UNIVERSIDAD DE SALAMANCA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE PSICOLOGÍA EVOLUTIVA Y DE LA EDUCACIÓN

TESIS DOCTORAL

El papel de los conocimientos del profesorado sobre resolución de problemas y su incidencia en la práctica educativa en las aulas de educación primaria

MARTA RAMOS BAZ

DIRECTORES

Dr. Javier Rosales Pardo

Dr. Santiago Vicente Martín

Salamanca, junio 2015

EL PAPEL DE LOS CONOCIMIENTOS DEL PROFESORADO SOBRE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y SU INCIDENCIA EN LA PRÁCTICA EDUCATIVA EN LAS AULAS DE EDUCACIÓN PRIMARIA

TESIS DOCTORAL PRESENTADA POR

Marta Ramos Baz

DIRIGIDA POR

Dr. Javier Rosales Pardo

Dr. Santiago Vicente Martín

Salamanca, junio 2015

VNiVERSiDAD D SALAMANCA

CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Dr. Javier Rosales Pardo, profesor titular del Departamento de Psicología Evolutiva y de la Educación de la Universidad de Salamanca y Dr. Santiago Vicente Martín, profesor contratado doctor del Departamento de Psicología Evolutiva y de la Educación de la Universidad de Salamanca,

CERTIFICAN:

Que la Tesis Doctoral elaborada por Marta Ramos Baz y titulada "*El papel de los conocimientos del profesorado sobre resolución de problemas y su incidencia en la práctica educativa en las aulas de educación primaria*", ha sido realizada bajo nuestra dirección. Considerando que este trabajo reúne las condiciones necesarias para optar al Grado de Doctor.

Para que así conste, firmamos el presente documento.

En Salamanca, a 11 de mayo de 2015.

Fdo: Dr. Javier Rosales Pardo

Fdo: Dr. Santiago Vicente Martín

A mis padres y hermana

Gracias por ayudarme a volar alto
y, en ocasiones, a retomar el vuelo.

AGRADECIMIENTOS

Caminante no hay camino, se hace camino al andar. Ya lo dijo el poeta.

Este largo y arduo camino ha llegado a su fin y con ello el periodo de gestación de la presente Tesis Doctoral. Muchos son los obstáculos con los que me he encontrado en este recorrido, pero también son muchas las personas que han puesto su granito de arena para que fuera más llevadero, agradable y, por supuesto, no darme por vencida a pesar de sentirme exhausta en algunas ocasiones. Por ello, a pesar de que los sentimientos desbordan la frialdad de las palabras, es menester expresarles mi más sincero agradecimiento a todos ellos.

Gracias a mis directores, Javier y Santi, por confiar en mí, por apoyarme de manera incondicional desde el principio, por su paciencia infinita y por conseguir contagiarme su entusiasmo e ilusión por la investigación. Su trato cercano y afán de perseverancia han hecho posible un camino más fácil y ameno, sin dejar a un lado el rigor científico y la reflexión sobre lo realizado. Gracias a su esfuerzo y tiempo ha salido adelante esta aventura compartida. En definitiva, Gracias por ser unos verdaderos maestros.

Gracias al resto de miembros del equipo de investigación, compañeros en este viaje, por permitirme aprender de cada uno de ellos y mostrarme su mejor versión académica y personal. Seminarios, congresos, cafés, viajes, tesis paralelas, conversaciones mundanas o reuniones que empezaban a tomar rumbos diferentes, son el combustible de este trabajo.

Gracias a Manuel, profesor del departamento de Psicología Evolutiva y de la Educación de la Universidade Da Beira Interior, Colvilhá (Portugal), por haberme brindado la oportunidad de conocer otros contextos de trabajo.

Gracias a los profesores y alumnos que de una manera desinteresada y voluntaria han contribuido en la elaboración de este trabajo.

Gracias a mi familia por enseñarme que cada decisión conlleva una renuncia; por apoyarme a la hora de emprender esta aventura y, especialmente, por enseñarme a luchar por lo que quiero. No cabe duda que son un pilar fundamental de mi vida y han sido un apoyo incondicional en esos momentos en los que miedos y dudas oscurecen la luz al final del camino. Este también es vuestro premio.

Gracias a mis amigos por apoyarme en esta decisión, por comprender y cuestionar mis ausencias, por los momentos de cansancio y frustración, por ser mi nexo de unión con el mundo real. Especial agradecimiento merece mi quasi hermana porque ella es quién verdaderamente ha sufrido día a día mis divagaciones, miedos, angustias y alegrías.

¡GRACIAS por todo, GRACIAS por tanto!

Resumen

La investigación educativa ha mostrado que cuando los profesores resuelven problemas verbales conjuntamente con sus alumnos se comportan de manera superficial y paradigmática. Dado que este comportamiento podría estar influenciado por el conocimiento del propio profesor, y que esta práctica podría explicar parte del bajo rendimiento de los alumnos españoles en matemáticas, la presente Tesis Doctoral pretende indagar en el conocimiento sobre resolución de problemas verbales de una muestra de maestros de educación primaria españoles y analizar su incidencia en la práctica educativa.

Para ello se llevan a cabo dos estudios diferenciados. Uno primero en el que se describe la orientación y explicitud del conocimiento sobre resolución de problemas verbales de maestros en formación y en servicio. Y uno segundo en el que se analiza la relación entre el conocimiento, la tarea y la práctica. Para ello se analiza el comportamiento de maestros con diferente perfil de conocimiento resolviendo tareas de diferente demanda cognitiva.

Los resultados obtenidos muestran, por un lado, diferencias entre el conocimiento de maestros en formación y en servicio, con una tendencia de estos últimos hacia el procesamiento superficial y una mayor explicitud de sus argumentos que los maestros en formación. Por otro lado, el conocimiento parece predecir, en mayor grado que la tarea, la práctica docente cuando los maestros resuelven problemas verbales con sus alumnos.

Palabras clave: Resolución de problemas verbales, conocimiento del maestro, interacción profesor-alumnos, tareas, maestros en formación, maestros en ejercicio.

Abstract

Educational research has shown that when teachers solve word problems jointly with their students they behave in a paradigmatic and superficial way. This behaviour could be mediated by the teacher knowledge itself, and this practice might explain part of the low student´s achievement. For these reasons, this Dissertation aims to investigate the specialized teacher knowledge about word problem solving in a sample of Spanish primary school teachers and to analyse it impact on educational practice.

To this end, two studies are conducted. One first describes the orientation and explicitness of teacher knowledge about word problem solving of inservice and preservice teachers. And, one second analyses the relationship between knowledge, task and practice. To do this, it analyses the behaviour of teachers with different knowledge profile solving tasks with different cognitive demand.

The results show, on the one hand, significant differences between pre-service and in-service teacher's knowledge with a tendency of the latter to a surface processing and greater explicitness of his arguments that pre-service teachers. On the other hand, knowledge seems to predict, in a greater way than the task, teaching practice when teachers solve word problems with their students.

Keywords: word problem solving, teacher knowledge, classroom interaction, tasks, inservice teachers, preservice teachers.

“Cuando salgas en el viaje hacia Ítaca,
desea que el camino sea largo,
pleno de aventuras, pleno de conocimientos.
A los Lestrigones y a los Cíclopes,
al irritado Poseidón no temas,
tales cosas en tu ruta nunca hallarás,
si elevado se mantiene tu pensamiento,
si una selecta emoción tu espíritu y tu cuerpo embarga”.

(Kavafis, X)

ÍNDICE DE CONTENIDOS

SEGUNDA PARTE: ESTUDIOS EMPÍRICOS

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE ABREVIATURAS

CCK:	Common Content Knowledge
CK:	Content Knowledge
CHIPS:	Concrete Human-Like Inferential Problem Solver
CI:	Construcción-Integración
COACTIV:	professional competence of teachers, COgnitively ACTIVating instruction, and development os students´ mathematics literacy
KAM:	Knowledge About Mathematics
KCS:	Knowledge of Content and Student
KCT:	Knowledge of Content and Teaching
KFLM:	Knowledge of Features of Learning Mathematics
KOT:	Knowledge Of Topics
KMLS:	Knowledge of Mathematics Learning Standards
KMT:	Knowledge of Mathematics Teaching
KSM:	Knowledge of the Structure of Mathematics
HCK:	Horizon Content Knowledge
IEA:	International Association for the Evaluaction of Educational Achievement
INEE:	Instituto Nacional de Evaluación Educativa
MES:	Modelo Episódico de la Situación
MF:	Maestros en Formación
MK:	Mathematical Knowledge
MKT:	Mathematical Knowledge for Teaching
MS:	Maestros en Servicio
MTSK:	Mathematics Teachers Specialised Knowledge
NCTM:	National Council of Teachers of Mathematics
OECD:	Organization for Economic Co-operation and Development
PCK:	Pedagogical Content Knowledge
PISA:	Program for International Student Assessment
PUFM:	Profound Understanding of Fundamental Mathematics
RAE:	Real Academia Española
RP:	Resolución de Problemas
SCK:	Specialized Content Knowledge
SIDM:	Seminario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas
TEDS-M:	Teacher Education and Development Study in Mathematics
TIMSS:	Third International Mathematics and Science Study
VD:	Variable Dependiente
VI:	Variable Independiente

INTRODUCCIÓN

"Una ojeada a este lado "oculto" de la enseñanza puede aumentar nuestra comprensión de algunos de los rasgos más visibles y conocidos del proceso"

(Clark y Peterson, 1990, p.444)

Las matemáticas junto con la lectura son dos herramientas fundamentales en la sociedad en la que vivimos puesto que ambas pueden considerarse aprendizajes instrumentales en la vida de una persona. Se trata de dos áreas esenciales que permiten la adquisición de conocimientos y el desarrollo de competencias. Así por ejemplo, la competencia matemática se entendería como

> la aptitud de un individuo para identificar y comprender el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo, alcanzar razonamientos bien fundados y utilizar y participar en las matemáticas en función de las necesidades de su vida como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo (OECD, 2005, p. 364).

Siguiendo con las matemáticas, la resolución de problemas (en adelante, RP) es considerada como una de las tareas claves en el aprendizaje de las mismas, ya que permite a los alumnos aplicar los conocimientos y procedimientos matemáticos aprendidos a situaciones próximas a la vida real (OECD, 1999). En este sentido, NCTM (1989) considera dicha tarea como la razón principal para el estudio de esta disciplina. Esta relevancia se contemplaba tanto en la hasta hace unos meses vigente Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación; como en la recientemente implantada Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la Mejora de la Calidad Educativa, con su correspondiente Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria.

A pesar de esta importancia manifiesta, evaluaciones internacionales como *Third International Mathematics and Science Study* (TIMSS) o *Program for International Student Assessment* (PISA) han mostrado las dificultades que presentan los alumnos españoles en habilidades resolutorias, siendo menos competentes que los de buena parte de los países de la OCDE (IEA, 2013a; OCDE, 2010, 2013).

Una posible explicación a este bajo rendimiento podría ser el tipo de práctica educativa que se lleva a cabo en las aulas. El comportamiento sistemático de los maestros no parece estar en consonancia con la relevancia de la resolución de problemas. Así por ejemplo, diferentes estudios muestran que cuando los profesores trabajan con sus alumnos, los contenidos matemáticos son casi siempre de bajo nivel si atendemos a lo que significa resolver un problema (Depaepe, De Corte y Verschaffel, 2010), incluso cuando los problemas contienen ayudas para que los alumnos puedan resolverlos a través del razonamiento (Rosales, Vicente, Chamoso, Múñez y Orrantia, 2012); y además, la participación de los alumnos en el desarrollo de su capacidad de resolver problemas es muy limitada (Chiu, 2004; Meyer y Turner, 2002; Webb, 2009).

Una segunda razón podría ser la naturaleza de los problemas y modelos de resolución recogidos en los libros de texto, considerando que dicho material sigue siendo la herramienta didáctica más utilizada por los maestros (Hiebert et al., 2003; Mullins, Martin y Foy, 2008; Vicente, Rosales, Chamoso y Muñez, 2013). En este sentido, Chamoso, Vicente, Manchado y Muñez (2013) han mostrado que la mayoría de los problemas propuestos por los libros de texto de matemáticas de nuestro país son tan estereotipados que encajan con el modelo superficial de resolución que esos mismos libros presentan como orientación para resolver problemas. En esta línea, Sánchez y Vicente (en prensa) ha mostrado cómo los libros de texto proponen modelos de resolución de problemas en los que prácticamente nunca aparecen orientaciones sobre cómo razonar para elegir las operaciones necesarias para resolver un problema, sino que simplemente señalan al alumno qué hay que hacer o, incluso, le animan a elegir una palabra clave que le indique, sin necesidad de razonamiento alguno, qué operación deben ejecutar.

Ahora bien, aun conociendo qué hacen los maestros cuando resuelven problemas con sus alumnos y qué tipos de tareas utilizan para ello, se observa, por un lado, que los resultados de los alumnos son similares a lo largo de las diferentes ediciones de PISA o TIMSS; y por otro, que el comportamiento de los maestros en las aulas es persistente. Por tanto, esta realidad obliga a profundizar algo más en esta cuestión, de manera que se pueda tener una visión integrada del porqué de esta preocupante situación de la educación española.

Considerando que los procesos del pensamiento podrían explicar el modo de comportarse los maestros en las aulas (Clark y Peterson, 1986) y que el conocimiento matemático influye en el rendimiento de los alumnos (Hill, Rowan y Ball, 2005), en la manera de tratar las tareas (Charalombous, Hill y Mitchell, 2012) y en el modo de comportarse los maestros en el aula (Hill et al., 2008), con la presente Tesis Doctoral se pretende indagar acerca del conocimiento sobre resolución de problemas que posee una muestra de maestros de educación primaria de nuestro país y su incidencia en la práctica educativa.

Teniendo en cuenta este planteamiento, consideramos necesario presentar el contenido que encontrará el lector a lo largo del presente manuscrito. Dicha Tesis Doctoral se estructura en cinco capítulos, de los cuales los dos primeros se refieren al marco teórico que sustentan nuestras hipótesis de trabajo; los dos siguientes –capítulos III y IV-, a los aspectos empíricos; y el último capítulo, el V, muestra las conclusiones más relevantes derivadas de la investigación en su conjunto.

En el capítulo primero se recogen los aspectos fundamentales de uno de los dos bloques de contenidos sobre los que versa este trabajo: la resolución de problemas aritmético verbales. Para ello, responderemos a las siguientes preguntas: ¿qué entendemos por problema aritmético verbal? seguido de su clasificación atendiendo a su estructura semántica; ¿en qué consiste resolver un problema? y ¿qué tipo de ayudas textuales promueven que los alumnos resuelvan los problemas de una manera más razonada? Por tanto, a lo largo de este primer capítulo nos centraremos en conocer sucintamente aquellos aspectos que la investigación ha mostrado son útiles y eficaces para llevar a cabo un proceso de resolución de problemas verbales basado en el razonamiento.

El segundo capítulo está integrado por los aspectos referidos al segundo bloque temático: el conocimiento del maestro. A partir de la realidad educativa, se definirá el conocimiento tomando como base distintos modelos que han tratado de organizarlo. A continuación, se llevará a cabo una revisión bibliográfica sobre los estudios más relevantes en relación al conocimiento de los profesores sobre la disciplina de matemáticas, y más concretamente sobre el contenido específico de resolución de problemas. Seguidamente, prestaremos atención a la relación entre el conocimiento del maestro y su propia práctica en el aula, ampliamente aceptada por la comunidad científica. Para ello, consideraremos, por un lado, el papel de la experiencia del docente, y por otro, el rol de la tarea como variable mediadora en esta relación.

El tercero describe el primer estudio empírico llevado a cabo, en el que se explora si el conocimiento de los profesores en ejercicio es diferente del de los profesores en formación en tareas de resolución de problemas verbales, en cuanto a procesos y al grado de explicitud.

En el cuarto capítulo se plantea el segundo de los estudios empíricos realizados, a través del cual se analiza el rol del conocimiento del profesor y la tarea en su práctica en el aula durante la resolución conjunta con sus alumnos de problemas verbales. Para ello, maestros con diferente tipo de conocimiento resolverán tareas de diferente demanda cognitiva.

Finalmente, el capítulo quinto recoge una síntesis de la interpretación de los resultados obtenidos en ambos estudios para, por último, generar unas conclusiones finales, exponer las limitaciones y puntos fuertes del trabajo, las posibles implicaciones educativas y cuestiones que aún permanecen abiertas y permitirán ulteriores estudios.

Llegados a este punto, y sabiendo qué buscamos, invitamos al lector a acompañarnos en este camino que aquí iniciamos.

PRIMERA PARTE: MARCO TEÓRICO

CAPÍTULO I:

Resolución de Problemas

Tal y como se expresó en el epígrafe introductorio, el conocimiento del maestro podría explicar, al menos en parte, las dificultades que manifiestan los alumnos a la hora de resolver problemas a través del razonamiento. Por tanto, para saber cuáles son los conocimientos de los maestros sobre resolución de problemas, debemos saber en primer lugar en qué consiste resolver un problema y los tipos de problemas que hay. Solo conociendo esto se podrá elaborar una herramienta que permita valorar y obtener una perspectiva del conocimiento del maestro acorde a la realidad, alejándose así de una valoración prescriptiva. Y lo que es más importante, se dispondrá de información relevante para poder abordar cualquier propuesta de cambio que afecte al modo de actuar de los profesores en el aula. En este sentido, sólo conociendo lo que hacen y sabiendo porqué lo hacen se podrá abordar cualquier proceso de cambio.

Así, en primer lugar, es necesario clarificar al lector el marco conceptual asumido, es decir, responder a la cuestión qué entendemos por problema y más concretamente por problema aritmético verbal. ¿Por qué verbal? Porque es el formato más usual al que se enfrentan los alumnos y ¿por qué aritmético? porque es el más frecuente en los libros de texto que usan los alumnos. Seguidamente, se expondrá su clasificación atendiendo a su estructura semántica. En segundo lugar, se abordará la cuestión ¿en qué consiste resolver un problema? Dando respuesta desde los modelos pioneros hasta aquel que se acerca más a los planteamientos actuales, todo ello desde un enfoque cognitivo que enfatiza los procesos de razonamiento. Finalizaremos el capítulo viendo que los distintos procesos a los que aluden los modelos vistos es posible ponerlos en marcha gracias a la inclusión de determinados tipos de información en los enunciados de los problemas. En este sentido, nos centraremos en los estudios de reescritura de problemas verbales. Estas cuestiones son las que veremos en los siguientes epígrafes.

1.1.- PROBLEMA MATEMÁTICO

En las aulas se pueden llevar a cabo diferentes tipos de tareas (Díaz y Poblete, 2001). Por ejemplo, tal y como señalan estos autores, los alumnos pueden resolver *ejercicios* como “(96+11)-50”, cuyo único requisito es aplicar contenidos vistos anteriormente. Sin embargo, también pueden resolver tareas denominadas *problemas* en las que el alumno requiere de una comprensión pues no existe un algoritmo inmediato que le lleve a la solución correcta. Un ejemplo de problema sería:

> “Un pastor tenía 57 ovejas. Compró algunas ovejas más. Los lobos se han comido 11 ovejas y al pastor le han quedado 96. ¿Cuántas ovejas compró el pastor?”.

Este último tipo de tareas son las que constituyen el foco de interés del presente trabajo.

Concretamente, serán los problemas aritméticos verbales puesto que son los más usuales en las aulas por ser el tipo mayoritario en los libros de texto (Orrantia, González y Vicente, 2005) y, como se verá más adelante van a ser claves en nuestro estudio. Así,

> un problema verbal puede ser definido como descripciones verbales de situaciones problemáticas en las que se plantean una o más preguntas cuya respuesta se puede obtener mediante la aplicación de operaciones matemáticas de los datos numéricos disponibles en el enunciado del problema (Verschaffel, Greer y De Corte, 2000, pp. ix).

Esto es, el objetivo de un problema aritmético verbal es dar respuesta a preguntas matemáticas a partir de la descripción de la situación dada en el enunciado, de modo que conocimientos matemáticos y del mundo real deben ser considerados. La consideración de ambos tipos de información es la principal diferencia respecto a la conceptualización de Puig y Cerdán (1988). Dichos autores conciben el problema aritmético como una tarea la que se presenta un enunciado en el que

> la información que se proporciona tiene carácter cuantitativo ya que los datos suelen ser cantidades; la condición expresa relaciones de tipo cuantitativo y la pregunta se refiere a la determinación de una o varias cantidades, o relaciones entre cantidades. La resolución del problema, […] consiste en la realización de una o varias operaciones aritméticas (p.17).

Ahora bien, los problemas aritmético verbales podrían incluirse en distintas categorías en función de los criterios de clasificación utilizados. Por ejemplo, si atendemos a su naturaleza (Díaz y Poblete, 2001) y final –solución- (Isoda y Olfos, 2009; Pehkonen, 1991, citados en Pino 2013) podrían considerarse rutinarios y cerrados, respectivamente, por tener una única solución válida además de un procedimiento estándar para su resolución. Si atendemos al nivel de demanda cognitiva (IEA, 2013b) encajarían en el dominio aplicación -problemas rutinarios- a pesar de que no todos requieran aplicar las mismas habilidades cognitivas. Sin embargo, no podrían considerarse del dominio razonamiento -problemas no rutinarios- por estar inmersos en contextos familiares y conocidos para los alumnos.

Ahondar en esta cuestión se aleja de nuestro objetivo, por ello, es solo una consideración que el lector debe tener presente, más allá de conocer el tipo de tarea que vamos manejar.

1.2.- EL PROBLEMA ARITMÉTICO VERBAL Y SU TIPOLOGÍA

Sabiendo que resolver problemas es una de las tareas matemáticas a las que dedican tiempo los alumnos en el aula (Hiebert et al., 2003) y concretamente los problemas aritmético verbales son los más presentes en los libros de texto (Orrantia et al., 2005), es necesario profundizar en la caracterización es este tipo de tareas.

Este tipo de problemas se pueden clasificar atendiendo a la estructura semántica. Para ello nos remontamos a la propuesta de Heller y Greeno (1978), quienes establecieron tres grupos: de cambio, de comparación y de combinación. A estos tres tipos de problemas algunos autores como Carpenter y Moser (1983) sumaron un cuarto: de igualación.

a) De cambio

Se caracterizan porque sobre una cantidad inicial se produce una acción, un cambio, que da lugar a un incremento o decremento (si se trata de un problema aditivo o de substracción) de la cantidad final. Es habitual que aparezca expresado en términos de “ganar” o “perder”.

Este tipo de problemas está procesado por una secuencia temporal de sucesos, distinguiéndose tres momentos desde que la cantidad inicial es sometida a la acción que la modifica. Las tres cantidades presentes en esta situación dinámica reciben los nombres de cantidad inicial, final y de cambio.

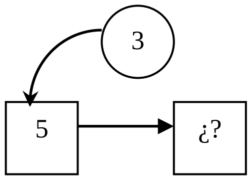
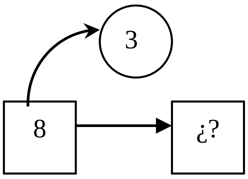
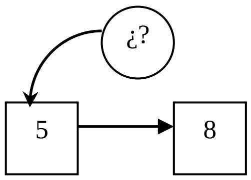
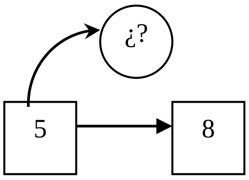
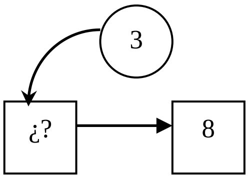
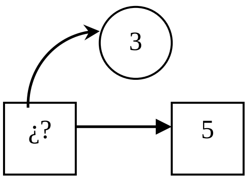
TIPO DE PROBLEMAS	EXPLICACIONES Y ENUNCIADO TIPO
CA1 	CAMBIO 1. Se parte de una cantidad inicial que se incrementa mediante una acción de añadir. La pregunta se refiere a la cantidad resultante. Juan tenía 5 canicas. En una partida ganó 3 canicas. ¿Cuántas canicas tiene ahora Juan?
CA2 	CAMBIO 2. Se parte de una cantidad inicial, que sufre un decremento. La pregunta hace referencia al conjunto final. Juan tenía 8 canicas. En una partida perdió 3 canicas ¿Cuántas canicas tiene ahora Juan?
CA 3 	CAMBIO 3. Se parte de una cantidad inicial, que sufre cambio de cantidad desconocida y que da como resultado un conjunto final conocido y mayor que el conjunto inicial. La pregunta hace referencia al conjunto de cambio. Juan tenía 5 canicas. En una partida ganó algunas canicas. Ahora Juan tiene 8 canicas. ¿Cuántas canicas ganó Juan?
CA 4 	CAMBIO 4. Se parte de una cantidad inicial, que experimenta un cambio de cantidad desconocida y que da como resultado una cantidad conocida y menor que la inicial. La pregunta hace referencia al conjunto de cambio. Juan tenía 8 canicas. En una partida perdió algunas canicas. Ahora Juan tiene 5 canicas. ¿Cuántas canicas perdió Juan?
CA 5 	CAMBIO 5. Se parte de una cantidad inicial desconocida, que se incrementa con un conjunto de cantidad conocida, y que da como resultado otra cantidad conocida Juan tenía algunas canicas. En una partida ganó 3 canicas Ahora Juan tiene 8 canicas. ¿Cuántas canicas ganó Juan?
CA 6 	CAMBIO 6. Se parte de una cantidad inicial desconocida que se decrementa con un conjunto de cantidad conocida, y que da como resultado otra cantidad conocida Juan tenía algunas canicas. En una partida perdió 3 canicas. Ahora Juan tiene 5 canicas. ¿Cuántas canicas perdió Juan?

Tabla 1. Tipos de problemas de cambio. (Adaptada de Heller y Greeno, 1978)

b) De comparación

Son aquellos problemas, que a diferencia de los problemas de cambio, presentan una situación estática, esto es, las cantidades no experimentan variación. En ellos dos conjuntos se comparan (el conjunto de referencia y el conjunto comparado), resultando un tercer conjunto (el conjunto diferencia) que representa la diferencia entre ambos.

La cantidad desconocida puede ser el conjunto de referencia, el comparado o la diferencia. En función de la relación comparativa "más que" o "menos que", Heller y Greeno (1978) diferencian 6 tipos de problemas de comparación.

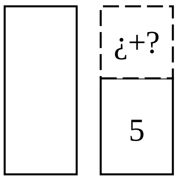
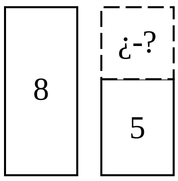
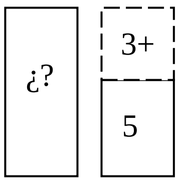
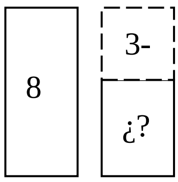
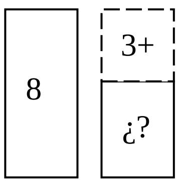
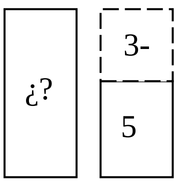
TIPO DE PROBLEMAS	ENUNCIADO TIPO Y EXPLICACIONES
CP 1 	COMPARACIÓN 1. En este tipo de problemas conocemos el conjunto de referencia y el de comparación, y la pregunta alude al conjunto diferencia en términos de "cuantos más" elementos tiene el conjunto comparado respecto al referente. Juan tiene 8 canicas. Pedro tiene 5 canicas. ¿Cuántas canicas tiene Juan más que Pedro?
CP 2 	COMPARACIÓN 2. En este caso también se conoce el conjunto de referencia y el de comparación, y la pregunta alude al conjunto diferencia, pero en este caso en términos de "cuántos menos" elementos tiene el conjunto comparado respecto al de referencia. Juan tiene 8 canicas. Pedro tiene 5 canicas. ¿Cuántas canicas tiene Pedro menos que Juan?
CP 3 	COMPARACIÓN 3. En este tipo de problemas se conoce el conjunto referencia y la diferencia respecto al conjunto comparado indicando cuántos más tiene, y se pregunta por éste conjunto comparado. Pedro tiene 5 canicas. Juan tiene 3 canicas más que Pedro ¿Cuántas canicas tiene Juan?
CP 4 	COMPARACIÓN 4. En los problemas de comparación 4 se conoce el conjunto de referencia y la diferencia respecto al conjunto comparado señalando el número de elementos menos que tiene, y se pregunta por el conjunto comparado. Juan tiene 8 canicas. Pedro tiene 3 canicas menos que Juan ¿Cuántas canicas tiene Pedro?
CP 5 	COMPARACIÓN 5. Los problemas de comparación 5 tienen como cantidades conocidas el conjunto comparado y el de diferencia apuntando cuantos elementos más tiene el de referencia, y pregunta por ese conjunto de referencia. Juan tiene 8 canicas. Juan tiene 3 canicas más que Pedro. ¿Cuántas canicas tiene Pedro?
CP 6 	COMPARACIÓN 6. Este último tipo de problemas de comparación se caracteriza porque las cantidades conocidas son el conjunto comparado y la diferencia expresada en términos de cuántos menos tiene el conjunto comparado respecto al de referencia, habiendo que determinar ese conjunto de referencia. Pedro tiene 5 canicas. Pedro tiene 3 canicas menos que Juan. ¿Cuántas canicas tiene Juan?

Tabla 2. Tipos de problemas de comparación. (Adaptada de Heller y Greeno, 1978)

c) De combinación

Incluye aquellos problemas en los que dos partes se combinan entre sí para dar lugar a una cantidad total, respondiendo al esquema parte-todo. La incógnita del problema puede versar acerca del todo o acerca de una de las partes. Al igual que los problemas de comparación y a diferencia de los de cambio, se trata de una situación estática en la que las cantidades no sufren ninguna alteración.

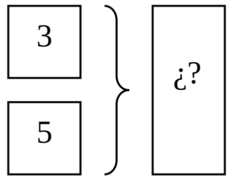
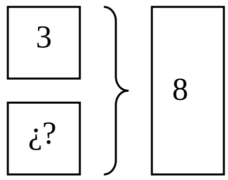
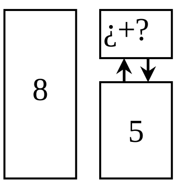
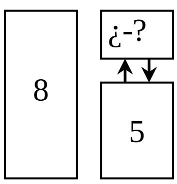
TIPO DE PROBLEMAS	ENUNCIADO TIPO Y EXPLICACIONES
CB 1 	COMBINACION 1. En los problemas de combinación 1 las dos partes se reúnen para formar un todo. Juan tiene 3 canicas. Pedro tiene 5 canicas. ¿Cuántas canicas tiene entre los dos?
CB 2 	COMBINACIÓN 2. En este segundo tipo de problemas de combinación se conoce el todo y una de las partes, y se pregunta por la otra. Juan y Pedro tienen 8 canicas entre los dos. Juan tiene 3 canicas (o Pedro tiene 5 canicas). ¿Cuántas canicas tiene Pedro (o Juan)

Tabla 3. Tipos de problemas de combinación. (Adaptada de Heller y Greeno, 1978)

d) De igualación

A estas tres categorías algunos autores añaden una cuarta denominada de igualación y caracterizada por mezclar estructuras de comparación y cambio a través del comparativo de igualdad “tantos como”. De modo que, una acción dinámica (cambio) tiene lugar dentro de una situación estática (comparación). Por tanto, entendemos que conceptualmente no se trata de un nuevo tipo de problemas, sino una combinación de dos de los tipos referidos en líneas anteriores.

TIPO DE PROBLEMAS	ENUNCIADO TIPO Y EXPLICACIONES
IG 1 	IGUALACIÓN 1. En este primer tipo de problemas se conoce el conjunto mayor y menor, y se pregunta por la diferencia en términos de cuánto hay que añadir al comparado para igualar los dos conjuntos. Juan tiene 8 canicas. Pedro tiene 5 canicas. ¿Cuántas canicas le tienen que dar a Pedro para tener las mismas que Juan?
IG 2 	IGUALACIÓN 2. En los problemas de igualación 2 también se conoce el conjunto mayor y el comparado, y se pregunta por la diferencia en términos de cuánto hay que quitar al mayor para que los dos conjuntos sean iguales. Juan tiene 8 canicas. Pedro tiene 5 canicas. ¿Cuántas canicas le tienen que quitar a Juan para que tenga las mismas que Pedro?

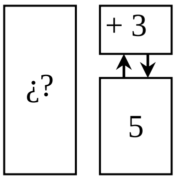
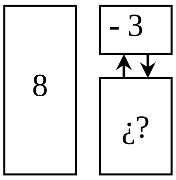
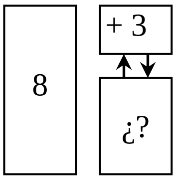
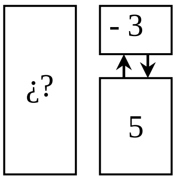
IG 3 	IGUALACIÓN 3. En estos problemas se conocen el conjunto menor y la diferencia que habría que añadirle para igualarlo con el mayor, que en este caso es el desconocido. Pedro tiene 5 canicas. Si le dieran 3 canicas más tendría las mismas que Juan. ¿Cuántas canicas tiene Juan?
IG 4 	IGUALACIÓN 4. Estos problemas proponen como cantidades conocidas el conjunto mayor y la diferencia que habría que quitarle a éste para igualarlo con el menor, que en este caso, es la cantidad desconocida. Juan tiene 8 canicas. Si le quitaran 3 canicas tendría las mismas que Pedro. ¿Cuántas canicas tiene Pedro?
IG 5 	IGUALACIÓN 5. En este tipo de problema se conoce el conjunto mayor y la diferencia que habría que añadirle al menor, que es el desconocido, para que ambos fueran iguales. Juan tiene 8 canicas. Si Pedro tuviera 3 canicas más tendría las mismas que Juan. ¿Cuántas canicas tiene Pedro?
IG 6 	IGUALACIÓN 6. En estos problemas se conoce el conjunto menor y la diferencia existente respecto al conjunto mayor, que habría que quitar al mayor para que ambas cantidades fueran iguales. Pedro tiene 5 canicas. Si a Juan le quitaran 3 canicas tendría las mimas que Pedro. ¿Cuántas canicas tiene Juan?

Tabla 4. Tipos de problemas de igualación. (Adaptada de Heller y Greeno, 1978)

Teniendo presente esta clasificación, el número total de tipos de problemas es de 20, correspondiéndose 6 de cambio, 6 de comparación, 6 de igualación y 2 de combinación.

Siguiendo a Lewis y Mayer (1987), la tipología de problemas descritos, además, puede clasificarse en dos grupos: consistentes e inconsistentes, en función de la relación existente entre la estructura superficial del problema (o término verbal) y la operación necesaria para resolverlo. En otras palabras, fáciles y difíciles ya que los consistentes son más fáciles de resolver que los inconsistentes puesto que para ello no es necesaria una comprensión absoluta del enunciado del problema.

En este sentido, en los problemas consistentes la estructura superficial (verbal) dada por palabras clave como “ganar”, “perder”, coincide con la operación aritmética necesaria para resolver el problema. Estrategias como la palabra clave (Hegarty, Mayer y Monk, 1995; Nesher y Teubal, 1975; Verschaffel, De Corte y Pauwels, 1992) permiten deducir la operación necesaria para resolver este tipo de problemas, sin tratar de comprender el problema. Por ejemplo, cuando aparece el término “menos”, el problema se resuelve mediante una resta o, por el contrario, el término “ganar” indica la necesidad de sumar.

Por el contrario, los problemas inconsistentes son aquellos en los que no coincide la palabra clave (enunciado verbal) con la operación que se debe realizar para resolver el problema, resultando ser correcta la contraria. Esto es, que la presencia de términos como ganó, al contrario de lo que ocurría con los problemas consistentes, requiere de una resta para resolver. Para solucionarlos es necesario un conocimiento conceptual más sofisticado como es el de estructura parte-todo.

Finalmente, en la Tabla 5 se presenta la relación entre la clasificación de problemas según su estructura semántica y según su consistencia.

		SEGÚN SU CONSISTENCIA	
		consistente	**inconsistente**
SEGÚN SU ESTRUCTURA SEMÁNTICA	**cambio**	1, 2, 4	3, 5, 6
	combinación	1	2
	comparación	2, 3, 4	1, 5, 6
	igualación	2, 3, 4	1, 5, 6

Tabla 5. Relación de los problemas según su estructura semántica y su consistencia.

Para resolver tareas de este tipo los alumnos ponen en marcha un buen número de conocimientos, no sólo son matemáticos sino también aquellos relacionados con el contexto. Por tanto, conocidos y delimitados los problemas a los que se enfrentan los alumnos con mayor frecuencia, veamos exactamente qué implica resolver una tarea de este tipo.

1.3.- ¿EN QUÉ CONSISTE RESOLVER UN PROBLEMA ARITMÉTICO VERBAL? MODELOS DE RESOLUCIÓN

Dado que a esta pregunta se le puede dar respuesta desde distintas disciplinas, creemos conveniente señalar que en nuestro trabajo lo haremos desde un punto de vista cognitivo y limitado a la resolución de problemas aritmético verbales. De hecho, es esta especificidad la que diferencia los modelos cognitivos de las propuestas heurísticas de Polya (1945) o Schoenfeld (1985). Estos últimos se conciben como genéricos y aplicables a cualquier tipo de problema, de modo que se aleja de nuestros intereses concretos.

Teniendo esto en cuenta, se considera que el proceso de resolución supone emitir una respuesta a través de un proceso de comprensión (Kintsch, 1998), el cual implicaría generar un modelo de la situación y un modelo del problema. Esto es, prestar atención no solo a la información puramente matemática, sino también a la información de carácter más cualitativo.

1.3.1.- Modelos de resolución

Durante los últimos 30 años la necesidad de conocer el proceso para resolver problemas aritméticos ha promovido el planteamiento de diferentes modelos teóricos al respecto. En este sentido, las aportaciones realizadas desde la Psicología Cognitiva (Briars y Larkin, 1984; Cummins, Kintsch, Reusser y Weimer, 1988; Kintsch, 1988, 1998; Kintsch y Greeno, 1985; Reusser, 1988; Riley, Greeno y Heller, 1983; Riley y Greeno, 1988 o Verschaffel, Greer y De Corte, 2000) parten de la idea de que resolver un problema es una tarea compleja en la que hay que activar estrategias sofisticadas para lograr una comprensión del enunciado. A pesar de este nexo de unión, es importante señalar que cada una de las propuestas enfatiza unos u otros aspectos del proceso.

Teniendo esto en cuenta, estos modelos se clasificarán en tres bloques en función del papel que le concedieron a los elementos no matemáticos en el proceso de resolución. Por un lado, los modelos clásicos que utilizan información estrictamente matemática. Por otro, aquellos que, además de la información matemática, pasan a considerar la información textual en el proceso de resolución. Y por último, aquellos modelos que se sirven tanto de la información matemática como de aquella más cualitativa que permite comprender y razonar sobre la situación.

a) Modelos Matemáticos

En este grupo encontramos los modelos de Riley, Greeno y Heller (1983) y Briars y Larkin (1984) con su propuesta denominada CHIPS *(Concrete Human-Like Inferential Problem Solver)*. Dichas propuestas recurren exclusivamente al conocimiento matemático para resolver el problema, obviando el resto de información que se ha demostrado es imprescindible para la resolución (Verschaffel et al., 2000).

En el caso de problemas consistentes estos modelos eran efectivos, si bien, en los problemas en los que operación y palabra clave no coincidían –inconsistentes-, no lo eran tanto.

Ambos modelos permitían generar una representación interna de la estructura matemática, la cual se conforma por la organización de las cantidades así como las relaciones matemáticas existentes entre ellas. Esto significaría conocer la estructura parte-todo entre los diferentes conjuntos (Orrantia, 2003), imprescindible para resolver problemas inconsistentes.

Por ejemplo, resolver el siguiente problema de cambio:

> "Un pastor tenía 57 ovejas. Compró algunas ovejas más. Los lobos se han comido 11 ovejas y al pastor le han quedado 96. ¿Cuántas ovejas compró el pastor?",

según estos modelos, consistiría básicamente en que los alumnos pusieran en práctica estrategias de resolución como las siguientes. Por un lado, reconocer que el conjunto inicial (A) en la primera situación inconsistente; y el conjunto de cambio (B) para la segunda, puede hallarse invirtiendo la secuencia de acciones especificadas en la frase del problema, de modo que A-11=96 implica que 96+11=A y 57+B=107 conlleva que 107-57= B (Riley et al., 1983). Por otro lado, Briars y Larkin (1984) planteaban procesar las expresiones "compró" o "se han comido" de manera que pueda interpretarse, en la primera situación, que el conjunto desconocido había crecido (+?), y en la segunda que había decrecido (-11).

Partiendo de que estos dos modelos tan solo procesaban la información de carácter cuantitativo, Kintsch y Greeno (1985) introducen la necesidad de prestar atención, además, a aquella más cualitativa. Esto es, la dimensión textual del problema cobra relevancia.

b) Modelos Textuales

Este segundo grupo de modelos integra aquellos que consideran el procesamiento textual como parte del proceso de resolución del problema, es decir, que la información no estrictamente matemática también es procesada e influye en la resolución. Todos ellos comparten la crítica a los modelos clásicos de procesar un tipo de información eminentemente matemática, si bien difieren en la operacionalización de la comprensión del texto del problema.

Un ejemplo de este tipo de modelos es el de Kintsch y Greeno (1985). Dicho modelo parte de la teoría general de comprensión de textos desarrollada por Van Dijk y Kintsch (1983). En esta propuesta se considera que resolver un problema significa generar una representación del texto base proposicional y un modelo del problema. Esto se lograría a través de la aplicación de esquemas semánticos similares a las superestructuras de los textos que permiten procesar el texto del problema organizando la información del texto base.

No obstante, aunque Kintsch y Greeno (1985) consideran la comprensión de toda la información textual -la matemática y la que no lo es-, en sus estudios utilizaron problemas que carecían de información cualitativa (Staub y Reusser, 1995).

A pesar de los avances planteados por estos autores, los modelos coetáneos al de Kintsch y Greeno, desarrollados por Reusser (1985, 1988, 1990) y Kintsch (1988, 1998), recibieron mayor atención por no sólo considerar el procesamiento de la información textual, si no también aquella más cualitativa que permite comprender la situación en la que se halla inmerso el problema. Ambos modelos consideran la información vinculada a los personajes (intenciones o metas) como aspecto clave en la resolución del problema, mientras que, en los modelos descritos anteriormente dicha información era considerada irrelevante. Por esta razón, se pueden incluir en el tercer grupo de modelos, al que seguidamente damos paso.

c) Modelos situacionales

- **Reusser (1985, 1988, 1990). Modelo MES.**

Es una evolución del modelo anterior, si bien, su principal novedad plantea la necesidad de crear un *Modelo Episódico de la Situación* (en adelante, MES), que como se verá más adelante está localizado entre el texto base y el modelo del problema.

Según este modelo el proceso de resolución de problemas puede dividirse en cinco pasos.

En primer lugar, se comprende el texto a través de la representación proposicional del texto del problema -texto base-, tal y como Kintsch y Greeno (1985) propusieron. Segundo, se genera el MES, es decir, una representación cualitativa de los personajes y sus intenciones, así como de la estructura causal y temporal de la situación en la que está inserto el problema. Dicha representación se genera a partir de la información del texto base y de inferencias necesarias a partir de los conocimientos previos (Van Dijk y Kintsch, 1983). Tal y como señala Reusser (1988) generar este modelo cualitativo es condición indispensable para la resolución del problema, de manera que la comprensión sea lo suficientemente profunda como para que mediante la abstracción se matematice el problema y se genere la representación mental de la estructura matemática del MES. En tercer lugar, se construye una representación de la estructura matemática del problema, también conocida como modelo del problema. Esto es, una vez activado el conocimiento matemático necesario para resolver el problema, el MES se proyecta sobre este, de forma que las relaciones situacionales se transforman en matemáticas para poder responder a la pregunta del problema. Cuarto, el modelo del problema se reduce a forma de ecuación matemática. Finalmente, se genera una respuesta volviendo al modelo de la situación.

La clave de este modelo es que la representación de la estructura matemática del problema no se genera directamente del texto base, sino también del MES.

➢ Kintsch (1988, 1998). Modelo CI

Este autor propone el Modelo *Construcción-Integración* (CI en adelante) complementando el modelo de Reusser (1988) al proponer una explicación alternativa a la influencia del conocimiento situacional. Sus principales diferencias respecto al modelo anterior de Kintsch y Greeno (1985) fueron tres:

- se genera un significado más amplio que el textual eliminado las proposiciones menos relacionadas con el resto;
- asume que todos los tipos de conocimiento lingüístico y situacional, además del matemático, intervienen durante la fase de construcción, generándose gran cantidad de proposiciones, unas del texto, y otras que se infieren desde los conocimientos previos;
- el modelo CI tiene en cuenta tres tipos de conocimiento (semántico, del mundo real y lingüístico) para interpretar la información situacional del problema.

Según este modelo el proceso de resolución consta de dos fases. Una primera, de *Construcción*, tanto el texto base como el modelo de situación recogen información del mundo que rodea al sujeto, no solo información del texto del problema. La segunda, *Integración*, selecciona las proposiciones altamente relacionadas entre sí, eliminando las menos relacionadas, independientemente de si forman parte del enunciado del problema o fueron inferidas a través de los conocimientos previos.

En síntesis, lo novedoso de este modelo es la presencia de información situacional, que presente o inferida acompaña a la información puramente matemática, de manera que facilita la representación y por tanto, la comprensión de los problemas matemáticos.

Finalmente, tanto este último modelo como el de Reusser, promueven un uso de información tanto cuantitativa como cualitativa: el de Reusser, centrado en el resultado frente al de Kintsch centrado en el proceso.

➢ Verschaffel, Greer y De Corte (2000)

Tiempo más tarde, en el año 2000, el equipo de trabajo de la Universidad de Lovaina liderado por Verschaffel, propone un modelo de resolución para los problemas aritméticos verbales en el que se considera la información causal, temporal e intencional además, de la eminentemente matemática. Esto sumado a la necesidad de un conocimiento del mundo real que cada alumno debe poseer para poder emitir respuestas correctas y realistas (respuesta numérica previa consideración y razonamiento sobre el contexto). La consideración o no de estos tipos de información lleva a los autores a establecer dos modelos de resolución -superficial y genuino- en los que se combinan procesos de selección y razonamiento, pero cuya principal diferencia radica en la promoción o no del razonamiento.

Resolver un problema de manera *genuina* (Figura 1) permitiría resolver los problemas matemática y situacionalmente difíciles e implica un proceso de razonamiento previo a los procesos de selección, de manera que permita la comprensión de la estructura del problema. Esta comprensión requiere de la creación de dos niveles de representación mental, el de la situación y el matemático. En términos generales podemos identificar cuatro fases en este proceso.

La primera, denominada modelo de la situación, consiste en la comprensión de la situación descrita en el enunciado del problema. En ella se representan los eventos o situaciones descritas atendiendo a su estructura causal, intencional y temporal. En este punto es necesario e imprescindible conocer y activar ese conocimiento sobre la situación descrita por el problema, pues es esencial para decidir qué elementos son importantes y cuáles no para incluir en el modelo de la situación.

Una vez generado el modelo de la situación, el segundo de los pasos consiste construir el modelo matemático seleccionando la estructura matemática (expresiones matemáticas que incluyan cantidades clave y las relaciones entre ellas) que se corresponda con la situación descrita en el problema. Para esto es necesario que el alumno cuente con un bagaje matemático (conceptos, fórmulas, técnicas, etc.). Es importante tener presente que las metas de los personajes, expuestas o no en la situación inicial, van a influir en la producción del modelo matemático. Además de los objetivos, según estos autores, en este proceso influye la disponibilidad de recursos entre los que se encuentran las técnicas matemáticas, recursos representativos y disponibilidad de instrumentos.

Es importante que en ambos modelos mentales -matemático y situacional- solo los elementos más importantes del problema estén representados.

A continuación y sólo cuando estos dos modelos mentales han sido correctamente generados y puestos en relación, se seleccionan y realizan los algoritmos adecuados para obtener los resultados, los cuales deben ser interpretados en relación al modelo situación descrito en el problema. En este momento del proceso, se producirá una evaluación de ese resultado con el objetivo de comprobar si es una respuesta apropiada o si por el contrario no lo es. En este caso, el alumno debe valorar otros modelos y decidir cuál es el más acertado para ese modelo de la situación.

En último lugar, una vez validado e interpretado el resultado, debe comunicarse de acuerdo a la situación original del problema, es decir, emitir una respuesta en función de la pregunta inicial del problema.

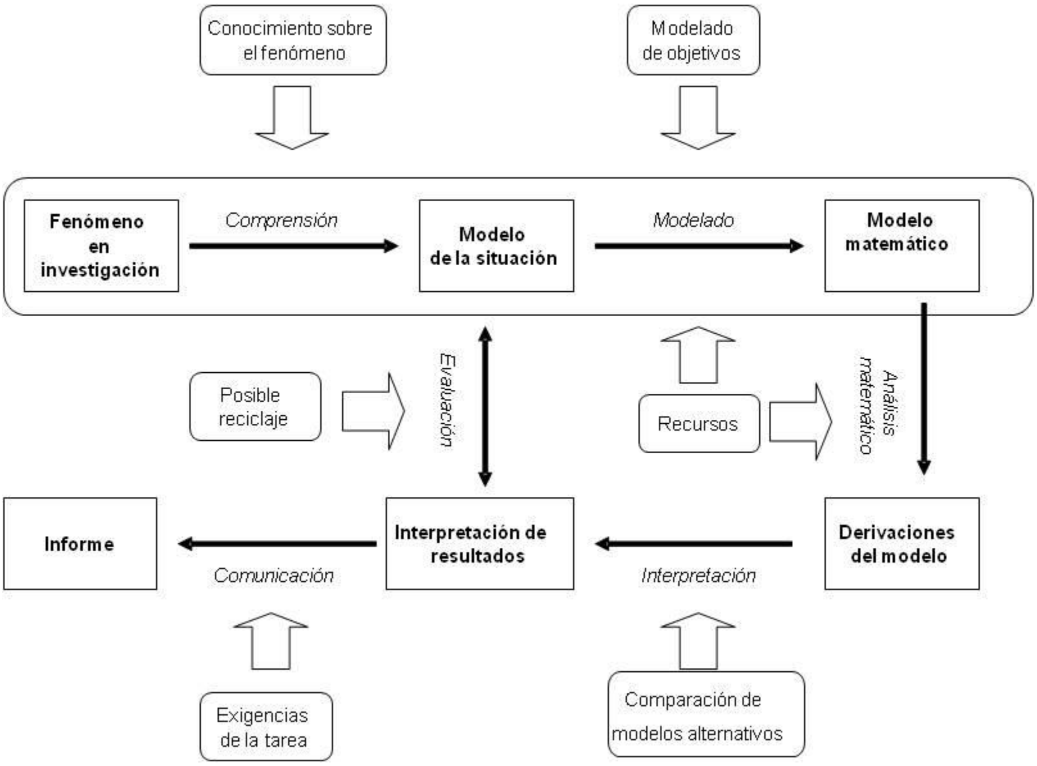


Figura 1. Modelo Genuino. (Adaptado de Verschaffel et al., 2000, p.168)

Frente a este modelo genuino, los estudiantes pueden resolver los problemas fáciles (la palabra clave indica la operación que hay que realizar) de una manera superficial, obviando algunos pasos del procedimiento que acabamos de describir, esto es, centrándose en los procesos de selección en detrimento de los de razonamiento.

Cuando se resuelve de una manera *superficial* (Figura 2) no se genera el modelo situacional, mientras que el modelo matemático es generado automáticamente, a través de aspectos sobresalientes del problema como la palabra clave -menos para restar, ganar para sumar- (Hegarty et al., 1995; Nesher y Teubal, 1975; Verschaffel et al., 1992). El uso de este tipo de estrategias hace que el modelo matemático generado no esté basado en un razonamiento matemático ni situacional. A continuación, una vez seleccionado y ejecutado el algoritmo se emite un resultado final como respuesta, sin antes retomar la situación inicial del problema para verificar y comprobar que es una respuesta válida, es decir, si tiene sentido o es razonable de acuerdo a la pregunta del problema. Omitir esta fase de evaluación puede derivar en respuestas matemáticamente correctas pero sin sentido real.

Veamos un claro ejemplo utilizado por Verschaffel, De Corte y Lassure (1994):

> "450 soldados deben ser transportados a su lugar de entrenamiento. En cada autobús pueden entrar 36 soldados. ¿Cuántos autobuses serán necesarios?"

El resultado obtenido al realizar la división (450:36) es 12,5. Desde este enfoque superficial, los alumnos darían como respuesta final 12,5 sin comprobar si es razonable o no en cuanto a la situación de partida. Si se considera esa situación inicial, serían necesarios 13 autobuses puesto que es necesario obtener un número entero de autobuses, y redondear el resultado de la división al alza para que puedan viajar todos los soldados.

