en 2 áreas, una que está por debajo del eje* x *y otra que está por encima del eje* x*.*
I: ¿Qué relación puede establecer ente el área de la región bajo el eje OX *y la región formada sobre el eje* OX *?*

A10: Una relación que se evidencia como 2 triángulos opuestos por el vértice. Son semejantes.
I: ¿Gráficamente qué valor obtuvo al calcular el área de los triángulos?
A10: El primer triángulo de base 2 *unidades, tengo la función* $f(x)=4x$ *y el corte con el eje X es* -2*, reemplazo en la función.*
I: ¿Cuál es el valor del área de cada triángulo?
A10: Como tengo una base de longitud 2 y una altura 8, me remito a aplicar la fórmula del triángulo para hallar el área, en el primer triángulo lo que hallo es la altura que como dije es 8 y la base es 2 hallo el producto y por fórmula lo divido entre 2, y así obtengo el área de un triángulo y me da igual a 8, como voy a hallar es toda el área encuentro un triángulo por debajo y otro por encima, luego sumo las dos áreas y me daría un área total de 16 unidades de medida cuadrada.
(A10E2).

En cuanto al cálculo de la Integral Definida esto es lo que hace este alumno:



A10, resolución A de la tarea 2 del cuestionario

Aplica la regla de Barrow pero hace unos cálculos numéricos incorrectos que le conducen a un resultado idéntico al del cálculo del área.

A10: De acuerdo a la integral definida, en este ejercicio obtengo el mismo valor.
I: ¿Cuál es el mismo valor?
A10: Por geometría obtuve 16 unidades de medidas cuadradas y por la integral definida obtuve las mismas 16 unidades cuadradas.
I: ¿Qué le piden calcular el área o calcular la integral?
A10: En la pregunta me piden calcular la integral.
I: ¿Cómo calcula la integral?
A10: Hay una operación que dice cómo se resuelve una integral definida y eso es lo que me piden, entonces implícitamente cojo esa integral y le aplico ese proceso que es hallar una antiderivada de la función que me dan para integrar, para que calcule la integral de $4x$ *.*
I: ¿Qué valor obtuvo al calcularla?

A10: 16 unidades de medida cuadradas.
I: ¿Está de acuerdo con ese valor?
A10: Si estoy de acuerdo.
A10: Me dicen que calcule la integral, entonces, hay un error conceptual.
I: ¿Por qué, dónde está el error?
A10: Porque primero me remití a hallar un área, no sé porque lo hice geométricamente y cuando calculo la integral tengo que comparar un área y el error es que a mí en ningún momento me dijeron que hallara un área.
(A10E2).

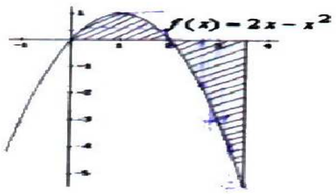
En este episodio se pone de manifiesto que aplica el elemento matemático **LID** de forma **A** como área de una región, porque piensa que el cálculo del área gráficamente debe ser igual al valor de la integral, pero no se da cuenta que los cálculos que hizo son incorrectos y, por último dice que cometió un error conceptual, porque no le pedían calcular el área sino calcular la integral. Durante la entrevista trata de establecer una relación entre el cálculo del área y la Integral Definida.

A10: La relación es que geométricamente puedo hallar un área y con la integral también, esa es la relación como más exacta.
I: ¿Es lo mismo calcular el área gráficamente que resolver la integral indicada?
A10: Si me piden que halle esa área por medio de una integral si es lo mismo, pero si me piden que halle una integral, no es lo mismo.
I: ¿Está de acuerdo con el procedimiento que utilizó?
A10: No, aquí cometí un error porque resolví algo y llegue a una respuesta que no me estaban pidiendo.
I: ¿Significan lo mismo, el área y la integral definida?
A10: No es igual, porque es que la integral sirve para hallar un área, pero no estoy diciendo que una integral es igual a un área.
I: ¿Cuál es la diferencien ente calcular el área y calcular una integra definida?
A10: La diferencia entre calcular un área y desarrollar una integral, es que no siempre al calcular una integral obtengo un área.
I: ¿Por qué?
A10: Porque puedo usar la integral para otras cosas y no siempre es para hallar un área,
I: ¿Considera que la integral está bien calculada?
A10: Si, porque estoy aplicándole a una misma función diferentes métodos
(A10E2).

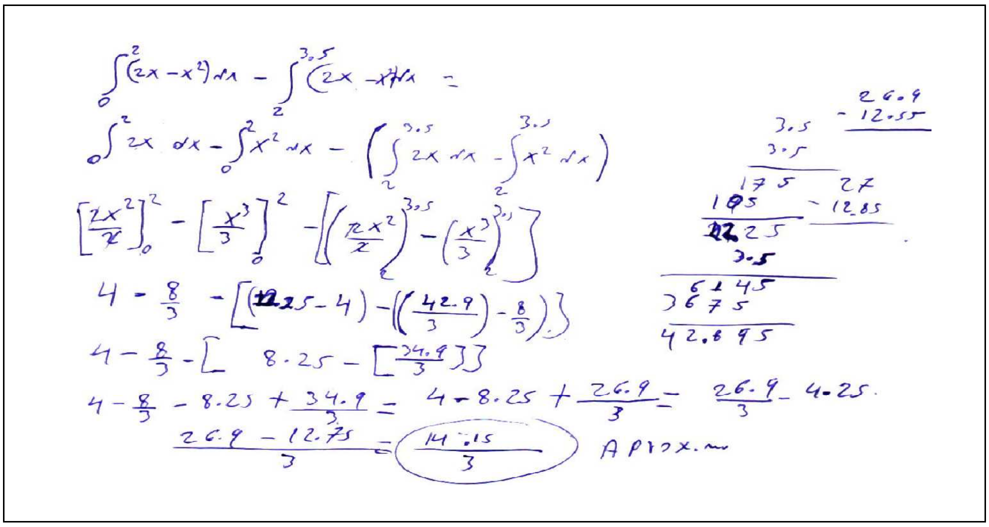
En este episodio el alumno muestra contradicciones porque dice una cosa pero luego aplica otra, comprende que el área se puede calcular gráficamente y usando **LID**, pero que no siempre la integral se utiliza para calcular áreas; sin embargo sigue afirmando que el cálculo algebraico que hizo de la Integral Definida es correcto, porque no se da cuenta que tiene errores en el cálculo numérico al aplicar la regla de Barrow.

Además este alumno **recuerda algunos elementos matemáticos de forma aislada.** Esta situación se encuentra en la tarea 5.

Dada la gráfica de $f(x) = 2x - x^2$, calcular por aproximaciones el área de la región rayada. Justificar el procedimiento utilizado



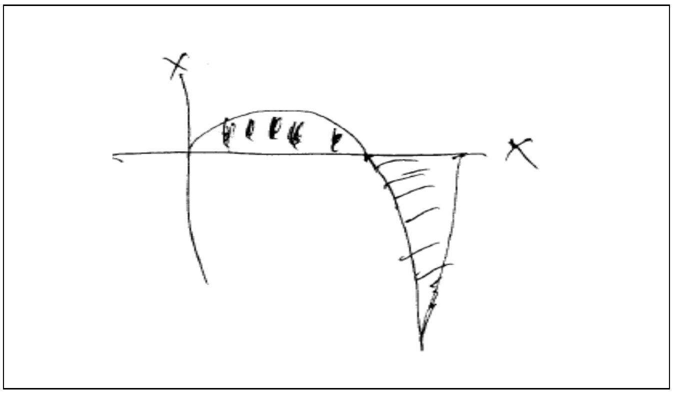
En el cuestionario este alumno resuelve en principio esta tarea de forma **A**.



A10, resolución A de la tarea 5 del cuestionario

Para ello recurre al elemento matemático **LID** de forma **A** calculando el área a través del cálculo integral y para hallar el área calcula el área que está sobre el eje x y luego le resta el área que se encuentra por debajo del eje x, y obtiene así el resultado correcto del valor del área bajo la gráfica. Aunque no menciona las propiedades de la integral de funciones positivas y negativas las aplica cuando calcula el área de la región, al haber restado la integral de la función que representa el área bajo el eje x le garantiza que la suma algebraica represente el área.

En el cuestionario no realizó ningún intento de cálculo del área por aproximaciones y durante la entrevista, cuando se le pide que lo realice de esta forma, hace una representación gráfica de la función:



A10, representación G de la tarea 5 durante la entrevista

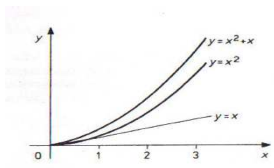
Sombrea el área que debe aproximar, pero no es capaz de obtener una aproximación gráfica del área y sigue mencionando la Integral Definida.

A10: Aquí tengo 2 áreas, que las veo como en 2 tramos, el primer tramo es un área que está comprendida bajo la curva y el eje x, *para esta área puedo usar una integral definida, porque tengo la función y el intervalo donde se encuentra definida la función, hay otra parte de esa región que forma como un triángulo y geométricamente podría aproximar más el área a partir de ese triángulo.*
I: ¿Cómo serian las gráficas?
A10: Puedo tomar primero esta integral de la función para calcular el área.
I: ¿Por qué utiliza sólo la integral y no otro procedimiento?
A10: Porque es el más preciso.
I: ¿Qué le piden calcular el área o aproximar el área?
A10: Me dicen aproximarla, pero es más fácil realizar este procedimiento por medio de una integral definida que por otro método.
I: ¿Qué puede concluir de los resultados obtenidos?
A10: Si procedo haciendo uso de dos métodos, el geométrico me permite aproximar y con la integral definida, obtengo la respuesta precisa.
(A10E5).

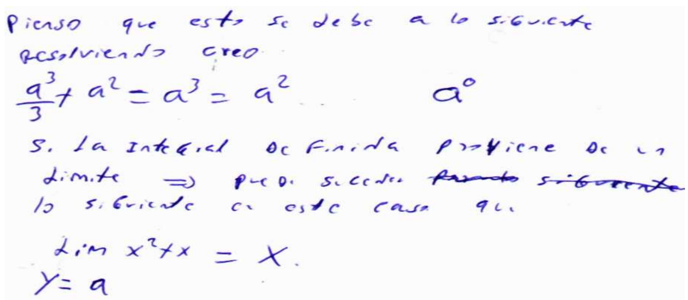
En el protocolo se pone en evidencia que menciona **ACA** pero no lo utiliza en la resolución de la tarea y sólo es capaz de aplicar el elemento **LID** porque para él es más fácil calcular directamente el área con la integral.

Para resolver la tarea 6.

Explique, en términos del gráfico, por qué $\int_0^a (x^2+x)dx = \int_0^a x^2dx + \int_0^a xdx$

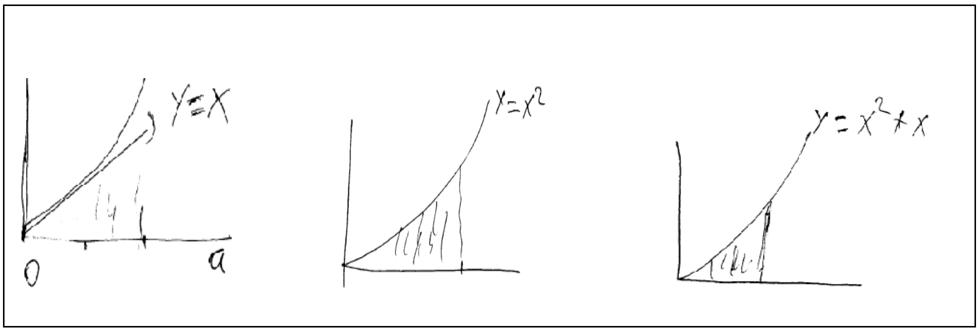


En el cuestionario responde de forma incoherente recordando elementos sin relación lógica:


Pienso que esto se debe a lo siguiente
resolviendo creo
$\frac{a^3}{3} + a^2 = a^3 = a^2$ a^0
si la integral definida proviene de un
límite $\Rightarrow$ puede suceder ~~pasando siguiente~~
lo siguiente en este caso que
$\lim x^2 + x = x.$
$Y = a$

A10, resolución A de la tarea 6 durante el cuestionario

Durante la entrevista responde de forma **G** realizando las siguientes representaciones:



A10, resolución G de la tarea 6 durante la entrevista

Este alumno grafica las funciones por separado, pero no es capaz de usar los elementos matemáticos necesarios que le permitan establecer comparaciones en la resolución gráfica de la tarea.

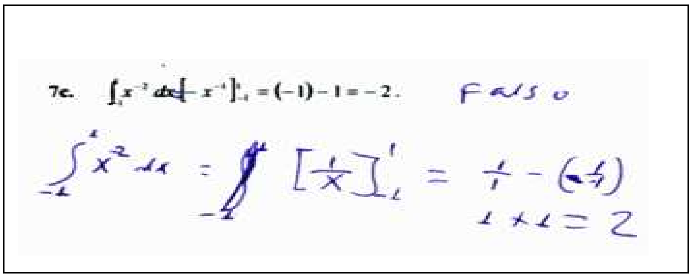
I: ¿Podría explicarme que quiere decir con el razonamiento que ha utilizado en la pregunta desde el punto de vista gráfico?
A10: Me están dando 3 funciones, sus gráficas y las integrales de esas funciones con su respectivo intervalo, no están definidas.
I: ¿Cómo podría a partir de la gráfica demostrar que se cumple esa igualdad o propiedad?
A10: Las tres funciones se encuentran en el mismo intervalo, en el intervalo de 0 a a, la primera gráfica que observo es una recta.
I: ¿En término de áreas cómo demostraría la igualdad?
A10: …puedo sombrear cada gráfica que se me forma por cada función y utilizar para cada función la integral definida.
I: ¿Por qué?
A10: Porque es una forma de obtener un valor numérico.
I: ¿Para qué quiere el valor numérico?
A10: Para mirar la igualdad de las tres funciones.
(A10E6).

Lo que hace el alumno es describir lo mismo que se le presenta en la tarea, pero no logra establecer relaciones. Sombrea ciertas áreas determinadas por cada una de las funciones y el eje x y menciona el cálculo de la integral para obtener un valor numérico del área y comparar la igualdad, pero no concluye la resolución de la tarea.

En la tarea 7c.

Considerar el valor de verdad o de falsedad de la afirmación $\int_{-1}^{1} x^{-2}\,dx = \left[-x^{-1}\right]_{-1}^{1} = (-1)-1=-2$ y en caso de ser falsa, explicar por qué o dar un contraejemplo.

En el cuestionario realiza un procedimiento algebraico pero se confunde en los cálculos y obtiene un resultado incorrecto, de signo contrario a la afirmación planteada en la tarea por lo que deduce que es falsa la afirmación.



A10, resolución A de la tarea 7c del cuestionario

Durante la entrevista se da cuenta que la repuesta del cuestionario es incorrecta, pero, aunque reconoce que no puede aplicar la regla de Barrow, va a realizar un razonamiento incorrecto al considerar que como la función no es continua entonces no es integrable:

I: ¿Cómo justifica el valor de verdad que le dio a la proposición 7c?
A10: Lo que hice fue rescribir esa función y encuentro que no puedo integrarla
I: ¿Cuál es el problema?
A10: El problema es que para integrar una función en un intervalo dado, la condición inicial es que la función debe de estar definida.
I: ¿Está de acuerdo con el valor que le había dado?
A10: Con este razonamiento que acabo de hacer, no.
I: ¿Qué pasa en la proposición si el denominador se hace cero?
A10: Aparece una indeterminación . Esta mal aplicado el procedimiento para resolver una integral definida.
I: ¿Por qué continúa considerando que la proposición es falsa?
A10: Porque no se puede integrar.
A10: La razón es la discontinuidad.
I: ¿Por qué?
A10: Porque para poder integrar una función debe ser continua, porque la continuidad implica integrabilidad.
(A10E3).

Aplica el elemento matemático **LID** de forma **AN**, porque cuando trata de resolver la integral para comprobar la veracidad de la proposición, se da cuenta que la función es discontinua en un punto del intervalo, entonces aplica la condición suficiente: continuidad implica integrabilidad de forma incorrecta como si fuera una condición necesaria.

Además en la tarea 8.

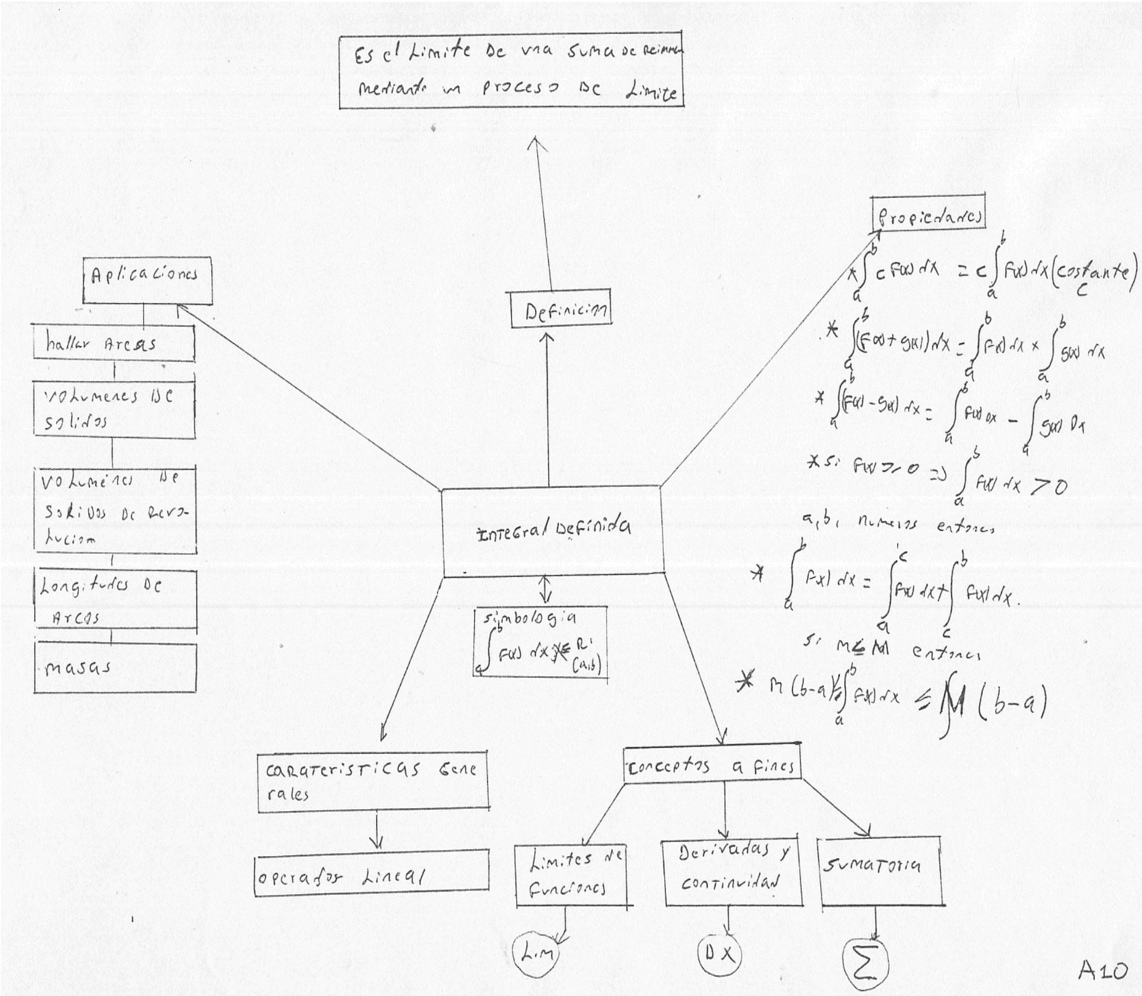
¿Cuál es el significado matemático de la Integral Definida de la función $y = f(x)$ en un intervalo $[a, b]$?

Esto es lo que afirma el estudiante en el protocolo de entrevista:

I: ¿Cómo le explicaría a un compañero el significado de la $\int_a^b f(x)\,dx$ *?*
A10: Me remontaría a hablarle de lo que es el proceso límite, de lo que es la partición de un intervalo, de la suma de áreas y de aproximaciones, para luego hacerle entender que una integral definida como la que me presentan acá, es una suma.
I: ¿Cuál es su propia definición de integral definida?
A10: La integral definida es un operador.
I: ¿Qué quiere decir que sea un operador?
A10: Es un operador que cumple con unas características, propiedades, condiciones y actúa sobre las funciones.
(A10E8).

Recuerda el elemento matemático **ACA** de forma aislada, porque define de memoria el concepto de Integral Definida como un proceso límite de una suma tratando de establecer relación entre los elementos matemáticos **ACA** y **ALS;** pero, en el resto de las tareas del cuestionario, no fue capaz de aplicar esos elementos matemáticos. También pone en evidencia que considera el elemento matemático **LID** como un operador, es decir, tiene una concepción procedimental de la integral que se manifiesta en la resolución de las tareas.

Además en el mapa conceptual que se muestra a continuación este alumno pone de manifiesto la forma como tiene estructurada la imagen del concepto de Integral definida, representa el elemento matemático **ACA**, hace referencia a los elementos matemáticos **ALS**, **LID** y **PID**; pero no menciona en ningún momento el elemento matemático **TFV,** aunque lo ha usado en la resolución de las tareas.



A10, mapa conceptual que representa el concepto de Integral Definida

Los elementos matemáticos que más menciona en el desarrollo de las tareas son **ACA** y **LID,** además utiliza de forma incorrecta los elementos matemáticos **LID** y en especial **TFV,** la relación lógica que eventualmente usa es la **conjunción lógica.** Asimismo, establece un comienzo de síntesis entre los sistemas de representación, especialmente el **G** y el **A**.

Por la forma como el alumno resolvió las diferentes tareas a lo largo de todo el cuestionario, por la manera como fueron justificadas esas respuestas a través de la entrevista y por la estructura que presenta en el mapa conceptual del concepto de Integral Definida consideramos que el alumno se encuentra en el nivel **ínter 1** de desarrollo del esquema.

La tabla siguiente representa las relaciones lógicas, los elementos matemáticos y los sistemas de representación utilizados por el alumno tanto en el nivel **intra** como en el **ínter 1.**

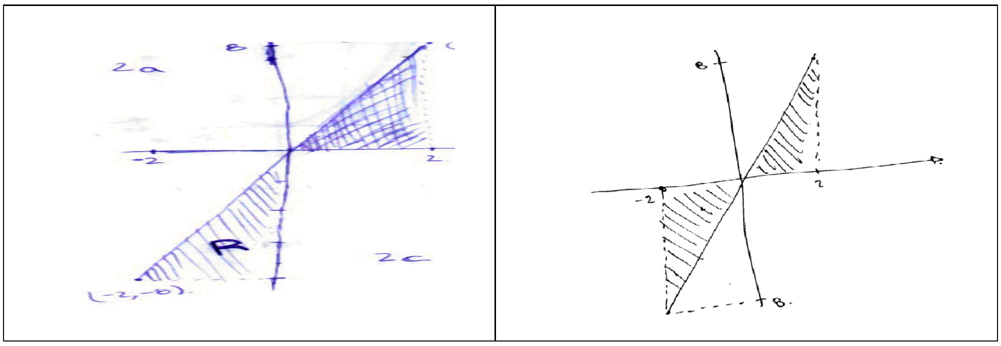
NIVEL	CARACTERÍSTCAS	ELEMENTOS MATEMÁTICOS	SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN
INTRA	**Mostrar dificultades en establecer relaciones lógicas (conjunción lógica) entre elementos matemáticos. (Intento de relación "conjunción lógica").** **Recordar algunos elementos matemáticos de forma aislada.**	**El área como aproximación: (G, A)** -Aproximación del área de una región plana. -Fórmula del área del rectángulo. -Fórmula del área del triángulo. -Partición del intervalo. -Sumas de Riemann. **El área como límite de una suma: (AN)** -Límite de las sumas. **La integral definida: (G, A)** -La integral definida como área de una región. - La integral definida como cálculo algebraico -Funciones positivas y negativas. -Condición suficiente: continuidad implica integralidad. **Las propiedades de la integral definida: (A)** -Unión de intervalos. -Linealidad. -De comparación. -Integral de una constante. **El teorema fundamental: (A)** -Regla de Barrow.	**Gráfico** **Algebraico** **Analítico**
INTER 1	**Recordar algunos elementos matemáticos gráficos, algebraicos y/o analíticos.** **Tener esbozo de síntesis de los sistemas de representación gráfico y algebraico.**	**El área como aproximación: (G, A)** -Aproximación del área de una región plana. -Fórmula del área del rectángulo. -Fórmula del área del triángulo -Partición del intervalo -Sumas de Riemann. **El área como límite de una suma: (AN)** -El límite de las sumas **La integral definida: (G, A)** -La definición analítica de integral definida. -La integral definida como área de una región. - La integral definida como cálculo algebraico **Las propiedades de la integral definida: (A)** -Unión de intervalos. **El teorema fundamental: (A)** -Regla de Barrow.	**Gráfico** **Algebraico** **Analítico**

Tabla 4.8. Relaciones lógicas, elementos matemáticos y sistemas de representación que caracterizan los niveles de desarrollo del esquema de integral definida en A10

También en este nivel **inter 1** de desarrollo del esquema se encuentra el alumno **A7** que es capaz de **usar la conjunción lógica (y lógica) de forma correcta entre elementos matemáticos en el mismo sistema de representación**. Por ejemplo en la tarea 2.

Sea **R**, la región encerrada por el gráfico de la función $f(x) = 4x$ y el eje x, en el intervalo $[-2, 2]$. a. Dibujar la gráfica. b. Calcular gráficamente el área de la región. c. Calcular la $\int_{-2}^{2} 4x\, dx$ d. ¿Son iguales los dos resultados anteriores? Justificar cada paso.

Para responder a esta tarea el alumno hace inicialmente una representación gráfica de la función.



A7, representación G de la tarea 2 en el cuestionario y durante la entrevista

En el cuestionario dibuja la gráfica de la función, sombrea el área que se le pide calcular, y a partir de la representación **G,** calcula el área de forma **A**.

$$2A = \frac{8 \times 2}{2} = (8 \cdot u^2)2 = 16\, u^2$$

A7, 1ª resolución A de la tarea 2 del cuestionario

A pesar de que el resultado es correcto, en la sucesión de igualdades se olvidó multiplicar por 2 al pasar del primer a segundo término, aunque luego lo corrigió en la siguiente igualdad. En la entrevista, él mismo describe lo que hizo de la siguiente forma:

A7: Aquí vemos 2 triángulos (traza el gráfico).

I: ¿Cómo calculó el área geométricamente?
A7: Geométricamente, es la suma de 2 triángulos de base 2 y de altura 8, que en su defecto podría calcularse el área de un rectángulo.
I: ¿Por qué?
A7: El intervalo es de -2 a 2.
I: ¿Qué valor obtuvo al graficar el área?
A7: 16 unidades cuadradas.
(A7E2).

Es decir, para calcular el área gráficamente, forma dos triángulos que, como él dice, conformarían un rectángulo, y durante la entrevista, igual que en el cuestionario, a partir del gráfico calcula el área total y obtiene 16 unidades cuadradas. Aplica el elemento matemático **ACA** de forma **A**, porque utiliza la fórmula del área del triángulo y como los triángulos son iguales entonces la duplica para obtener el área total.

En cuanto al cálculo de la integral en el cuestionario da la siguiente solución de forma **A**:

$$2c.\quad \int_{-2}^{2} 4x\,dx = \left.\frac{4x^2}{2}\right|_{-2}^{2} = \left.2x^2\right|_{-2}^{2} = 8-8=0\,u^2$$

A7, 2ª resolución A de la tarea 2 del cuestionario

Por la forma cómo resuelve la tarea se pone de manifiesto que utiliza el elemento matemático **TFV** aplicando la regla de Barrow, porque halla la primitiva de la función, la evalúa en los extremos del intervalo y hace la suma algebraica correspondiente.

Además muestra la relación que establece entre el área y la integral:

I: ¿Qué valor obtuvo al calcular la integral?
A7: 0 unidades cuadradas.
I: ¿Cuál es la diferencia entre calcular el área gráficamente y calcular esa integral?

A7: Pienso que si me dicen calcule esta integral y me da cero puede tener sentido, si me dicen calcule la integral que corresponde a este gráfico me parece que así como se plantea aquí, es una integral sin contexto.
I: ¿Qué quiere decir sin contexto?
A7: Que no me está representando un área.
I: ¿Cómo son los 2 resultados?
A7: Los dos resultados son diferentes.
I: ¿Por qué son diferentes?
A7: Porque uno es un ejercicio de calcular una integral y el otro de calcular un área.
I: ¿Cuando le piden calcular el área a qué debe llegar?
A7: Debo obtener un número real positivo.
I: ¿Cuando le piden calcular una integral, cuál puede ser ese valor?
A7: Si la integral es definida puede ser un número real positivo, negativo o cero.
(A7E2).

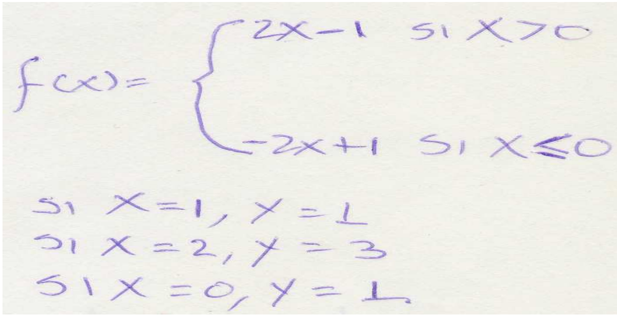
Distingue el elemento matemático **LID** de su aplicación como área de regiones planas porque pone de manifiesto que cuando aplicamos la Integral Definida como área ésta representa un valor positivo, mientras que el cálculo de la Integral Definida es un valor real positivo, negativo o cero.

De forma global, por la forma cómo resuelve la tarea y cómo la justifica podemos afirmar que el alumno establece una relación de conjunción lógica entre los elementos matemáticos **ACA, LID y TFV,** porque a partir del procedimiento **A** infiere el significado de la integral como área de una región y la integral como cálculo algebraico, a través del uso de la regla de Barrow.

En la tarea 4.

Calcular el área limitada por la gráfica de la función $f(x)=\|2x-1\|$, en el intervalo $[0, 2]$ y el eje x. Justificar la respuesta.

En el cuestionario, para poder representar la función, este alumno analiza los valores que toma según que sea positiva o negativa la función $2x-1$, aunque en el planteamiento se confunde entre las abscisas y las ordenadas y considera los casos en que x sea positivo o negativo.



A7, representación A de la tarea 4 durante el cuestionario

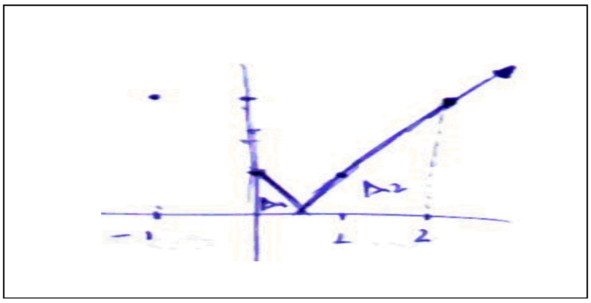
Esto mismo lo expresa durante la entrevista. Está trasfiriendo directamente lo que recuerda del valor absoluto de x, al valor absoluto de $2x-1$.

A7: El valor absoluto de esa función, habría que redefinirla, como la función va a valer $2x-1$*, si* x *es mayor que 0 y va a valer* $-(2x+1)$*, si* x *es menor o igual a 0.***(A7E4).**

A pesar de ello, para poder representar gráficamente la función, tiene que dar valores a x para obtener valores de y.

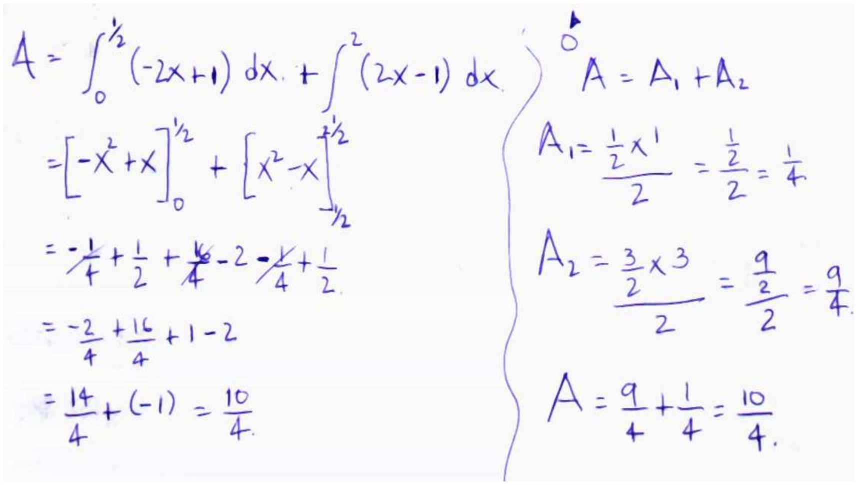
I: ¿Podría decirme cómo ha esbozado el gráfico de la función?
A7: Teniendo la función, tabulé le di a x *tres valores.*
(A7E4).

Finalmente representa la gráfica correctamente.