Pese a esto y como veremos más adelante, es necesario señalar que dicho proceso es el más empleado en las escuelas en tareas de resolución de problemas (Van Dooren, Verschaffel, Green y De Bock, 2006) independientemente de la dificultad del problema (Depaepe et al., 2010; Rosales et al., 2012).

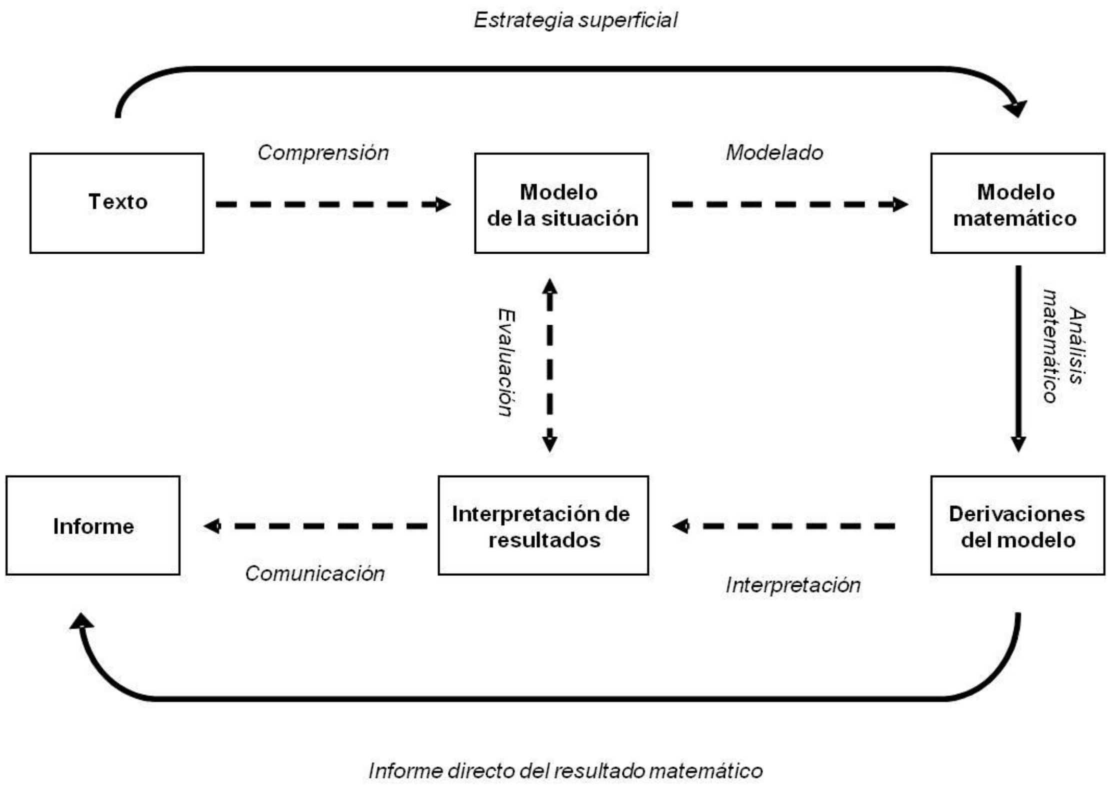


Figura 2. Modelo Superficial. (Adaptado de Verschaffel et al., 2000, p.13)

A modo de ilustración del presente modelo, se muestra como ejemplo la resolución superficial y genuina de varios problemas con diferentes grados de dificultad matemática y situacional.

Ejemplo 1: resolución superficial de un problema fácil

“Un bodeguero tiene unas cubas de madera en las que le caben 158 litros de vino, y quiere comprar unas cubas metálicas nuevas en las que caben 26 litros más que en las de madera. ¿Cuántos litros de vino caben en una cuba metálica?”

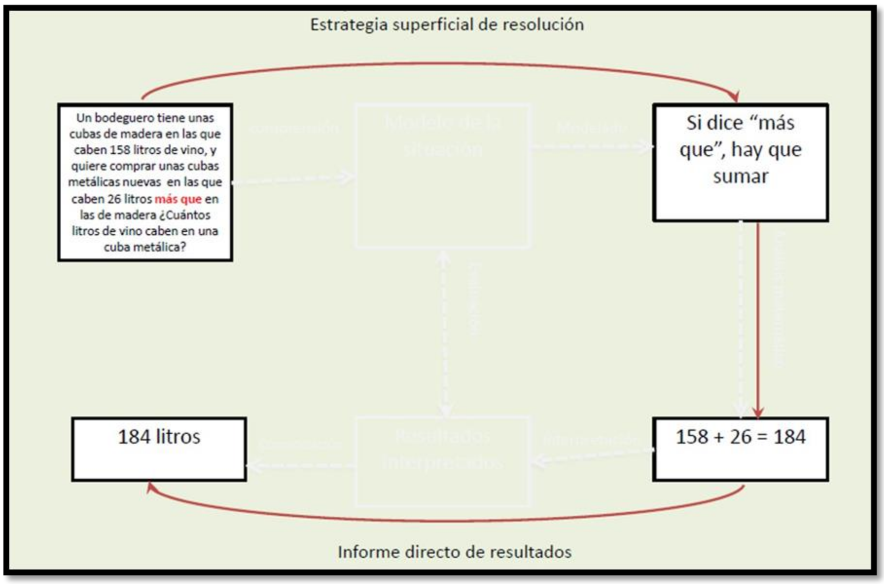


Figura 3. Resolución superficial de un problema fácil según el modelo Verschaffel et al. (2000)

Ejemplo 2: resolución genuina de un problema matemáticamente difícil

“Un bodeguero quiere renovar las cubas de vino porque este año ha comprado más uvas. En las cubas de madera que tiene caben 158 litros de vino. Pero en esas cubas caben 26 litros menos que unas nuevas cubas metálicas. ¿Cuántos litros de vino caben en una cuba metálica?”

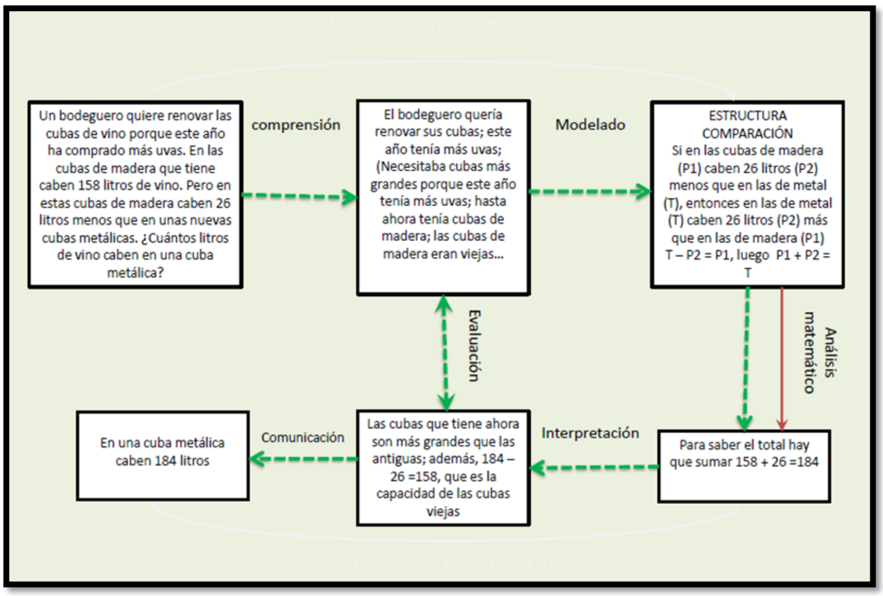


Figura 4. Resolución genuina de un problema difícil según el modelo Verschaffel et al. (2000)

Ejemplo 1: resolución superficial de un problema matemáticamente difícil

"Un bodeguero quiere renovar las cubas de vino porque este año ha comprado más uvas. En las cubas de madera que tiene caben 158 litros de vino. Pero en esas cubas caben 26 litros menos que unas nuevas cubas metálicas. ¿Cuántos litros de vino caben en una cuba metálica?"

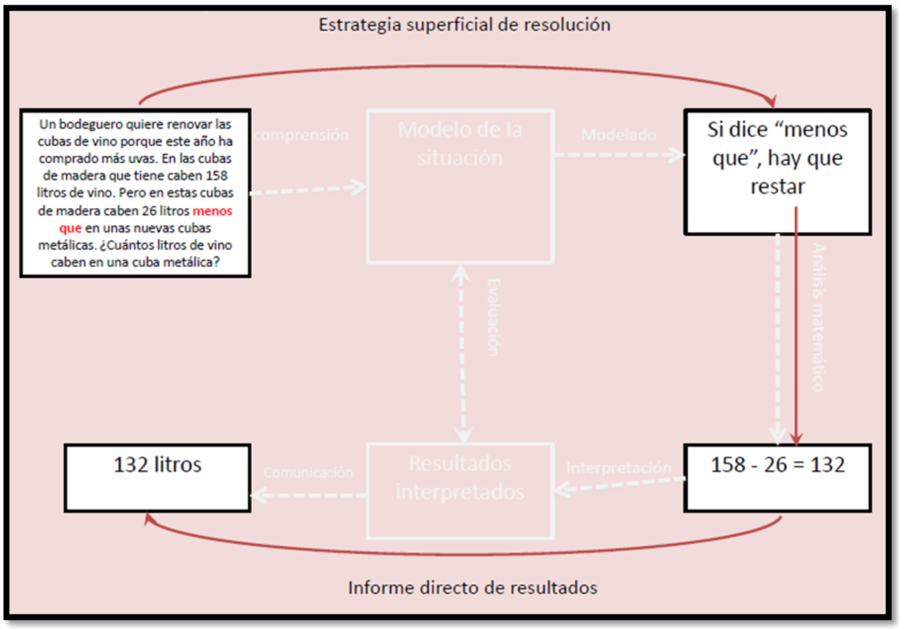


Figura 5. Resolución superficial de un problema matemáticamente difícil según el modelo Verschaffel et al. (2000)

Ejemplo 4: resolución superficial de un problema situacionalmente difícil

"Juan tiene 5 amigos y Pedro tiene 6 amigos. Juan y Pedro deciden hacer una fiesta juntos. Ellos invitan a todos sus amigos. Todos los amigos están presentes. ¿Cuántos amigos hay en la fiesta?"

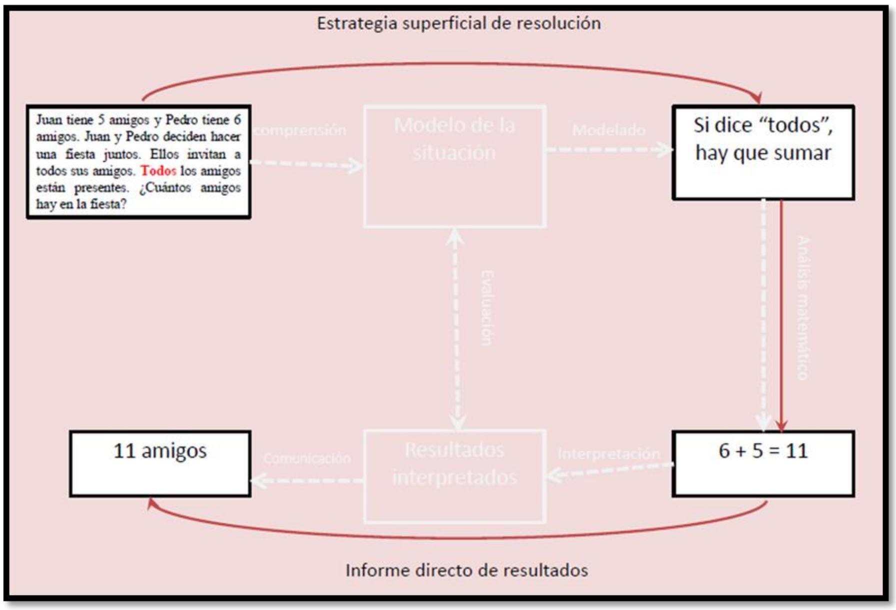


Figura 6. Resolución superficial de un problema situacionalmente difícil según el modelo Verschaffel et al. (2000).

En resumen, la evolución de los modelos de resolución de problemas está ligada al componente situacional, considerándolo como variable influyente en el proceso de resolución. En otras palabras, desde un punto de vista teórico queda justificada la importancia de conocer los personajes, intenciones, metas, la estructura temporal y causal de la situación y, la estructura matemática del mismo para lograr la total comprensión de un problema aritmético.

Si el primer grupo de modelos teóricos operaba con una información eminentemente matemática, este último permite trabajar, además, con una información más cualitativa. Dado que la propuesta de Verschaffel et al. (2000) supone el modelo más completo será éste el que se va a tener en cuenta a lo largo del desarrollo de la presente Tesis Doctoral.

No obstante, no debemos olvidar que todos estos modelos son teóricos, y que para comprobar su validez es necesario contrastarlos con resultados empíricos. Para realizar este contraste a continuación se presentan los resultados de una serie de estudios que, a través de la metodología de la reescritura de problemas, han comprobado hasta qué punto los modelos predicen el comportamiento de los alumnos y permiten diseñar ayudas para que comprendan y resuelvan mejor los problemas.

1.4.- ¿QUÉ TIPO DE AYUDAS TEXTUALES PROMUEVE EN LOS ALUMNOS UNA RESOLUCIÓN BASADA EN EL RAZONAMIENTO? REESCRITURA DE PROBLEMAS

Según los modelos anteriores, procesos de selección y razonamiento tanto matemático como situacional están implicados en la resolución. En este sentido, diversos estudios han comprobado que promover esos procesos es posible en función de las ayudas que se incorporen en el enunciado del problema. Concretamente, los estudios de reescritura de problemas mostraron evidencias empíricas sobre la información que mejora el rendimiento de los alumnos a la hora de resolver un problema de manera situacional y matemáticamente razonada.

Por un lado, aquellos estudios que permitieron establecer relaciones matemáticas resaltaron la estructura parte-todo de los problemas de combinación 2 introduciendo los términos "entre los dos" y "x de esos" (Cummins, 1991; De Corte, Verschaffel y Dewin, 1985); de los de cambio 5 señalando explícitamente la existencia de un conjunto inicial mediante expresiones como "x tenía algunas x" (De Corte et al., 1985); de los de cambio 3 y 6 resaltando el rol matemático del conjunto total compartido por ambas situaciones de cambio incorporando ayudas textuales tales como "los juntó con los que ya tenía" y "del total de x que juntó" (Vicente y Orrantia, 2007; Vicente, Orrantia y Verschaffel, 2008a, 2008b).

Por otro, los que modificando aspectos de la situación en los que el problema estaba inmerso permitieron un mayor logro de los alumnos, a pesar de que los resultados de reescritura en esta dirección son menos coherentes entre los diferentes estudios. Por ejemplo, los intentos de Hudson (1983) al sustituir la pregunta del problema de comparación por otra que aludía a una situación más comprensible; de Cummins et al. (1988) y Stern y Lehrndorfer (1992) al incluir descripciones cualitativas de la situación del problema siendo estas compatibles con su modelo matemático; de Vicente, Orrantia y Verschaffel (2007) al incorporar aspectos causales y temporales; o de Vicente et al. (2008b) al trabajar con problemas situacionalmente difíciles en los que los eventos del enunciado no seguían la secuencia real de los acontecimientos, mostraron que incluir estas ayudas concretas en los enunciados de los problemas carecía de interés por falta de resultados positivos.

Sin embargo, estudios posteriores mostraron que los alumnos procesan la información situacional cuando resuelven problemas que incluyen ese tipo de información (Orrantia, Muñez, Vicente, Verschaffel y Rosales, 2014). Los resultados de este reciente estudio muestran, a pesar de que se sirvió de medidas online y por tanto los alumnos no pudieron resolver el problema, que cuando los alumnos se enfrentan a problemas aritmético verbales, procesan la información situacional, siempre y cuando esa información esté referida a objetivos seguidos de acciones para su consecución.

Pero no sólo se procesa, sino que la información situacional ayuda a los alumnos a resolver mejor los problemas. En este sentido, parece importante la información relativa a la secuencia temporal (Vicente et al., 2008b), causal e intencional (Orrantia, Tarin y Vicente, 2011) que se relaciona directamente con el esquema semántico del problema, convirtiéndose así en información relevante que permite después, crear el modelo matemático. Por el contrario se convertiría en información irrelevante siendo ineficaz para la resolución, tal y como se desprende de los resultados de los estudios de Cummins et al. (1988) y Vicente et al. (2007).

Una vez se conocen los distintos tipos de reescritura –matemática o situacional-, se propone un ejemplo a modo de ilustración.

Un problema estándar sería aquel que contiene únicamente la información imprescindible para ser resuelto (personajes, objetos, acciones y cantidades) sin añadir información alguna:

> “Un pastor tenía 57 ovejas. Compró algunas ovejas más. Los lobos se han comido 11 ovejas y al pastor le han quedado 96. ¿Cuántas ovejas compró el pastor?”,

A partir de este problema pueden diseñarse dos versiones reescritas del mismo. Por un lado, una reescritura matemática, con información matemática que resalta las relaciones entre los conjuntos del problema. Por otro, una reescritura situacional, incorporando al enunciado metas explícitas de los personajes para ejecutar determinadas acciones para hacer aumentar o disminuir conjuntos, y de esta manera permitir a los alumnos construir una representación causal coherente del texto del problema. Un ejemplo es el siguiente problema utilizado por Orrantia et al. (2011) y cuyo uso mostró una mejora del rendimiento de los alumnos:

> “Un pastor tenía un rebaño con 57 ovejas. *El pastor quería aumentar el tamaño del rebaño porque este año había buenos pastos*. Para ello se fue a una feria de ganado, decidió comprar algunas ovejas y <u>las juntó con las que ya tenía</u>. Una tarde el pastor vio una manada de lobos por la zona, *los lobos estaban hambrientos* y entonces, <u>del total de ovejas del rebaño</u> se comieron 11 y ahora el rebaño tiene 96. ¿Cuántas ovejas compró el pastor en la feria?”

La reescritura matemática (subrayada) ayuda al alumno a entender que las ovejas que se comieron los lobos, unidas a las que le quedaron al final forman el mismo total que las que tenía al principio junto a las que compró, lo cual les permite entender que han de comenzar la resolución del problema por la segunda situación de cambio. Por otra parte, la reescritura situacional (en cursiva) consistió en señalar en una meta inicial (querer más ovejas porque hay buenos pastos) que desencadena una acción (comprar ovejas), y también una segunda meta (los lobos estaban hambrientos, por lo que querrán saciar su hambre) que provoca una segunda acción (devorar ovejas). Una vez que el modelo matemático y situacional han sido correctamente generados son puestos en relación.

A modo de conclusión, los estudios de reescritura parten de modelos teóricos en los que es necesario comprender la estructura matemática así como la cualitativa del problema, mostrando en sus resultados que tanto la reescritura matemática como situacional no sólo se procesa sino que ayuda a que los alumnos resuelvan más fácilmente los problemas (para una revisión de esos estudios ver Orrantia et al., 2011; 2014).

1.5.- RECAPITULACIÓN

A lo largo del presente capítulo y desde una perspectiva cognitiva, se han expuesto diferentes modelos de resolución de problemas. En este sentido, los modelos consideran que para resolver adecuadamente un problema es necesario el razonamiento a varios niveles -matemático y situacional- de manera que no sólo se procesa la información estrictamente matemática. De hecho, incluir en los enunciados de los problemas información que ayuda a realizar esos razonamientos ayuda a los niños a resolverlos mejor, tal y como corroboran los estudios de reescritura. Por tanto, retomando la idea inicial que abría este capítulo, ya conocemos el proceso de resolución de problemas desde dos perspectivas: la del propio proceso y de la tarea en sí misma. De este modo tenemos una visión general que nos permite saber qué facilita una resolución razonada al alumno y, además, sobre qué es necesario valorar en el conocimiento del maestro.

CAPÍTULO II:

El papel del maestro en la resolución de problemas: Un conocimiento especializado

Una vez que, de la mano de los modelos teóricos y de los estudios empíricos descritos en el capítulo anterior, sabemos qué necesita un alumno para poder resolver los problemas basándose en el razonamiento, en este segundo capítulo profundizaremos en los trabajos que se han centrado en el conocimiento de los maestros, en nuestro intento por entender el porqué de los resultados que muestran las dificultades de los alumnos a la hora de razonar problemas. El motivo de contemplar este segundo elemento procede del hecho de que los procesos del pensamiento podrían explicar las conductas o actuaciones docentes (Clark y Peterson, 1986) y que estas tiene un rol importante en el modo de comportarse los maestros en el aula (Hill et al., 2008), en el logro del alumno (Hill et al., 2005) y en la manera de tratar los materiales (Charalombous et al., 2012).

En este sentido, la organización de este segundo capítulo es la siguiente: en primer lugar, se describirá la actividad en las aulas durante las sesiones de resolución de problemas para entender por qué se debe estudiar el conocimiento del maestro. En segundo lugar, se presentará una breve distinción teórica entre los términos conocimiento y creencia. Seguidamente, se abordará el conocimiento del maestro, concretamente en el área de las matemáticas, desde sus orígenes de manos de Lee Shulman, así como algunas de las distintas propuestas que se han tratado de organizarlo. A continuación, se explorarán los estudios empíricos realizados al respecto y más concretamente sobre el contenido específico de resolución de problemas, que es lo que nos ocupa. Finalmente, y dado que el conocimiento del maestro podría estar influyendo en la práctica educativa, y esta a su vez podría ser la responsable del bajo rendimiento de los alumnos, se verá de qué manera se relacionan el conocimiento del maestro y su práctica educativa. Por un lado, se prestará atención al papel de la experiencia y por otro, al rol del material curricular como posible factor mediador en esta relación.

2.1.- ¿PROMUEVEN LOS MAESTROS EL RAZONAMIENTO DURANTE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN LAS AULAS? ANÁLISIS DE LA INTERACCIÓN

Tal y como se ha expuesto en el capítulo primero, los modelos de resolución descritos consideran distintos procesos como el de selección o razonamiento matemático y situacional. En este sentido, la presencia de determinadas ayudas matemáticas o situacionales que se incorporan al enunciado del problema facilitan la puesta en marcha de estos procesos mejorando el rendimiento de los alumnos. Pero, ¿facilitan los maestros ayudas de esos tipos, promoviendo el razonamiento en los alumnos? En este sentido sería conveniente describir qué ocurre en las sesiones de resolución de problemas, considerando que el conocimiento del docente podría influir en su instrucción (Carpenter, Fennema, Peterson y Carey, 1988) y más concretamente en el razonamiento promovido en los alumnos (Charalombous y Hill, 2012).

Para conocer las interacciones que se dan en las aulas de matemáticas españolas, y más concretamente, de lo que ocurre cuando profesores y alumnos resuelven conjuntamente problemas aritmético verbales, parece lógico pensar que las grabaciones son la herramienta de recogida de información más adecuada (Rochelle, 2000). Así por ejemplo, respecto a las clases de matemáticas, Font, Planas y Godino (2010) o Planas (2005) realizaron análisis exhaustivos de momentos concretos de las clases. Asimismo, Nathan y Knuth (2003) analizaron el discurso de las grabaciones con el objetivo de explorar los cambios de la práctica educativa gracias a programas de desarrollo profesional. En el caso concreto de la resolución de problemas, diversos trabajos se sirvieron de este instrumento para analizar tanto los procesos implicados como la atención que prestan los maestros a las ayudas incluidas en los problemas (Chapman, 2006; Depaepe et al., 2010; Rosales et al., 2008a, 2008b, 2012). Dado que este último grupo de trabajos son los más próximos a nuestro objetivo, se describirán con mayor detalle.

Chapman (2006) estudió cómo influyen los contextos en la instrucción de problemas matemáticos en catorce profesores de varios niveles educativos. Para ello, tomó como referencia la teoría propuesta por Bruner (1985, 1986) sobre los dos modelos irreducibles de funcionamiento cognitivo -narrativo y paradigmático-. En lo que a problemas se refiere, cuando se pone en práctica el modelo paradigmático los maestros sólo se centran en los aspectos matemáticos del problema, es decir, modelos o estructuras que son universales y libres de contexto. Para ello se requieren estrategias o formas de pensar que sean independientes de un contexto particular. Frente a este modo paradigmático de resolver los problemas, los maestros pueden proceder de manera narrativa, centrándose en el contexto del problema, es decir, tratando de entender o relacionarlo con la historia, la trama, los personajes, objetos, situaciones, acciones, relaciones o intenciones con el fin de dar sentido a una solución. En definitiva, preocupándose por aspectos situacionales del problemas y por tanto, en explicaciones contextuales. Los resultados de este estudio revelaron que el modelo paradigmático fue mayoritario. Es decir, la mayor parte de los maestros del estudio trataron los problemas como una colección de palabras, frases y oraciones que representaron matemáticamente; en otras palabras, redujeron el enunciado del problema a una situación matemática. En sentido, enseñaban a los alumnos a codificar problemas mediante símbolos o palabras clave, entre otras estrategias.

Tomando como punto de partida este doble modelo planteado por Chapman (2006), Depaepe et al. (2010) analizaron el enfoque que adoptaron dos profesores durante tareas de resolución de problemas verbales en clases belgas de sexto grado que utilizaban el mismo libro de texto. Para ello, se analizaron las transcripciones de las clases de matemáticas en las que se resolvieron problemas conjuntamente. Los resultados mostraron que predominó el enfoque paradigmático sobre el narrativo en las sesiones de resolución de problemas de ambos profesores. Esto es, que a la hora de resolver los problemas verbales con sus alumnos, los maestros prestaron mayor atención a las estructuras y modelos matemáticos que a los elementos contextuales a los que se refería el enunciado del problema. Una de sus explicaciones a esta prevalencia del modelo paradigmático fue la naturaleza de la tarea, puesto que los problemas estándar que se resolvieron en esas clases se pueden resolver mediante un modelo de resolución superficial en el que, como ya hemos descrito, tan solo se ejecutan los algoritmos sin un razonamiento previo.

Para comprobar si los resultados de Depaepe et al. (2010) se debieron a la naturaleza estándar de los problemas resueltos en esas clases, Rosales et al. (2012) analizaron cómo once maestros en ejercicio resolvieron problemas que incluían información matemática y situacional, concretamente fueron los problemas usados en los estudios de reescritura descritos anteriormente. Información que, como ya hemos descrito, se había demostrado útil para que los alumnos los comprendieran y resolvieran mejor. Para ello se analizaron las transcripciones en las que profesores y alumnos resolvían este tipo de tareas. Los resultados mostraron que los maestros no favorecieron el razonamiento matemático o situacional para comprender y resolver el problema con sus alumnos a pesar de incluirse información para ello. Estos resultados estuvieron en la línea de los obtenidos por Depaepe et al. (2010), a pesar de que estos se sirvieron de tareas estándar. Por tanto, los profesores se enfrentaron a la resolución de problemas de una manera mecánica lejos de una manera comprensiva y razonada.

Los resultados del estudio de este equipo de investigación son coherentes con estudios previos en los que compararon el comportamiento de profesores en ejercicio y en formación cuando resolvían problemas aritméticos con sus alumnos (Rosales et al., 2008a, 2008b). Tomados en conjunto, muestran que cuando los profesores se enfrentan a la resolución conjunta de un problema, no lo hacen de manera que se promueva el razonamiento sino de manera rutinaria.

En síntesis, los presentes estudios permiten ver que el modo en que los profesores se comportan en las aulas favorece procesos automáticos en los que tan sólo algoritmos e información cuantitativa son relevantes, independientemente del contexto en el que el problema se halle inmerso. Esto refleja que los maestros enseñan un proceso de resolución afín a los modelos computacionales y que su discurso está más próximo a lo que Turner et al. (2002) han denominado discurso instruccional *nonscaffolded*[1], abriéndose así una brecha entre lo que hacen los profesores y la pretensión de que los alumnos resuelvan problemas mediante el razonamiento.

Por tanto, ante esta descripción de lo que ocurre en las aulas sería necesario buscar alguna variable del maestro que permita comprender por qué se comporta de esta manera. En este sentido, una de las razones que se han utilizado para explicar este comportamiento en las aulas es el conocimiento que los profesores poseen. Así por ejemplo, An et al. (2004) o Hill et al. (2008) consideran que los conocimientos de los maestros tienen un impacto notable en su práctica educativa en sesiones de matemáticas puesto que influyen en la elección de las tareas, en el tipo de respuestas que se dan a los alumnos, en el lenguaje empleado o en las explicaciones matemáticas, por ejemplo. Por esta razón, el conocimiento de los maestros será nuestro próximo foco de atención.

2.2.- ¿CONOCIMIENTO O CREENCIA?

Del mismo modo que se hizo en el primer bloque de contenidos –problemas verbales-, es necesario clarificar el término que va a ser objeto de estudio en este segundo bloque temático del presente trabajo. Para ello se recurrirá a la propia definición y a lo que dicen los expertos al respecto.

Según la RAE, "creer" implica "tener por cierto algo que el entendimiento no alcanza o que no está comprobado o demostrado". En cambio, por "conocer" se

[1] Se considera discurso nonscaffolding cuando el maestro se centra en que los alumnos resuelvan la tarea y no en que aprendan a resolverla. Para ampliar información, ver Turner, Midgley, Meyer, Gheen, Anderman, Kang y Patrick (2002).

entiende "averiguar por el ejercicio de las facultades intelectuales la naturales, cualidades y relaciones de las cosas". Por tanto, "creer" implicaría una verdad personal (Ponte, 1994) y no consensuada (Abelson, 1979[2]; Thompson, 1992), mientras que "conocer" haría referencia a una verdad universal, consensuada y que puede ser verificable (Abelson, 1979).

En este sentido, se llega al conocimiento por entendimiento mientras que las creencias aparecen o se crean, según Pajares (1992) fruto de la rutina o la fantasía, por lo que tienen un componente afectivo, evaluativo y social (Gómez-Chacón, 2003).

Una explicación sencilla es en la que Carrillo (1996), citado en Gómez-Chacón (2000), en su Tesis Doctoral manifiesta que "algo es más conocimiento y menos creencia cuando menor papel desempeñan en él los afectos" (p. 69). Sin embargo, este carácter afectivo de las creencias en sí mismas es cuestionado por otros autores (Diego-Mantecón, 2012).

Por tanto, las creencias serían, junto a actitudes y emociones, uno de los tres descriptores del dominio afectivo-emocional (McLeod, 1992). Dominio sobre el que se han realizado numerosos estudios en el área de Didáctica de las Matemáticas (por ejemplo: Blanco, Guerrero, Caballero, Brígido y Mellado (2010) valoraron las emociones en RP; o Blanco, Caballero, Piedehierro, Guerrero y Gómez (2010) evaluaron las creencias sobre RP de maestros en formación).

Todo esto pone de manifiesto la inexistencia de una frontera clara entre el conocimiento y las creencias. A pesar de ello, consideramos que el objeto de estudio del presente trabajo es el conocimiento que los profesores poseen sobre un proceso de resolución de problemas. Consideramos que son conocimientos y no creencias porque lo que se evalúa en los maestros es hasta qué punto son capaces de reconocer y aplicar las nociones aportadas por los modelos, nociones que pueden considerarse teóricas, consensuadas, aceptadas por la comunidad investigadora y que han mostrado que procesos de selección y razonamiento tanto matemático como situacional están implicados en la resolución de un problema (Verschaffel et al., 2000); y que las ayudas dirigidas a la promoción de esos razonamientos contribuyen a que los alumnos resuelvan mejor los problemas. Concretamente han sido los estudios de reescritura los que han comprobado que incluir este tipo de información mejora el rendimiento de los alumnos a la hora de resolver un problema basado en un razonamiento situacional y matemático (ver estudios referidos en el capítulo I).

Partiendo desde la perspectiva del conocimiento, un maestro debe conocer un amplio abanico de aspectos relacionados con el proceso de enseñanza-aprendizaje. Por ejemplo, qué va a enseñar, cómo lo va a enseñar, cuándo lo va a enseñar, a quién se lo va a enseñar o dónde lo va a enseñar. Por tanto, necesitamos conocer los modelos que han tratado de organizar lo que el maestro debe saber para enseñar matemáticas.

2.3.- ¿CÓMO SE ORGANIZA EL CONOCIMIENTO DEL MAESTRO?

Hace tres décadas el conocimiento de los profesores de matemáticas comenzó a ser objeto de estudio. Concretamente, se atribuye a Lee Shulman ser el pionero en esta línea de investigación, a través de dos publicaciones clave en este área: la primera en 1986, *"Those who understand: knowledge growth in teaching"* y un año más tarde, en 1987,

[2] Para ampliar información sobre la relación entre el sistema de creencias y el sistema de conocimiento remitirse a Abelson (1979).

"Knowledge and teaching: foundations of new reform". Es a partir de este momento cuando el conocimiento del profesor comienza a considerarse un elemento importante a la hora de comprender a los profesores y su trabajo, convirtiéndose así en una nueva corriente de investigación.

Según este autor, los trabajos realizados hasta el momento se focalizaban principalmente en el comportamiento de los docentes o el rendimiento de los alumnos, si bien todos ellos obviaban un aspecto fundamental: la materia en sí. Ejemplos representativos son los exámenes que se realizaban para acceder al puesto de profesor en los cuales valoraban básicamente contenidos pedagógicos, y no tanto, el contenido a enseñar.

Como superación a estos planteamientos, Shulman (1986) realizó un estudio con profesores de secundaria de California en las materias de inglés, matemáticas, biología y estudios sociales, cuyos resultados permitieron establecer que el conocimiento que, prestando especial atención al contenido, poseen los maestros, se organiza en tres categorías: el conocimiento del contenido, conocimiento curricular y el conocimiento pedagógico del contenido.

- *Conocimiento del contenido,* (CK). Este tipo de conocimiento se refiere a la cantidad y organización del conocimiento en sí mismo. Los maestros deben ser capaces de definir una verdad, de comprender y explicar por qué es así, su relación con la misma y otras disciplinas, y discernir entre los aspectos fundamentales y secundarios de la disciplina. En sus propias palabras "el profesor no solo necesita entender que algo es así; el maestro debe además entender por qué es así" (p. 9).
- *Conocimiento pedagógico del contenido,* (PCK). De los tres tipos propuestos es probablemente el más influyente en la investigación educativa y se entiende como el conocimiento de la materia para la enseñanza, el cual va más allá del conocimiento de la disciplina. En otras palabras, supone una transformación del conocimiento del contenido a contenido enseñable, de modo que el maestro debe saber cómo adaptar el contenido a las características propias de los alumnos. Esto es, que además del conocimiento de los contenidos se incluyen aquellos que influyen en la enseñanza. Con esto el autor se refiere a

  > temas que se enseñan de manera más regular en una materia, las formas más útiles de representación de las ideas, analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones, demostraciones, comprender qué hace más fácil o difícil el aprendizaje. En definitiva, formas de representar y formular la materia de manera que sea más comprensible para los demás (p.9).

  En palabras de Hogan, Rabinowitz y Craven (2003) este tipo de conocimiento "se define como la capacidad de transmitir las propias comprensiones del conocimiento de los contenidos a través de múltiples modelos de enseñanza para el entendimiento, la comprensión y el logro de los estudiantes" (p.236).
- *Conocimiento curricular*. El tercer y último tipo consiste en conocer los distintos programas y materiales educativos diseñados para la enseñanza de los contenidos (en sus distintas materias y niveles), así como indicaciones y contraindicaciones para el uso de determinados programas o materiales educativos en unas circunstancias concretas. Es decir, conocer la eficacia y repercusiones del uso o no de estos materiales y programas. Se entiende que el profesor debe estar lo

suficientemente formado como para comprender las distintas alternativas curriculares disponibles para la instrucción.

En este tipo de conocimiento hay dos aspectos a considerar: lateralidad y verticalidad. El primero de ellos está referido a la familiaridad del profesor con los materiales curriculares del resto de materias que se están estudiando simultáneamente. Este conocimiento curricular lateral subyace a la capacidad de relacionar el contenido de la disciplina con otros del resto de materias simultáneas. En cuanto al segundo, el conocimiento curricular vertical se entiende como la familiaridad del profesor con los contenidos, temas y materiales que han sido y serán impartidas en la misma área durante años anteriores y posteriores.

En el segundo de los estudios mencionados (Shulman, 1987) reconoce siete categorías de conocimientos base para la enseñanza (incluyendo los tres planteados inicialmente en 1986): conocimiento del contenido, conocimiento pedagógico general, conocimiento curricular, conocimiento pedagógico del contenido, conocimiento de los alumnos y sus características, conocimiento sobre los contextos educativos, y conocimiento de los fines educativos, propósitos, valores y bases filosóficas e históricas.

De todos estos tipos de conocimiento, el autor afirma que el más relevante e interesante es el conocimiento pedagógico del contenido porque

> identifica las diferentes formas de conocimientos para la enseñanza. Representa la mezcla entre el contenido y la pedagogía en la comprensión de cómo determinados temas, problemas, cuestiones se organizan, se representan y se adaptan a los diversos intereses y habilidades de los alumnos, y se presentan para su enseñanza. El conocimiento pedagógico del contenido es la categoría con mayor probabilidad para distinguir entre la comprensión de un especialista de contenido y la de un pedagogo (p. 8).

A pesar de no estar referido exclusivamente a las matemáticas, el concepto *Pedagogical Content Knowledge* ha sido ampliamente aceptado en el léxico educativo e influyente en la investigación sobre la enseñanza y la formación del maestro (Depaepe, Verschaffel y Kelchtermans, 2013). A lo largo del tiempo distintos académicos han construido sobre el trabajo germinal de Shulman, principalmente sobre los dominios PCK y PC, la noción de conocimiento del maestro, dando lugar a distintas interpretaciones de la naturaleza del mismo.

No obstante, a pesar de que esta conceptualización ha servido como marco de referencia en la investigación ulterior, no por ello está exento de críticas. Depaepe et al. (2013) sintetizan estas críticas en torno a las siguientes razones:

- la visión estática de Shulman sobre el PCK de los docentes.
- el cuestionamiento de que el PCK puede ser teórica y empíricamente distinguido del conocimiento del contenido (CK).
- la crítica de algunos académicos a la conceptualización de Shulman sobre el PCK en términos del conocimiento del profesor sobre estrategias de instrucción y representaciones y concepciones de los estudiantes, argumentando la necesidad de ampliar el concepto con el fin de abarcar el conocimiento del curriculum, las creencias o las emociones.

- los académicos argumentan el carácter normativo del PCK al presentarse como "enseñanza experta" sobre una materia concreta.

Con el objetivo de superar estas limitaciones y generalizar el conocimiento para la enseñanza, algunos académicos han reformulado el planteamiento de Shulman. Dichos modelos pueden organizarse en dos grandes grupos en función de dónde emanan las categorías propuestas, pudiendo ser descriptivas –surgen de la observación de la práctica docente- o prescriptivas –surgen de la teoría-. A continuación se presenta una síntesis de las aportaciones más elaboradas.

2.3.1.- Modelos prescriptivos

a) Modelo de Grossman

Grossman (1990) reorganiza las categorías propuestas por Shulman en cuatro categorías: conocimiento del contenido, el conocimiento pedagógico general, conocimiento pedagógico del contenido y el conocimiento del contexto. En la Figura 7 se presenta la adaptación de Grossman al planteamiento de Shulman.

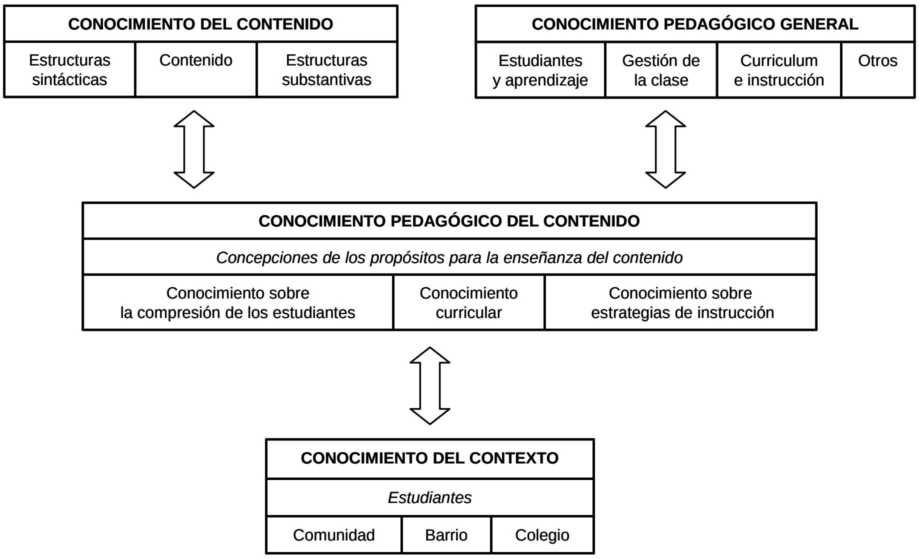


Figura 7. Modelo de Grossman sobre el conocimiento del profesor. (Adaptado de Grossman, 1990, p. 5)

b) Modelo de Fennema y Franke

Más tarde, Fennema y Franke (1992) propusieron un modelo sobre el conocimiento matemático de los profesores asumiendo el dinamismo del conocimiento carente en el modelo de Shulman (1986), y añaden las creencias de los profesores como elemento que interactúa con el conocimiento, siendo determinante en la práctica. Por otro lado, dicho modelo considera importante tener en cuenta que cada uno de los aspectos del conocimiento del profesor se localiza dentro del contexto del aula.

Concretamente, el modelo elaborado está estructurado en 4 categorías:

- *Conocimiento de las matemáticas*: conceptos, procedimientos y procesos de resolución de problemas dentro del dominio que enseñan, así como en dominios relacionados con el contenido. Por ejemplo, conceptos subyacentes a procedimientos, interrelaciones entre conceptos o cómo esos conceptos y procedimientos pueden usarse en distintos tipos resolución de problemas.

- *Conocimiento específico del contexto*: Conocimiento que regula el comportamiento del profesor en el aula, considerando que el contexto hace que el conocimiento del contenido del docente interactúe con el conocimiento de la pedagogía y las cogniciones de los estudiantes y se combine con las creencias.
- *Conocimiento pedagógico*: conocimiento sobre procedimientos de enseñanza como estrategias efectivas de planificación, rutinas de aula, técnicas de control del comportamiento, procedimientos de organización o técnicas de motivación.
- *Conocimiento sobre la cognición de los estudiantes en matemáticas*: conocimiento sobre el proceso de pensamiento y aprendizaje, concretamente sobre la disciplina de matemáticas.

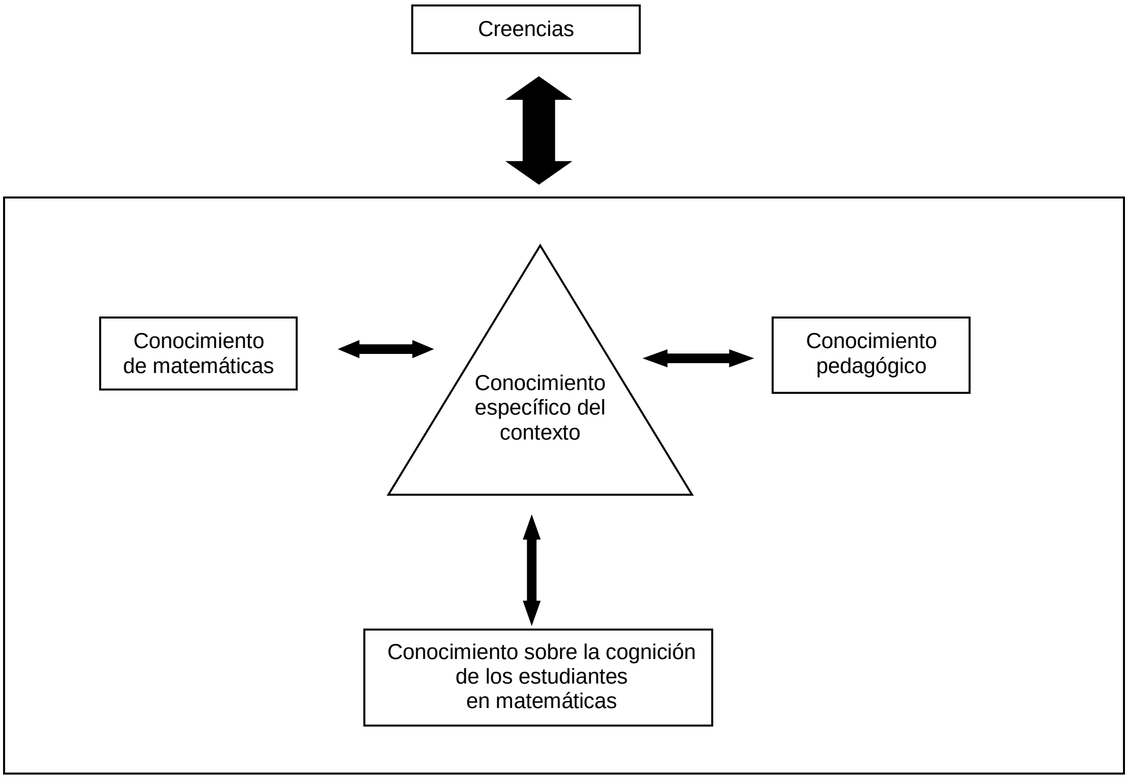


Figura 8. Modelo de Fennema y Franke sobre el conocimiento del profesor. (Adaptado de Fennema y Franke, 1992, p. 162).

c) Modelo PUFM

En 1999, Ma, en su estudio de comparación de profesores chinos y americanos de educación primaria, describió el *Profound Understanding of Fundamental Mathematics* (PUFM), como un conocimiento profundo que va más allá de una compresión conceptual básica, en los términos expresados por Shulman (1986), es decir, lo describe como una capacidad para establecer una conexión entre diferentes ideas matemáticas, y además ser capaz de organizar un conjunto de ideas relacionadas.

d) Modelo Profound Pedagogical Content Knowledge

An, Kulm y Wu en 2004 plantean un modelo paralelo al de Ma (1999), considerando que un conocimiento profundo del contenido era insuficiente para una enseñanza efectiva: el *Profound Pedagogical Content Knowledge*. Se trata de un conocimiento profundo y amplio sobre la enseñanza y el curriculum, con el que los maestros son capaces de conectar su conocimiento del contenido, el curriculum y la enseñanza en una red, de manera que estos tres tipos de conocimiento interactúan entre sí.

Además, al igual que Ernest (1989) y Fennema y Franke (1992), los autores de este planteamiento ponen de manifiesto la importancia del contexto y el impacto de las creencias de los profesores sobre su conocimiento.

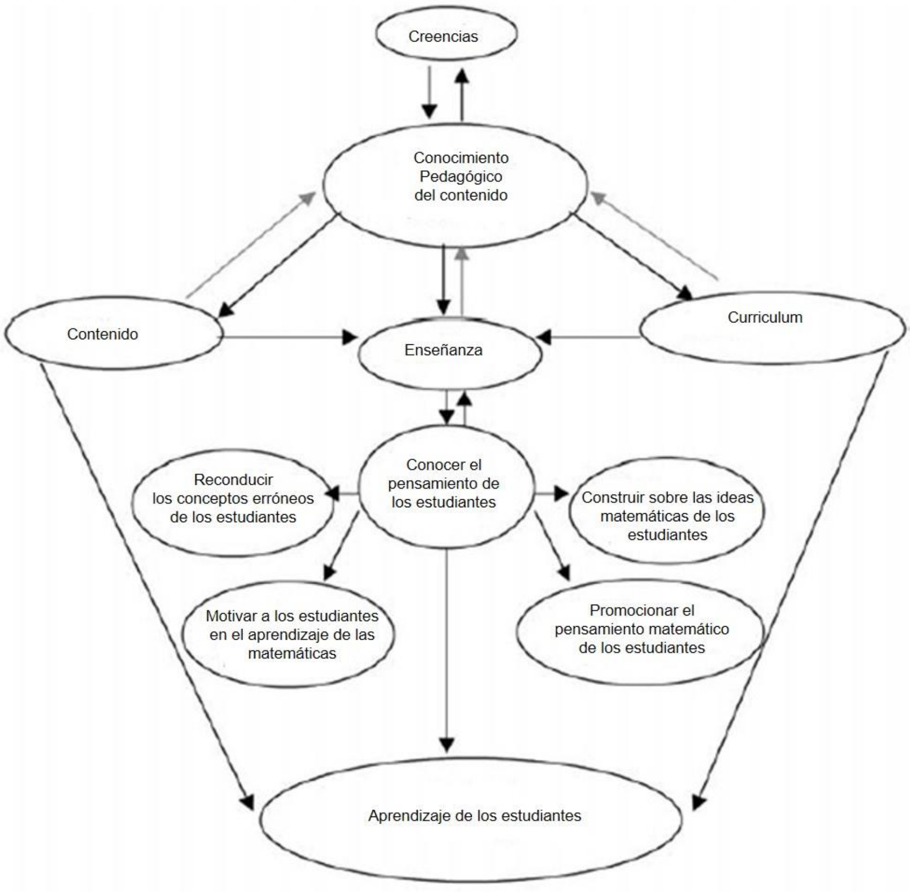


Figura 9. Modelo de An, Kulm y Wu (2004) sobre el conocimiento del profesor. (Adaptado de An, Kulm y Wu, 2004, p. 147).

2.3.2.- <u>Modelos Descriptivos</u>

a) Modelo The Knowledge Quartet

En el año 2005, el equipo de la universidad de Cambridge liderado por Rowland propone el modelo *The Knowledge Quartet*. Este planteamiento responde a la necesidad de considerar las diferentes maneras en las que el conocimiento del profesor está presente en el aula, manifestada por Fennema y Franke años atrás. De modo que, a diferencia de Shulman que intentó categorizar prescriptivamente los tipos de conocimiento de los profesores, se centra en las situaciones de aula en las que se moviliza el conocimiento.

Esta teoría se fundamenta en cuatro dimensiones:

- *Fundación*: conocimiento y comprensión de las matemáticas y de la pedagogía matemática; así como las creencias acerca de las matemáticas, las finalidades de la matemática y las condiciones con las cuales los alumnos aprenden mejor matemáticas
- *Transformación*: transformación del conocimiento matemático en formas pedagógicas. Por ejemplo, tipo de representación y ejemplos usados por los profesores, así como, las explicaciones, ejemplos y demostraciones de los profesores y preguntas de los estudiantes.
- *Conexión*: coherencia en los enlaces entre las diferentes lecciones, entre las diferentes ideas matemáticas e incluso entre las diferentes partes de las lecciones. También, recoge la secuencia de las actividades para la enseñanza y la conciencia de las posibles dificultades y obstáculos que los estudiantes puedan tener con los diferentes temas, conceptos y tareas matemáticas.
- *Contingencia*: la disposición del profesor para responder a las preguntas de los estudiantes, para responder apropiadamente a las respuestas erróneas de los estudiantes y para desviarse del plan de la lección. En definitiva, afecta a la disposición del profesor para reaccionar a las situaciones imprevistas y no planificadas.

Estas cuatro dimensiones llevan asociados 18 códigos (Tabla 6) derivados de la observación de clases, y los cuales permiten hablar sobre la enseñanza de las matemáticas en educación primaria en la práctica, con especial atención a los docentes y su conocimiento matemático para la enseñanza.

Foundation	Adheres to textbook Awareness of purpose Concentration on procedures Identifying errors Overt subject knowledge Theoretical underpinning Use of terminology
Transformation	Choice of examples Choice of representation Demonstration
Connection	Anticipation of complexity Decisions about sequencing Making connections between procedures Making connections between concepts Recognition of conceptual appropriateness
Contingency	Deviation from agenda Responding to children´s ideas Use of opportunities

Tabla 6. Códigos de observación de la práctica educativa del cuarteto del conocimiento. (Adaptada de Rowland et al., 2009, p. 29)

b) Modelo MKT

En los años siguientes investigadores de la Universidad de Michigan dan un paso más y hacen un planteamiento novedoso desarrollando, a partir del modelo de Shulman (1986), una teoría sobre el conocimiento de las matemáticas que los profesores de primaria deben tener para enseñar dicha disciplina de manera efectiva: el *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT) o conocimiento matemático para la enseñanza. Este tipo de conocimiento es especial y se requiere únicamente para la enseñanza de las matemáticas (Ball et al., 2008).

Este modelo MKT probablemente supone la reconceptualización del modelo de Shulman más influyente puesto que engloba tanto el tradicional *Conocimiento pedagógico del contenido* (PCK) como el *Conocimiento del contenido* (CK), a pesar de omitir la importancia que Fennema y Franke (1992) o An et al. (2004) otorgaron a las creencias del profesor.

Este tipo de conocimiento, en sentido holístico, no sólo afecta al conocimiento pedagógico de la disciplina si no que incorpora un conocimiento común y especializado de la disciplina en sí misma. En la Figura 10 puede observarse la relación entre el planteamiento de Ball y su equipo y las categorías iniciales de Shulman (1986): conocimiento del contenido y el conocimiento pedagógico del contenido.

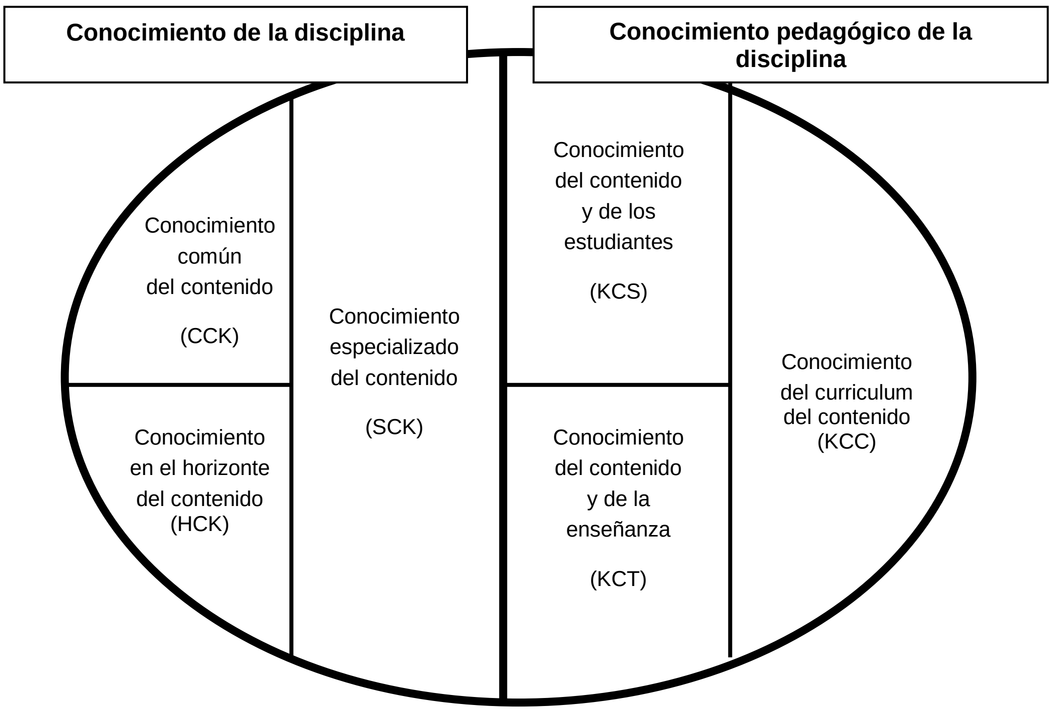


Figura 10. Relación del modelo de Shulman (1986) y el constructo Mathematical Knowledge for Teaching. (Adaptado de Ball, Thames y Phelps, 2008, p. 403).

Como se observa en la figura, estos autores propusieron seis tipos de conocimiento, sin embargo, ellos otorgan todo el peso del constructo MKT a 4 grandes subdominios (CCK, SCK, KCT y KCS), siendo, según el equipo de Ball, el conocimiento especializado del contenido, la principal aportación del modelo. A continuación, se presenta cada uno de ellos.

En primer lugar, dentro del tradicional conocimiento pedagógico del contenido, el modelo MKT incluye:

- *El conocimiento de la disciplina y los estudiantes* (Knowledge of Content and Student, KCS): implica el grado de familiarización con el pensamiento de los estudiantes así como con la comprensión de los contenidos matemáticos. Así por ejemplo podría considerarse KCS anticiparse a los errores de los alumnos conociendo los más frecuentes o predecir cómo abordarán una tarea matemática los estudiantes. Este tipo de conocimiento es el que se pone en marcha cuando los profesores diseñan las clases pensando en sus alumnos.
- *El conocimiento de la disciplina y la enseñanza* (Knowledge of Content and Teaching, KCT): combina el conocimiento sobre la enseñanza y sobre las matemáticas, de manera que requiere de una conexión entre la comprensión matemática específica y una comprensión pedagógica. Por ejemplo, durante una clase los docentes deben decidir cuándo preguntar más para clarificar, cuándo plantear una nueva tarea de aprendizaje para los alumnos, cómo secuenciar los contenidos para facilitar el aprendizaje del estudiante o qué materiales utilizarán.

En segundo lugar, dentro del tradicional conocimiento del contenido, el modelo MKT integra:

- *El conocimiento común de la disciplina* (Common Content Knowledge, CCK): compuesto por el conjunto de habilidades, procedimientos y conceptos adquiridos por un adulto bien formado, de manera que a pesar de usarlo para la instrucción, no es exclusivo de los profesores sino que lo comparten con otros profesionales que usen las matemáticas. Por ejemplo, este tipo de conocimiento permite al maestro resolver problemas, desarrollar un procedimiento, conocer una definición, restar 25 a 76, reconocer respuestas incorrectas de los estudiantes o detectar definiciones incorrectas en los materiales curriculares.
- *El conocimiento especializado de la disciplina* (Specialized Content Knowledge, SCK): es un conocimiento matemático que va más allá del esperado en una persona bien formada, incluso de aquellos cuya profesión requiera del uso de las matemáticas (p.e: ingenieros, físicos, etc.). Requiere conocer además del cómo, el porqué. Así por ejemplo, los profesores deben comprender distintas formas de interpretar las operaciones, saber comparar distintos modelos de restar o explorar las estructuras de los problemas. Por tanto, se trataría de un conocimiento exclusivo para la profesión docente.

De especial relevancia para el presente trabajo sería este cuarto dominio (SCK). En nuestro contexto concreto de la resolución de problemas verbales, el conocimiento específico del maestro incluiría, entre otras cuestiones, conocer las demandas cognitivas de las tareas (Heller y Greeno, 1978; Lewis y Mayer, 1987) de modo que el maestro sepa promover un razonamiento en aquellos casos que la tarea lo permita o favorecerlo enriqueciendo una tarea estándar, o los diferentes procesos implicados en la resolución de un problema verbal (Verschaffel et al., 2000). Sin embargo, podría ser este conocimiento especializado del maestro el que limite la práctica docente y en consecuencia el aprendizaje del alumno, pues este concepto muestra evidencia empírica de la relación directa entre MKT y resultados de los alumnos (Hill et al., 2005).

Para ilustrar los diferentes tipos de conocimiento del modelo de Ball, a continuación se propone un ejemplo completo en relación a la resolución del siguiente problema aritmético verbal organizado según el marco teórico MKT. El enunciado del problema sería el siguiente:

> "Un pastor tenía 57 ovejas. Compró algunas ovejas más. Los lobos se han comido 11 ovejas y al pastor le han quedado 96. ¿Cuántas ovejas compró el pastor?"

El CCK en este problema implicaría saber calcular los algoritmos 96+11 y 107-57 para emitir 50 como resultado y saber reconocer una respuesta incorrecta (96-11) de un alumno;

El SCK implicaría saber promover un razonamiento tanto situacional (como el pastor quería más ovejas porque hay buenos pastos en la zona va a una feria y compra ovejas; como los lobos estaban hambrientos y querrían saciar su hambre se comen ovejas) como matemático (las 11 ovejas que se comieron los lobos junto con las 96 que le quedaron al final forman el mismo total que las (?) que tenía al principio, o saber identificar que 57-11 es una respuesta incorrecta porque no sigue la estructura temporal del problema puesto que los lobos se comen las ovejas después de que el pastor haya aumentado su rebaño;

El KCS conllevaría identificar el pensamiento de un estudiante que puede haber dado una respuesta incorrecta (ha restado 96-11 porque se ha fijado en la palabra "se comieron") o conocer los errores más habituales a la hora de resolver un problema (tienden a realizar las operaciones que indica la palabra clave);

Finalmente, el KCT implicaría decidir cuál es la mejor manera de remediar el error o conocer qué tipo de materiales o explicaciones encajarían mejor para explicarlo (hacer un gráfico o explicarles la estructura causal de que los lobos se comieron 11 ovejas y quedaron 96 implica que antes del ataque el rebaño era mayor, puede ayudarles a entender que hay que sumar 96+11 en lugar de restar).

A pesar del extenso trabajo desarrollado para evaluar el conocimiento del profesor, este modelo aún está en construcción puesto que no han podido confirmar empíricamente estas categorías de una manera sólida (Schilling, Blunk y Hill, 2007). No obstante, conceptualmente las ideas están completas y son útiles en la comprensión de la complejidad sobre qué deben saber y usar los profesores de matemáticas.

Por otra parte, es necesario señalar que el concepto *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT) difiere del *Pedagogical Content Knowledge* (PCK) de Shulman en dos sentidos (Depaepe et al., 2013). Por un lado, el PCK es puramente teórico mientras que el MKT es un intento de refinar y validar empíricamente el PCK. Por otro, mientras que el PCK y el CK son categorías diferentes en la conceptualización Shulman (1986, 1987), en la propuesta de Ball y colaboradores (2008) se integran dentro esa categoría general de conocimientos que los maestros necesitan para enseñar matemáticas, el MKT. Además, el conocimiento del curriculum es una categoría independiente en el planteamiento de Shulman mientras que en el de Ball y colaboradores es una parte del tradicional PCK.

En su artículo de revisión, Depaepe et al. (2013) mantienen que el concepto MKT tiene tres puntos fuertes. En primer lugar, este concepto es el resultado de una investigación empírica sobre el conocimiento que necesitan los profesores para la enseñanza de las matemáticas y como tal, proporciona una base empírica del conocimiento. En segundo lugar, promueve la puesta en marcha del concepto propuesto por Shulman a través del desarrollo de una medida válida de los conocimientos matemáticos para la enseñanza (test MKT[3]). Finalmente, el concepto MKT proporciona una evidencia empírica de la relación positiva entre el conocimiento de los docentes y los resultados de los alumnos.

Del mismo modo, el modelo *Mathematical Knowledge for Teaching* presenta ciertas limitaciones. En primer lugar, Depaepe et al. (2013) cuestionan hasta qué punto las categorías del MKT pueden ser teóricamente distinguidas; más concretamente, se encuentran dificultades para establecer límites entre el *Conocimiento Común* (CCK) y el *Conocimiento Especializado* (SCK) (Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013; Flores, Escudero y Carrillo, 2013), así como para diferenciar el SCK del *Conocimiento en el horizonte del contenido* (HCK) y el SCK del *Conocimiento del contenido y de los estudiantes* (KCS) (Carrillo et al., 2013). En segundo lugar, el análisis factorial de los estudios que emplean el test MKT no apoyan empíricamente la existencia de las categorías que se distinguen en el modelo teórico MKT (Carrillo et al., 2013; Depaepe et al., 2013). Finalmente el modelo MKT cuenta con una perspectiva esencialmente cognitiva sobre el conocimiento de los profesores, asumiendo que este puede probarse independientemente del contexto en el que es utilizado, ignorando así, las creencias de los docentes sobre la enseñanza de las matemáticas (Depaepe et al., 2013). En este sentido, no está claro si el modelo considera la variabilidad cultural (Chapman, 2013a).

c) Modelo MTSK

Debido a las limitaciones encontradas en la propuesta MKT, expuestas en líneas precedentes, el grupo de investigación SIDM de la Universidad de Huelva, está trabajando en la elaboración de un nuevo modelo de conocimiento denominado *Conocimiento Especializado de los Profesores de Matemáticas* (MTSK). Puesto que dicho planteamiento se encuentra actualmente en desarrollo, se hará una somera descripción al respecto.

En términos generales dicho modelo difiere del MKT (Ball et al., 2008) en que la especialización afecta a todos los dominios del conocimiento y no solo a uno de ellos. Dicho de otro modo, Carrillo et al. (2013) proponen que todo el conocimiento matemático del docente ha de ser especializado. En este sentido, el conocimiento especializado del profesor de matemáticas es diferente del conocimiento psicopedagógico general, del conocimiento especializado del profesor de cualquier otra disciplina o del conocimiento especializado de otros profesionales de las matemáticas (Carrillo et al., 2013; Escudero, Flores y Carrillo, 2012).

Además, retoma el papel de las creencias que apuntaban Ernest (1989) o Fennema y Franke (1992), de modo que otorga una visión más precisa sobre la práctica docente puesto que considera aspectos que influyen en ella a la par de los conocimientos.

En la siguiente figura se presenta de manera gráfica el modelo MTSK planteado por este grupo de investigación:

[3] El test MKT está integrado por 34 problemas referentes a distintos contenidos matemáticos: números y operaciones (12); geometría (14) y álgebra (8). El total de ítems está destinado a valorar dos de los cuatro subdominios propuestos, concretamente el Conocimiento Común (CCK) y el Conocimiento especializado (SCK). Para ampliar información, ver Hill, Ball y Schilling (2004) o Hill et al. (2008).

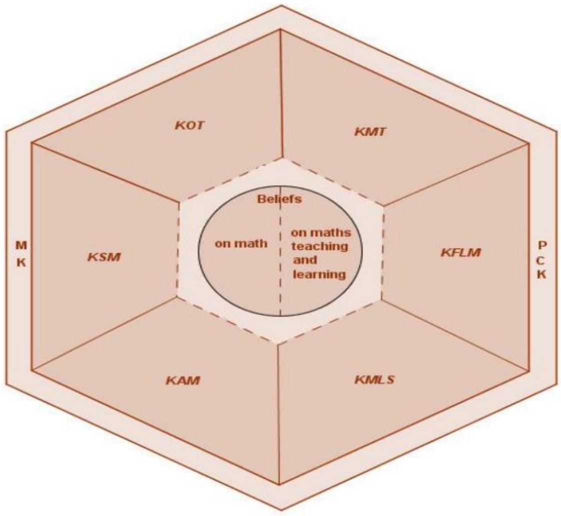


Figura 11. Modelo MTSK. (Carrillo et al., 2013)

MK: Conocimiento matemático; PCK: Conocimiento pedagógico del contenido; KOT: Conocimiento de los temas; KSM: El conocimiento de la estructura de las matemáticas; KAM: El conocimiento de las matemáticas; KFLM: El conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas; KMT: El conocimiento de la Enseñanza de la Matemática; KMLS: Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de Matemáticas

Después de este recorrido por la literatura observamos que “el conocimiento matemático del maestro” se ha considerado desde diferentes perspectivas, con diferentes constructos que lo describen, resultando, según Chapman (2015) complejo concretar qué significa y qué conlleva. En este sentido, podemos concluir que diferentes autores han propuesto modelos distintos para sistematizar el conocimiento que requiere un profesor para enseñar matemáticas: desde los primeros modelos prescriptivos hasta los descriptivos más actuales, surgidos de la observación de la práctica docente. Además, existe un consenso creciente en torno a la idea de que, para enseñar una materia, en este caso matemáticas, los profesores necesitan más que la competencia básica en los temas que van a enseñar. También se observa que las principales diferencias están relacionadas con los componentes que integran el conocimiento y sus descripciones específicas, variando en función de los equipos de investigación. De este modo, la idea general de “conocimiento” es la misma, las diferencias residen en el modo en el que los diferentes modelos organizan sus componentes. A esto hay que añadir que los diferentes modelos están interrelacionados entre sí, y han sido elaborados sin reemplazar las ideas iniciales de Shulman, reelaborándolas desde diferentes ópticas. Por tanto, a pesar de la aparente falta de acuerdo en la definición, la esencia se mantiene y el concepto sigue siendo influyente en la investigación educativa.

Para finalizar este epígrafe, se presenta una figura en la que de manera gráfica se recogen las aportaciones trabajadas organizadas en dos bloques –descriptivo y prescriptivo- según los criterios ya expuestos.

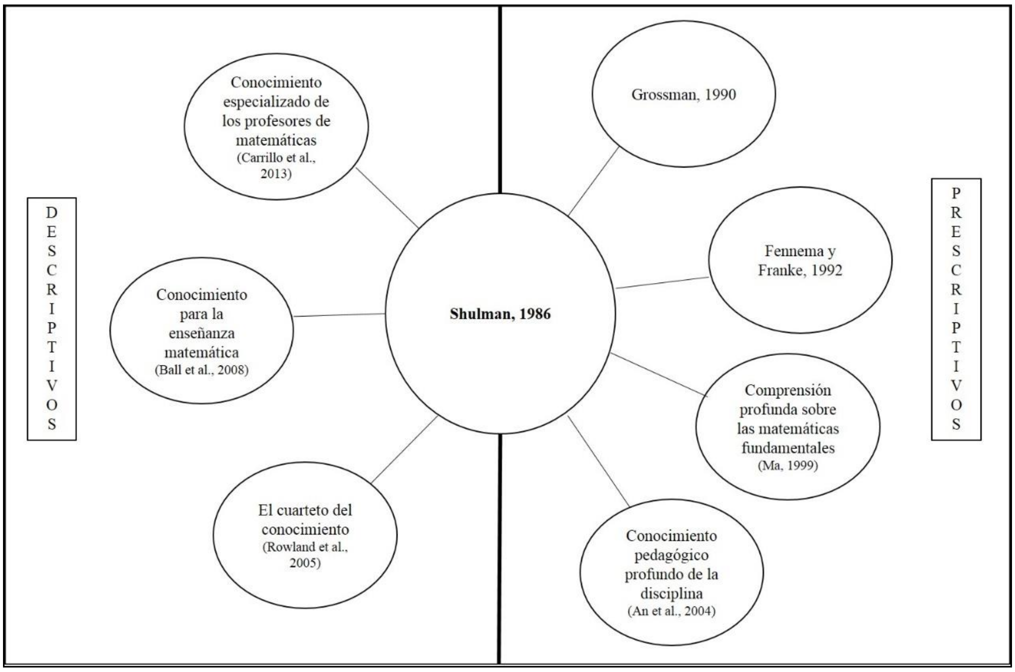


Figura 12. Recopilación de los modelos de conocimiento trabajados.

2.4.- ESTUDIOS EMPÍRICOS

En los últimos años la investigación en este campo ha experimentado un notable crecimiento. Tanto es así que Depaepe et al. (2013), en su artículo de revisión, identifican hasta seis líneas de investigación:

- relación entre el PCK y CK de maestros en formación y en ejercicio,
- correspondencia entre el PCK de los maestros y los resultados de los alumnos,
- relación entre el PCK y las características individuales del maestros (p.e: edad, género, formación),
- desarrollo del PCK de maestros en formación,
- naturaleza del conocimiento de profesores en ejercicio y en formación, y
- relación del conocimiento y la práctica educativa.

Estas dos últimas, se relacionan con los objetivos de nuestros estudios, los cuales se detallarán más adelante en los capítulos III y IV.

Por esta razón, una vez establecida la parte conceptual del conocimiento del profesor a través de la revisión de la literatura y, para describir el avance de la investigación en este área, examinaremos los estudios empíricos realizados en el ámbito de la enseñanza de las matemáticas, más concretamente en el contenido específico de resolución de problemas. Por ello, a continuación se describen las distintas investigaciones que han valorado el conocimiento de los docentes, y se incluye un breve resumen de aquellos estudios que se relacionan más directamente con nuestro objetivo. Esta descripción se realizará considerando diferentes aspectos de los estudios: los contenidos matemáticos abordados, las técnicas de recogida de información, el tipo de estudio realizado, el nivel educativo analizado y la muestra empleada. A continuación se describen cada uno de estos aspectos.

Contenidos

En el área de matemáticas se ha abordado el conocimiento de los profesores en distintos contenidos como el álgebra (An et al., 2004; Ball et al., 2005; Chazan, Yerushalmy y Leikin, 2008; Hill et al., 2004, 2005, 2008; Huang y Kulm, 2012; Kleickmann et al., 2013; Li, 2011), la aritmética (An et al., 2004; Ball et al., 2005; Borko et al., 1992; Ding, Li y Capraro, 2013; Hill et al., 2004, 2005, 2008; Iszàk, 2008; Kleickmann et al., 2013; Lo y Luo, 2012; Newton, 2008) la geometría (Ball et al., 2005; Hill et al., 2004, 2005, 2008; Kleickmann et al., 2013), las funciones (Chazan, Yerushalmy y Leikin, 2008; Kleickmann et al., 2013; Huang y Kulm, 2012; Nyikahadzoyi, 2015) y en menor medida, la resolución de problemas (Carpenter et al., 1988). Esta última recibirá se describirá más adelante con más detalle.

Técnicas de recogida de información

Las técnicas usadas para explorar este campo han sido variadas incluyendo desde las grabaciones y la observación hasta el cuestionario o la entrevista. Se observa que existe una tendencia ya señalada por Depaepe et al. (2013), en la que los estudios con muestras grandes tienden a utilizar test mientras que los estudios con muestras de menor tamaño se sirven de la observación o las entrevistas, entre otras, como técnica de evaluación. Esto es lógico, ya que cuanto mayores son las muestras más difícil resulta realizar un análisis individualizado y profundo de cada uno de los sujetos analizados.

En términos generales, podemos considerar que tanto la entrevista como el cuestionario son las técnicas comúnmente utilizadas en los estudios de este tipo para la recogida de la información (Kerlinger, 1989). Siendo esto así, describiremos con más detalle los diferentes tipos de instrumentos existentes en relación a esta metodología.

El primer instrumento son los cuestionarios. Existen cuestionarios de tipos muy diversos, desde aquellos cuyas preguntas son abiertas y por tanto, las respuestas son más amplias y personales hasta aquellos en los que únicamente hay que elegir una de entre las respuestas dadas o cuyos ítems se corresponden a una escala tipo Likert con 5 opciones de respuesta. A continuación se presentan dos ejemplos.

<table>
<tr>
<td>Problema 4

Sus estudiantes están tratando de resolver el siguiente problema de proporción: La relación entre niñas y niños en el club de matemáticas es 3:5. Si hay 40 estudiantes en el club de matemáticas, ¿cuántos son niños?</td>
<td>a. Describir una actividad que usarías para determinar los tipos de estrategias de solución que tus estudiantes han utilizado para resolver el problema. Aquí hay dos soluciones de los estudiantes al problema:
Solución de June:
3/5 = x/40 Hay 24 chicas, así que hay 16 niños
Solución de Kathy:
3/8 = x/40 Hay 15 chicos

b. ¿Qué pregunta le haría a Kathy para determinar si podría justificar su respuesta y razonamiento?

c. ¿Qué sugerencia le daría a June que pudiera ayudarla a corregir su enfoque?

d. ¿Qué estrategia utilizaría para animar a sus estudiantes a reflexionar sobre sus respuestas y soluciones?</td>
</tr>
</table>

Figura 13. Ejemplo tomado del cuestionario de enseñanza matemática de An et al. (2004), p.152

Imagínese que usted está trabajando con su clase multiplicaciones de grandes cantidades. Entre los papeles de los alumnos, se observa que algunos han mostrado su trabajar en las siguientes maneras:

Student A	Student B	Student C
35 x 25 125 +75 875	35 x25 175 +700 875	35 x25 25 150 100 +600 875

¿Cuál de estos estudiantes, a juzgar por el método que utiliza, podría utilizarse para multiplicar dos números enteros?

	Method Would Work for All Whole Numbers	Method Would NOT Work for All Whole Number	I'm Not Sure
Method A	1	2	3
Method B	1	2	3
Method C	1	2	3

Figura 14. Ejemplo tomado del cuestionario de evaluación de MKT de Hill et al. (2008), pp.505-506

El segundo instrumento, la entrevista, se utiliza para objetivos muy diversos. Así por ejemplo, An et al. (2004) preguntaron a los docentes sobre cuáles eran para ellos los objetivos de la enseñanza matemáticas, cómo influía esto en sus prácticas, qué metodología usaban en sus clases, cómo preparaban sus clases, cómo conocía el pensamiento de sus alumnos. En la misma línea, Hill et al. (2008) utilizaron entrevistas más generales en las que se preguntaba a los docentes por su formación general, su visión sobre la enseñanza de las matemáticas. Por otra parte, estos mismos autores generaron también una serie de entrevistas más específicas en las que se les pidió que resolvieran 18 ítems sobre diversos contenidos (geometría y álgebra), de modo que el entrevistador pudiera comprobar el pensamiento del profesor pidiendo más explicaciones o clarificaciones. En este sentido, Iszàk (2008) llevó a cabo una entrevista basada en una combinación de las tareas y eventos de las clases observadas y, extractos de vídeo de la entrevista de los alumnos seleccionados en la entrevista con el investigador. A los profesores se les pidió discutir la parte matemática más importante en la tarea, reconstruir lo que pudiera haber estado pensando en un punto concreto durante una lección, interpretar el razonamiento de los estudiantes, o considerar cómo podrían responder a un comentario de un estudiante en particular o a las preguntas formuladas durante una lección. En las entrevistas se dio prioridad a tratar aquellos episodios en los que profesores y alumnos discutían sobre el uso o la interpretación de dibujos. Esto permitió revelar aspectos del pensamiento matemático y dificultades de los estudiantes que no se evidencian durante las clases. Por su parte, Borko et al. (1992) también utilizaron una entrevista semiestructurada en la que se planteaban situaciones hipotéticas en una clase de matemáticas en la que se estaba trabajando sobre la división de fracciones. Las preguntas iban encaminadas a) a comparar la presentación de este tema en dos libros de texto diferentes de 6º grado proporcionados por el entrevistador, b) a describir cómo enseñarían y evaluarían este tema a los alumnos de este nivel y c) a asignar tareas sobre este tema a los alumnos. En este sentido, se plantearon preguntas tales como: ¿qué tipo de problemas tendrían los alumnos con este material?, ¿cómo puede saber si su alumno lo está comprendiendo?, ¿cómo respondería a un alumno que dijera:

> sé que cuando tengo que dividir dos fracciones, tengo que girar uno de los números al revés y se multiplican, pero no sé por qué, de repente, se cambia a la multiplicación, así que se me olvida girarlo y me equivoco en un montón de problemas? (p. 202).

A pesar de que la entrevista y el cuestionario son las dos técnicas más usadas, ambas tienen posibilidades y limitaciones: Neuman (2010) señala que si bien la entrevista cara a cara permite un intercambio directo de información en el que además del contenido se percibe la forma de las respuestas, de modo que la información que se obtiene es mucho más profunda que la recabada a través de un cuestionario, cuenta con un gran hándicap: la disponibilidad personal y temporal, pues requiere estar presente durante un determinado tiempo para llevarla a cabo. Por lo tanto, normalmente esta técnica se utiliza con un número reducido de participantes y en tareas concretas.

Por otro lado, según este autor, los cuestionarios pueden administrarse a un número más grande de participantes y con una amplia variedad de tareas. Sin embargo, no permiten la oportunidad de aclarar, profundizar o hacer preguntas sobre las tareas presentadas.

Una combinación de ambas técnicas sería óptimo, de manera que se administre el cuestionario escrito a un gran número de participantes seguido de una entrevista a un subconjunto de ellos. Esta es justamente la combinación de la que se sirvieron Hill et al. (2008) para su estudio.

Estudio

En cuanto a los tipos de estudio que se han llevado a cabo en matemáticas, se han realizado con mayor frecuencia estudios de casos (p.e: Borko et al., 1992; Grossman, 1990; Hill et al., 2008; Iszak, 2008), comparaciones entre expertos y novatos (p.e: Kleickman et al., 2013; Leinhardt y Smith, 1985) y comparaciones internacionales (p.e: An et al., 2004; Ma, 1999).

Nivel educativo

Atendiendo al nivel educativo de los alumnos a los que los profesores enseñaban matemáticas, la mayor parte de los estudios revisados trabajan con maestros del nivel de educación primaria (p.e: Carpenter et al., 1988; Ding et al., 2013; Hill et al., 2005, 2008; Iszàk, 2008; Lo y Luo, 2012; Newton, 2008) y del nivel de secundaria (p.e: An et al., 2004; Huang y Kulm, 2012).

Muestra

La mayor parte de los estudios ha analizado los conocimientos de profesores en ejercicio (p.e: Carpenter et al., 1988; Hill et al., 2005, 2008; Iszàk, 2008; Kleickmann et al., 2015) o estudiantes de Magisterio, esto es, profesores en formación (p.e: Borko et al., 1992; Ding et al., 2013; Newton, 2008). Un porcentaje menor de estudios se centraron en una combinación de ambos tipos de profesores (p.e: Kleickmann et al., 2013 o Mullens, Murnane y Willett, 1996).

En vista de la considerable cantidad de trabajos previos, a la hora de describir los estudios que pueden considerarse precedentes directos del trabajo que se aborda en esta Tesis Doctoral es necesario clarificar el criterio para seleccionar esos estudios de los cuales éste puede considerarse una continuación.

En este sentido, recordamos que en nuestro trabajo se analizará el contenido de resolución de problemas (RP), de acuerdo a una de las perspectivas adoptada de entre las propuestas por Blanco y Cárdenas (2013) y Cárdenas, Blanco, Guerrero y Gómez (2013). Estos autores proponen tres perspectivas: 1) la enseñanza para la RP (aplicación de los contenidos previamente vistos a través de problemas); 2) la enseñanza vía RP (a partir de problemas se desarrollan los contenidos del tema) y 3) la enseñanza sobre RP. Será esta última perspectiva la que se adopte como criterio puesto que considera la RP como un contenido específico cuyo fin es que los alumnos aprendan a resolver problemas, para lo que los profesores enseñan habilidades, técnicas, estrategias específicas sobre RP y además, favorecen la reflexión y discusión sobre el propio proceso.

Siendo esto así, podemos considerar antecedentes directos del presente trabajo aquellos estudios sobre el conocimiento del maestro que entiendan la resolución de problemas como un contenido y no como una actividad para aplicar contenidos matemáticos, ni una metodología para aprender matemáticas. En este sentido, resulta destacable que de la bibliografía revisada tan sólo un estudio, el desarrollado por Carpenter et al., (1988), valoró el conocimiento del maestro según esta perspectiva. A continuación hacemos una presentación detallada del mismo.

Análisis de los conocimientos de los profesores en resolución de problemas: el estudio de Carpenter et al. (1988)

El estudio llevado a cabo por Carpenter et al. (1988) tenía por objetivo explorar la relación entre el conocimiento del maestro y el logro de los alumnos. Para ello, describió, por un lado, la naturaleza del conocimiento de 40 profesores de 1er grado de primaria; y por otro, el pensamiento de los alumnos sobre matemáticas.

En lo que sigue analizaremos lo referido al conocimiento del profesor, aunque este estudio recoge otros contenidos, tal y como se ha expuesto. En este sentido, se valoraron tres aspectos concretos de su conocimiento: sobre los distintos tipos de problemas, sobre las estrategias de los alumnos para resolver problemas y sobre sus propios estudiantes.

Respecto al “conocimiento de los distintos tipos de problemas”, se generaron dos tareas.

- “Redactar problemas”: se pidió a los profesores que escribieran seis problemas matemáticos que podrían ser representados por seis oraciones numéricas dadas (5 + 7 = ?, 6 + ? = 11, ? + 4 = 12, 13 - ? = 4, 15 - ? = 9 y ? - 3 = 9), correspondiéndose con la clasificación de problemas verbales según su semántica: unión-separación, combinación y comparación. Los problemas escritos se valoraron de 0 a 2 (2 a los problemas que se correspondían con las oraciones numéricas dadas, 1 puntos a los problemas que no coinciden directamente con la oración numérica dada, pero tienen la misma respuesta y 0 puntos fueron otorgados a los problemas que tuvieron respuestas diferentes, estaban incompletos o carecían de sentido).

- "Dificultad relativa del problema": los profesores recibieron 16 pares de problemas y se les pidió que identificaran cuál de los dos problemas sería más difícil para los niños de primer grado. En este sentido, 4 de los pares eran problemas del mismo tipo con cambios relativamente pequeños en el contexto y la redacción. Los 12 restantes eran variados pero contaban con una jerarquía de dificultad establecida en base a la propuesta de Carpenter y Moser (1983).

En cuanto al "conocimiento de los tipos de estrategias que los niños utilizan para resolver diferentes problemas" se evaluó mostrando a los profesores varios vídeos de alumnos de 1^er^ grado resolviendo problemas y pidiéndoles después que describiesen cómo creían que ese mismo alumno del vídeo resolvería otros problemas similares a los que aparecía solucionando en el vídeo.

Por último, en relación al "conocimiento de los docentes sobre sus propios estudiantes", se pidió a cada maestro describir cómo creía que cada uno de un total de seis estudiantes, seleccionados al azar de su clase, resolvería seis problemas diferentes de suma y resta. En este punto se generaron dos medidas: por un lado el conocimiento sobre la respuesta del estudiante (predicción de si el estudiante resolvería correctamente independientemente de la estrategia seguida) y por otro el conocimiento sobre las estrategias del estudiante (predicción de la estrategia que usaría el estudiante para resolver el problema).

La aplicación de las tareas se llevó a cabo de manera individual, obteniendo los resultados que se exponen a continuación organizados según las preguntas de investigación relativas al conocimiento de maestro propuestas por los propios autores.

¿Qué saben los profesores sobre los diferentes tipos de problemas de suma y resta?

La mayoría de los docentes del estudio parecían ser capaces de discriminar entre los distintos tipos de problemas de suma y resta, así como escribir problemas apropiados que correspondían a oraciones numéricas diferentes.

Sin embargo, no parecían disponer de un marco teórico coherente para la clasificación de los problemas. De este modo, la diferencia de dificultad de los diferentes tipos de problemas no era por lo general el argumento principal cuando los maestros valoraron la dificultad relativa de diferentes problemas. Muchos maestros tendieron a centrarse en las características sintácticas como palabras clave en lugar de en la semántica de los problemas. Por tanto, la situación del conjunto desconocido, el lenguaje del problema o las palabras clave fueron algunas de las evaluaciones a la dificultad relativa del problema.

¿Qué saben los profesores sobre las estrategias que los alumnos usan para resolver diferentes tipos de problemas?

En torno a la mitad de los profesores estaban familiarizados con las estrategias más utilizadas para resolver problemas de suma y resta, y podían identificar con éxito estrategias cuando observaron las que utilizaban los alumnos en el vídeo. Sin embargo, no categorizaron los problemas en términos de estrategias que se usan para resolverlos.

Muchos profesores no parecían reconocer el principio general de que los problemas que pueden ser modelados son más fáciles que los problemas que no se puede. Como consecuencia de ello, tendían a sobreestimar la dificultad de los problemas de juntar donde el cambio era desconocido.

A modo de conclusión general del estudio, los maestros fueron razonablemente exitosos en identificar bastantes de las distinciones entre los problemas y las estrategias básicas que los chicos usan en la resolución de problemas de suma y resta. Sin embargo, este conocimiento no estuvo organizado en una red coherente de conocimientos en la que se establecían diferenciaciones entre los problemas, las estrategias de los alumnos y las dificultades de los problemas. Por tanto, este conocimiento limitado de los profesores pudo limitar mayores niveles de rendimiento en los alumnos.

En otras palabras, los maestros carecían un conocimiento rico sobre las necesidades de los alumnos en resolución de problemas, contenido que la investigación había ya mostrado. De modo que, tal y como expresan los autores, sería necesario que los maestros adquiriesen un conocimiento diferente del exhibido en este estudio.

El estudio de Carpenter et al. (1988), al igual que el resto de trabajos sobre el conocimiento de los profesores que hemos descrito, coincide en que toman como punto de partida las ideas originales de Shulman. Todos ellos realizan aportaciones valiosas a la concreción del concepto de conocimiento matemático de los profesores, cada uno en su contenido específico. Sin embargo, en resolución de problemas tan solo se ha estudiado el conocimiento sobre los diferentes tipos de problemas y estrategias de los alumnos derivadas del estudio de Carpenter et al. (1988), que acabamos de describir. Quizás sea esta la razón por la cual el conocimiento de los profesores acerca de la resolución de problemas ha recibido poca atención por parte de los investigadores, desde la perspectiva aquí trabajada, hasta la fecha.

2.5.- RELACIÓN CONOCIMIENTO-PRÁCTICA

A lo largo de los anteriores epígrafes se han expuesto diferentes formas de conceptualizar, describir y organizar los conocimientos que un maestro debe poseer para poder dar una enseñanza de calidad promocionando así el aprendizaje de los alumnos. La siguiente cuestión que cabría plantear es hasta qué punto ese conocimiento podría ser uno de los elementos que determina lo que ocurre en las aulas, en diferentes aspectos. En este sentido, diferentes estudios han analizado la relación entre el conocimiento de los profesores y su relación con el rendimiento de los alumnos (Hill et al., 2005); el modo de mejorar la instrucción de un maestro en formación (Inoue, 2009) o el papel de las creencias como variable mediadora (Hill et al., 2008). Más concretamente, a finales de los años 80 y principios de los 90 se llevaron a cabo numerosos estudios que mostraron la existencia de una relación entre el conocimiento de los maestros y su práctica educativa, mostrando que ese conocimiento era un predictor del logro del alumno (por ejemplo, Borko et al., 1992; Fenema y Franke, 1992; Mullens et al., 1996). En esta dirección, Depaepe et al. (2015) identifican tres grandes bloques de estudios: MKT (mathematical knowledge for teaching), COACTIV (professional competence of teachers, cognitively activating instruction, and development of students´ mathematics literacy) y TEDS-M (teacher education and development study in mathematics). Debido a la cantidad de trabajos en este sentido y, que los resultados arrojados siguen la misma tendencia, para nuestro trabajo tomaremos como punto de partida aquellos que asumieron el concepto MKT.

En tal sentido, la literatura recoge el acuerdo generalizado de que el *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT) está relacionado con la práctica docente, en dos sentidos. Por un lado, este tipo de conocimiento parece influir en los resultados de los estudiantes. Por ejemplo, Hill et al. (2005) describieron cómo los alumnos de maestros con un alto MKT mostraron un incremento de rendimiento respecto a los alumnos de maestros con nivel medio de MKT. Por otro lado, también parece influir en la calidad de la instrucción. En este sentido, Hill et al. (2008) encontraron que la práctica de un profesor con alto MKT era matemáticamente rico, lingüísticamente claro, respondía a las ideas de los estudiantes, cometía pocos errores, prestaba especial atención al lenguaje, parecía conocer diferentes métodos para obtener una solución y podía seguir el pensamiento de los alumnos. Por el contrario, un maestro con bajo MKT mostró errores matemáticos, lenguaje impreciso, tendencia a basar en procedimientos las matemáticas, y a ofrecer a los estudiantes descripciones procedimentales de pasos en lugar de adentrarlos en el método y porqué funciona el mismo. Sin embargo, otros estudios han matizado que esta relación entre el *Mathematical Knowledge for Teaching* y la práctica educativa podría estar mediatizada por ciertos factores. Por ejemplo, Sleep y Eskelson (2012) consideraron las creencias del maestro sobre las matemáticas y su enseñanza como la causa de las discrepancias encontradas -aspectos de la instrucción del maestro que no se correspondían con su nivel de conocimiento- al analizar las sesiones de dos maestros de 6º curso con diferente MKT (alto y medio) impartiendo la misma tarea curricular de fracciones. Además, Hill et al. (2008) añaden a las creencias, el desarrollo profesional y los materiales curriculares como factores moduladores de la relación MKT y el comportamiento del maestro en el aula.

Para los objetivos de nuestro trabajo son especialmente relevantes los estudios que analizaron, por un lado, el conocimiento de los profesores en función de su grado de experiencia, y por otro, el rol del conocimiento y la tarea en la práctica educativa.

Teniendo en cuenta lo anterior, estas cuestiones son las que trataremos en lo que resta de este segundo capítulo pues como veremos más adelante van a ser clave en la parte empírica del presente trabajo.

2.5.1.- Influencia de la experiencia en el conocimiento[4]: profesores en ejercicio y en formación

Los estudios que han analizado la influencia de la experiencia en el desarrollo de los conocimientos de los profesores han venido comparando los conocimientos de profesores expertos y principiantes. Sin embargo, existe poco consenso en la literatura sobre los criterios a considerar a la hora de seleccionar una muestra de profesores expertos. En este sentido, Palmer, Stough, Burdenski y Gonzales (2005) identificaron cuatro criterios básicos usados por la investigación educativa: años de experiencia, reconocimiento social, pertenencia a un grupo social y profesional, y rendimiento. De estos, el primer criterio es el más empleado, habiendo una gran discrepancia entre los autores. Para algunos, citados en Palmer et al. (2005), son necesarios dos años (Fitzgerald, 1998) mientras que otros requieren de cuatro (Rich, 1993), cinco (Marcelo, 2008), seis (Bullough y Baughman, 1995), siete (Moallem, 1998; Tochon y Munby, 1993), diez (Simon y Chase, 1973; Swanson, O´Connor y Cooney, 1990) o veinte años (Copeland et al., 1994; Leinhardt, 1993). En diferentes ocasiones se ha seleccionado la muestra considerado maestros con práctica o in-service y estudiantes para maestro o pre-service (p.e: Borko y Livingston, 1989; Chi, Glaser y Rees, 1982; Kleickmann et al., 2013; Leinhardt y Smith, 1985).

Una vez hecha esta puntualización, describiremos las diferentes maneras de las que se manifiesta el conocimiento en función de la experiencia que tenga el maestro con el

[4] En los estudios se hace un uso genérico del término "conocimiento" sin especificar exactamente el tipo al que se están refiriendo. Entendemos que el modelo MKT es lo suficientemente amplio como para contemplar los tipos de conocimiento a los que estos estudios se refieren.

contenido de la tarea. Ahondar en esta cuestión permitirá comprender la relación entre el conocimiento específico sobre la resolución de problemas y la experiencia adquirida en esa tarea. En otras palabras, nos ayudará a establecer el sentido de nuestro primer estudio empírico.

La comparación entre expertos y principiantes tuvo gran auge en las últimas décadas del siglo XX, y a día de hoy se sigue trabajando. Muestra de ello son los numerosos estudios comparativos que se realizaron en áreas como el ajedrez (p.e: Chase y Simon, 1973; DeGroot, 1965), la física (p.e: Chi et al., 1981, 1982; Larkin, 1981; 1983; Larkin, Mcdermott, Simon y Simon, 1980a, 1980b; Snyder, 2000), la historia (p.e: Wineburg, 1991) o las matemáticas (p.e: Berliner, 1986, 1987, 1988; Leinhardt y Greeno, 1986).

Todos estos estudios confluyen en ideas muy similares, aun habiendo estudiado campos temáticos muy dispares. No obstante, Laveley, Berge, Bullock, Follman, Krornrey y Sawilowsky (1987) consideran que los profesores expertos se comportan como cualquier otro profesional experto.

¿Cuáles son las principales diferencias entre profesores expertos y principiantes, según los estudios previos? Tal y como señala Chi et al. (1982) los expertos muestran un conocimiento de carácter conceptual frente al descriptivo usado por los principiantes para representar problemas que tan solo le permite quedarse en los aspectos más superficiales y explícitos de la tarea. En este sentido, Strahan (1989) sostiene que los maestros expertos y los principiantes se sirven del mismo léxico para dar sus argumentaciones sobre la tarea, si bien, los primeros lo hacen de manera más ordenada y estableciendo relaciones entre ellas. Esto implica que los docentes con menos experiencia se centran en los aspectos más superficiales mientras que los expertos se sirven de un conocimiento más específico y de nivel superior al de los profesores novatos (p.e: identificando principios, teorías o leyes frente a la simple identificación del algoritmo de resolución) (Berliner, 1988; Chi et al. 1981, 1982; Leinhardt y Greeno, 1986).

Esto indica que las estructuras de conocimiento de expertos y novatos varían en cuanto a su nivel de complejidad, es decir, los docentes expertos cuentan con un conocimiento específico que no tienen los principiantes, permitiéndoles una estructura de conocimiento más coherente, organizada y con distintos niveles de generalidad frente a las ideas o esquemas generales que tienen los principiantes (Borko y Livingston, 1989).

Marcelo (2008), siguendo a Bereiter y Scardamalia (1986), y de acuerdo a la literatura previa (Laveley et al., 1987), caracteriza a los sujetos expertos (incluidos los docentes) según una serie de aspectos. El primero de ellos responde a la "complejidad de las destrezas" (2008, p.12), es decir, las acciones del experto son de carácter voluntario y estratégico frente a las acciones automáticas de los principiantes. En segundo lugar, el profesional experto posee una mayor cantidad de conocimientos que el principiante. Tercero, las diferencias en la estructura del conocimiento puesto que

> los principiantes tienden a tener lo que podemos describir como una estructura de conocimiento "superficial", unas pocas ideas generales y un conjunto de detalles conectados con la idea general, pero no entre sí. Los expertos, por otra parte, tienen una estructura de conocimiento profunda y multinivel, con muchas conexiones inter e intranivel (1986, p. 12).

Marcelo (1999) añade una última característica: el experto tiende a representar los problemas mediante una estructura abstracta mientras que los principiantes, por el contrario, están influidos por el contenido concreto del problema y, por tanto, tienen dificultades para representarlo de esa forma abstracta.

A modo de conclusión, los profesores expertos cuentan con un esquema más elaborado, un conocimiento profundo del contenido y un pensamiento orientado hacia metas frente a los profesores en formación que carecen de estas formas de abordar la tarea (Hogan et al., 2003; Hogan y Rabinowitz, 2009).

2.5.2.- Influencia del conocimiento en la práctica: el material como variable mediadora

Tal y como acabamos de señalar, el conocimiento de los profesores puede estar influenciado por la experiencia del docente. En este sentido, los materiales constituyen un elemento que, a lo largo de esa experiencia docente, pueden ir conformando los conocimientos de los profesores. Sin embargo, también cabe la posibilidad de que sea el conocimiento el que determine el comportamiento del maestro en el aula.

En esta línea, Schechtman, Roschelle, Haertel y Knudsen (2010) sostienen que factores contextuales o sistémicos tales como los materiales curriculares podrían contribuir a la calidad de la instrucción.

La influencia de los materiales curriculares sobre la relación entre el MKT de los profesores y su práctica educativa ha sido objeto de recientes estudios. Por ejemplo, Izsàk (2008) analizó cómo dos profesores de 6º grado con diferentes niveles de MKT impartían la misma lección de fracciones del *Standards-based curriculum*. Esta lección se caracterizaba por introducir nuevos temas y enfoques pedagógicos respecto a los materiales curriculares clásicos (p.e: problemas realistas, menos ejercicios que requieren solamente operaciones aritméticas o algebraicas o, lecciones enfocadas incrementar la capacidad de los alumnos en resolución de problemas así como su confianza haciendo matemáticas). Los resultados revelaron que usando este material curricular nuevo había diferencias notables en el modo en el que utilizaban las ayudas incluidas en la lección (p.e: las representaciones de las fracciones) y en la manera en que interpretaban las ideas de los estudiantes y respondían a ellas. Asimismo, Ding (2008) analizó a seis profesores con diferentes niveles de MKT mientras enseñaban las mismas dos lecciones del *Standards-based curriculum*, y observó que los profesores con alto nivel de MKT, sirviéndose de este material con nuevas propuestas, fueron más sensibles a los errores de los alumnos y más exitosos al gestionar esos errores, en comparación con los de bajo nivel. Más recientemente, los estudios realizados han variado tanto el nivel de conocimiento de los profesores como los materiales con el fin de explorar la contribución de ambos en la calidad de la instrucción. En tal dirección, Charalombous et al. (2012) estudiaron la práctica de tres profesores con diferente MKT (2 bajo y 1 medio) usando dos ediciones del mismo material curricular que diferían en cuanto al nivel de ayudas para entender y enseñar el contenido. Esto es, variaban tanto las actividades de los alumnos como los "*teacher scaffolds*" (ayudas que se presentaban a los maestros como por ejemplo cómo introducir el contenido, detalles de explicación, y organización de la información importante para que el profesor pueda comprender y enseñar la resta con significado). Dichos autores consideraban que la edición con menos ayudas era apta solamente para aquellos profesores que conocían bien el tema. Los resultados mostraron, por un lado, que el MKT se relaciona positivamente con el uso de las representaciones, la cantidad de explicaciones, la precisión del lenguaje o la habilidad para recoger las contribuciones de los alumnos, siendo consistente con la literatura previa (p.e: Hill et al., 2008; Izsàk, 2008). Por otro, concluyeron que un material con más apoyos compensa el bajo conocimiento de algunos profesores, dando calidad a su instrucción mientras que un material con pocos apoyos es problemático para maestros con bajo conocimiento. Estos autores sostienen, además, que un conocimiento alto puede compensar, en parte, las limitaciones de los materiales curriculares y dar calidad a la instrucción (en línea con los resultados obtenidos en otros estudios como Charalombous et al., 2012; Hill y Charalombous, 2012a, 2012b).

A pesar de que el material curricular como variable mediadora ha sido objeto de interés en los últimos tiempos, los estudios descritos se han centrado en contenidos como las fracciones, de manera que poco se sabe acerca de la resolución de problemas verbales; asimismo, han controlado una de las dos variables -conocimiento o material- sin atender ambas de manera simultánea, considerando además, el manual completo en lugar de tareas concretas. En este sentido, Charalombous et al. (2012), en un intento de compensar esta última limitación, consideraron diferentes niveles de conocimiento y dos materiales referidos a las fracciones que diferían en cuánto a las ayudas que permitían a los maestros organizar o explicar sus explicaciones. Sin embargo, obviaron la experiencia de los maestros respecto a los materiales. Por tanto, dificulta una visión holística de la relación conocimiento, tarea y práctica educativa. Esto es lo que nos motiva a llevar a cabo nuestro segundo estudio, el cual se presenta de manera detallada en el capítulo IV.

2.6.- RECAPITULACIÓN

A lo largo de este segundo capítulo se han expuesto diferentes modelos de conocimiento elaborados a partir de la propuesta germinal de Shulman. En este sentido, uno de los más aceptados por la comunidad investigadora es el *Mathematical Knowledge for Teaching*, el cual está integrado por cuatro grandes subdominios –el conocimiento de la disciplina y los estudiantes, el conocimiento de la disciplina y la enseñanza, el conocimiento común de la disciplina y el conocimiento especializado de la disciplina- siendo este último la principal aportación de su propuesta y la base conceptual de nuestro estudio.

En este sentido, los diferentes modelos han servido como base a las numerosas investigaciones que han valorado el conocimiento del maestro en diferentes contenidos matemáticos. Sin embargo menos se ha estudiado sobre la resolución de problemas. Concretamente, Carpenter et al. (1988), entre sus resultados, mostraron la dificultad que encontraron los maestros para clasificar y diferenciar problemas y estrategias. Además, obtuvieron la fuerte tendencia de los maestros a centrarse en las características sintácticas como palabras clave en vez de en la semánticas de los problemas.

Estos conocimientos exhibidos por los maestros podrían estar mediatizados por variables tales como la práctica o las propias tareas, tal y como se ha expuesto.

En definitiva, a pesar de que ha habido una contribución amplia en el desarrollo de la teoría sobre el conocimiento necesario para la enseñanza de las matemáticas así como en el estudio de posibles condicionantes al llevarlo al aula, los conocimientos en resolución de problemas y su implicación en la práctica educativa han sido poco estudiados. Esto nos motiva a llevar a cabo a la investigación que a continuación presentamos.

SEGUNDA PARTE: ESTUDIOS EMPÍRICOS

A lo largo de la revisión teórica hemos descrito las dificultades que tienen los profesores españoles para enseñar a los alumnos a resolver problemas a través del razonamiento. Para poder explicar esta situación partimos del consenso que vincula el desempeño de los maestros con sus conocimientos. Por ello, hemos de explorar sus conocimientos respecto a aquellos aspectos que la literatura ha mostrado evidencias empíricas de que facilita una resolución basada en el razonamiento.

En este sentido, nuestro estudio sobre los conocimientos del profesor se llevará cabo sobre el contenido específico de resolución de problemas, dada la importancia de esta tarea en la formación de los alumnos, tal y como se ha expuesto.

Asimismo, consideramos necesario explorar los conocimientos de los profesores en tareas específicas para así poder dar pautas de mejora de la práctica educativa pues sólo conociendo lo que hacen y sabiendo por qué lo hacen estaremos en condiciones de poder abordar cualquier proceso de cambio. En este sentido, entendemos que los docentes deben tener una comprensión profunda del proceso de resolución para así poder enseñar a sus alumnos a resolver los problemas de manera genuina, a través del razonamiento. Por este motivo nuestro trabajo, a diferencia del de Carpenter et al. (1988), se centrará en explorar los conocimientos de los maestros acerca de la relevancia de los procesos de razonamiento en la resolución de problemas, procesos cuya promoción durante la resolución de los problemas se ha comprobado que ayuda a los alumnos a resolverlos mejor. En tal sentido, y remitiéndonos al primer capítulo de esta Tesis, hemos visto que promover distintos tipos de razonamiento es posible gracias a la presencia de determinada información en el enunciado del problema, y que esta reescritura de los problemas mejora el rendimiento de los alumnos.