A7, representación G de la tarea 4 del cuestionario

Una vez representada gráficamente la función calcula el área limitada por la gráfica relacionando varios elementos matemáticos de forma **A**.



$$A = \int_0^{1/2} (-2x+1)\,dx + \int_{1/2}^{2} (2x-1)\,dx$$
$$= \left[-x^2+x\right]_0^{1/2} + \left[x^2-x\right]_{1/2}^{2}$$
$$= -\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{16}{4}-2-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$$
$$= -\frac{2}{4}+\frac{16}{4}+1-2$$
$$= \frac{14}{4}+(-1) = \frac{10}{4}$$

$$A = A_1 + A_2$$
$$A_1 = \frac{\frac{1}{2}\times 1}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$
$$A_2 = \frac{\frac{3}{2}\times 3}{2} = \frac{\frac{9}{2}}{2} = \frac{9}{4}$$
$$A = \frac{9}{4}+\frac{1}{4} = \frac{10}{4}.$$

A7, resolución A de la tarea 4 del cuestionario

Este alumno establece una conjunción lógica entre los elementos matemáticos **ACA, LID, PID y TFV**, de forma **A**. En la columna de la derecha se puede ver cómo aplica el elemento matemático **ACA**. A partir del gráfico calcula el área de los triángulos que conforman el área total, las suma y obtiene el área que se le pide. Para ello ha necesitado coordinar los registros gráfico y algebraico. En la columna de la izquierda utiliza los elementos matemáticos **LID, PID** y **TFV**, porque calcula el área a partir del planteamiento de una integral, aplica la propiedad de la unión de intervalos correctamente y utiliza la regla de Barrow para hallar las primitivas y evaluarlas en los límites respectivos.

Cuando se le preguntó por la solución mediante el cálculo de las áreas de los triángulos lo explica de la siguiente forma:

I: ¿Cómo ha calculado el área, a partir de la representación gráfica?
A7: Calculando dos integrales, una de 0 *a* $\frac{1}{2}$ *de la función, más otra de* $\frac{1}{2}$ *a* 2.
…
I: ¿Qué figuras bajo la gráfica se formaron?
A7: 2 triángulos.
…

I: ¿Cómo calcularía el área de esos 2 triángulos?
A7: Tenemos dos triángulos, vamos a llamarlos a_1 *y* a_2*, el triángulo* a_1 *tiene de base* $\frac{1}{2}$ *y de altura 1.*
I: ¿De dónde obtiene la altura, cómo obtiene la altura de ese triángulo?
A7: Evaluando la función en $x = 0$ *, obtengo un punto.*
I: ¿Por qué en $x = 0$*?*
A7: Porque el intervalo de integración es $[0,2]$*, entonces necesito saber de dónde a dónde va la gráfica, y los puntos más apropiados para evaluar son cuando* x *vale 0 y cuando* x *vale 2.*
I: Continué el procedimiento.
A7: el segundo triángulo tiene de base $\frac{3}{2}$ *y de altura* 3*, entonces el área es* $\frac{9}{4}$*, y el área del primer triángulo es* $\frac{1}{4}$ (hace cálculos).
I: ¿Cuál sería el área total?
A7: El área total seria $\frac{1}{4} + \frac{9}{4}$ *, la suma de las áreas de los dos triángulos esto es* $\frac{10}{4}$ **(A7E4).**

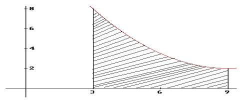
Establece conjunción lógica entre los elementos matemáticos **ACA, LID, PID y TFV** para inferir el valor del área bajo la gráfica de la función valor absoluto. Además de describir los procedimientos utilizados en el desarrollo de la tarea, el alumno compara los valores obtenidos a partir del uso del elemento **ACA** y del elemento **LID:**

I: ¿Cómo son los valores obtenidos?
A7: Son exactamente iguales
(A7E4).

Esto nos indica que además de establecer una relación lógica entre ellos coordina los sistemas de representación **G** y **A**.

Además este alumno suele **recordar algunos elementos matemáticos gráficos, algebraicos y/o analíticos; y tener esbozo de síntesis entre los sistemas de representación gráfico y algebraico.** Por ejemplo en la tarea1.

El área de la región rayada es mayor que **12** y menor que **48**.
a. ¿Por qué?
b. ¿Puede dar valores más ajustados?
c. ¿Cuáles?
d. ¿Cómo los obtiene?



En el cuestionario lo primero que hace para aproximar el área es cubrirla mediante una figura geométrica a la que se pueda calcular fácilmente su área:

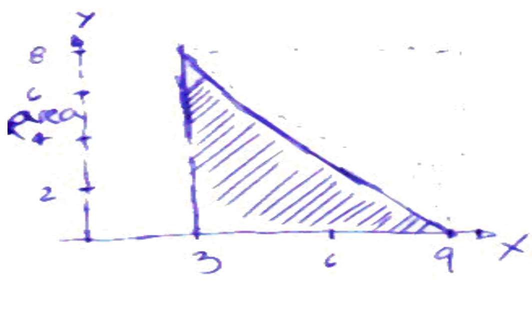


Figura 1.

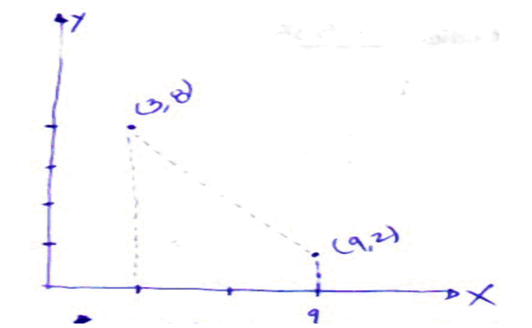


Figura 2.

A7, representación G de la tarea 1 del cuestionario

En la figura 1 traza, en primer lugar, un triángulo de base 6 y de altura 8 que representa un área inferior a la rayada para justificar que el área es mayor que 12 (en realidad mayor que 24) y, en segundo lugar, construye un rectángulo sobre la figura propuesta inicialmente de base 6 y de altura 8, que representa un área mayor que la sombreada para justificar gráficamente que el área es menor que 48.

En la figura 2, el estudiante determina dos puntos de la gráfica de la función y traza un trapecio de base mayor 8, de base menor 2 y de altura 6 para ajustar más el área bajo el gráfico. Para hacer los cálculos correspondiente, este alumno coordina la representación gráfica con un procedimiento algebraico.

entonces. $\frac{6\times 8}{2}$ = Area del Triangulo. como vemos: 24, que corresponde al area del triangulo, es mayor que doce y menor que 48 **Procedimiento 1.**	ó calculando el Area de un trapecio de base mayor 8, base menor 2 y altura 6 entonces $A_D = \frac{(8+2)6}{2} = \frac{60}{2} = 30u^2$ **Procedimiento 2.**

A7, representación A de la tarea 1 del cuestionario

El procedimiento 1, es consecuencia de la figura 1, donde se pone de manifiesto que el estudiante utiliza el elemento matemático **ACA** para ajustar más las cotas aplicando la fórmula del área del triángulo para aproximar el área por defecto. En el procedimiento 2, se pone en evidencia que trata de ajustar más el área por exceso, y forma un trapecio que cubre más el área formada bajo la gráfica inicialmente propuesta en la tarea.

Este segundo procedimiento lo trata de completar recurriendo al elemento **LID** de forma **A**:

$$m = \frac{2-8}{9-3} = \frac{-6}{6} = -1$$
$$3-x = -1(8-y)$$
$$3-x = -8+y$$
$$y = -x+11.$$
luego
$$A_D = \int_3^9 (-x+11)\,dx.$$

A7, representación A de la tarea 1 del cuestionario

Como no conoce la ecuación de la función a integrar para aplicar el elemento matemático **LID**, coordina la representación gráfica anterior y los conocimientos que tiene de geometría analítica, porque utiliza los dos puntos de la gráfica del trapecio para hallar la pendiente de la recta que los une y así determinar la ecuación punto – pendiente de esa recta, y de esta manera plantear una Integral Definida. Aunque no la calcula, su valor coincide con el que obtuvo cuando calculó el área del trapecio.

Durante la entrevista trata de conseguir una mejor aproximación, y para ello recurre a la representación gráfica nuevamente.

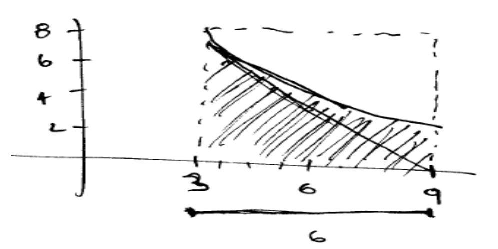


Figura 3.

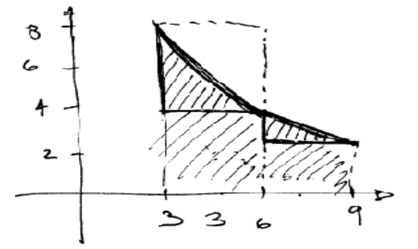


Figura 4

A7, representación G de la tarea 1 durante la entrevista

En la figura 3 utiliza el elemento matemático **ACA,** traza un triángulo de 6 de base por 8 de altura, para ajustar el área por defecto y un rectángulo de 6 de base por 8 de altura para indicar una aproximación del área por exceso. En la figura 4, construye dos rectángulos de base 6 unidades y de altura 4 y 2 respectivamente y sobre cada uno de ellos forma dos triángulos de igual base que los rectángulos y de alturas también 4 y 2 respectivamente, tratando de cubrir de esta forma el área sombreada.

Asimismo este alumno tanto en el cuestionario como durante la entrevista continúa coordinando la representación **G** y la representación **A**.

$$A_{\square} = b \times a$$
$$A_{\square} = 6 \times 8$$
$$A_{\square} = 48.$$
$$A_{\triangle} = \frac{b \times a}{2}$$
$$A_{\triangle} = 24.$$

Procedimiento 3.

$$A_{\square} = 3 \times 4 = 12$$
$$A_{\square} = 3 \times 2 = 6$$
$$A_{\triangle} = \frac{3 \times 4}{2} = 6$$
$$A_{\triangle} = \frac{3 \times 2}{2} = 3.$$
$$A_T = A_{\square} + A_{\square} + A_{\triangle} + A_{\triangle}$$
$$A_T = 12 + 6 + 6 + 3.$$
$$A_T = 27.u^2$$

Procedimiento 4.

A7, representación A de la tarea 1 durante la entrevista

En el procedimiento 3 que corresponde a la figura 3, al igual que hizo en el cuestionario, utiliza la fórmula del área del triángulo para aproximar el área por defecto y aplica la fórmula del área del rectángulo para aproximar el área por exceso, y de esta manera justifica que el área es superior a 12 unidades cuadradas (en realidad 24), pero inferior a 48 unidades cuadradas.

> *A7: … la idea era mostrar que la medida de esta área podría estar en medio de otras dos áreas, una podría ser el área de este triángulo que obviamente se ve que el área que usted nos dice mostrar es mayor y si construimos un rectángulo, esa área de la que nos habla, es menor que la del rectángulo* (traza los gráficos y hace los cálculos).
> *I: ¿Cómo lo haría?*
> *A7: Primero vamos con el área del rectángulo, este rectángulo tiene de base 6 y de altura 8, el área del rectángulo, es* 6×8*, es 48* (escribe en una hoja).
> *I: ¿Qué lo ha llevado a pensar de esa manera?*
> *A7: El área de la región que nos muestra en el gráfico, es un poco mayor que el área del triángulo y el área del triángulo es 24, pero esa misma área es menor que el área del rectángulo y el área del rectángulo es 48.*
> **(A7E1).**

En segundo lugar, en el procedimiento 4 de la figura 4, forma en la base de la región sombreada rectángulos, calcula sus áreas respectivamente de 12 y 6 unidades cuadradas, y para tratar de cubrir el área sombreada sobre cada rectángulo forma un triángulo de áreas 6 y 3 unidades respectivamente, suma las áreas aproximantes de los rectángulos y de los triángulos y obtiene un valor aproximado del área de 27 unidades cuadradas.

> *I: ¿Qué otros procedimientos utilizaría para aproximas?*
> *A7: Tenemos un rectángulo de base 3 y de altura 4, un rectángulo de área 12, otro rectángulo de base 3 y de altura 2, entonces tenemos de área 6, sobre ellos tenemos 2 triángulos, uno de base 3, de altura 4, entonces tenemos área 12 y tenemos otro triángulo de base 3, de altura 2, de área 3, entonces tenemos 2 rectángulos uno de área 12 unidades, otro de área 6 unidades y tenemos sobre ellos 2 triángulos de área 6 y el otro de área 38* (grafica y va pensando).
> *I: ¿Cuál es el área total?*
> *A7: El área total vamos a llamarla* a_t *es igual, a la suma de las áreas de los 2 rectángulo, más la suma de las áreas de los 2 triángulos, esto es 12+6+6+3, o sea 18 y 24, 27, unidades cuadradas* (va escribiendo estos valores).
> **(A7E1).**

Cuando se le pide al alumno qué si existe otra forma de ajustar más las cotas, responde recordando el elemento matemático **LID,** como una forma precisa para calcular el área.

I: ¿Existe otra forma de ajustar esas cotas?
A7: Diría que la integral es la forma precisa.
I: ¿Qué quiere decir que sea la precisa?
A7: Que si calculamos esa área con una integral de Riemann.
(A7E1).

Este alumno continúa insistiendo que la forma más precisa de calcular el área es aplicando el elemento matemático **LID** de forma **A;** pero no lo puede hacer porque no tiene la expresión algebraica de la función.

I: ¿Podría aplicar otro procedimiento diferente que le permita una mejor aproximación del área y que justifique más las cotas?
A7: ¿Por particiones?
I: El que quiera.
A7: Sigo pensando que el método más preciso es calcular una integral.
I: ¿Cómo calcularía una integral, cómo lo haría?
A7: El área de esa región es la integral, desde 3 hasta 9 de la función ¿Aquí nos dan la función o no? Tendría que tener la función que limita el área.
I: ¿Por qué piensa que debe aplicar la integral para ajustar esas cotas?
A7: Porque es que la integral de Riemann es un proceso de límite.
(A7E1).

Finalmente este alumno piensa que al hacer más construcciones geométricas podría obtener una mejor aproximación del área.

A7: Pienso que, si en vez de construir acá 2 trapecios, construyo por ejemplo 4 trapecios inscritos, esa va a ser una mejor aproximación.
(A7E1).

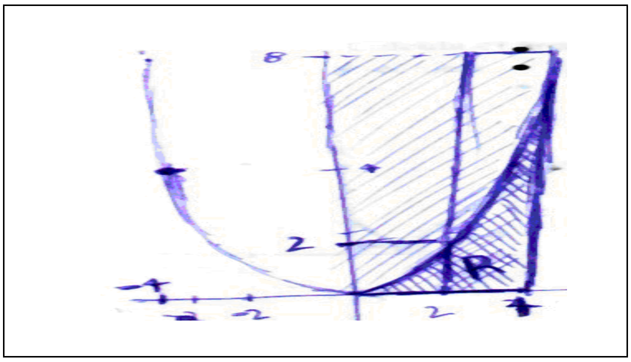
En los episodios anteriores pone de manifiesto que utiliza el elemento matemático **ACA** de forma **G**, porque utiliza triángulos, rectángulos y trapecios para aproximar el área, y de forma **A** porque utiliza las fórmulas del área del triángulo, rectángulo y trapecio para ajustar el área; pero también menciona particiones y el elemento matemático **LID** como una forma precisa de calcular el área asociado al elemento matemático **ALS**.

De forma global, en la resolución de la tarea, se aprecia que recuerda algunos elementos matemáticos gráficos, algebraicos y/o analíticos y realiza la síntesis entre los sistemas de representación gráfico y algebraico, porque utiliza **ACA** para aproximar el área tanto por defecto como por exceso, hace una partición del intervalo, las construcciones gráficas asociadas y los cálculos algebraicos pertinentes, utiliza conocimientos previos para poder aplicar el elemento **LID** como una forma de encontrar un valor más preciso exacto del área, y logra establecer una conjunción lógica entre los elementos matemáticos **ACA** y **LID** cuando calcula el área del trapecio con **ACA** y con **LID**.

En cuanto a la tarea 3:

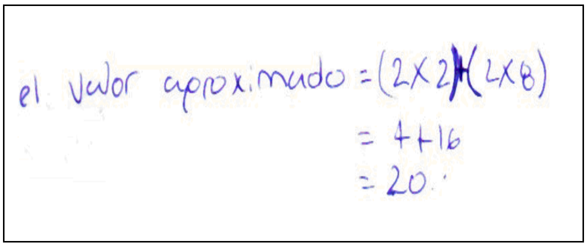
Sea R la región entre la gráfica de la función $f(x)=x^2$ y el Intervalo [0,4] -Utiliza particiones para aproximar el valor del área de la región R. -Justifica tu respuesta.

Este alumno en el cuestionario representa de forma **G** la función:



A7, representación G de la tarea 3 del cuestionario

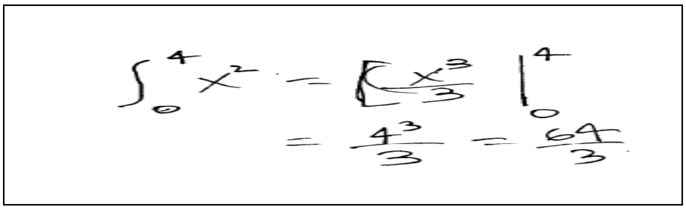
Aplica el elemento matemático **ACA** de forma **G**, porque dibuja la función que representa una parábola, utiliza particiones y dos rectángulos superiores para obtener una aproximación del área por exceso, pero, en este caso, no coordina la representación **G** con la representación A.


el valor aproximado $=(2\times2)+(2\times8)$
$=4+16$
$=20.$

A7, resolución A de la tarea 3 del cuestionario

Nótese que el alumno hace una aproximación del área por exceso, utiliza la fórmula del área del rectángulo, calcula el área de cada uno tomando como base 2 y de altura 2 y 4 respectivamente, suma las áreas y obtiene un valor aproximado de 20 unidades cuadradas; pero para calcular las alturas de los rectángulos no utiliza la función, si hubiera evaluado la función en 2 y 4 hubiera obtenido como alturas 4 y 16 (en lugar de 2 y 8).

Durante la entrevista cuando se le pide que utilice otro procedimiento, esto es lo que hace.



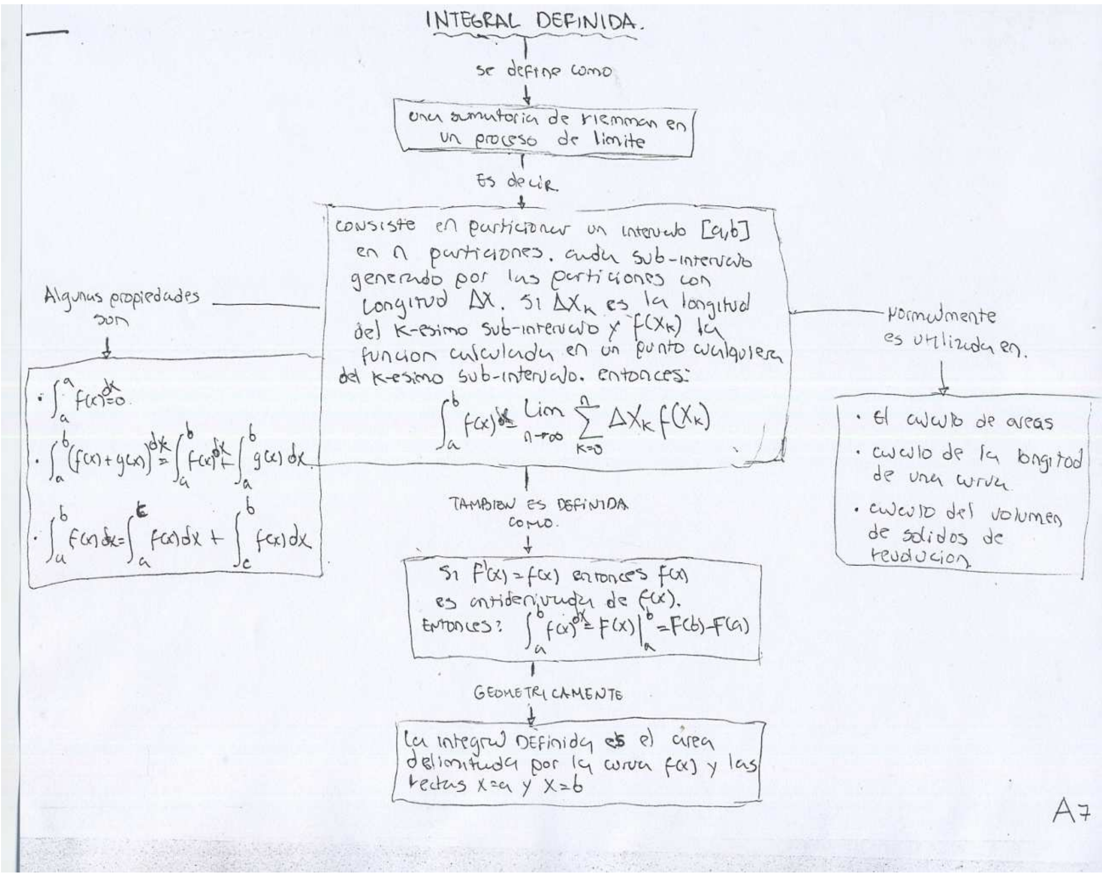
A7, 2ª resolución A de la tarea 3 durante la entrevista

Calcula la integral utilizando el elemento matemático **TFV** porque aplica la regla de Barrow para hallar la primitiva de la función y evaluar la integral en el intervalo dado y calcular el valor exacto del área bajo la curva de la parábola.

A7: Si hablamos de calcular, entonces con una integral.
I: ¿Cómo sería con una integral?
A7: Seria la $\int_0^4 x^2\,dx$*, es:* $\int_0^4 x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^4$ *, esto es 4 al cubo sobre 3 y esto es 16, 40, 64,* $\frac{64}{3}$ (hace los cálculos).
I: ¿Qué diferencia hay entre ese valor y el anterior?
A7: La precisión.
I: ¿Cuál de los 2 es más preciso?
A7: El de la integral.
(A7E3).

Este alumno muestra que tiene interiorizado el concepto de Integral Definida como aplicación para el cálculo del área de una región, porque pone de manifiesto que la Integral Definida le permite calcular el valor preciso del área y que la construcción de rectángulos usando particiones es sólo una aproximación. Aunque menciona dos elementos matemáticos **ACA** y **LID** no coordina los sistemas de representación **G** y **A**, no establece una conjunción lógica entre ellos y tampoco usa el elemento matemático **ALS**, que era lo que se esperaba que el alumno hiciera en la resolución de la tarea.

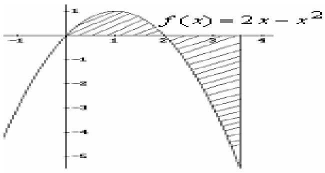
En este mismo sentido y con el objeto de confrontar la información descrita en las categorías anteriores, en el mapa conceptual que presentamos a continuación se pone de manifiesto los elementos matemáticos gráficos, algebraicos y/o analíticos que recuerda este alumno. En la columna del centro, se evidencia que entiende los elementos matemáticos **ACA** de forma **G** y **A**; **ALS** de forma **G** y **A**; **LID** y **TFV** de forma **A**, en la columna de la izquierda recuerda el elemento matemático **PID**, de forma **A**, y finalmente en la columna de la derecha menciona las aplicaciones de la integral definida en otros contextos. Los mismos elementos que plantea en esta representación son los que utilizó el alumno a largo del cuestionario y durante la entrevista para la resolución y justificación de las tareas.



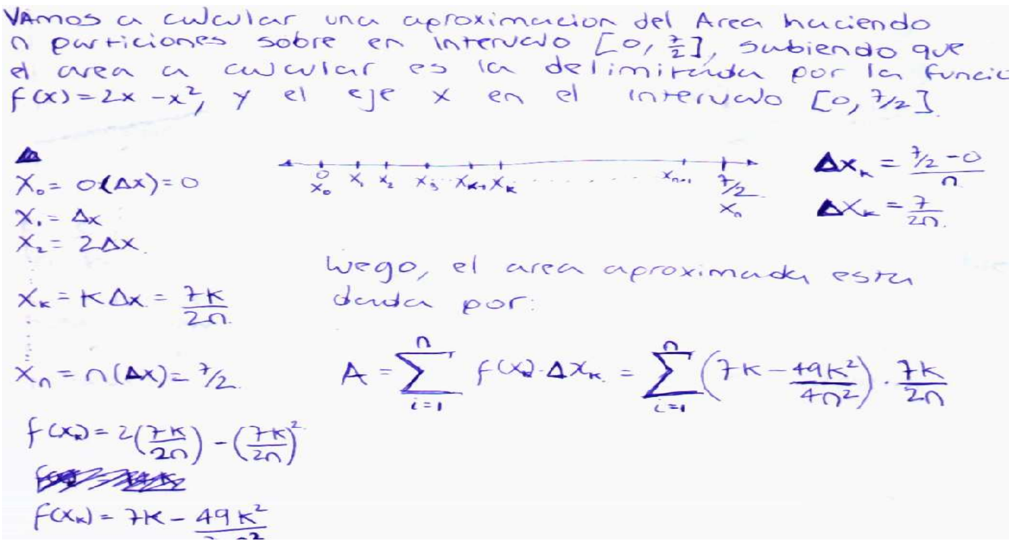
A7, mapa conceptual que representa el concepto de Integral Definida

Además este alumno **recuerda algunos elementos matemáticos de forma aislada.** Por ejemplo en la tarea 5.

Dada la gráfica de $f(x) = 2x - x^2$, calcular por aproximaciones el área de la región rayada. Justificar el procedimiento utilizado.



En el cuestionario este alumno hace una representación **A**:



Vamos a calcular una aproximacion del Area haciendo n particiones sobre en intervalo $[0, \frac{7}{2}]$, subiendo que el area a calcular es la delimitada por la funcic $f(x) = 2x - x^2$, y el eje x en el intervalo $[0, 7/2]$

$X_0 = 0(\Delta x) = 0$

$X_1 = \Delta x$

$X_2 = 2\Delta x$

$X_k = k\Delta x = \frac{7k}{2n}$

$X_n = n(\Delta x) = 7/2$

$\Delta x_k = \frac{7/2 - 0}{n}$ $\quad \Delta x_k = \frac{7}{2n}$

luego, el area aproximada esta dada por:

$$A = \sum_{i=1}^{n} f(x) \cdot \Delta x_k = \sum_{i=1}^{n} \left(7k - \frac{49k^2}{4n^2}\right) \cdot \frac{7k}{2n}$$

$f(x_k) = 2\left(\frac{7k}{2n}\right) - \left(\frac{7k}{2n}\right)^2$

$f(x_k) = 7k - \frac{49k^2}{\ldots}$

A7, representación A de la tarea 5 del cuestionario

Utiliza el elemento matemático **ACA** de forma **A y AN**, para lo que realiza una partición, calcula la longitud de cada subintervalo y plantea la suma de Riemann correspondiente. Ha sido capaz de coordinar los registros algebraico y analítico pero no concluye el procedimiento de aproximación porque no realiza los cálculos planteados y eso no le permite utilizar el elemento matemático **ALS** para poder determinar el área solicitada.

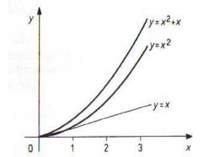
Durante la entrevista no es capaz tampoco ni de explicar lo que hizo ni de concluir la tarea puesto que no recuerda cómo lo hizo:

A7: Una buena aproximación seria inscribir o circunscribir rectángulos y después sumar el área de esos rectángulos.
I: ¿Podría explicarme el procedimiento que ha utilizado aquí?
A7: Si recuerdo la idea es circunscribir o inscribir una buena cantidad de rectángulos, no me refiero ni a 2, ni a 3, ni a 4, entonces sí quiero construir 100 rectángulos debo dividir el intervalo de integración.
I: ¿Podría explicarme lo que ha utilizado en ésta respuesta?
A7: Entre más rectángulos tenga inscritos o circunscritos mejor va a ser la aproximación, pero insisto en este caso los estamos inscribiendo.
I: ¿Qué tiene aquí?
A7: Acá lo que tengo es una partición de un intervalo.
I: ¿Qué quería hacer con esto?
A7: En este momento no recuerdo bien que era lo que estaba pensando cuando resolví la prueba.
(A7E5).

En primer lugar el alumno menciona una aproximación por defecto o por exceso, utilizando la construcción de rectángulos, afirma que cuantos más rectángulos tenga mejor será la aproximación del área de la región, pero no es capaz de concluir la resolución de la tarea de forma **A**. No ha conseguido coordinar los elementos **ACA** y **ALS** para poder concluir la tarea.

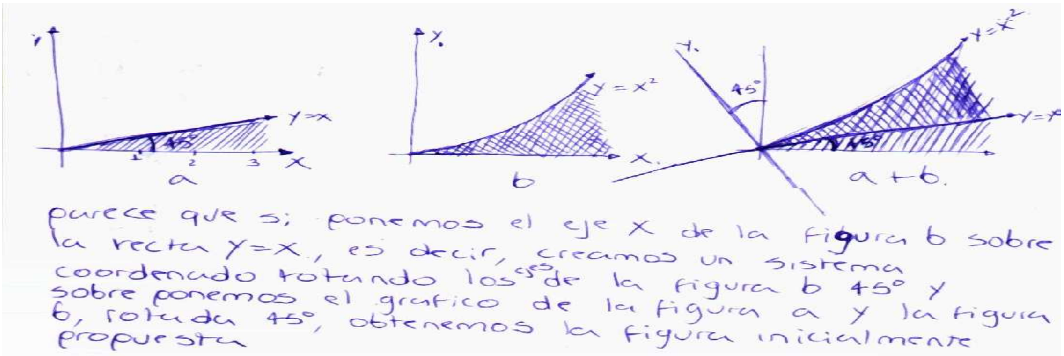
En la tarea 6.

Dada la gráfica de estas funciones, explicar en términos del gráfico,



por qué $\int_0^a (x^2+x)dx = \int_0^a x^2 dx + \int_0^a x dx$.

En el cuestionario responde de forma gráfica realizando las siguientes representaciones:



A7, representación G de la tarea 6 del cuestionario

Coordina los elementos matemáticos **ACA** y **LID** de forma **G** porque usa dos gráficos a y b que representan los dos integrandos del segundo miembro de la igualdad planteada y mediante una rotación del eje x alrededor del origen de 45º es capaz de representar que la suma de las áreas bajo f(x)=x y f(x)=x^2 es igual al área bajo la función f(x)= x^2 +x. Estos son sus argumentos para justifica los procedimientos anteriores:

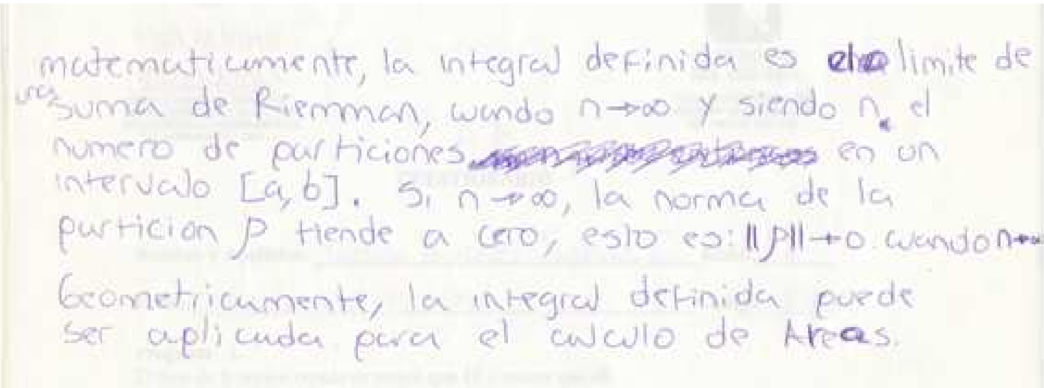
A7: Primero supuse que si usted me pide justificar, lo di como verdadero, si eso era verdadero con el gráfico que usted me proporcionaba tenía que buscar la forma que esta área bajo la curva, $y = x$, de a hasta b, más el área de la curva $y = x^2$, que la suma de esas dos áreas tenía que dar el área inicial, entonces observe una diferencia entre áreas que podría ser esta misma diferencia y pensé que esa área se podría cubrir si desplazaba la curva, si moviera esta área.
I: ¿Por eso habla de ángulos?
A7: Si, por eso hablo de la rotación, de cómo había que llenar este espacio y pensé que eso se podría hacer con una rotación.
I: ¿Qué otra forma se le ocurriría para demostrar esa igualdad?
A7: Pensaría en resolver esta integral.
I: ¿Para qué?
A7: Para después compararla con el resultado de esta suma de integrales.
(A7E6).

Para resolver la tarea traduce la expresión algebraica y las integrales planteadas al lenguaje geométrico coordinando de esta forma los elementos matemáticos **LID** y **ACA**.

Además en la tarea 8.

¿Cuál es el significado matemático de la Integral Definida de la función $y = f(x)$ en un intervalo $[a, b]$?

El alumno en el cuestionario inicialmente responde de forma verbal lo siguiente:



matematicamente, la integral definida es el limite de una suma de Riemman, cuando $n \to \infty$ y siendo n el numero de particiones en un intervalo $[a, b]$. Si $n \to \infty$, la norma de la particion p tiende a cero, esto es: $\|p\| \to 0$ cuando $n \to \infty$

Geometricamente, la integral definida puede ser aplicada para el calculo de Areas.

A7, respuesta verbal de la tarea 8 del cuestionario

Menciona el concepto de Integral Definida de forma **AN** asociado al límite de una suma Riemann, pero cuando tiene que aplicarlo no sabe cómo hacerlo, confunde la cantidad de particiones con el número de subintervalos de una partición y asocia la Integral Definida como el cálculo de áreas.