Para explorar esos conocimientos sobre resolución de problemas en los profesores, se diseñaron tres tareas diferentes: problemas, proceso de resolución de problemas e interacción durante una resolución de problemas. El planteamiento general de nuestras tareas se acerca a la propuesta de Carpenter et al. (1988)[5] para la tarea de "dificultad de relativa del problema" o el de Borko et al. (1992)[6] para valorar "conocimientos y creencias". La premisa de la que partimos es que las respuestas que dan los docentes revelan la orientación y profundidad de su conocimiento. Una descripción detallada del diseño, construcción y puesta en marcha de estas medidas se proporciona en los capítulos III y IV.

Por tanto, desde una perspectiva cognitiva, la presente investigación tiene por objetivo general indagar en el conocimiento especializado sobre resolución de problemas verbales de una muestra de maestros de educación primaria de nuestro país y su incidencia en la práctica educativa.

Para abordar este objetivo se diseñaron dos estudios empíricos basados en una metodología mixta. Ambos siguen la misma estructura que se presenta de manera detallada en los capítulos III y IV de la presente Tesis Doctoral, y a cuya exposición damos paso.

[5] Se presentaron a los docentes 16 pares de problemas y les pidió que identificaran cuál de los dos problemas sería más difícil para los niños de primer grado. En este sentido, 4 de los pares eran problemas del mismo tipo con cambios relativamente pequeños en el contexto y la redacción. Los 12 restantes, eran variados pero contaban con una jerarquía de dificultad establecida en base a su fundamentación teórica. Para ampliar información véase Carpenter, Fennema, Peterson y Carey (1988).

[6] Una de las tareas que se planteó al docente consistía en comparar la presentación sobre el tema en dos libros diferentes dados por el entrevistador. Las tareas iban acompañadas de preguntas como la siguiente: ¿qué problemas tendrían los alumnos con este material?, entre otras. Remitirse a Borko, Eisenhart, Brown, Underhill, Jones y Agard (1992).

CAPÍTULO III:

Estudio empírico I:

Conocimiento matemático y resolución de problemas. Un estudio sobre los conocimientos de maestros en servicio y en formación sobre los problemas aritméticos y su resolución en el aula

3.1.- OBJETIVO

El primer estudio empírico tiene por objetivo general analizar el conocimiento especializado matemático que explicitan dos grupos de maestros de diferente nivel de experiencia (VI) respecto a tres elementos implicados en el proceso de resolución de problemas aritmético verbales (VI): los propios problemas, el modelo de resolución y una interacción profesor-alumnos mientras resuelven un problema.

Dicho objetivo se desglosa en dos objetivos específicos:

- Analizar la orientación del conocimiento específico sobre resolución de problemas aritmético verbales (VD) de los maestros en formación y los maestros en servicio. Para ello se comprobó si los maestros reconocían, por un lado, la utilidad de la información situacional y matemática añadida a los problemas, y por otro, si detectaban la presencia de ayudas al razonamiento tanto en el modelo de resolución propuesto como en la interacción profesor-alumnos. Con ello se busca analizar si los maestros consideran necesaria la comprensión matemática y situacional de los problemas para resolverlos.
- Analizar el nivel al que los maestros en formación y en servicio son capaces de explicitar sus conocimientos (VD) respecto al problema, el modelo de resolución y la interacción profesor-alumnos.

3.2.- HIPÓTESIS

A partir de los referentes teóricos reseñados en el primer y segundo capítulo, las hipótesis de nuestro estudio son las siguientes:

- Los conocimientos de los profesores en ejercicio serán diferentes de los de los profesores en formación.

  Esperamos encontrar diferencias entre ambos grupos de profesores, asumiendo que la orientación de los profesores expertos sea más superficial que de razonamiento en vista de lo que sucede en las aulas y los resultados de los alumnos en las evaluaciones internacionales.

- Los profesores en ejercicio serán más coherentes que los profesores en formación en la orientación de su conocimiento a lo largo de las diferentes tareas.

  Creemos que los docentes en ejercicio exhibirán un pensamiento más estructurado y coherente a lo largo de las tres tareas.

- Los maestros en ejercicio serán más explícitos que los maestros en formación.

  Prevemos que los maestros en ejercicio serán capaces de explicitar su conocimiento a un nivel superior que los que aún están en formación.

3.3.- MÉTODO

3.3.1) Participantes

La muestra del estudio estuvo compuesta por 109 maestros, 55 de los cuales eran maestros en servicio que ejercían en Educación Primaria con una experiencia media de 19,2 años (rango entre 38 y 9 años). Los 54 restantes eran maestros en formación, estudiantes de primer curso del Grado en Maestro de Educación Primaria. La muestra fue seleccionada por disponibilidad, por un lado, de entre aquellos maestros de Educación Primaria de centros públicos y concertados de las comunidades autónomas de Castilla y León, Madrid, Asturias y Aragón que voluntariamente quisieron participar y, por otro, de entre los estudiantes de primer curso de Grado en Maestro de Educación Primaria en la Universidad de Salamanca. Ninguno de los de participantes afirmó haber recibido formación específica sobre resolución de problemas.

3.3.2) Materiales

Para evaluar los conocimientos de los profesores se utilizó un cuestionario (Anexo 1) que fue elaborado tomando como base los elementos que la literatura ha mostrado son útiles y eficaces para que los alumnos resuelvan de manera razonada los problemas aritmético verbales, relacionados con el propio problema, con el modelo de resolución y con la interacción profesor-alumnos. Más adelante se describe de manera detallada. Por tanto, se trata de un material que surge de la descripción de la realidad, y no puede considerarse un material prescriptivo.

El cuestionario recogía, en primer lugar, información básica de los profesores (titulación, años de experiencia docente, formación específica en resolución de problemas y valoración inicial de la importancia que los maestros daban a la resolución de problemas en una clase de matemáticas) así como unas instrucciones elementales para completarlo. En segundo lugar, el cuestionario recogía las tres tareas propuestas -problemas, modelo de resolución e interacción profesor-alumnos- para valorar el conocimiento de los maestros.

Estas tres tareas tenían como base un problema de cambio (Heller y Greeno, 1978) matemáticamente difícil (Lewis y Mayer, 1987), que planteaba dos situaciones inconsistentes que requerían de razonamiento para alcanzar su resolución puesto que estrategias como la palabra clave no servían (Hegarty et al., 1995; Nesher y Teubal, 1975).

En cada una de las tareas el profesor debía elegir entre dos alternativas (la primera superficial, la segunda basada en el razonamiento) y argumentar su elección. A continuación describimos cada una de estas tres tareas.

a) Tarea I: problemas

En esta primera parte del cuestionario se presentó a los maestros dos tipos de problemas de idéntica estructura matemática: una versión estándar, que sólo contenía información sobre cantidades, personajes y objetos; y otra versión reescrita, que contenía información matemática y situacional sobre la cual se podían realizar razonamientos tanto matemáticos como situacionales. Un ejemplo de problema estándar sería el siguiente:

> "Un pastor tenía 57 ovejas. Compró algunas ovejas más. Los lobos se han comido 11 ovejas y al pastor le han quedado 96. ¿Cuántas ovejas compró el pastor?"

La versión reescrita del problema fue elaborada partiendo de la idea de que problemas con la misma estructura matemática pueden diferir en cuanto a la dificultad en función de los términos en los que aparecen expresados. Por ello, el problema se reescribió situacional y matemáticamente. La información situacional describía las metas explícitas de los personajes, para cuya consecución ejecutaban determinadas acciones que hacían aumentar o disminuir los conjuntos. De este modo, esta información permitía a los alumnos construir una representación causal coherente del texto del problema. Por otra parte, la información matemática resaltaba la estructura parte-todo subyacente al problema. Esta reescritura matemática y situacional ha demostrado ser útil para que los alumnos resuelvan más fácilmente los problemas (Orrantia et al., 2011, para la situacional; Vicente et al., 2007, 2008a y 2008b, para la reescritura matemática). El problema reescrito fue el siguiente:

> "Un pastor tenía un rebaño con 57 ovejas. *El pastor quería aumentar el tamaño del rebaño porque este año había buenos pastos*. Para ello se fue a una feria de ganado, decidió comprar algunas ovejas y <u>las juntó con las que ya tenía</u>. Una tarde el pastor vio una manada de lobos por la zona, *los lobos estaban hambrientos* y entonces, <u>del total de ovejas del rebaño</u> se comieron 11 y ahora el rebaño tiene 96. ¿Cuántas ovejas compró el pastor en la feria?"

La reescritura matemática (subrayada) ayuda al alumno a entender que las ovejas que se comieron los lobos, junto a las que le quedaron al final, forman la misma cantidad que las que tenía al principio junto a las que compró, de modo que les permite entender que la resolución del problema debe comenzarse por la segunda situación de cambio. Por otra parte, la reescritura situacional (en cursiva) planteaba una meta inicial (querer más ovejas porque hay buenos pastos) que desencadena una acción (comprar ovejas), y también una segunda meta (los lobos estaban hambrientos, por lo que querrán saciar su hambre) que provoca una segunda acción (devorar ovejas).

Una vez presentados los problemas, los maestros debían responder a dos preguntas:

- ¿Cuál de los dos problemas resultaría más difícil de resolver?, ¿por qué?
- ¿Le falta o le sobra algo a cada uno de los problemas para que se puedan resolver más fácilmente?

b) Tarea II: modelo de resolución de problemas

En esta segunda parte se presentaron dos modelos de resolución de problemas. El primero fue diseñado reproduciendo literalmente los pasos propuestos por una de las editoriales más utilizadas en nuestro país (Santillana): seleccionar datos, elegir operación, ejecutarla y comprobar el resultado. Dicho modelo no promocionaba explícitamente ningún tipo de razonamiento, ni matemático ni situacional, similar a la opción I de la primera tarea del cuestionario. La Figura 15 muestra un ejemplo de este modelo.

Solución de problemas
Pasos para resolver un problema

Resuelve siempre los problemas siguiendo estos pasos.

Un pastor tenía 57 ovejas. Compró algunas ovejas más. Los lobos se han comido 11 ovejas y al pastor le han quedado 96. ¿Cuántas ovejas compró el pastor?

- COMPRENDE.

  Pregunta ▶ ¿Cuántas ovejas compró el pastor?

  Datos ▶ El pastor tenía 57 ovejas
  Los lobos se comieron 11 ovejas
  Al final quedaron 96 ovejas

- PIENSA.

  1.° Hay que hallar cuántas ovejas había antes del ataque de los lobos
  Sumamos las ovejas que había al final y las que se comieron los lobos

  2.° Hay que saber cuántas ovejas compró.
  Restamos las ovejas que tenía después de comprar de las que tenía al principio

- CALCULA.

  1.° 96 + 11 = 107 2.° 107- 57 = 50

  Solución: El pastor compró 50 ovejas

- COMPRUEBA.

  50 + 57 = 107 ovejas tenía después de comprar las ovejas
  107 - 11 = 96 ovejas le quedaron al final

1. Un librero tenía 19 libros. Compró 15 libros más. Ha vendido algunos libros y le han sobrado 8 libros. ¿Cuántos libros ha vendido?

2. Un cocinero tenía 25 salchichas. Compró algunas salchichas más. Ha gastado 36 salchichas y le han sobrado 16. ¿Cuántas salchichas compró?

3. Un niño tenía 12 canicas. Compró algunas canicas más. Perdió 38 canicas y al final le quedaron 6 canicas. ¿Cuántas canicas compró?

4. **INVENTA.** Escribe un problema y pide a tu compañero que lo resuelva siguiendo los cuatro pasos.

16

Figura 15. Opción I del proceso de resolución de problemas

El segundo modelo incorporaba dos pasos adicionales al proceso de resolución anterior, orientados al razonamiento matemático y situacional del problema, para resolver el problema reescrito que constituía la opción II de la primera tarea del cuestionario. El razonamiento situacional estaba dirigido a que los alumnos interpretaran las metas de los personajes como indicios para deducir las acciones sobre las cantidades (incrementos o decrementos) que ejecutaban esos personajes, y que eran coherentes con esas metas. Por su parte, el razonamiento matemático buscaba que los alumnos comprendieran las relaciones entre las cantidades, en función de la estructura parte-todo subyacente. Un ejemplo de este modelo es la Figura 16.

Solución de problemas

Pasos para resolver un problema

Resuelve siempre los problemas siguiendo estos pasos.

Un pastor tenía un rebaño con 57 ovejas. El pastor quería aumentar el tamaño del rebaño porque este año había buenos pastos. Para ello se fue a una feria de ganado, decidió comprar algunas ovejas y las juntó con las que ya tenía. Una tarde el pastor vio una manada de lobos por la zona, los lobos estaban hambrientos y entonces, del total de ovejas del rebaño se comieron 11 y ahora el rebaño tiene 96. ¿Cuántas ovejas compró el pastor en la feria?

- COMPRENDE.

El pastor tenía una cantidad de ovejas al principio. Como había buenos pastos compró más ovejas y el tamaño del rebaño aumentó. Después los lobos se comieron algunas ovejas, por lo que el tamaño del rebaño disminuyó

- SACA LOS DATOS

Tenía 57 ovejas
Compró algunas más
Los lobos se comieron 11
Al final quedaron 96

Pregunta: ¿Cuántas ovejas compró el pastor en la feria?

- PIENSA.

Las ovejas que tenía el pastor antes del ataque eran las mismas que las que tenía después de comprar
Si los lobos se comieron 11 ovejas, antes del ataque habría más de las 96 que quedaron al final, por lo que para saber las ovejas que había antes del ataque hay que sumar 96 + 11.
Después de comprar el pastor tenía más ovejas que al principio, por lo que para saber las que compró hay que restar las 57 que tenía al principio de las que tenía antes del ataque.

CALCULA

- 1º: 96 + 11 = 107 2º: 107 - 57 = 50

Solución: Compró 50 ovejas en la feria

- COMPRUEBA.

50 + 57 = 107 ovejas tenía después de comprar las ovejas, 50 más que al principio
107 - 11 = 96 ovejas le quedaron al final , 11 menos que después de comprar

1. INVENTA. Escribe un problema y pide a tu compañero que lo resuelva siguiendo los cinco pasos

16

Figura 16. Opción II del proceso de resolución de problemas

En este caso, las preguntas propuestas fueron las siguientes:

- ¿Cuál de los dos modos de explicar cómo resolver un problema es mejor para aprender a resolver problemas?, ¿por qué?
- ¿Le falta o le sobra algo a cada uno de los dos modos de resolver problemas? Justifícalo.

c) Tarea III: proceso de resolución de problemas.

La tercera y última parte consistió en dos interacciones imaginarias entre un profesor y sus alumnos mientras resolvían conjuntamente un problema aritmético estándar (opción I) o reescrito (opción II).

La primera interacción era coherente con el modelo I de resolución de la tarea anterior, y estaba centrada en los elementos más superficiales del proceso de resolución (Verschaffel et al., 2000). Un fragmento de esta interacción es el siguiente:

> Profesor: ¿Hay algún dato más ahí?
> Alumno: Sí, que los lobos han llegado y se han comido 11 ovejas
> Profesor: Que los lobos se han comido 11 ovejas, bien. Seguimos
> Alumno: los lobos se han comido 11 ovejas y al pastor le han quedado 96
> Profesor: ¿Qué otro dato tenemos ahí?
> Alumno: Que al final le han quedado 96 ovejas

La segunda interacción incluía momentos específicos en los que se desarrollan las ayudas a la comprensión situacional y matemática incluida en las tareas I y II. En esta interacción, correspondiente al modelo genuino de resolución propuesto por Verschaffel et al. (2000), el profesor centra el foco de resolución en la contextualización del problema, en la comprensión de la situación, en cuanto a los personajes, las metas, las acciones o las intenciones, y sus implicaciones en el modelo matemático del problema (conjuntos subyacentes a esa situación y las relaciones matemáticas existentes entre ellos). A modo de ejemplo se incluye el siguiente fragmento:

> Profesor: O sea que tenemos dos datos que no sabemos. Pensad un poco cuál de los dos datos que no sabemos es el primero que tenemos que averiguar.
> Alumno: Yo creo que lo primero es saber cuántas ovejas había después de comprar y antes de que llegaran los lobos.
> Profesor: ¿Por qué?
> Alumno: Porque podemos saberlo si sabemos las que se comieron los lobos y las que quedaron al final.
> Profesor: Bien, vamos a intentarlo. A ver, el pastor tenía unas cuantas ovejas, no sabemos cuántas, los lobos se comieron 11 y al final quedaron 96. Y ahora pensamos: si el lobo se comió 11 ovejas, antes de que se las comiera, ¿habría más o menos de 96?

Las preguntas que los profesores debían responder en esta tercera parte del cuestionario fueron las siguientes:

- ¿Cuál de los dos modos de explicar cómo resolver un problema es mejor para aprender a resolver problemas?, ¿por qué?
- ¿Le falta o le sobra algo a cada uno de los dos modos de resolver problemas? Justifícalo.

A modo de conclusión, las tres tareas partían de un problema de cambio matemáticamente difícil, tal y como se ha expuesto, al que se le iban añadiendo ayudas a lo largo de las tareas: información que ayuda al razonamiento tanto matemático como situacional (problema), razonamiento previo a la elección de la operación (proceso) y puesta en práctica de estas ayudas entre un profesor y sus alumnos (interacción).

3.3.3) Procedimiento de análisis

a) Recogida de datos

Los datos se recogieron mediante el cuestionario descrito en el epígrafe anterior, de manera totalmente anónima y voluntaria.

En el caso de los maestros en ejercicio, el material se distribuyó por los diferentes centros educativos de la capital salmantina, y el resto por accesibilidad. La recogida de los cuestionarios se realizó a lo largo del primer semestre del año 2014.

Respecto a los maestros en formación, el material se les hizo llegar en el centro en el que cursaban sus estudios de Magisterio, y se recogieron en el segundo cuatrimestre del curso académico 2013/2014.

b) Análisis y categorización

Para analizar los argumentos aportados por los maestros, las respuestas se agruparon en expresiones que contenían una única idea, independientemente de si se formulaba una única vez o si se incluían aclaraciones, ejemplos o repeticiones sobre la misma idea. Un ejemplo se muestra en la Tabla 7:

ARGUMENTO	IDEA
"En el segundo hay información que a los alumnos no les interesa como porqué el pastor decidió aumentar el rebaño y es obvio que al aumentar el nº las juntase con las demás"	El problema 2 tiene información irrelevante
"La interacción 1 porque hay que ser concisos y no dar rodeos"	La interacción 1 es concisa

Tabla 7. Ejemplo de argumentos dados por los maestros y su idea asociada.

Una vez aisladas estas ideas, en cada uno de los cuestionarios se analizaron dos aspectos: la orientación -superficial (opción I) o razonamiento (opción II)- de cada profesor en cada tarea, y la explicitud de los argumentos aportados (nivel I, nivel II, nivel II).

- *Orientación*

Las ideas fueron categorizadas en dos niveles: superficial o razonamiento, generadas a partir del modelo de resolución de Verschaffel et al. (2000) y cuya diferencia radicaba en la promoción o no del razonamiento.

ORIENTACIÓN	DESCRIPCIÓN	EJEMPLO
Superficial	Ideas a favor de las opciones I de cada tarea. Es decir, de aquellas en las que no se incluían las ayudas	La interacción 1 es concisa
	Ideas en contra de las opciones II de cada tarea. Esto es, de aquella versión en la que se incluían las ayudas.	El problema 2 tiene información irrelevante

Razonamiento	Ideas a favor de las opciones II de cada tarea. Es decir, de aquellas en las que se incluían las ayudas Ideas en contra de las opciones I de cada tarea. Esto es, de aquella versión en la que no se incluían las ayudas.	La interacción 2 a través de la comprensión permite al alumno llegar a una respuesta razonada La resolución 2 incluye un razonamientos sobre el contexto que permite la comprensión total del problema mientras que el 1º lo obvia

Tabla 8. Sistema de categorías de la orientación del conocimiento

➢ *Explicitud*

Las ideas fueron categorizadas en tres niveles diferentes de explicitud, siguiendo la propuesta de Van Hiele (1986), tal y como se expone en Jaime y Gutiérrez (1990), para el pensamiento geométrico En aquellos casos en los que un mismo profesor en una misma tarea dio argumentaciones de diferente nivel se consideró siempre el más elevado.

EXPLICITUD	DESCRIPCIÓN	EJEMPLO
1	Argumentos referidos a la organización, estructura y cantidad de la información	La interacción 1 es concisa El segundo problema es más claro
2	Justificaciones relativas a la naturaleza y relevancia de la información	El problema 2 tiene información irrelevante El problema 1 presenta claramente los datos que es lo importante
3	Argumentos referentes a la finalidad de la información	La interacción 2 a través de la comprensión permite al alumno llegar a una respuesta razonada. La resolución 2 incluye un razonamiento sobre el contexto que permite la comprensión total del problema mientras que el 1º lo obvia

Tabla 9. Sistema de categorías de la explicitud del conocimiento

A continuación se incluye a modo de ejemplo completo, el análisis y categorización de varias de las argumentaciones dadas por maestros que participaron en el estudio.

ARGUMENTO	IDEA	ORIENTACIÓN	NIVEL DE EXPLICITUD
"En el segundo hay información que a los alumnos no les interesa como porqué el pastor decidió aumentar el rebaño y es obvio que al aumentar el nº las juntase con las demás"	El problema 2 tiene información irrelevante: porqué el pastor decidió aumentar el rebaño y las juntó con las demás	Superficial	2
"La interacción 1 porque hay que ser concisos y no dar rodeos"	La interacción 1 es concisa	Superficial	1

"La interacción 2 parte de la comprensión de la situación y a través del razonamiento llegan los alumnos a una solución".	La interacción 2 parte de la comprensión de la situación y llega a una solución a través del razonamiento	Razonamiento	3

Tabla 10. Ejemplo completo de análisis y categorización de varias argumentaciones dadas por maestros del estudio.

Para comprobar la validez del sistema de análisis dos jueces independientes y debidamente formados analizaron una muestra representativa de los argumentos aportados por los maestros para cada una de las tres partes del cuestionario, alcanzando un alto grado de acuerdo (entre .81 y .99). (Véase Tabla 11).

TAREA	ELECCIÓN	NIVEL DE EXPLICITUD
I: problema	.99	.85
II: Proceso de resolución	.99	.81
III: interacción profesor-alumnos	.99	.81

Tabla 11. Valores de Kappa de Cohen en cada una de las partes del cuestionario y en cada categoría.

Una vez que se categorizaron todos los argumentos que componían cada uno de los cuestionarios, se calculó el número de maestros en cada categoría y se transformó en porcentajes.

c) Medidas

En primer lugar, para analizar la orientación del conocimiento, se compararon los porcentajes de cada grupo de maestros (en ejercicio y en formación) que eligieron cada una de las dos alternativas (I, II) para cada tarea (problema, resolución, interacción).

En segundo lugar, para analizar el nivel de explicitud del conocimiento, se compararon los porcentajes de cada grupo de profesores (en ejercicio y en formación) que explicitaron en cada nivel (1, 2, 3) en cada tarea (problema, resolución, interacción).

3.4.- RESULTADOS

En la Tabla 12 se muestran los porcentajes de elección de cada uno de los grupos en cada una de las tareas del cuestionario.

TAREA	Maestros en Servicio		Maestros en Formación	
	I	II	I	II
Problema	90,9	9,1	72.2	27.8
Resolución	76.4	23.6	55.6	44.4
Interacción	41.8	58.2	20.4	79.6
Media	69.7	30.3	49.4	50.6

Tabla 12. Porcentaje de elección de cada opción en cada tarea por los maestros en servicio (en adelante, MS) y los maestros en formación (en adelante, MF).

Como se observa en la tabla, los resultados generales indican que mientras que los maestros en servicio eligieron mayoritariamente las opciones superficiales, χ^2 (1, n=100)=16, p<.01; en los maestros en formación la elección entre las opciones superficiales y las que promovían el razonamiento fue equilibrada. Este resultado confirma nuestra primera hipótesis, esto es, los maestros en ejercicio y los maestros en formación exhibieron conocimientos diferentes sobre el proceso de resolución de problemas.

Un análisis específico de cada tarea del cuestionario nos permite profundizar en estos resultados. En la primera tarea la mayoría de los maestros, tanto MS como MF se decantaron por el problema I (90.9% y 72.2%, respectivamente), sin mostrar diferencias significativas en las elecciones de ambos tipos de maestros, χ^2 (1, n=163)=2,21, p<.14.

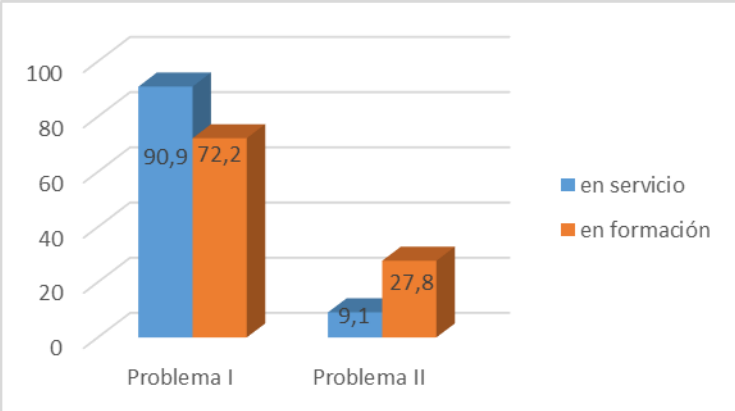


Figura 17. Porcentaje de elección de cada grupo en la tarea de problemas.

En la segunda tarea, la elección del modelo de resolución, de nuevo la mayoría de MS seleccionaron el modelo I (76,4%), mientras que en los MF se observó una elección más equilibrada entre las dos opciones, (el 55,6% seleccionaron el modelo I). De nuevo, estas diferencias no fueron significativas, χ^2 (1, n=132)=3,03, p<.09.

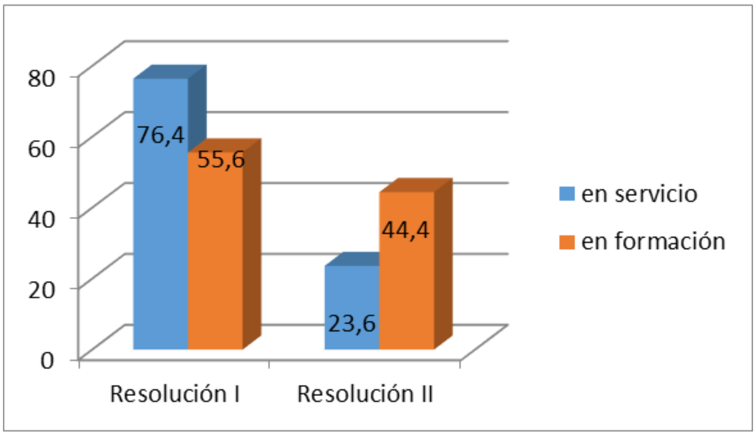


Figura 18. Porcentaje de elección de cada grupo en la tarea de resolución de problemas.

Por último, respecto a la tercera tarea (la interacción), el 41,8% de los MS eligió la interacción I -superficial-, frente al 20.4% de los MF que eligió esa opción, diferencia que, en este caso, sí alcanzó el nivel de significatividad, χ^2 (1, n=62)=7, 81, p<.01.

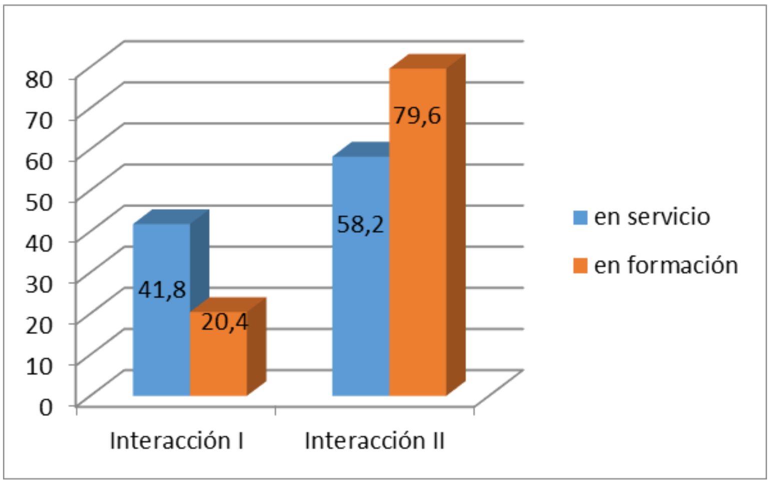


Figura 19. Porcentaje de elección de cada grupo en la tarea interacción profesor-alumnos.

En relación a nuestra segunda hipótesis, si consideramos la coherencia de las elecciones de cada grupo de maestros entre las diferentes tareas vemos que los MS fueron más coherentes que los MF, ya que optaron por la versión superficial tanto en el problema como en la resolución, si bien en la interacción mostraron cierta preferencia por la opción que promovía el razonamiento. En cambio, los MF no mostraron una preferencia por las opciones superficiales o de razonamiento a lo largo de las diferentes tareas: mientras que en el problema eligieron mayoritariamente la opción superficial, χ^2=10,667; p<.01, en la interacción eligieron la opción que reflejaba mayor razonamiento, (χ^2=18,963; p=.00); y la elección en el modelo fue muy similar entre las dos opciones. Estos resultados confirman nuestra segunda hipótesis.

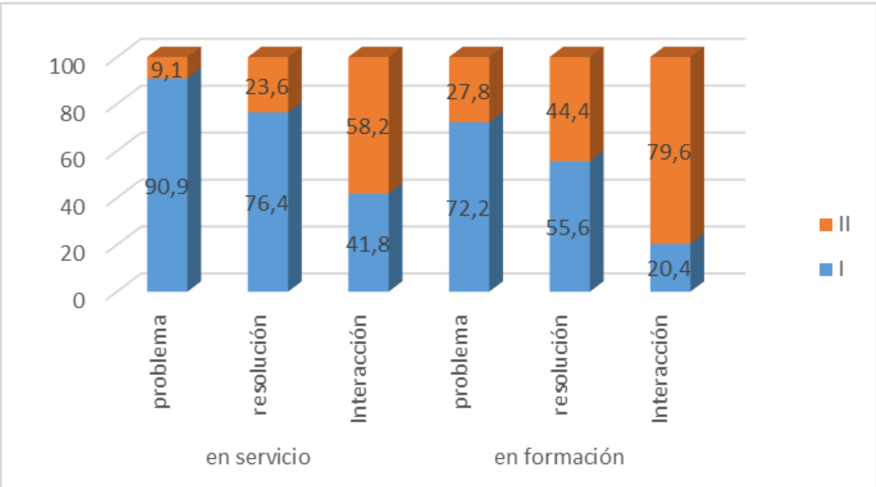


Figura 20. Porcentaje de elección de cada grupo en las tres tareas.

Finalmente, respecto a nuestra tercera hipótesis, relativa al nivel de explicitud de las argumentaciones de cada grupo de maestros, los resultados globales indican que los MS fueron más explícitos en sus argumentaciones que MF: análisis por tablas personalizadas con comparaciones por pares con ajuste bonferroni mostraron que los MF aportaban más argumentos del nivel 1 que los MS, y que los MS aportaban más argumentos del nivel 2, si bien esta diferencia distó del nivel de significatividad (p>.28). La Tabla 13 ilustra estos resultados.

Este resultado general fue matizado al analizar los resultados por tarea: los MS expresaron significativamente más argumentos del nivel 2 que los MF en la elección del modelo de resolución y en la interacción, pero no en la elección del problema, tarea en la cual los MS mostraron una proporción significativamente mayor de argumentos del nivel 1 que los MF, mientras que éstos ofrecieron una proporción mayor de argumentos de nivel 2 que los MS. Finalmente, cabe destacar que para los MF los argumentos del nivel 3, de mayor explicitud, fueron significativamente menos numerosos en las tres tareas respecto a los otros dos niveles, mientras que para los MS en la elección del problema y el modelo de resolución también expresaron significativamente menos argumentos del nivel 3, pero no en la interacción, que fue la tarea que suscitó argumentos más explícitos en los MS.

NIVEL	Maestros en Servicio				Maestros en Formación			
	Problema	**Resolución**	**Interacción**	**Media**	**Problema**	**Resolución**	**Interacción**	**Media**
1	34,50% (2,3)	38,20% (3)	23,60% (2)	32,10% (2,3)	18,50% (2,3)	63% (2,3)	57,40 % (2,3)	46,3% (3)
2	61,80% (1,3)	54,50% (3)	60% (1,3)	58,77% (1,3)	77,80% (1,3)	31,50% (1,3)	33,30% (1,3)	47,53% (3)
3	3,70% (1,2)	7,30% (1,2)	16,40% (2)	9.13% (1,2)	3,70% (1,2)	5,50% (1,2)	9,30% (1,2)	6,17% (1,2)

Tabla 13. Nivel de explicitud de las argumentaciones. Entre paréntesis figuran los niveles de explicitud respecto a los cuales se encontraron diferencias significativas ($p < .05$) tras la aplicación del estadístico Chi Cuadrado, dentro de cada tarea para cada grupo de maestros.

3.5.- DISCUSIÓN

En este estudio hemos analizado el conocimiento especializado matemático (Ball et al., 2008) de los maestros acerca del proceso de resolución de problemas aritméticos verbales, y más concretamente, el papel que atribuyen a la información matemática y situacional, en función de su experiencia con tareas de este tipo. Para ello, hemos explorado tanto los conocimientos que explicitan un grupo de maestros de Primaria en servicio (MS) y otro de alumnos de magisterio (MF), como el grado de explicitud de las valoraciones que hacen acerca de la información situacional y matemática añadida a los problemas, y del papel del razonamiento en el modelo de resolución propuesto y en una interacción profesor-alumnos. Todo ello con el objetivo final de contribuir a la comprensión del modo en que se comportan los profesores cuando resuelven problemas aritméticos con sus alumnos, ya que cuando los maestros interactúan con sus alumnos en el aula mientras resuelven problemas aritméticos prestan una mayor atención a los aspectos rutinarios de la tarea que a los comportamientos más reflexivos basados en el razonamiento matemático y situacional que evoca el problema (Depaepe et al., 2010; Rosales et al., 2012). Esta forma de actuar se ha señalado como una causa probable del bajo rendimiento de los alumnos en este tipo de tareas (Orrantia et al., 2011; Vicente et al., 2007, 2008a, 2008b).

Los resultados del estudio han mostrado, en primer lugar, y de acuerdo con la literatura, una clara diferencia entre los conocimientos que exhibieron los MS y los MF, traducido en nuestro estudio en las orientaciones de cada grupo por una u otra opción en cada tarea. Esto indica una relación entre el grado de experiencia en la enseñanza de resolución de problemas y el conocimiento sobre el proceso de resolución desarrollado (Berliner, 1988; Chi et al., 1981; Hogan et al., 2003). Sin embargo, estas diferencias no se han producido en el sentido que cabría esperar: los MS mostraron una tendencia mayoritaria por los problemas y modelos de resolución que obviaban el razonamiento, mientras que los MF consideraron más adecuados los modelos de resolución y, especialmente, las interacciones, en las que se promovía el razonamiento. De esta manera, los MS son más coherentes a la hora de realizar sus elecciones a lo largo de las tres tareas que componían el cuestionario, pero esa coherencia la marca una tendencia mayor que la de los MF a excluir la información y los procesos que favorecen el razonamiento en el proceso de resolución. Este hallazgo difiere de los encontrados por Berliner (1988) y Leinhardt y Greeno (1986), ya que los MS analizados en nuestro estudio no dieron muestras de comprender la importancia de la estructura situacional y matemática a la hora de elegir los problemas y los modelos de resolución. Este resultado puede explicarse si consideramos que los maestros hacen un uso generalizado de los libros de texto en las aulas (Hiebert et al., 2003; Mullins et al., 2008; Vicente et al., 2013), libros que difícilmente pueden ser considerados como medio óptimo para enseñar a los alumnos a usar el razonamiento en el proceso de resolución ya que los problemas que se incluyen son, en su gran mayoría, demasiado simples y alejados de la vida cotidiana de los alumnos en los que tal razonamiento es innecesario (Chamoso et al., 2013; Vicente, Manchado y Verschaffel, en evaluación). Así, encajarían con los modelos superficiales y asistemáticos de resolución que esos mismos libros presentan como orientación para resolver problemas, tal y como exponen Sánchez y Vicente (en prensa). Esto es, por un lado, la mayor parte de los modelos se limitan a extraer los datos, seleccionar las operaciones o estrategias de resolución, y a expresar la solución. Por otro, la existencia de modelos diferentes entre las distintas editoriales analizadas en el estudio.

De esta manera, la exposición a estos libros de texto, tal y como Carpenter et al. (1988) señaló, podría ser la responsable de los conocimientos especializados de la disciplina de los MS descritos en este estudio, ya que parece lógico pensar que se decantaron por problemas y modelos de resolución similares a las que proponen los libros de texto. Por otra parte, estos conocimientos son los que podrían estar sustentando su modo de comportarse en las aulas (p.e: An et al., 2004 o Hill et al., 2008).

En segundo lugar, en lo que se refiere a la explicitud de las argumentaciones que dieron los maestros a sus elecciones, si tomamos los resultados de forma global, encontramos que los MS dieron argumentaciones con un nivel de explicitud mayor que los MF y fueron más capaces de explicitar sus conocimientos para valorar la relevancia que tiene la información que se incluyó en cada tarea. Sin embargo, este resultado no fue igual para las tres tareas del cuestionario, ya que si bien en la primera (problema) ambos grupos de maestros fueron capaces de razonar sobre la relevancia de la información que aparece en los dos problemas (nivel 2 de explicitud), en las dos siguientes los MS siguen aportando argumentos del segundo nivel, mientras que los MF tan sólo fueron capaces de percibir aspectos relacionados con la organización, estructura o cantidad de información, pertenecientes al nivel 1. Esto puede deberse a dos razones. En primer lugar, es posible que los MF posean ciertos conocimientos implícitos acerca de la utilidad de las ayudas (de hecho, eligen las opciones que promueven el razonamiento la elección del modelo y la interacción, en mayor proporción que los maestros), conocimientos que no fueron capaces explicitar en una argumentación. En segundo lugar, la primera tarea del cuestionario, la elección del problema, es la más conocida por los MF, de modo que probablemente les resultaba más sencillo razonar sobre ella, mientras que las otras dos tareas eran nuevas para ellos. En cualquier caso, el hecho de que los maestros en ejercicio aporten argumentos más explícitos está en la línea de estudios previos (p.e.: Hogan et al., 2003). Así, por ejemplo, Berliner (1988) mostró cómo las interpretaciones que profesores expertos y principiantes daban a diferentes situaciones de interacción profesor-alumnos diferían en la profundidad de sus argumentos; y Chi et al. (1981, 1982) mostraron cómo los profesores en servicio clasificaron problemas de física aludiendo a los principios subyacentes en lugar de a las características superficiales a las que apuntaron los profesores en formación.

En nuestro caso, los maestros en servicio fueron capaces de elaborar argumentos como los siguientes:

> “El problema 1 presenta claramente los datos que es lo importante para los alumnos”

> “En el segundo hay información que a los alumnos no les interesa como porqué el pastor decidió aumentar el rebaño y es obvio que al aumentar el nº las juntase con las demás”

Sin embargo, los MS expresaron muy pocas argumentaciones que alcanzaran un nivel de explicitud III, que explicitaran la utilidad de la información que aparece en el problema, el proceso de resolución o la interacción profesor-alumnos, del tipo

> “La resolución 2 trabaja el razonamiento y la comprensión, no solo el cálculo”,

> “Al problema primero le falta información del contexto para facilitar la comprensión al alumno”.

En este sentido, cabe destacar que la tarea que más argumentos del nivel 3 de explicitud suscitó en los MS fue la interacción, probablemente porque, del mismo modo que la tarea de elección de problemas fue la que suscitó argumentos más explícitos en los MF porque era la más conocida para ellos, cabe la posibilidad de que los MS reconocieran algunas de las ayudas que proporcionan a los alumnos en sus clases y, al reflexionar sobre ellas, explicitaran la utilidad de esas ayudas. En cambio, las dos primeras tareas seguramente sean menos familiares para los MS, ya que no son ellos mismos los que elaboran los problemas, ni los modelos de resolución, ya que vienen dados por los libros de texto.

CAPÍTULO IV:

Estudio empírico II:

Relación entre conocimiento, tarea y práctica educativa en resolución de problemas verbales en aulas de educación primaria

4.1.- OBJETIVO

El segundo estudio empírico tiene por objetivo analizar el modo en el que tanto el conocimiento (VI) sobre resolución de problemas verbales de los maestros como la tarea (VI) influyen en las interacciones (VD) que se llevan a cabo en clase de matemáticas cuando se resuelven problemas aritméticos verbales.

4.2.- HIPÓTESIS

Considerando los resultados de estudios previos, en este estudio esperamos que exista relación entre el conocimiento de los maestros y su práctica, pero no entre la tarea y la práctica. Esto implica que:

- Los maestros de un mismo perfil de conocimiento dedicarán un porcentaje similar de ciclos al razonamiento independientemente del carácter estándar o reescrito del problema resuelto.
- Los profesores genuinos dedicarán un porcentaje de ciclos de razonamiento mayor que los superficiales, independientemente del tipo de tarea.
- Los profesores genuinos dedicarán un porcentaje mayor de ciclos que los superficiales a la selección de información situacional relevante en el problema reescrito.

4.3.- MÉTODO

4.3.1) Participantes

Se partió de una muestra inicial de 55 maestros de educación primaria que ejercían su labor en Castilla y León, Madrid, Asturias y Aragón. Todos ellos completaron el material que más adelante se describe, y fueron agrupados en cuatro perfiles según su tipo de conocimiento: genuino, parcialmente genuino, parcialmente superficial y superficial.

De esa muestra inicial, se seleccionaron 8 de ellos, correspondiéndose 2 a cada uno de los perfiles de conocimiento. Además de considerar su perfil de conocimiento y con el fin de obtener una muestra lo más homogénea posible se usó como criterio la experiencia docente, curso académico, uso del libro de texto y familiaridad con la tarea a resolver. En este sentido, contaban con una experiencia media de 30.6 años (oscilaban entre los 26 y 35) e impartían docencia en 6º curso de educación primaria de centros públicos y concertados del medio urbano con un nivel socioeconómico medio. Del mismo modo, todos ellos manifestaron utilizar el libro de texto como material curricular habitual; sin embargo, era la primera vez que se enfrentaban a problemas de las características que se describen más adelante.

Todos ellos accedieron voluntariamente a ser grabados mientras resolvían cuatro problemas verbales con sus alumnos, y afirmaron no haber recibido formación específica en resolución de problemas.

4.3.2) Materiales

El número total de profesores iniciales completó un cuestionario, que permitió situarles en uno de los cuatro perfiles de conocimiento (genuino, parcialmente genuino, parcialmente superficial y superficial). Los ocho seleccionados según los criterios ya expuestos, resolvieron cuatro problemas en clase de matemáticas, de manera conjunta con sus alumnos.

a) Cuestionario

Se tomó el cuestionario descrito en el capítulo III del presente trabajo, de modo que se hará una breve descripción del mismo.

Recordamos que estaba organizado en torno a tres tareas diferentes: problemas, modelos de resolución e interacción profesor-alumnos. En cada una de estas tareas se presentaban al maestro dos alternativas: una superficial y una genuina, de modo tenía que elegir la opción que él consideraba más adecuada en cada tarea para enseñar a los alumnos a resolver problemas verbales. Asimismo, debían argumentar cada una de sus elecciones.

La opción superficial o estándar estaba basada en las propuestas de los libros de texto (de hecho, para el proceso de resolución de problemas se realizó una adaptación del material curricular de una de las editoriales más utilizadas en España). En esta opción no se incluyó información alguna que favorezca el razonamiento. En cambio, la versión genuina o reescrita incluía información matemática y situacional que permite la comprensión del problema, información cuya utilidad para que los alumnos los resuelvan más fácilmente ha sido demostrada con anterioridad (Orrantia et al., 2011; 2014; Vicente et al., 2007, 2008a, 2008b). Más concretamente, las opciones superficiales presentaban:

- un problema fácil desde el punto de vista matemático y situacional, cuya resolución apenas requería razonamiento;
- un modelo de resolución compuesto por los pasos selección de datos, elección de operaciones, ejecución de operaciones y expresión del resultado;
- un ejemplo de interacción coherente con el modelo de resolución superficial

En cambio, las opciones genuinas presentaban:

- un problema matemáticamente difícil, con información adicional en el enunciado, que ayudaba a comprender el problema matemática y situacionalmente;
- un modelo de resolución que incluía varios pasos relacionados con la comprensión: dos pasos de razonamiento previos a la elección de operaciones (razonamiento situacional y razonamiento matemático), y un paso previo a la expresión del resultado (la comprobación matemática y situacional del mismo).

- un ejemplo de interacción coherente con el modelo de resolución genuino

En cada una de las tres partes, se formularon varias preguntas abiertas que el maestro debía responder argumentando sus decisiones.

b) Problemas

Los ocho maestros seleccionados –dos de cada tipo de conocimiento- resolvieron cuatro tareas (Anexo 2). Para ello, se tomaron dos tipos de problemas: estándar y reescrito. Los problemas estándar procedían de los libros de texto, y reunían dos características: a) eran matemática y situacionalmente fáciles; y b) no contenían ninguna ayuda al razonamiento. Los dos problemas estándar utilizados fueron los siguientes:

> "Un ciclista debe recorrer 148,6 km. Después de recorrer 758 hm, ¿cuántos metros le falta por recorrer?"

> "Un hospital tiene 200 habitaciones, el 60% de las habitaciones tienen 2 camas y el resto una. ¿De cuántas camas dispone el hospital?"

Por otra parte, se elaboraron dos problemas reescritos que fueran matemáticamente difíciles y, contuvieran ayudas textuales al razonamiento, tanto matemático como situacional. Concretamente, el primero de ellos era un problema de cambio y el segundo de comparación (Heller y Greeno, 1978); en ambos casos matemáticamente difíciles puesto que plantean dos y una situaciones inconsistentes, respectivamente (Lewis y Mayer, 1987) que requieren de razonamiento para alcanzar su resolución ya que estrategias como la palabra clave (Hegarty et al., 1995; Nesher y Teubal, 1975) no sirven. Los problemas fueron los siguientes:

> "Un pastor tenía un rebaño con 57 ovejas. El pastor quería aumentar el tamaño del rebaño porque este año había buenos pastos. Para ello se fue a una feria de ganado, decidió comprar algunas ovejas y las juntó con las que ya tenía. Una tarde el pastor vio una manada de lobos por la zona, los lobos estaban hambrientos y entonces, del total de ovejas del rebaño se comieron 11 y ahora el rebaño tiene 96. ¿Cuántas ovejas compró el pastor en la feria?"

> "Un bodeguero quiere cambiar sus cubas de vino porque este año ha comprado más uvas. En las cubas de madera que ya tiene entran 158 litros, pero en estas cubas entran 26 litros menos que en las nuevas cubas metálicas que quiere comprar. ¿Cuántos litros de vino entrarán en las nuevas cubas metálicas?"

4.3.4) Procedimiento de análisis

a) Recogida de datos

Los datos referidos al cuestionario fueron recogidos en la forma fecha y forma descrita en el capítulo III de la presente Tesis Doctoral.

Respecto a los problemas, cada uno de ellos se resolvió en días diferentes, en el espacio habitual dedicado a tareas de este tipo. Los profesores se grabaron en audio resolviendo problemas verbales en clase conjuntamente con sus alumnos. Las grabaciones oscilaron entre los 13.58 y 4.41 minutos.

b) Análisis y categorización

➢ Cuestionario:

El cuestionario fue analizado según el procedimiento descrito en el capítulo III. Este procedimiento consistió en asignar un perfil de conocimiento a cada maestro en función de las elecciones realizadas en cada una de las tres tareas del cuestionario (problemas, resolución e interacción). Los niveles establecidos fueron:

- Genuino: aquellos que en las tres tareas se decantaron por las opciones genuinas.
- Parcialmente genuino: los que eligieron la opción genuina en dos de las tres tareas.
- Parcialmente superficial: los que eligieron la opción estándar en dos de las tres tareas.
- Superficial: aquellos que en las tres tareas se decantaron por las opciones estándar.

➢ Problemas:

La interacción fue transcrita y dividida en ciclos de interacción (Wells, 1999). Un ciclo es considerado como el segmento básico del análisis de la interacción. Habitualmente comienza con una pregunta u orden inicial y termina cuando esta pregunta u orden es completada, esto es, cuando se alcanza un acuerdo entre profesores y alumnos. En cada ciclo se elabora al menos un contenido público, es decir, se genera una idea relacionada con el problema o con el propio proceso de resolución, si bien, tal y como afirman Sánchez, García, De Sixte, Castellano y Rosales (2008) un mismo ciclo puede incluir uno o más contenidos públicos. El contenido que se hizo público en cada ciclo se incluyó en la categoría de selección o razonamiento, de acuerdo con el modelo de resolución (Verschaffel et al., 2000) propuesto en el marco teórico del presente trabajo. A su vez, dentro de cada una de esas categorías se establecieron dos subcategorías: matemático o situacional. La Tabla 14 muestra las subcategorías consideradas y un ejemplo de cada una de ellas.

Categoría	Subcategoría		Definición	Ejemplo
Selección	Matemática		Selección de datos numéricos, la pregunta, la palabra clave, elección y ejecución del algoritmo o el resultado	P: vamos a ver. Carlos, ¿cuántas ovejas tenía el pastor? A: 57 P: Ok. Tenía 57 ovejas
	Situacional	Relevante	Selección de intenciones, metas u objetivos de los personajes, relacionados con la estructura matemática del problema.	P: quería incrementar el tamaño del rebaño
		Irrelevante	Selección de información que no tiene una relación causal para la consecución de los objetivos de los personajes (p.e: descripciones de los personajes).	P: el pastor era joven

Razonamiento	Matemático	Razonamiento sobre la estructura matemática del problema, es decir, sobre las relaciones matemáticas entre las cantidades correspondientes a la situación dada.	P: pero tenía más ovejas, verdad?? A: sí P: correcto
	Situacional	Razonamiento sobre la estructura situacional del problema, es decir, sobre las intenciones de los personales y su relación con las acciones que desarrolla para ello.	P: quería aumentar el tamaño del rebaño, así que se fue al mercado

Tabla 14. Sistema de categorías utilizado para el análisis de la interacción.

En la Tabla 15 se muestra un fragmento de una de las interacciones del estudio para ilustrar el procedimiento de análisis seguido.

Ciclo	Transcripción	Contenido público	Categoría / Subcategoría
Ciclo 4	P: Ya tenemos una pequeña idea, podrías decirme, Alma, de qué va el problema, qué es lo que has leído, así por encima A: Que un pastor tenía 57 ovejas, compró ovejas, y vinieron los lobos y se comieron 11 y ahora tenemos 96.	El problema habla de un pastor que tenía 57 ovejas, compró ovejas, los lobos se comieron 11 y ahora hay 96	Selección: matemática
Ciclo 5	P: entonces ¿qué es lo que quería el pastor? A: aumentar el tamaño del rebaño	El pastor quería aumentar el tamaño del rebaño	Selección: situacional: relevante
Ciclo 6	P: Y ¿cuál es la pregunta que le hace entonces, Irene?, ¿cuál es la pregunta? A: Cuántas ovejas tenía… P: Cuántas ovejas… A: Compró P: Compró.	La pregunta es cuántas ovejas compró	Selección: matemática
Ciclo 7	P: Es decir, un pastor tenía un nº determinado de ovejas, compra más, así que ahora su rebaño es mayor que al principio. Después vienen unos lobos matan a ciertas ovejas y le quedan tantas ahora que es un nº diferente al que tenía al principio pero más pequeño. Ahora la pregunta es que cuántas compró.	El pastor tenía x ovejas, compra más y su rebaño es mayor que al inicio. Los lobos matan algunas y le quedan x, que es un nº diferente a las del principio pero más pequeño. Pregunta cuántas compró	Razonamiento: matemático

Tabla 15. Ejemplo de análisis de las interacciones profesor-alumnos

Los ciclos referidos a lectura se consideraron como parte del ciclo siguiente. A modo de ejemplo se incluyen los siguientes fragmentos.

Ciclo	Transcripción	Contenido público	Categoría / Subcategoría
Ciclo 1	P: Ahora chicos vamos a hacer el problema que os he repartido, ¿de acuerdo? Lo voy a leer así que atentos. *Un bodeguero quiere renovar las cubas de vino porque este año ha comprado más uvas. En las cubas de madera que tiene caben 158 litros de vino, pero en estas cubas de madera caben 26 litros menos que en unas cubas nuevas metálicas. ¿Cuántos litros de vino caben en las nuevas cubas metálicas?*		Lectura
	P: Lo hemos entendido, ¿verdad?, pues empezamos. Pablo, ¿cuál es el primer dato que tenemos? A: que en las cubas… que en las de madera caben 158 litros. P: eso es.	El primer dato que tenemos es que en las cubas de madera entran 158 l	Selección: matemática
Ciclo 1	P: A ver quien lee… Tiziano, te tocó. Alto y claro. A: *Un ciclista debe recorrer 148,6 km. Después de recorrer 758 hm. ¿Cuántos metros le falta por recorrer?*		Lectura
	P: Vamos a volver a leerlo para que nos quede claro, Lucía, empieza. A: *Un ciclista debe recorrer 148,6 km. Después de recorrer 758 hm. ¿Cuántos metros le falta por recorrer?*		Lectura
	P: primer dato A: debe recorrer 148.6 kilómetros	El primer dato es que debe recorrer 148.6 km	Selección: matemática

Tabla 16. Ejemplo de análisis de ciclos de lectura

Los contenidos públicos referidos a control de la clase y a la reflexión acerca de los procesos más generales de la tarea no fueron categorizados. Estos ciclos supusieron el 18.5% de los ciclos de interacción. Los ciclos dedicados al control de la clase eran aquellos destinados a mantener la atención y el orden en el aula. Por ejemplo:

> [Profesor: Shhhhh, levantad la mano para hablar que si no esto es un jaleo]
> [Profesor: se sienta cada uno en su sitio, por favor]

Y por reflexión aquellas intervenciones dedicadas a la regulación metacognitiva (planificación, supervisión y evaluación) del proceso de resolución y aplicable a otros contextos. Los siguientes fragmentos son un ejemplo:

> [Profesor: ¿Qué nos falta?, lo último que hay que hacer siempre en un problema, hemos dicho que es…
> Alumno: marcar el resultado
> Profesor: vale, pues vamos a corregir los deberes de ayer]
>
> [Profesor: ¿A quién le ha dado esta solución? A ver…
> Alumno: A mí…
> Alumno: a mí…
> Profesor: muy bien]

Para comprobar la fiabilidad del sistema de análisis, dos jueces independientes y debidamente familiarizados con el sistema de análisis categorizaron los ciclos de una sesión al azar, alcanzando un buen grado de acuerdo (κ entre .78 y .86).

Una vez que se categorizaron todos los ciclos que componían cada una de las sesiones, se calculó el número de ciclos de cada categoría y se transformó en porcentajes.

c) Medidas

Para describir de qué modo influyen los conocimientos y la tarea sobre la práctica educativa, se analizó:

- la diferencia entre la media de porcentaje de ciclos de interacción que los maestros de un perfil determinado de conocimiento dedicaban al razonamiento al resolver, por un lado, problemas estándar, y por otro, problemas reescritos. Esta medida se tomó de manera independiente para los maestros con un conocimiento genuino y para los maestros con un conocimiento superficial.
- la diferencia entre la media de porcentajes de ciclos que los profesores con diferentes perfiles de conocimiento dedicaban a razonar en el mismo tipo de problema. Esta medida se tomó de manera independiente para el problema estándar y el reescrito.
- la diferencia entre la media de porcentajes de ciclos que los profesores con diferentes tipos de conocimiento dedicaban a seleccionar información situacional relevante en el problema reescrito.

4.4.- RESULTADOS

La proporción media de ciclos dedicados por los maestros de cada perfil de conocimiento a cada categoría en cada tarea se muestra en la Figura 21.

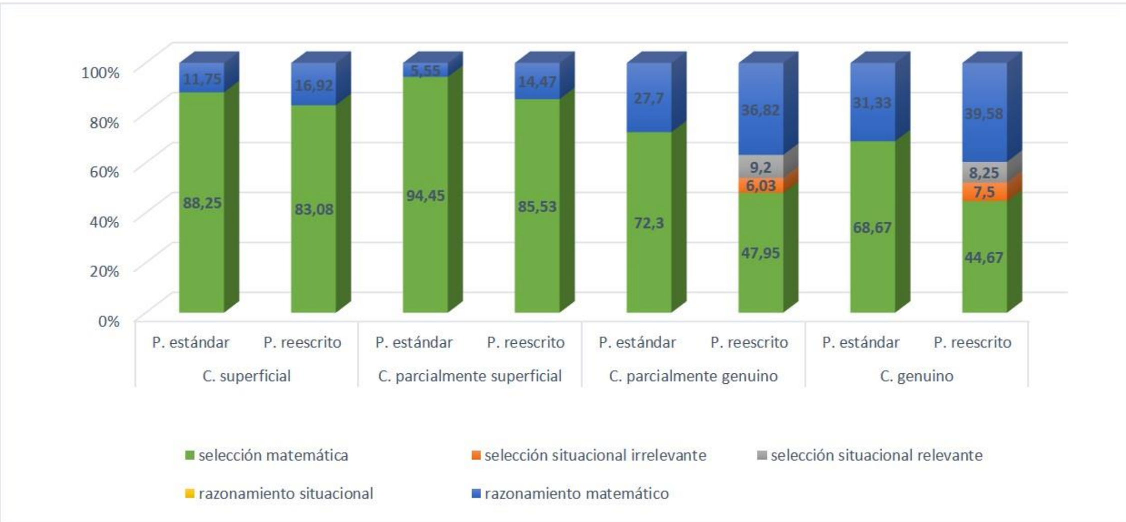


Figura 21. Porcentaje medio de ciclos dedicados por los maestros de cada perfil de conocimiento a cada categoría en cada tarea.

Como se puede observar en la Figura 21, el comportamiento de los maestros con un perfil superficial y parcialmente superficial es similar en ambas tareas. De manera que no existen diferencias significativas en el modo en que ambos tipos de profesores distribuyeron su atención entre los ciclos de diferentes categorías [para la tarea estándar, χ^2 (1, n=18)=2, p=.16; y χ^2 (1, n=31)=.29, p=.59, para la tarea reescrita]. Esto mismo ocurre con los de perfil genuino y parcialmente genuino tanto para la tarea estándar (χ^2 (1, n=59)=.15, p=.70), como para la tarea reescrita (χ^2 (1, n=77)=.12, p=.73).

Sin embargo, estos resultados muestran diferencias entre la distribución de los ciclos de los maestros parcialmente genuinos con los parcialmente superficiales tanto en la tarea estándar, χ^2 (1, n=34)=14.24, p=.00; como en la reescrita, χ^2 (1, n=51)=10.37, p<.01. De la misma manera, se encontraron diferencias significativas entre los profesores parcialmente genuinos con los superficiales en ambas tareas: en la estándar, χ^2 (1, n=40)=6.4, p<.05; en la reescrita (χ^2 (1, n=54)=7.41, p<.01). Asimismo, se encontraron diferencias entre los profesores de perfil genuino con respecto a los parcialmente superficiales: para la tarea reescrita, χ^2 (1, n=54)=12.52, p=.00; y χ^2 (1, n=37)=16.89, p=.00 para la estándar. Finalmente, también hubo diferencias entre los profesores genuinos y los superficiales [reescrita χ^2 (1, n=57)=9.28, p<.01; y estándar (χ^2 (1, n=43)=8.40, p<.01].

Por estas razones, en lo que sigue se agruparán en dos únicos perfiles: conocimiento superficial y genuino. El primero de ellos estará integrado por los maestros del perfil superficial y parcialmente superficial; mientras que el segundo por los de perfil genuino y parcialmente genuino (ver Figura 22).

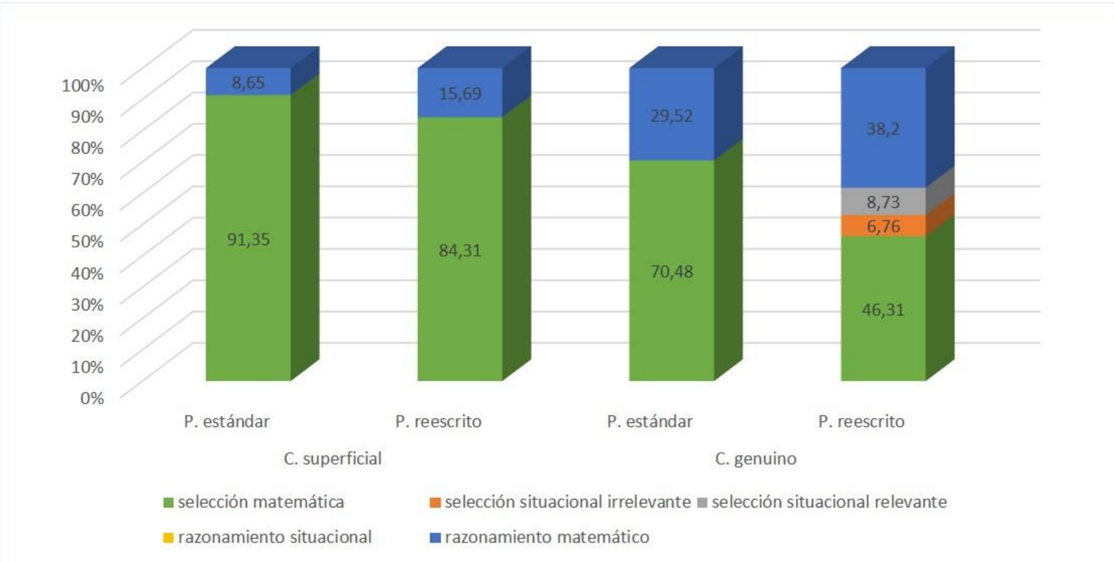


Figura 22. Porcentaje medio de ciclos dedicados por los maestros de ambos perfiles de conocimiento a cada categoría en cada tarea.

En relación con la primera medida del estudio (diferencias entre la media de porcentaje de ciclos de interacción que maestros de un mismo perfil dedicaron al razonamiento en los dos tipos de problemas), se observa que los maestros destinaron una proporción similar de ciclos de razonamiento en cada una de las dos tareas. Del mismo modo, los maestros de ambos perfiles dedicaron más ciclos de razonamiento en la resolución del problema reescrito que en el estándar: en el caso de los profesores superficiales, 15.69% en el reescrito frente al 8.65% en el estándar; y en el caso de los genuinos, 38.2% frente al 29.52%. Estas diferencias no fueron significativas para ninguno de los dos perfiles de conocimiento. Este resultado coincide con nuestra primera hipótesis.

Respecto a la segunda (diferencias entre la media de porcentaje de ciclos que los maestros con diferentes perfiles de conocimiento dedicaron a razonar en la resolución del problema estándar, frente al reescrito), en el caso del problema estándar la proporción de ciclos de razonamiento de los profesores genuinos fue significativamente superior al de los superficiales, χ^2 (1, n=39)=11.31, p<.01. Es decir, los genuinos dedicaron una parte de su instrucción significativamente mayor que la de los superficiales a hacer razonamientos como el siguiente:

> [Profesor: ¿Por dónde seguimos?
> Alumno: pues como ya sabemos las dobles, nos faltan las habitaciones individuales para saber cuántas hay de cada tipo.
> Profesor: Vale]
>
> [Profesor: ¿entonces estos datos que tenemos que significan?
> Alumno: pues…
> Alumno: a ver pues que sabemos los km, uy, los metros que tiene que recorrer en total y también los que ya ha hecho el pobre señor. Entonces solo nos falta saber…
> Profesor: espera, espera. No te adelantes.]

De manera similar, en el problema reescrito los maestros de perfil genuino dedicaron un porcentaje medio de ciclos de razonamiento significativamente superior al del perfil superficial χ^2 (1, n=54)=8.96, p<.01, aportando razonamientos como el siguiente para elegir la operación adecuada:

> [Profesor: Ha empezado Adrián, y él ha empezado de buena manera. Tiene 96, se le han comido 11, ¿verdad? Por lo tanto, antes de que se le comieran las…
> Alumno: Tendría más.
> Profesor: Tendría más]

En cambio, los maestros superficiales no basaron la elección de operaciones en ese razonamiento, sino que pedían a los alumnos que eligieran directamente la operación:

> [Profesor: vamos a hacerlo en la pizarra, María sal. Lo primero que tenemos que hacer es restar las 57 que tenemos menos las 11 que nos comen, ¿no? pues venga
> Alumno: 57 menos 11… ehhh… (pensando) 46.
> Profesor: vale]

Tomados en conjunto, los resultados relativos a la segunda medida del estudio corroboran nuestra segunda hipótesis.

Por último, respecto a la tercera medida (diferencias entre la media de porcentaje de ciclos que los maestros de cada perfil de conocimiento dedicaron a seleccionar información situacional relevante en el problema reescrito), observamos que los genuinos dedicaron un 6.76% (Figura 22) de su interacción a los aspectos causales, temporales o intencionales incluidos en el problema:

[Profesor: ¿Qué le ocurre al pastor, Vanesa?
Alumno: Quería aumentar el tamaño… del rebaño
Profesor: Quería tener un rebaño más grande…. Bien]

[Profesor: ¿Qué hace para ello? Eh, Manu
Alumno: Pues va a la feria y compra varias ovejas]

Por el contrario, los superficiales obviaron este tipo de información en la resolución con sus alumnos, centrándose en la selección de datos numéricos, de la pregunta o de la elección y ejecución del algoritmo. Este resultado coincide con nuestra tercera hipótesis.

4.5.- DISCUSIÓN

Diferentes estudios han mostrado la existencia de una relación entre el conocimiento de los profesores, y más concretamente, el *Mathematical Knowledge for Teaching* descrito por (Ball et al., 2008), y la práctica educativa (Hill et al., 2008). No obstante, esta relación probablemente esté mediatizada por otras variables, como la cultura educativa, las creencias de los profesores o los materiales curriculares (Hill et al., 2008; Sleep y Ekelson, 2012). Para profundizar en la descripción de esas variables que median entre el *Mathematical Knowledge for Teaching* y la práctica educativa de los profesores, en el presente estudio se describe el modo en el que influye el conocimiento de los profesores sobre el papel del razonamiento en la resolución de dos tipos de problemas (reescrito y estándar) en su práctica educativa. Para ello, se tomó una muestra de 55 maestros en ejercicio y se evaluó su conocimiento sobre el proceso de resolución de problemas a través de un cuestionario organizado en torno a tres tareas con dos versiones en cada una de ellas: un problema estándar frente a otro que incluía información matemática y situacional que ayudaba al razonamiento; un modelo de resolución, similar al que incluyen los libros de texto que no incluía el razonamiento en sus pasos de resolución, frente a un modelo que sí incluía tales pasos; y una interacción acorde con cada uno de los modelos de resolución propuestos en la tarea 2 (esto es, con y sin razonamiento). En función de si eran capaces de detectar o no la utilidad del razonamiento en cada una de esas tres tareas, fueron clasificados en varias categorías: conocimiento genuino, parcialmente genuino, parcialmente superficial y superficial. De la muestra general se tomaron 8 profesores, 2 por cada tipo de conocimiento, y se les grabó mientras resolvían dos tipos de problemas: estándar (que no promueven especialmente el razonamiento); y reescritos, (incluían información que sí favorecía el razonamiento). Una vez transcritas las sesiones, se calculó la media de porcentaje de ciclos de interacción que se dedicaron al razonamiento en cada una de ellas.

Los resultados obtenidos confirman la hipótesis principal del estudio: el conocimiento específico en resolución de problemas verbales parece explicar, al menos en parte, el comportamiento de los profesores cuando resuelven problemas con sus alumnos, ya que los profesores con un perfil genuino de conocimiento dedicaron más ciclos al razonamiento. En cambio, tal y como ya señalaban Rosales et al. (2012), la tarea por sí misma no parece influir en el modo en el que los profesores resuelven problemas con sus alumnos, ya que el comportamiento de los profesores de los diferentes perfiles de conocimiento fue similar en el problema estándar y en el reescrito, de acuerdo a nuestra primera hipótesis. Los resultados del presente estudio añaden a los obtenidos por Depaepe et al. (2010) y Rosales et al. (2012) que aunque los maestros de cada perfil se comportan de manera similar en las dos tareas, el comportamiento entre profesores con diferente perfil de conocimiento es distinto en dos sentidos.

Por un lado, y de acuerdo a nuestra segunda hipótesis, los maestros con un conocimiento genuino promovieron el razonamiento en mayor medida al resolver con sus alumnos el problema reescrito, pero también al resolver el problema estándar. Resulta razonable pensar que un profesor que es capaz de identificar el valor del razonamiento en el proceso de resolución, entonces promoverá ese razonamiento en problemas reescritos, diseñados para tal fin; lo que resulta llamativo es que lo haga incluso en los problemas estándar, que no están diseñados para tal fin. Es decir: resolver los problemas reescritos implica la puesta en marcha de procesos cognitivos más complejos que van más allá de la mera selección de información (Verschaffel et al., 2000), pero en el caso de las tareas estándar esa selección de datos y operaciones es suficiente. Teniendo esto en cuenta, cabe preguntarse que si los problemas estándar no requerían razonamiento para ser resueltos, ¿hacia dónde dirigían los profesores genuinos ese razonamiento? Una interpretación cualitativa de los resultados muestra que estos ciclos estuvieron referidos no tanto a alcanzar la respuesta del problema, sino a buscar modos alternativos de resolución y/o a plantear y resolver cuestiones diferentes a las inicialmente planteadas por el problema. Baste con reproducir algún ejemplo:

[Profesor: vamos a ver, ¿de qué otra forma podríamos haberlo resuelto?
Alumno: yo, yo, yo
Profesor: a ver, dime
Alumno: Fernando yo no lo he hecho así, yo… he multiplicado las habitaciones que hay en todo el hospital por 0.6 y 0.4, y luego ya como en la pizarra.
Profesor: fenomenal porque ya sabéis que el porcentaje se hallaba de muchas maneras: de forma fraccionaria, de forma decimal, con la misma operación del porcentaje… Terminamos el problema, pues.]

[Profesor: ¿más opciones?
Alumno: o pasar los km y hm a metros y luego ya restar para saber cuánto falta.
Profesor: otra cuestión que nos acaba de aportar Rafa, pasar los km y hm a m porque tenemos 3 unidades distintas. Tenemos km, hm y m.]

[Profesor: ¿lo tenemos?
Alumno: eh…yo lo he hecho sin restar habitaciones…, he calculado el 40% de 200 para saber las habitaciones de una cama.
P: vale, ¡pero te da lo mismo! Bien]

Por otro lado, de acuerdo con la tercera hipótesis, los profesores con un conocimiento superficial se limitaron a seleccionar la información matemática de ambos tipos de problemas, omitiendo la información situacional en el problema reescrito necesaria para resolver problemas difíciles (Verschaffel et al., 2000). En cuyo caso, además, desestimaban este tipo de información. A continuación se presentan dos fragmentos a modo de ejemplo:

[Profesor: ¿Os sirven todos los datos que tiene el problema?
Alumno: Si
Profesor: ¿Todos? Todos no, hay mucha parte que no es necesaria para resolverle: quería aumentar…, lobos hambrientos..., ¿vale?]

[P: Ya está todo, ¿no?
A: no
P: ¿seguro?, ¿qué falta?
A: pues que el bodeguero…
P: no, no, eso no es un dato. ¡Desde cuándo texto son datos! Un dato es 23, -1, 45%, números, por dios, números.]

En cambio, los profesores con un conocimiento genuino sí fueron sensibles al tipo de tarea a la hora de seleccionar la información, de modo que si bien se limitaron a seleccionar la información matemática en el problema estándar, en el problema reescrito también seleccionaron información situacional, además de la matemática.

Tomados en conjunto, los resultados relativos a la tercera medida indican que tanto los profesores genuinos como los superficiales se centran fundamentalmente en la selección y el razonamiento matemático, esto es, son paradigmáticos en palabras de Chapman (2006). Sin embargo, mientras que los profesores genuinos son principalmente paradigmáticos (de manera similar a los profesores descritos por Chapman, 2006; Depaepe et al., 2010 y Rosales et al., 2012) los profesores superficiales son totalmente paradigmáticos.

En resumen, de los dos factores analizados en el presente estudio (los conocimientos y las tareas) sólo el primero parece predecir en algún grado el modo en el que los profesores se comportarán a la hora de resolver los problemas con sus alumnos, y más concretamente, a la hora de promover el razonamiento durante el proceso de resolución.

CAPÍTULO V:

Conclusiones Finales

Para terminar, nos gustaría cerrar este trabajo describiendo las conclusiones que emergen del trabajo en su conjunto, sus implicaciones educativas, las limitaciones que presenta y las posibles futuras líneas de trabajo que aquí se abren.

Debemos iniciar este capítulo recordando que el objetivo general de la Tesis Doctoral era indagar en el conocimiento sobre resolución de problemas verbales de una muestra de maestros de educación primaria de nuestro país y su incidencia en la práctica educativa. Para abordar este objetivo se diseñaron dos estudios diferenciados. Uno primero en el que se analizó la orientación y explicitud del conocimiento matemático especializado de dos grupos de maestros con diferente nivel de experiencia (en servicio y en formación). Y un segundo estudio en el que se analizó la relación entre conocimiento, práctica y tarea, esto es, se estudió el comportamiento de maestros con diferente perfil de conocimiento resolviendo tareas con diferente demanda cognitiva.

Y todo ello debido a que es necesario tratar de buscar una explicación a los resultados negativos de los alumnos de nuestro país en evaluaciones internacionales como TIMSS (IEA, 2013a), resultados que han disparado la preocupación de la comunidad educativa y científica. Tanto es así, que en busca de posibles explicaciones se han estudiado distintas variables implicadas en el proceso de enseñanza aprendizaje. En primer lugar, se han abordado el tipo de tareas que usan los alumnos, para ello se han analizado los libros de texto por ser el material didáctico más usado (Hiebert et al., 2003; Mullins et al., 2008; Vicente et al., 2013). En este sentido, los problemas parecen ser lo suficientemente rutinarios como para encajar con los modelos superficiales de resolución que los propios libros de texto proponen (Chamoso et al., 2013; Sánchez y Vicente, en prensa; Vicente, Manchado y Verschaffel, en evaluación). En segundo lugar, sabemos que los maestros se comportan de manera paradigmática y superficial cuando resuelven problemas con sus alumnos (Chapman, 2006; Depaepe et al., 2010; Rosales et al., 2012). Esto es, se centran en los aspectos matemáticos de la tareas dejando a un lado aquellos más cualitativos y además, promueven en sus alumnos un proceso de resolución carente de razonamiento y basados en estrategias como la palabra clave, que como hemos visto, no es condición suficiente para resolver problemas inconsistentes. Ahora, una vez finalizada la presente investigación, podríamos añadir dos nuevas posibles causas. Por un lado, que los maestros carecerían del conocimiento necesario sobre los aspectos que facilitan una resolución razonada a sus alumnos, lo cual les induce a concebir el proceso de resolución como algo superficial y mecánico centrado en los aspectos matemáticos de la tarea. Por otro lado, que ese conocimiento limitado parece ser un factor explicativo importante, en un grado mayor que la tarea, de lo que ocurre en las aulas. Por tanto, si consideramos estas posibles razones de manera independiente, obtendremos una perspectiva limitada. Sin embargo, tomándolas en conjunto vemos que cobran un gran sentido, pues a la luz de los resultados de los distintos estudios observamos que el rendimiento de los alumnos está en consonancia con el modo de comportarse los maestros en las aulas, los conocimientos que exhiben y las propuestas de los libros de texto.

5.1.- CONCLUSIONES

Las principales conclusiones que pueden derivarse de este trabajo en su conjunto son cinco:

En primer lugar, los resultados del presente trabajo nos ayudan a comprender por qué estamos lejos de que los profesores puedan plantear la resolución de problemas como un proceso reflexivo en el que el razonamiento situacional y matemático sea el centro de la instrucción. Los conocimientos que exhiben los maestros en servicio sobre la resolución de problemas están en consonancia con sus modos habituales de comportase en las aulas. Dicho de otro modo, los profesores no sólo están alejados de los planteamientos teóricos en su modo de comportarse en las aulas sino que también se alejan en lo que se refiere a los conocimientos que exhiben sobre la resolución de problemas. Pero ¿por qué se comportan de este modo? Así, lo más razonable pensar es que los profesores están preocupados por resolver correctamente la tarea y no tanto por enseñar a resolver. En este sentido, los maestros guían a sus alumnos en la comprensión del problema en contraposición a enseñar explícitamente estrategias que permitan a los alumnos comprender el problema por sí mismos.

En segundo lugar, estos resultados nos muestran que el simple hecho de proporcionar a los profesores problemas que, como los reescritos, permitan promover el razonamiento, para que los resuelvan con sus alumnos, probablemente no surtiría por sí mismo un efecto destacable sobre la práctica educativa de los profesores con un conocimiento superficial, aunque sí tendría cierto impacto en el de los de conocimiento genuino, que sí parecen ser capaces de sacar partido a las ayudas incluidas en los problemas (para una revisión de estos estudios ver Orrantia et al., 2011). En este sentido, un profesor con conocimiento genuino podría ser capaz, por un lado, de identificar aquellos problemas más difíciles que demanden más recursos cognitivos, y promover el razonamiento con sus alumnos necesario para dar respuesta a esa demanda; y por otro, de enriquecer aquellos problemas estándar que no promueven razonamiento alguno. En el caso de los maestros con un conocimiento superficial, en cambio, cualquier problema enriquecido matemática o situacionalmente probablemente se trataría como una tarea superficial o de bajo nivel, tal y como se ha descrito en este trabajo. Este hecho sitúa al profesor como un elemento fundamental en la configuración de la tarea, y corrobora la afirmación de Chapman (2013b) al considerar que “un profesor podría convertir una tarea abierta en una cerrada o una cerrada en una abierta. Él o ella podrían tratar una tarea de alta demanda cognitiva como una de bajo nivel o viceversa” (p.1).

Llegados a este punto cabría pensar que un conocimiento genuino en resolución de problemas aritméticos podría compensar las carencias de los materiales en tareas concretas de este tipo. En este sentido, si bien Charalombous et al. (2012) o Hill y Charalombous (2012a) sostienen que el material curricular puede suplir las carencias en el conocimiento del maestro, los resultados obtenidos en este trabajo indican más bien lo contrario, al menos para el caso concreto de la resolución de problemas verbales y con la muestra seleccionada.

En cualquier caso, y a pesar de que el conocimiento de los maestros parece explicar una parte de la práctica educativa de los profesores, otros factores, como las creencias y el desarrollo profesional (Hill et al., 2008) y/o factores psicológicos o contextuales (Cross Francis, 2015) podrían influir también en el modo en el que los profesores abordan la resolución de los problemas, ya sean estos estándar o contengan ayudas. En este sentido Sleep y Eskelson (2012) consideran que un alto MKT y un material curricular ambicioso podrían no ser elementos suficientes para garantizar una instrucción matemática de alta calidad, de modo que habría que considerar otros aspectos como unas creencias adecuadas y un desarrollo profesional acorde con esas creencias.

La tercera conclusión a la que permiten llegar los resultados de esta Tesis Doctoral es que los libros de texto y la experiencia que los profesores van acumulando en su utilización en el aula, desempeñan un papel fundamental en los conocimientos sobre el proceso de resolución que desarrollan los maestros y en la coherencia que han demostrado en las tres tareas que componían el cuestionario. Baste con reproducir alguna de estas argumentaciones:

> "El primero [problema] es el más utilizado en la mayor parte de los libros de texto o cuadernillos de problemas para alumnos de primaria".
>
> "El primer modelo es el que aparece en los libros de matemáticas en educación primaria"

En este sentido, si prestamos atención a la ideas formuladas por Hill et al. (2008) o Mullins et al. (2008) acerca de la influencia del libro de texto, queda clara la necesidad de repensar el rol de este material curricular a la hora de aprender a resolver problemas. Por ejemplo, Davis (2009) ha expuesto la necesidad de utilizar con cautela el libro de texto, ya que su utilidad depende de cómo está organizado, de los contenidos que trata y de la persona que lo utilice. Algo parecido sugieren Hill et al. (2008), que sostienen que el uso de los libros es recomendable para los profesores con bajo conocimiento pero no para profesores con un elevado conocimiento, algo que habría que reinterpretar con cautela, a la luz de los resultados obtenidos en el presente trabajo. Finalmente, también se ha mostrado que la inmensa mayoría de los problemas propuestos por los libros de texto de matemáticas de nuestro país son tan estereotipados que encajan con el modelo superficial de resolución que esos mismos libros presentan como orientación para resolver problemas (Chamoso et al., 2013; Sánchez y Vicente, en prensa). Por tanto, parece lógico pensar que el libro de texto tiene una influencia determinante sobre el conocimiento de los profesores, sobre qué implica resolver un problema y cómo debería promocionarse la resolución de problemas en las aulas.

En cuarto lugar, desde el punto de vista del asesoramiento, los resultados cobran interés, pues solo conociendo el saber en el que se sustenta su práctica educativa podremos llevar a cabo propuestas de modificación de lo que los profesores ya hacen. En este sentido, conocer qué saben los profesores, junto con saber qué hacen en sus aulas, son dos requisitos previos para proponer pautas de mejora de su práctica educativa que sean realistas y próximas al quehacer diario del maestro, de modo que tenga unas mínimas garantías de éxito y no sean propuestas utópicas que queden en el vacío. Esto nos ayudará a entender las dificultades que entraña modificar las prácticas, en muchos casos, a pesar de los esfuerzos de los formadores (Sánchez, García y Rosales, 2010).

En quinto lugar, los resultados obtenidos indican que los profesores de matemáticas en sus clases están enseñando a los alumnos a resolver los problemas de un modo muy similar a como los modelos computacionales clásicos (Briars y Larkin, 1984; Riley et al., 1983) programaban aquellas rudimentarias computadoras que utilizaron para simular el comportamiento de los alumnos. Y esto a pesar de que aquellos modelos quedaron obsoletos hace ya muchos años, y que en la actualidad existen otros modelos contrastados que promocionan el razonamiento de nuestros alumnos. En este sentido, y en contra de lo que Vigotsky proponía, se está promoviendo una resolución basada en automatismos que en modo alguno dificultaría el desarrollo cognitivo del alumno. Siendo esto así, deberíamos cuestionarnos si esto es lo que realmente queremos para los alumnos.

5.2.- IMPLICACIONES EDUCATIVAS

Estas conclusiones conllevan una serie de implicaciones educativas, que presentamos a continuación.

En primer lugar, los resultados obtenidos tendrían una implicación a nivel teórico, ya que puede considerarse un primer acercamiento a un posible marco teórico que permita organizar los conocimientos que pueden considerarse necesarios para los profesores sobre la resolución de problemas en educación primaria.

Esta implicación teórica conlleva ciertas implicaciones para la práctica, pues solo conociendo esto podríamos diseñar programas de formación docente y materiales curriculares adecuados.

La primera implicación para la práctica es que es necesario incidir en el conocimiento que los profesores albergan acerca de qué supone resolver un problema, y qué características debe tener un problema para que permita a los alumnos aprender a resolverlos de manera genuina. A la hora de llevar a cabo reformas educativas en la formación inicial y permanente de los profesores, esto debería tenerse en cuenta. De hecho, esta necesidad de revisar la formación que reciben los profesores no se desprende sólo de los resultados del alumnado, sino también de estudios como TEDS-M que muestran las carencias de los maestros en formación (INEE, 2012). En este sentido, sería útil incluir en los planes de formación del grado de maestro o en los cursos de formación continua en el caso de los maestros en ejercicio, contenidos relacionados con lo detallado en el capítulo I de la presente Tesis Doctoral. De modo que además de saber qué tipos de ayudas facilitan la labor de los alumnos, puedan enriquecer la dieta instruccional de sus alumnos, bien seleccionando aquellas tareas que exijan mayor demanda cognitiva, bien enriqueciendo aquellas tareas estándar que extraigan de los libros de texto (Chapman, 2013b). Tal y como afirma Boston (2013), un conocimiento sobre estos aspectos es esencial en la promoción del aprendizaje del alumno, sin embargo, los maestros suelen seguir las propuestas por los libros de texto. En este sentido, estudios realizados con maestros de educación primaria y secundaria muestran que una intervención orientada a la comprensión de los distintos niveles de demanda cognitiva de las tareas (alta: resolución de problemas, razonamiento, justificación; baja: procedimientos, memorización) puede ayudar a los maestros a mejorar su conocimiento y su práctica educativa (Boston, 2013; Sullivan et al., 2015). De este modo aseguraríamos que lo que realmente aprenden los profesores está directamente relacionado con lo que necesitan nuestros alumnos para razonar problemas.

En esta dirección, y partiendo de que las experiencias prácticas en los colegios son una oportunidad importante para aprender (König, Blömeke y Kaiser, 2015) sería cuestionable la idea que apuntan algunos estudios sobre el beneficio de que los maestros en formación vean los modelos de los maestros en servicio (Bransford, Brown y Cocking, 2000; Hogan et al., 2003), al menos para el caso concreto de la resolución de problemas. Tomando como base los resultados hallados y los obtenidos por estudios previos (Chapman, 2006; Depaepe et al., 2010; Rosales et al., 2012), el modelo de maestros en ejercicio se aleja bastante en cuanto conocimiento y práctica de lo que evaluaciones internacionales como PISA o TIMSS evalúan en sus pruebas.

La segunda implicación práctica sería que parece recomendable que los materiales curriculares, incluyan problemas de mayor dificultad en los libros de texto, lo cual permitiría, por un lado, que nuestros alumnos tuvieran acceso a tareas que les favorecieran la promoción de un mayor razonamiento, algo de lo que a día de hoy están privados a la luz de los resultados arrojados por diferentes estudios (Chamoso et al., 2013; Sánchez y Vicente, en prensa; Vicente et al., en evaluación); y por otro, que los maestros pudieran enriquecer su experiencia de lo que supone resolver un problema con los alumnos. Esto sería interesante a pesar de que uno de los resultados de este estudio nos muestre que las tareas de ese tipo por sí mismas no tienen efecto, sino que dependen del conocimiento del maestro que vaya a usarlas. No obstante, aunque sabemos que no todos, probablemente una parte del alumnado se beneficiaría de la inclusión de tareas de este tipo.

5.3.- LIMITACIONES DEL ESTUDIO

El estudio cuenta con ciertas limitaciones que hacen que los resultados obtenidos deban considerarse con cautela. Estas limitaciones están relacionadas con varios aspectos:

- El tamaño de la muestra hace que los resultados no sean generalizables, ya que representan el análisis de un número limitado de maestros.
- El diseño del material. Una de las características que definía las tareas “genuinas” del cuestionario es que, debido a que las ayudas incluidas eran de carácter textual, esas versiones eran notablemente más extensas que las estándar. Esta longitud adicional pudo influenciar a algunos maestros a la hora de elegir y argumentar a favor de las versiones estándar.
- El procedimiento de recogida de información relativa al conocimiento de los profesores. Los datos obtenidos mediante el cuestionario deberían haberse completado con entrevistas que hubieran permitido profundizar en el sistema de pensamiento de cada uno de los maestros. O en su caso, haber tomado la entrevista como material principal para la recogida de datos. Esto hubiera aportado una visión más nítida de los conocimientos de los profesores.

5.4.- PERSPECTIVAS DE FUTURO

A la luz de los resultados obtenidos en este trabajo sería aconsejable que estudios futuros analizaran conocimientos y práctica educativa de manera conjunta con una muestra más amplia, para obtener una muestra más representativa de profesionales de nuestro país. Además, sería interesante ampliar la muestra de tareas a problemas no rutinarios o reales. Por otro lado, sería interesante analizar aspectos adicionales de los resultados obtenidos, como el nivel de autonomía, la presencia de procesos metacognitivos de la tarea o la delimitación de patrones en el proceso de resolución. Finalmente, sería conveniente realizar estudios con profesores en los que el uso del libro de texto no sea el centro de la instrucción en las sesiones de las matemáticas.

Concluimos este trabajo retomando la idea que abría la presente Tesis Doctoral. Observamos que los conocimientos de los maestros, en mayor grado que la tarea, desempeñan un rol importante en lo que ocurre en las aulas y que su orientación superficial hacia la resolución de problemas está en consonancia con:

- El comportamiento superficial y paradigmático de los maestros. Es decir, con la escasa promoción del razonamiento cuando resuelven tareas de este tipo junto a sus alumnos y por la limitación en cuanto al foco de atención del proceso de resolución sobre los aspectos eminentemente matemáticos de la tarea (Chapman, 2006; Depaepe et al., 2012; Rosales et al., 2012).
- Las tareas que recoge el libro de texto, material didáctico más empleado en las clases de matemáticas (Hiebert et al., 2003; Mullins et al., 2008; Vicente et al., 2013). Esto es, problemas rutinarios y estereotipados (Chamoso et al., 2013: Vicente et al., en evaluación) además de modelos de resolución que no ayudan a razonar matemática ni situacionalmente (Sánchez y Vicente, en prensa).
- Las puntuaciones por debajo del promedio de la OCDE de los alumnos españoles en evaluaciones como TIMSS (IEA, 2013a).

Por tanto, este estudio podría ayudar a comprender la relación triádica existente entre profesores, alumnos y libros de texto, que conforma un clima educativo alejado del razonamiento. De esta manera, parece necesario que se produzca un cambio tanto en los materiales como en los conocimientos de los maestros españoles para que se pueda dar un incremento en la promoción del razonamiento a la hora de resolver problemas en las clases de nuestro país.

FINAL CONCLUSIONS

(English Version)

Finally, we are going to describe the conclusions which emerge from the whole work, its educative implications, the limitations which appear and the possible future lines of work which can be opened here.

We must start this chapter remembering that the general aim of the Thesis was to look into the knowledge about word problem solving of a teachers' sample of primary education in our country and his effect on the educational practice. To this end, two studies were conducted. One first which analysed the orientation and explicitness of teacher knowledge about word problem solving of inservice and preservice teachers. And one second which analysed the relationship between knowledge, task and practice. This is, the behaviour of teachers with different knowledge profile solving tasks with different cognitive demand were analysed.

And all this, because of the fact that it is necessary to try to find an explanation to the negative results of the students of our country in international assessments such us TIMSS (IEA, 2013a), results which have increased the worries of the educational and scientifical community. Such was the case that searching the possible explanations, different implied variables have been studied in the process of teaching-learning. First of all, the types of tasks students use have been addressed, for these textbooks have been analysed due to the fact that it is the most used curricular material. In this way, the problems seem to be routine enough to fit in the superficial solving problem models the own books propose (Chamoso et al., 2013; Sánchez & Vicente, in press; Vicente et al., in evaluation). Secondly, we know teachers behave in a paradigmatic and superficial way when they solve word problems jointy with their students (Chapman, 2006; Depaepe et al., 2010; Rosales et al., 2012). This is, they focus on the mathematical aspects of the tasks putting aside those more qualitative and besides, they promote in their students a solving process lacking of reasoning and based on strategies as the key word, that as we have seen, it is not enough to solve inconsistent problems. Now, once we have ended the current research, we could add two new possible causes. On one hand, teachers would lack the necessary knowledge about the aspects which make a reasonable solving easier for their students, what leads them to conceive the solving process as something superficial and mechanic focused on the mathematical aspects of the task. On the other hand, this limited knowledge seems to be an important explanatory element, in a greater grade than the task, about the things which happen in the classroom. Therefore, if we consider these possible reasons in an independent way, we will get a limited perspective. However, if we take them as a whole we see they make sense, so in the light of the results of the different researches we see the output of the students is in accordance with the way of teachers' behaviour in the classroom, the knowledge they show and the proposals of the textbooks.

In this sense, the main **conclusions** about this work were five.

First of all, these results help us to understand why we are far from the teachers could set out the word problem solving as a reflexive process in which the situational and mathematical reasoning was the centre of the instruction. The knowledge about the word solving problems inservice teachers show is in accordance with the habitual ways of behaving in the classrooms. In other words, teachers are not only far from the theoretical approaches on how to behave in the classrooms but also they are far from the knowledge which is shown about the word solving problems. But, why have they this behaviour? This way, the most reasonable is to think teachers are worried about solving the task correctly and not so much for teaching to solve. In this way, teachers lead students in the understanding of the problem in contrast with teaching explicitly strategies which allow students to understand the problem by themselves.

Secondly, these results show us the simple fact of providing teachers some word problems, as the reworded, allow to promote the reasoning, so that they can solve them with the students, it wouldn´t likely take by itself a remarkable effect over the educational practice of teachers with a superficial knowledge, although it would take a certain effect on the ones with a genuine knowledge, who seem to be able to take advantages of the aids included in the problems (fFor a revisión about these studies, see Orrantia et al., 2011). In this way, a teacher with a genuine knowledge would be able, on one hand, to identify those difficult problems, which require more cognitive resources, and promote the necessary reasoning with his students to give answers to this demand; and, on the other hand, to enrich those standard problems, which don´t promote any reasoning. In teachers' case with a superficial knowledge, by contrast, any problem enriched mathematically or situationally would likely be dealt as a superficial task or of low level, as it has been described in the research. This fact places the teacher as a basic element in the shaping of the task and confirms Chapman´s (2013b) assertion: "a teacher could turn an open-ended task into a closed one or a closed one into an open one. He or she could treat a task of high cognitive demand as low level one or vice versa" (p.1).

Having reached this point, it would be room for thinking a genuine knowledge in word problem solving could compensate the lack of resources in concrete tasks of this type. In this way, although Charalombous et al. (2012) or Hill & Charalombous (2012a) maintain the curricular materials can replace the lackings in the teachers' knowledge, the results obtained in this research show just the opposite, at least for the concrete case of the word problem solving and with the chosen sample.

In any case, and despite the teachers' knowledge seems to explain one side of the educational practice of teachers, other elements, as the beliefs and the professional development (Hill et al., 2008) and/or psychological or contextual elements (Cross Francis, 2015) could also influence on the way teachers deal with the word problem solving, being these standard or including aids. In this way, Sleep & Eskelson (2012) consider that a high MKT and an ambitious curricular material could not be factors enough to guarantee a high quality mathematical instruction, so there would have been to consider other aspects as accurate beliefs and a professional development in accordance with these beliefs.

The third conclusion the results of this Doctoral Thesis allow to reach is the textbooks and the experience teachers are building up in the use of the classroom, make up a main role in the knowledge about the word problem solving which is developed by teachers and in the coherence which they have shown in the three tasks which composed the questionnaire. It would be enough to recreate some of these reasonings:

> "The first [problem] is the most used in the most textbook for primary students"

> "The first model is the one that appears in mathematics textbook in primary education"

In this way, if we pay attention to the formulated ideas by Hill et al. (2008) or Mullins et al. (2008) about the influence of the textbook, it is clear the necessity to rethink the role of this curricular material when learning to solve problems. For instance, Davis (2009) has exposed the necessity to use the textbook with caution, because of its utility depends on how it is organized, the contents which appear and the person who uses it. Something similar suggest Hill et al. (2008), who maintain the use of the textbooks is advisable for teachers with a low knowledge, but it wouldn´t be advisable for those with a high knowledge, something we should reinterpret with caution, in the light of the results obtained in the current research. Finally, it has also been shown the most part of the problems proposed by the math textbooks in our country are so stereotyped that they fit in the superficial model of solving that those same books show as a guide to solve word problems (Chamoso et al., 2013; Sánchez & Vicente, in press). Therefore, it seems logical to think that the textbook has a decisive influence about teachers' knowledge, about what implies to solve a word problem and how the word problem solving in the classroom should be promoted.

In fourth place, from the counsel's point of view, the results become relevant, so only knowing the wisdom in which his educational practice is supported, we will be able to carry out proposals to modify what teachers already do. In this way, knowing what teachers know, apart from knowing what they do in their classrooms are two previous requirements to propose improvement guidelines of their educational practice. These might be realistic and close to the daily teacher's chore, so they have a minimum guaranteed success and they are not unrealistic proposals which are left hanging in midair. This will help us to understand the difficulties which involve modifying the training, in many cases, despite the trainers' efforts (Sánchez et al., 2010).

In fifth place, the results obtained show mathematics teachers in their classrooms are teaching students to solve problems in a very similar way as the classic computer system (Briars & Larkin, 1984; Riley et al., 1983) set up those rudimentary computers which used to pretend the behaviour of the students. And this, in spite of those models became obsolete many years ago, and nowadays there are other contrasted models which promote the reasoning of our students. In this way, and against which Vigotsky proposed, it is being promoted a word problem solving based on automatisms which in some way could make difficult the cognitive development of the student. Being like this, we should ask ourselves if this is what we really want for our students.

These conclusions imply several **educational implications**, which are shown next.

Firstly, the results obtained would have a theoretical implication, as it can be considered a first approach to a possible theoretical frame which allows organizing the knowledge which can be considered necessary for teachers about word problem solving in primary education.

This theoretical effect implies several implications for the practice, so only knowing this we could design a plan of teacher training and accurate curricular materials.

The first effect for the practice is that it is necessary to have an impact on the knowledge teachers have about how it is supposed to solve a word problem and which features a problem must have so the students can learn to solve them in a genuine way. When we are going to carry out educational changes in the initial and permanent training of teachers, this must be taken into account. In fact, this necessity of reviewing the training teachers receive, it is not only deduced from the students' results, but also from the researches as TEDS-M which show the lackings of the preservice teachers (INEE, 2012). In this way, it would be useful to include in the training degree plans of teachers or in the courses of ongoing training in the case of inservice teachers, contents related with the detailed in the chapter I in the current Thesis. So that besides knowing what types of help make the students' labour easier, they can enrich the instructional diet of students, choosing those tasks which require more cognitive demand, enriching those standard tasks which are extracted from the textbooks (Chapman, 2013b). Such as Boston (2013) states, knowledge about these aspects is essential in promoting students learning. Instead, teachers often rely on the tasks in their textbooks. In this way, studies show an intervention guided to the understanding of the different levels of cognitive demand of the tasks (high level: problem solving, reasoning, justification; low level: procedures, memorizing) help teachers to improve their knowledge and their educative practice (Boston, 2013; Sullivan et al., 2015). In this way, we would be sure what teachers really learn is directly related with what our students need to reason problems.

In this direction, and despite the practical in-school experience serves as a relevant opportunity to learn (König et al., 2015), it would be questionable the idea some researches point to about the benefit preservice teachers see the inservice teachers' models (Bransford et al., 2000; Hogan et al., 2003), at least for word problema solving. Using the found results as a base and the obtained in previous researches (Chapman, 2006; Depaepe et al., 2010; Rosales et al., 2012), the inservice teachers' model moves greatly away regarding knowledge and practice from what international assessments like PISA or TIMSS evaluate in their proofs.

The second practical implication would be that it seems advisable that curricular materials include more difficult problems in the textbooks, which would allow, on one hand, our students had access to tasks which favoured the promotion of a greater reasoning, something that nowadays they are deprived due to the results obtained in different researches (Chamoso et al., 2013; Sánchez & Vicente, in press; Vicente et al., in evaluation); and on the other hand, teachers could enrich their experience about solving a word problem jointly with their students. This would be interesting despite that one of the results in this research shows tasks of this type themselves have no effect, but they depend on the teachers' knowledge who is going to use them. However, although we know that no everybody, a big amount of the students would be likely benefit with the inclusion of this type of tasks.

The research takes into account some **limitations** which made that the results obtained must be evaluated with caution. These limitations are related with several aspects:

- The size of the sample makes that the results are not generalized, so they show the analysis of a limitless number of teachers.
- The design of the material. One of the features which defined the genuine tasks of the questionnaire is that, due to the aids included were of textual nature, those accounts were notably longer than the standard. This additional length could influence on some teachers when they had to choose and argue for the standard accounts.
- The procedure of information research relative to the teachers' knowledge. The data obtained by means of the questionnaire should have been filled with interviews which had allowed going in depth in the thinking system of each of the

teachers. Or in its case, having taken the interview as main material for the data research. This had provided a clearer sight of teachers' knowledge.

In the light of the results obtained in this research would be advisable that **future researches** would analyse knowledge and educational practice jointly with a wider sample to obtain a more representative sample of professionals in our country. Furthermore, it would be interesting to increase the sample from tasks to non routine or real problems. On the other hand, it would be interesting to analyse additional aspects of the results obtained, as participant structures, as the presence of metacognitive processes of the task or the delimitation of patterns in the word problem solving. Finally, it would be convenient to carry out researches with teachers in which the use of the textbook wouldn´t be the centre of the instruction in their mathematics classes.

We conclude this work taking up again the idea which opened the current Thesis. We observe teachers' knowledge, to a greater grade than the task, carry out an important role in the things which happen in the classroom and his superficial orientation towards the word problem solving is in accordance with:

- The superficial and paradigmatic behaviour of the teachers. The lacking promotion of the reasoning when they solve this type of tasks jointly with their students and by the limitation due to the focal point of the resolution process about the eminently mathematical aspects of the task (Chapman, 2006; Depaepe et al., 2012; Rosales et al., 2012).
- The tasks which are collected in the textbook, the most used curricular material in the mathematics classes (Hiebert et al., 2003; Mullins et al., 2008; Vicente et al., 2013). This is, stereotyped and routine problems (Chamoso et al., 2013; Vicente et al., in evaluation), in addition to word problem solving models which help to neither reason nor mathematically neither situationally (Sánchez & Vicente, in press).
- Marks under the average of the OCDE of the Spanish students in international assessments like TIMSS (IEA, 2013a).

Therefore, this research could help to understand the triangular relation between teachers, students and textbooks, which makes up the educational climate away from the reasoning. In this way, it seems necessary that a change both in the materials and in the teachers´ knowledge will be carried out so that the promotion of the reasoning could be increased when solving word problems in our country´s classrooms.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abelson, R.P. (1979). Differences between belief and knowledge systems. *Cognitive Science, 3,* 355-366.

An, S., Kulm, G., y Wu, Z. (2004). The pedagogical content knowledge of middle school, mathematics teachers in China and the U.S. *Journal of Mathematics Teacher Education, 7* (2), 145-172.

Ball, D.L., Hill, H.C. y Bass, H. (2005, Fall) Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator,* 14-22.

Ball, D.L., Thames, M.H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*, 389–407.

Berliner, D.C. (1986). In pursuit of the expert pedagogue. *Educational Researcher, 15* (7), 5-13.

Berliner, D.C. (1987). Ways of thinking about students and classrooms by more and less experienced teachers. En J. Calderhead (Ed.), *Exploring teachers' thinking* (pp. 60-83). London: Cassell.

Berliner, D.C. (1988). *The Development of Expertise in Pedagogy*. Charles W. Hunt Memorial Lecture presented at the Annual Meeting of the American Association of Colleges for Teacher Education (New Orleans, LA, February 17-20, 1988). Washington, DC: AACTE Publications.

Blanco, L.J., Caballero, E., Piedehierro, A., Guerrero, E. y Gómez, R. (2010). El dominio afectivo en la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas. Una revisión de investigaciones locales. *Campo Abierto, 19* (1), 13-31.

Blanco, L.J., Guerrero, E., Caballero, A., Brígido, M. y Mellado, V. (2010). The affective dimensión of learning and teaching and teaching mathematics and science. En M.P. Caltone (Ed.), *Handbook of lifelong learning developments* (pp.256-287). New York, EEUU: Nova Science Publishers.

Blanco, L.J. y Cárdenas, J.A. (2013). La resolución de problemas como contenido en el currículo de Matemáticas de Primaria y Secundaria. *Campo Abierto 32* (1), 137-156.

Borko, H., Eisenhart, M., Brown, C.A., Underhill, R.G., Jones, D. y Agard, P.C. (1992). Learning to teach hard mathematics: Do novice teachers and their instructors give up too easily? *Journal for Research in Mathematics Education, 23* (3), 194-222.

Borko, H. y Livingston, C. (1989). Cognition and improvisation: differences in mathematics instruction by expert and novice teachers. *Americn Educational Research Journal, 26* (4), 473-498.

Boston, M.D. (2013). Connecting changes in secondary mathematics teachers´ knowledge to their experiences in a profesional development workshop. *Journal of mathematics teacher education, 16* (1), 7-31.

Bransford, J.D., Brown, A.L. y Cocking, R.R. (Eds.). (2000). How People Learn: Brain, Mind, Experience and School. National Academy Press: Washington, DC. Recuperado de http://www.csun.edu//~SB4310/How%20People%20Learn.pdf

Briars, D.J. y Larkin, J.H. (1984). An integrated model of skill in envolving elementary word problems. *Cognition and instruction, 1,* 245-296.

Bruner, J. (1985). Narrative and paradigmatic modes of thought. En E. Eisner (Ed.), *Learning and teaching the ways of knowing* (pp. 97-115). Chicago, IL: University of Chicago Press.

Bruner, J. (1986). *Actual minds, possible worlds*. Cambridge: Harvard University Press.