Durante la entrevista este alumno toma una actitud de duda y luego responde de la misma forma que lo hizo en el cuestionario.

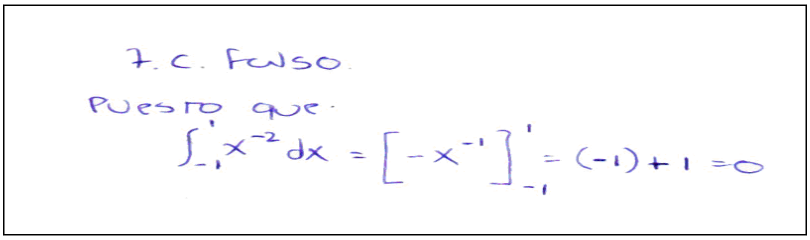
I: ¿Cómo le explicaría a un compañero el significado de la expresión $\int_a^b f(x)\,dx$ *?*
A7: Esa integral es por la definición precisamente que no podría explicarlo ahora, no recuerdo.
I: ¿Cuál es su razonamiento acerca del concepto que había dado?
A7: Que matemáticamente la integral definida, es el límite de una suma de Riemann cuando n *tiende a infinito y siendo* n *el número de particiones, en un* $[a,b]$*, si* n *tiende a infinito la norma de la partición* p *tiende a* 0.
(A7E8).

En este apartado recuerda elementos matemáticos aislados como **LID** y **ALS** de forma **A** y **AN,** pero como él mismo lo manifiesta *"es por la definición precisamente que no podría explicarlo ahora, no recuerdo"*, y durante el cuestionario y la entrevista ha demostrado en otras situaciones que recuerda **ALS**, pero no es capaz de utilizarlo correctamente.

En otras ocasiones, este alumno recuerda algunos elementos matemáticos de forma aislada y con errores. Por ejemplo en la tarea **7c**.

Considerar el valor de verdad o de falsedad de la afirmación $\int_{-1}^{1} x^{-2}\,dx = \left[-x^{-1}\right]_{-1}^{1} = (-1) - 1 = -2$ y en caso de ser falsa, explicar por qué o dar un contraejemplo.

En el cuestionario lo que hace es responder a la tarea de forma **A**:


7.c. Falso.
Puesto que:
$\int_{-1}^{1} x^{-2}dx = \left[-x^{-1}\right]_{-1}^{1} = (-1)+1 = 0$

A7, resolución A de la tarea 7c del cuestionario

Este alumno considera la afirmación como falsa, y la justifica mediante el cálculo de la integral de forma incorrecta, esto es una evidencia de que no relaciona los elementos matemáticos **LID** y **TFV** de forma **A** cuando aplica la regla de Barrow; porque utiliza la integral como cálculo algebraico de forma incorrecta sin tener en cuenta que la función es discontinua en un punto del intervalo y por tanto no cumple las condiciones necesarias para poder aplicar la regla de Barrow.

Esta es la forma como justifica verbalmente la resolución de la tarea durante la entrevista:

I: ¿Cómo justifica el valor de la proposición 7c?

A7: Realizando el ejercicio.
I: ¿Está de acuerdo con el procedimiento que ha utilizado?
A7: Si, estoy utilizando la definición de la integral definida
I: ¿Cuál es la definición de la integral definida?
A7: Que la integral definida de la función $f(x)$*, es igual a,… no recuerdo.*
I: ¿Qué está aplicando cuando resuelve esa integral, está aplicando la definición de integral o un algoritmo para calcular la integral?
A7: Diría que la definición.
I: ¿Por qué?
A7: Porque, pienso que esa definición incluye….
I: ¿Cuál es la definición para usted?
A7: La integral, no la recuerdo.
I: ¿Si mira la función, los límites de integración y el procedimiento, está de acuerdo con su solución?
A7: Es que uno tiene que tomar partido en algo, o estoy de acuerdo o no estoy de acuerdo.
I: ¿Entonces, está de acuerdo o no está de acuerdo?
A7: Estoy de acuerdo.
(A7E7c).

En el extracto de entrevista demuestra dos concepciones erróneas en la resolución de la tarea, en primer lugar aplica la regla de Barrow a una función que no cumple las condiciones necesarias porque es discontinua en un punto del intervalo de integración, y en segundo lugar porque confunde la definición de integral definida con el algoritmo para calcularla al afirmar que está aplicando la definición de la integral. Además, se evidencia que hace un cálculo incorrecto de la Integral Definida de forma **A** para comprobar la afirmación planteada en la tarea.

A lo largo tanto del cuestionario como de la entrevista se pone de manifiesto que los elementos matemáticos que mejor maneja este alumno son **ACA, LID y TFV**, aunque sólo lo hace en los sistemas de representación **G** y **A**. Puntualmente utiliza el elemento **ACA** en el sistema **AN** al resolver la tarea 5 que no es capaz de concluir. El elemento matemático que menos utiliza es el de **PID** pero cuando lo aplicó lo hizo de forma correcta, y el elemento matemático que sólo menciona y algunas veces con errores es **ALS.** Asimismo, la relación lógica más utilizada y de forma correcta en las tareas es la conjunción lógica; por el contrario no aparecen en la resolución de las tareas la condicional, ni la relación contraria de la condicional.

Por la forma como resolvió las distintas tareas a lo largo de todo el cuestionario, por la manera como fueron justificadas esas respuestas a través de la entrevista, y la comprensión del concepto de Integral Definida que refleja en el mapa conceptual, consideramos que este alumno se encuentra en el nivel **ínter 1** de desarrollo del esquema.

La tabla siguiente representa las relaciones lógicas, los elementos matemáticos y los sistemas de representación utilizados por este alumno tanto en el nivel **intra** como en el **ínter 1.**

NIVEL	CARACTERÍSTCAS	ELEMENTOS MATEMÁTICOS	SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN
INTRA	**Recordar algunos elementos matemáticos de forma aislada.**	**El área como aproximación:(G,A)** -Aproximación del área de una región plana. -Fórmula del área del rectángulo. -Partición del intervalo. -Sumas de Riemann. **El área como límite de una suma:(A)** -El límite de las sumas. **La integral definida: (G, A)** -La integral definida como área de una región. -La integral definida como cálculo algebraico. -La definición analítica de integral definida. -La integral en otros contextos. **Las propiedades de la integral definida:(A)** -Integrales especiales. -Unión de intervalos. -De linealidad. **El teorema fundamental:(A)** -Regla de Barrow.	**Gráfico** **Algebraico** **Analítico**
INTER 1	**Usar la conjunción lógica ("y lógica") de forma correcta entre elementos matemáticos dados en el mismo sistema de representación.** **Recordar algunos elementos matemáticos gráficos, algebraicos y/ o analíticos.** **Tener esbozo de síntesis de los sistemas de representación gráfico y algebraico.**	**El área como aproximación:(G,A)** -Aproximación del área de una región plana. -Fórmula del área del rectángulo -Fórmula del área del trapecio. -Fórmula del área del triángulo. -Partición del intervalo. -Sumas de Riemann. **El área como límite de una suma:(A)** -El límite de las sumas. **La integral definida: (G, A)** -La integral definida como cálculo algebraico -La integral definida como área de una región. -La definición analítica de integral definida **Las propiedades de la integral definida:(A)** -Unión de intervalos. **El teorema fundamental:(A)** -Regla de Barrow.	**Gráfico** **Algebraico** **Analítico**

Tabla 4.9. Relaciones lógicas, elementos matemáticos y sistemas de representación que caracterizan los niveles de desarrollo del esquema de integral definida en A7

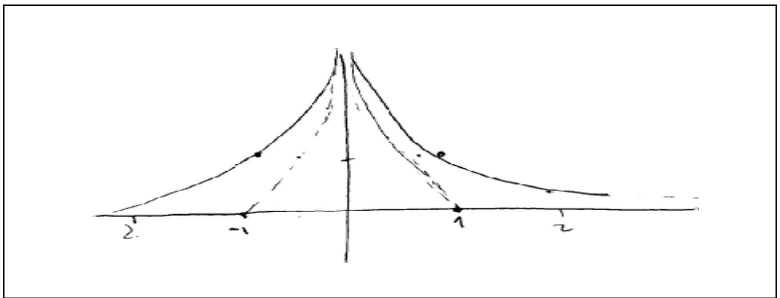
4.1.4. Nivel ínter

En este nivel de desarrollo del esquema de Integral Definida hay un aumento del tipo de relaciones lógicas que los sujetos establecen entre los elementos matemáticos gráficos, algebraicos y analíticos y lo hacen con más frecuencia. Los alumnos usan diferentes relaciones lógicas entre elementos matemáticos de forma correcta salvo alguna excepción (generalmente en el mismo sistema de representación), recuerdan los elementos matemáticos necesarios en la resolución de una tarea en varios sistemas de representación (gráfico, algebraico y/o analítico), y tienen esbozo de síntesis de los sistemas de representación gráfico, algebraico y/o analítico.

Entre los alumnos con los que se realizó este estudio, en **A2** encontramos las características anteriores. Por ejemplo en la tarea 7c.

Decidir si la afirmación es verdadera o falsa. En caso de ser falsa, explicar por qué o mostrar un contraejemplo. $\int_{-1}^{1} x^{-2}\,dx = \left[-x^{-1}\right]_{-1}^{1} = (-1) - 1 = -2$

Durante la entrevista este alumno hace una representación **G** de la función:



A2, representación G de la tarea 7c durante la entrevista

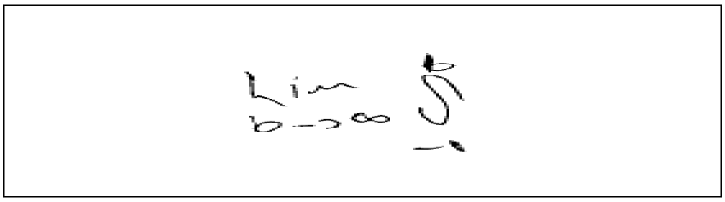
Esto le permite visualizar cuándo es discontinua la función:

I: ¿Cuál es el razonamiento que hace acerca de la proposición 7c?
A2: Es discontinua.
I: ¿En dónde?
A2: En cero **(A2E7c).**

A partir de aquí es capaz de razonar por qué es falsa esa proposición:

A2: Si, lo que veo es que sumaron uno al numerador y dividieron, y luego aplicaron el teorema fundamental del cálculo.
I: ¿Cree que es correcta la aplicación?
A2: No, no se puede aplicar.
I: ¿Por qué, qué haría entonces?
A2: Eso se resolvería como una integral impropia, porque la integral es impropia
I: ¿Por qué?
A2: Porque presenta una discontinuidad infinita, si es impropia.
I: ¿Qué es una integral impropia?
A2: Es aquella que al menos uno de sus límites es infinito o el integrando presenta una discontinuidad de tipo infinito.
(A2E7c).

Comprende los elementos matemáticos necesarios implícitos para tomar una decisión sobre el valor de la proposición, responde y justifica correctamente el valor de falsedad de la afirmación, establece una relación de **conjunción lógica** entre los elementos matemáticos **LID** y **TFV** cuando considera que la función es discontinua y por eso no cumple las condiciones necesarias para poder aplicar la regla de Barrow. Además intenta plantear una integral impropia de forma **AN** para mostrar cómo se podría calcular la integral presentada en la tarea.



A2, representación A de la tarea 7c durante la entrevista

Además este alumno en otro apartado de esta misma tarea utiliza **el contrario de la condicional**:

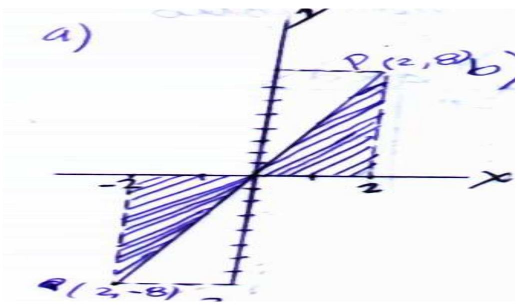
I: ¿Cuál es el valor que le da a la proposición?
A2: Acá, lo que me afirman es que si f es continua, en a, b, entonces f es integrable en a, b, eso es cierto.
I: ¿Afirma entonces que la proposición es verdadera, por qué?
A2: Si, es cierto, porque si f no es integrable, es porque la función no es continua en alguna parte de ese intervalo, otra cosa es que existan unas que no son continuas en un intervalo, pero si existe en ese intervalo la integral, entonces la proposición es verdadera.
(A2E7b).

En este episodio utiliza el elemento matemático **LID** de forma **AN**, cuando aplica la condición suficiente para decidir sobre el valor de la afirmación planteada en la tarea.

Además este alumno en la resolución de la tarea 2:

Sea **R**, la región encerrada por el gráfico de la función $f(x) = 4x$ y el eje x, en el intervalo $[-2, 2]$.
a. Dibujar la gráfica.
b. Calcular gráficamente el área de la región.
c. Calcular la $\int_{-2}^{2} 4x \, dx$.
d. ¿Son iguales los dos resultados anteriores? Justificar cada paso.

En el cuestionario hace inicialmente una representación gráfica de la función.



A2, representación G de la tarea 2 del cuestionario

Por la forma cómo responde pone de manifiesto que utiliza el elemento matemático **ACA** de forma **G**, porque grafica de forma correcta la función y forma dos triángulos rectángulos iguales uno por encima del eje x y otro bajo del eje x y luego calcula el área pedida de forma A.

Area R $= \frac{2(2 \cdot 8)}{2} u^2 = 16 u^2$

A2, resolución A de la tarea 2 del cuestionario

Este alumno coordina la representación gráfica con un procedimiento algebraico, cuando a partir de la gráfica anterior calcula la base y la altura del triángulo para obtener su área y, como los triángulos son iguales, entonces duplica el área de uno y obtiene el área total de 16 unidades cuadradas. En la entrevista podemos apreciar cómo coordina estas dos representaciones:

I: ¿Puede explicarme cómo ha resuelto la tarea número 2?

A2:… la gráfica de esto no tiene problema, sería calcular gráficamente el área de la región, aquí me piden el área de la región sombreada, el área comprendida entre la integral de $4x$ *, evaluada en el intervalo* $[-2, 2]$.
I: ¿Qué figuras se formaron cuando graficó la función?
A2: Se formaron triángulos….
I: ¿Cómo calcula gráficamente esa área?
A2: Tengo la base que es de 0 *a* 2*, es decir que la base mide dos, necesitaría la altura.*
I: ¿Cómo obtiene la altura?
A2: La altura, seria de 0, 2*, seria 8, eso fue lo que hice acá.*
I: ¿De dónde obtiene el 8?
A2: Lo que hice fue calcular el punto, reemplazar x *por 2, el* x de la función $f(x)$ …
I: ¿Qué relación puede establecer entre el área de la región bajo el eje OX y la región formada sobre el eje OX?
A2: Que son iguales.
I: ¿Por qué son iguales?
A2: Porque el triángulo que me queda en el tercer cuadrante es de área similar
I: ¿Por qué duplica esa área?
A2: Son iguales, porque ambos tienen por base la longitud 2, la base del triángulo que está ubicado en el primer cuadrante es de 0 *a* 2*, o sea es 2 unidades y la del triángulo que está ubicado en el tercer cuadrante es de* 0 *a -2, pero como es una longitud, mide lo mismo, son 2 unidades y vuelvo y hago lo mismo reemplazo a* x *por menos 2 en la función* $f(x)$ *y me da -8, como estamos hablando de longitud, entonces son 8 unidades de longitud, o sea que las áreas son iguales, porque el área de una es 8 por 2 sobre 2 y el área de la otra es 8 por 2 sobre 2, son iguales.*
I: ¿Qué valor obtuvo al calcular esa área gráficamente?
A2: Obtuve 16 unidades cuadradas, la suma de los 2, la suma de los 2 triángulos.
(A2E2).

En cuanto al cálculo de la integral en el cuestionario da la siguiente solución de forma **A**:

$$\int_{-2}^{2} 4x\,dx = \frac{4x^2}{2}\Big|_{-2}^{2} = 2x^2\Big|_{-2}^{2} = 8 - 8 = 0$$

A2, resolución A de la tarea 2 del cuestionario

Utiliza el elemento matemático **TFV** de forma **A** aplicando la regla de Barrow, porque halla la primitiva, la evalúa en los límites de integración correspondientes y obtiene un resultado **A** correcto. Además distingue entre el cálculo del área por medio de la integral y el significado de integral:

I: ¿Por qué al calcular el área dio un valor y cuando calculó la integral dicho valor dio cero?
A2: Acá me piden el área, entonces me ubico gráficamente en el plano cartesiano y no tomo en cuenta valores negativos, es decir estamos hablando de áreas las voy a sumar, en cambio la integral es cero, porque la diferencia es que esta es un área, estoy hablando de un área de 16 unidades cuadradas y la integral de esa función evaluada en ese intervalo es cero, entonces son diferentes.
I: ¿Cómo justifica que los 2 resultados sean iguales o diferentes?
A2: Porque a mí me enseñaron que una integral no es un área, o sea geométricamente representa un área, pero una integral no es un área, es un numero, en este caso la integral de esa función evaluada en el intervalo dado es cero y no es más.
(A2E2).

Como podemos ver, el alumno a lo largo del desarrollo de la tarea establece una relación de conjunción lógica entre los elementos matemáticos **ACA** y **LID** porque, a partir del cálculo gráfico del área y de la Integral Definida, puede distinguir entre la Integral Definida y el cálculo del área de una región.

Por la forma de razonar este alumno muestra que utiliza además una condicional lógica:

I: ¿Cuál es la diferencia entre calcular un área y calcular una integral definida, podría explicarlo?

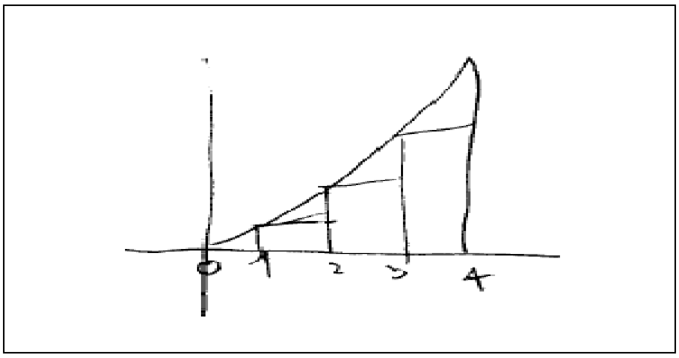
A2: Bueno, una vez más cuando voy a calcular un área me ubico acá en el plano cartesiano, a mi me enseñaron que la función que es positiva, la integro en el intervalo dado, menos la integral que tiene la función que es negativa y cómo voy a obtener el área cambio de signo a esta última para que sea positiva y me represente el área.
…….
(A2E2).

El alumno establece una **condicional lógica** en el elemento matemático **PID,** en concreto la integral de las funciones positivas y negativas**,** para decidir cuando la integral representa el área de una región, porque afirma que si la función es positiva, entonces el valor de la integral es igual al área de la región y si la función es negativa al calcular la integral como su valor es negativo, se debe cambiar el signo para que sea positiva y represente el área.

Para resolver la tarea 3.

Sea R la región entre la gráfica de la función $f(x)=x^2$ y el Intervalo [0,4] **-**Utiliza particiones para aproximar el valor del área de la región R. **-**Justifica tu respuesta.

Representa gráficamente la función y divide el intervalo en 4 subintervalos:



A2, representación G de la tarea 3 durante la entrevista

Para ello recurre al elemento matemático **ACA** de forma **G** porque traza rectángulos inferiores para aproximar el área por defecto. Esto mismo queda reflejado en la entrevista cuando dice:

I: ¿Sabría comentarme cómo ha resuelto la tarea número 3?
A2: …..Acá lo que hago es trazar rectángulos en el intervalo de 0 *a* 4 *y hallar el área bajo la curva de esta función.*
I: ¿Cuántos rectángulos?
A2: Los rectángulos que trace ahí, fueron sólo 4 (traza rectángulos en la hoja de respuestas).
I: ¿Cuántos debería trazar?
A2: Para obtener el área precisa deberían ser infinitos.
(A2E3).

Pero cuando calcula el área lo hace con rectángulos superiores, es decir, no está coordinando la representación gráfica y la algebraica.

$$\sum f(\varepsilon_k)$$
$$(1+4+9+16)\,u^2 = 30\,u^2$$

A2, resolución A de la tarea 3 durante la entrevista

Recurre al elemento matemático **ACA** de forma **A** y, para ello, determina la longitud de cada subintervalo y la altura de los rectángulos en el extremo derecho de cada subintervalo, lo que le lleva, como la función es creciente, a calcular el área, no de los rectángulos que ha dibujado, sino de rectángulos superiores por lo que obtiene el área total aproximada por exceso.

A2: Esta vez, si tengo los valores de la función, entonces lo que hice fue trazar 4, si 1, 2 y 3 acá y la base de cada uno es 1, entonces sería la sumatoria de f evaluado en ε_k, que sería la altura de la función, que es la altura del rectángulo trazado correspondiente y multiplicarlo por la base de cada rectángulo que es 1; es decir $f(x)$ evaluado en 1, es 1, es decir el primer triángulo seria 1 el área, luego el área del segundo, seria la altura de la función, evaluado en 2; es decir ….
I: ¿Por qué evaluado en 2?
A2: Porque 2 me daría la altura que necesito, la altura del segundo.
I: ¿Cuál es la base de cada rectángulo?
A2: Es 1, entonces simplemente conozco las alturas, me estaría dando las áreas por eso las trace con base 1 más sencillo que sería menos aproximado, el segundo seria 4, el tercero seria 9 y el cuarto seria 16, todo esto en unidades cuadradas, esto sería 5, 13 23, 29, unidades cuadradas, trazando sólo 4 rectángulos para hacer una pequeña aproximación (hace cálculos en una hoja de respuestas).
I: ¿Está seguro que es 29?
A2: Serian 25, ah no, 30 unidades cuadradas (corrige la respuestas).
(A2E3).

Cuando se le pide al alumno de qué otra forma podría calcular el área bajo la gráfica, escribe la siguiente expresión:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{n} f(\varepsilon_k)\,\Delta x$$

A2, resolución AN del la tarea 3 durante la entrevista

Menciona el elemento matemático **ALS** de forma **AN**, porque plantea el límite de una suma Riemann pero no concluye el procedimiento para obtener el área de la región solicitada:

A2: Seria el limite, siendo n el número de particiones, cuando el límite de n tiende a infinito, o sea el numero de particiones de la sumatoria de las áreas de esos rectángulos, obtendría el área precisa, el área exacta de la región bajo la curva, seria ε_k por la altura que es $\Delta(x)$ de 1 al infinito si hago la partición tiende al infinito, desde 1 a n(escribe en una hoja de respuestas).
I: ¿Qué necesitaría para expresar ese límite de esa suma?
A2: Tendría que tener, el límite de esta suma.
I: ¿Cuál seria, cómo lo obtendría, cuál es la base y cuál es la altura?
A2: La base es $\Delta(x)$, seria la base de todos.
I: ¿Y la altura?
A2: Es una partición regular y la altura seria $f(\varepsilon_k)$.
I: ¿Qué tiene planteado ahí, entonces?
A2: Tengo la sumatoria de las áreas de los rectángulos, que incluí en el área bajo la curva, es decir la partición.
(A2E3).

Utiliza el elemento matemático **ALS** de forma **AN,** pero confunde el número de particiones con el número de subintervalos y no resuelve la tarea usando este elemento.

Como no logra conseguir una aproximación del área utilizando particiones, entonces calcula la integral.

I: ¿Qué otro procedimiento podría utilizar diferente al límite de esa sumatoria?
A2: Seria la integral, esto es una integral.
I: ¿Cómo plantearía esa integral?
A2: Eso seria, hablando en términos del ejercicio, la $\int_0^4 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^4 = \frac{64}{3} - 0 = \frac{64}{3}$.
I: ¿Cuánto le daría el límite de esa sumatoria?
A2: El límite de esa sumatoria me daría $\frac{64}{3}$.
I: ¿Cuál es la diferencia entre hallar el límite de una sumatoria y calcular la integral?
A2: La diferencia es que el procedimiento de las particiones para hallar el área con el límite de la sumatoria de Riemann es menos práctico.
I: ¿Qué puede concluir de los valores obtenidos y del ejercicio en general?
A2: El valor que obtuve de 30 unidades cuadradas, no deja de ser una aproximación lejana al valor real de la función, aunque las particiones que hice fueron sólo 4, el valor está muy lejos del que pedían.
(A2E3).

Aplica el elemento matemático **TFV** porque utiliza la regla de Barrow para calcular la Integral Definida e infiere que el valor obtenido de la Integral Definida debe ser igual al valor del límite de la sumatoria de Riemann. Además, en este apartado, el alumno pone de manifiesto que no logra coordinar los aspectos **G** y **A**, porque no se da cuenta que la aproximación que alcanzó por defecto es bastante más grande que el valor exacto del área que obtuvo mediante la integral.

Establece **un esbozo de síntesis entre los sistemas de representación A** y **AN**, aunque con la representación **AN** tiene muchos problemas porque menciona los elementos matemáticos en este sistema de representación, pero no es capaz de aplicarlos en la resolución de las tareas y tiene dificultades con la representación **G**, por la forma cómo utiliza a nivel gráfico rectángulos inferiores para aproximar el área bajo la curva, usa de forma algebraica la fórmula del área del rectángulo y el cálculo de la Integral Definida, y plantea de forma analítica el límite de una sumatoria de Riemann.

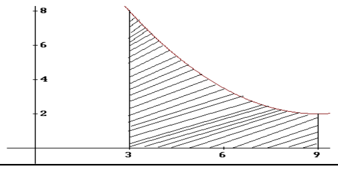
La imagen que tiene este alumno del concepto de integral Definida se refleja en el siguiente extracto:

I: ¿Si le fueras a enseñar a un estudiante por primera vez a resolver este ejercicio, cómo lo haría, por aproximación, por el límite, o integraría?
A2: Empezaría mostrándole el proceso, cómo es que se llega a una integral.
I: ¿Cuál es ese proceso, podría describirlo, cómo sería?
A2: Primero empezaría diciéndole que si necesito hallar el área bajo una curva de la gráfica de una función, o cualquier área utilizaría los rectángulos, porque como ya dije son las figuras geométricas que más se ajustan para hacer la aproximación para incluir rectángulos y sumar sus áreas, luego mostrarle que cuando esos rectángulos se hacen cada vez mayores, el área es cada vez más aproximada y si uno hace que el número de rectángulos sea infinito, va a obtener el área precisa, entonces ese sería el procedimiento y mostrarle que eso se define como el límite de una sumatoria de Riemann, que es lo mismo que tener una integral definida, decirle qué es la integral definida, mostrarle las propiedades fundamentales que existen y el teorema fundamental del cálculo.
(A2E3).

En este episodio se pone en evidencia que el alumno muestra cierta incoherencia en sus argumentos, porque los elementos matemáticos que menciona y recomienda para construir el concepto de Integral Definida son los mismos que él no ha sido capaz de utilizar de forma correcta en la resolución de las tareas.

Además de lo anterior este alumno puede **recordar algunos elementos matemáticos gráficos, algebraicos y/ o analíticos.** Por ejemplo, en la tarea 1.

El área de la región rayada es mayor que **12** y menor que **48**.
a. ¿Por qué?
b. ¿Puede dar valores más ajustados?
c. ¿Cuáles?
d. ¿Cómo los obtiene?

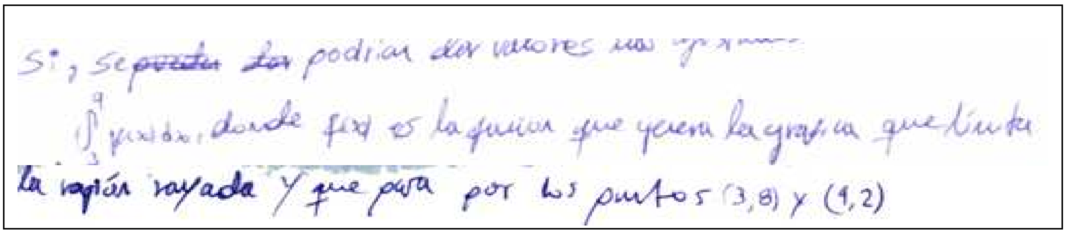


Lo primero que hace es dar una explicación de cómo piensa ajustar las cotas y lo expresa de la siguiente forma:

a) Porque suponiendo que el área de la región rayada tiene como base el intervalo [3,9] de longitud 6 U y por altura 8 U, como aparentemente se muestra en la figura. Si transformamos el área de la región rayada a una nueva que tiene como base 6 U y como altura 8 U y tiene forma rectangular, entonces el área de esta nueva región sería de 48 U², como el área original es sólo una porción del área nueva, entonces forzosamente el área de la región original tendrá una medida menor que el área de la nueva región, es decir será menor que 48 U². El área de la región rayada es mayor que 12 U ya que la región rectangular de base 6 U y altura 2 U tiene por área 12 U² y ésta es una porción de la región rayada original.

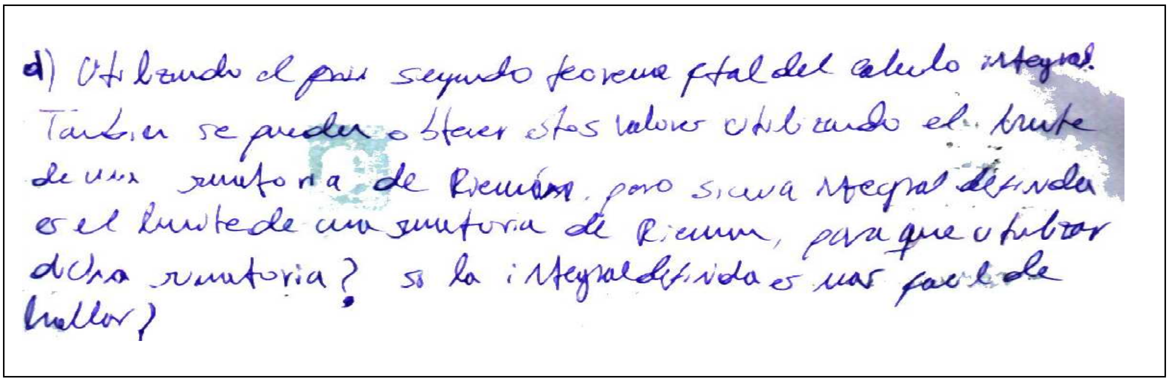
A2, respuesta verbal de la tarea 1 del cuestionario

Las cotas que obtiene el alumno son las que le pide la tarea y, aunque considera que podría dar valores más ajustados, no es capaz de hacerlo y recurre a mencionar el elemento matemático **LID** de la siguiente manera**:**


Sí, se ~~pueden~~ ~~dar~~ podrían dar valores más aproximados
$\int_3^9 f(x)dx$, donde $f(x)$ es la función que genera la gráfica que limita la región rayada y que pasa por los puntos (3,8) y (9,2)

A2, resolución verbal de la tarea 1 del cuestionario

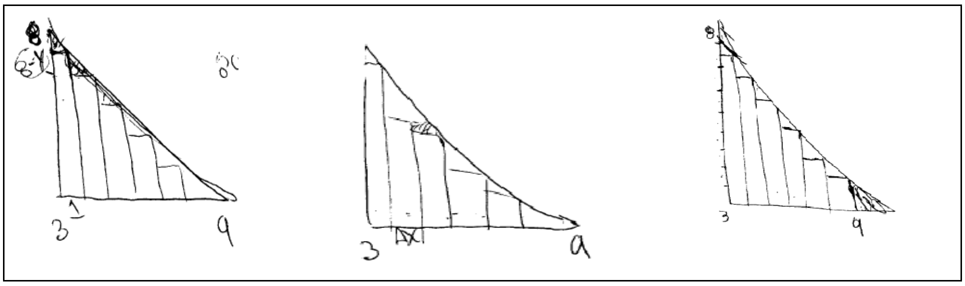
Como el alumno no sabe utilizar este elemento matemático en la resolución de la tarea, entonces no responde lo que se le pregunta y menciona otros elementos matemáticos que él considera suficientes para resolverla:


d) Utilizando el ~~primer~~ segundo teorema fundamental del cálculo integral. También se pueden obtener estos valores utilizando el límite de una sumatoria de Riemann, pero si una integral definida es el límite de una sumatoria de Riemann, para que utilizar dicha sumatoria? si la integral definida es más fácil de hallar)

A2, respuesta verbal de la tarea 1 del cuestionario

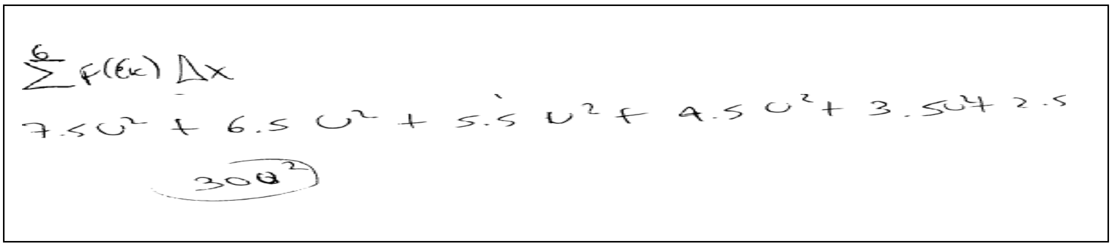
Como puede apreciarse este alumno menciona varios elementos matemáticos **ACA**, **ALS**, **LID** y **TFV**, pero en el cuestionario no es capaz de aproximar más el área y por tanto no concluye la resolución de la tarea.

Durante la entrevista trata de realizar un procedimiento de forma **G** para ajustar las cotas del ejercicio.