Cárdenas, J.A, Blanco, L.J., Guerrero, E. y Gómez, R. (2013). Resolución de problemas de matemáticas y evaluación: aspectos afectivos y cognitivos. En V. Mellado, L.J. Blanco, A.B. Borrachero, y J.A Cárdenas (Eds.), *Las emociones en la enseñanza y el aprendizaje de las ciencias y las matemáticas* (pp.67-88). Badajoz, España: DEPROFE.

Carpenter, T.P., Fennema, E., Peterson, P.L. y Carey, D.A (1988). Teacher´s pedagogical content knowledge of students´ problem solving in elementary arithmetic. *Journal for research in mathematics education, 19* (5), 385-401.

Carpenter, T.P y Moser, J.M. (1983). The acquisition of addition and subtraction concepts. En R. Lesh & M. Landau (Eds.), *The acquisition of mathematical concepts and processes* (pp. 7–44). Nueva York: Academic Press.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C. y Muñoz-Catalán, M.C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser y M. A. Mariotti (Eds.). *Proceedings of the CERME 8* (pp. 2985-2994). Middle East Technical University, Ankara, Turquía: ERME.

Chamoso, J.M., Vicente, S., Manchado, E., y Múñez, D. (2013). *Los Problemas de Matemáticas Escolares de Primaria, ¿son solo problemas para el aula?* I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe (CEMACYC). Santo Domingo, República Dominicana.

Chapman, O. (2006). Classroom practices for context of mathematics word problems. *Educational Studies in Mathematics*, *62*, 211–230.

Chapman, O. (2013a). Investigating teachers´ knowledge for teaching mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *16* (4), 237-243.

Chapman, O. (2013b). Mathematical-task knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16* (1), 1-6.

Chapman, O. (2015). Understanding and supporting mathematics teachers´ knowledge for teaching. *Jounal of Mathematics Teacher Education, 18* (1), 101-103.

Charalombous, C.Y. y Hill, H.C. (2012). Teacher knowledge, curriculum materials, and quality of instruction: unpacking a complex relationship. *Journal of curriculum studies, 44* (4), 443-466.

Charalombous, C.Y., Hill, H.C. y Mitchell, R.N. (2012). Two negatives don't always make a positive: Exploring how limitations in teacher knowledge and the curriculum contribute to instructional quality. *Journal of curriculum studies, 44* (4), 489-513.

Chase, W.G. y Simon H.A. (1973). Perception in chess. *Cognitive Psychology, 1,* 33-81.

Chazan, D., Yerushalmy, M. y Leikin, R. (2008). An analytic conception of equation and teacher´s views of school algebra. *The journal of Mathematical Behaviour, 27,* 87-100.

Chi, M.T.H., Feltovich, P.J. y Glaser, R. (1981). Categorization and representation of physics problems by experts and novices. *Cognitive Science, 5,* 121-152.

Chi, M.T.H., Glaser, R y Rees, E. (1982). Expertise in problema solving. En S.R (Ed.), *Advances in the psycology of human intelligence* (vol. 1, pp.7.76). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Chiu, M. (2004). Adapting Teacher Interventions to Student Needs During Cooperative Learning: How to Improve Student Problem Solving and Time On-Task. *American Educational Research Journal, 41* (2), 365–399.

Clark, C.M., y Peterson, P.L. (1986). Teachers' thought processes. En M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 255-296). New York: McMillan.

Clark, C.M., y Peterson, P.L. (1990). Procesos de pensamiento de los docentes. En M. Wittrock. *La investigación de la enseñanza, III. Profesores y alumnos*. Barcelona: Paidós educador.

Cross Francis, D. (2015). Dispelling the notion of inconsistencies in teachers´ mathematics beliefs and practices: A 3-year case study. *Journal of Mathematics Teacher Education, 18* (1), 173-201.

Cummins, D.D. (1991). Children's interpretations of arithmetic word-problems. *Cognition and Instruction, 8*, 261-289.

Cummins, D.D., Kintsch, W., Reusser, K. y Weimer, R. (1988). The role of understanding in solving word problems. *Cognitive Psychology, 20*, 405-438.

Davis, J.D. (2009). Understanding the influence of two mathematics textbooks on prospective secondary teachers´ knowledge. *Journal of mathematics Teacher Education, 12,* 365-389.

De Corte, E., Verschaffel, L. y Dewin, L. (1985). Influence of rewording verbal problems on children's problem representations and solutions. *Journal of Educational Psychology, 77,* 460-470.

De Groot, A.D. (1965). *Thought and choice in chess*. The Hague: Mouton.

Depaepe, F., De Corte, E. y Verschaffel, L. (2010). Teachers´ approaches towards word problem solving: Elaborating or restricting the problem context. *Teaching and Teacher education*, *26*, 151-160.

Depaepe, F., Torbeyns, J., Vermeersch, N., Janssens, D., Janssen, R., Kelchtermans, G., Veschaffel, L. y Van Dooren, W. (2015). Teachers´ content and pedagogical content knowledge on rational numbers: a comparison of prospective elementary and lower secondary school teachers. *Teaching and teacher education, 47*, 82-92.

Depaepe, F., Verschaffel, L. y Kelchtermans, G. (2013). Pedagogical content knowledge: a systematic review of the way in which the concept has pervaded mathematics educational research. *Teaching and teacher education*, *34*, 12-25.

Díaz, M.V. y Poblete, Á. (2001). Contextualizando tipos de problemas matemáticos en el aula. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 45*, 33-41.

Diego-Mantecón, J.M. (2012). *Clarifying the field of student mathematics-related beliefs: developing measurement scales for 14/15-year-old students across Bratislava, Cambridgeshire, Cantabria, and Cyprus*. PhD Thesis Manuscript. University of Cambridge publications.

Ding, M. (2008). Teacher knowledge necessary to adress student errors and dificultéis about equivalent fractions. En G. Kulm (ed.), *Teacher Knowledge and practice in middle grades mathematics* (pp.147-171). Rotterdam: Sense Publishers.

Ding, M., Li, X. y Capraro, M. (2013). Preservice elementary teachers’ knowledge for teaching the associative property of multiplication: A preliminary analysis. *The Journal of Mathematical Behavior, 32* (1), 36-52.

Ernest, P. (1989). The Knowledge, Beliefs and Attitudes of the Mathematics Teacher: a model. *Journal of Education for Teaching, 15* (1), 13.23.

Escudero, D.I., Flores, E. y Carrillo, J. (2012). *El conocimiento especializado del profesor de matemáticas.* Memoria de la XV escuela de Invierno en Matemática Educativa, 35-42.

España. (2006). Ley orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación.

España. (2013). Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa.

España (2014). Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria.

Fennema, E. y Franke, M.L. (1992). Teacher´s knowledge and its impact. En D.A. Groews (Ed.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.147-164). New York: McMillan.

Flores, E., Escudero, D.I. y Carrillo, J. (2013). A theoretical review of specialised content knowledge. En B. Ubuz, C. Haser y M.A. Mariotti (Eds.). *Proceedings of the CERME 8* (pp. 2055-3064). Middle East Technical University, Ankara, Turquía: ERME.

Font, V., Planas, N. y Godino, J.D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje, 33* (1), 89-105.

Gómez-Chacón, I. (2000). *Matemática Emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático.* España: Narcea.

Gómez-Chacón, I. (2003). La Tarea Intelectual en Matemáticas Afecto, Meta-afecto y los Sistemas de Creencias. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, 10* (2), 225-247.

Grossman, P. (1990). *The making of a teacher: Teacher knowledge and teacher education*. New York: Teachers College Press.

Hegarty, M., Mayer, R.E. y Monk, C.A. (1995). Comprehension of aritmetic word problem: a comparision os successful and unsuccessful problem solvers. *Journal of educational psychology, 87* (1), 18-32.

Heller, J.I. y Greeno, J.G. (1978). Semantic processing in aritmetic word problem solving. Comunicación presentada en la *Midwestern Psychological Association Convenition,* Chicago.

Hiebert, J., Gallimore, R., Givvin, K.B., Hollingsworth, H., Jacobs, J., Chui, A.M., … Stigler, J.W. (2003). *Teaching mathematics in seven countries. Results from the TIMSS 1999 video study.* Washington, DC: National Center for Education Statistics (NCES).

Hill, H.C., Ball, D.L. y Schilling, S. (2004). Developing measures of teacher´s mathematical knowledge for teaching. *The Elementary School Journal, 105* (1), 11-30.

Hill, H.C., Blunk, M., Charalambous, C., Lewis, J., Phelps, G., Sleep, L., y Ball, D.L. (2008). Mathematical knowledge for teaching and the mathematical quality of instruction: An exploratory study. *Cognition and Instruction, 26* (4), 430-511.

Hill, H.C. y Charalambous, C.Y. (2012a). Teacher knowledge, curriculum materials, and quality of instruction: Lessons learned and open issues. *Journal of Curriculum Studies, 44* (4), 559-576.

Hill, H.C. y Charalambous, C.Y. (2012b). Teaching (un)Connected Mathematics: Two teachers' enactment of the Pizza problem. *Journal of Curriculum Studies, 44* (4), 467-487.

Hill, H.C., Rowan, B., y Ball, D.L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal, 42* (2), 371-406.

Hogan, T. y Rabinowitz, M. (2009). Teacher expertise and the development of a problem representation. *Educational Psychology, 29* (2), 153-169.

Hogan, T., Rabinowitz, M. y Craven, J.A. (2003). Representation in teaching: Inferences from research of expert and novice teachers. *Educational Psychologist, 38* (4), 235-247.

Huang, R. y Kulm, G. (2012). Prospective middle grade mathematics teachers' knowledge of algebra for teaching. *The Journal of Mathematical Behavior, 31* (4), 417-430.

Hudson, T. (1983). Correspondences and numerical differences between disjoint sets. *Child Development, 54*, 84-90.

IEA. (2013a). *PIRLS-TIMSS 2011. Estudio Internacional de progreso en comprensión lectora, matemáticas y ciencias. Volumen I. INFORME ESPAÑOL.* Madrid: Ministerio de Educación Cultura y Deporte.

IEA. (2013b). *TIMSS 2011. Mathematics Framework. Chapter 1.* Recuperado de http://timssandpirls.bc.edu/timss2011/downloads/TIMSS2011_Frameworks-Chapter1.pdf

INEE. (2012). *TEDS-M. Estudio internacional sobre la formación inicial en matemáticas de los maestros. Informe español*. Madrid: Autor.

Inoue, N. (2009). Rehearsing to teach: content-specific deconstruction of instructional explanations in pre-service teacher training. *Journal of Education for Teaching: International Research and Pedagogy, 35*, 47-60.

Izsàk, A. (2008). Mathematical knowledge for teaching fraction multiplication. *Cognition and Instruction, 26* (1), 95–143.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: el modelo Van Hiele. En S. Llinares, S y M.V. Sánchez (Eds.), *Teoría y práctica en educación matemática* (pp. 295-384). Sevilla: Alfar.

Kerlinger, F.N. (1989). *Investigación del comportamiento*. México: McGrawHill

Kintsch, W. (1988). The role of knowledge in discourse comprehension: a Construction-Integration model. *Psychological Review, 95* (2), 163-182.

Kintsch, W. (1998). *Comprehension: a paradigm for cognition.* Cambridge: Cambridge University Press.

Kintsch, W. y Greeno, J. (1985). Understanding and solving word arithmetic problem. *Psychological Review, 92*, 109-129.

Kleickmann, T., Richter, D., Kunter, M., Elsner, J., Besser, M., Krauss, S. y Baumert, J. (2013). Teacher´s content knowledge and pedagogical content knowledge: the role of structural differences in teacher education. *Journal of Teacher Education, 64* (1), 90-106.

Kleickmann, T., Richter, D., Kunter, M., Elsner, J., Besser, M., Krauss, S., Cheo, M. y Baumert, J. (2015). Content knowledge and pedagogical content knowledge in Taiwanese and German mathematics teachers. *Teaching and Teacher Education, 46*, 115-126.

König, J., Blömeke, S. y Kaiser, G. (2015). Early career mathematics teachers´ general pedagogical knowledge and skills: do teacher education, teaching experience, and working conditions make a difference? *International Journal of Science and Mathematics Education, 13* (2), 331-350.

Larkin, J.H. (1981). Enriching formal knowledge: a model for learning to solve problems in physics. En J.R. Anderson (ed.), *Cognitive Skills and Their Acquisition* (pp.311-334). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Larkin, J.H. (1983). The role of problem representation in physics. En D. Gentner y A.L. Stevens (Eds), *Mental models* (pp. 75-98). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Larkin, J.H., Mcdermott, J., Simon, D.P. y Simon, H.A. (1980a). Models of compentence in solving physics problems. *Cognitive Science, 4,* 317-345.

Larkin, J.H., Mcdermott, J., Simon, D.P. y Simon, H.A. (1980b). Expert and novice performers in solving physics problems. *Science, 208,* 1335-1342.

Lavely, C., Berger, N., Bullock, D., Follman, J., Kromrey, J., y Sawilowsky, S. (1987). Expertise in teaching: Expert pedagogues. Tampa, FL: University of South Florida.

Leinhardt, G. y Greeno, J.G. (1986). The Cognitive Skill of teaching. *Journal of Educational Psychology, 78* (2), 75-95.

Leinhardt, G., y Smith, D.A. (1985). Expertise in mathematics instruction: Subject matter knowledge. *Journal of Educational Psychology, 77*, 247-271.

Lewis, A.B. y Mayer, R.E. (1987). Students´s miscomprehension of relational staments in arithmetic word problems. *Journal of Educational Psychology, 79* (4), 363-371.

Li, X. (2011). Mathematical Knowledge for Teaching Algebraic Routines: A Case Study of Solving Quadratic Equations. *Journal of Mathematics Education, 4* (2), 1-16

Lo, J. y Luo, F. (2012). Prospective elemntary teacher´s knowledge of fraction division. *Journal of Mathematics Teacher Education, 15*, 481-500.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Marcelo, C. (1999). Formación *de profesores para el cambio educativo*. Barcelona: EUB.

Marcelo, C. (2008). *El profesorado principiante*. Barcelona: Octaedro.

McLeod, D.B. (1922). Research on affect in mathematics education. A reconceptualization. En D.A. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.575-596). New York, EEUU: McMillan.

Meyer, D.K. y Turner, J.C. (2002). Using instructional discourse analysis to study the scaffolding of student self-regulation. *Educational Psychologist, 37*, 5-13.

Mullens, J.E., Murnane, R.J. y Willett, J.B. (1996). The contribution of training and subject matter knowledge to teaching effectiveness: a multilevel analysis of longitudinal evidence from Belize. *Comparative Education Review, 40* (2), 139-157.

Mullins, V.S., Martin, M.O. y Foy, P. (2008). TIMSS 2007 International Mathematics Report: Findings from IEA´s Trends in International mathematics and Science study at the fourth and Eighth grades. United States: TIMSS & PIRLS international Study Center.

Nathan, M.J. y Knuth, E.J. (2003). A study of whole classroom mathematical discourse and teacher change. *Cognition and Instrucion, 21* (2), 175-207.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston VA: The Council

Nesher, P. y Teubal, E. (1975). Verbal cues as an interfering factor in verbal problem solving. *Educational Studies in Mathematics, 6,* 41-51.

Neuman, L. (2010). *Social research methods: Qualitative and quantitative approaches* (7th ed.). Upper Saddle River, NJ: Pearson.

Newton, K.J. (2008). An extensive análisis of preservice elementary teacher´s knowledge of fractions. *American Educational Research Journal, 45* (4), 1080-1110.

Nyikahadzoyi, M.R. (2015). Teachers´ knowledge of the concept of function: a theoretical framework. *International Journal of Sciences and Mathematics Education, 13* (Suppl 2), 261-283.

OECD. (1999). *Measuring student knowledge and skills. A new Framework for assessment*. Paris: OECD Publications Service.

OECD. (2005). *PISA 2003. Technical report*. Recuperado de http://www.oecd.org/edu/school/programmeforinternationalstudentassessmentpisa/35188570.pdf

OCDE. (2010). *PISA 2009. Programa para la evaluación internacional de los alumnos. Informe Español. Volumen I: Resultados y contexto.* Madrid: MECD

OCDE. (2013). *PISA 2012. Programa para la evaluación internacional de los alumnos. Informe Español. Volumen I: Resultados y contexto.* Madrid: MECD

Orrantia, J. (2003). El rol del conocimiento conceptual en la resolución de problemas aritméticos con estructura aditiva. *Infancia y aprendizaje, 26* (4), 451-468.

Orrantia, J., González, L.B. y Vicente, S. (2005). Un análisis de los problemas aritméticos en los libros de educación Primaria. *Infancia y Aprendizaje, 28,* 429-451.

Orrantia, J., Muñez, D., Vicente, S., Verschaffel, L. y Rosales, J. (2014). Processing of Situational Information in Story Problem Texts. An Analysis from On-Line Measures. *Spanish Journal of Psychology, 17* (8), 1–14.

Orrantia, J., Tarín, J. y Vicente, S. (2011). El uso de la información situacional en la resolución de problemas aritméticos. *Infancia y aprendizaje, 34* (1), 81-94.

Pajares, M.F. (1992). Teachers' beliefs and educational research: Cleaning up a messy construct. *Review of Educational Research, 62* (3), 307–332.

Palmer, D.J., Stough, L.M., Burdenski, T.K. y Gonzales, M. (2005). Identifying teacher expertise: an examination of researchers´decision making. *Educational Psychologist, 40* (1), 13-2.

Pino, J. (2013). La resolución de problemas de matemáticas y el dominio afectivo: un estudio con futuros profesores de matemáticas de secundaria. En V. Mellado, L.J. Blanco, A.B. Borrachero, y J.A Cárdenas (Eds.), *Las emociones en la enseñanza y el aprendizaje de las ciencias y las matemáticas* (pp.117-148). Badajoz, España: DEPROFE.

Planas, N. (2005). El papel del discurso en la construcción del discurso de la práctica matemática. *Cultura y Educación, 17* (1), 19-34.

Polya, G. (1945). *How to solve it.* Princeton: Princeton University Press.

Ponte, J.P. (1994). Mathematics teachers´ professional knowledge. En J.P. Ponte y J.F Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics education* (vol. 1, pp. 195-210). Lisboa: PME.

Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis.

Real Academia Española. (2014). *23.ª edición del Diccionario de la Lengua Española*. Consultado en http://www.rae.es/recursos/diccionarios/drae

Reusser, K. (1985). *From situation to equation. On formulation, understanding and solving "situation problems".* Institute of Cognitive Science. Boulder, Colorado. Technical Report No. 143.

Reusser, K. (1988). Problem solving beyond the logic of things: contextual effects on understanding and solving word problems. *Instructional Science, 17*, 309–338.

Reusser, K. (1990). From text to situation to equation: Cognitive simulation of understanding and solving mathematical word problems. En H. Mandl, E. De Corte, N. Bennett & H. F. Friedrich (Eds.), *Learning and Instruction* (Vol. 2, pp. 477-498). Oxford: Pergamon

Riley, M.S. y Greeno, J.G. (1988). Developmental analysis of understanding language about quantities of solving problems. *Cognition & Instruction, 5* (1), 49-101.

Riley, N.S., Greeno, J. y Heller, J.I. (1983). Development of children's problem solving ability in aritmetic. En H.P. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking* (pp. 153-196). Nueva York: Academic Press.

Rochelle, J. (2000). Choosing and usisng video equipment for data collection. En R. Lesh y A.E. Kelly (Eds.), Handbook of research desing in mathematics and science education (pp. 709-729). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Rosales, J., Orrantia, J., Vicente, S. y Chamoso, J.M. (2008a). La resolución de problemas aritméticos en el aula. ¿Qué hacen los profesores cuando trabajan conjuntamente con sus alumnos? *Cultura y educación*, *20* (4), 423-439.

Rosales, J., Orrantia, J., Vicente, S. y Chamoso, J.M. (2008b). Studying mathematics problem-solving classrooms. A comparision between the discourse of in-service teachers ans student teachers. *European Journal of Psychology of Education, 23* (3), 275-294.

Rosales, J., Vicente, S., Chamoso, J.M., Muñez, D. y Orrantia, J. (2012). Teacher-student interaction in joint word problem solving. The role of situational and mathematical knowledge in mainstream classrooms. *Teaching and teacher education, 28* (8), 1185-1195.

Rowland, T., Huckstep, P. y Thwaites, A. (2005). Elementary teachers´ mathematics subject knowledge: the knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of mathematics teacher education, 8*, 255-281.

Rowland, T., Turner, F., Thwaites, A. y Huckstep, P. (2009). Developing Primary Mathematics Teaching. Reflecting on Practice with the Knowledge Quartet. SAGE Publications.

Sánchez, E., García, J.R., De Sixte, R., Castellano, N. y Rosales, J. (2008). El análisis de la práctica educativa y las propuestas instruccionales: integración y enriquecimiento mutuo. *Infancia y Aprendizaje, 31* (2), 233-258.

Sánchez, E., García, J.R. y Rosales, J. (2010). *La lectura en el aula. Qué se hace, qué se debe hacer y qué se puede hacer.* Barcelona: Graó.

Sánchez, R. y Vicente, S. (En prensa). Modelos y procesos de resolución de problemas aritméticos verbales propuestos por los libros de texto de matemáticas españoles. *Cultura y Educación*.

Schechtman, N., Roschelle, J., Haertel, G. y Knudsen, J. (2010). Investigating links from teacher knowledge, to classroom practice, to student learning in the instructional system of the middle-school mathematics classroom. *Cognition and Instruction, 28* (3), 317-359.

Schilling, S.G., Blunk, M. y Hill, H.C. (2007). Test Validation and the MKT Measures: Generalizations and Conclusions. *Measurement: Interdisciplinary Research and Perspectives (5)*, 2-3, 118-127.

Schoenfeld, A.H. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press.

Shulman, L.S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15* (2), 4-14.

Shulman, L.S. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review, 57* (1), 1-22.

Sleep, L. y Eskelson, S.L. (2012). MKT and curriculum materials are only part of the story: Insights from a lesson on fractions. *Journal of Curriculum Studies, 44* (4), 537-558.

Snyder, J.L. (2000). An investigation of the knowledge structures of experts, intermediates and novices in physics, *International Journal of Science Education, 22* (9), 979-992.

Staub, F.C. y Reusser, K. (1995). The role of presentational structures in understanding and solving mathematical word problems. En C.A. Weaver III, S. Mannes y C.R. Fletcher (Eds.), *Discourse Comprehension: Essays in honor of Walter Kintsch* (pp. 285-305). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Stern, E. y Lehrndorfer, A. (1992). The role of situational context in solving word-problems. *Cognitive Development*, *7,* 259-268.

Strahan, D.B. (1989). How experienced and novice teachers frame their view of instruction: an analysis of semantic ordered tres. *Teaching and teacher education, 5*, 53-67.

Sullivan, P., Askew, M., Cheeseman, J., Clarke, D., Mornane, A., Roche, A. y Walker, N. (2015). Supporting teachers in structuring mathematics lessons involving challenging tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education, 18* (2), 123-140.

Thompson, A. (1992). Teachers´ Beliefs and Conceptions: A Synthesis of the Research. En D, Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* Nueva York: McMillan.

Turner, J.C., Midgley, C., Meyer, D.K., Gheen, M., Anderman, E.M., Kang, Y. y Patrick, H. (2002). The classroom environment and student´s reports of avoidance strategies in mathematics: a multimethod study. *Journal of Educational Psychology, 94* (1), 88-106.

Van Dijk, T.A. y Kintsch, W. (1983). *Strategies of discourse comprehension.* New York: Academic Press.

Van Dooren, W., Verschaffel, L., Greer, B., y De Bock, D. (2006). Modelling for life: Developing adaptive expertise in mathematical modelling from an early age. En L. Verschaffel, F. Dochy, M. Boekaerts, y S. Vosniadou, (Eds.), *Instructional psychology: Past, present, and future trends* (pp. 91–109). Oxford, UK: Elsevier.

Van Hiele, P.M. (1986). *Structure and Insight. A theory of mathematics education*. Orlando: Academic Press

Verschaffel, L., De Corte, E. y Lassure, S. (1994). Realistic considerations in matyhematical modelling of school word problems. En W. Schnotz, S. Vosniadou y M. Carretero, (Eds), *New perspectivs on conceptual change* (pp.175-189). Oxford: Elsevier.

Verschaffel, L., De Corte, E. y Pauwels, A. (1992). Solving compare problems: an eye movement test of Lewis and Mayer´s consistency hypothesis. *Journal of Educational Psychology, 84*, 85-94.

Verschaffel, L., Greer, B. y De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. The Netherlands: Swets & Zeitlinger Publishers.

Vicente, S. (2006). Conocimiento matemático y situacional y su influencia en la resolución de situaciones problemáticas de estructura aditiva. Tesis Doctoral no publicada. Universidad de Salamanca.

Vicente, S., Manchado, E. y Verschaffel, L. (en evaluación). Math word problem solving and promotion of reasoning. Analysis of Spanish textbooks.

Vicente, S. y Orrantia, J. (2007). Resolución de problemas y comprensión situacional. *Cultura y Educación, 19* (1), 61-85.

Vicente, S., Orrantia, J. y Verschaffel, L. (2007). Influence of situational and conceptual rewording on word problem solving. *British Journal of Educational Psychology, 77*, 829-840.

Vicente, S., Orrantia, J. y Verschaffel, L. (2008a). Influence of situational and mathematical information on situationally difficult word problema. *Studia Psychologica, 50*, 337-356.

Vicente, S., Orrantia, J. y Verschaffel, L. (2008b). Influencia del conocimiento matemático y situacional en la resolución de problemas aritméticos verbales: ayudas textuales y gráficas. *Infancia y aprendizaje, 31* (4), 463-483.

Vicente, S., Rosales, J., Chamoso, J.M. y Múñez, D. (2013). Análisis de la práctica educativa en clases de matemáticas españolas de Educación Primaria: una posible explicación para el nivel de competencia de los alumnos. *Cultura y Educación, 25* (4), 535-548.

Webb, N. (2009). The teacher's role in promoting collaborative dialogue in the classroom. *British Journal of Educational Psychology, 79*, 1–28.

Wells, G. (1999). *Dialogic inquiry: Toward a sociocultural practice and theory of education.* Cambridge: CUP.

Wineburg, S. (1991). Historical problem solving: a study of the cognitive processes used in the evaluation of documentary and pictorical evidence. *Journal of educational Psychology, 83* (1), 73-87.

“Ítaca te dio el bello viaje.
Sin ella no hubieras salido al camino.
Otras cosas no tiene ya que darte.

Y si pobre la encuentras, Ítaca no te ha engañado.
Sabio así como llegaste a ser con tanta experiencia,
ya habrás comprendido qué significan las Ítacas”

(Kavafis, X)

ANEXOS

ANEXO I: Cuestionario

VNiVERSiDAD
D SALAMANCA

INSTRUCCIONES

- Este cuadernillo consta de tres partes.
    1. Dos problemas de matemáticas para alumnos de los últimos cursos de Primaria o los primeros de Secundaria.
    2. Dos procesos de resolución propuestos por los libros como material para enseñar a los niños a resolver problemas de matemáticas.
    3. En la tercera se muestra la transcripción de cómo dos profesores diferentes resuelven un problema de matemáticas con sus alumnos.
- En cada una de esas partes hay varias preguntas sobre las que debes pensar un ratito para buscar una respuesta.

MUCHAS GRACIAS POR TU COLABORACIÓN

Titulación:

Años de experiencia:

Formación específica en resolución de problemas: □ No □ Sí. ¿Cuál?

Brevemente, ¿cuál es la importancia de la resolución de problemas en tus clases de matemáticas?:

....

....

PARTE 1: PROBLEMAS

Problema 1

Un pastor tenía 57 ovejas. Compró algunas ovejas más. Los lobos se han comido 11 ovejas y al pastor le han quedado 96. ¿Cuántas ovejas compró el pastor?

Problema 2

Un pastor tenía un rebaño con 57 ovejas. El pastor quería aumentar el tamaño del rebaño porque este año había buenos pastos. Para ello se fue a una feria de ganado, decidió comprar algunas ovejas y las juntó con las que ya tenía. Una tarde el pastor vio una manada de lobos por la zona, los lobos estaban hambrientos y entonces, del total de ovejas del rebaño se comieron 11 y ahora el rebaño tiene 96. ¿Cuántas ovejas compró el pastor en la feria?

PREGUNTAS:

1. ¿Cuál de los dos problemas resultaría más difícil de resolver?, ¿por qué?

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

2. ¿Le falta o le sobra algo a cada uno de los problemas para que se puedan resolver más fácilmente?, ¿Toda la información que aparece en los enunciados sería útil y relevante para su resolución? Explícalo.

   ....

   ....

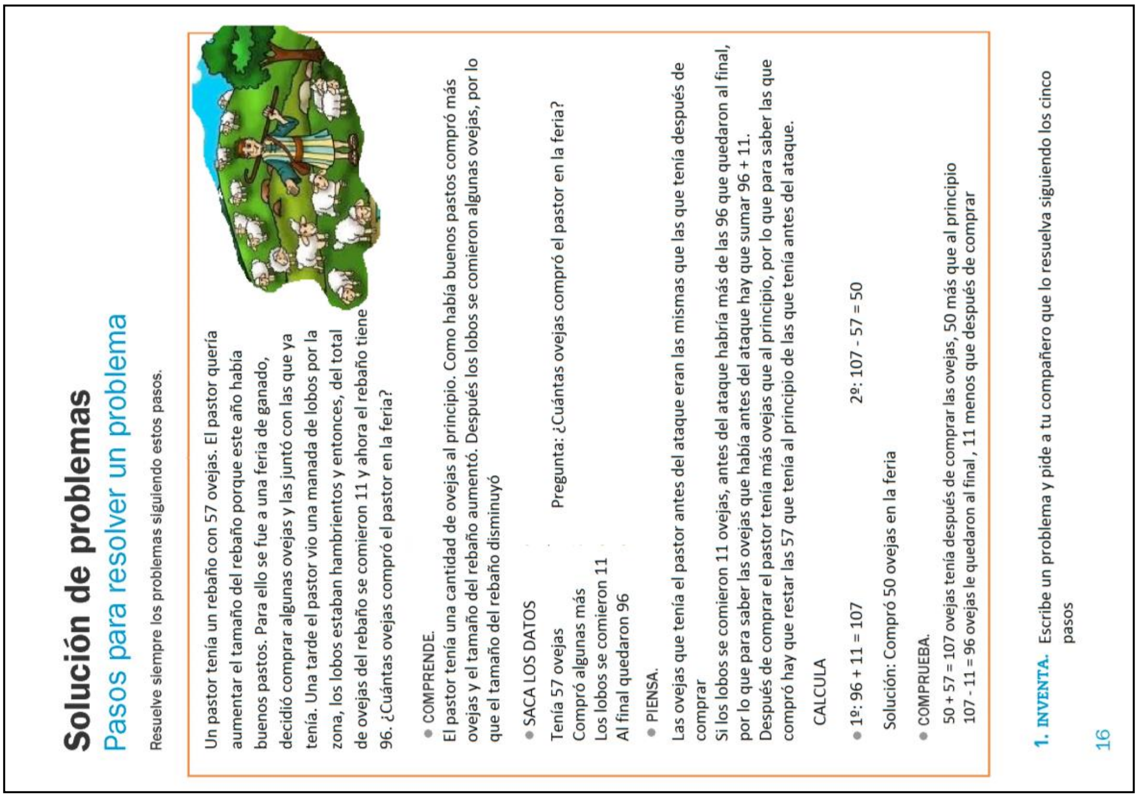
   ....

   ....

   ....

   ....

PARTE 2: RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS



Solución de problemas

Pasos para resolver un problema

Resuelve siempre los problemas siguiendo estos pasos.

Un pastor tenía un rebaño con 57 ovejas. El pastor quería aumentar el tamaño del rebaño porque este año había buenos pastos. Para ello se fue a una feria de ganado, decidió comprar algunas ovejas y las juntó con las que ya tenía. Una tarde el pastor vio una manada de lobos por la zona, los lobos estaban hambrientos y entonces, del total de ovejas del rebaño se comieron 11 y ahora el rebaño tiene 96. ¿Cuántas ovejas compró el pastor en la feria?

- COMPRENDE.

El pastor tenía una cantidad de ovejas al principio. Como había buenos pastos compró más ovejas y el tamaño del rebaño aumentó. Después los lobos se comieron algunas ovejas, por lo que el tamaño del rebaño disminuyó

- SACA LOS DATOS

Tenía 57 ovejas
Compró algunas más
Los lobos se comieron 11
Al final quedaron 96

Pregunta: ¿Cuántas ovejas compró el pastor en la feria?

- PIENSA.

Las ovejas que tenía el pastor antes del ataque eran las mismas que las que tenía después de comprar
Si los lobos se comieron 11 ovejas, antes del ataque habría más de las 96 que quedaron al final, por lo que para saber las ovejas que había antes del ataque hay que sumar 96 + 11.
Después de comprar el pastor tenía más ovejas que al principio, por lo que para saber las que compró hay que restar las 57 que tenía al principio de las que tenía antes del ataque.

CALCULA

- 1º: 96 + 11 = 107   2º: 107 - 57 = 50

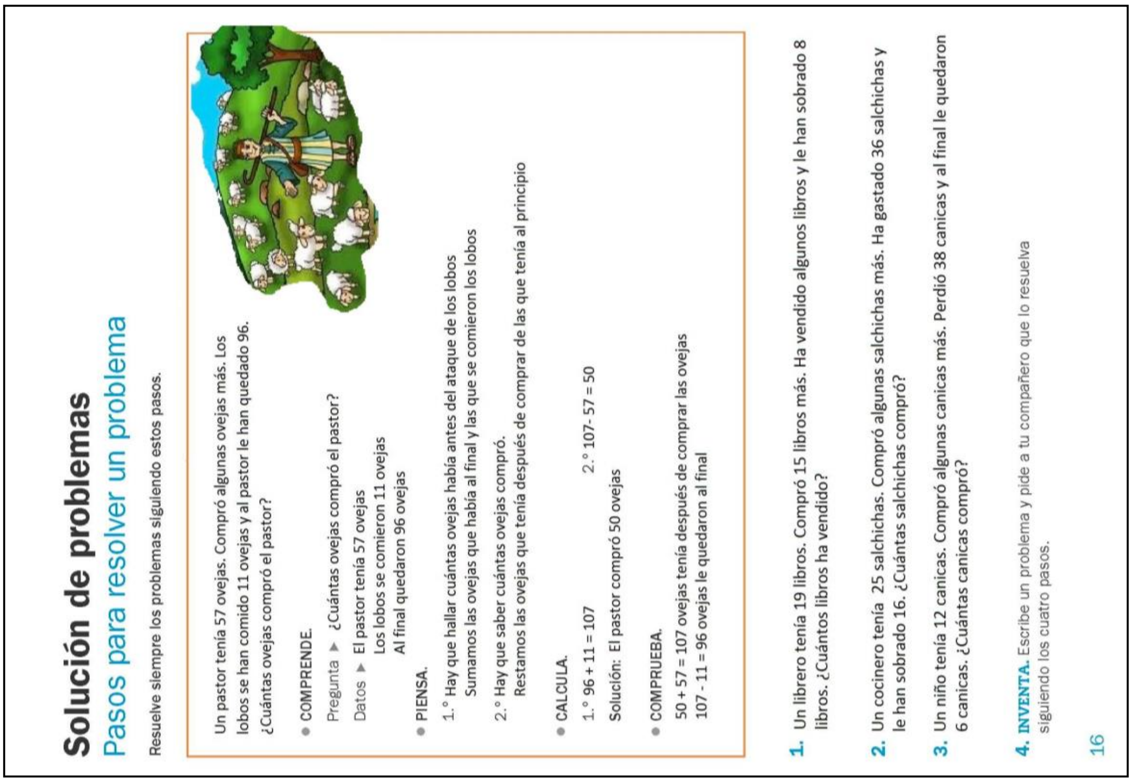
Solución: Compró 50 ovejas en la feria

- COMPRUEBA.

50 + 57 = 107 ovejas tenía después de comprar las ovejas, 50 más que al principio
107 - 11 = 96 ovejas le quedaron al final , 11 menos que después de comprar

1. **INVENTA.** Escribe un problema y pide a tu compañero que lo resuelva siguiendo los cinco pasos

16



Solución de problemas

Pasos para resolver un problema

Resuelve siempre los problemas siguiendo estos pasos.

Un pastor tenía 57 ovejas. Compró algunas ovejas más. Los lobos se han comido 11 ovejas y al pastor le han quedado 96. ¿Cuántas ovejas compró el pastor?

- COMPRENDE.

Pregunta ▶ ¿Cuántas ovejas compró el pastor?
Datos ▶ El pastor tenía 57 ovejas
Los lobos se comieron 11 ovejas
Al final quedaron 96 ovejas

- PIENSA.

1.° Hay que hallar cuántas ovejas había antes del ataque de los lobos
Sumamos las ovejas que había al final y las que se comieron los lobos

2.° Hay que saber cuántas ovejas compró.
Restamos las ovejas que tenía después de comprar de las que tenía al principio

- CALCULA.

1.° 96 + 11 = 107   2.° 107- 57 = 50

Solución: El pastor compró 50 ovejas

- COMPRUEBA.

50 + 57 = 107 ovejas tenía después de comprar las ovejas
107 - 11 = 96 ovejas le quedaron al final

1. Un librero tenía 19 libros. Compró 15 libros más. Ha vendido algunos libros y le han sobrado 8 libros. ¿Cuántos libros ha vendido?
2. Un cocinero tenía 25 salchichas. Compró algunas salchichas más. Ha gastado 36 salchichas y le han sobrado 16. ¿Cuántas salchichas compró?
3. Un niño tenía 12 canicas. Compró algunas canicas más. Perdió 38 canicas y al final le quedaron 6 canicas. ¿Cuántas canicas compró?
4. **INVENTA.** Escribe un problema y pide a tu compañero que lo resuelva siguiendo los cuatro pasos.

16

PREGUNTAS:

1. ¿Cuál de los dos modos de explicar cómo resolver un problema es mejor para aprender a resolver problemas?, ¿por qué?

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

2. ¿Le falta o le sobra algo a cada uno de los dos modos de resolver problemas? Justifícalo.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

PARTE 3: PROCESO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Interacción 1

P: Bueno, a ver, abrimos el libro por la página 16 y vamos a hacer algunos de los problemas de matemáticas que tenemos ahí. A ver, Juan, lee.
A: "Un pastor tenía 57 ovejas. Compró algunas ovejas más. Los lobos se han comido 11 ovejas y al pastor le han quedado 96. ¿Cuántas ovejas compró el pastor?"
P: Vale, vamos a ir sacando los datos, venga, vamos a leerlo otra vez poco a poco. Venga, Juan.
A: "Un pastor tenía 57 ovejas"
P: Vale, ¿cuál es el primer dato?
A: 57 ovejas
P: 57 ovejas tenía al principio, bien. Seguimos
A: A ver…. "Compró algunas ovejas más. Los lobos se han comido 11 ovejas"
P: Para. ¿Hay algún dato más ahí?
A: Sí, que los lobos han llegado y se han comido 11 ovejas
P: Que los lobos se han comido 11 ovejas, bien. Seguimos
A: "los lobos se han comido 11 ovejas y al pastor le han quedado 96"
P: ¿Qué otro dato tenemos ahí?
A: Que al final le han quedado 96 ovejas
P: Que le han quedado 96 ovejas, correcto. ¿Y cuál es la pregunta del problema?
A: Que cuántas ovejas compró el pastor en la feria
P: Que cuántas ovejas compró en la feria, bien. ¿Cómo podemos averiguar cuántas ovejas compró en la feria? ¿Qué tenemos que hacer para saberlo?
A: Pues tendremos que sumar las 57 que tenía al principio más las que se comieron los lobos…
P: ¿Estás seguro? ¿Y eso qué nos daría?
A: Eeee,… las ovejas… que…
P: A ver, Pedro, que parece que Juan no se ha enterado bien…
A1: Pues habría que sumar las 11 que se comieron los lobos y las 96 que tenía al final
P: Muy bien, suma
A1: […] 107 ovejas
P: bien 107 ovejas que tenía ¿cuándo?
A1: 107 ovejas que tenía antes de que llegaran los lobos
P: Antes de que llegaran los lobos, muy bien. ¿Te has enterado, Juan?
A: Sí…
P: Bien, y ahora ¿qué hacemos para saber las que compró en la feria, si sabemos las que tenía antes y después de comprar?
A1: tenemos que restar las que tenía al principio de las que tenía después de comprar
P: muy bien, hay que restar las 107 que tenía después de comprar menos las 57 que tenía al principio. Venga, resta
A1: […] 50
P: ¿50 qué? ¿Bocadillos de chorizo?
A1: 50 ovejas compró en la feria
P: Ahhhhh, pues venga, ponlo ahí, 50 ovejas compró en la feria. ¿Lo hemos entendido todos?
A: Siiiiiiiiiiii
P: Pues venga, los tres siguientes los hacéis solitos.

Interacción 2

P: Bueno, vamos a hacer un problema de matemáticas. ¿Os acordáis para qué dijimos que sirven los problemas de matemáticas?
A: Para ver cómo podemos utilizar las operaciones de matemáticas para buscar soluciones a problemas que nos podemos encontrar fuera de clase.
P: claro, porque hacer muchas sumas y restas está bien, pero para algo más nos tendrán que servir, ¿no? Bueno. Pues vamos a hacer éste del pastor y las ovejas. Recordad cómo tenemos que hacerlo. Primero…
A: Leemos el enunciado en silencio un par de veces
P: ¿Luego?
A: Entendemos la situación
P: ¿después?
A: Sacamos la información que sabemos y la que no sabemos.
P: Y una vez que hemos hecho eso, ¿Qué hacemos?
A: Razonamos para ver si las cantidades que buscamos son mayores o menores que las que tenemos, y elegimos la operación.
P: ¿y por último?
A: Hacemos las cuentas y comprobamos el resultado a ver si encaja en el problema.
Muy bien, pues venga, empezad a leer y cuando hayáis acabado vamos a la comprensión de la situación.
[…]
P: ¿Ya? Venga, Luis, tú mismo. ¿Qué situación plantea el problema?
A: Que un pastor tenía ovejas, y este año había llovido y había mucha hierba y debió pensar que podía comprar más ovejas para hacer más lana y leche, así que compró más ovejas. Pero cuando ya tenía el rebaño que quería, los lobos se comieron unas pocas porque tenían hambre y el pastor volvió a tener menos ovejas.
P: Muy bien. De esa historia tenemos algunas cosas que conocemos y otras no, así que vamos a irlos sacando poco a poco. Ángel, ¿qué es lo primero que sabemos?
A: Que el profesor tenía 57 ovejas
P: Ok, lo vamos apuntando en la pizarra, tenía 57 ovejas. Sigue
A: Que compró más ovejas, pero no sabemos cuántas.
P: Compró ovejas, sigue.
A: Que después de comprar ya tenía el rebaño que quería.
P: Muy importante, después de comprar ya tenía el rebaño que necesitaba, pero ¿sabemos cuántas ovejas tenía ese rebaño?
A: No
P: ¿y por qué no lo sabemos?
A: Porque el problema no nos lo dice y porque no sabemos cuántas compró.
P: Muy bien, no podemos saberlo de momento. Seguimos
A: También sabemos que los lobos se comieron 11 ovejas
P: Se comieron 11, muy bien, ¿qué mas?
A: Que al profesor le quedaron 96 ovejas.
P: Y al final le quedaron 96 ovejas. ¿Y cuál es la pregunta del problema?
A: Que cuántas ovejas compró en la feria.
P: ¿Cuántas ovejas compró en la feria? Muy bien. Recapitulamos. Andrea, ¿Qué sabemos del problema?
A: Que el pastor tenía 57 ovejas al principio, que compró unas pocas, no sabemos cuántas, y que juntó el rebaño que quería, que tampoco sabemos cuántas ovejas tenía.

Sabemos que de ese rebaño que juntó los lobos se comieron 11 ovejas y que al final se quedó con 96.
P: Muy bien. ¿Y qué es lo que no sabemos del problema?
A: las ovejas que compró y las ovejas que tenía el rebaño después de comprar.
P: ¿Y cuál es la pregunta del problema?
A: Que cuántas ovejas compró.
P: Ok. O sea que tenemos dos datos que no sabemos. Pensad un poco cuál de los dos datos que no sabemos es el primero que tenemos que averiguar.
A: Yo creo que lo primero es saber cuántas ovejas había después de comprar y antes de que llegaran los lobos.
P: ¿Por qué?
A: Porque podemos saberlo si sabemos las que se comieron los lobos y las que quedaron al final.
P: Bien, vamos a intentarlo. A ver, el pastor tenía unas cuantas ovejas, no sabemos cuántas, los lobos se comieron 11 y al final quedaron 96. Y ahora pensamos: si el lobo se comió 11 ovejas, antes de que se las comiera, ¿habría más o menos de 96?
A: Habría más
P: Y si había más ovejas, ¿Qué tendremos que hacer con 11 y con 96?
A: Sumarlo.
P: Pues venga, suma
A: […] 107 ovejas tenía.
P: Muy bien. ¿Tiene sentido? ¿Si tenía 107, pudo el lobo comerse 11 y que quedaran 96?
A: Sí, porque al final le quedan menos que al principio.
P: Muy bien. Y ahora vamos a por la pregunta del problema. Fijaos que ahora tenemos un dato más, las 107 ovejas que tenía después de comprar y antes de que llegaran los lobos. ¿Qué sabemos para resolver la pregunta?
A: Que tenía 57 al principio y que después de comprar tenía 107.
P: bien, pues la pregunta que hay que hacerse es si el pastor pudo comprar más de 107 ovejas. ¿Pudo comprar más de 107 ovejas?
A: Hala, no, ¿Cómo iba a comprar más de las que tenía al final?
P: Claro, tuvo que comprar menos de 107 ovejas. Y para saber cuántas ovejas compró para llegar a 107 a partir de las 57 que ya tenía, ¿qué tendremos que hacer?
A: Restar las 57 que ya tenía de las 107 que juntó después de comprar.
P: Pues hale, resta.
A: […] 50. Compró 50 ovejas.
P: Ahora vamos a comprobar que las respuestas que hemos sacado encajan en el problema. A ver, Sara, cuéntanos la historia completa, con las soluciones que hemos sacado.
A: Pues había un pastor que tenía 57 ovejas y quería más para ganar más dinero con ellas porque había hierba. Entonces compró 50 ovejas que con las 57 que tenía hizo 107.
P: Hasta ahí vamos bien, ¿no?
A: Síiiiii!
P: Sara, sigue.
A: entonces llegaron los lobos y de las 107 que juntó se comieron 11 y le quedaron 96, que son 11 menos de las que tenía.
P: ¿Tiene sentido la historia?
A: Síiiiiiiiiiii
P: ¿Nos encajan los datos?
A: Síiiiiiiiiiiii

P: Muy bien, pues podemos dar por resuelto el problema. Los tres siguientes hacedlos vosotros siguiendo los pasos de siempre: entender la situación, sacar la información que sabemos y la que no sabemos, razonar qué hay que hacer y elegir la operación, calcular y comprobar toda la historia con los datos nuevos que hemos sacado.

PREGUNTAS:

1. ¿Cuál de los dos modos de explicar cómo resolver un problema es mejor para resolver problemas?, ¿por qué?

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

2. ¿Le falta o le sobra algo a cada uno de los dos modos de explicar cómo resolver problemas? Justifícalo.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

ANEXO II: Problemas

En este documento encontrará cuatro problemas, los cuales debe resolver con sus alumnos mientras se graba en audio. Es importante que NO los resuelva de manera seguida.

MUCHAS GRACIAS POR SU COLABORACIÓN

Curso en el que va a resolver los problemas:

Brevemente, ¿qué papel tiene el libro de texto en sus clases de matemáticas?:

____

____

____

Problema 1

Un pastor tenía un rebaño con 57 ovejas. El pastor quería aumentar el tamaño del rebaño porque este año había buenos pastos. Para ello se fue a una feria de ganado, decidió comprar algunas ovejas y las juntó con las que ya tenía. Una tarde el pastor vio una manada de lobos por la zona, los lobos estaban hambrientos y entonces, del total de ovejas del rebaño se comieron 11 y ahora el rebaño tiene 96. ¿Cuántas ovejas compró el pastor en la feria?

Problema 2

Un ciclista debe recorrer 148,6 km. Después de recorrer 758 hm, ¿cuántos metros le falta por recorrer?

Problema 3

Un bodeguero quiere cambiar sus cubas de vino porque este año ha comprado más uvas. En las cubas de madera que ya tiene entran 158 litros, pero en estas cubas entran 26 litros menos que en las nuevas cubas metálicas que quiere comprar. ¿Cuántos litros de vino entrarán en las nuevas cubas metálicas?

Problema 4

Un hospital tiene 200 habitaciones, el 60% de las habitaciones tienen 2 camas y el resto una. ¿De cuántas camas dispone el hospital?

ANEXO III: Interacciones

1.- CONOCIMIENTO GENUINO

1.1.- Profesor 1

a) Problema reescrito: pastor

Ciclo	*Transcripción*	*Contenidos públicos*	*Categoría: subcategoría*
Ciclo 1	P: Primer problema, lo lee, por ejemplo…. A: Yoo P: Loreto A: Jooo A: Un pastor, tenía un rebaño con 57 ovejas. El pastor quería aumentar el tamaño del rebaño porque este año había buenos pastos. Para ello, se fue a una feria de ganado, decidió comprar algunas ovejas y las juntó con las que tenía. Una tarde el pastor vino, vio una manada de lobos por la zona; los lobos estaban hambrientos y entonces, del total de ovejas del rebaño se comieron 11 y ahora el rebaño tiene 96. ¿Cuántas ovejas compró el pastor en la feria?		LECTURA
	P: Di de qué va el problema, Rubén. A: De un pastor que tiene 57 ovejas. P: Un pastor que tiene 57 ovejas	El problema es de un pastor que tiene 57 ovejas	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 2	P: ¿Qué le ocurre al pastor, Vanesa? A: Quería aumentar el tamaño… del rebaño P: Quería tener un rebaño más grande. Bien.	El pastor quiere aumentar el rebaño	SELECCIÓN: Situacional: relevante
Ciclo 3	P: ¿Qué hace para ello? Eh, Manu A: Pues va a la feria y compra varias ovejas.	El pastor va a la feria y compra varias ovejas	SELECCIÓN: situacional relevante
Ciclo 4	P: Y ¿sabes cuántas compra?, ¿o no? A: No, pero se puede saber… P: Se puede saber porque es lo que nos pregunta	No sabemos cuántas compra porque es la pregunta	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 5	P: ¿Qué ocurre?, ¿qué le ocurre mientras tanto?, Samuel. A: Que… unos lobos…. Se comen 11 ovejas. P: Se comen 11 ovejas.	Unos lobos se comen 11 ovejas	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 6	P: ¿Y entonces? A: Le quedan 96.	Le quedan 96	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 7	P: ¿Qué datos tengo que subrayar? A: Pues, 57 ovejas. P: hay 57 ovejas, bien	Se subraya: hay 57 ovejas	SELECCIÓN: matemática

Ciclo 8	P: Continúa. A: Y… menos once que se los comieron los lobos, ¿no? P: Y entonces, se comieron 11, subrayo. Se comieron 11.	Se subraya: 11 se comieron los lobos	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 9	P: ¿Qué más subrayo? A: Eh, le quedan 96. P: Ahora, ¿verdad? Pongo: “ahora 96”. Bien	Se subraya: quedan 96	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 10	P: ¿La pregunta: cuántas ovejas… la vamos a subrayar también? A: Sí, porque es un dato.	La pregunta: cuántas ovejas…también se subraya porque es un dato	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 11	P: Samuel, ¿cuál va a ser la pregunta completa, entonces? A: ¿Cuantas ovejas compró el pastor en la feria? P: Cuantas ovejas, no tiene, ¿si no? A: Compró P: Compró, ¿de acuerdo? Compró.	La pregunta del problema es: cuántas ovejas compró el pastor en la feria	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 12	P: Adrián, échale una mano. ¿Por dónde empezarías tú? A: No lo sé, eh…, yo…. eh…, yo sumaría 96 más 11 P: ¿Sumarías 96 +11?	Se sumaría 96+11	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 13	P: Porque de esa manera, ¿qué sabrías? A: Los…los…eh….los, las ovejas que tenía. P: Las ovejas que tenía. A: Pero si ya sabemos las ovejas que tenía. A: Es qué, tenía 57. P: las que tenía antes del ataque de los lobos	Así se sabría las ovejas que tenía antes del ataque de los lobos	RAZONAMIENTO: matemático
Ciclo 14	P: Ha empezado Adrián, y él ha empezado de buena manera. Tiene 96, se le han comido 11, ¿verdad? Por lo tanto, antes de que se le comieran… A: Tendría más. P: Tendría más.	Tiene 96 ovejas y se ha comido 11, luego antes tenían más ovejas	RAZONAMIENTO: matemático
Ciclo 15	P: ¿Cuántas? A: 107 ovejas P: 107 ovejas	Antes tenía 107	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 16	P: explícame, ¿qué ovejas? A: Antes de que se las comieran los lobos. P: antes del lobo, ¿verdad? Ovejas tenía antes del lobo. Esto es importante ¡eh! A: Esto lo puede hacer hasta un bebe P: Ovejas tenía antes del lobo. Bueno, ... A: …de que vinieran… P: De que atacara el lobo, ¡claro! A: Ah! Vale	Son las ovejas que tenía antes de que atacara el lobo	RAZONAMIENTO: matemático
Ciclo 17	P: Y entonces ¿la pregunta es…? A: ¿cuántas ovejas compró el pastor en la feria?	La pregunta es cuántas ovejas compró el pastor en la feria	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 18	P: A ver, explícamelo, Iván. A: ¿el qué? P: ¿Por qué estás haciendo eso? A: Pues porque, si tenía ciento… Si tenía 57 ovejas y ahora tiene 107; para saber las que he comprado tengo que restar. P: Muy bien	Si tenía 57 y ahora tiene 107, para calcular las que ha comprado hay que restar	RAZONAMIENTO: matemático

Ciclo 19	P: Es muy fácil, ¿no? Pues venga, haz la resta y… ahora sí que pondrás cincuenta… A: 50 P: ovejas.	La resta da 50 ovejas	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 20	P: Iván, ¿tiene sentido?, ¿es posible?, ¿es un número que no se sale ni por arriba ni por abajo? A: Siii	El resultado tiene sentido porque el número no sale ni por arriba ni por abajo	RAZONAMIENTO: matemático
Ciclo 21	P: A Noelia le ha salido también 50. ¿Cómo lo ha hecho Noelia? A: Pues, he hecho 57 menos…, o sea, 96 menos 57, eh… 96 me quedan, menos 57 que tenía antes me da 39.	Otra forma de hacerlo es 96 que quedan menos 57 que tenía y da 39.	RAZONAMIENTO: matemático
Ciclo 22	P: El resultado está bien, pero tienes que saber por qué lo haces. Tú has cogido las 96 que le quedan y le has quitado las 57 que tenía. A: 39, tenían que haber, habiéndose comido 11. P: Entonces ahora… A: 39, que me daba antes, más 11 que se comió el lobo. Me da 50. A: ¡Yo lo he hecho de otra forma! P: 50, muy Bien.	El resultado está bien, pero a esas 39 hay que sumarle 11 que se comió el lobo, y da 50 ovejas	RAZONAMIENTO: matemático
Ciclo 23	P: A ver de qué otra forma, Nicolás. A: 57 menos 11, que me da 46 y 96 menos 46 que da 50. P: Bien.	Otra forma es 57 menos 11 da 46; y 96 menos 46 da 50	RAZONAMIENTO: matemático
Ciclo 24	P: ese razonamiento está muy bien, pero quiero que me lo expliques con palabras A: pues…las que tenía al principio menos las que se comieron los lobos. Y…las que tiene ahora menos las que tenía… ¡me estoy liando! P: vas bien, continua A: las que tiene ahora menos las que le quedaron después del ataque de los lobos P: Vale	Las que tenía al principio menos las que se comieron los lobos y, las que tiene al final menos las que le quedaron antes del ataque	RAZONAMIENTO: matemático

b) Problema reescrito: bodeguero

Ciclo	*Transcripción*	*Contenidos públicos*	*Categoría: subcategoría*
Ciclo 1	P: Venga, no digo nada más. Léelo en voz alta, Pablo. A: Un bodeguero quiere renovar las cubas de vino porque este año ha comprado más uvas. En las cubas de madera que tiene caben 158 litros de vino, pero en estas cubas de madera caben 26 litros menos que en unas nuevas cubas metálicas. ¿Cuántos litros de vino entrarán en las nuevas cubas metálicas?		LECTURA
	P: ¿Has entendido lo que has leído? Vamos a ver qué cosas no entendemos. Vanesa, ¿qué son cubas metálicas?, ¿Tú sabes lo que es un tonel? A: Sí A: pues lo mismo P: las bodegas tienen tonel grandísimos de vino.	Una cuba es lo mismo que un tonel En las bodegas hay toneles muy grandes de vino	SELECCIÓN: situacional irrelevante
Ciclo 2	P: ¿de cuáles tenía nuestro bodeguero?, ¿qué tipos de cubas tenía?, Clara. A: Unas de madera. P: Eso es, tenía unas cubas de madera.	el bodeguero tenía cubas de madera	SELECCIÓN: situacional irrelevante

Ciclo 3	P: Ahora ha renovado su bodega y va a cambiar las viejas cubas de madera ¿por unas cubas de? A: Metal P: De metal y hay una serie de condiciones que ahí están en el problema.	El bodeguero cambia las cubas de madera por las de metal	SELECCIÓN: situacional irrelevante
Ciclo 4	P: pero a nuestro bodeguero le ocurre una cosa, ¿qué quiere? A: cambiar las cubas porque este año ha comprado más uvas.	El bodeguero cambia las cubas porque ha comprado más uvas	SELECCIÓN : Situacional relevante
Ciclo 5	P: pero pensemos, ¿cómo será la capacidad de las nuevas cubas?, ¿se os ocurre? A: más grandes P: ¿tendrán mayor capacidad, no?	Las nuevas cubas serán más grandes, con mayor capacidad	RAZONAMIENTO: matemático
Ciclo 6	P: Alejandro, cuéntame. A: Que a ver, que un bodeguero quiere cambiar sus cubas y en las que tienen caben 158 litros y se va a comprar unas nuevas en las que caben 26 litros más. P: ¿más o menos? A: más y menos, las dos cosas porque en las viejas caben 26 litros menos que en las nuevas y en las nuevas caben 26 litros más que en las de madera. P: Claro, en las viejas caben menos y en las nuevas caben más.	Un bodeguero cambia sus cubas de 158 litros por otras en las que caben 26 litros más En las nuevas caben 26 litros más y en las viejas 26 litros menos	RAZONAMIENTO: matemático
Ciclo 7	P: ¿Entonces?, continúa Alejandro. A: Entonces 158 que caben en las cubas viejas más 26 que caben de más, me daría… 184 litros que entrarían en las cubas nuevas	158 l que caben las viejas más 26 que caben de más en las nuevas, entrarían 184 litros en las nuevas	RAZONAMIENTO: matemático
Ciclo 8	P: Entonces me dices que has sumado 158+26. ¿Cuánto te ha dado? A: 184 P: 184	158+26=184	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 9	P: A ver… a quién no le ha dado que me… A: Es que yo pensaba que era menos entonces…resté. A: yo también he restado 158 menos… P: A ver sumar o restar a mí me importa poco, ¿por qué has restado o a has sumado? A: He restado porque cabían menos en las de madera. P: ¿Ahora ya? A: Sí ahora ya lo he entendido	Se ha restado porque aparece la palabra “menos” en el enunciado	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 10	P: Caben 158 litros de vino pero en estas cubas caben 26 menos, si caben 26 menos, ¿serán más pequeñas o más grandes? A: Más grandes. P: por lo tanto, para saber lo que cabe en las grandes cogéis las pequeñas y le sumáis la diferencia. ¿Fácil, no? A: más o menos.	Las nuevas cubas son más grandes Para saber lo que cabe en las cubas grandes se suma a las pequeñas la diferencia	RAZONAMIENTO: matemático

c) Problema estándar: hospital

Ciclo	*Transcripción*	*Contenidos públicos*	*Categoría: subcategoría*
Ciclo 1	P: léelo, Noelia. En un hospital tiene 200 habitaciones, el 60 % de las habitaciones tienen 2 camas y el resto tiene una. ¿De cuántas camas dispone el hospital? P: Venga, Mario, ¿qué entiendes ahí? A: Pues que en un hospital tiene 200 habitaciones y el 60% tiene dos camas y el resto tiene 1. Que ¿cuántas camas tiene el hospital?	En un hospital de 200 habitaciones el 60% son dobles y el resto individuales	LECTURA SELECCIÓN: matemática
Ciclo 2	P: el primer dato A: 200 habitaciones P: Sí	Hay 200 habitaciones	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 3	P: Sigue. A: Después, el 60 % dos camas. P: 60% dobles. A: y el resto solo una. P: sencillas, individuales, singles. Bien	60% dobles y el resto individuales	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 4	P: entonces, ¿la pregunta es? A: que cuántas camas tiene P: cuántas camas, número de camas. En silencio vais pensándolo.	La pregunta es cuántas camas hay	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 5	P: Atended, todos. ¿Qué es lo primero que hay que hacer? A: Saber cuántas habitaciones son dobles Fernando porque hay dos tipos P: Vale, muy buen criterio porque el problema empieza diciendo que el 60% de las habitaciones son dobles	Primero hay que saber cuántas habitaciones son dobles porque hay de dos tipos	RAZONAMIENTO: matemático
Ciclo 6	P: Entonces hacemos el 60% de 200. (60*200)/100 y nos da cuánto, 120, ¿no? A: siiiiii P: 120 habitaciones son dobles. Vale.	(60*200)/100=120 habitaciones dobles	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 7	P: ¿Por dónde seguimos? A: pues como ya sabemos las dobles, nos faltan las habitaciones individuales para saber cuántas hay de cada tipo. P: Vale	Sabiendo las dobles hay que saber cuántas hay individuales para saber las de cada tipo	RAZONAMIENTO: matemático
Ciclo 8	P: y ¿cómo lo sabemos si nos dice el resto? A: pues la diferencia entre 100 y 60 que es 40, es el resto, o sea las de una cama. P: muy bien, el 40% es el resto	El resto, las de una cama, es el 40% porque es la diferencia entre 100 y 60	RAZONAMIENTO: matemático
Ciclo 9	P: hacemos lo mismo que antes, ¿no?, el 40 % de 200 para ver cuántas son individuales. (40*200)/100 igual a 80 habitaciones son individuales.	(40*200)/100=80 habitaciones individuales	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 10	P: ¿Con esto qué sabemos ya? A: Pues el número de habitaciones de cada tipo. P: muy bien, ahora ya sabemos del total de habitaciones cuántas son de cada tipo.	Del total de habitaciones se sabe el número de cada tipo	RAZONAMIENTO: matemático

Ciclo 11	P: La pregunta léela, Rober. A: vaya por dios, qué suerte. ¿De cuántas camas dispone el hospital? P: ¿Qué te está preguntando? A: ¿Cuántas camas hay en el hospital? P: ¿Habitaciones o camas? A: Camas P: Atención, ¡eh!	La preguntas es cuántas camas hay en el hospital	LECTURA SELECCIÓN: matemática
Ciclo 12	P: Dime Noelia A: 120*2 porque las habitaciones son de dos camas P: Cierto. *2. 120*2 A: 240 P: 240 camas hay en las habitaciones dobles, ¿no?	120*2=240 camas en las habitaciones dobles	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 13	P: ¿Qué más? A: Luego como en las 80 habitaciones son individuales solo hay una pues 80 camas.	80 camas en las habitaciones individuales	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 14	P: Por lo tanto, después, ¿qué has hecho? A: 240 más 80 P: bien, que son 320 camas hay en el hospital.	240+80=320 camas hay en el hospital	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 15	P: Vamos a ver, ¿de qué otra forma podríamos haberlo resuelto? A: Yo, yo, yo P: A ver, dime. A: Fernando yo no lo he hecho así, yo he multiplicado las habitaciones que hay en todo el hospital por 0.6 y por 0.4. Y luego ya como en la pizarra. P: Fenomenal porque ya sabéis que el porcentaje se hallaba de muchas maneras: de forma fraccionaria, de forma decimal, con la misma operación del %... Terminamos el problema, pues.	Otra forma de resolverlo sería multiplicando por 0.6 y 0.4 porque el porcentaje se halla de muchas maneras	RAZONAMIENTO: matemático

d) Problema estándar: ciclista

Ciclo	*Transcripción*	*Contenidos públicos*	*Categoría: subcategoría*
Ciclo 1	P: léelo en voz alta, Vanesa. A: Un ciclista debe recorrer 148.6 km. Después de recorrer 758 hm, ¿cuántos metros le falta por recorrer? P: vamos a ver Manu, ¿primero? A: pues… que un ciclista tiene que recorrer 148.6 km. P: o sea recorre 148.6 km.	Un ciclista recorre 148.6 km	LECTURA SELECCIÓN: matemática
Ciclo 2	P: ¿qué más le pasa al ciclista? A: que ha recorrido 758 hm. P: claro, ya ha avanzado un poquito.	El ciclista ha recorrido 758 hm	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 3	P: ¿Algo más hay que subrayar? A: sí A: sí, la pregunta P: que es… A: ¿cuántos metros le falta por recorrer? P: metros por recorrer, ¿de acuerdo?	También se subraya la pregunta cuántos m le falta por recorrer	SELECCIÓN: matemática

Ciclo 4	P: lo tenemos, ¿no? Pues Rubén, dinos por dónde empezamos. A: multiplicando 148.6 por 1000 y 758 por 100 P: vale, buena decisión y…	Hay que multiplicar 148.6*1000 y 758*100	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 5	P: ¿por qué vas a hacer esas multiplicaciones? A: pues para saber todo en metros P: y… A: y así podemos saber todo en metros y comparar P: muy bien, sabiendo todo en metros podemos operar y llegar a la solución	Hay que multiplicar para pasarlo todo a m, poder operar, comparar y obtener la solución	RAZONAMIENTO: matemático
Ciclo 6	P: entonces 148.6*1000, ¿cuánto da? A: 148600 A: ¿tanto? P: son metros, no te asustes, vale.	148.6*1000=148600	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 7	P: ¿ahora? A: 758*100… 75800 metros P: 75800, muy bien	758*100=75800	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 8	P: Ahora que ya sabemos todo en metros, Mario, ¿cuál es la solución a la pregunta del problema? A: pues 148600-75800, es…72800 P: vale, pero quiero una respuesta a la pregunta A: 72800 metros le falta por recorrer. P: Bien, recuadro, ya sabéis. Vamos a…	148600-75800=72800 m le falta por recorrer	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 9	P: esperad que estoy viendo que Clara lo ha hecho de otra manera y ha llegado a la misma conclusión. Cuéntanos cómo lo has hecho. A: pues en vez de pasarlo todo a metros, he calculado en hm lo que le falta por recorrer y luego ya lo he pasado a m al final P: muy bien el razonamiento de Clara. Otro razonamiento diferente pero correcto	Se han calculado los hm que le falta por recorrer y el resultado final lo ha pasado a m	RAZONAMIENTO: matemático
Ciclo 10	P: a ver, ¿quién me explica lo que ha hecho, Clara? A: yo no… A: yo, yo P: Nicolás, dinos. A: pues ella ha pasado lo que tiene que recorrer a hm, y como lo que ya ha recorrido está igual, pues lo resta para saber los hm que le faltan por recorrer. Y luego el numerito que le da lo pasa a m porque la pregunta lo pide así P: Fenomenal	Se ha pasado a hm lo que tiene que recorrer y como está en la misma unidad que lo que ya ha recorrido hace la resta y el resultado lo pasa a m para responder a la pregunta	RAZONAMIENTO: matemático

1.2.- Profesor 2

a) Problema reescrito: pastor

Ciclo	*Transcripción*	*Contenidos públicos*	*Categoría: subcategoría*
Ciclo 1	P: lectura en silencio (minutos). Ya tenemos una pequeña idea, podrías decirme, Alma, de qué va el problema, qué es lo que has leído, así por encima A: Que un pastor tenía 57 ovejas, compró ovejas, y vinieron los lobos y se comieron 11 y ahora tenemos 96.	Un pastor tenía 57 ovejas, compró ovejas, vinieron los lobos, se comieron 11 y quedaron 96.	LECTURA (silenciosa) SELECCIÓN: matemática

Ciclo 2	P: entonces ¿qué es lo que quería el pastor? A: aumentar el tamaño del rebaño	El pastor quería aumentar el tamaño del rebaño	SELECCIÓN: Situacional: relevante
Ciclo 3	P: Y ¿cuál es la pregunta que le hace entonces, Irene?, cuál es la pregunta A: Cuántas ovejas tenía… P: Cuántas ovejas… A: Compró P: Compró.	Pregunta por las ovejas que compró	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 4	P: Es decir, un pastor tenía un nº determinado de ovejas, compra más, después vienen unos lobos matan a ciertas ovejas y le quedan tantas ahora que es un nº diferente al que venía al principio y ahora la pregunta es que cuántas compró.	Un pastor tenía ciertas ovejas, compra más, vienen unos lobos matan algunas ovejas y le quedan tantas, que es un nº diferente al del principio. La pregunta es que cuántas compró.	RAZONAMIENTO: matemático
Ciclo 5	P: Pues bien, Fátima léelo en alto. A: Un pastor tenía un rebaño con 57 ovejas. El pastor quería aumentar el tamaño del rebaño porque este año había buenos pastos. Para ello se fue a una feria de ganado, decidió comprar algunas ovejas y las juntó con las que ya tenía. Una tarde el pastor vio una manada de lobos por la zona, los lobos estaban hambrientos y entonces, del total de ovejas del rebaño se comieron 11 y ahora el rebaño tiene 96. ¿Cuántas ovejas compró el pastor en la feria?		LECTURA
	P: Paula, ¿alguna idea?, alguna cosa habrá por la que empezar, qué hacemos, qué podemos hacer. A: dice 57-11 P: o sea que te irías al nº de ovejas que tiene el pastor al principio le vas a quitar las que comen los lobos, vale, y luego eso te va a decir que tienes tantas. Pero no vas camino de resolver el problema.	Hay que restar 57 que tiene al principio menos 11 que se comen los lobos	RAZONAMIENTO: matemático
Ciclo 6	P: Nadia A: Eh…96+11 y… P: Para, para P: Tú dices 96+11, vale	Hay que sumar 96+11	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 7	P: Mario, ¿tú qué ibas a decir? A: Multiplicar P: Tú multiplicarías ¿el qué? A: 96*57 A: ¡Hala! P: Sabes que no puedes ser sincero y yo estoy convencido de que eso lo sabes tú. Estoy convencido, piensa porque lo sabes.	Hay que multiplicar 96*57	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 8	P: Lucía A: Pues 96+11 P: A ver dice 96+11, vamos a ver, si yo sumo 96 ovejas que son las quedan ahora, las que tiene el pastor + 11, qué voy a tener Lucía A: Las que tenía antes y las que había comprado P: Es decir las que tiene en total. Si yo a 96 ovejas que son las que le han quedado, les sumo las 11 que han matado los lobos voy a tener el total de ovejas que tenía justo antes de que llegaran los lobos.	Hay que sumar las 96 ovejas que son las que le han quedado más las 11 que han matado los lobos para saber el total de ovejas que tenía antes del ataque de los lobos.	RAZONAMIENTO: matemático

Ciclo 9	P: esa cantidad que nos da, ¿va a ser antes de haber comprado o después de haber comprado? A: Después P: Después de haber comprado.	El resultado es la cantidad de ovejas después de haber comprado	RAZONAMIENTO: matemático
Ciclo 10	P: Vamos a hacer eso: 96+11, ¿igual? A: 107 P: 107 ovejas	96+11=107 ovejas	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 11	P: entonces, ya sabemos que 107 ovejas tenía antes de que llegaran los lobos pero también después de haber comprado. Es decir, este hombre ha comprado y después han llegado los lobos y han matado. Ahora 107 ovejas tenía en total, puedo poner antes de los lobos, vale	Tenía 107 ovejas antes del ataque de los lobos y después de haber comprado. Es decir, ha comprado, después han llegado los lobos y las han matado.	RAZONAMIENTO: matemático
Ciclo 12	P: Pero esa no es la pregunta, Yanira, ¿cuál es la pregunta? A: Cuántas ovejas compró el pastor en la feria P: Cuántas ovejas compró	Pregunta por cuántas ovejas compró el pastor en la feria	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 13	P: Pues bien, tenemos... ¿Cuántas tenía, Miguel Ángel? A: 96 P: Vale, tenía 96 ovejas. A ver…	Tenía 96 ovejas	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 14	P: Yanira, ¿cuántas tenía? A: 57 A: 57 pues bien tenemos las que tenía, las que después de comprar tenía, 107.	Tenía 57 y después de comprar 107	RAZONAMIENTO: matemático
Ciclo 15	P: ¿Qué podemos hacer Arantxa? A: Restar P: Restar, restar	Hay que restar	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 16	P: ¿qué resto Sara? A: 107-57 P: A 107 que es lo que tenía después de haber comprado porque ya hemos incluido las que mataron los lobos, pues bien a 107 que es lo que tenía después de comprar le voy a quitar lo que tenía al principio: 107 -57	107 ovejas que tenía después de haber comprado, incluidas las que mataron los lobos menos 57 que tenía al principio	RAZONAMIENTO: matemático
Ciclo 17	P: ¿Y me da exactamente? A: 50 A: 50 A: 50 ovejas compró en la feria P: Evidentemente	50 ovejas compró en la feria	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 18	P: ¿Qué es esto? La diferencia entre lo que tenía al principio y lo que tuvo después de comprar pues es lo que compró. Compró exactamente 50 ovejas.	La diferencia entre lo que tenía al principio y lo que tuvo después de comprar son las 50 ovejas que compró	RAZONAMIENTO: matemático

b) Problema reescrito: bodeguero

Ciclo	*Transcripción*	*Contenidos públicos*	*Categoría: subcategoría*
Ciclo 1	P: Lee, Arantxa. A: Un bodeguero quiere cambiar sus cubas de vino porque este año ha comprado más uvas. En las cubas de madera que ya tiene entran 158 litros, pero en estas cubas entran 26 litros menos que… P: Lee bien A: en las nuevas cubas metálicas que quiere comprar. ¿Cuántos litros de vino entrarán en las nuevas cubas metálicas? P: ¿De qué va el problema? A: De vino A: De cubas A: De que un bodeguero quiere cambiar sus cubas porque este año ha comprado más uvas. P: Vale, vale	El problema trata de vino, cubas y un bodeguero que quiere cambiar sus cubas porque este año ha comprado más uvas	LECTURA LECTURA SELECCIÓN: Situacional: relevante
Ciclo 2	P: Al final, ¿qué es lo que nos está preguntando, Mario?, ¿Yanira?, ¿Irene? A: Cuántos litros caben en las nuevas cubas metálicas P: Que cuántos litros caben, efectivamente. Que en las nuevas cubas que va a comprar cuántos litros caben.	Pregunta por cuántos litros caben en las nuevas cubas metálicas	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 3	P: Miguel Ángel, venga lee, alto y claro. A: Un bodeguero quiere cambiar…. P: A ver el problema empieza a decir…, el caso es que ¿cuántos litros tiene más cada cuba nueva, Víctor? A: 26 A: 26 A: 26 P: En las cubas metálicas hay 26 litros más.	Cada cuba nueva metálica tiene 26 litros más	LECTURA RAZONAMIENTO: matemático
Ciclo 4	P: Pero en realidad a nosotros el problema… a ver, el problema no nos dice que tiene 26 más. Nos dice… lo dice de otra manera, le da un giro. Dice que las de madera tienen 26 litros menos A: 26 menos P: pero es lo mismo	El problema no dice que tienen 26 l más, si no que las de madera tienen 26 l menos pero es lo mismo	RAZONAMIENTO: matemático
Ciclo 5	P: Entonces, ¿podemos averiguarlo solo sabiendo lo de unas cubas? A: Si P: sí, porque que las cubas de madera tengan 26 litros menos que las metálicas quiere decir que las metálicas tienen 26 litros más que las de madera.	Se puede averiguar porque si en las de madera caben 26 l menos quiere decir que en las de metal caben 26 l más	RAZONAMIENTO: matemático
Ciclo 6	P: Por lo tanto, yendo a la pregunta final, Laura, ¿qué nos pregunta? A: ¿Cuántos litros de vino entran en las nuevas cubas metálicas	Pregunta cuántos l de vino entran en las nuevas cubas metálicas	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 7	P: ¿Cuál será la operación Irene?, ¿Bea? A: Sumar P: A lo que tenemos le ampliamos la capacidad que tiene a mayores	Hay que sumar porque a lo que tenemos le ampliamos la capacidad que admite de más	RAZONAMIENTO: matemático
Ciclo 8	P: cuántos litros admite más… A: 26 P: Más 26.	26 l	SELECCIÓN: matemática

Ciclo 9	P: entonces, la operación que tenemos que hacer ¿cuál es? A: Sumar	Hay que sumar	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 10	P: ¿qué números hay que sumar? A: 158+26 P: 158+26, lo dices con un poco de miedo no sé si estás muy atenta. 158+26	158+26	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 11	P: ¿158+26? A: 184 P: 184 litros tienen las nuevas cubas	158+26=184 l tienen las nuevas cubas metálicas	SELECCIÓN: matemática

c) Problema estándar: hospital

Ciclo	*Transcripción*	*Contenidos públicos*	*Categoría: subcategoría*
Ciclo 1	P: Vamos al 4, Irene, vemos que en principio el enunciado es corto, vamos a ver, empieza. A: en un hospital… P: vocaliza mejor. A: un hospital tiene 200 habitaciones. El 60 % de las habitaciones tiene 2 camas y el resto tiene 1. ¿De cuántas camas dispone el hospital? P: repítelo, Paula A: un hospital tiene 200 habitaciones. El 60 % de las habitaciones tiene 2 camas y el resto una. ¿De cuántas camas dispone el hospital? P: bien, ¿qué es lo que tenemos que saber en este problema?, ¿averiguar el qué?, Bea. A: de cuántas camas dispone el hospital	Hay que averiguar de cuántas camas dispone el hospital	LECTURA LECTURA SELECCIÓN: matemática
Ciclo 2	P: los datos que me da, ¿me dice las habitaciones que hay? A: sii A: tiene 200 habitaciones	Tiene 200 habitaciones	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 3	P: más A: 60% de las habitaciones tiene 2 camas P: el 60 % tiene 2 camas	El 60% de las habitaciones tiene 2 camas	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 4	P: sigue… A: el resto 1 P: y el resto 1 cama.	El resto de habitaciones tiene 1 cama	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 5	P: ¿cuánto es el resto? A: el 40% A: 400 P: el 40%, vale. No es lo mismo el 40% que 400. Está hablando de por-cen-ta-jes, porcentajes, es decir, cuarenta por ciento y sesenta por ciento.	El resto es el 40 %	RAZONAMIENTO: matemático
Ciclo 6	P: Alma, lee. A: Un hospital tiene 200 habitaciones. P: 200 habitaciones tenemos entonces	Hay 200 habitaciones	LECTURA SELECCIÓN: matemática

Ciclo 7	P: sigue A: el 60% de las habitaciones tiene 2 camas y el resto 1 P: vale, para. 60% dos camas, resto una. A: una	El 60 % tiene 2 camas y el resto 1	LECTURA SELECCIÓN: matemática
Ciclo 8	P: ahora si el 60% es de dos camas, ¿qué % es de una? A: el 40 A: 100-60 P: 40%, bien	El 60% es de dos camas, así que 100-60 y el 40% es de una	RAZONAMIENTO: matemático
Ciclo 9	P: A ver, el 60% quiere decir que de cada 100 camas, perdón, que de cada 100 habitaciones 60 tienen 2 camas. Voy a repetirlo. El 60% es que de cada 100 habitaciones cojo 60	El 60% representa que de cada 100 habitaciones 60 tienen 2 camas.	RAZONAMIENTO: matemático
Ciclo 10	P: Entonces… A: 60+60 P: eso es	Hay que sumar 60+60	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 11	P: entonces… A: 120 tienen dos camas. P: efectivamente. Son 120 habitaciones cogemos las primeras 100 y de ahí son 60. En las segundas 100 otras 60. Es decir, que hay 120 habitaciones que tienen… A: Dos camas P: Dos camas	120 habitaciones tienen 2 camas porque de las primeras 100 cojo 60 y de las segundas 100, otras 60	RAZONAMIENTO: matemático
Ciclo 12	P: Ahora, si 120 tienen 2 camas, ¿cuántas tendrán 1? A: 200-120	Para saber las habitaciones de 1 cama hay que restar 200-120	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 13	P: ¿200-120? A: 80 A: 80 P: Vale, 80 tienen una cama	80 habitaciones tienen una cama	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 14	P: Por lo tanto, la pregunta final ¿cuál era, Víctor?, ¿cuál era la pregunta?, ¿qué nos pide? A: Que de cuántas camas dispone el hospital P: Vale	Pregunta de cuántas camas dispone el hospital	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 15	P: Pues ya está, tenemos ya que 120 habitaciones son 2 camas, ¿eso cuánto es? A: 120*2 P: Vale, bien	Hay que multiplicar 120*2	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 16	P: ¿y cuánto es 120*2? A: 240 P: Vale, vale, 240 camas	120*2 es 240 camas	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 17	P: ¿Y 80 de 1? A: Pues 80 camas	80 camas	SELECCIÓN: matemática

Ciclo 18	P: Entonces ahora ¿240 y 80? A: 220… ¡Uy! 320 A: 320 P: 320 camas, de acuerdo. Apuntarlo.	240+80= 320 camas	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 19	P: ¿alguna otra forma se os ocurre? A: eh…yo lo he hecho sin restar habitaciones…, he calculado el 40% de 200 para saber las habitaciones de una cama. P: vale, ¡pero te da lo mismo! Bien	Otra forma de resolverlo es hallando el 40% de 200 para calcular las habitaciones de una cama	RAZONAMIENTO: matemático

d) Problema estándar: ciclista

Ciclo	*Transcripción*	*Contenidos públicos*	*Categoría: subcategoría*
Ciclo 1	P: Vamos con el problema 2, Bea, lee. A: Un ciclista debe recorrer 148,6 km. Después de recorrer 758 hm, ¿Cuántos metros le falta por recorrer? P: Fijaros bien en las claves del problema, los datos vienen en: kilómetros, hectómetros y metros.	La clave del problema, los datos aparecen en km, hm y m	LECTURA SELECCIÓN: matemática
Ciclo 2	P: Vuélvelo a leer, Bea. A: Un ciclista debe recorrer 148,6 km. Después de recorrer 758 hm. ¿Cuántos metros le falta por recorrer? P: Bien Fátima, ¿en qué nos está pidiendo la respuesta? Que resolvamos el problema ¿en? A: En metros P: Nos está pidiendo que resolvamos el problema en metros.	La respuesta hay que darla en m	LECTURA SELECCIÓN: matemática
Ciclo 3	P: El primer dato que nos viene es que tiene que recorrer ¿cuánto? A: 148.6 km P: vale	El primer dato es que tiene que recorrer 148.6 km	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 4	P: Pues vamos a pasarlo a metros ya directamente. Un km Lucía, ¿cuántos metros tiene? A: 1000 porque hay tres unidades de por medio P: 1000	Un km tiene 1000 metros porque hay tres unidades de por medio	RAZONAMIENTO: matemático
Ciclo 5	P: Por lo tanto, para pasar de km a m multiplicaremos ¿por? A: 1000 P: 1000 porque hay tres lugares	Para pasar de km a m se multiplica por 1000 porque hay 3 lugares	RAZONAMIENTO: matemático
Ciclo 6	P: ¿Entonces, qué operación hacemos? A: 148.6*1000. P: Bien	Hay que multiplicar 148.6*1000	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 7	P: Por lo tanto, ¿148.6 es? A: 148600 P: El ciclista debe recorrer 148600 m	El ciclista debe recorrer 148600 m	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 8	P: Y ahora, ¿cuánto ha recorrido? A: 758 hm	Ha recorrido 758 hm	SELECCIÓN: matemática

Ciclo 9	P: Pues vamos a pasarlo a metros. Como son hm y hay dos saltos, ¿multiplicamos por? A: 100	Para pasar de hm a m se multiplica por 100 porque hay dos saltos	RAZONAMIENTO: matemático
Ciclo 10	P: ¿Cuánto da? A: 75800 m P: Bien.	75800 m	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 11	P: Ahora, ¿qué tendremos que hacer? Una… A: Resta P: Una resta porque si a lo que tiene que recorrer le quito lo que ya ha recorrido, obtendré lo que me queda	Hay que hacer una resta porque si al total le resto lo que ya ha recorrido, obtengo lo que falta	RAZONAMIENTO: matemático
Ciclo 12	P: Por lo tanto, resto 148600 menos 75800 y hacemos la resta en un momentín.	Hay que restar 148600-75800	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 13	P: A ver Arantxa, ¿cuánto es? A: 72800 m P: 72800 m le falta por recorrer	72800 m le falta por recorrer	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 14	P: Con lo cual hemos trabajado en metros porque así no lo hemos tenido que pasar al final, pero también podríamos haber trabajado en otra unidad y al final pasarlo. Pero si nos dice que al final en metros pues vamos a ir a lo sencillo.	Podríamos trabajar en metros o pasarlo al final, pero vamos a lo más sencillo	RAZONAMIENTO: matemático

2.- CONOCIMIENTO PARCIALMENTE GENUINO

2.1.- Profesor 3

a) Problema reescrito: pastor

Ciclo	*Transcripción*	*Contenidos públicos*	*Categoría: subcategoría*
Ciclo 1	P: venga, un par de minutitos para leerlo (minutos en silencio) P: A ver, ¿alguien quiere contarnos el problema a su manera? A: yo P: A ver, Alba A: bueno pues esto es un pastor que tiene 57 ovejas, ¿no?, y va a ir a un concurso, bueno un… como se dice… A: una feria A: a una feria de ganado y él quiere comprar más ovejas y entonces dice que viene el lobo y se come once ovejas y le han quedado solo 96 P: vale	Un pastor tiene 57 ovejas, va a una feria de ganado, quieres comprar más ovejas, viene el lobo, se come 11 ovejas y le quedan 96	LECTURA (silenciosa) SELECCIÓN: matemática
Ciclo 2	P: o sea lo que quiere saber el señor, ¿qué es? A: cuántas ovejas se ha comprado P: o sea lo que queremos saber nosotros A: que cuántas ovejas se ha comprado P: cuántas ovejas ha comprado.	Hay que saber cuántas ovejas ha comprado	SELECCIÓN: matemática

Ciclo 3	P: Rafa, ¿por qué quiere comprar más ovejas el señor? A: porque había buenos pastos P: porque había buenos pastos, vale, de acuerdo.	El pastor quiere comprar más ovejas porque había buenos pastos	SELECCIÓN: situacional relevante
Ciclo 4	P: ¿Qué esquema se le ha ocurrido hacer?, ¿qué datos importantes has extraído tú de ese problema? A: eh… 57 ovejas P: ¿qué son?, ¿qué son esas 57 ovejas?, ¿qué son? A: ovejas A: ovejas P: vale, ya lo sé que son ovejas, pero ¿qué?, ¿las ovejas que le come el lobo, las ovejas que tenía…? A: las ovejas que tiene. P: Vale, continúa.	57 ovejas tenía	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 5	P: Sigue A: luego, eh…, las once que le comieron los lobos. P: once ovejas que le come el lobo	11 ovejas se comieron los lobos	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 6	P: Aia, ¿sabemos por qué los lobos se comen las ovejas? A: Sí P: Dinos A: porque… pone ahí que estaban hambrientos P: tenían hambre, ¿de acuerdo?	Los lobos se comieron las ovejas porque estaban hambrientos	SELECCIÓN: Situacional relevante
Ciclo 7	P: y… A: y al final tiene 96 P: y el resultado final es que tiene 96 ovejas. Esos son los datos, ¿no?, que nos da el problema, ¿cierto?, las ovejas que tiene al principio, las ovejas que le come el lobo y las ovejas que le quedan al final, datos numéricos.	Al final tiene 96 ovejas	SELECCIÓN: Matemática
Ciclo 8	P: Pero ¿hay algún otro dato más que nos interese de la información que nos da el problema? Repito ¿hay algún dato más, que no hay número, que nos interese de la información que nos da este problema? A: sí, las ovejas que compró el pastor P: las ovejas que compró el pastor, ¿de acuerdo? que es justo la pregunta de ese problema, nos interesa el dato de que el pastor ha comprado más ovejas.	La pregunta es cuántas ovejas compró el pastor	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 9	P: Ahora vamos a hacer un gráfico en la pizarra. Todos habéis visto cómo son los lugares donde se guardan las ovejas y que hay distintos tipos de ovejas, ¿no? A: si A: mi abuelo tiene ovejas A: el mío no… A: y las tiene rodeadas como con vallas para que no se escapen, y las tiene blancas y negras, bueno blancas blancas no porque están sucias… P: claro.	Las ovejas pueden ser blancas y negras y se guardan en lugares cercados con vallas	SELECCIÓN: Situacional irrelevante
Ciclo 10	P: y por la noche las deja el mismo sitio o las guarda en otro lugar tu abuelo. A: pues no sé, yo creo que donde las tenga, que no las cambia. P: pensaba que por la noche las recogía para evitar que les ataquen otros animales como los lobos. Mira lo que le ha pasado a nuestro pastor… A: yo creo que no… P: seguimos.	Por la noche las ovejas se quedan en el mismo sitio, no se recogen para evitar el ataque de otros animales	SELECCIÓN: Situacional irrelevante

Ciclo 11	P: Diego, ¿quieres salir a la pizarra a hacer el esquema que tienes hecho? nos puedes ir explicando lo que vas haciendo, por favor. A: he ido dibujando una tabla como si fuera un corral. P: vale, venga, sigue. A: y he ido haciendo 57 uves y luego a esas 57 uves… P: o sea has dibujado 57 uves que representan, ¿lo qué? A: las ovejas. P: las ovejas, o sea todas las 57 uves has dibujado, pues venga dibújalas, rapidito. (Tiempo en silencio) Podría representar la línea rectangular que hecho la cerca de tu rebaño, por ejemplo, eh, por ejemplo, venga. (silencio, trabajando)	Un gráfico con un rectángulo que representa la cerca y 57 uves que representan las ovejas	RAZONAMIENTO: matemático
Ciclo 12	P: Entonces ahora el problema ¿qué nos dice?, ¿qué nos dice el problema? A: ha comprado más A: ha comprado más P: que ha comprado más, simplemente, no dice nada más.	Ha comprado más ovejas	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 13	P: ¿Cómo puede representar Diego que ha comprado más ovejas? A: poniendo uves P: pero cuántas uves pone si no sabemos las ovejas que compra más… A: pues una interrogación P: muy bien, ovejas signo de interrogación, no lo sé.	como no se sabe la cantidad de ovejas que ha comprado se representa con una interrogación	RAZONAMIENTO: matemático
Ciclo 14	P: continúa leyendo el problema. Para ello… ahí estamos. A: sí, para ello se fue a una feria de ganado y decidió comprar unas ovejas que juntó con las que tenía P: vale, vamos a hacer ahora hasta aquí, Diego, ¿cómo resolveríamos esto gráficamente?, tenemos las ovejas iniciales más, que nos lo ha dicho Aia ya, más las que compramos, ¿vale? y ahora dice el ejercicio que las juntó, juntó las que compra con las que tenía, ¿cómo represento eso gráficamente? A: pues cuenta 57 P: que no voy a contar nada, solo lo quiero dibujar gráficamente, dibujar A: unir los dos cercados P: unir los dos cercados, muy bien.	Para representar “decidió comprar unas ovejas con las que ya tenía” hay que juntar el cercado de las ovejas iniciales y el cercado de las ovejas que compró	LECTURA RAZONAMIENTO: matemático
Ciclo 15	P: ¿Cómo puedo unir los dos cercados?, puedo hacer esto, quitando esta cerca de aquí, quitando esta cerca de aquí y uniéndolo aquí, o sea trasladando las cercas. Pero también podría haber hecho otra cerca más grande que me hubiera englobado a las dos A: si P: es lo mismo que ha hecho Álvaro, o sea que cualquiera de las dos soluciones hubiera servido. El nuevo rebaño es todo esto junto, esto que ya se lo que es, 57 ovejas y esto que desconozco, las ovejas que compra, ¿de acuerdo?	El nuevo rebaño se puede representar de dos maneras: moviendo las cercas o haciendo una más grande, que una las 57 y lo que desconozco	RAZONAMIENTO: matemático

Ciclo 16	P: Vale, pues seguimos leyendo, a ver cómo lo representas ahora, Diego. Alberto, lee. A: una tarde el pastor vio una manada de lobos por la zona. Los lobos estaban hambrientos y se comieron 11 ovejas P: vale, ¿hay algo importante aquí que podamos representar, Diego? A: que se comió las once ovejas P: que los lobos se comieron once ovejas	Los lobos se comieron 11 ovejas	LECTURA SELECCIÓN: matemática
Ciclo 17	P: ¿cómo representarías eso Diego gráficamente?, no estamos haciendo cuentas, por favor. A: pues le quitas once ovejas a las uves A: pues le quitas las once ovejas P: vale, pues le quitas las once ovejas,	hay que quitar 11 ovejas a las uves dibujadas	RAZONAMIENTO: matemático
Ciclo 18	P: vale seguimos con el problema, Alberto. A: "ahora el rebaño tiene 96 ovejas" P: vale, otro dato.	Al final el rebaño tiene 96 ovejas	LECTURA SELECCIÓN: matemática
Ciclo 19	P: ¿cómo podemos representar eso?, ahora, ahora mismo el rebaño tiene 96 ovejas, lo estamos representando gráficamente no estamos haciendo cuentas, ¿vale?, a ver, José A: puede hacer una uve y sacar una flecha y poner 96. P: Vale.	Para representar 96 ovejas se pone una flecha, una uve y un 96	RAZONAMIENTO: matemático
Ciclo 20	P: y ¿tú eso donde se lo unirías? porque lo queremos representar gráficamente, ¿a qué líneas de todas?, teníamos aquí una cerca con 57 ovejas, otra cerca con no se sabe cuántas ovejas, signo de interrogación, las hemos juntado los dos rebaños, y trazamos una línea roja uniendo los dos. ¿Cómo representamos que ahora lo que hay son 96 ovejas?, ¿dónde colocamos esto?, está claro pero ¿dónde colocamos este dato?, Lola A: sacas dos flechas desde los dos rebaños y le pones uve igual a 96 P: saco dos flechas	Para representar las 96 ovejas se hace una flecha desde cada redil	RAZONAMIENTO: matemático
Ciclo 21	P: ¿qué me está representando a mí el total de las ovejas?, ¿qué líneas me están representando el total de las ovejas?, repito ¿qué líneas de las dibujadas ahí están representando el total de las ovejas? A: la roja P: la roja nos está representando, la línea roja es la que representa el total de las ovejas, ¿no? así que el 96 es el total de las ovejas.	La línea roja representa el total de ovejas, las 96	RAZONAMIENTO: matemático
Ciclo 22	P: Entonces ahora Valeria nos va a buscar la solución, ¿cómo resolverías tú la incógnita, o sea las ovejas que compró?, ¿cómo resolverías el problema ahora ya?, ya tenemos el gráfico lo vamos viendo A: restando 96 menos… ¡no! sumar, sumando 96 más once y restándole… P: vale, vale, bien, ¡para!, perfecto,	Hay que sumar 96+11	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 23	P: ¿por qué sumas 96 más once? A: para saber cuántas había antes de que se los comieran P: para saber las que había sin que se comieran los lobos, pues venga opera.	Hay que sumar para saber las ovejas que había antes del ataque de los lobos	RAZONAMIENTO: matemático
Ciclo 24	P: y qué tendrías al final, 96 más once y después, Valeria A: y luego restar eso menos 57 P: vale	Hay que restar 57 al resultado de 96+11	SELECCIÓN: matemática

Ciclo 25	P: ahora nos lo explica José, ¿por qué después deberíamos restarle 57? A: porque son las que tenía al principio P: exactamente A: y así le da el resultado de cuántas compró. P: venga, resolviéndolo cada uno lo suyo	hay que restar 57 porque son las ovejas que tenía al principio	RAZONAMIENTO: matemático
Ciclo 26	P: ¿cuál sería la respuesta entonces, Valeria? A: en total compró 50 ovejas P: vale.	Compró 50 ovejas	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 27	P: Ahora coge una tiza de color y pon el dato donde corresponda en el gráfico. A: donde hemos puesto uve, interrogación, dato que desconocíamos, ponemos ahí 50. P: venga Valeria A: ya está P: vale	El 50 se coloca en la interrogación el dato que se desconocía	RAZONAMIENTO: matemático

b) Problema reescrito: bodeguero

Ciclo	*Transcripción*	*Contenidos públicos*	*Categoría: subcategoría*
Ciclo 1	P: Noelia quieres leerlo en alto, por favor. A: Un bodeguero quiere cambiar sus cubas de vino porque este año ha comprado más uvas. En las cubas de madera que ya tiene entran 158 litros, pero en estas cubas entran 26 litros menos que en las nuevas cubas metálicas que quiere comprar. ¿Cuántos litros de vino entrarán en las nuevas cubas metálicas? P: a ver, quién… A: (interrumpen) hay que sumar. P: No, no, no he preguntado todavía nada espérate. Hay alguien que quiere contarnos a su manera lo qué dice el problema, de qué va. A: yo P: a ver A: pues va de que un señor que tiene cubas… en las que tiene entran 26 litros menos que en las nuevas y quiere comprar unas que tienen 26 litros más… P: Vale.	En las cubas que tiene entran 26 litros menos que en las nuevas En las nuevas cubas entran 26 litros más	LECTURA RAZONAMIENTO: matemático
Ciclo 2	P: Victoria, ¿de qué estaban hechas las cubas que tenía el señor? A: de madera. P: de madera.	Las cubas viejas eran de madera	SELECCIÓN: situacional irrelevante
Ciclo 3	P: ¿Y las nuevas que quiere comprar? A: de metal. P: de metal.	La cubas nuevas son de metal	SELECCIÓN: situacional irrelevante
Ciclo 4	P: Álvaro, ¿dónde cae más vino en las cubas antiguas que él tenía o en las cubas nuevas? A: en las nuevas P: en las cubas nuevas.	En la cubas nuevas cabe más vino que en las antiguas	RAZONAMIENTO: matemática
Ciclo 5	P: ¿Por qué quiere cambiar las cubas? A: porque ha hecho más vino. P: porque va a hacer más vino.	Quiere cambiar las cubas porque ha hecho más vino	SELECCIÓN: situacional relevante

Ciclo 6	P: Rafa, ¿qué nos pregunta el problema? A: que cuántos litros de vino van a entrar en las cubas nuevas. P: Vale.	Pregunta por los litros que entran en las cubas nuevas	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 7	P: ¿tú qué piensas que entran más o menos que en las cubas antiguas? A: entran más. P: entran más.	En las cubas nuevas entra más que en las antiguas	RAZONAMIENTO: matemática
Ciclo 8	P: José, ¿cuál es tu respuesta? A: entran 184 litros en las cubas metálicas.	En las cubas metálicas entran 184 litros	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 9	P: José ¿cómo has resuelto tu problema? A: sumando 158 + 26 P: vale.	Hay que sumar 158+26	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 10	P: ¿Por qué has sumado esas dos cantidades: 158 litros + 26 litros? A: porque las cubas de madera tienen 26 litros menos que las cubas metálicas. P: Entonces, eso quiere decir que las cubas metálicas tienen… Dicho de otra manera eso. A: tienen 26 litros más. P: muy bien José. Tienen 26 litros más que las cubas de madera.	Hay que sumar porque las cubas de madera tienen 26 l menos que las metálicas y entonces las metálicas tienen 26 litros más que las de madera	RAZONAMIENTO: matemático
Ciclo 11	P: Entonces, ¿la operación que teníamos que hacer José era? A: sumar P: sumar	Hay que sumar	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 12	P: Entonces, Victoria, las nuevas cubas de metal, ¿qué capacidad tienen? A: 184 P: 184… A: litros P: litros	Las cubas de metal tienen una capacidad de 184 litros	SELECCIÓN: matemática

c) Problema estándar: hospital

Ciclo	*Transcripción*	*Contenidos públicos*	*Categoría: subcategoría*
Ciclo 1	P: léelo A: Un hospital tiene 200 habitaciones, el 60% de las habitaciones tienen 2 camas y el resto una, ¿de cuántas camas dispone el hospital? P: sal a la pizarra. Se lo vuelves a leer, por favor A: un hospital tiene 200 habitaciones P: Para. ¿Cómo vas a poner ese dato? A: hay 200 habitaciones	Hay 200 habitaciones	LECTURA LECTURA SELECCIÓN: matemática
Ciclo 2	P: sigue Noelia, A: el 60% de las habitaciones tiene 2 camas y el resto 1 P: stop A: 60% dos camas, resto una	El 60% tiene 2 camas y el resto 1	LECTURA SELECCIÓN: matemática

Ciclo 3	P: pues vamos a la pregunta, Noelia. A: ¿de cuántas camas dispone el hospital? P: cómo ponemos este dato A: camas dispone el hospital P: vale.	Pregunta por las camas de las que dispone el hospital	LECTURA SELECCIÓN: matemática
Ciclo 4	P: Vamos a arrancar a ver qué pasa, Luismi. A: primero haces (60*200)/100 porque si el 60 por ciento son dobles tendríamos que saber el número de habitaciones primero. P: Muy bien	Hay que hacer (60*200)/100 porque el 60% son habitaciones y primero hay que saber el nº de habitaciones	RAZONAMIENTO: matemático
Ciclo 5	P: Vamos a ese paso A: (60*200)/100…120 P: vale, perfecto.	(60*200)/100=120	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 6	P: ¿Y ahora?, ¿Qué se nos ocurre? A: pues restar 100 menos 60 para saber qué porcentaje de habitaciones de una cama hay, que es el resto P: Atentos a lo que ha dicho. Sabemos el porcentaje de habitaciones dobles y él propone calcular el porcentaje restante	Restar 100-60 para saber el % de habitaciones individual, que es el porcentaje restante	RAZONAMIENTO: matemático
Ciclo 7	P: Opiniones. Primero pensamos antes de hablar. A ver, ¿qué otras opción has pensado? A: Me parece buena idea A: Y a mí A: También A: También podemos calcular las habitaciones individuales restando las que hay en el hospital menos las dobles. P: Muy bien, en vez de usar el porcentaje, ella lo ha calculado con las operaciones básicas. Fenomenal, esto nos sirve para ir ampliando nuestro conocimiento.	Otra forma de resolver es calcular las habitaciones individuales restando las totales menos las dobles	RAZONAMIENTO: matemático
Ciclo 8	P: y eso es… A: 200-120= 80 habitaciones P: vale, perfecto	200-120= 80 habitaciones	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 9	P: ¿Ahora, qué hacemos a continuación? A: multiplicamos 120*2 y 80*1	Hay que multiplicar 120*2 y 80*1	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 10	P: ¿Qué es? A: 240 y 80 P: bien	240 y 80	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 11	P: Y entonces… A: 240+80, 320 P: exacto	240+80=320	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 12	P: Vamos a ver la respuesta a la pregunta del problema A: 320 P: que en frase es… A: 320 camas P: No empezamos nunca por el número vamos a construir una frase. A: dispone de 320 camas P: Vale muy bien, hay 320 camas en el hospital	Hay 320 camas en el hospital	SELECCIÓN: matemática

Ciclo 13	P: Bueno pues lo habéis resuelto muy bien. Yo pensaba que a lo mejor ibais a tener alguna dificultad con los porcentajes… si no se os hubiera ocurrido, ¿hay algo que nos hubiera ayudado a resolver el problema?, ¿algún recurso práctico? Porque hemos visto dos maneras de hacerlo verdad, operaciones básicas o con porcentajes. Pero suponiendo que no se nos hubiera ocurrido ninguna de esas dos cosas, que nos hubiéramos atascado. ¿Hubiera habido algo que nosotros hubiéramos podido utilizar y ver por dónde iba el problema? A: Hacer los dibujos P: Muy bien, hacer los dibujos hubiera sido una tercera forma de resolverlo. Una pieza total, el hospital, y la hubiéramos segmentado en habitaciones para adivinarlo, perfecto.	Se ha resuelto de dos formas: operaciones básicas y porcentajes, pero si hubiera habido problemas, una tercera forma hubiera sido dibujando el hospital y las habitaciones	RAZONAMIENTO: matemático

d) Problema estándar: ciclista

Ciclo	*Transcripción*	*Contenidos públicos*	*Categoría: subcategoría*
Ciclo 1	P: Leerlo en silencio (minutos de silencio). Alguien nos quiere contar de qué nos habla el problema A: de que un ciclista recorre 148 km y ya ha recorrido 758 hm, y dice la pregunta que cuántos m le falta por recorrer.	Un ciclista recorre 148 km, ha recorrido 758 y pregunta cuántos m le falta por recorrer.	LECTURA (silenciosa) SELECCIÓN: matemática
Ciclo 2	P: bien, vamos a pensar cómo podríamos resolverlo A: yo creo que habría que pasar los km a hm para saber lo que nos falta por recorrer se restan y luego ya el resultado lo pasas a m. P: Muy bien, podemos operar en hm y después ya pasarlo a m.	Para saber lo que nos falta por recorrer se pasarían lo km a hm, se restan y el resultado a m	RAZONAMIENTO: matemático
Ciclo 3	P: más opciones A: o pasar los km y hm a metros y luego ya restar para saber cuánto falta P: otra cuestión que nos acaba de aportar Rafa, pasar los km y hm a m porque tenemos 3 unidades distintas. Tenemos km, hm y m.	Para saber cuánto falta se pasan los km y hm a m, y luego ya se resta	RAZONAMIENTO: matemático
Ciclo 4	P: Alguien quiere leernos el problema en alto, venga. A: Un ciclista debe recorrer 148 km. Después de recorrer 758 hm, ¿cuántos m le faltan por recorrer? P: venga, ¿qué has puesto? A: tiene que recorrer 148 km y ha recorrido 758 hm.	Tiene que recorrer 148 km y ha recorrido 758 hm	LECTURA SELECCIÓN: matemática
Ciclo 5	P: vamos a la pregunta A: m le faltan por recorrer P: vale	Pregunta por los m que le faltan por recorrer	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 6	P: Vamos a resolverlo, cuéntanos, por dónde empezarías. A: Por pasar los km a m, multiplicando 148*1000 P: Muy bien, pasamos los km a m multiplicándolos por 1000. Atención a esa multiplicación que sabemos hacerla indicada.	Hay que multiplicar 148*1000	SELECCIÓN: matemática