A2, representación G de la tarea 1 durante la entrevista

Para ello recurre al elemento matemático **ACA** de forma **G**, cuando traza 3 gráficas, hace particiones, construye 5 rectángulos inferiores en las dos primeras gráficas y en la tercera gráfica, 6, aunque parece que quiere trazar más rectángulos para ajustar el área bajo la curva por defecto. A pesar de que este alumno realizó tres gráficas, sólo utiliza un procedimiento algebraico para la tercera intentando ajustar más las cotas planteadas en el ejercicio y obtiene un valor aproximado como se muestra a continuación:



A2, resolución A de la tarea 1 durante la entrevista

Este mismo procedimiento lo refleja en la siguiente explicación que hace el alumno:

I: A partir de esos rectángulos que acaba de trazar ¿Podría obtener un valor numérico, cómo sería?
A2: Seria, la sumatoria 1, 2, 3, 4, 5, 6, hallamos Δ_x *que es la base de cada rectángulo por la altura, evaluando la función en el punto…*
I: ¿Si reemplazara esa expresión analítica por valores numéricos, qué obtendría?
A2: Sería un área.
I: ¿Cómo sería numéricamente, cuánto le daría?
A2: A ver, sería 1, 2, 3, 4, 5, 6, sería la sumatoria de 1, acá tendría que tener los valores de la función si quiero dar valores numéricos.
I: ¿Cómo calcularía el área de esos rectángulos?
A2: Si podría por una aproximación.
A2: Seria, la sumatoria 1, 2, 3, 4, 5, 6,.. A 6, vamos hallar Δ_x*, la base de cada rectángulo por la altura…*
I: ¿Cómo obtendría las áreas de esos rectángulos?
A2: Numéricamente tendría que hacer un gráfico mejor, porque acá, tengo que hacer un área mejor que la que hice, (susurra mientras va pensando). *Seria 1,2, 3, 4, 5, 6, suponemos que todos tienen de base 1,y las alturas respectivas son 7,5; 6,5; 5,5;4,5;3,5 y 2,5 entonces el primero lo voy a trazar por acá, el segundo acá, el tercero acá, el cuarto acá, el quinto por acá , el sexto por acá, bueno de tres a nueve, entonces seria primero 1 por, 7,5, seria 7,5 unidades cuadradas, más el segundo, seria 1 por 6,5, seria 6,5 unidades cuadradas, el tercero seria 5,5, el cuarto 4,5 ,el quinto 3,5y el sexto 2,5 unidades cuadradas* (calcula los valores).
I: ¿Qué hace ahora con esas áreas?
A2: Sumarlas.
I: ¿Qué valor obtendría?
A2: Seria 16, 13, y 5, 18, 22, 25, y dos, 27, seria 1, 2, 3, 4, 5, 6, por 5, 30 seria 30 unidades cuadradas.
(A2E1).

En este episodio, en primer lugar, se pone de manifiesto que el alumno utiliza el elemento matemático **ACA** de forma **A**, plantea una sumatoria de Riemann, pero no puede calcularla porque necesita la expresión algebraica de la función. En segundo lugar, cuando se le pregunta cómo podría calcular el área usando los rectángulos, trata de ajustar el área bajo la gráfica con 6 rectángulos inferiores para aproximar el área por defecto, todos tiene de base 1 unidad y la altura la obtiene a partir del valor de $y = 8$ disminuido en 0.5 sucesivamente apoyándose en la gráfica de la izquierda; entonces las alturas respectivas son: 7,5; 6,5; 5,5; 4,5; 3,5; y 2,5. Utiliza la fórmula del área del rectángulo, calcula las áreas de cada uno de ellos, halla la suma de las áreas aproximantes y obtiene una aproximación del área total, pero se aprecia que el alumno está suponiendo que la función es lineal porque considera una variación constante, lo que nos indica que no está coordinando los aspectos gráficos y algebraicos.

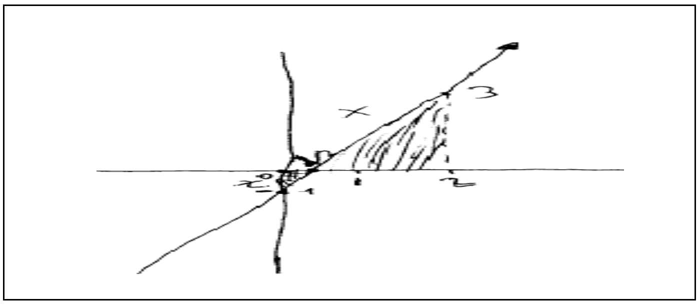
En la tarea 4:

Calcular el área limitada por la gráfica de la función $f(x)=\|2x-1\|$, en el intervalo $[0, 2]$ y el eje x. Justificar la respuesta.

Este alumno no resolvió la tarea en el cuestionario, pero durante la entrevista, cuando se le pide que lo intente, recurre al cálculo de una integral para calcular el área:

I: ¿Podría intentarlo, trata de hacerlo nuevamente, cómo sería?
A2: Seria…
I: ¿De qué manera calcularía el área de esta función?
A2: Con una integral.
I: ¿Por qué con una integral? Si ahí, no le mencionan la palabra integral.
A2: No, pero la asocio porque el problema dice calcula el área limitada por la gráfica de la función $f(x)=|2x-1|$, *en el intervalo* $[0, 2]$ *y el eje* x (lee la pregunta).
(A2E4).

Realiza la siguiente gráfica mediante el cálculo de algunos puntos de la función, pero lo hace de forma incorrecta:



A2, representación G de la tarea 4 durante la entrevista

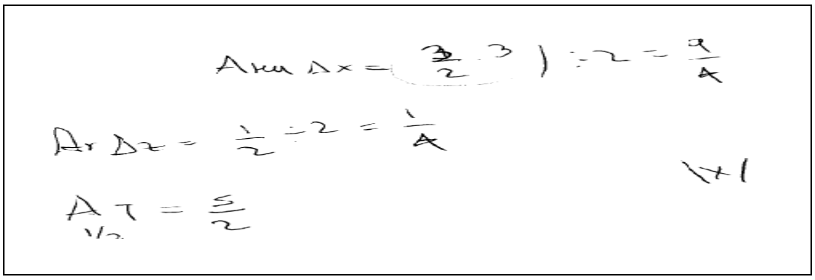
Aunque es consciente de cuál es la función valor absoluto

I: ¿Cómo define ahora el valor absoluto de esta función?
A2: Seria más fácil haciendo el gráfico y considerar sólo los valores positivos, es decir mirando la gráfica (traza una gráfica).
I: ¿Qué quiere decir, considerar sólo los valores positivos?
A2: Seria los valores que digamos en la gráfica, en el plano cartesiano están por encima del eje x.

Para calcular el área considera los dos triángulos formados en la gráfica, uno por encima del eje x llamado X y otro bajo el eje x, llamado Z .

I: ¿Podría indicar la región que va a calcular?
A2: La región entre cero y dos, pero a ver. ..(Ubica los valores en la gráfica)
I: ¿Qué figuras se han formado?
A2: 2 triángulos (forma 2 triángulos bajo la gráfica).
(A2E4).

Y coordina la representación **G** con un procedimiento **A**:



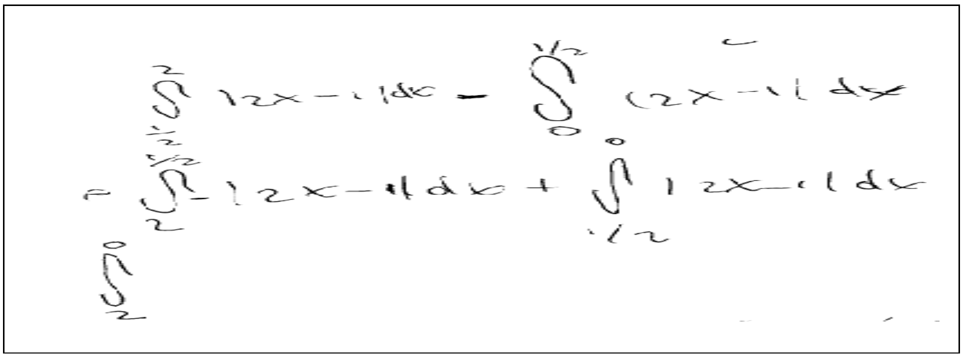
A2, 1ª resolución A de la tarea 4 durante la entrevista

Utiliza la fórmula del área del triángulo para calcular el área de los dos triángulos, las suma y obtiene de forma correcta el valor total del área.

I: ¿Cómo calcularía esa área?
A2: Seria hallar la intercepción o sea hallar a x.
I: ¿Dónde corta la recta el eje x*?*
A2: La corta cuando $y=0$ *es decir en* x.
I: ¿Cuál es el valor en ese punto?
A2: El valor en ese punto es $\frac{1}{2}$, *que es cuando* $y=0$, *entonces voy a obtener el intervalo, que va de* $\frac{1}{2}$ *a 2. Y esa sería la base del triángulo superior que está por encima, del eje* x.
A2: Y tengo otro triángulo pequeño.
I: ¿Podría calcular el área de cada uno?
A2: Ya tengo la base del triángulo x, *que es de* $\frac{1}{2}$ *a 2, que es el triángulo mayor.*
I: ¿Cómo obtiene la altura?
A2: La altura sería cuando $x=2$, *se reemplaza en la función, la altura seria 3.*
I: ¿Cuánto da el área?
A2: Base por altura sobre 2, entonces seria $\frac{9}{4}$, *el área del triángulo* x, *ahora calculo el segundo.*
I: ¿Cómo obtiene el área del segundo triángulo?
A2: El área del triangulo Z pequeño, seria $\frac{1}{2}$ *de base, sé que se intercepta con el eje* y, *es decir la altura es 1, entonces el área es* $\frac{1}{2}$ *dividido 2, seria* $\frac{1}{4}$ *y tenemos las 2 áreas.*
I: ¿Cuál sería el área total?
A2: El área total seria igual a $\frac{1}{4}+\frac{9}{4}$ *seria* $\frac{10}{4}$, $\frac{5}{2}$ *el área total.*
(A2E4).

En este episodio el alumno pone de manifiesto que aplica el elemento matemático **ACA** y establece relación entre la representación **G** y la **A** porque, a partir del gráfico, halla el punto de intersección con el eje x, se da cuenta que se forman dos triángulos para los que determina las bases, calcula las alturas a partir de la representación algebraica de la función, halla el área de cada uno, las suma y obtiene así el área total correctamente.

Cuando se le pregunta qué otro procedimiento podría utilizar para calcular el área recurre al cálculo de la integral.



A2, 2ª resolución A de la tarea 4 durante la entrevista

Para ello, hace uso de la propiedad de la unión de intervalos, pero se evidencia que no maneja correctamente la función valor absoluto porque cambia de signo la segunda integral, no es capaz de encontrar la primitiva de la función y, por tanto, no puede aplicar la regla de Barrow.

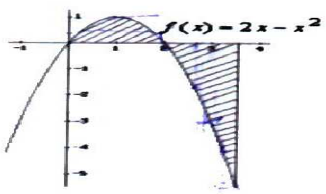
A2: Otro procedimiento, serian las integrales.
I: ¿Cómo lo haría por la integral?
A2: Seria la integral definida desde $\frac{1}{2}$ *a 2 del valor absoluto de* $2x-1dx$.
I: ¿Esta seguro que es desde un $\frac{1}{2}$ *?*
A2: Lo que hago es calcular primero el área del triángulo mayor llamado x, *entonces, como sé que el área comprendida entre el eje* x, *la gráfica de la función y las rectas* $x=\frac{1}{2}$ *y* $x=2$, *es el área que tengo por encima del eje* x, *eso sería la integral definida desde* $\frac{1}{2}$ *hasta 2 de la función valor absoluto de* $2x-1dx$, *como la otra está por debajo seria menos* (plantea las integrales).
I: ¿Por qué menos?
A2: Porque la región que está por debajo y se supone que me va a dar negativa como sé que va a dar negativa, entonces la presido del signo menos, porque lo que busco es sumar las áreas, entonces como el valor va a dar negativo con el menos se va a volver más, o sea, se van a sumar que es lo que buscamos con la $\int_0^{1/2} |2x-1|dx$, *esa sería el área de la misma función.*
I: ¿Cuánto le daría al calcular esas integrales?
A2: Tendría que dar $\frac{5}{2}$ *tienen que ser iguales, porque creo que los cálculos que hice hallando el área de los triángulos por geometría son correctos, pues si son correctos, tienen que ser iguales el área que halle y la integral. Entonces seria,* (susurra mientras va pensando y escribiendo), *vamos a invertir y vamos a dejar acá*

la integral de $\int_{2}^{1/2} -|2x-1|\,dx$, *más la integral de* $\int_{1/2}^{2} |2x-1|\,dx$, *vamos a calcular la integral de esta, más esta,* (continua susurrando) *no a ver, con esta integral, aquí tengo un inconveniente con el valor absoluto.*
I: ¿Por qué?
A2: No, hasta ahora no he trabajado mucho ésta integral.
(A2E4).

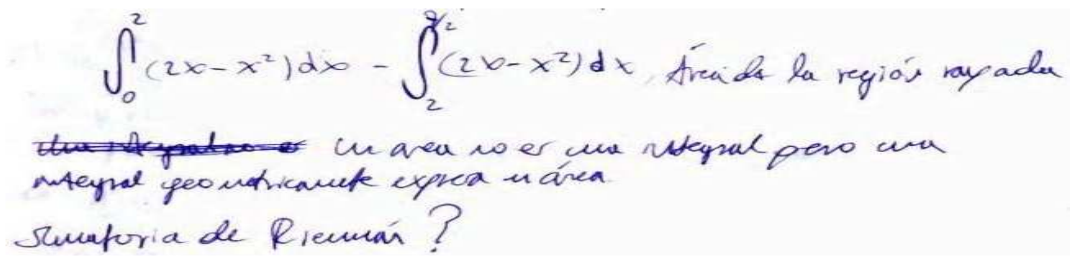
Utiliza los elementos matemáticos **LID** y **PID,** concretamente, la propiedad de la unión de intervalos correctamente y el cálculo del área de funciones positivas y negativas de forma errónea por tratarse de la función valor absoluto, aunque de forma coherente con la representación gráfica que ha hecho, pero tiene dificultad al aplicar **TFV** porque no sabe manejar la función absoluto ni a nivel gráfico ni a nivel algebraico, de forma que no es capaz de calcular el área a través de la Integral Definida.

También para resolver la tarea 5, este alumno sigue recordando algunos elementos matemáticos gráficos y algebraicos.

Dada la gráfica de $f(x)=2x-x^2$, calcular por aproximaciones el área de la región rayada. Justificar el procedimiento utilizado



En el cuestionario, en lugar de utilizar las sumatorias de Riemann para calcular por aproximaciones el área, este alumno recurre a la Integral Definida mediante el elemento matemático **PID** de forma **A**:



A2, resolución A de la tarea 5 del cuestionario

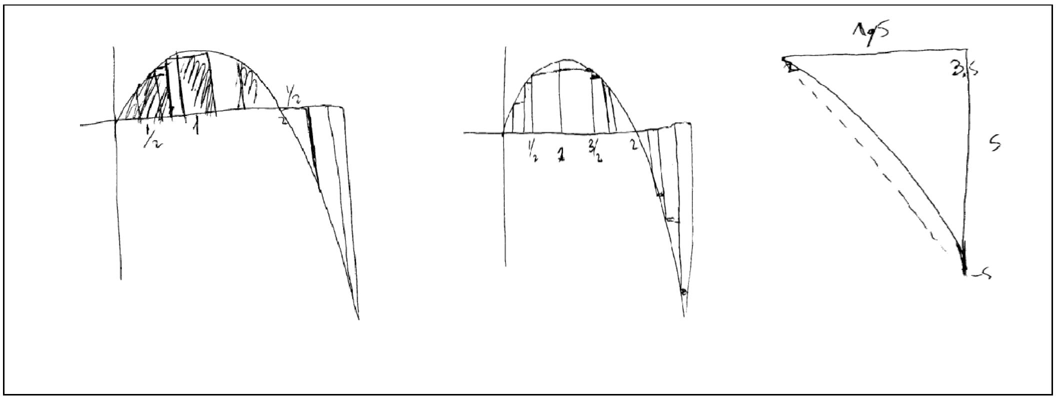
Para ello plantea un cálculo algebraico de integrales utilizando la propiedad de la unión de intervalos y la propiedad de la integral definida de funciones positivas y negativas pero no es capaz de realizar las aproximaciones a pesar de que menciona la sumatoria de Riemann.

Durante la entrevista cuando se le pregunta a este alumno qué otros procedimientos puede aplicar para calcular el área, este es el razonamiento que hace:

A2: Aparte de los que acabamos de mencionar, la integral.
I: ¿Cómo sería con la integral?
A2: La $\int_0^2 \left(2x - x^2\right) dx$*, que es el área que está por encima de la función.*
I: ¿Cuántas integrales utilizaría?
A2: 2. Porque la otra área está por debajo del eje x*, es decir me va a dar negativa.*
I: ¿Qué le va a dar negativa, la integral o el área?
A2: La integral me va a dar negativa y como estamos hablando de áreas necesito que sea positiva, necesito sumarlas, entonces como está por debajo lo que hago es restarla, como dije antes, hacer que esté precedida por el signo menos.
I: ¿En caso de la integral dar negativa puede explicarme porque da negativa si dice que el área debe ser positiva?
A2: Es más, le digo la integral no es el área, no es un área, por eso de ahí, que esto depende del problema que uno esté trabajando.
I: ¿En este caso?
A2: En este caso, estamos trabajando áreas y debe ser positiva como da negativa la pongo precedida de un signo menos.
I: ¿Qué puede concluir de los resultados obtenidos y por qué?
A2: De los resultados puedo decir que al hallar el área utilizando las integrales voy a hallar el área exacta que me están pidiendo y si me pongo hacer sólo aproximaciones que fue lo hice van a ser sólo eso, aproximaciones, es decir, en este caso me están pidiendo áreas, una vez más depende de cómo uno interprete el problema.
(A2E5).

En este protocolo de entrevista se puede apreciar que el alumno, igual que en el cuestionario, trata de utilizar el elemento matemático **LID,** pero logra obtener una respuesta.

Cuando se le pide al alumno qué aproxime el área aplica el elemento matemático **ACA** de forma **G**:



A2, resolución G de la tarea 5 durante la entrevista

Obsérvese que este alumno presenta tres figuras, en las dos primeras se evidencia una aproximación del área por defecto usando rectángulos para cubrir el área que está por encima del eje x y por debajo del eje x y la tercera representa un triángulo que recubre el área bajo el eje *x* para aproximar esta parte del área.

A2: Trazar los gráficos, los rectángulos.
I: ¿Cuántos?
A2: Digamos que de cero a dos, en este caso sería mejor trazar 4 rectángulos.
I: ¿Cuál sería la base de cada rectángulo?
A2: Seria $\frac{1}{2}$*, estamos aparentemente en el intervalo de* $[0\ ,2]$ *y trace 4.*
I: ¿Cómo obtiene las alturas de cada rectángulo?
A2: Seria la función evaluada en cada punto, el punto que me da la altura de cada rectángulo.
I: ¿Cómo aproxima el área que está por encima del eje OX y la que está bajo el eje OX?
A2: El área que está por encima, seria trazando esta gráfica, acá se entiende que trace 4, no se ve muy claro, pero aquí tenemos el área en el $[2,3{,}5]$*, para mí lo mejor sería trazar 3, sólo estamos hablando de aproximaciones, entonces haciendo*

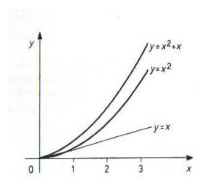
las particiones del área que está por debajo del eje x, me quedan rectángulos de base $\frac{1}{2}$ y nuevamente la altura me la da la función (traza gráficas en una hoja).
I: ¿Qué hace una vez que aproxima el área que está por encima del eje OX y la que está bajo el eje OX?
A2: Sumarlas, me piden toda el área rayada, seria la suma de las 2.
I: ¿Qué otras aproximaciones puede realizar?
A2: Seria calcular el área que está por debajo del eje x, como un triángulo, de 2 a 3,5, y vamos hacerlo, aparentemente va hasta -5, y como la curva es muy suave, entonces esto va hasta -5, esto se asemeja a un triángulo rectángulo, de base 1,5 de longitud y como altura 5, es decir el área de la región bajo el eje x(traza otro gráfico)
(A2E5).

En este episodio recuerda y utiliza el elemento matemático **ACA** pero a pesar de ello tampoco resuelve la tarea, porque no logra aplicar los elementos matemáticos que menciona para obtener un resultado.

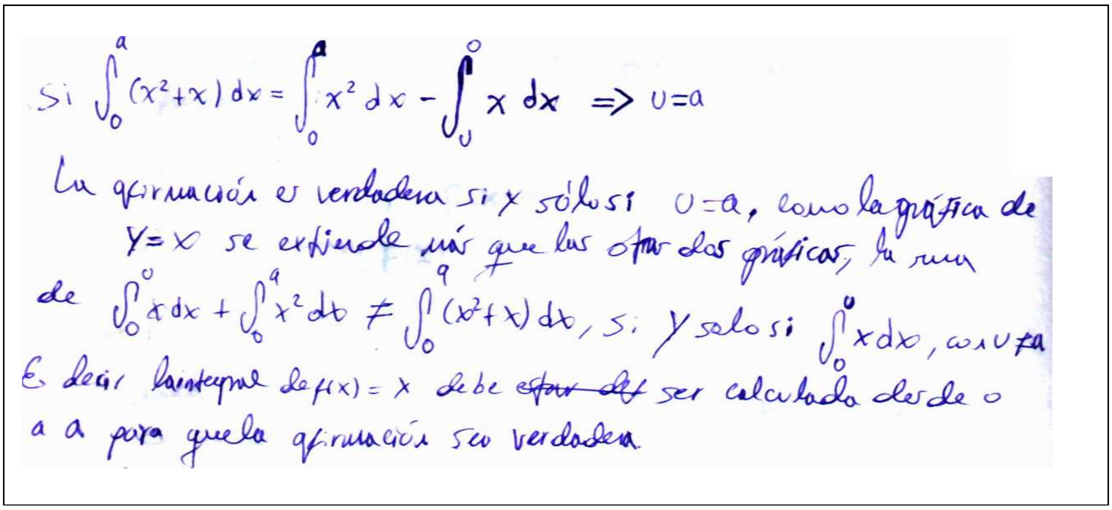
Este alumno recuerda los elementos matemáticos **LID** y **PID**, distingue entre área e Integral Definida, hace uso de la propiedad de la integral de funciones positivas y negativas en el planteamiento, pero no hace los cálculos correspondientes, sólo considera que el área debe ser positiva, además distingue entre aproximación del área y el cálculo exacto del área usando la Integral Definida. Este alumno no es capaz de trabajar en la representación analítica, por eso no da ninguna aproximación del área pedida

Además en la tarea 6

Explique, en términos del gráfico, porqué $\int_0^a \left(x^2+x\right)dx = \int_0^a x^2dx + \int_0^a xdx$



Trata de resolver la tarea de forma A:



Si $\int_0^a (x^2+x)\,dx = \int_0^a x^2\,dx - \int_u^0 x\,dx \Rightarrow u=a$

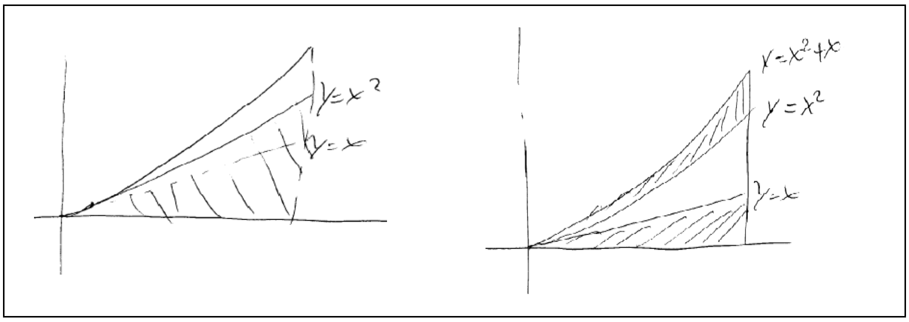
La afirmación es verdadera si y sólo si $u=a$, como la gráfica de $y=x$ se extiende más que las otras dos gráficas, la suma de $\int_0^u x\,dx + \int_0^a x^2\,dx \neq \int_0^a (x^2+x)\,dx$, si y solo si $\int_0^u x\,dx$, con $u \neq a$

Es decir la integral de $f(x)=x$ debe ~~estar def~~ ser calculada desde 0 a a para que la afirmación sea verdadera

A2, resolución A de la tarea 6 del cuestionario

Cómo puede notarse el alumno confundió los límites de integración y por tanto lo que trata es de recuperar la igualdad dada, pero no logra demostrar la propiedad de forma **G**, ni **A**.

Durante la entrevista realiza un boceto de las funciones de forma **G**:



A2, resolución G de la tarea 6 durante la entrevista

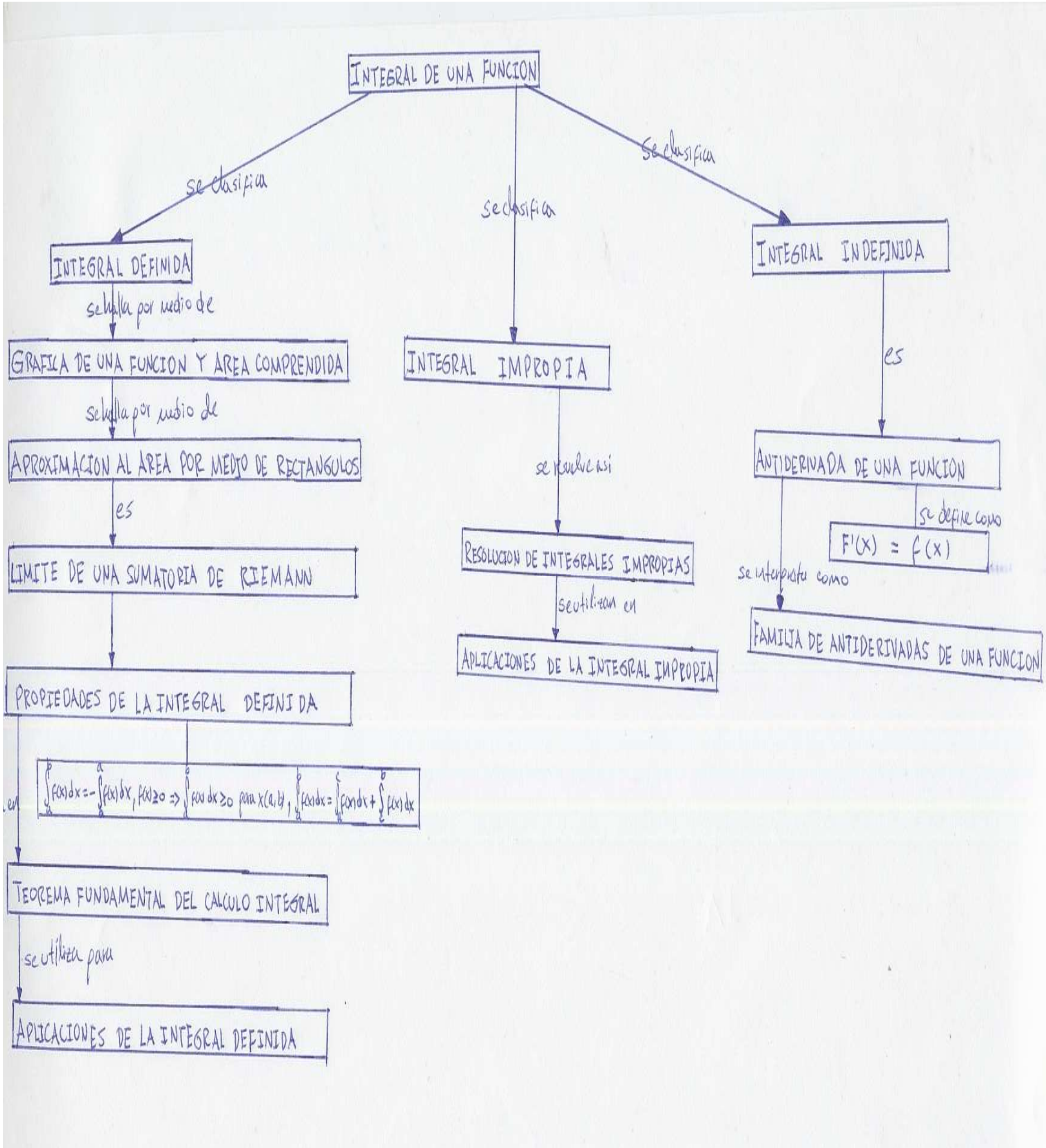
Está relacionando el área con la integral porque, para establecer la igualdad de integrales intenta comprobar la igualdad de las áreas correspondientes:

I: ¿Cómo lo haría utilizando un registro gráfico?

A2: Sé que la función $y=x^2+x$ *es mayor que* $y=x^2$, *pues evaluándola en el primer cuadrante como se muestra en la gráfica y que estas a su vez son mayores que la función* $y=x$ *, como sé eso, a mí lo único que se me ocurre gráficamente, sin utilizar integrales, sería graficando el área, entonces hacemos el dibujo mejor* (traza gráficas en una hoja de respuestas), *seria,* $y=x$ *, como las integrales están evaluadas en el mismo intervalo de cero a* a*, entonces sé que el área bajo la curva de la función* $y=x^2$ *es menor que el área bajo la curva de la función* $y=x^2+x$*, porque me dicen que la sumas del área de la curva* $y=x^2$ *, más la suma del área bajo la recta de* $y=x$ *son iguales al área bajo la curva de* $y=x^2+x$*, entonces sé que* $y=x^2$ *es el área bajo la curva es menor que el área bajo la curva de* $y=x^2+x$*, ahora seria demostrar que el área es menor, entonces lo que deduzco acá, seria demostrar que el área bajo la curva de la recta de* $y=x$ *, es igual al área comprendida entre la gráfica de la función* $y=x^2+x$ *y la de* $y=x^2$*, es decir que acá* $y=x$ *, o sea que esta área bajo* $y=x$ *, es igual a esta, a la que está comprendida entre* $y=x^2+x$ *y* $y=x^2$*, porque la menor es el área bajo la curva de* $y=x^2$ *y como la que está por encima es* $y=x^2+x$*, entonces sumo el área de* $y=x$ *.*
(A2E6).

Para comprobar esa igualdad recurre al elemento matemático **LID** de forma **G.**

Además, en el mapa conceptual, este mismo alumno pone de manifiesto la forma como tiene estructurada la imagen del concepto de Integral Definida. Inicia con la integral de una función y la clasifica en integral definida, impropia e indefinida. En la columna de la izquierda representa los elementos matemáticos que constituyen el concepto de integral definida: **ACA**, **ALS**, **PID** y **TFV**; en la columna del centro ubica la integral impropia en relación con su resolución y aplicaciones, y en la columna de la izquierda la integral indefinida como una antiderivada y una familia de antiderivadas.



A2, **mapa conceptual que representa el concepto de Integral Definida**

Por la forma como el alumno resolvió las diferentes tareas a lo largo de todo el cuestionario, por la manera como fueron justificadas esas respuestas a través de la entrevista y por la representación que hace en el mapa conceptual del concepto de Integral Definida, consideramos que este alumno se encuentra en el nivel **inter** de desarrollo del esquema.

La tabla siguiente representa las relaciones lógicas, los elementos matemáticos y los sistemas de representación utilizados por el alumno tanto en el nivel **ínter 1** como en el **ínter.**

<table>
<tr><th>NIVEL</th><th>CARACTERÍSTCAS</th><th>ELEMENTOS MATEMÁTICOS</th><th>SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN</th></tr>
<tr><td>INTER 1</td><td>Recordar algunos elementos matemáticos gráficos, algebraicos y/ o analíticos.</td><td>El área como aproximación: (G, A)
-Aproximación del área de una región plana.
-Fórmula del área del rectángulo.
-Fórmula del área del triángulo.
-Partición del intervalo.
-Sumas de Riemann.
El área como límite de una suma: (AN)
-Límite de las sumas.
La integral definida: (A)
-La integral definida como área de una región.
-La integral definida como cálculo algebraico
-Funciones positivas y negativas.
-Condición suficiente: continuidad implica integralidad
Las propiedades de la integral definida: (A)
-Unión de intervalos.
-Integrales especiales.
Los teoremas fundamentales: (A)
-Regla de Barrow.
-Antiderivada de una función.</td><td>Gráfico
Algebraico
Analítico</td></tr>
<tr><td>INTER</td><td>Usar diferentes relaciones lógicas entre elementos matemáticos de forma correcta salvo alguna excepción (generalmente en el mismo sistema de representación)

Tener esbozo de síntesis de los sistemas de representación gráfico, algebraico y analítico.</td><td>El área como aproximación: (G, A)
-Aproximación del área de una región plana.
-Fórmula del área del rectángulo.
-Fórmula del área del triángulo
-Partición del intervalo.
-Sumas Riemann.
El área como límite de una suma: (AN) - Límite de las sumas.
La integral definida: (A)
-La integral definida como área de una región.
-La integral definida como calculo algebraico
-Definición analítica de la integral definida.
-Condición suficiente: continuidad implica integralidad
- El área de funciones positivas y negativas.
-Discontinuidad en alguna parte del intervalo: integrales impropias
Las propiedades de la integral definida: (A)
-Unión de intervalos.
Los teoremas fundamentales: (A)
-Regla de Barrow.</td><td>Gráfico
Algebraico
Analítico</td></tr>
</table>

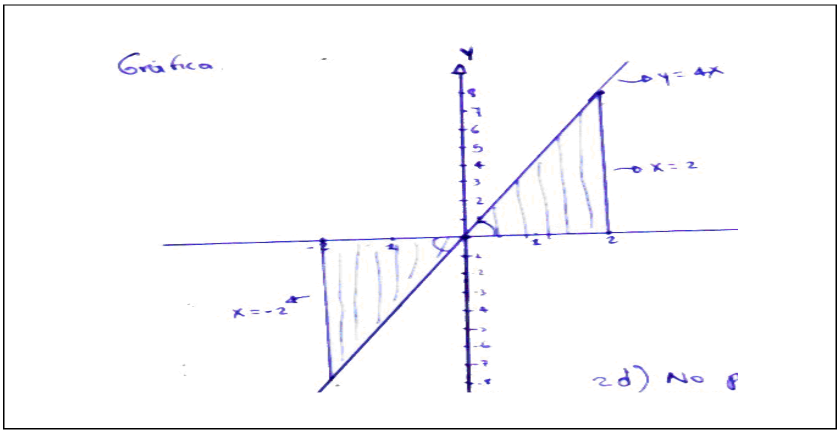
Tabla 4.10. Relaciones lógicas, elementos matemáticos y sistemas de representación que caracterizan los niveles de desarrollo del esquema de integral definida en A2

4.1.5. Nivel trans

Finalmente, el alumno **A11** ha sido clasificado en el nivel de desarrollo trans del esquema de Integral Definida porque usa diferentes relaciones lógicas (conjunción lógica, condicional y la contraria de la condicional) entre los elementos matemáticos de forma correcta; suele recordar los elementos matemáticos necesarios en la resolución de la tarea usando los significados implícitos para tomar decisiones, y muestra tener síntesis en los sistemas de representación gráfico, algebraico y analítico. Así, en la tarea 2:

Sea **R**, la región encerrada por el gráfico de la función $f(x)=4x$ y el eje x, en el intervalo $[-2, 2]$. a. Dibujar la gráfica. b. Calcular gráficamente el área de la región. c. Calcular la $\int_{-2}^{2} 4x\ dx$ d. ¿Son iguales los dos resultados anteriores? Justificar cada paso.

Este alumno representa **G** la función:



A11, representación G de la tarea 2 del cuestionario

Se da cuenta de que se forman dos triángulos iguales mediante criterios de igualdad de triángulos y luego calcula el área de uno de ellos.

26) El area de la región R es igual a dos veces el triangulo de base 2u y de altura 8um que nos da

$A\Delta = \frac{2 \times 8}{2} = 8$ y este valor lo multiplicamos por 2 por que el Area del otro Δ es igual por ser Δ semejantes y entonces nos queda un area total de 16 um^2

A11, resolución A de la tarea 2 del cuestionario

Coordina la representación **G** y **A** cuando utiliza el elemento matemático **ACA** porque, a partir del gráfico, obtiene la base y la altura del triángulo, aplica la fórmula del área del triángulo y como los dos triángulos son iguales, entonces duplica el área y obtiene el área total de 16 unidades cuadradas.

I: ¿Cómo obtuvo el área gráficamente?
A11: Gráficamente, lo que hice fue tomar los 2 triángulos que me formaban la base igual a 2 y la altura recuerdo que es 8.
I: ¿Cómo obtuvo la altura?
A11: Lo que hice fue tomar la recta $x = 2$ *, y trazar una perpendicular en donde me cortara la gráfica en ese punto y esa era la altura.*
I: ¿Qué otra forma tiene de obtener la altura?
A11: Tengo el sistema de ecuaciones: $y = 4x$ *y* $x = 2$ *, aplicando sustitución, quedaría 4 por 2 ocho, el punto de corte en* $y = 8$
I: ¿Cómo y cuánto obtuvo de área gráficamente?
A11: En el primer triángulo la base es 2 por altura que es 8, 16 dividido 8 me daba 8 de área, dije que los triángulos eran semejantes, por criterio de Lado Ángulo Lado (L, A, L), por eso digo que las áreas son iguales, el área total de 16 unidades cuadradas.
(A11C2).

En cuanto al cálculo de la integral, en el cuestionario, da la siguiente solución de forma **A**:

2c) $\int_a^b f_{(x)}\,dx = F_{(b)} - F_{(a)}$ siendo $F'_{(x)} = f_{(x)}$

entonces nos queda

$$\int_{-2}^{2} 4x\,dx = \frac{4x^2}{2}\Big|_{-2}^{2} = 2x^2\Big|_{-2}^{2} = 2(2)^2 - 2(-2)^2 = 0$$

A11, resolución A de la tarea 2 del cuestionario

Para calcularla utiliza el elemento matemático **TFV** de forma **A** cuando aplica la regla de Barrow, encuentra la primitiva de la función, la evalúa en los límites de integración correspondientes y obtiene correctamente un valor de cero.

Cuando se le pregunta acerca de la diferencia entre los dos cálculos realizados indica:

A11: Que una cosa es calcular áreas y otra cosa muy distinta es calcular integrales.
I: ¿Cuánto obtuvo hablando de áreas y cuánto obtuvo al calcular la integral?
A11: Cero. Porque resulta que no me piden calcular el área formada por la curva $y = 4x$ *en el intervalo -2, 2, lo que me dicen es calcule la integral, entonces obviamente al calcular la integral me iba a dar un número, pero no me estaban preguntando que calculara el área formada por esa curva que era ya otra cosa muy distinta, por eso al calcular la integral me daba cero, pero como área no era cero.* **(A11C2).**

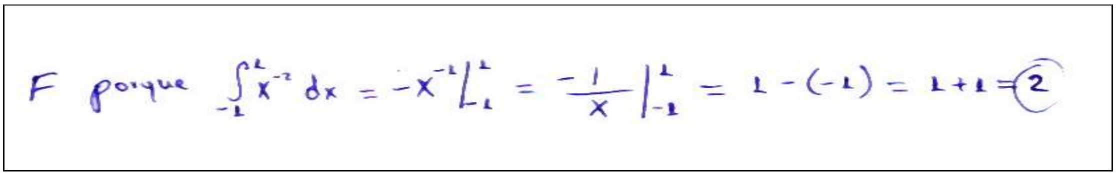
Distingue entre el área y la integral cuando en su razonamiento infiere que la Integral Definida puede ser cero, pero el área no puede ser cero.

Ha establecido una relación de conjunción lógica entre los elementos matemáticos **ACA** y **LID** de forma **G** y **A** cuando distingue entre la integral definida y la integral como una aplicación al cálculo de áreas.

En la resolución de la tarea 7c.

Decidir si la afirmación es verdadera o falsa. En caso de ser falsa, explicar por qué o mostrar un contraejemplo. $$\int_{-1}^{1} x^{-2}\,dx = \left[-x^{-1}\right]_{-1}^{1} = (-1) - 1 = -2$$

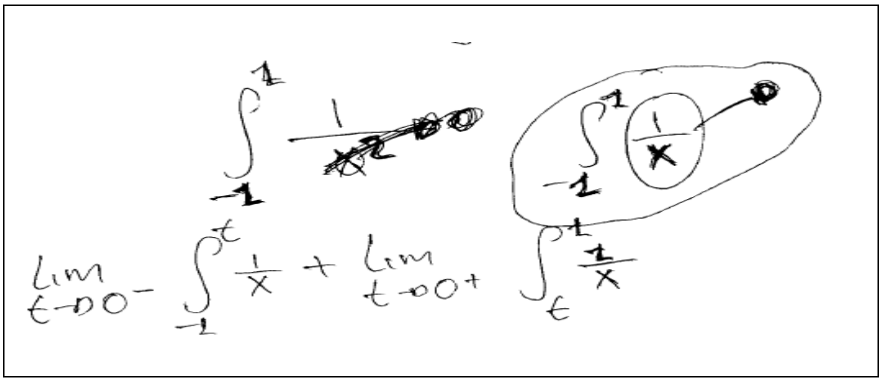
El alumno calcula incorrectamente la integral de forma **A**:



A11, resolución A de la tarea 7c del cuestionario

Para ello recurre al elemento matemático **TFV** de forma **A** y considera que la proposición es falsa porque obtiene un resultado numérico de signo contrario al que se indica en la tarea, lo que nos indica que el alumno no ha tenido en cuenta que la función presenta una discontinuidad en un punto del intervalo y que, por tanto, no se puede aplicar la regla de Barrow.

Durante la entrevista el alumno se da cuenta que la función presenta una discontinuidad:



A11, resolución A de la tarea 7c durante la entrevista

Y plantea el cálculo de una integral impropia.

I: ¿Qué valor de verdad le da a la proposición?

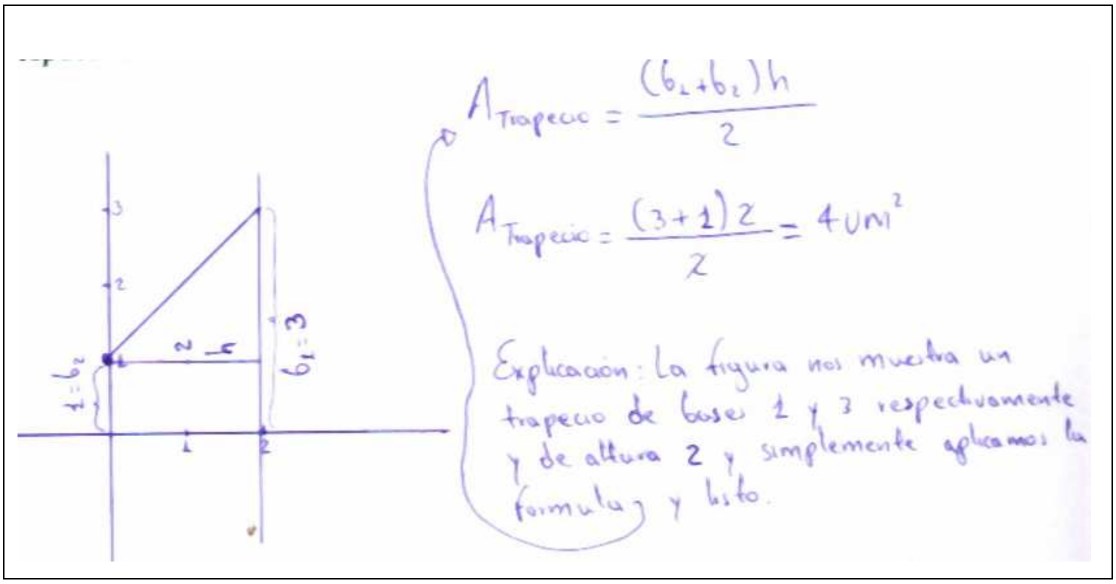
A11: Aquí, aplicaron lo que fue el teorema fundamental del cálculo que se aplica es para integrales definidas.
I: ¿Considera que aquí, se puede aplicar el teorema fundamental del cálculo?
A11: Muestre cuando esto valga de -1 a 1, estaría el problema.
I: ¿Cuál problema?
A11: El problema ahí, seria que en ese intervalo la función no es continua.
I: ¿Por qué no es continua?
A11: Porque ella cuando x valga cero presenta una discontinuidad infinita, o sea ahí no tiene el requisito para poder aplicar el teorema fundamental del cálculo.
I: ¿Cuál requisito?
A11: Que la función sea continúa en el intervalo $[a,b]$, y esta función es discontinua en una parte de este intervalo.
(A11E7C).

En este episodio se evidencia que este alumno justifica correctamente la tarea cuando dice que la función presenta una discontinuidad en una parte del intervalo y afirma que no cumple el requisito para poder aplicar la regla de Barrow aunque sí es integrable.

Asimismo este alumno **usa diferentes relaciones lógicas entre elementos matemáticos de forma correcta salvo alguna excepción (generalmente en el mismo sistema de representación).** Por ejemplo, en la tarea 4.

Calcular el área limitada por la gráfica de la función $f(x)=\lvert 2x-1\rvert$, en el intervalo $[0,2]$ y el eje x. Justificar la respuesta.

El alumno hace una representación **G** de la función de forma incorrecta.



A11, resolución G y A de la tarea 4 del cuestionario

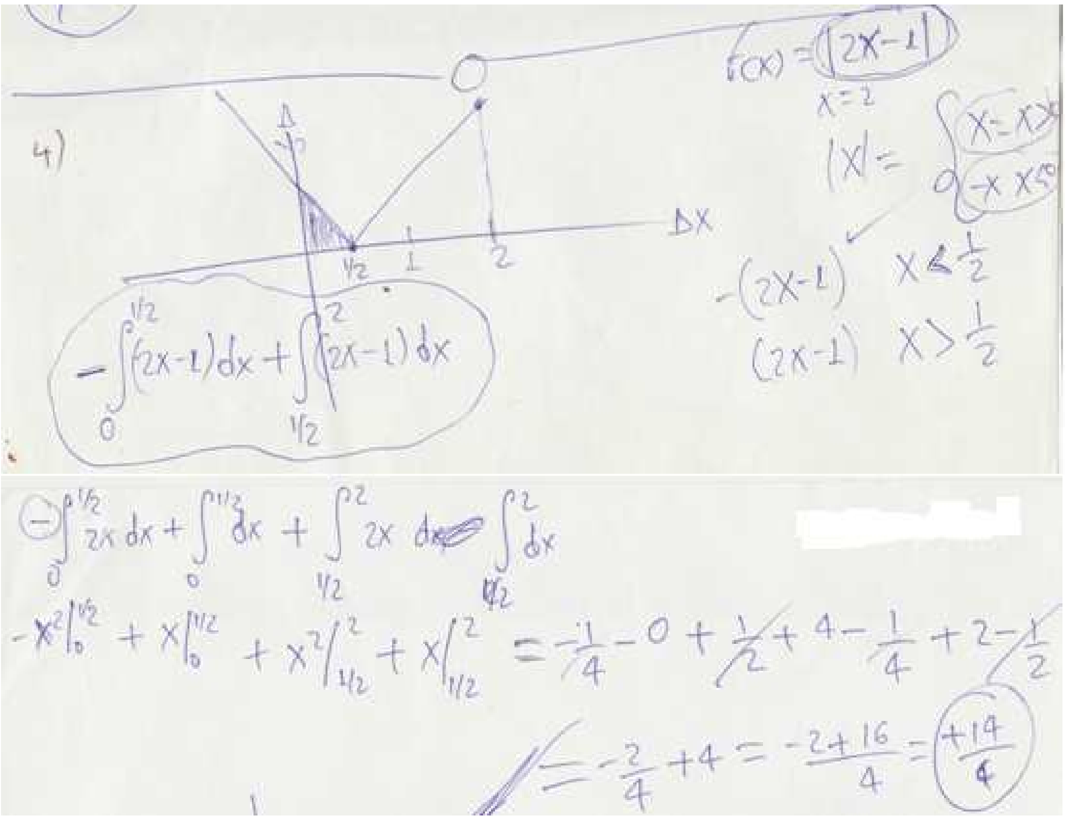
Como la gráfica de la función que obtiene forma un trapecio con el eje x, utiliza la fórmula del área de esta figura geométrica para obtener el área solicitada.

Durante la entrevista reconoce que representó la función de forma incorrecta

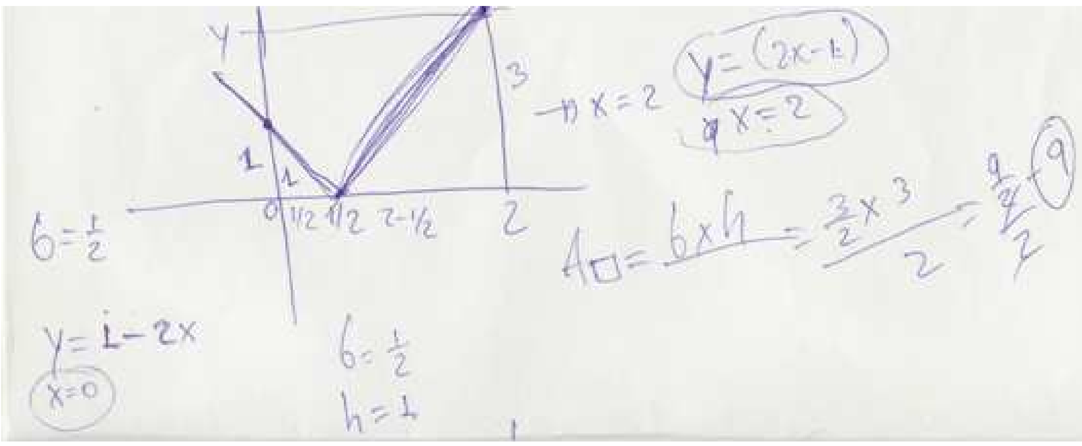
I: ¿Puede explicarme como ha resuelto la tarea?
A11: En este ejercicio tuve muchos problemas, porque primero a la hora de graficar, la gráfica me quedó mal hecha.
I: ¿Por qué?
A11: Porque, resulta que me piden la gráfica del $|2x-1|$*, entonces un bosquejo de la gráfica seria como una* V *,* (grafica en una hoja).
(A11E4).

A partir de la representación **G** el alumno calcula el área relacionando los aspectos G con los **A**, tal como se muestra en los procedimientos que se muestran a continuación:

Procedimiento 1.



Procedimiento 2.



A11, resolución G y A de la tarea 4 durante la entrevista

Responde a la tarea de dos formas distintas. En el procedimiento 1, coordina la representación gráfica con el cálculo de la Integral Definida aplicando los conocimientos que tiene de la función valor absoluto de $|x|$ y plantea la suma de dos integrales definidas utilizando correctamente la propiedad de la unión de intervalos. Para calcular las integrales utiliza el elemento matemático **TFV**, concretamente la regla de Barrow; no obstante realiza un cálculo incorrecto.

A11: Como el intervalo es de 0 a 2, entonces el área seria la que está formada entre 0 y $\frac{1}{2}$, hasta 2, para resolver esa área, primero que todo aplico la definición de valor absoluto que como sabemos es positiva, el valor absoluto de x es igual a x, si x es mayor que cero y menos x, si x, es menor que cero, así, mismo aplico la definición en $2x-1$ para concluir que $2x-1$, es menor para todos los x menores que $\frac{1}{2}$ y $2x-1$ es mayor para los x mayores que $\frac{1}{2}$, por lo cual planteo integrales, aplicando la propiedad que se llama aditiva con respeto al intervalo.
A11: Las dos integrales serian, la integral de cero a un medio.
I: ¿Por qué utiliza dos integrales?
A11: Porque, la función está definida en dos intervalos, uno cuando sea menos $2x+1$ que es en el intervalo cuando los x sean menores que $\frac{1}{2}$ y está definida como $2x-1$ para los x mayores que $\frac{1}{2}$.
I: ¿Podría continuarlo?
A11: Si, las dos integrales que plantearía serian de cero a un medio, pero estoy diciendo que ella es negativa, por lo cual le pongo el menos a la integral y me queda la integral de $2x-1\ dx$ más el $\frac{1}{2}$ a 2 de quien, de $2x-1\ dx$ y eso lo hago por la propiedad aditiva de intervalos, y sería resolver estas dos integrales, para resolverlas aplico lo que llaman el segundo teorema fundamental del cálculo, entonces simplemente sería resolverlas, esto sería $\frac{14}{4}$ el área (narra y hace cálculos).
(A11E4).

En el procedimiento 2, también a partir de la gráfica correspondiente, calcula el área de forma geométrica identificando dos triángulos rectángulos para los que determina la base y la altura pero comete algunos errores en el cálculo numérico y obtiene una respuesta incorrecta que no se corresponde con el área solicitada y tampoco con el resultado que obtuvo al calcular el área utilizando la integral.

A11: Entonces, se me forma aquí en el intervalo de $\frac{1}{2}$ *a* 2*, un triángulo rectángulo de base 2 menos* $\frac{1}{2}$ *y de altura tenemos 3 (grafica).*
I: ¿Cómo obtiene la altura?
A11: La altura, tocaría trazar la recta $x = 2$ *, y hacer el procedimiento anterior para resolver el sistema de ecuaciones.*
I: ¿Cómo sería?
A11: … ya sé que la grafica es $2x-1$*, o sea, que tengo* $y=2x-1$ *y tengo la otra que es,* $x = 2$ *resolviendo encontraría el valor, como* x *vale* 2*, me quedaría* 2×2*, cuatro, menos uno, tres, lo que dice que "y" vale 3, y ya tengo la altura.*
I: ¿Cómo calcularía el área?
A11: El área, tengo la base que es 2 por la altura que es 3 sobre 2, me quedaría $\frac{9}{2}$ *sobre 2, me quedaría igual a 9 (hace los cálculos).*
I: ¿Qué le faltaría?
A11: Me faltaría calcular el área en el intervalo de 0 *a* $\frac{1}{2}$.
I: ¿Qué figura se te forma, ahí?
A11: Se me forma otro triángulo.
I: ¿Podría calcular el área de ese triángulo?
A11: Si, tendría un triangulo de base $\frac{1}{2}$ *y altura* 1*, entonces es* 1*, más el área del triángulo grande seria 9; 10, el valor del área.*
(A11E4).

Y él mismo se da cuenta de esos errores cuando comenta:

A11:… aquí se ve como muy diferentes.
I: ¿Por qué?
A11: Habría que mirar el planteamiento como resolví la integral, porque gráficamente me está dando el área 10, pero al hacer la integral me está dando 3 y pedazo o sea, que de pronto tuve un problema fue al resolver la integral.
I: ¿Qué puede concluir de los dos procedimientos anteriores, el geométrico y el que hace analítico a partir de la integral?
A11: Debe ser igual, debe ser exacto, aquí gráficamente se ve bien.
(A11E4).

Considera que aplicó de forma incorrecta el cálculo de la integral porque asegura que las dos formas de resolver la tarea, tanto gráfica usando figuras geométricas, como algebraica usando la Integral Definida, deben dar el mismo resultado.

En la tarea 7b.

Decidir si la afirmación es verdadera o falsa. En caso de ser falsa, explica por qué o mostrar un contraejemplo. 7b. Si f es continua en $[a\,,\,b]$, entonces f es integrable en $[a\,,\,b]$.

Es capaz de establecer correctamente el valor de verdad de la proposición considerada:

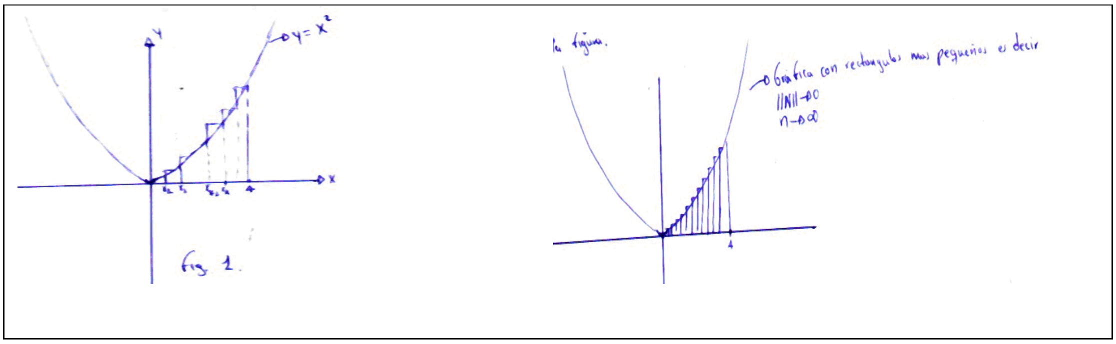
I: ¿Cómo justifica el valor de verdad de la proposición?
A11: Esto es que si f es continua en el intervalo $[a,b]$, entonces f es continua, lo tome como requisito, porque aquí lo que dice es el teorema de continuidad implica integrabilidad y es precisamente lo que dice la proposición que "si una función es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$, entonces f es integrable en $[a,b]$".
I: ¿Qué valor de verdad le da a la proposición 7b?
A11: Para mí es verdadera.
I: ¿Por qué verdadera?
A11: Porque, por definición si la función es continúa en un intervalo, eso garantiza que sea integrable en ese intervalo.
(A11E7b).

El alumno establece una condicional lógica con el elemento matemático **LID** de forma **AN** cuando considera la *condición suficiente de que la continuidad implica integrabilidad*.

Además este alumno muestra **tener síntesis de los sistemas de representación gráfico, algebraico y analítico,** por ejemplo, en la tarea 3:

Sea R la región entre la gráfica de la función $f(x)=x^2$ y el Intervalo [0,4] -Utiliza particiones para aproximar el valor del área de la región R. -Justifica tu respuesta.

Este alumno trata de rellenar el área por medio de rectángulos de forma **G**:



A11, representación G de la tarea 3 del cuestionario

Divide gráficamente el intervalo mediante una partición regular, por lo que está utilizando el elemento matemático **ACA** de forma **G**. En la figura de la izquierda traza 5 rectángulos superiores y en la figura de la derecha traza bastantes rectángulos superiores para aproximar el área, afirmando que "*la gráfica representa rectángulos más pequeños y la norma de la partición tiende a cero, entonces n tiende a infinito*" por lo que se podría deducir que tiene la intuición de indivisibles en relación con el área de la figura de la derecha. Luego resuelve la tarea de la siguiente forma:

Sea P una particion del intervalo $[0,4]$

$P = a = 0 < x_1 < x_2 \ldots < x_{k-1} < x_k \ldots < x_n = 6$ supongamos que P es particion regular y nos queda $\Delta x = \frac{4}{n}$ entonces

$x_0 = 0$
$x_1 = \frac{4}{n}$
$x_2 = 2\left(\frac{4}{n}\right)$
$\vdots$
$x_k = k\left(\frac{4}{n}\right)$

Sea $x_k = \varepsilon_k$ y ~~entonces~~ refinamos la particion es decir $\|N\| \to 0$ o sea $n \to \infty$ y nos queda

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\varepsilon_k)\,\Delta x = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{16k^2}{n^2}\right)\frac{4}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{64k^2}{n^3}$$

$$= \frac{64}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{64}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{128n^3 \ldots}{6n^3} = \frac{128}{6} = 21.3$$

A11, resolución A y AN de la tarea 3 del cuestionario

El alumno establece una relación entre la representación **G** y los sistemas de representación A y **AN** de los elementos matemáticos **ACA** y **ALS** porque, a partir de las graficas anteriores, calcula las sumas de Riemann y les aplica el límite para obtener el valor del área.

I: ¿Sabría comentarme cómo ha resuelto la tarea?
A11: Me piden que utilice particiones, entiendo por partición como coger un intervalo y dividirlo en un conjunto de $n-1$ *puntos, donde esos puntos van a ser mayores que el extremo izquierdo, pero menores que el extremo derecho del intervalo, entonces lo que hice fue suponer que los puntos van a ser* x_1 *,* x_2 *y que todos estos valores eran mayores que "a" , que era en este caso cero, que era el extremo izquierdo del intervalo y que todos esos puntos eran menores que "b", eso es lo que entendía como particionar, por comodidad tuve en cuenta que iba a particionar esto con una cosa que se llama la partición regular, que es que la longitud de cada intervalo sea la misma. Después de eso lo que hice fue aplicar la definición de integral definida y la suma de Riemann.*
I: ¿Qué es una suma de Riemann?
A11: La suma de Riemann, se define o entiendo que es particionar y sumar las áreas que se forman en unos rectangulitos al tomar todas esas áreas, eso es una suma de Riemann y el límite es cuando hago que esa longitud de cada intervalo sea cada vez más pequeña y tienda a cero, es lo que llamamos integral definida, eso fue lo que hice.
(A11C3).

A partir del esquema general de aproximación utiliza las sumas de Riemann y les aplica el límite para luego establecer conexión con el elemento matemático la **LID**.

A11: Lo que hice aquí fue aplicar la definición matemáticamente de la integral definida, que se define como el límite de una suma de Riemann, ahí lo escribí y cogía la función y tomaba un ε_k *cualquiera, quien era ese* ε_k*, era cualquier punto que estaba en cualquier intervalo, en cualquier parte del intervalo lo que hacía era coger ese punto que lo llame* ε_k *y lo evalué en la función y lo multiplique por la altura, de cada rectángulo, que en ese caso lo llame* Δ_x *y al hacer esa suma obtuve el valor de la integral.*
I: ¿Qué valor obtuvo?
A11: Acá obtuve 21, 3, me dio positivo.
I: ¿Qué puede concluir de los valores obtenidos?
A11: Tendría que plantear la integral y resolverla.
(A11E3).

Este alumno establece relación entre los elementos matemáticos **ACA** y **LID** porque menciona el concepto de área como una aproximación y el concepto de área como una Integral Definida.

Además en la tarea 8.

¿Cuál es el significado matemático de la Integral Definida de la función $y=f(x)$ en un intervalo $[a,b]$?

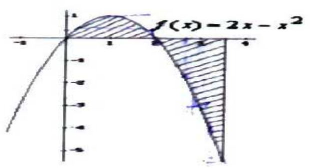
Este alumno durante la entrevista refleja la comprensión que tiene sobre la construcción del concepto de Integral Definida:

I: ¿Cómo le explicaría a un compañero el significado de la $\int_a^b f(x)\,dx$*?*
A11:...iniciaría primero con un poco de historia, entonces les hablaría del problema de calcular el área de una curva y que eso se le atribuye a Arquímedes que fue el primero que lo planteó a través del método exhaustivo, luego lo ubicaría en el contexto, que cuando vamos hablar de eso es resolver área entre curvas y que de ahí salió la integral y después de eso empezaría ya lo que es manejar en el plano, entonces tomaría una curva cualquiera y empezaría hacer aproximaciones con los rectangulitos de área cada vez más pequeña, hasta que él entienda ese procedimiento y lleguemos a lo que llamamos suma de Riemann y después le entraría ya con la definición de límite para aplicárselo a esas sumas, teniendo en cuenta que el maneja limites porque si le voy hablar de límites y el no maneja limites, entonces nunca me va a entender, empezaría por ahí para qué me sirve, empezaría con la parte clave que sería entender el área como aproximación a través de rectángulos cada vez más pequeños, calculando las sumas Riemann y luego calculando el límite de esas sumas de Riemann que es lo que se llama la integral definida.
I: ¿Qué quiere mostrarle con el área a partir de rectángulos?
A11: Lo que le quería mostrar a él, es que puedo aproximar esta área no como lo harían ellos que sería lo que hacemos todos, que es formando las figuras geométricas, si no que puedo dar es un valor más aproximado de gráficas que no tienen una forma definida.
I: ¿Partiría de aproximaciones?
A11: De aproximaciones hasta entender este procedimiento, si él me entiende este procedimiento ya iría a la parte del cálculo, más de los límites, haría primero esto para que me entienda que ya con el límite obtengo el valor del área.
(A11E8).

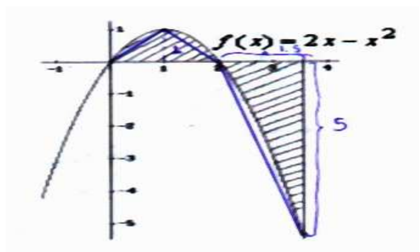
En este extracto de entrevista se pone de manifiesto que el alumno además de mencionar varios elementos matemáticos establece una síntesis entre los sistemas de representación **G**, **A** y **AN**, porque ha demostrado que además de recordar estos elementos los ha utilizado de forma correcta en la resolución de otras tareas.

Además logra **recordar los elementos matemáticos necesarios en la resolución de la tarea, usando los significados implícitos para tomar decisiones.** Por ejemplo en la tarea 5.

Dada la gráfica de $f(x)=2x-x^2$, calcular por aproximaciones el área de la región rayada. Justificar el procedimiento utilizado

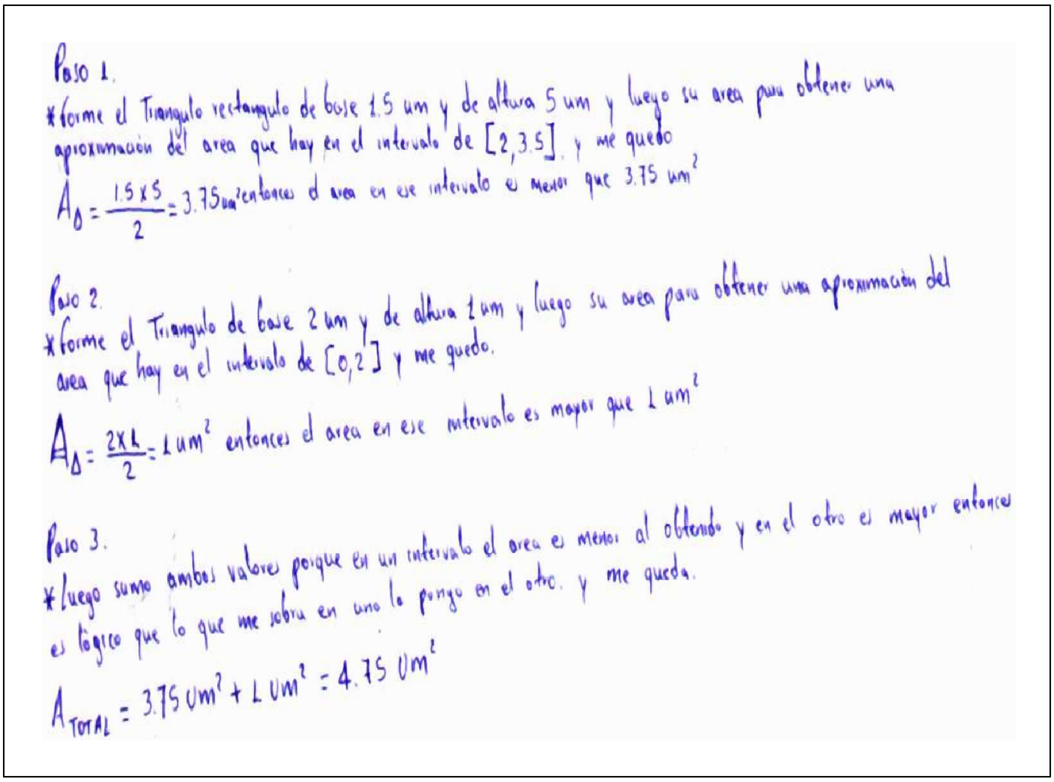


Para obtener una aproximación del área, recurre al elemento matemático **ACA** de forma **G** utilizando un triángulo para aproximar el área que esta sobre el eje x por defecto, y otro triángulo para aproximar el área que está bajo el eje x por exceso.



A11, representación G de la tarea 5 del cuestionario

A continuación, mediante un procedimiento **A** obtiene una aproximación del área:



Paso 1.
*forme el Triangulo rectangulo de base 1.5 um y de altura 5 um y luego su area para obtener una aproximacion del area que hay en el intervalo de [2,3.5] y me quedo
$A_\Delta = \frac{1.5 \times 5}{2} = 3.75 um^2$ entonces el area en ese intervalo es menor que $3.75\ um^2$

Paso 2.
*forme el Triangulo de base 2 um y de altura 1 um y luego su area para obtener una aproximacion del area que hay en el intervalo de [0,2] y me quedo.
$A_\Delta = \frac{2 \times 1}{2} = 1\ um^2$ entonces el area en ese intervalo es mayor que $1\ um^2$

Paso 3.
*luego sumo ambos valores porque en un intervalo el area es menor al obtenido y en el otro es mayor entonces es lógico que lo que me sobra en uno lo pongo en el otro. y me queda.
$A_{TOTAL} = 3.75\ Um^2 + 1\ Um^2 = 4.75\ Um^2$

A11, resolución A de la tarea 5 del cuestionario

Recurre al elemento matemático **ACA** y, a partir de la representación **G,** hace una aproximación por defecto y otra por exceso con triángulos, aplica la fórmula del área del triángulo, obtiene para la parte de la gráfica que se encuentra sobre el eje un valor aproximado de 3,75 unidades cuadradas y la que se encuentra bajo el eje un valor aproximado de 1 unidad cuadrada, suma los valores de las áreas aproximantes y obtiene el valor total aproximado del área de 4,75 unidades cuadradas; aunque en una parte de la curva utiliza subestimaciones y en la otra sobreestimaciones el valor aproximado resultante es muy aproximado al valor real del área de 4,70 unidades cuadradas.

I: ¿Cómo calculó las áreas de los triángulos que están por encima del eje OX y por debajo el eje OX?
A11: Lo que hice fue la altura., se ve por escala que daba en 1.
I: ¿Y del que está bajo el eje OX?
A11: La altura muestre a ver, la forma correcta seria lo que siempre he hecho.
A11: Plantear el sistema de ecuaciones y la recta y, igual tengo la recta x, muestre a ver cómo me quedaría, necesito hallar esta altura, entonces me quedaría para hallar ésta altura, 5, cómo hago para hallar éste punto.
I: ¿Cuánto tiene de base?

A11: No, la base la tomé como si fuera escala y dije que era 1,5.
I:¿Tiene formadas las figuras por encima y bajo el eje OX, a qué valor aproximado llegó?
A11: Acá me quedaba que era 5, me quedaba el valor aproximado que es 3 punto y pedazo el área aproximada de esto.
I: ¿Qué tiene por la parte de encima?
A11: Me dio una unidad.
I: ¿Y cuánto obtuvo en total?
A11: Cuatro y pedazo de área.
I: ¿Está de acuerdo con ese valor aproximado o lo podría ajustar más?
A11: Como lo que pide el ejercicio es aproximar, estaría de acuerdo.
(A11E5)

Cuando se le pregunta al alumno qué otras aproximaciones podría realizar señala:

I: ¿De qué manera calcularía el área de ésta región sombreada?
A11: Si me piden calcular el área, entonces lo que haría aplicando la definición y planteando dos integrales y la primera de 0 a 2, de la función $2x-x^2\,dx$ *y la segunda de 2 a 3,5, de la función* $2x-x^2\,dx$.
(A11E5).

Menciona el elemento matemático **LID** para calcular el área de una región planteándola como suma de dos integrales a partir de la propiedad de la unión de intervalos.

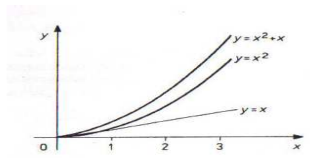
Además este alumno usa la **condicional lógica** tal como se muestra en el protocolo siguiente:

I: ¿De qué manera calcularía el área de ésta región sombreada?
A11: Si me piden calcular el área, entonces lo que haría aplicando la definición y planteando una integral, mejor dicho dos integrales y la primera seria una integral de de 0 a 2, de la función $2x-x^2\,dx$ *y la segunda sería otra integral, bueno acá se supone que la otra integral seria de 2 a 3,5,de la misma función* $2x-x^2\,dx$ *teniendo en cuenta que ésta región me va a dar negativa, porque está debajo del eje* x*; entonces para considerarla como área la debo escribir en valor absoluto o cambiarle el signo para que sea positiva.*
(A11E5)

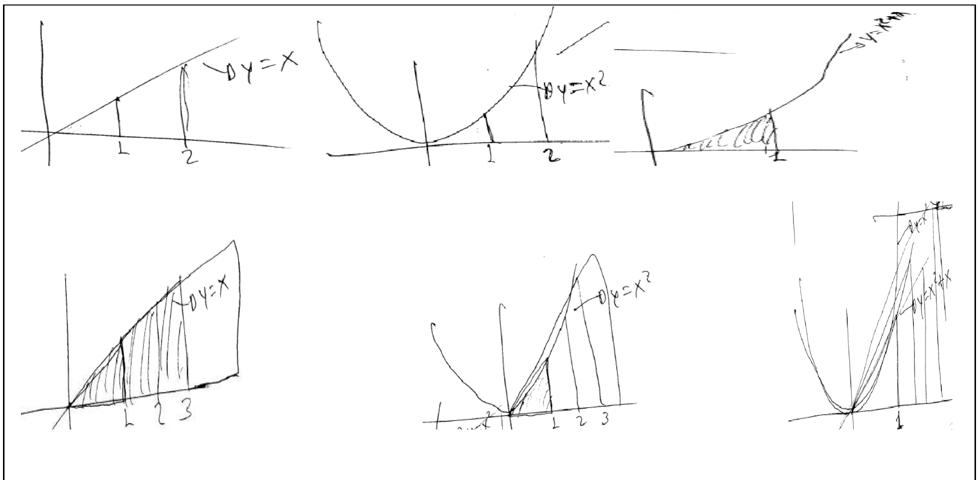
En este extracto de la entrevista, el alumno pone de manifiesto que establece la condicional a través de las propiedades de las funciones positivas y negativas entre el elemento matemático **PID** de forma **G** y **A**, cuando afirma que “*teniendo en cuenta que* *ésta región me va a dar negativa, porque está debajo del eje x; entonces para considerarla como área la debo escribir en valor absoluto o cambiarle el signo para que sea positiva”.*

En la tarea 6.

Explique, en términos del gráfico, porqué $\int_0^a (x^2+x)dx = \int_0^a x^2dx + \int_0^a xdx$



Aunque este alumno, en el cuestionario, no fue capaz de responder la tarea, durante la entrevista lo intenta haciendo una representación **G**:



A11, representación G de la tarea 6 durante la entrevista

Para ello, representa gráficamente cada una de las funciones lo que le permite hacerse una idea de la propiedad que plantea la tarea relacionando cada integral con el cálculo de un área.

A11:, Entonces $y = x$, y acá teníamos la parábola $y = x^2$ seria como inclinada, geométricamente lo que entiendo es que esta área tienen que ser igual a ésta otra, porque lo que me pedían era que demostrara gráficamente.
(A11E6).

Luego se centra en el intervalo de 1 a 3 y, bajo la gráfica de la función lineal y la cuadrática forma un triángulo que aproxime el área determinada por cada una de esas funciones. Finalmente, en la última gráfica de la derecha lo que hace es agregar el área que representa da cada una de las funciones.

A1:… tengo $y = x$ *, en un intervalo cualquiera, en este caso 1, 2, 3 y tengo la otra grafica* $y = x^2$ *en el mismo intervalo 1, 2, 3, entonces me dicen que el área en este mismo intervalo para estas dos curvas va a ser igual al área de esta* $y = x^2 + x$*, pero lo que entiendo es que esa área es igual al área formada por la curva grande en ese mismo intervalo,* (gráfica por separado cada función).
I: Si, eso es lo que tiene que demostrar.
A11: Seria como trazar sobre esta grande, trazar $y = x$ *, y sobre esa sobreponer este triángulo, vamos a suponer que va por acá, así lo sobrepongo, y lo mismo haría con este, trazaría sobre esta grafica* $y = x^2$*, sobrepongo este otro triángulo, esta parábola va como más parada, entonces el triángulo representativo a ésta sería así, sería como sobreponer los triángulos de cada gráfica sobre la parábola grande y como el triángulo de la parábola* $x^2 + x$ *es mayor, es la suma de esos dos,*(grafica lo que va diciendo).
(A11E6).

Se aprecia que utiliza particiones y construye triángulos para aproximar el área por medio de comparaciones geométricas.

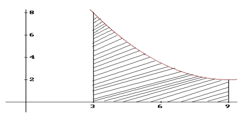
Cuándo se le pregunta si puede utilizar otros procedimientos diferentes para demostrar la igualdad de la propiedad pone de manifiesto el uso del elemento matemático **LID** de forma **G** como área de una región, porque afirma que si calcula el área que representa cada integral por separado en el mismo intervalo y las suma, va a obtener el mismo valor que si calcula la integral de la izquierda.

A11: Seria como calcular el área, lo que haría ahí, seria calcular el área en cualquier intervalo, por decir de cero a uno, o de cero a dos de la función $y = x$ *, por medio de la integral definida y calculo el área por medio de la integral definida de la función* $y = x^2$*, sumo esas dos áreas y me debe dar el área al calcular la integral de* $y = x^2 + x$ *en ese mismo intervalo, y eso me debe dar lo mismo.*
(A11E6).

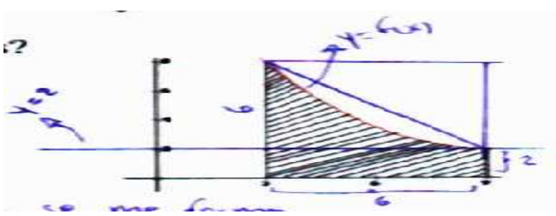
Como puede notarse en este apartado, el alumno recuerda los elementos matemáticos **ACA** y **LID** de forma **G**, sin hacer uso del registro **A.**

En la resolución de la tarea 1:

El área de la región rayada es mayor que **12** y menor que **48**.
a. ¿Por qué?
b. ¿Puede dar valores más ajustados?
c. ¿Cuáles?
d. ¿Cómo los obtiene?

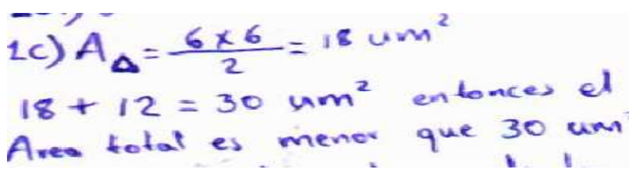


Trata de obtener una aproximación de forma **G**:



A11, representación G de la tarea 1 del cuestionario

Para justificar la cota inferior, traza sobre la base de la gráfica un rectángulo de área 12 unidades cuadradas menor que el área sombreada y sobre este rectángulo construye un triángulo de área igual a 18 unidades cuadradas que suma con el resultado anterior y obtiene una aproximación por exceso de 30 unidades cuadradas que es menor que las 48 unidades cuadradas que aparecen en el enunciado de la tarea.

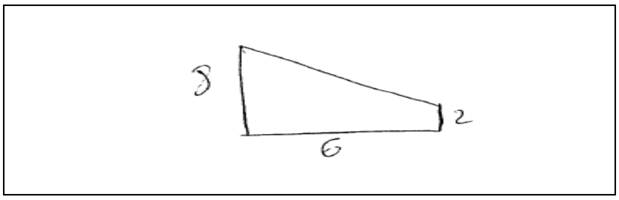


A11, resolución A de la tarea 1 del cuestionario

En la resolución **G** el alumno indica que la gráfica bajo la curva corresponde a una función $y = f(x)$ y establece una relación entre el razonamiento gráfico y el algebraico cuando utiliza el elemento matemático **ACA** y a partir del gráfico aplica las fórmulas del área del rectángulo y del triángulo para aproximar el área por exceso.

I: ¿Podría explicarme como obtuvo esta respuesta?
A11: … lo primero que se me vino a la mente fue formar el rectángulo de base 6 *y de altura* 2*, el cual me daba 12, después se me estaba formando un triángulo rectángulo de base igual a* 6*, de altura* 6 *y de área 18, lo que hice fue sumar esas dos áreas y me dio 30.*
(A11E1).

Además, durante la entrevista hace una nueva representación gráfica para explicar cómo resolvió la tarea:



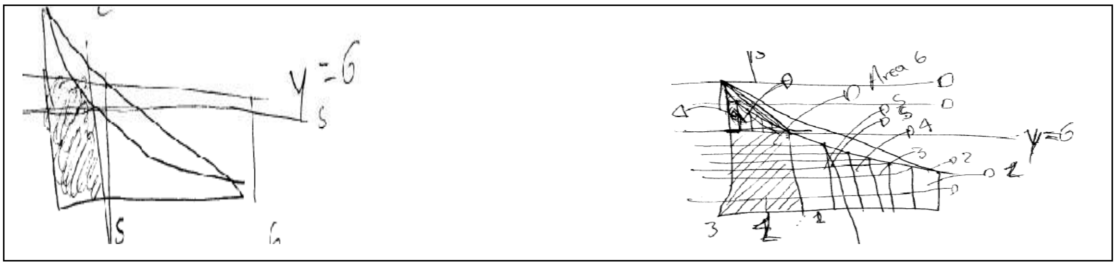
A11, representación G de la tarea 1 durante la entrevista

Este alumno continua aplicando el elemento matemático **ACA** de forma **G** y recurre a la representación del trapecio para recubrir el área sombreada para el que luego calcula su área.

A11, resolución A de la tarea 1 durante la entrevista

A11: Viéndolo acá, pensaría que básicamente sería lo mismo que en el trapecio.
I: ¿Cómo sería con el trapecio, podría explicarlo?
A11: Si, porque el área de un trapecio simplemente es igual a la semisuma de las bases en éste caso $8+2$*, por la altura que es* 6 *y dividido sobre* 2*,* 30 *que sería la fórmula:* $\frac{(8+2)\times 6}{2} = 30$*, aquí obtengo la misma respuesta que me dio formando el área del triángulo y del rectángulo.*
(A11E1).

Además realiza otras dos gráficas para obtener otras aproximaciones en las que intenta recubrir el área mediante rectángulos. Para ello realiza una partición dividiendo el intervalo [3,9] en subintervalos de longitud una unidad y construye rectángulos en cada uno de ellos aproximando el área.



A11, resolución G de la tarea 1 durante la entrevista

Para calcular la altura de cada rectángulo realiza proyecciones gráficas sobre el eje *y* de los valores de la función, toma un valor de esas proyecciones correspondiente a x=4 y luego va disminuyendo el valor de cada altura en una unidad; es decir que el primer rectángulo tendría un altura de 6 unidades, el siguiente 5 y así sucesivamente hasta completar los 6 rectángulos.

En el episodio siguiente el alumno refleja lo mismo que hizo en la representación **G**:

A11: Entonces, lo que haría es disminuir la recta $y=6$, *la empiezo a disminuir, valores más pequeños* $y=5$; $y=4$.
I: ¿Cómo seria, indique cada paso?
A11: Ya tomé la recta $y=6$, *ahora voy a tomar la recta* $y=5$ *y lo que hago es mover la recta* x, *igual que en éste caso la tomé como* $x = 4$, *luego un poco más,* $x=5$ *y calculo el área de ese rectángulo.*
I: ¿Podría subrayar el área en la gráfica?
A11: Espere lo hago aquí bien bonito, porque es que como se supone que la curva viene así, entonces lo que digo, es que cada vez que bajo esta recta estoy formando este triangulito, voy dando exactamente un área más aproximada de la curva (grafica).
I: ¿Cómo seria, cuántos rectángulos trazaría?
A11: Construiría unos 7 rectángulos, para sacar un área más o menos aproximada.
I: ¿Cómo calcularía el área de cada uno de los rectángulos?
A11: Tengo la base que vale 1, tengo la altura $y=6$, *entonces un rectángulo va a ser igual a* 6 *que sería el primero.*

I: Saque los valores.

A11: …para el segundo lo que hago es que la recta $y = 6$*, la bajo una unidad, y tendría de altura 5 y la base lo que hago es correr la recta* $x = 4$ *, la corro hasta 5, y tengo la base igual a 1, entonces tengo una área de 5* (escribe valores en la gráfica).

I: ¿Cómo sería con el siguiente?

A11: Repito el proceso hasta llegar más o menos al área, hasta el intervalo, hasta la recta $x = 9$.

I: ¿Cuánto daría el área aproximada de esos rectángulos?

A11: Aquí, seria 5, aquí me daría 4, el otro seria 4, para éste se supone que debería ser 3, porque acá va bajando, va a llegar a un punto en que y vale 2 y vale 1, el área de eso seria, 6; 11; 15; 18; 20, 21, así aproximada 21 y me faltaría calcular el área, que se está formando entre la curva y la recta $y = 6$ *y la curva en la parte superior.*

I: ¿Qué le falta?

A11: Me faltaría calcular el área formada por la recta $y = 6$ *y la curva* $y = 8$.

I: ¿Cómo la calcularía?

A11: Para mí, sería prácticamente repetir el procedimiento, e ir corriendo la "y" lo mismo, simplemente lo que hago es bajar la "y" en ese intervalo de 2, lo empiezo a bajar y a formar triangulitos, rectangulitos y tomar esas áreas que me van quedando en ese pedacito.

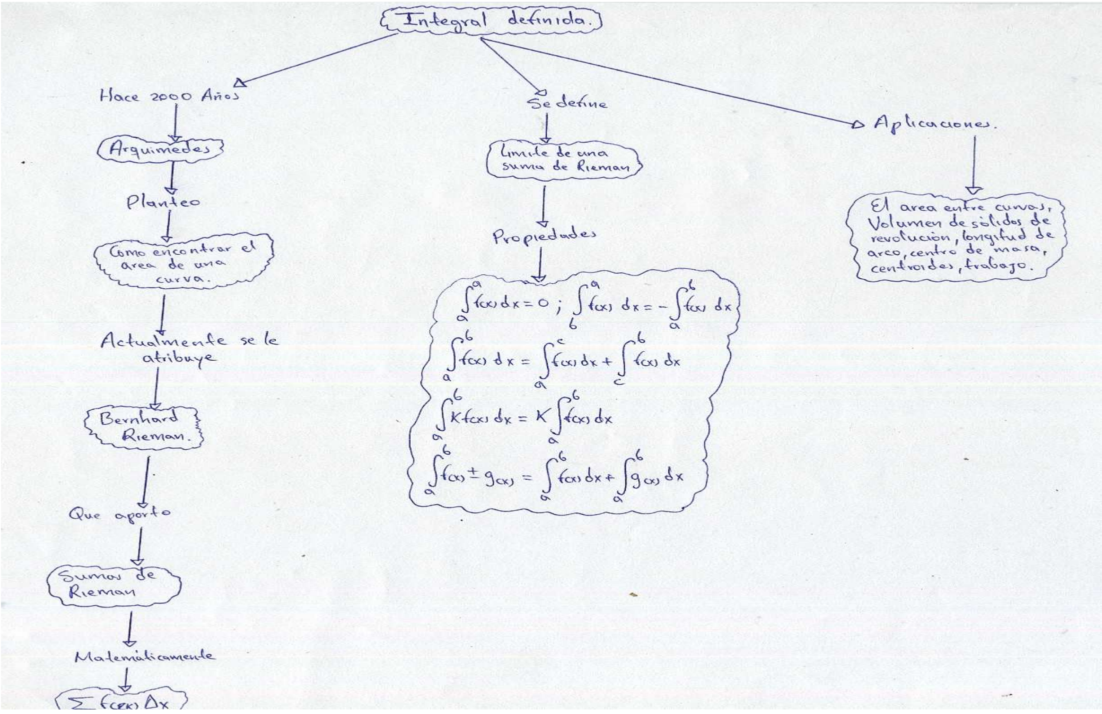
I: ¿Cuánto le agregaría a ese 21 y cuál sería el total?

A11: Entonces, el área total seria igual a 21 unidades cuadradas, más 5 unidades cuadradas seria 26 unidades cuadradas.

(A11E1).

En este extracto de entrevista este alumno explica verbalmente el procedimiento que realizó utilizando el elemento matemático **ACA** de forma **G,** haciendo construcciones y comparaciones geométricas.

Además, este alumno, en el mapa conceptual, menciona el elemento matemático **ACA** haciendo referencia a la evolución histórica del concepto y las sumas de Riemann. Por otro lado, menciona el límite de las sumas Riemann **ALS** que relaciona de forma analítica con **LID** y completa haciendo referencia a las **PID** como son el cálculo de integrales especiales, la propiedad de la linealidad, la de la unión de intervalos, la de una suma de integrales y el cálculo de la integral de una constante. No aparece explícito en el mapa el elemento matemático **TFV** aunque sí lo ha utilizado en la resolución de las tareas; y menciona las aplicaciones de la Integral Definida haciendo referencia no sólo al cálculo de áreas sino de volúmenes de sólidos de revolución, cálculo de longitudes de arco.



A11, mapa conceptual que representa el concepto de Integral Definida

En general, observamos que este alumno utiliza las relaciones lógicas de conjunción, condicional y la del contrario de la condicional entre los elementos matemáticos **ACA**, **ALS**, **LID**, **PID** y **TFV** generalmente en el sistema de representación **G** y entre los diferentes sistemas de representación. Además de las relaciones establecidas y de los elementos matemáticos mencionados, no se aprecian concepciones erróneas en el desarrollo de las tareas.

Por la forma como el alumno resolvió las distintas tareas a lo largo de todo el cuestionario, por la manera como fueron justificadas esas respuestas a través de la entrevista y por la forma como estructura en el mapa conceptual el concepto de Integral Definida, consideramos que se encuentra en el nivel **trans** de desarrollo del esquema del concepto de Integral Definida.

La tabla siguiente representa las relaciones lógicas, los elementos matemáticos y los sistemas de representación utilizados por el alumno en el nivel **inter** como en el **trans** de desarrollo del esquema**.**

<table>
<tr><th>NIVEL</th><th>CARACTERÍSTICAS</th><th>ELEMENTOS MATEMÁTICOS</th><th>SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN</th></tr>
<tr><td>INTER</td><td>Usar diferentes relaciones lógicas entre elementos matemáticos de forma correcta salvo alguna excepción (generalmente en el mismo sistema de representación).</td><td>El área como aproximación: (G, A)
-Aproximación del área de una región plana.
-Fórmula del área del rectángulo.
-Fórmula del área del triángulo
-Fórmula del área del trapecio.
-Partición del intervalo.
-Sumas de Riemann.
El área como límite de una suma: (AN)
-Límite de las sumas.
La integral definida: (A)
-La integral definida como área de una región.
- La integral definida como cálculo algebraico
-Definición analítica de integral definida.
-Condición suficiente: continuidad implica integrabilidad.
Las propiedades de la integral definida: (A)
-Unión de intervalos.
-Integrales especiales.
Los teorema fundamental (G, A):
-Regla de Barrow.</td><td>Gráfico
Algebraico
Analítico</td></tr>
<tr><td>TRANS</td><td>Usar diferentes relaciones lógicas (conjunción lógica, condicional y la contraria de la condicional) entre los elementos matemáticos de forma correcta.
Conjunción lógica $(A \wedge B)$
Condicional $(A \rightarrow B)$
Contraria de la condicional $(\neg A \rightarrow \neg B)$
Recordar los elementos matemáticos necesarios en la resolución de la tarea, usando los significados implícitos para tomar decisiones.
Tener síntesis en los sistemas de representación gráfico, algebraico y analítico.</td><td>El área como aproximación: (G, A)
-Aproximación del área de una región plana.
-Fórmula del área del rectángulo.
-Fórmula del área del triángulo
-Partición del intervalo.
-Sumas de Riemann.
El área como límite de una suma: (AN)
-El límite de las sumas.
La integral definida: (A)
-La definición analítica de integral definida.
-La integral definida como área de una región.
-La integral definida como cálculo algebraico.
-Condición suficiente: continuidad implica integrabilidad.
-Discontinuidad en alguna parte del intervalo: Integral impropia.
Las propiedades de la integral definida: (A)
-Funciones positivas y negativas.
Los teoremas fundamentales (G, A):
-Regla de Barrow.</td><td>Gráfico
Algebraico
Analítico</td></tr>
</table>

Tabla 4.11. Relaciones lógicas, elementos matemáticos y sistemas de representación que caracterizan los niveles de desarrollo del esquema de integral definida en A11.

En el análisis global tanto del cuestionario como de la entrevista constatamos que hay alumnos que presentan un nivel muy básico que hemos denominado **INTRA 1** y que se caracteriza porque no utilizan ninguna relación lógica entre los elementos matemáticos, mencionan esos elementos matemáticos de memoria producto de la instrucción previa pero no son capaces de utilizarlos en la resolución de las tareas, además son capaces de recordar sólo algún elemento matemático a lo largo de todo el cuestionario vinculado sólo a un sistema de representación gráfico, algebraico o analítico, y muestran concepciones erróneas de algunos elementos matemáticos y cuando tratan de establecer un intento de relación lógica entre estos elementos matemáticos asociados a uno o más sistemas de representación generalmente **G** y/o **A** lo hacen de manera inconexa y no son capaces de resolver las tareas. En este nivel de desarrollo del esquema del concepto de Integral Definida encontramos uno de los alumnos que forma parte de este estudio.

Otros alumnos, por la forma cómo resolvieron algunas tareas, se ubican en un nivel **INTRA** más avanzado**.** La diferencia con el subnivel anterior es que estos alumnos suelen mostrar dificultades en establecer relaciones lógicas (conjunción lógica) entre elementos matemáticos, recuerdan algunos elementos matemáticos de forma aislada, y no tienen sintetizados los sistemas de representación. A este nivel de desarrollo del esquema pertenecen tres de los alumnos que participaron en esta investigación**.**

El nivel **INTER 1** está formado por el grupo mayoritario de alumnos de este estudio. Los aspectos que permiten caracterizar este nivel son que estos alumnos usan la conjunción lógica de forma correcta entre elementos matemáticos dados en el mismo sistema de representación, recuerdan algunos elementos matemáticos gráficos, algebraicos y/o analíticos, y muestran tener esbozo de síntesis de los sistemas de representación generalmente gráfico y algebraico.

Otros alumnos, sin embargo, muestran un nivel de desarrollo del esquema del concepto más avanzado, el nivel **INTER,** consideramos que sus razonamientos no corresponden a características propias de nivel **TRANS**, pero suelen usar diferentes relaciones lógicas entre elementos matemáticos de forma correcta salvo alguna excepción (generalmente en el mismo sistema de representación), pueden recordar los elementos matemáticos necesarios en la resolución de la tarea en varios sistemas de representación (gráfico, algebraico y/o analítico), y muestran tener esbozo de síntesis de los sistemas de representación gráfico, algebraico y analítico. En este nivel encontramos sólo uno de los alumnos objeto de nuestro trabajo.

En cuanto al nivel **TRANS** del desarrollo del esquema del concepto de la Integral Definida, están los sujetos que pueden usar diferentes relaciones lógicas (conjunción lógica, condicional y la contraria de la condicional) entre los elementos matemáticos de forma correcta, además muestran tener síntesis en los sistemas de representación gráfico, algebraico y analítico. Este nivel de desarrollo del esquema sólo fue alcanzado por uno de los alumnos que forma parte de este estudio.

4.2. Desarrollo del esquema del concepto de Integral Definida

El análisis y los resultados mencionados en el apartado anterior, nos permitió caracterizar a cada alumno en un determinado nivel de desarrollo del esquema del concepto de Integral Definida por la forma cómo había resuelto todas las tareas a lo largo del cuestionario, por la manera de justificar los procedimientos de resolución durante la entrevista, y por la representación de dicho concepto matemático por medio de un mapa conceptual. El establecimiento de este nivel de desarrollo para cada alumno se hizo asignando el mayor de los subniveles que demostró utilizar en la resolución de las tareas. Esto se hizo a pesar de que para algunas situaciones mostrara un nivel de desarrollo inferior. De esta forma, se ha demostrado que el desarrollo del esquema del concepto de Integral Definida está ligado al de otros conceptos como el de función, límite, continuidad o derivabilidad. El dominio de estos otros esquemas, determina en gran medida el grado de adquisición del concepto de Integral Definida.

El proceso de análisis ha puesto de manifiesto que:

- Hay diferencias entre los alumnos que sólo recuerdan los elementos matemáticos de aquellos que, además de recordarlos, los saben utilizar lo que permite clasificarles en niveles de desarrollo.

- Los alumnos presentan un dominio de la Integral Definida que, dependiendo de la tarea y de los conocimientos previos, muestran características de diferentes niveles de desarrollo.

- Existen diferencias dentro de un mismo nivel por el número de elementos matemáticos que utilizan de forma correcta y el tipo de relaciones lógicas que son capaces de establecer para poder resolver las tareas.

- Hay una disparidad entre los alumnos que utilizan de forma errónea algunos elementos matemáticos, así por ejemplo, aquellos que no muestran concepciones erróneas en el nivel **INTRA**, son los que generalmente lograron llegar a un nivel **INTER** y/o **TRANS.**

- Sólo uno de los alumnos alcanzó el nivel **TRANS** de desarrollo del esquema, por la forma cómo utilizó los elementos matemáticos y las relaciones lógicas establecidas entre ellos.

- El manejo de los diferentes sistemas de representación determinan el tipo de relaciones lógicas que son capaces de establecer los alumnos, por ejemplo, es más frecuente encontrar el uso de la conjunción lógica entre elementos matemáticos representados generalmente sólo en los sistemas de representación **G** y **A**.

- Hay una tendencia a utilizar más los elementos matemáticos en modo **A**, sólo algunos lo hacen de forma **G** y casi ninguno maneja el registro **AN** y, es en este último sistema de representación, dónde la mayoría de los alumnos no es capaz de utilizarlo de manera correcta en la resolución de las tareas.

- Tanto en los niveles como en los subniveles de desarrollo del esquema del concepto de Integral Definida, los alumnos asignados a cada nivel en general, cuando manifiestan que recuerdan o utilizan algún elemento matemático, de manera aislada o mediante relaciones lógicas lo hacen desde los sistemas de representación **G** y **A** y existe en un alumno evidencia de tener síntesis en los registros de representación **G**, **A y AN**; aunque se aprecia en general mayor influencia de los elementos matemáticos en modo **G** y **A** en la resolución de algunas tareas.

Estos indicadores nos llevaron a establecer diferencias entre los alumnos de acuerdo con el desarrollo del esquema, el tipo de relaciones lógicas que establecieron y el número de elementos matemáticos que utilizaron en los sistemas de representación **G, A** y **AN** que manejaron, lo que nos lleva a señalar que cada nivel de desarrollo se puede considerar como un continuo que permiten caracterizar de forma progresiva el desarrollo del esquema del concepto de Integral Definida.

En la tabla siguiente, la primera columna indica los alumnos; los códigos 1, 2 y 3 ubicados en las celdas de la primera fila representan las tres características establecidas por niveles de forma ascendente, y la “X” señala la característica asignada a cada alumno.

ALUMNOS	INTRA 1			INTRA			INTER 1			INTER			TRANS		
	1	**2**	**3**	**1**	**2**	**3**	**1**	**2**	**3**	**1**	**2**	**3**	**1**	**2**	**3**
A1				**X**	**X**	**X**		**X**							
A2								**X**		**X**		**X**			
A3			**X**	**X**	**X**	**X**									
A4			**X**	**X**	**X**	**X**									
A5	**X**	**X**	**X**												
A6			**X**	**X**	**X**	**X**									
A7					**X**		**X**	**X**	**X**						
A8				**X**	**X**	**X**	**X**								
A9					**X**		**X**		**X**						
A10				**X**	**X**			**X**	**X**						
A11										**X**			**X**	**X**	**X**

Tabla 4.12. Alumnos y características según niveles de desarrollo del esquema de Integral Definida

Obsérvese cómo dentro de un mismo nivel de desarrollo del esquema, cada uno de los alumnos ha dado muestras de un determinado manejo de los elementos matemáticos y sus relaciones lógicas, es decir, según los instrumentos teóricos utilizados en la resolución de las diferentes tareas.

Según lo anterior, el desarrollo del esquema del concepto de Integral Definida se podría describir como aparece en la siguiente tabla:

NIVEL	CARACTERÍSTICAS	ELEMENTOS MATEMÁTICOS
INTRA 1	**1. No establecer relaciones lógicas entre los elementos matemáticos.**	**El área como aproximación (G, A):** - Aproximación del área de una región plana, - fórmula del área del rectángulo, - fórmula del área del triángulo, - partición del intervalo, - sumas de Riemann. **La Integral Definida (G, A):** - La Integral Definida como cálculo algebraico.
	2. Recordar sólo algún elemento matemático a lo largo de todo el cuestionario, vinculado sólo a un sistema de representación, gráfico, algebraico o analítico.	**El área como aproximación (G, A):** - Aproximación del área de una región plana, - fórmula del área del rectángulo, - partición del intervalo, - sumas de Riemann. **El área como límite de una suma (G, A, AN):** - Límite de las sumas. **La Integral Definida (G, A):** - La Integral Definida como área de una región, - la Integral Definida como cálculo algebraico, - la definición analítica de la Integral Definida, - condición suficiente: continuidad implica integralidad. **Propiedades de la Integral Definida (G, A):** - Propiedad especial.
	3. Recordar elementos matemáticos con errores.	**La Integral Definida (G, A):** - Utilizar de forma errónea la Integral Definida como área. **Propiedades de la Integral Definida (G, A):** - Aplicar de manera incorrecta las propiedades de las funciones positivas y negativas **Teorema fundamental (G, A):** - Regla de Barrow.
INTRA	**1. Mostrar dificultades en establecer relaciones lógicas (conjunción lógica) entre elementos matemáticos. (Intento de relación "conjunción lógica").**	**El área como aproximación (G, A, AN):** - Aproximación del área de una región plana, - fórmula del área del rectángulo, - fórmula del área del triángulo, - fórmula del área del cuadrado, - partición del intervalo, - sumas de Riemann. **El área como límite de una suma (G, A, AN):** - Límite de una suma Riemann. **La Integral Definida(G, A):** - La Integral Definida como área de una región. **Propiedades de la integral (G, A):** - Integrales especiales, - unión de intervalos, - linealidad. **Teoremas fundamentales y del valor medio (G, A):** - Regla de Barrow, - valor medio de una función.
	2. Recordar algunos elementos matemáticos de forma aislada.	**El área como límite de una suma (G, A, AN):** - Demostrar una concepción de suma de Riemann como un proceso límit - tener una concepción del límite como una aproximación, - definir un proceso límite como la Integral Definida. **La Integral Definida (G, A, AN):** - Utilizar la Integral Definida como aproximación del área, - afirmar que la continuidad **no** implica integrabilidad. **El teorema fundamental (G, A):** - Desconocer las condiciones necesarias para aplicar la regla de Barrow.
	3. No tener sintetizados los sistemas de representación.	**El área como aproximación (G, A):** - Aproximación del área de una región plana, - fórmula del área del triángulo. **La Integral Definida (G, A, AN):** - La Integral Definida como área de una región, - la definición analítica de la Integral Definida, - condición suficiente: continuidad implica integralidad. **El teorema fundamental (G, A):** - La regla de Barrow.

NIVEL	CARACTERÍSTICAS	ELEMENTOS MATEMÁTICOS
INTER 1	**1. Usar la conjunción lógica ("y lógica") de forma correcta entre elementos matemáticos dados en el mismo sistema de representación.**	**El área como aproximación (G, A, AN):** - Aproximación del área de una región plana, - fórmula del área del rectángulo, triángulo y trapecio,. - partición del intervalo, - sumas de Riemann. **El área como límite de una suma (G, A, AN):** - Límite de las sumas. **La Integral Definida (G, A, AN):** - La Integral Definida como área de una región, - la Integral Definida como cálculo algebraico, - la definición analítica de la Integral Definida, - condición suficiente: continuidad implica integralidad. **Propiedades de la integral (G, A):** - Unión de intervalos. - Linealidad. **El teorema fundamental (G, A):** - La regla de Barrow.
	2. Recordar algunos elementos matemáticos gráficos, algebraicos y/ o analíticos.	**El área como aproximación (G, A, AN):** - Aproximación del área de una región plana, - fórmula del área del rectángulo, - partición del intervalo, - sumas de Riemann. **El área como límite de una suma (G, A, AN):** - Límite de una suma Riemann. **La Integral Definida (G, A, AN):** - La Integral Definida como área de una región, - la definición analítica de la Integral Definida. **Propiedades de la integral (G, A):** - Unión de intervalos. **El teorema fundamental (G, A):** - La regla de Barrow.
	3. Tener esbozo de síntesis de los sistemas de representación gráfico y algebraico.	**El área como aproximación (G, A, AN):** - Aproximación del área de una región plana, - fórmula del área del rectángulo, - partición del intervalo, - sumas de Riemann. **El área como límite de una suma (G, A, AN):** - Límite de una suma Riemann. **La Integral Definida (G, A, AN):** - La Integral Definida como área de una región, - la definición analítica de la Integral Definida.
INTER	**1. Usar diferentes relaciones lógicas entre elementos matemáticos de forma correcta salvo alguna excepción (generalmente en el mismo sistema de representación)**	**El área como aproximación (G, A, AN):** - Aproximación del área de una región plana, - fórmula del área del rectángulo, - fórmula del área del triángulo. **El teorema del valor medio (A):** - Valor medio de una función.
	2. Recordar los elementos matemáticos necesarios en la resolución de la tarea en varios sistemas de representación (gráfico, algebraico y/o analítico).	**El área como aproximación (G, A, AN):** - Aproximación del área de una región plana, - fórmula del área del triángulo, **La Integral Definida (G, A, AN):** - La Integral Definida como área de una región, - la Integral Definida como cálculo algebraico, - condición suficiente: continuidad implica integralidad. **Propiedades de la integral (G, A):** - De funciones positivas y negativas, - unión de intervalos.
	3. Tener esbozo de síntesis de los sistemas de representación gráfico, algebraico y analítico.	**El área como aproximación (G, A, AN):** - Aproximación del área de una región plana, - fórmula del área del rectángulo, - partición del intervalo, - sumas de Riemann. **El área como límite de una suma (G, A, AN):** - Límite de las sumas. **La Integral Definida (G, A, AN):** - La Integral Definida como área de una región, - la definición analítica de la Integral Definida.

NIVEL	CARACTERÍSTICAS	ELEMENTOS MATEMÁTICOS
TRANS	**1. Usar diferentes relaciones lógicas (conjunción lógica, condicional y la contraria de la condicional) entre los elementos matemáticos de forma correcta.** **Conjunción lógica** $(A \wedge B)$ **Condicional** $(A \rightarrow B)$ **Contraria de la condicional** $(\neg A \rightarrow \neg B)$	**El área como aproximación (G, A):** - Aproximación del área de una región plana, - fórmula del área del rectángulo, - fórmula del área del triángulo, **La Integral Definida(G, A, AN):** - La Integral Definida como área de una región, - la Integral Definida como cálculo algebraico. - la definición analítica de la Integral Definida, - condición suficiente de existencia de la integral de Riemann: *Si una función* f *es continua en el intervalo cerrado* $[a,b]$, *entonces* f *es integrable en* $[a,b]$. *Usada en forma de* ***contrario de la condicional***: si f *no es continua en el intervalo cerrado* $[a,b]$, entonces f *no es integrable en* $[a,b]$. - **Propiedades de la Integral Definida (G, A):** De funciones positivas y negativas: ***Si*** $f(x)$ *es integrable y cambia de signo en* $[a, b] \rightarrow \int_a^b f(x)$ *es igual a la suma algebraica de las áreas. Y el área siempre es positiva se obtiene multiplicando por menos uno, la que es negativa o mediante la suma de los "****valores absolutos****" de las integrales extendidas a los intervalos en los que conserva el signo.* **El teorema fundamental (G, A):** - La regla de Barrow.
	2. Recordar los elementos matemáticos necesarios en la resolución de la tarea, usando los significados implícitos para tomar decisiones.	**El área como aproximación (G, A, AN):** - Aproximación del área de una región plana, - fórmula del área del rectángulo, - partición del intervalo, - sumas de Riemann. **El área como límite de una suma (G, A, AN):** - Límite de las sumas. **La Integral Definida (G, A, AN):** - La Integral Definida como área de una región, - la Integral Definida como cálculo algebraico, - la definición analítica de la Integral Definida, - condición suficiente de existencia de la integral de Riemann. Condición suficiente de existencia de la integral usada en forma de contrario. - la integral de funciones positivas y negativas **Propiedades de la Integral Definid (G, A):** - De las funciones positivas y negativas, - la unión de intervalos, especiales, linealidad, comparación y constante. **El teorema fundamental (G, A):** - La regla de Barrow.
	3. Tener síntesis en los sistemas de representación gráfico, algebraico y analítico.	**El área como aproximación (G, A, AN):** - Aproximación del área de una región plana, - fórmula del área del rectángulo, - partición del intervalo, - sumas de Riemann. **El área como límite de una suma (G, A, AN):** - Límite de las sumas. **La Integral Definida (G, A, AN):** - La Integral Definida como área de una región, - la Integral Definida como cálculo algebraico, - la definición analítica de la Integral Definida. **Propiedades de la Integral Definida (G, A):** - La unión de intervalos, especiales, linealidad, comparación y constante. **El teorema fundamental (G, A):** - La regla de Barrow.

Tabla 4.13. Relaciones lógicas y elementos matemáticos que caracterizan los subniveles de desarrollo del esquema de Integral Definida

En esta tabla podemos observar una síntesis global del análisis sobre la comprensión de desarrollo del esquema del concepto de Integral Definida descrito a partir de las relaciones lógicas y los elementos matemáticos utilizados de forma **G**, **A** y **AN** que utilizan los alumnos universitarios en un contexto específico, y según los distintos subniveles adaptados al desarrollo del esquema de este concepto matemático. En la primera columna indicamos los niveles de desarrollo del esquema de Integral Definida. En la segunda columna presentamos las características que comúnmente presentaron los alumnos tanto en los cuestionarios como durante las entrevistas. En la tercera columna, de acuerdo a las características establecidas por nivel, hacemos una concreción de los elementos matemáticos que de modo gráfico, algebraico y analítico aplicaron los alumnos en la resolución de las tareas.

CAPITULO 5

Capitulo 5: DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En este capítulo presentamos: las conclusiones generales del estudio a partir de los resultados obtenidos sobre el desarrollo del esquema del concepto de Integral Definida que tienen los alumnos de tercer año de Licenciatura de Matemáticas, las implicaciones de la investigación en la enseñanza del concepto de Integral Definida, y finalmente las limitaciones y perspectivas de futuro.

5.1. Sobre el desarrollo del esquema del concepto de Integral Definida.

En el capítulo anterior caracterizamos el desarrollo del esquema de Integral Definida en alumnos universitarios, a través de los distintos subniveles. De igual modo que Sánchez-Matamoros et al., (2006), en el análisis de los instrumentos de recogida de la información y de los instrumentos teóricos comprobamos que la construcción del conocimiento es progresivo y continuo, y el paso de un subnivel al siguiente se evidencia por medio de las relaciones lógicas que el sujeto es capaz de establecer entre los elementos matemáticos que conoce y lo que sabe hacer con estos elementos que utiliza en la resolución de las distintas tareas.

Los primeros intentos por establecer relaciones lógicas entre elementos matemáticos siempre se hacen a través de la "conjunción lógica", siendo éste el primer tipo de relación lógica que, frecuentemente y de forma correcta, establecen los estudiantes, la "condicional lógica" es otra relación que se evidencia en los razonamientos de los estudiantes, pero es menos común entre ellos y la relación del "contrario de la condicional", sólo se pone de manifiesto en algunos estudiantes.

Los elementos matemáticos que utilizan, en general, son los mismos, aunque varían de un alumno a otro por la forma cómo los usan en la resolución de las tareas; los elementos matemáticos que comúnmente recuerdan son "el área como aproximación", "la Integral Definida" y "el teorema fundamental del Cálculo" y los elementos matemáticos que los alumnos utilizan con más dificultad son "el área como límite de una suma" y "las propiedades de la integral definida"; y algunos de estos elementos matemáticos son recordados de forma incorrecta y/o con concepciones erróneas, como se describe a continuación:

- Realizar cálculos incorrectos al aplicar la regla de Barrow, o el desconocimiento de las condiciones necesarias para aplicar ésta regla. Estos errores se han puesto de manifiesto por el desconocimiento que tienen de la función valor absoluto, al tratar con una función discontínua en el intervalo de integración y algunos errores algorítmicos en el cálculo de la primitiva de una función. En general, cuando tienen que aplicar sus conocimientos a situaciones "no habituales" en el salón de clases es cuando se manifiestan este tipo de errores.

- Tienen una concepción de la Integral Definida como área de una región y afirman de forma incorrecta, "*que la integral le dio un área de cero o nula, que la integral da cero cuando no hay área, que da cero cuando se evalúa en los mismos límites*", no se dan cuenta que los límites del intervalo de integración son de signo contrario.

- Asociar el concepto de Integral Definida con un algoritmo para calcularla sin tener en cuenta las condiciones para poder aplicarlo.

- Afirmar que la Integral Definida sólo permite aproximar el valor del área. Normalmente, este error está asociado a una concepción como aproximación del concepto de límite.

- Vincular la subdivisión del intervalo directamente con las sumas de Riemann sin tener en cuenta la función y en lugar de considerar infinitos subintervalos hablan de subintervalos infinitos. Además confundir el número de particiones con el número de subintervalos.

- Utilizar de forma errónea el concepto de límite de una sumatoria Riemann, porque consideran la longitud del intervalo como infinita y el número de particiones del intervalo como cero; justamente al contrario de la definición formal del límite de la sumatoria de Riemann, donde se indica que si la norma o la longitud del intervalo tiende a cero**,** el número de particiones del intervalo **(n),** tiende a infinito.

- Pensar de forma errónea el concepto de continuidad, lo que no permite hacer algunos razonamientos para justificar correctamente las tareas. Por ejemplo indicar que como la función lineal corta al eje x, entonces no es continua.

"A6: … la región encerada por la recta $f(x)=4x$ y el eje x, en ese intervalo $[-2,2]$ no está definida, y sabemos que para calcular la integral definida debe ser continua, cuando grafique el punto (0.0), ella no está definida...
I: ¿Esa función no es continua?
A6: En este intervalo desde -2 hasta 2, no. Porque ella se me está cortando en el eje x y ahí, no hay una continuidad. El 0.0, es un punto, pero está cortando la recta. Cuando se corta en más de un punto deja de ser continua.
(A6E2)".

- Afirmar que la continuidad implica derivabilidad y trasladar esta misma propiedad errónea a la integrabilidad por similitud. Por ejemplo, ante la afirmación (tarea 7b) "*Si f es continua en $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$*", decidir si es verdadera o falsa. En caso de ser falsa, explicar por qué o mostrar un contraejemplo:

A3: Sí, viéndolo desde este punto, porque me están hablando del mismo intervalo y si la función es continua en ese intervalo, también es derivable e integrable. **(A3E7b).**

I: ¿Cómo explica el argumento de la proposición 7b?

A9: Si f es continua en $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$ y lo primero que se me viene a la cabeza es que si una función es continua entonces es derivable

(A9E7b).

Los argumentos que exponen estos dos sujetos son incorrectos porque utilizan una propiedad incorrecta de la derivabilidad y la aplican a la integrabilidad, cuando la derivabilidad implica continuidad y no al contrario, ya que el recíproco de este teorema no es cierto. Es claro que a pesar de los argumentos de los alumnos, es cierto que continuidad implica integrabilidad.

- Entender el elemento matemático "la Integral Definida" de forma incorrecta cuando afirman que la integración incluye continuidad, porque una función puede ser integrable pero no necesariamente tiene que ser continua en todo un intervalo. Por ejemplo también en el caso de la tarea anterior, cuando utilizan el reciproco de la condición suficiente: "*Si f es continua en $[a , b]$, entonces f es integrable en $[a , b]$*" algo que no es cierto.

I: ¿Cuáles son los criterios que le llevan a este razonamiento?
A1: Porque, la integración incluye, continuidad.
(A1E7b).

- Confusión entre las sumas superiores y las sumas inferiores. Casi todos los alumnos han planteado sumas inferiores para aproximar el área pero cuando tienen que realizar los cálculos no coordinan las representaciones algebraicas y gráficas y realizan sumas superiores.

En un comienzo de desarrollo del esquema en el nivel INTRA 1**,** el estudiante no es capaz de establecer relaciones lógicas entre los elementos matemáticos que aplica en la resolución de las tareas y, muchas veces, cuando se produce un indicio de relación lógica lo hace de forma incorrecta. En el nivel INTRA se evidencian las primeras apariciones de un intento de conjunción lógica, aunque sigue siendo de manera aislada o inconclusa. De forma creciente y progresiva en los niveles INTER 1, INTER y TRANS se van incrementando las relaciones lógicas, ya no sólo se establece la conjunción lógica, sino que aparece además la condicional y en algunos casos la relación del contrario de la condicional.

Dentro de las relaciones lógicas hemos identificado que la conjunción lógica se establece siempre entre dos o más elementos matemáticos que generalmente están coordinados de modo gráfico y algebraico y en algunos casos se utiliza también el registro analítico; la condicional o implicación lógica es una relación que se establece vinculada a las propiedades de la Integral Definida y la relación del contrario de la condicional es una relación que aparece asociada a la condición suficiente de existencia de la Integral Definida.

En cuanto a los sistemas de representación, algunos alumnos tienen dificultades con la representación gráfica de algunas funciones como es el caso de la función valor absoluto, en otras situaciones para determinar el área de los rectángulos superiores o inferiores, necesitan establecer no sólo la base sino también la altura para ello deben coordinar el sistema gráfico y el algebraico, pero no son capaces de identificar la altura de los rectángulos, a partir de la gráfica y de la expresión algebraica que representa la función, y como no coordinan el registro gráfico con el algebraico, aunque dibujan rectángulos inferiores, las áreas las calculan para rectángulos superiores.

Además estos alumnos hacen poco uso del registro analítico, y cuando intentan utilizarlo muestran dificultades en la escritura de expresiones analíticas, tienen problemas con las tendencias y los límites y les falta un mejor conocimiento de las sumas de sucesiones. Así por ejemplo pueden mencionar una partición genérica pero no son capaces de construir las sumas de Riemann correspondientes y, en caso de plantearlas, no son capaces de calcular su límite y por tanto el proceso analítico de resolución no es concluyente. Además es muy común que mencionen el concepto de Integral Definida asociado al límite de una suma Riemann, pero cuando tiene que aplicarlo en una situación concreta no saben cómo hacerlo, confunde la cantidad de particiones con el número de subintervalos de una partición y no resuelven la tarea usando el elemento matemático el área como límite de una suma.

Si tratamos de sintetizar las relaciones lógicas que se establecen en cada subnivel, en el subnivel INTRA 1 de desarrollo del esquema no se produce conjunción lógica. Los primeros intentos por establecer conjunción lógica se ponen de manifiesto en el nivel INTRA, la aparición de la “conjunción lógica” se establece a partir del subnivel INTER 1, la evidencia tanto de la conjunción lógica como de la condicional es propio del nivel INTER y del nivel TRANS, y la relación del contrario de la condicional se encuentra en algunos alumnos en varios niveles de desarrollo del esquema. De los resultados concluimos que el subnivel de desarrollo que predomina en los alumnos es el INTER 1.

Asimismo comprobamos que en el subnivel INTRA 1, hay un mayor uso de los registros gráficos y/o algebraicos y sólo en el nivel TRANS se alcanza la síntesis de los tres sistemas de representación gráfico, algebraico y analítico. Pero la construcción del esquema del concepto de Integral Definida, a través de los subniveles de desarrollo del esquema, no depende sólo de los registros de representación gráfico, algebraico y analítico, sino también de las relaciones lógicas que el alumno es capaz de establecer entre los elementos matemáticos.

De esta manera encontramos que, aunque los estudiantes recuerdan y plantean para la solución de las tareas esos elementos matemáticos de forma gráfica, algebraica y analítica, en los procedimientos de resolución de las tareas es poco frecuente el manejo de los elementos de forma analítica y generalmente las concepciones erróneas que muestran tienen que ver con la comprensión de algunos elementos matemáticos en este registro de representación.

Algunas de las dificultades de comprensión que manifestaron los alumnos en nuestra investigación también han sido identificadas por otros investigadores. A continuación comentaremos algunas de ellas en relación a nuestros resultados.

1. En Orton (1980) (citado por Azcárate et al. 1996, p. 15) indican "que existe una manipulación de los algoritmos en los cálculos de primitivas y dificultades en la conceptualización de los procesos de límite asociados al concepto de Integral Definida y además dificultades en el cálculo de áreas limitadas por curvas con valores negativos o discontinuidades". Estas mismas evidencias las encontramos en varios sujetos que se encuentran en el subnivel INTRA 1 e INTRA de desarrollo del esquema de Integral Definida en nuestra investigación, como se presenta en los siguientes episodios:

En la siguiente situación esta alumna necesita la expresión algebraica para encontrar una primitiva y aplicar el algoritmo correspondiente.

I: ¿Podría aplicar otro procedimiento diferente que le permita mejor aproximación del área y que justifique más las cotas?
A4: Hallando la expresión calculamos la Integral Definida de 3 a 9.
I: ¿Qué le permite esto, ajustar el área o calcular el área exacta?
A4: Calcular esa área.
I: ¿Qué más podría utilizar para ajustar más los valores?
A4: Particionando más chiquito y teniendo en cuenta estos que están fuera.
(A4E1).

Por un lado, tiene dificultad para aproximar el área porque necesita la expresión algebraica de la gráfica de la función para calcularla mediante la regla de Barrow y recuerda, de manera implícita, el elemento matemático **ALS** de forma **A,** cuando afirma que si hace particiones más pequeñas, el valor del área será más ajustado.

Además, en este otro hecho muestra una idea de límite como aproximación:

I: ¿Una suma de Riemann le da el valor exacto del área o una aproximación?
A4: Yo sé que una suma de Riemann es un proceso limite.
I: ¿Qué es un proceso límite?
A4: La integral definida.
I: ¿Cuando aplica el proceso límite está hallando el valor del área o lo está aproximando?
A4: La estoy aproximando, porque la estoy calculando en este intervalo cerrado.
(A4, E3).

Asimismo asocia de forma incorrecta el concepto de área como aproximación con la Integral Definida:

I: ¿Podría explicarme cuando le dicen que aproxime un área que hace?
A4: Qué aproxime el área de la región rayada…
I: ¿Qué hace?
A4: Trabajo la integral **(A4E3).**

Demuestra una concepción de suma de Riemann como un proceso límite y afirma, incorrectamente, que cuando aplica el límite como un proceso está aproximando el valor del área y que la Integral Definida le permite aproximar el área. Las imágenes mentales que tiene este sujeto las evoca producto de una instrucción previa, pero muchas de ellas, cuando tiene que utilizarlas en la resolución de las tareas, no sabe cómo hacerlo.

En esta otra situación este otro sujeto menciona la propiedad del cálculo de áreas de funciones no estrictamente positivas.

A5: …hay una fórmula que dice que cuando uno tiene dos áreas hay que mirar la que está por arriba y la que está por debajo, entonces se tiene la que está por arriba y se le resta la que está por debajo y se evalúa en los intervalos dados.
I: ¿Por qué se resta?
A5: Porque está por debajo, si no estoy mal, es porque está por debajo.
I: ¿Siempre que esté por debajo se resta? ¿Cuál es ese criterio?
A5: ¿Cuál es el criterio? No.
I: ¿De qué forma podría aproximar el área?
A5: Pues con particiones, con una suma de Riemann, pero no.
I: ¿Cómo sería con particiones? ¿Podría comentarlo?
A5: .. los divide en rectángulos y empieza hallar el área.
(A5E5).

En el extracto se pone de manifiesto que menciona una relación entre los elementos matemáticos **ACA** y **TFV**; pero, por un lado no es capaz de dar una aproximación del área utilizando el elemento matemático **ACA** de forma **G** ni **A** y, por otro, recuerda los elementos pero no sabe cómo aplicarlos en la resolución de las tareas.

Además durante la entrevista en la tarea 7c: *"Considerar el valor de verdad o de falsedad de la afirmación* $\int_{-1}^{1} x^{-2}\,dx = \left[-x^{-1}\right]_{-1}^{1} = (-1) - 1 = -2$ *y en caso de ser falsa, explicar por qué o dar un contraejemplo".*

Este mismo sujeto insiste en que el procedimiento de solución es correcto aunque la solución final no sea igual a la que él obtuvo:

I: ¿Qué valor le dio a la proposición 7c y por qué?
A5: Dicen que va de -1 a 1, dije que era falsa.
I: ¿Por qué la considera falsa?
A5: Porque la resolví, no sé si está bien, me dio un número contrario a la respuesta que nos dan.
I: ¿Qué aplicaron ahí, para resolver esa integral?
A5: En lo que hemos visto, en la integral, se integra la función, la evaluamos en los intervalos, que es -1 y 1 y solucionamos.
I: ¿Está de acuerdo con el procedimiento más no con la respuesta?
A5: No, la respuesta supuestamente es falsa, porque me dio lo contrario es por el procedimiento.
(A5E7C).

Asocia el concepto de Integral Definida con un algoritmo para calcularla sin tener en cuenta las condiciones para poder aplicarlo y por eso considera válido el procedimiento, pero la solución final no es igual a la suya porque comete un error en el signo de la respuesta, al ser sus cálculos numéricos incorrectos, y por tanto piensa que la afirmación es falsa por esa diferencia en el signo.

Según todo lo anterior, desde nuestro marco teórico y de los resultados encontrados consideramos que algunos de los elementos matemáticos son usados por los alumnos sin haber sido encapsulados en un objeto matemático, porque una cosa es la que ellos hacen y lo ponen de manifiesto en sus argumentos, y otra lo que deberían hacer para resolver de forma correcta las tareas.

2. Mundy (1984), presenta un análisis de los errores encontrados en estudiantes después de recibir un curso de Cálculo. Del estudio concluyó que los estudiantes no teníen una comprensión gráfica de que la integral de funciones positivas puede ser considerada en términos de área bajo una curva y que los estudiantes asocian la Integral Definida con la regla de Barrow. Asimismo, en nuestra investigación hemos utilizado tareas similares a las planteadas por Mundy y encontramos los mismos errores en los estudiantes para la coordinación de ciertos elementos matemáticos, en concreto la dificultad en establecer relaciones lógicas entre los elementos matemáticos de área e integral usando los modos de representación gráfico y algebraico. En nuestro estudio hemos observado también los errores que muestran, algunos alumnos, cuando tienen que establecer una relación lógica entre el elemento matemático “el área como límite de una suma” y “la Integral Definida” o cuando tiene que hacer uso de la condición suficiente que afirma que la continuidad implica integrabilidad, para poder tomar una decisión acertada de resolución de la tarea, porque el estudiante no es capaz de conectar la definición del concepto de Integral Definida y su imagen del concepto, de forma que para resolver cualquier tarea recurren a un algoritmo, con lo que se confirma la primera de las hipótesis planteadas en nuestra investigación.

3. Czarnocha et al. (2001), plantearon la necesidad de la coordinación de dos esquemas para comprender el concepto de Integral Definida: el esquema visual de la suma de Riemann y el esquema del concepto de límite de una sucesión numérica. Estos autores afirman que la Integral Definida comprende construcciones de tipo geométrico y construcciones de tipo numérico (sucesiones infinitas y límites) y encontraron que la dificultad de la comprensión como objeto del esquema de la suma de Riemann estaba vinculada a las dificultades que los alumnos tenían con el esquema de límite. El límite de la suma de Riemann era visto, desde el punto de vista geométrico, como la suma del área de infinitos rectángulos cuya amplitud tendía a 0, o bien como suma de “líneas”, es decir, como suma de infinitos rectángulos de amplitud 0 lo que influyó en la comprensión del esquema del concepto de Integral Definida.

Al igual que señalan estos autores, en nuestro estudio encontramos que muchos estudiantes, a excepción de quienes están en el nivel TRANS, muestran dificultades en establecer una conexión entre las sumas de Riemann y el límite de éstas sumas. También nosotros encontramos esas dos concepciones en los alumnos acerca del límite de las sumas de Riemann y se presenta en (A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9 y A10) 10 de los 11 alumnos que hacen parte de este estudio.

Además los resultados muestran que cada sujeto presenta un esquema del concepto que varía de unos a otros por el tipo de relaciones lógicas que es capaz de establecer y los elementos matemáticos gráficos, algebraicos y analíticos que sabe utilizar. Aunque haya alumnos que estén en un mismo nivel de desarrollo, no son capaces de establecer idénticas relaciones lógicas entre los elementos matemáticos, ni de establecer relaciones entre los sistemas de representación gráfico, algebraico y analítico. Este hecho, igual que en Sánchez-Matamoros (2004), fue el que nos permitió caracterizar los subniveles de desarrollo del esquema del concepto de Integral Definida que tienen los estudiantes de Licenciatura de Matemáticas.

Los resultados encontrados confirman el logro de los objetivos propuestos en esta tesis, porque a través del análisis pudimos estudiar la comprensión que tienen los estudiantes universitarios (18-32 años) del concepto de Integral Definida en el marco teórico “APOE” y de los niveles de desarrollo del esquema planteado por Piaget y García (1982), mediante las relaciones lógicas y los elementos matemáticos gráficos, algebraicos y analíticos que configuran el concepto de la Integral Definida; y poder caracterizar los niveles y subniveles de desarrollo del esquema del concepto de Integral Definida asignado a los alumnos de Licenciatura de Matemáticas.

Las tres fases establecidas en el análisis nos permitieron asignar a cada uno de los alumnos a los niveles y subniveles de desarrollo del esquema de Integral Definida y comprobar que en muchos casos el aprendizaje del concepto de Integral Definida es algorítmico y memorístico, y los alumnos muestran dificultades para establecer relaciones lógicas entre los elementos matemáticos que configuran el concepto de Integral Definida y en la síntesis en los sistemas de representación gráfico, algebraico y analítico.

5.2. Implicaciones en la enseñanza del concepto de la Integral Definida

La información obtenida de la investigación nos lleva a preguntarnos:

¿Cómo se pueden utilizar los resultados en el proceso de enseñanza-aprendizaje? ¿Cómo aplicar la caracterización de los subniveles de desarrollo del esquema de la Integral Definida en el proceso de enseñanza- aprendizaje?

La perspectiva teórica APOS propone que se haga previamente una descomposición genética del concepto matemático, en este caso la Integral Definida, que sirva al profesor para conocer la forma cómo se desarrolla el concepto en la mente del estudiante (cómo lo aprende) a partir de los elementos matemáticos que configuran este concepto porque sabiendo cuál es el desarrollo lógico que tienen los alumnos del concepto podremos organizar la enseñanza para lograr la tematización del esquema.

En este sentido los resultados obtenidos en el capítulo anterior, nos han llevado hacer una revisión de la descomposición genética inicial presentada en el capítulo 3, para incluir, modificar o eliminar algunos aspectos matemáticos que presentamos en la siguiente descomposición genética:

A. Conocimientos Previos

1. El conjunto de los números reales.
   a. Desigualdades, intervalos y conjuntos ordenados.
   b. Relaciones y operaciones en los conjuntos numéricos.
   c. El número real como objeto matemático.

2. Concepto de función y sistemas de representación.
   a. Clases de funciones.
   b. Representación gráfica de funciones.
   c. Continuidad y discontinuidad de una función.

3. El concepto de límite como objeto matemático.

4. El concepto de derivada como objeto matemático.

5. Medida del área de una figura plana.

a. Error asociado a una medida.

b. Fórmulas de áreas de regiones planas.

6. La suma de una sucesión.

a. Suma de n términos de una sucesión.

b. Límite de la suma de n términos de una sucesión.

B. El área como aproximación

1. Dada una función $f(x)$ continua y positiva definida en intervalo $[a, b]$**,** la a**cción** de calcular una aproximación **por defecto** del área de la región plana determinada por la función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$.

a. Dividir el intervalo $[a, b]$ en subintervalos.

b. Calcular de forma consciente el **valor mínimo** $f\left(x_i^*\right)$ que toma la función en cada subintervalo.

c. Formar rectángulos de base cada subintervalo y de altura el valor mínimo calculado en **1b**.

d. Calcular el área de cada uno de los rectángulos obtenidos, coordinando los sistemas de representación gráfico y algebraico.

e. Sumar las áreas calculadas en **1d** y comprobar que el número obtenido es el resultado de una aproximación del área por defecto.

2. Dada una función $f(x)$ continua y positiva definida en el intervalo $[a, b]$**, la acción** de calcular una aproximación **por exceso** del área de la región plana determinada por la función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$.

a. Dividir el intervalo $[a, b]$ en subintervalos.

b. Calcular de forma consciente el **valor máximo** $f\left(x_i^{**}\right)$ que toma la función en cada subintervalo.

c. Formar rectángulos de base cada subintervalo y de altura el valor máximo calculado en **2b**.

d. Calcular el área de cada uno de los rectángulos obtenidos, coordinando los sistemas de representación gráfico y algebraico.

e. Sumar las áreas calculadas en **2d** y comprobar que el número obtenido es el resultado de una aproximación del área por exceso.

3. Interiorización de las acciones anteriores en procesos.

a. Repetir la acción del punto **B1** dividiendo cada subintervalo a la mitad y calcular el área de la región así obtenida.

b. Repetir la acción del punto **B2** dividiendo cada subintervalo a la mitad y calcular el área de la región así obtenida.

c. Utilizar los resultados obtenidos en los puntos **3a** y **3b** del proceso, compararlos y buscar una aproximación mejor del área de la figura.

4. Encapsular el proceso desarrollado en el punto **3a** en el **objeto suma inferior** $\underline{S_n} = \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right)\frac{b-a}{n}$ **.**

5. Encapsular el proceso desarrollado en el punto **3b** en el **objeto suma superior** $\overline{S_n} = \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^{**}\right)\frac{b-a}{n}$

C. El área como límite de una suma

6. Desencapsular los objetos **4 y 5,** y **coordinar** con el proceso **3c** en el proceso del límite de las sumas inferior y superior.

$$\underline{S} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right)\frac{b-a}{n}, \quad \overline{S} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^{**}\right)\frac{b-a}{n}$$

D. La Integral Definida

7. Comprobar que los límites obtenidos en el proceso **6** son iguales, encapsular el proceso en el objeto Integral Definida de la función f en $[a, b]$ **, como** $\int_a^b f(x)\,dx$**.**

8. Desencapsulación del objeto **7** en el proceso de cálculo de la Integral Definida de una función f en intervalos cerrados con un extremo en a y otro extremo variable.

9. Encapsulación del proceso **8** en el objeto función integral $F(x)=\int_a^x f(x)dx$.

E. El Teorema Fundamental

10. Acción de calcular una función primitiva.

a. Cálculo de la derivada de la función $F(x)$.

b. Comprobación de que la derivada de $F(x)$ es $f(x)$.

c. Definición de $F(x)$ como función primitiva.

d. Expresar la función primitiva como $F(x)+C$.

11. Interiorización de la acción **10** en el proceso de cálculo de una función primitiva.

12. Coordinación del proceso **11** con,

a. El proceso de evaluar una función primitiva en los extremos del intervalo.

b. Calcular la diferencia entre esos valores.

c. Comprobación de que la cantidad así obtenida es igual a $\int_a^b f(x)\,dx$.

F. Generalización del concepto de Integral Definida para funciones no estrictamente positivas y continuas.

13. Aplicar el proceso **11** para el cálculo de Integrales Definidas de funciones positivas continuas.

14. Aplicar el proceso **11** para funciones no estrictamente positivas y continuas dividiendo el intervalo de definición en subintervalos según el signo de la función.

15. Aplicar el proceso **11** para el cálculo de Integrales Definidas de funciones positivas discontinuas.

16. Aplicar el proceso **11** para funciones no estrictamente positivas y discontinuas dividiendo el intervalo de definición en subintervalos según el signo de la función.

Las modificaciones realizadas en la descomposición genética se han concretado en los siguientes aspectos:

En cuanto a los conocimientos previos se hace necesario incluir relaciones y operaciones en los conjuntos numéricos, porque muchos de los alumnos muestran (tareas, 2, 3, 4, 5, 6 y 7) tener dificultades con los cálculos numéricos en los enteros y los racionales. Además se hace necesario reforzar lo que tiene que ver con clases de funciones como valor absoluto, pares, e impares, ya que los alumnos tienen desconocimiento (tareas 4, 2) en la definición y la gráfica de este tipo de funciones; asimismo fortalecer la comprensión del concepto de límite de funciones (tareas 3 y 5,)**,** y el concepto de continuidad en un intervalo (tarea 7) debido a que los alumnos muestran concepciones erróneas, por ejemplo cuando tienen que calcular el límite de la suma de n términos de una sucesión y cuando aplican la regla de Barrow sin tener en cuenta las condiciones para hacerlo; del mismo modo reforzar la derivabilidad de una función, teorema de la derivabilidad implica continuidad, y el teorema de la continuidad implica integrabilidad como condición suficiente pero no necesaria, este hecho se presenta cuando los alumnos ponen de manifiesto que no saben justificar correctamente los ítems (7a, 7b, 7c) del cuestionario.

En el elemento matemático el área como aproximación se necesita que los alumnos hagan de manera consciente aproximaciones del área por defecto y por exceso, establezcan la coordinación de los registros gráficos y algebraicos para que puedan determinar por ejemplo la base y la altura de los rectángulos y a partir de ello calcular y comprobar las áreas aproximantes por defecto y por exceso (tareas 1, 3, 5 y 6); y finalmente se debe reforzar el límite de la suma de una sucesión, porque los alumnos tienen problemas (tareas 3 y 5) con el manejo de las sumas de sucesiones, no son capaces de calcular las sumas de Riemann y presentan dificultades con las tendencias y los límites.

Los resultados muestran un privilegio propio de un pensamiento operatorio y algorítmico, podría pensarse en un proceso de enseñanza que favorezca el uso de diferentes relaciones lógicas entre elementos matemáticos analíticos necesarios en la definición analítica del concepto de la Integral Definida, donde prevalezca el significado del concepto, antes que el propio algoritmo para calcular Integrales Definidas.

Por tanto consideramos que los resultados de la investigación sirven para reforzar aquellos elementos matemáticos que configuran el concepto de la Integral Definida, donde los alumnos muestran concepciones erróneas cuando los utilizan. En cuanto a la enseñanza de este concepto matemático se hace necesario que los alumnos adquieran un aprendizaje de aquellos conceptos que hemos incluido o que consideramos que se deben reforzar en la descomposición genética inicial, para resolver aquellos aspectos en los cuales están fallando como por ejemplo concepto de aproximación coordinando los sistemas de representación, límite de una sucesión, continuidad y discontinuidad, comprensión del concepto de área cuando las funciones no son estrictamente positivas, y considerar la condición suficiente que la continuidad implica integrabilidad, pero no como necesaria y las condiciones necesarias para aplicar la regla de Barrow.

5.3. Limitaciones y perspectivas de futuro

Los resultados de la investigación están enmarcados en un contexto específico del trabajo del investigador y que consideramos tiene cierta influencia o limitaciones en diferentes aspectos o niveles y que siguiendo el mismo esquema que Depool (2004), se pueden entender:

5.3.1. A nivel institucional

Las políticas del país de origen donde se desarrolló la investigación, tiene implementado en el bachillerato los estándares curriculares de matemáticas y estos no contemplan el concepto de Integral Definida, porque los alumnos, antes del ingreso en la universidad, sólo han estudiado funciones, nociones intuitivas de aproximación y límite, y la noción de derivada como razón de cambio instantánea en contextos matemáticos y no matemáticos. Así que el concepto de Integral Definida se estudia por primera vez en los planes de estudio universitario.

En este mismo sentido, en nuestro estudio comprobamos que los alumnos universitarios ponen de manifiesto las dificultades que tienen en torno al concepto de límite, lo que nos ha llevado a indagar un poco sobre este concepto matemático y que está incluido entre los conceptos previos de la descomposición genética del concepto de Integral Definida.

En el bachillerato el aprendizaje del concepto de límite se basa exclusivamente en la manipulación de fórmulas y en una práctica del cálculo de límites. Ya en el nivel universitario, los alumnos estudian una unidad didáctica denominada límites y continuidad cuyo objetivo es manejar tanto el concepto intuitivo como la definición rigurosa de límite, el cálculo de límites de funciones algebraicas y trigonométricas y su aplicación al estudio de la continuidad de una función. Los elementos matemáticos considerados que involucran el aprendizaje de este concepto, son la noción intuitiva de límite de una función, definición formal de límite, propiedades de los límites, técnicas para el cálculo de límites, límites infinitos, asíntotas verticales, límites en el infinito, asíntotas horizontales, los límites trigonométricos básicos, continuidad de una función en un punto, en un intervalo abierto, en un intervalo cerrado, las causas de la no existencia de un límite, principios de intercalación (emparedado), funciones compuestas y la continuidad, teoremas de Bolzano y del valor intermedio para funciones continúas y gráficas. En cuanto a la metodología utilizada en el desarrollo de los elementos matemáticos que configuran el concepto de límite, están apoyados en exposiciones de tipo magistral por parte del profesor y no se dispone de otro tipo de recursos o de medios informáticos.

5.3.2. A nivel cognitivo

Muchos de los objetos matemáticos previos que hemos considerado en la descomposición genética del concepto de la Integral Definida no son el resultado de un proceso de encapsulación por parte de los estudiantes.

Los alumnos que provienen del bachillerato llegan a la universidad sin haber estudiado el concepto de Integral Definida, lo que les podría ocasionar mayor dificultad en la construcción/comprensión de este concepto matemático en el poco tiempo que tienen previsto para aprenderlo.

Además la edad más común entre los alumnos que ingresan por primera vez a la universidad oscila entre los 15 y 17 años, lo que hace que muchos de ellos no tengan posiblemente una madurez mental apropiada para aprender de manera consciente algunos de los conceptos matemáticos, aunque los alumnos que hacen parte de este estudio superan este rango de edad.

5.3.3. A nivel metodológico

En relación con la metodología utilizada en nuestra investigación, encontramos algunas limitaciones en cuanto a que no es habitual que los alumnos en las clases sean enfrentados a situaciones similares a las tareas planteadas en el cuestionario y en la entrevista, lo que les presentó dificultad a muchos de ellos el tener que argumentar y justificar de forma correcta la resolución de las tareas.

Asimismo las clases son del tipo magistral donde prevalece el discurso del profesor y el alumno toma nota de las explicaciones, generalmente no se dispone de medios informáticos o de otro tipo de ayudas didácticas que favorezcan el proceso de enseñanza-aprendizaje en este tipo de asignaturas.

Muchas de las justificaciones dadas en las respuestas por los alumnos provienen de aprendizajes producto de las mismas concepciones del profesor que enseña la materia y que los alumnos ponen de manifiesto en intervenciones como las siguientes:

I: ¿Cómo justifica que los dos resultados sean iguales o diferentes?
A2: Porque a mí me enseñaron que una integral no es un área, o sea geométricamente representa un área, pero una integral no es un área, es un numero, en este caso la integral de esa función evaluada en el intervalo dado es cero y no es más.
(A2E2).

I: ¿Qué relación establece entre el área bajo la gráfica y la Integral Definida?
A2: A mí me enseñaron que si voy hallar el área y estamos hablando de áreas utilizando integrales debo hallar su integral, o sea su área geométricamente

evaluando la función si la tengo en un intervalo dado, una función negativa que está por debajo o sea que es menor que cero, cuando la función se evalúa, toma valores negativos, entonces como área debe ser positiva.
(A2E2).

I: ¿Cómo le explicaría a un compañero el significado de $\int_a^b f(x)\,dx$ *?*
A3: Primero que todo lo haría con la sumatoria de Riemann, y luego con el límite de esa sumatoria, porque fue la manera en que me lo enseñaron y como pude entender un poco mejor de que se trataba la Integral Definida.
(A3E8).

Además los estudiantes objeto de esta investigación, en su gran mayoría, tienen que combinar la jornada laboral con el estudio de la universidad, lo que les genera un tiempo limitado para el trabajo académico.

De las consideraciones anteriores surgen ciertos interrogantes que desde una perspectiva de futuro podrían ser motivo de investigación:

- A partir de la información obtenida en esta investigación ¿cómo debe organizarse la enseñanza a partir de los resultados de esta investigación para mejorar el aprendizaje de este concepto matemático? ¿Cómo podemos ayudar a los alumnos a superar aquellas dificultades y/o concepciones erróneas que tienen en relación con los elementos matemáticos que constituyen el concepto de Integral Definida?

- Dado que el elemento matemático el "área como límite de una suma", es aquel en el que los alumnos muestran más dificultades por no tener encapsulado el concepto de límite como un objeto matemático ¿cómo podríamos profundizar en su aprendizaje?

- Este estudio se ha hecho con alumnos de licenciatura de Matemáticas, ¿cambiaría significativamente la caracterización del esquema de Integral Definida si los alumnos fuesen de otras titulaciones?

- A partir de los resultados obtenidos en la investigación ¿cómo planear un diseño curricular que permita construir los conceptos previos y adquirir un aprendizaje duradero de aquellos elementos matemáticos que configuran el concepto de Integral Definida?

- Nuestro estudio se ha basado en el desarrollo de la comprensión del concepto de la Integral Definida, mediante un estudio descriptivo y explicativo de los resultados obtenidos, a partir de los elementos matemáticos y de las relaciones lógicas establecidas entre dichos elementos matemáticos. De acuerdo con esta descripción del grado de comprensión que muestran los alumnos sobre la Integral Definida ¿cómo lograr que los alumnos adquieran una construcción/comprensión de forma consciente de este concepto matemático?

Estos interrogantes fueron surgiendo a lo largo del desarrollo de esta tesis y podrían ser motivo de investigación desde esta línea de investigación en Didáctica del Análisis Matemático.

REFERENCIAS

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M. (2002). Learning Mathematics in a CAS Environment: The Genesis of a Reflectión Abaut Instrumentation and Dialectics Between Technical and Conceptual Work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7, 3, 245-274.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Development in Ungraduate Mathematics education. *Research in Collegiate Mathematics Education, 2,* 1 – 32**.**

Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E. y Schwingendorf, K. (1997). The Development of Students` Graphical Understanding of the Derivative, *Journal of Mathematical Behavior*, *16, 3,* 1- 32.

Azcárate, C., Casadevall, M., Casellas, E. y Bosch, D. (1996*). Cálculo Diferencial e Integral*. Madrid: Síntesis.

Azcárate, C. y Camacho, M. (2003). Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, *10,* 2, 135-149.

Badillo, E. R. (2003). *La Derivada como Objeto Matemático y como Objeto de Enseñanza y Aprendizaje en Profesores de Matemáticas de Colombia*. *La derivada un concepto a caballo entre la Matemática y la Física.* Tesis Doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.

Baker, B., Cooley, L. y Trigueros, M. (2000). A Calculus Graphing Schema. *Journal for Research in Mathematics Education***,** *31, 5,* 557 – 578.

Barbosa, K. (2003). La Enseñanza de Inecuaciones desde el punto de vista de la Teoría APOE. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa, 6 3,* 199 – 219

Barnard, T. y Tall, D. (1997). Cognitive Units, Connections, and Mathematical Proof. En E. Pehkonen, (Ed.). *Proceedings of the XXI Annual Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 41 – 48), *2.* Lahti, Finland.

Bernal, C. A. (2006). *Metodología de la Investigación* (2ª ed.). México: Prentice Hall.

Bisquerra, R. y Sabariego, M. (2009). El Proceso de Investigación (Parte 1). En R. Bisquerra (Coord.). *Metodología de la Investigación Educativa* **(**2ª ed.). (89-125). Madrid: La Muralla.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2001). Los Sistemas de Representación en la Enseñanza del Límite. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME*), *4, 3,* 219-231.

Bodí, S.D. (2006*) Análisis de la Comprensión de Divisibilidad en el Conjunto de los Números Naturales*. Tesis Doctoral. Universitat d` Alacant.

Boigues, F. J. y Pastor, J. (2007). La teoría Fuzzy como elemento para medir el grado de desarrollo en la comprensión de la Integral. En P. Bolea., M. Camacho., P. Flores., B. Gómez., J. Murillo., y M. T. González (Eds.). *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. X Simposio de la SEIEM. Huesca, pp. 145-155.*

Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E. y Thomas, K. (1997). Learning Binary Operations, Groups, and Subgroups. *Journal of Mathematical Behavior, 16, 3,* 187 – 239.

Calvo, C. (1997). *Bases para una Propuesta Didáctica sobre Integrales.*Tesis de Maestría. Universitat Autónoma de Barcelona

Calvo, C. (2001). *Un Estudio sobre el Papel de las Definiciones y las Demostraciones en Cursos Preuniversitarios en Cálculo Diferencial e Integral*. Tesis Doctoral. Universitat Autónoma de Barcelona.

Camacho, M., Depool, R. y Sabrina, G. (2008). Integral Definida en diversos contextos. Un estudio de casos. *Educación Matemática, 20, 3,* 32-57.

Clark, J., Cordero, F., Cottrill, J., Czarnocha, B., DeVries, D., St. John; D., Tolias, G. y Vidakovic, D. (1997). Constructing a Schema: The case of the chain rule. *Journal of Mathematical Behavior, 16, 4,* 345 – 364.

Cobo, B. y Batanero, C. (2004). Significado de la Medida en los Libros de Texto de secundaria. *Enseñanza de las ciencias, 22,1,* 5-18.

Codes, M. y Sierra, M. (2004). Enseñanza-aprendizaje con Maple del concepto de convergencia de series numéricas con alumnos de primer curso de la diplomatura de informática: un estudio piloto. [Edición en CD]. En E. Castro., y E. de la Torre (Eds.). *Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. VIII Simposio de la SEIEM.* Coruña.

Codes, M. y Sierra M. (2007). Una primera aproximación al análisis de la comprensión de alumnos de primero de la Escuela de Informática de la UPSA sobre la noción matemática del concepto de serie numérica. En P. Bolea., M. Camacho; P. Flores., B. Gómez., J. Murillo., y M. T. González (Eds.). *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. X Simposio de la SEIEM*. Huesca, pp. 173-186.

Cohen, M. y Manion, L. (2002). *Métodos de Investigación Educativa* (2ª ed.). Madrid: La Muralla.

Confrey, J. y Costa, Sh. (1996). A critique of the selection of "mathematical objects" as a central metaphor for Advanced Mathematical Thinking. *International Journal of Computer for Mathematical Learning, 1,* 139-168.

Contreras, A. y Ordóñez, L. (2005). Análisis de Significados Personales de los Estudiantes acerca de la Integral Definida. En Maz, A., Gómez, B., y Torralbo, M. (Eds.). *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de Investigación. IX Simposio de la SEIEM. Córdoba.*

Cooley, L., Tigreros M. y Baker, B. (2003). Thematization of the calculus graphing schema. En Patema, N.A., Dougherty, B. J., y Zilliox, J. T. (Eds.). *Proceedings of the 2003 joint meeting of the XXVII International Group of the Psychology of Mathematics Education and the Psychology of Mathematics Education-North American Chapter,2* (pp. 57 – 64). Honolulu: University of Hawaii.

Cornu, B. (1991). *Limits*. In D. Tall (Ed.). Advanced Mathematical Thinking. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Cottrill, J., Dubinsky E., Nichols, D., Schwingendorf K., Thomas, K. y Vidakovic, D. (1996). Understanding the Limit Concept: Beginning with a Coordinated Process Scheme. *The Journal for Mathematical Behaivor, 15,* 167-192.

Cottrill, J. (1999). *Students` Understanding of the Concept of Chain Rule in first year Calculus and the Relation to their Understanding of Composition of Functions.* Unpublished doctoral dissertation, Purdue University, West Lafayette, Indiana.

Czarnocha, B., Dubinsky, E., Loch, S., Prabhu, Vrunda. y Vidakovic, D. (2000). Conceptions of Area: In Students and in History. *College Mathematics Journal, 32, 2,* 99-109.

Czarnocha, B., Loch, S., Prabhu, V. y Vidakovic, D. (2001). El Concept of definite integral: Coordination of two Schemas. En María van den Heuvel – Penhuizen (Ed.). *Proceedings of the XXV Conference of the International Group of Mathematics Education* (pp. 12 – 17).Utrecht: Freudenthal Institute.

Depool, R. A. (2004). *La Enseñanza y Aprendizaje del Cálculo Integral en un Entorno Computacional. Actitudes de los Estudiantes Hacia el uso de un Programa de Cálculo Simbólico (PCS).* Tesis Doctoral. Universidad de La Laguna.

DeVries, D. J. (2001). RUMEC / APOS Theory *Glossary. Georgia Collage & State University. Milledgeville.http://www.cs.gsu.edu/~rumec/Papers/glossary.html*. [Disponible el 18 de agosto de 2008]

Döfler, W. (2002). Formation of Mathematical objects as decision making. *Mathematical Thinking and Learning, 4, 4,* 337 – 350.

Döfler, W. (2003). Mathematics and Mathematics Education: Content and people, relation and difference. *Educational Studies in Mathematics, 54,* 47-170.

Dorio, I., Massot, I. y Sabariego, M. (2009). Características Generales de la Metodología Cualitativa. En R. Bisquerra (Coord.). *Metodología de la Investigación Educativa* **(**2ª ed.). (275-292). Madrid: La Muralla. S.A.

Dreyfus, T. y Eisenberg, T. (1990). On difficulties with diagrams: Theoretical issues. *Proceedings of the four teenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 2,* 27 – 33.

Dreyfus, T. (1991). Advanced in Mathematical Thinking Processes. En D. Tall. (Ed.). *Advanced in Mathematical Thinking* (pp.25–41). Boston: Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking, En D. Tall. (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la Perspectiva Piagetana a la Educación Matemática Universitaria. *Educación Matemática, 8, 3,* 24-41.

Dubinsky, E. (2000 a). De la Investigación en Matemática Teórica a la Investigación en Matemática Educativa: un viaje personal. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa., 3, 1,* 47 – 70.

Dubinsky, E. (2000b). Using a Theory of Learning in College Mathematics Courses. *Teaching and Learning Undergraduate Mathematics, Newslertter12. http://ltsn.mathstore.ac.uk/newsletter/may2001/pdf/learning.pdf.* [Disponible el 25 de agosto de 2008]

Dubinsky, E. y MacDonald, M. A. (2001). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduated Mathematics Education Research. En D. Holton (Ed.), *The teaching and Learning of Mathematics at University Level. An ICMI Study. 7* (pp.273- 280). Dordrecht: Kluwer Academia Publisher.

Duval, R. (1993). Registres de Représentation Sémiotique et Fonctionnement Cognitif de la Pensée. *Annales de Didactique et de Science Cognitives*, 5, 37-65.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et Pénsee Humaine: Registres Sémiotiques et Apprentissage Intellectuel*. Peter Lang.

Duval, R. (1998). Registros de Representación Semiótica y Funcionamiento Cognitivo del Pensamiento. En Hitt (Ed.). *Investigaciones en Matemática Educativa II,* México, Grupo Editorial Iberoamericano, pp. 111-129.

Farías, L. y Montero, M. (2005). De la Trnascripción y otros Aspectos Artesanales de la Investigación Cualitativa. *International Journal of Qualitative Methods 4, (1),* 1-14.

George, A. y Veeramani, P. (1994). On Some Results in Fuzzy Metric Spaces. Fuzzy Sets and Systems, 64, 395-399.

Gil, J. (1994). *Análisis de Datos Cualitativos. Aplicaciones a la Investigación Educativa.* Barcelona : PPU.

Ginsburg, H. P., Kossan, N. E., Schwartz, R. y Swanson, D. (1983). *Protocol Methods in Research on Mathematical Thinking***.** In H. P. Ginsburg (Ed.): The Development of Mathematical Thinking. New York: Academic Press.

Godino, J. (2002). Un Enfoque Ontológico Semiótico de la Cognición Matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 22, 2/3,* 237-284.

Godino, J. y Batanero, C. (1994). Significado Institucional y Personal de los Objetos Matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14,3,* 325-355.

González, M. T. (2002). *Sistemas Simbólicos de Representación en la Enseñanza del Análisis Matemático: Perspectiva Histórica acerca de los Puntos Críticos*. Tesis Doctoral. Universidad de Salamanca.

González-Martín, A. S. (2006). *La Generalización de la Integral Impropia desde las Perspectivas Numérica, Gráfica y Simbólica Utilizando Entornos Informáticos. Problemas de Enseñanza y Aprendizaje.* Tesis Doctoral. Universidad de la Laguna.

Gravemeijer, K. y Doorman, M. (1999). Context Problems in realistic Mathematics Education: A Calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics*. Kluwer Academic Publishers, 39, 111-129.

Gray, E. y Tall, D. (1994). Duality, Ambiguity, and Flexibility: A perceptual view of simple Arithmetic's, *Journal for Research in Mathematics Education, 26, 2,* 115– 141.

Gray, E., Pinto, M., Pitta, D. y Tall, D. (1999). Knowledge Construction and Diverging Thinking in Elementary and Advanced Mathematics. *Educational Studies in Mathematic, 38,* 111-133.

Hitt, F. (1998). Visualización Matemática, Representaciones, Nuevas Tecnologías y Currículo. *Educación Matemática,* 10, 2, 23-45.

Huerta, M. P., Galán, E. y Granell, R. (2000). Concept Maps in Mathematics Education: A Possible Framework for Students' Assessment. *Ministerio de Educación Cultura y Deporte (Today Ministerio de Ciencia y Tecnología),* 1-22.

Mason, J. y Jonston-Wilder, S. (2004). *Fundamental Construs in Mathematics Education.* London: RouthledgeFalmer-The Open University.

Meel, D. E. (2003). Modelos y Teorías de la Comprensión Matemática: Comparación de los Modelos de Pirrie y Kieren sobre el crecimiento de la Comprensión Matemática y la Teoría APOE. *RELIME: Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* México, DF: Thomson, *6, 3,* 221 -271.

MEN. (2003). *La Revolución Educativa Estándares Básicos de Matemáticas y Lenguaje Educación Básica y Media*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Mundy, J. (1984). Analysis of Errors of First Year Calculus Students. En Bell, A., Low, B., y Kilpatrick, J., (Eds.). *Theory Research and Practice in Mathematics Education.* Proceedings, ICME 5. Adelaide, Working group reports and collected papers, Shell Center. Nottingham. 170-172.

Orton, A. (1980). *A Cross-sectional Study of the Understanding of Elementary Calculus in Adolescents and Young Adults.* Tesis Doctoral. University of Leeds.

Orton, A. (1983). Students` Understanding of Integration. *Educational Studies in Mathematics.* D. Rediel Publishing Company. Dordrecht: Holland/Boston: U.S.A. *14, (1),* 1 – 18.

Paschos, Th. & Faumak, V. (2006). The reflective abstraction in the construction of the concept of the definite integral. A case study. En J. Novotna; H. Moraova; M. Kretke; N. Stehlikova (eds.) *Proceedings of the 30th Conference of Internacional Group for the Psychology of Mathematics Education,* (Vol. 4, pp. 337-344). Prague: Czech Republic.

Piaget, J. (1963). Las Estructuras Matemáticas y las Estructuras Operatorias de la Inteligencia. En la Colección Psicología y Educación. *La Enseñanza de las Matemáticas* (pp. 3-28). Madrid: Editorial Aguilar.

Piaget, J.; García, R. (1982). *Psicogénesis e Historia de la Ciencia*. México, España, Argentina, Colombia. (Madrid): Siglo XXI.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1978). Psicología del Niño. Madrid, 8ª Edición: Ediciones Morata.

Rasslan, S. y TalL, D. (2002). Definitions and Images for the Definite Integral Concept. *Proceedings of the 26th PME. 4,* 89-96.

Sabariego, M. (2009). La Investigación Educativa: Génesis, Evolución y Características. En R. Bisquerra (Coord.). *Metodología de la Investigación Educativa* **(**2ª ed.). (50-87). Madrid: La Muralla.

Sánchez-Matamoros, G. M. (2004). *Análisis de la Comprensión en los Alumnos de Bachillerato y Primer año de Universidad sobre la Noción de Derivada (desarrollo del concepto).* Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla.

Sánchez-Matamoros, G. M., García, M. y Llinares, S. (2006). El desarrollo del Esquema de derivada. *Enseñanza de las ciencias, 24, 1,* 85-98.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflexions on Processes and Objects as Different sides of the same coin, *Educational Studies in Mathematics, 22,* 1 – 36.

Sfard, A. (1992). Operational origins of Mathematical Objects and the Quandary of Reification – the case of Function. En G. Harel y E. Dubinsky (Eds.) *El concept of function: Aspects of Epistemology* (pp. 59–84). Washinton DC: Mathematical Association of America.

Sfard, A. y Thompson, P. W. (1994). Problems of Reification. Representations and Mathematical Objects. En D. Kirshner, (Ed.), *Procedings of the XVI Annual Meeting of the International Group for the Psicology of Mathematics Education-North America* (pp.1 – 329). Baton Rouge LA: Lousiana State University.

Sfard A. (2000). Steering discourse between metaphors and rigor: Using focal Analysis to investigate the emergence of Mathematical Objects, *Journal for Research in Mathematics Eduction, 31, 3,* 296-327.

Sierra, M., González, M. T. y López, C. (1999). Evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de bachillerato y COU: 1940-1995. *Enseñanza de las Ciencias, 17, 3,* 463-476.

Sierra, M., González, M. T. y López, C. (2000). Concepciones de los alumnos de Bachillerato y COU sobre límite funcional y continuidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME), 3, 1,* 71-85.

Socas, M. (1997). Dificultades, Obstáculos y Errores en el Aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria. En L. Rico et al. *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria.* Cap. V, ICE/ Horsori. Barcelona. 125-154.

Socas, M. (2001). *Investigación en Didáctica de la Matemática vía Modelos de Competencia. Un estudio en relación con el Lenguaje Algebraico*. Departamento de Análisis Matemático. Universidad de la Laguna

Socas, M. (2007). Dificultades y Errores en el Aprendizaje de las Matemáticas Análisis desde el enfoque lógico semiótico. *Investigación en Educación Matemática*, 11, 19-52.

Steen, L. (1988). Picture Puzzling: Mathematicians are Rediscovering the Power of Pictorical Reasoning. *The Sciences*, 27, 41-46.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 151-169.

Tall, D. (1991). The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. En D, Tall. (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 3–21). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Tall, D. (1991). Reflections on APOS theory in Elementary and Advanced Mathematical Thinking. En O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the XXIII Conference for the Psychology of Mathematics Education*, 1, (pp. 111 – 118). Haifa.

Tall, D. (1995a). The Psychology of Symbols and Symbol Manipulators: what are we doing right? Versión Reducida Publicada en *Proceedings of the Seventh Annual International Conference on Technology in College Mathematics Teaching*. Addison-Wesley, pp. 453-457.

Tall, D. (1995b). Mathematical Growth in Elementary and Advanced Mathematical Thinking. En D. Carraher y L. Miera (Eds.), *Proceedings of XXI International Conference the Psychology of Mathematics Education*, (pp. 61-75). Recife.

Tall, D., Thomas, M., Davis, G., Gray, E. y Simpson, A. (2000). What is the Object of the Encapsulation of a Process? *Journal of Mathematical Behavior, 18, 2*, 223-241.

Tall, D., Gray, E., Bin Ali, M., Crowley, L., DeMarois, P., McGowen, M., Pitta, D., Pinto, M., Thomas, M. y Yusof, Y. (2001). Symbols and the Bifurcation between Procedural and Conceptual Thinking, Canadian Journal of Science, *Mathematics and Technology Education, 1*, 81-104.

Taylor, S. J. y Bogdan, R. (1984). *Introducción a los Métodos Cualitativos de Investigación. La búsqueda de Significados* (1ª ed.). Argentina: Piadós.

Turégano, P. (1994). *Los Conceptos en Torno a la Medida y el Aprendizaje del Cálculo Infinitesimal*. Tesis Doctoral. Universitat De València.

Trigueros, M. (2005). La Noción de Esquema en la Investigación en Matemática Educativa a Nivel Superior. *Educación matemática, 17*, *1*, 5-31.

Tzur R. y Simon, M. (2004). Distinguishing two Stages of the Mathematics Conceptual Learning. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *2*, 287 – 304.

Vinner, S. (1991). The Rol of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. En D. Tall. (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking, 66-81.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Weber, K. (2002). *Students`Understanding of Exponential and Logaritmic Functions*. http://www.math.uoc.gr/~ictm2/Proceedings/pap145.pdf
[Disponible el 26 de agosto de 2008]
Base de datos: ERIC # ED 477690.

Zimmerman, W. (1991). Visual Thinking in Calculus. En Zimmerman, W. y Cunningham, S. (Eds.). *Visualization in Teaching and Learning Mathematics.* Mathematical Association of America. 127-137.

LIBROS DE TEXTO CONSULTADOS

Abellanas, L., García, J. C. y Martínez, C. (1996). *Matemáticas 2, Bachillerato LOGSE*. Madrid: McGraw Hill.

Anzola, M. y Vizmanos, J. R. (2003). *Ciencias de la Naturaleza y de la Salud/ Tecnología, Algoritmo, Matemáticas 2, Bachillerato.* Madrid: S M.

Apóstol, T. M. (1991). *Calculus, Cálculo con Funciones de una Variable, con una Introducción al Álgebra Lineal.* (Vol.1). (2ª ed.). Barcelona: Reverté.

Biosca, A., Espinet, M. J., Fandos, M. J. y Jimeno, M. (1999). *Matemáticas II Bachillerato*. Barcelona: Edebé.

Bradley, G. L. y Smith, K. J. (2000). *Cálculo de una variable*. Madrid: Prentice Hall

Colera, J., Olivera, M. J. y Fernández, S. (1997*). Matemáticas I, .Bachillerato LOGSE*. Madrid: Anaya.

Durán, A. J. (1996). *Historia, con Personajes del Cálculo*. Madrid: Alianza Universidad.

Edwards, C. H. (1979). *The Historical Development of the Calculus.* New York: Spirnger-Verlag.

Edwars, C. H. y Penney, D. E. (1997). *Cálculo Diferencial e Integral.* (4ª ed.). México: Prentice Hall.

Finney, T. (1998). Cálculo en una Variable (9ª ed.). México: Pearson.

García, A., Gutiérrez, A., Rodríguez, G., García, F., López, A. y De la Villa, C. (1994). *Teoría y Problemas de Análisis Matemático en una variable.* Madrid: Clagsa.

Jáñez, L. (1989). *Fundamentos de Psicología Matemática.* Madrid: Pirámide.

Larson, R., Hostetler, R. P. y Edwars, B. H. (2002). *Cálculo I.* (7ª ed.). Madrid: Pirámide.

Leithold, L. (1982). *El Cálculo con Geometría Analítica*. México: Harla.

Purcell, E. J., Varberg, D., y Rigdon, S. E. (2001). *Cálculo.* (8ª ed.). México. Prentice Hall.

Rodríguez, E., Ayuso, M. B., Pinedo, C., López, S. y Díez, Á. (1993). *Matemáticas II, COU.* Zaragoza: Edelvives.

Smith, R. T. y Minton, R. B. (2000). Cálculo (Tomo 1). Bogotá: McGraw-Hill.

Stewart, J. (1998). *Cálculo de una Variable, Transcendentes Tempranas*. (3ª ed.). México: Thomson.

Stewart, J. (1999). *Cálculo Conceptos y Contextos*. México: Thomson.

Thomas, G. B. y Finney, R. L. (1996). Calculus and Analytic Geometry. (9ª ed.). United States of American: Eddison- Wesley Piblishing Company.