Ciclo 7	P: ¿Cuánto es? A: 148000m P: Vale	148000 m	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 8	P: ¿por dónde seguimos ahora? A: Por… pasar los hm a m, multiplicamos 758*100 y ya sabemos los m que ha recorrido P: Muy bien	Hay que multiplicar 758*100 para pasar de hm a m y saber lo que ha recorrido	RAZONAMIENTO: matemático
Ciclo 9	P: ¿Cuánto es?, léenos la cantidad A: 75800 m P: Vale	75800 m	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 10	P: y ¿por dónde seguimos?, ¿qué queremos saber? A: Cuántos m le faltan por recorrer P: Muy bien	Hay que saber cuántos m le faltan por recorrer	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 11	P: dinos A: 48000 restar, menos 75800 P: Vale muy bien. Pues venga. (silencio)	48000-75800	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 12	P: ¿ya tenemos la solución? A: 72200 P: en forma de frase A: Le faltan por recorrer 72200m P: Pues ale escribe. El problema está hecho, muy bien chicos.	Le faltan por recorrer 72200 m	SELECCIÓN: matemática

2.2.- Profesor 4

a) Problema reescrito: pastor

Ciclo	*Transcripción*	*Contenidos públicos*	*Categoría: subcategoría*
Ciclo 1	P: Empezamos leyendo el problema, venga. Un pastor tenía un rebaño con 57 ovejas. El pastor quería aumentar el tamaño del rebaño porque este año había buenos pastos. Para ello se fue a una feria de ganado, decidió comprar algunas ovejas y las juntó con las que ya tenía. Una tarde el pastor vio una manada de lobos por la zona, los lobos estaban hambrientos y entonces, del total de ovejas del rebaño se comieron 11 y ahora el rebaño tiene 96. ¿Cuántas ovejas compró el pastor en la feria? P: Una vez que los hemos leído, ¿qué es lo que nos pide el problema? Lo primero. A: que un pastor tenía 57 ovejas P: ¿eso es lo que nos pide el problema?, ¿qué nos pide el problema, Lidia? A: que cuántas ovejas compró en la feria P: que cuántas ovejas compró en la feria, vale	Se pregunta por cuántas ovejas compró en la feria	LECTURA SELECCIÓN: matemática

Ciclo 2	P: para eso nos ha dado varios datos. Uno el que ha dicho Millán, que era… A: que tenía 57 ovejas P: que tenía 57 ovejas	Tenía 57 ovejas	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 3	P: segundo dato cuál es, Naiara A: que quería aumentar los pastos P: Que quería aumentar las ovejas porque tenía muchos pastos	Quería aumentar las ovejas porque tenía muchos pastos	SELECCIÓN: Situacional relevante
Ciclo 4	P: continúa, David A: Que los lobos se comieron 11 ovejas P: Que los lobos se comieron 11 ovejas	Los lobos se comieron 11 ovejas	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 5	P: Y el último, Lucía A: Que ahora tiene 96 ovejas P: Que ahora tiene 96, vale	Ahora tiene 96 ovejas	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 6	P: Con todos estos datos qué podemos hacer para saber las ovejas que compró el pastor, Francisco. A: Pues yo creo que sumar 96+11 que nos da…107. P: que son… A: las que tenía antes de venir los lobos, y luego restar 107-57 que es…50 compró. P: Entonces a las 96 que tiene ahora le has sumado las que se comieron los lobos y luego le has restado las ovejas que ya tenía y te ha dado 50.	Hay que sumar las 96 que tiene ahora más las 11 que se comieron los lobos. El resultado se resta de las ovejas que tenía y da 50	RAZONAMIENTO: matemático
Ciclo 7	P: Otra manera de hacer este problema, Carlos. A: 96 le restamos 57 que teníamos y nos da 39; y a las 39 le sumamos las 11 de los lobos y nos da 50 ovejas. P: Vale y nos da 50.	Otra forma de resolver es a las 96 se le restan las 57 iniciales. A 39 se suman las 11 que se comieron los lobos	RAZONAMIENTO: matemático
Ciclo 8	P: entonces, ¿cuál sería la solución final? A: el pastor ha comprado 50 ovejas P: Bien	El pastor ha comprado 50 ovejas	SELECCIÓN: matemáticas
Ciclo 9	P: María, sal. Vamos a intentar poner esta situación en un gráfico, como hicimos con el del bodeguero el otro día, os acordáis. A: yo creo… 57 ovejas que tenía. P: sí. Sigue A: eh… este trozo son las 50 que compró. P: ponle alguna distinción A: vale cruces. Este trocito grande es el total. Y ahora otro rectángulo (diferente) que un cachito son las 11 de los lobos y el otro… P: piensa en el dato que te falta por incluir… A: eh… ¡ah! El 96 P. muy bien. Y los dos rectángulos grandes suman 107. Muy bien.	57 ovejas que tenía, otro trozo con cruces las 50 que compró. El trozo grande es el total, 107. Un trozo de otro rectángulo son las 11 del ataque de los lobos y el otro las 96.	RAZONAMIENTO: matemático
Ciclo 10	P: dime A: Yo lo hubiera dibujado de otra manera. P: ah, ¿sí? Dime, dime A: pues a ver, dibujaría 107 cuadraditos e iría tachando cada cosa de una manera: 57 que tenía, 50 que compró. Luego en rojo tacho las 11 de los lobos y si cuentas los cuadraditos tienen que quedar 96 sin tachar. P: vale. Muy bien	Otro dibujo sería 107 cuadrados y se tacharían 57 que tenía, 50 que compró, de rojo las 11 de los lobos. Restarían 96 sin tachar	RAZONAMIENTO: matemático

b) Problema reescrito: bodeguero

Ciclo	*Transcripción*	*Contenidos públicos*	*Categoría: subcategoría*
Ciclo 1	P: venga voy a leerlo en alto. Un bodeguero quiere cambiar sus cubas de vino porque este año ha comprado más uvas. En las cubas de madera que ya tiene entran 158 litros, pero en estas cubas entran 26 litros menos que en las nuevas cubas metálicas que quiere comprar. ¿Cuántos litros de vino entrarán en las nuevas cubas metálicas?		LECTURA
	P: vale, habéis leído el problema y veis que el bodeguero tiene dos tipos de cubas: unas de madera y otras de metal. Hasta ahí claro.	El bodeguero tiene 2 tipos de cubas	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 2	P: De las dos, ¿cuál es mayor: la de madera o la de metal, Lidia? A: La de metal P. La de metal es mayor porque en la de madera caben menos litros	Las cubas de metal son mayores porque en las de madera caben menos litros	RAZONAMIENTO: matemático
Ciclo 3	P: Una pista que nos da el problema para saber que son mayores las nuevas, ¿cuál es? A: eh… A: ¿que ha comprado más uvas? P. muy bien.	Una pista para saber que son mayores las nuevas es que ha comprado más uvas	SELECCIÓN: Situacional relevante
Ciclo 4	P: Entonces, nos pregunta cuántos litros entrarán en las nuevas cubas metálicas, y nosotros ya sabemos que aunque en las de madera quepa menos, quiere decir que en las de metal cabe más, ya sabemos que tienen que ser mayores que las anteriores, ¿no? Vamos a resolverle	Pregunta por cuántos litros entran en las cubas metálicas y ya se sabe que en las de metal son mayores que las anteriores	RAZONAMIENTO: matemático
Ciclo 5	P: A ver, ¿cuántos litros entran en las cubas de madera, Irene? A: 158 P: 158	Entran 158 l	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 6	P: ¿Otro dato? A: en las de madera 26 litros menos que en las de madera. P: Vale	En las de madera 26 l menos que las de madera	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 7	P: Y entonces operamos para saber en las cubas metálicas, ¿cuántos entrarán, Irene? A: 158+26 que da…184 P: 158+26 que nos da 184	158+26=184	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 8	P: Y la solución al problema, es entonces ¿cuál? A: 184 litros entran en las nuevas cubas metálicas P: vale, muy bien. No os olvidéis de decir qué es.	En las cubas de metal entran 184 l	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 9	P: Ahora, vamos ahora a representarlo en la pizarra. Sal, dibújale y nos explicas. (SILENCIO) A: a ver, este rectángulo es la de madera y si le añado un cachito de puntitos pues es como la de metal. P: pero dibújanos también la de metal. A: pues así de grande. P: Muy bien. Siéntate. Vemos muy claro en este dibujo que la de metal es de igual tamaño de la de madera más el trocito que cabe de más.	Se puede dibujar la de madera con un rectángulo y se le añade un trozo más que en total es del mismo tamaño que las de metal	RAZONAMIENTO: matemático

c) Problema estándar: hospital

Ciclo	*Transcripción*	*Contenidos públicos*	*Categoría: subcategoría*
Ciclo 1	P: vamos con el cuarto problema de la hojita. Un hospital tiene 200 habitaciones, el 60% de las habitaciones tienen 2 camas y el resto una. ¿De cuántas camas dispone el hospital? P: a ver vamos con el primer dato, Luis. A: hay 200 habitaciones P: vale	 Hay 200 habitaciones	LECTURA SELECCIÓN: matemática
Ciclo 2	P: siguiente David. A: 60% tiene dos camas y el resto una.	El 60% tiene 2 camas y el resto una	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 3	P: Bueno ¿qué es lo primero que tenemos que hacer para saber cuántas camas tiene el hospital, Pilar? A: El 60% de 200 P: El 60% de 200 y así sabemos… A: cuántas tienen dos camas	Hay que calcular el 60% de 200 para saber cuántas habitaciones tienen 2 camas	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 4	P: Entonces, ¿cuánto nos daría el 60% de 200, Arantxa? A: eh…(200*60)/2… eh…120 P: 120 vale	60% de 200= (200*60)/2= 120	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 5	P: Entonces, ¿el total de las camas sería 120?, No verdad, nos falta saber cosas, a ver Alba. Dinos A: Tenemos que multiplicar 120 habitaciones por 2 para saber cuántas camas hay en total en ese tipo de habitaciones que eran dobles, o sea, que hay dos camas. Como en mi habitación.	Hay que 120*2 para saber cuántas camas hay en total del tipo de habitaciones dobles	RAZONAMIENTO: matemático
Ciclo 6	P: ¿Y entonces? A: 120*2… 240 P: camas, vale	120*2=240	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 7	P: Y ahora, ¿por dónde seguimos Elvira? A: pues tenemos que sumarle 80 P: 80 ¿por qué? A: porque son las habitaciones que nos quedan P. pero no podemos sumar habitaciones con camas… A. claro pero es que solo tienen una cama entonces es igual 80 P: ah vale	Hay que sumar 80 porque estas habitaciones solo tienen una cama	RAZONAMIENTO: matemático
Ciclo 8	P: a ver entonces según Elvira, ¿qué sumamos exactamente 120+80 o 240+80? A: 240 + 80 P: vaaaaale.	Hay que sumar 240+80	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 9	P: Ahora ya sumamos 240+80, y ¿nos da María Amor? A: 320 P: 320 camas, muy bien	240+80=320	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 10	P: Dime Francisco A: Yo he hecho 200/10 y me ha dado 20 y luego 20*6 y me ha dado 120; y luego 120*2 me ha dado 240 camas de las habitaciones de dos; y 240+80 de las habitaciones individuales, que son 320 camas igual. P: Bien, también se puede hacer de esa manera. dos maneras de hacerlo perfecto	Otra forma de resolver es 200/10=20; 20*6=120; 120*2=240 camas en las habitaciones dobles. 240 de las habitaciones dobles + 80 de las habitaciones individuales suman un total de 320 camas	RAZONAMIENTO: matemático

d) Problema estándar: ciclista

Ciclo	*Transcripción*	*Contenidos públicos*	*Categoría: subcategoría*
CICLO 1	P: Hoy vamos a hacer el segundo problema. Un ciclista debe recorrer 148,6 km. Después de recorrer 758 hm, ¿cuántos metros le falta por recorrer?		LECTURA
	Vamos a ver este problema cortito cómo le hacemos, Andrea, ¿qué tenemos lo primero? A: Pues que el ciclista debe recorrer 148.6 km. P: La distancia que debe recorrer la sabemos	El ciclista debe recorrer 148.6 km	SELECCIÓN: matemática
CICLO 2	P: Alba, siguiente A: Ha recorrido 758 hm P: Ha recorrido ya 758 hm	Ha recorrido 758 hm	SELECCIÓN: matemática
CICLO 3	P: Y el último dato que tenemos por ahí, Lidia A: la pregunta P: muy bien. Que es… A: cuántos metros le falta por recorrer	Pregunta por los m que le faltan por recorrer	SELECCIÓN: matemática
CICLO 4	P: entonces, ¿qué será lo primero que tenemos que hacer? A: Poner todo en metros P: pasarlo a metros, vale	Hay que pasarlo todo a m	SELECCIÓN: matemática
CICLO 5	P: Entonces 148.6 km, ¿cuántos metros son, Marina? A: 148.6*1000 P: porque… A: un km tiene mil metros entonces para saber cuántos son 148.6 hay que multiplicar P: vale.	148.6*1000 porque un km tiene 1000 m	RAZONAMIENTO: matemático
CICLO 6	P: Ahora también tenemos que pasar, hemos dicho, los hm, ¿no? 758 hm, Rodrigo, ¿cuántos metros son? A: 75800 P: 75800 m, vale.	758 hm son 75800 m	SELECCIÓN: matemática
CICLO 7	P: Y ahora que ya tenemos todo pasado a metros, ¿qué operación tenemos que hacer?, ¿qué operación tenemos que hacer?, Naiara. A: Hay que restar 148600 menos 75800 y me da…72800 P: 72800 metros, por lo tanto es lo que le falta por recorrer.	148600-75800=72800 m le falta por recorrer	SELECCIÓN: matemática
CICLO 8	P: ¿alguien le ha hecho o se le hubiera ocurrido cómo hacerle de otra manera? A: eh…yo creo que se podría pasar los km a hm, P: para saber… A: cuántos hm ya ha hecho. Y después ya pasas los hm a m P: para… A: así ya sabes los m que faltan por recorrer P: muy bien	Otra forma de resolver es pasar los km a hm y el resultado final pasarlo a m para saber los que faltan por recorrer	RAZONAMIENTO: matemático

3.- CONOCIMIENTO PARCIALMENTE SUPERFICIAL

3.1.- Profesor 5

a) Problema reescrito: pastor

Ciclo	*Transcripción*	*Contenidos públicos*	*Categoría: subcategoría*
Ciclo 1	P: Venga empezamos, vamos a ver. Leemos. Un pastor tenía un rebaño con 57 ovejas. El pastor quería aumentar el tamaño del rebaño porque este año había buenos pastos. Para ello se fue a una feria de ganado, decidió comprar algunas ovejas y las juntó con las que ya tenía. Una tarde el pastor vio una manada de lobos por la zona, los lobos estaban hambrientos y entonces, del total de ovejas del rebaño se comieron 11 y ahora el rebaño tiene 96. ¿Cuántas ovejas compró el pastor en la feria? Adri, ¿qué datos has cogido? A: tenía 57, los lobos se comieron 11 de ellas y ahora el rebaño tiene 96 ovejas. P: Tiene 57 ovejas, los lobos se comieron 11 de ellas y ahora el rebaño tiene 96 ovejas	Tenía 57, los lobos se comieron 11 y ahora el rebaño tiene 96 ovejas	LECTURA SELECCIÓN: matemática
Ciclo 2	P: ¿Os sirven todos los datos que tiene el problema? A: Si P: ¿Todos? Todos no, hay mucha parte que no es necesaria para resolverle: quería aumentar…, lobos hambrientos..., ¿vale?	Hay muchos datos que no son necesarios para resolverlo	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 3	P: ¿qué datos tienes? A: 57 ovejas, 11 que se comieron y ahora tiene 96 P: Vale	Tiene 57 ovejas, 11 que se comieron y ahora hay 96	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 4	P: Vale, vamos con las cuentas, a ver ¿qué cuentas resolvemos, Jenni? A: 96+11 P: 96+11	96+11	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 5	P: Y esto, ¿qué te da? A: 107 P: 107 ovejas	107 ovejas	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 6	P: Y seguimos, ¿ahora qué? A: A las 107 que tendría en total, le tienes que quitar las 57 oveja que ya tenía al principio P: Y le quitamos 57 ovejas que tenía al principio	A las 107 que había en total hay que quitarle las 57 del principio	RAZONAMIENTO: matemático
Ciclo 7	P: Y esa operación, ¿te da? A: 50 P: Te da 50 ovejas que compró. Problema resuelto	50 ovejas compró	SELECCIÓN: matemática

b) Problema reescrito: bodeguero.

Ciclo	*Transcripción*	*Contenidos públicos*	*Categoría: subcategoría*
Ciclo 1	P: Leo, Un bodeguero quiere cambiar sus cubas de vino porque este año ha comprado más uvas. En las cubas de madera que ya tiene entran 158 litros, pero en estas cubas entran 26 litros menos que en las nuevas cubas metálicas que quiere comprar. ¿Cuántos litros de vino entrarán en las nuevas cubas metálicas? ¿Cuál es el primero? A: 158 l P: Dice Samuel que ponemos 158 litros que entran en las cubas de madera	En las cubas de madera entran 158 l	LECTURA SELECCIÓN: matemática
Ciclo 2	P: siguiente dato A: 26 litros P: 26 litros menos en las cubas de madera que en las metálicas	En las cubas de madera entran 26 l menos que en las metálicas	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 3	P: Y entonces Alex, ¿cuáles son las cuentas que tenemos que hacer? A: Yo creo que cogemos…158 litros y lo sumamos a 26 P: Lo sumamos a 26	158+26	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 4	P: En total ¿qué da? A: 184 litros P: Le da 184 litros que son los que caben en las cubas metálicas	En las cubas metálicas caben 184 l	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 5	P: Ahora que ya tenemos el resultado, ¿por qué ninguno ha restado? Porque decir que caben 26 litros menos en las de madera que en las de metal es lo mismo que en estas caben 26 litros más. Muy bien chicos.	Nadie ha restado porque decir que caben 26 l menos en las de madera es igual a que caben 26 litros más en las de metal	RAZONAMIENTO: matemático

c) Problema estándar: hospital

Ciclo	*Transcripción*	*Contenidos públicos*	*Categoría: subcategoría*
Ciclo 1	P: Leo el problema 4. Un hospital tiene 200 habitaciones. El 60% tienes dos camas y el resto una. ¿De cuántas camas dispone el hospital? ¿Y cuáles son los datos? A: 200 habitaciones, 60% tiene dos camas, resto una P: 200 habitaciones, 60% con dos camas y el resto tiene una cama	Hay 200 habitaciones, 60% con dos camas y el resto una	LECTURA SELECCIÓN: matemática
Ciclo 2	P: ¿Qué hacemos? A: 60% de 200 P: Hacemos el 60% de 200	60% de 200	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 3	P: ¿Qué te da? A: 120 habitaciones de dos camas P: Entonces claro al hacer el 60% de 200 te da que hay 120	El 60% de 200 da 120	SELECCIÓN: matemática

Ciclo 4	P: ¿Luego? A: 120*2 P: 120*2 muy bien	120*2	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 5	P: ¿Y esto te da? A: 240 camas P: 240 camas	240 camas	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 6	P: Sara después ¿qué has hecho? A: 200-120 P: 200-120 vale	200-120	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 7	P: ¿Y te da? A: 80 habitaciones con una cama P: Son 80 habitaciones las que tienen una cama	80 habitaciones de una cama	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 8	P: ¿Y al final? A: 240+80 P: para saber el total, hay que sumar las habitaciones de ambos tipos: 240 que son las habitaciones… las camas que tienen las habitaciones de dos camas + 80 que son las camas que tienen las habitaciones de una cama	Para saber el total hay que sumar las camas de ambos tipos de habitaciones: 240 de las habitaciones dobles más 80 de las habitaciones individuales	RAZONAMIENTO: matemático
Ciclo 9	P: ¿Y esto te da? A: Me da 320 camas tiene el hospital P: que 320 camas tiene el hospital en total	Hay 320 camas en total en el hospital	SELECCIÓN: matemática

d) Problema estándar: ciclista

Ciclo	*Transcripción*	*Contenidos públicos*	*Categoría: subcategoría*
Ciclo 1	P: Hoy hacemos el 2, lo leo. Un ciclista debe recorrer 148.6 km. Después de recorrer 758 hm, ¿cuántos metros le faltan por recorrer? P: Héctor, ¿Cuáles son los datos? A: 148.6 km y 758 hm P: 148.6 km que debe recorrer y 758 hm que ya ha recorrido	146.6 hm debe recorrer y 758 hm ha recorrido	LECTURA SELECCIÓN: matemática
Ciclo 2	P: Y nos pregunta ¿qué? cuántos metros faltan por recorrer, ¿verdad?, vale	Pregunta por cuántos metros faltan por recorrer	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 3	P: Diego, ¿qué hacemos lo primero? A: Pasar 148.6 km a metros y 758 hm a metros P: Pasamos 148.6 km a metros y 758 hm a metros	Primero hay que pasar 148.6 km y 758 hm a metros	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 4	P: ¿cuánto da entonces 148.6 km en metros?, ¿cuánto da? A: 148600 P: 148600 metros, vale	148.6 km son 148600 m	SELECCIÓN: matemática

Ciclo 5	P: ¿Y los hm en metros? A: 75800 P: 75800 m	Son 75800 m	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 6	P: Sandra, dime, ¿qué más cuentas tenemos que hacer? A: Hay que sumar las dos cosas P: a ver piensa eso A: restamos, restamos P: Ahora sí, restamos las dos cosas: 148600 - 75800	Hay que restar 148600-75800	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 7	P: ¿Y te da? A: 72800 P: 72800 metros le faltan por recorrer. Muy bien. Ya está solucionado	72800 m faltan por recorrer	SELECCIÓN: matemática

3.2.- Profesor 6

a) Problema reescrito: pastor

Ciclo	***Transcripción***	***Contenidos públicos***	***Categoría: subcategoría***
Ciclo 1	P: venga, lee en alto, por favor. A: Un pastor tenía un rebaño con 57 ovejas. El pastor quería aumentar el tamaño del rebaño porque este año había buenos pastos. Para ello, se fue a una feria de ganado, decidió comprar algunas ovejas y las juntó con las que tenía. Una tarde el pastor vio u..una ma..manada de lobos por la zona; los lobos estaban hambrientos y entonces, del total de ovejas del rebaño se comieron 11 y ahora el rebaño tiene 96. ¿Cuántas ovejas compró el pastor en la feria?		LECTURA
	A ver Jorge, cuéntanos. A: 96 + 11-57 P: 96+11-57	96+11-57	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 2	P: ¿tú qué crees Lucía? A: No P: No, ¿por qué? A: 96-57+11. ¡Ay! Que no séééé P: Hombre si yo no he dicho que lo hayas hecho mal Lucía, pero piensa. Yo no he dicho que lo hayas dicho mal. Pero… ¡Aclárate!	96-57+11	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 3	P: ¿otra? A: 96-11-57 P: vale	96-11-57	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 4	P: Jorge, ¿tu opción era?... Vamos, ¿Has dicho? A: 96+11-57 P: cierto	96+11-57	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 5	P: Tú, ¿dijiste…? A: 96-57+11 P: vale	96-57+11	SELECCIÓN: matemática

Ciclo 6	P: ¿y tú…? A: 96-11-57 P: vale	96-11-57	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 7	P: Pensar sobre las opciones… A: Creo que ya sé cómo se hace: 96+11-57. P: Pero eso es lo mismo que eso en todo caso (señala la opción en la pizarra de 96-57+11). 96+11-57, que vaya el +11 delante o detrás o el -57 delante o detrás, será la misma opción.	96+11-57 es lo mismo que 96-57+11	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 8	P: ¿Por qué hay una que está mal? A: Porque como se han comido 11 ovejas… P: Nos han comido 11 ovejas, evidentemente. Antes había 11 más, evidentemente, luego hay que sumárselas.	Una está mal porque se han comido 11 ovejas pero antes había 11 por eso hay que sumarlas	RAZONAMIENTO: matemático
Ciclo 9	P: entonces, ¿cuántas ovejas compró? A: 50 A: 50 P: ahora por eso lo dijiste mal antes, listillo.	Compró 50 ovejas	SELECCIÓN: matemática

b) Problema reescrito: bodeguero

Ciclo	*Transcripción*	*Contenidos públicos*	*Categoría: subcategoría*
Ciclo 1	P: Venga, léelo. A: Un bodeguero quiere cambiar sus cubas de vino porque este año ha comprado más uvas. En las cubas de madera que ya tiene entran 158 litros, pero en estas cubas entran 26 litros menos que en las nuevas cubas metálicas que quiere comprar. ¿Cuántos litros de vino entrarán en las nuevas cubas metálicas?		LECTURA
	P: ¿Qué nos pregunta? A: Cuántos…litros de vino entran en las cubas de metal.	Se preguntas por los litros de vino que entran en las cubas de metal	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 2	P: ¿Qué más datos nos da el problema? Venga, ¡estáis dormidos! A: eh…158 litros caben en las de madera y entran 26 litros menos que en las de metal P: eso	158 l entran en las cubas de madera y entran 26 l menos que en las de metal	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 3	P: Ya está todo, ¿no? A: no P: ¿seguro?, ¿qué falta? A: pues que el bodeguero… P: no, no, eso no es un dato. ¡Desde cuándo texto son datos! Un dato es 158, -1, 45%, números, por dios, números.	El bodeguero… no es un dato, datos son números	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 4	P: entonces, ahora que ya sabemos los datos, ¿qué operación hacemos Juan? A: 158-26 P: pero estás dormido. Piensa eso que has dicho.	158-26	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 5	P: Lucía, ¿tú qué harías? A: pues… 158+26 P: Vale	158+26	SELECCIÓN: matemática

Ciclo 6	P: Los que habéis restado como Juan, ¿en qué os habéis fijado? En que caben menos, claro., sois muy listillos vosotros, pero en este caso eso no nos vale porque hay que sumar, por dios, sumar, sumar.	Se ha restado porque pone “caben menos” pero hay que sumar	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 7	P: ¿cuánto da entonces? A: 184 P: 184 litros.	184 l	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 8	P: Resumo el problema: si tiene unas cubas que caben 158l y va a comprar unas nuevas, digo yo, que serán más grandes, ¿no? Entonces si en las que tenía antes caben 26 litros menos será que en las nuevas caben 26 litros más…	Tiene unas cubas de 158 l y compra otras más grandes. Si en las de madera caben l menos, en las nuevas caben 26 l más	RAZONAMIENTO: matemático

c) Problema estándar: hospital

Ciclo	*Transcripción*	*Contenidos públicos*	*Categoría: subcategoría*
Ciclo 1	P: leyendo el problema A: Un hospital tiene 200 habitaciones, el 60% de las habitaciones tienen 2 camas y el resto una. ¿De cuántas camas dispone el hospital? P: Vale, decirme lo que hay que hacer. A: El 60% de 200 P: vale	60% de 200	LECTURA SELECCIÓN: matemática
Ciclo 2	P: A ver, ¿cómo resolvemos un porcentaje de un cantidad? A: ¡Jobar! A: Jope que difícil P: venga. ¿Cuánto da? Por amor de Dios. Mañana sin recreo (de broma). Vamos. A: 60 por 200 entre 100 P: muy bien	(60*200)/100	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 3	P: Entonces el 60% de 200, ¿es? A: 110 P: ¿Ciento qué? A: 110, ah no, espera. P: Ay Dios. Venga. A: 120 P: 120, pero no 110 listooo A: Casi.	El 60% de 200 es 120	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 4	P: Entonces, ¿cuántas camas hay en las habitaciones de dos camas? A: 120 A: No, 120 por 2 P: 120 por 2, 240. Por amor de Dios	120*2=240	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 5	P: ¿Y ahora que habrá que hacer? A: Yo restaría P: vale.	Hay que restar	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 6	P: ¿Cuántas habitaciones hay? A: 200 P: vale	Hay 200 habitaciones	SELECCIÓN: matemática

Ciclo 7	P: ¿Cuántas habitaciones hay de dos? A: 120 P: vale	Hay 120 habitaciones de dos camas	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 8	P: ¿Qué hago ahora? A: 220 menos 100 P: No hay ningún 220, macho. A: O sea, 200 menos 120. P: Claro. 200 menos 120 y me da 80 de una	200-120=80	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 9	P: O sea ¿Cuántas camas hay en total? A: 80 P: 320 P: ¡Vaya! Que no te nombren gerente del hospital que nos dejas sin camas.	Hay 320 camas	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 10	P: ¿qué operación hay que hacer Lucía? A: Sumar P: Sumar… A: 240 más 80 P: Pues a ver si sumas bien: 240 más 80… A: 320 P: 320 camas	240+80=320	SELECCIÓN: matemática

d) Problema estándar: ciclista

Ciclo	***Transcripción***	***Contenidos públicos***	***Categoría: subcategoría***
Ciclo 1	P: Hoy el dos. Venga. Jorge. A: Un ciclista debe recorrer 148,6 Km. Después de recorrer 758 hm, ¿Cuántos metros le falta por recorrer? P: ¿En qué va la pregunta? En… ¿Qué unidad tiene la pregunta? A: Metros. P: vale	La pregunta se pide en m	LECTURA SELECCIÓN: matemática
Ciclo 2	P: Ahora, ¿qué hay que hacer con esas unidades? A: Pasarlas a metros. P: Pues todo a metros.	Hay que pasar las distintas unidades a m	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 3	P: Antes de nada ¿cuáles son los datos que nos da el problema? A: 148.6 km debe recorrer y 758 hm ha recorrido.	148.6 km debe recorrer y 758 hm ha recorrido	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 4	P: Venga el primero a ver, ¿qué hacemos? A: Ciento cuarenta y … P: No, no, ¿qué operación? A: multiplicar por 1000 y por 100 P: Pues ya está.	Hay que multiplicar por 1000 y por 100	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 5	P: a ver entonces ¿cuántos metros os da? A: 148600 y 75800 P: Eso está bien.	148600 m y 75800 m	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 6	P: ¿Qué hemos hecho realmente?, ¿lo he hecho porque me da la gana o por qué?, ¿qué hemos hecho y por qué? A: Multiplicar por 1000 y 100 P: Porque… A: porque de km a m hay mil y de hm a m cien. P: porque un km tiene 1000 m, y un hm 100, ¿vale?	Hay que multiplicar por 1000 porque un km tiene mil m y por 100 porque un hm tiene 100 m	RAZONAMIENTO: matemático

Ciclo 7	P: Lucía, lee qué dice la pregunta ¿Cuántos metros le falta por recorrer? Entonces, ¿qué operación haremos ahora? A: sumar P: ¿cómo? Has dicho una burrada. A: ¡Ah! Si pone que le falta es restar. P: eso es, siempre hay que buscar las pistas, ¿está claro?	 Hay que restar porque pone “falta” y hay que buscar pistas	LECTURA SELECCIÓN: matemática
Ciclo 8	P: Hay que restar vale, ¿Y qué restamos? A: Pues…. P: rápido, rápido, parecéis niños de tres años. A: eh… 148600-75800 P: vale	148600-75800	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 9	P: ¿Cuánto me da? Vamos que me duermo. A: Espeeeraa P: Me dormí. Vamos, venga, vamos. A1: Es que se me olvidan los números. A: Déjanos pensar… P: ¿Cuánto da? Vamos A: 62800 P: ¿Seguro? ¡Pues no! A: 72800 m P: ¡Ah! A ver si ahora no sabemos restar. Por amor de Dios, es una resta.	72800 m	SELECCIÓN: matemática

4.- CONOCIMIENTO SUPERFICIAL

4.1.- Profesor 7

a) Problema reescrito: pastor

Ciclo	Transcripción	Contenidos públicos	Categoría: subcategoría
Ciclo 1	P: Hoy vamos a hacer el problema que os voy a dar, empiezo a leer: Un pastor tenía un rebaño con 57 ovejas. El pastor quería aumentar el tamaño del rebaño porque este año había buenos pastos. Para ello, se fue a una feria de ganado, decidió comprar algunas ovejas y las juntó con las que ya tenía. Una tarde el pastor vino y vio una manada de lobos por la zona; los lobos estaban hambrientos y entonces, del total de ovejas del rebaño se comieron 11 y ahora el rebaño tiene 96. ¿Cuántas ovejas compro el pastor en la feria? Bien, empezamos. Chicos primer dato que sabemos A: que tenía 57 ovejas P: bien, tenía un rebaño con 57 ovejas.	El rebaño tenía 57 ovejas	LECTURA SELECCIÓN: matemática
Ciclo 2	P: ¿qué más sabemos, Jesús? A: pues que…los lobos se comieron 11 P: vale	Los lobos se comieron 11 ovejas	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 3	P: ¿algo más nos dice el problema? A: siii P: ¿el qué?, ¿quién me dice el siguiente dato? A: yooo P: venga, Lucía A: que se quedó con 96 ovejas. P: Bien	El pastor se quedó con 96 ovejas.	SELECCIÓN: matemática

Ciclo 4	P: venga, entonces ¿a quién se le ocurre cómo resolver? A: profe, yo creo que si los lobos se comieron hay que saber cuántas le quedaron, entonces se lo restamos a las que tenía P: vale a las iniciales A: y esas son las ovejas vivas. P: bien, sigue A: entonces luego restamos las que tenía vivas después de los lobos y las que tenía vivas al principio. Y ya está. P: vale muy bien.	Para saber las que le quedaron hay que restar las que tenía menos las que se comieron los lobos Para saber las que compró se restan las que le quedaron al final menos que tenía al principio vivas.	RAZONAMIENTO: matemático
Ciclo 5	P: vamos a hacerlo con números en la pizarra, María sal. Lo primero que tenemos que hacer es restar las 57 que tenemos menos las 11 que nos comen, ¿no? pues venga A: 57 menos 11 ehhh… 46 P: vale	57-11= 46	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 6	P: ahora, ¿qué? Las 96 menos las 46 que decía Víctor. Adelante A: ehh…50 P: vale.	96-46 = 59	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 7	P: Entonces, ¿cuántas ovejas compró el pastor? A: 50	El pastor compró 50 ovejas	SELECCIÓN: matemática

b) Problema reescrito: bodeguero

Ciclo	Transcripción	Contenidos públicos	Categoría: subcategoría
Ciclo 1	P: Ahora chicos vamos a hacer el problema que os he repartido, ¿de acuerdo? Lo voy a leer así que atentos. Un bodeguero quiere renovar las cubas de vino porque este año ha comprado más uvas. En las cubas de madera que tiene caben 158 litros de vino, pero en estas cubas de madera caben 26 litros menos que en unas cubas nuevas metálicas. ¿Cuántos litros de vino caben en las nuevas cubas metálicas?		LECTURA
	P: Lo hemos entendido, ¿verdad?, pues empezamos. Pablo, ¿cuál es el primer dato que tenemos? A: que en las cubas… que en las de madera caben 158 litros. P: eso es	En las cubas de madera caben 158 litros	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 2	P: ¿tenemos algún dato más, chicos? A: Siiiii P: ¿cuál? A: que caben 26 litros menos P: ¿dónde? A: en las de madera P: En las de madera	En las cubas de madera caben 26 litros menos	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 3	P: Entonces ¿cómo sabemos los que caben en las de metal, si los dos datos que nos dan son de las de madera? A: Porque… si son 26 menos en las de madera quiere decir que las nuevas cabe más porque las nuevas son más grandes. ¡Me estoy liando! P: No, te has explicado muy bien, Lucía.	En las cubas de madera caben 26 litros menos que en las de metal quiere decir que las cubas de metal son más grandes	RAZONAMIENTO: matemático

Ciclo 4	P: Entonces ¿qué operación hacemos para saber los litros de las nuevas cubas? A: sumarrrrrr P: Sumar 158 + 26 P: perfecto. Venga hacer la suma. ¡Cuidado con las que nos llevamos, no se nos olviden!	Hay que sumar 158+26	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 5	A: terminé. A: ya, seño, 184. P: Vale, entonces 184 litros caben ¿en qué cubas? A: en las de metal. P: eso es.	184 litros caben en las cubas de metal	SELECCIÓN: matemática

c) Problema estándar: hospital

Ciclo	Transcripción	Contenidos públicos	Categoría: subcategoría
Ciclo 1	P: A ver chicos empiezo a leer el problema del hospital, atentos. Un hospital tiene 200 habitaciones, el 60% de las habitaciones tienen 2 camas y el resto una. ¿De cuántas camas dispone el hospital? Primer dato que nos da el problema. A: hay 200 habitaciones P: bien.	 Hay 200 camas	LECTURA SELECCIÓN: matemática
Ciclo 2	P: más A: pues que… 60% tiene 2 camas P: Perfecto. Lo seguimos todos, ¡no!	El 60% tiene 2 camas y el resto 1	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 3	P: continua A: el resto tiene 1 P: si	El resto tiene 1	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 4	P: ¿Algún dato más? A: noooo, ya están todos. A: siiiii, faltan, faltan. P: uy por qué no estamos de acuerdo todos… a ver, Víctor que levanta la mano si nos soluciona esto, dime. A: pues que falta de cuántas dispone el hospital. P: muy bien. Perfecto nos faltaba la pregunta del problema, chicos.	Pregunta por las camas de las que dispone el hospital	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 5	P: ahora que ya sabemos todos los datos, ¿qué hacemos, Jesús? A: um… pues yo creo que calculamos el 60% de 200 para saber las habitaciones dobles, y las que sobran son las habitaciones individuales y luego sumar para saber las camas totales. P: muy bien, veo que no has tenido mucha dificultad…	Se calcula el 60% de 200 para saber las habitaciones dobles, las que restan son las individuales y para saber las camas totales se suma	RAZONAMIENTO: matemático
Ciclo 6	P: pues venga vamos a hacerlo. Juan, dinos, ¿cómo empezamos? A: um… pues 200*60 y lo que nos dé entre 100. P: Vale, ya tenemos 120 habitaciones dobles	(200*60)/100 = 120 habitaciones dobles	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 7	P: ¿Y ahora? A: pues 120*2…240 camas P: sigue	120*2 = 240 camas	SELECCIÓN: matemática

Ciclo 8	P: sigue A: 80*1, 80 P: 80 camas. Vale, ¡stop!	80*1=80 camas	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 9	P: Leticia, ¿te estás enterando?, ¿qué más hay que hacer? A: em… pues ahora… sumar… 240+80 P: ¿Estás segura? Lo dices con miedo…	240+80	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 10	P: ¿cuánto nos da? A: 310 P: ¿Cómo? A ver esa suma… (silencio) A: ah, 320 P: Eso me gusta más.	320	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 11	P: y ahora ya sí, ¿qué respuesta damos a la pregunta del problema? A: de 320 camas dispone el hospital P: Muy bien, 320 camas hay en total	El hospital dispone de 320 camas	SELECCIÓN: matemática

d) Problema estándar: ciclista

Ciclo	Transcripción	Contenidos públicos	Categoría: subcategoría
Ciclo 1	P: Venga hoy en vez de hacer el problema al final lo vamos a hacer ahora, ¿os parece? Pablo, lee el problema 2. Un ciclista debe recorrer 148,6 Km. Después de recorrer 758 hm, ¿cuántos metros le falta por recorrer? P: A ver, ¿qué es lo primero que sabemos, María? A: que debe recorrer 148,6 km. P: vale.	Debe recorrer 148,6 km.	LECTURA SELECCIÓN: matemática
Ciclo 2	P: siguiente dato, Lucía. A: que el ciclista ha recorrido ya 758 hm. P: muy bien.	Ha recorrido 758 hm.	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 3	P: ¿qué nos pregunta el problema, chicos? A: que cuántos metros le falta por recorrer. P: cuántos metros le faltan, ¿verdad?	La pregunta del problema es cuántos metros le faltan.	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 4	P: ¿qué tendremos que hacer para saber cuántos metros le faltan, Víctor? A: pues profe yo creo que primero tenemos que pasar los kilómetros y los hectómetros a metros. P: Eso es Víctor. Pues venga, haciéndolo rápido. (trabajan varios minutos)	Primero se pasan los km y hm a metros.	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 5	P: ¿Ya?, ¿cuánto os da? A: Espera A: a mí me da 148.600 y 75.800 metros. P: Vale.	El resultado es 148.600 m y 75.800 m.	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 6	P: ¿entonces estos datos que tenemos que significan? A: pues… A: a ver pues que sabemos las dos partes… los km, uy, los metros que tiene que recorrer en total y también los que ya ha hecho el pobre señor. Entonces solo nos falta saber… P: espera, espera. No te adelantes.	Se saben los dos conjuntos: los m que ha recorrido y los m que tiene que recorrer en total	RAZONAMIENTO: matemático

Ciclo 7	P: ¿Y ahora qué hacemos, Alberto? A: pues muy fácil, señorita. Restamos 148.600 menos 75.800. P: Adelante.	148600-75800	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 8	A: Listo A: ya P: ¿Cuánto os da? A: 72.800 A: 72.786 P: Pues revisa la operación porque el resultado está bien.	72800	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 9	P: entonces, ¿cuál es la solución al problema, Jesús? A: 72.800 P: Ese es el resultado de la resta y yo te estoy preguntando por la solución a la pregunta del problema. A: Pues 72.800 P: Pero 72.800, ¿qué? A: ah, metros que le faltan por recorrer. P: estás dormido, Jesús. 72.800 metros le faltan por recorrer al ciclista.	72800 metros faltan por recorrer al ciclista	SELECCIÓN: matemática

4.2.- Profesor 8

a) Problema reescrito: pastor

Ciclo	Transcripción	Contenidos públicos	Categoría: subcategoría
Ciclo 1	P: Un pastor tenía un rebaño con 57 ovejas. El pastor quería aumentar el tamaño del rebaño porque este año había buenos pastos. Para ello se fue a una feria de ganado, decidió comprar algunas ovejas y las juntó con las que ya tenía. Una tarde el pastor vio una manada de lobos por la zona, los lobos estaban hambrientos y entonces, del total de ovejas del rebaño se comieron 11 y ahora el rebaño tiene 96. ¿Cuántas ovejas compró el pastor en la feria?		LECTURA
	P: venga va a salir Rafa, empezamos. Ya sabéis que a mí me gusta poner los datos primero aquí a la izquierda. Entonces tenía 57 ovejas, verdad. Compró ovejas pero no sabemos cuántas, que es lo que nos pregunta. El lobo se comió 11ovejas y ahora tiene 96	Tenía 57 ovejas, compró algunas, los lobos se comieron 11 y ahora tiene 96	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 2	P: ahora nos vas explicando qué hiciste A: 96+11 P: vale	96+11	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 3	P: ¿qué significa? A: Para calcular… P: Pero por qué pones 96+11 y no 57+11, a ver, tú explícame por qué A: Porque primero hay que saber todas las que tenía más las que compró P: Pero a ver cómo todas las que tenía… tienes que explicarte bien A: 96 que son las que le quedan + 11 que son las que se comió el lobo P: Vale eso sí	Hay que sumar que le quedan más las 11 que se comió el lobo	RAZONAMIENTO: matemático

Ciclo 4	P: ¿Y te dio? A: 107 P: 107 ovejas	107 ovejas	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 5	P: ¿Y ahora? A: 107-57 P: sí	107-57	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 6	P: ¿y cuántas son? A: 50 ovejas P: Serán 50 ovejas	50 ovejas	SELECCIÓN: matemática

b) Problema reescrito: bodeguero

Ciclo	Transcripción	Contenidos públicos	Categoría: subcategoría
Ciclo 1	P: Quién lee el problema…, Manuel, léelo con comas y puntos y todo. Venga empieza. A: Un bodeguero quiere cambiar sus cubas de vino porque este año ha comprado más uvas. En las cubas de madera que ya tiene entran 158 litros, pero en estas cubas entran 26 litros menos que en las nuevas cubas metálicas que quiere comprar. ¿Cuántos litros de vino entrarán en las nuevas cubas metálicas? Como es muy largo y tiene mucho texto lo va a leer otra persona, Andrea.		LECTURA
	A: Un bodeguero quiere cambiar sus cubas de vino porque este año ha comprado más uvas. En las cubas de madera que ya tiene entran 158 litros, pero en estas cubas entran 26 litros menos que en las nuevas cubas metálicas que quiere comprar. ¿Cuántos litros de vino entrarán en las nuevas cubas metálicas?		LECTURA
	P: Vale, voy a ir leyendo yo y vamos mirando datos. Un bodeguero quiere cambiar sus cubas de vino porque este año ha comprado más uvas. ¿Tenemos algún dato ahí? A: No P: No, simplemente nos dice que es un bodeguero y que ha comprado más uvas verdad. No tenemos ningún dato numérico	No hay datos numéricos	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 2	P: Siguiente frase: En las cubas de madera que ya tiene entran 158 litros, pero en estas cubas entran 26 litros menos que en las nuevas cubas metálicas que quiere comprar		LECTURA
	¿Qué datos tenemos ahí? A: Que en las cubas que ya tiene entran 158 litros P: O sea en las cubas que tiene entran 158 litros	En las cubas que tiene entran 158 l	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 3	P: Pero nos da otro dato importante, quiero que lo penséis antes de decirlo. Pero en estas cubas entran 26 litros menos que en las nuevas cubas metálicas que quiere comprar. A: Que en las cubas metálicas entran 26 litros más P: Más, vale. En estas cubas que ya tiene entran 26 litros menos entonces en la nueva entran 26 litros más.	En las cubas de madera entran 26 l menos que en las metálicas entonces en las nuevas caben 26 l más	RAZONAMIENTO: matemático

Ciclo 4	P: Pero ¿qué pregunta, Lucía?, ¿qué pregunta? A: ¿Cuántos litros de vino entrarán en las nuevas cubas metálicas? P: Pues ale, a hacer el problemita (silencio)	Se pregunta cuántos litros de vino entran en las nuevas cubas metálicas	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 5	P: Venga va a salir Nuria a hacerlo. Hala, sal a hacerlo. A: 158+26 P:vale	158+26	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 6	P: ¿y te da? A: 184 litros P: a Nuria le ha dado 184 litros. Pasamos a otra cosa	184 l	SELECCIÓN: matemática

c) Problema estándar: hospital

Ciclo	Transcripción	Contenidos públicos	Categoría: subcategoría
Ciclo 1	P: A ver, lee el problema. A: Un hospital tiene 200 habitaciones. El 60% de las habitaciones tiene 2 camas y el resto una, ¿de cuántas camas dispone el hospital? P: Vale. Ana, ¿qué datos os da? A: Hay 200 habitaciones P: 200 habitaciones	Hay 200 habitaciones	LECTURA SELECCIÓN: matemática
Ciclo 2	P: ¿Y qué otro dato tenemos Beatriz? A: El 60% es de dos camas P: vale	El 60% es de dos camas	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 3	P: ¿Y el resto? A: de una cama P: vale	El resto es de una cama	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 4	P: ¿qué tanto por ciento será de una cama, Lucía? A: 40% P: Un 40%, si el 60% es de dos, lo que queda hasta el total que es 100, el 40 de una.	El 40% es de una cama porque 100 menos 60 de dos camas	RAZONAMIENTO: matemático
Ciclo 5	P: Ahora lo va a releer una niña, Nuria. A: Un hospital tiene 200 habitaciones. El 60% de las habitaciones tiene 2 camas y el resto una, ¿de cuántas camas dispone el hospital? P: Mirad bien lo que pregunta, no pregunta ni cuántas habitaciones hay de dos camas ni cuántas habitaciones hay de una, ¿qué pregunta? A: de cuántas camas dispone el hospital P: De cuántas camas dispone el hospital (minutos de silencio)	Se pregunta por cuántas camas dispone el hospital	LECTURA SELECCIÓN: matemática
Ciclo 6	P: Venga sale Lucía a hacerlo, hace como si fuera yo y lo va explicando. A: lo primero voy a calcular el 60% de 200 P: vale	60% de 200	SELECCIÓN: matemática

Ciclo 7	P: vas a hacer eso para saber ¿qué? A: el nº de habitaciones dobles P: para saber cuántas habitaciones de dos camas hay y poder saber las camas después	Hay que saber el nº de habitaciones dobles para poder saber el nº de camas	RAZONAMIENTO: matemático
Ciclo 8	P: qué vas a hacer A: (60*200)… P: eh, eh, mira ver qué te falta… A: *100 P: vale	(60*200)/100	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 9	P: ¿cuánto es? A: 120 habitaciones P: vale, pues pones una rayita, 2 camas. Ya sabemos que hay 120 habitaciones con dos camas	120 habitaciones de dos camas	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 10	P: venga A: Ahora (40*200)/100, 80 habitaciones P: 80 de una cama muy bien	(40*200)/100=80 habitaciones de una cama	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 11	P: Pero no nos pide habitaciones, ¿qué dice el problema? cuántas camas hay, ¿no?	Pregunta por las camas no por las habitaciones	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 12	P: Entonces, ¿qué hiciste? A: 120*2, 240 camas P: Camas vale	120*2=240 camas	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 13	P: ¿Algo más? A: Si, 80*1, 80 P: vale	80*1=80	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 14	P: ¿Y luego? A: Sumar 240+80 que es 320 camas P: Vale	240+80=320 camas	SELECCIÓN: matemática

d) Problema estándar: ciclista

Ciclo	Transcripción	Contenidos públicos	Categoría: subcategoría
Ciclo 1	P: A ver quien lee… Tiziano, te tocó. Alto y claro. A: Un ciclista debe recorrer 148,6 km. Después de recorrer 758 hm. ¿Cuántos metros le falta por recorrer? P: Vamos a volver a leerlo para que nos quede claro, Lucía, empieza. A: Un ciclista debe recorrer 148,6 km. Después de recorrer 758 hm. ¿Cuántos metros le falta por recorrer? P: primer dato A: debe recorrer 148.6 kilómetros	Debe recorrer 148.6 km	LECTURA LECTURA SELECCIÓN: matemática

Ciclo 2	P: ¿Alguno más? A: ha recorrido 758 hm P: vale	Ha recorrido 758 hm	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 3	P: y nos pregunta ¿qué? A: cuántos metros le faltan por recorrer P: vale. Atentos a lo que nos pregunta.	Se pregunta cuántos m le faltan por recorrer	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 4	P: A ver empieza a explicarnos por dónde empezamos. A: pues… como nos pide el resultado en metros voy a pasar los km y los hm primero, y luego hay que restar todo el camino menos lo que ya ha hecho P: o sea que vas a restar el total menos la parte recorrida, trabajando todo en metros, ¿no? Muy bien	Hay que pasar los km y hm a m porque el resultado lo pide en m. Luego hay que restar el total menos lo que ya ha recorrido	RAZONAMIENTO: matemático
Ciclo 5	P: ¿Qué vas a hacer lo primero? A: 148.6*1000 y 758*100 P: venga	148.6*1000 y 758*100	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 6	P: ¿y eso es? A: (silencio) 148600 y 75800 P: vale	148600 y 75800	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 7	P: ¿Y ahora? A: 148600+75800 P: ¿seguro? Recuerda lo que dijiste antes que era correcto… A: ah, menos P: 148600-75800	148600-75800	SELECCIÓN: matemática
Ciclo 8	P: Entonces, ¿cuál es el resultado del problema? A: 72800 P: 72800 metros. Bien, terminamos. Vamos a nuestro libro.	72800 m	SELECCIÓN: matemática

VNiVERSiDAD
D SALAMANCA

CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL