Curso Cero de Matemáticas para las titulaciones de la Facultad de Economía y Empresa

Tema 3: Matrices y determinantes

Facultad de Economía y Empresa.
Dpto Economía e Historia Económica
Perfil Matemáticas

19 de junio de 2017

VNIVERSIDAD D SALAMANCA
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

800 AÑOS
1218 ~ 2018

J. Manuel Cascón, <casbar@usal.es>
Federico Cesteros, <fcesteros@usal.es>
Rodrigo del Campo, <rde@usal.es>
Aurora Manrique, <amg@usal.es>
M. Dolores García, <dgarcia@usal.es>
Bernardo García-Bernalt, <bgarcia@usal.es>
Guillermo Sánchez, <guillermo@usal.es>
Gustavo Santos, <santos@usal.es>

19 de junio de 2017

Esquema

Esquema

Matrices

- Definición
- Operaciones
- Matriz traspuesta
- Matriz inversa
- Rango de una matriz

Determinantes

- Definición
- Aplicaciones: inversa y rango
- Propiedades

Matrices

Definición Se denomina matriz de dimensión $m \times n$ a un conjunto de números dispuestos en m filas y n columnas

$$A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \; a_{ij} \in \mathbb{R}, \; \forall i, j$$

De forma abreviada, se escribe $\boxed{A = (a_{ij})_{m\times n}}$

Tipos de matrices

- M. fila: $A \in \mathbb{M}_{1\times n}(\mathbb{R})$
- M. columna: $A \in \mathbb{M}_{m\times 1}(\mathbb{R})$
- M. cuadrada: $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$
- M. simétrica:

$$A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \; : \; a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, j$$

- M. triangular: $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$
  <u>Inferior</u>: $a_{ij} = 0 \quad \forall i < j$
  <u>Superior</u>: $a_{ij} = 0 \quad \forall i > j$

- M. identidad: $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$

$$a_{ii} = 1 \quad \forall i, \qquad a_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j$$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Tipos de matrices

- M. fila: $A \in \mathbb{M}_{1\times n}(\mathbb{R})$
- M. columna: $A \in \mathbb{M}_{m\times 1}(\mathbb{R})$
- M. cuadrada: $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$
- M. simétrica:

$$A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \, : \, a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, j$$

- M. triangular: $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$
  Inferior: $a_{ij} = 0 \quad \forall i < j$
  Superior: $a_{ij} = 0 \quad \forall i > j$

- M. identidad: $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$

$$a_{ii} = 1 \quad \forall i, \qquad a_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j$$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tipos de matrices

- M. fila: $A \in \mathbb{M}_{1\times n}(\mathbb{R})$
- M. columna: $A \in \mathbb{M}_{m\times 1}(\mathbb{R})$
- M. cuadrada: $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$
- M. simétrica:

$$A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \,:\, a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i,j$$

- M. triangular: $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$
  <u>Inferior</u>: $a_{ij} = 0 \quad \forall i < j$
  <u>Superior</u>: $a_{ij} = 0 \quad \forall i > j$

- M. identidad: $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$

$$a_{ii} = 1 \quad \forall i, \qquad a_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j$$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Tipos de matrices

- M. fila: $A \in \mathbb{M}_{1\times n}(\mathbb{R})$
- M. columna: $A \in \mathbb{M}_{m\times 1}(\mathbb{R})$
- M. cuadrada: $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$
- M. simétrica:

$$A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \,:\, a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i,j$$

- M. triangular: $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$
  Inferior: $a_{ij} = 0 \quad \forall i < j$
  Superior: $a_{ij} = 0 \quad \forall i > j$
- M. identidad: $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$

$$a_{ii} = 1 \quad \forall i, \qquad a_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j$$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Tipos de matrices

- M. fila: $A \in \mathbb{M}_{1\times n}(\mathbb{R})$
- M. columna: $A \in \mathbb{M}_{m\times 1}(\mathbb{R})$
- M. cuadrada: $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$
- M. simétrica:

$$A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \ : \ a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i,j$$

- M. triangular: $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$
  Inferior: $a_{ij} = 0 \quad \forall i < j$
  Superior: $a_{ij} = 0 \quad \forall i > j$

- M. identidad: $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$

$$a_{ii} = 1 \quad \forall i, \qquad a_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j$$

Ejemplo

$$A_I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Tipos de matrices

- M. fila: $A \in \mathbb{M}_{1\times n}(\mathbb{R})$
- M. columna: $A \in \mathbb{M}_{m\times 1}(\mathbb{R})$
- M. cuadrada: $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$
- M. simétrica:

$$A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \ : \ a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i,j$$

- M. triangular: $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$
  Inferior: $a_{ij} = 0 \quad \forall i < j$
  Superior: $a_{ij} = 0 \quad \forall i > j$

- M. identidad: $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$

$$a_{ii} = 1 \quad \forall i, \qquad a_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j$$

Ejemplo

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Operaciones con matrices

- **Suma**: Dadas $A, B \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, la suma de matrices se define:

$$\boxed{C = A + B \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad \forall i, j}$$

- **Producto por escalar**: Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, y $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, el producto por escalar se define:

$$\boxed{B = \lambda A \Leftrightarrow b_{ij} = \lambda a_{ij} \qquad \forall i, j}$$

- **Producto matricial**: Dadas $A \in \mathbb{M}_{m\times n}$, y $B \in \mathbb{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$, el producto matricial es otra matriz $C \in \mathbb{M}_{m\times p}$ tal que

$$\begin{aligned} C = AB \Leftrightarrow c_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \\ &= a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{in} b_{nj} \qquad \forall i, j \end{aligned}$$

Propiedades: asociativo, distributivo con la suma, NO es conmutativo

Operaciones con matrices. Producto

Ejemplo Calcular:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -5 & 6 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Operaciones con matrices. Producto

Ejemplo Calcular:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\times 2+(-2)\times(-1) & 1\times 0+(-2)\times 2 & 1\times 3+(-2)\times 1 \\ (-1)\times 2+3\times(-1) & (-1)\times 0+3\times 2 & (-1)\times 3+3\times 1 \\ 0\times 2+1\times(-1) & 0\times 0+1\times 2 & 0\times 3+1\times 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -5 & 6 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Operaciones con matrices. Producto

Ejemplo Calcular:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \times 2 + (-2) \times (-1) & 1 \times 0 + (-2) \times 2 & 1 \times 3 + (-2) \times 1 \\ (-1) \times 2 + 3 \times (-1) & (-1) \times 0 + 3 \times 2 & (-1) \times 3 + 3 \times 1 \\ 0 \times 2 + 1 \times (-1) & 0 \times 0 + 1 \times 2 & 0 \times 3 + 1 \times 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -5 & 6 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Operaciones con matrices. Producto

Ejemplo Calcular:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\times 2+(-2)\times(-1) & 1\times 0+(-2)\times 2 & 1\times 3+(-2)\times 1 \\ (-1)\times 2+3\times(-1) & (-1)\times 0+3\times 2 & (-1)\times 3+3\times 1 \\ 0\times 2+1\times(-1) & 0\times 0+1\times 2 & 0\times 3+1\times 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -5 & 6 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Operaciones con matrices. Producto

Ejemplo Calcular:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\times 2+(-2)\times(-1) & 1\times 0+(-2)\times 2 & 1\times 3+(-2)\times 1 \\ (-1)\times 2+3\times(-1) & (-1)\times 0+3\times 2 & (-1)\times 3+3\times 1 \\ 0\times 2+1\times(-1) & 0\times 0+1\times 2 & 0\times 3+1\times 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -5 & 6 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Operaciones con matrices. Producto

Ejemplo Calcular:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \times 2 + (-2) \times (-1) & 1 \times 0 + (-2) \times 2 & 1 \times 3 + (-2) \times 1 \\ (-1) \times 2 + 3 \times (-1) & (-1) \times 0 + 3 \times 2 & (-1) \times 3 + 3 \times 1 \\ 0 \times 2 + 1 \times (-1) & 0 \times 0 + 1 \times 2 & 0 \times 3 + 1 \times 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -5 & 6 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Operaciones con matrices. Producto

Ejemplo Calcular:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\times 2+(-2)\times(-1) & 1\times 0+(-2)\times 2 & 1\times 3+(-2)\times 1 \\ (-1)\times 2+3\times(-1) & (-1)\times 0+3\times 2 & (-1)\times 3+3\times 1 \\ 0\times 2+1\times(-1) & 0\times 0+1\times 2 & 0\times 3+1\times 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -5 & 6 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Operaciones con matrices. Producto

Ejemplo Calcular:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\times 2+(-2)\times(-1) & 1\times 0+(-2)\times 2 & 1\times 3+(-2)\times 1 \\ (-1)\times 2+3\times(-1) & (-1)\times 0+3\times 2 & (-1)\times 3+3\times 1 \\ 0\times 2+1\times(-1) & 0\times 0+1\times 2 & 0\times 3+1\times 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -5 & 6 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Operaciones con matrices. Producto

Ejemplo Calcular:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\times 2+(-2)\times(-1) & 1\times 0+(-2)\times 2 & 1\times 3+(-2)\times 1 \\ (-1)\times 2+3\times(-1) & (-1)\times 0+3\times 2 & (-1)\times 3+3\times 1 \\ 0\times 2+1\times(-1) & 0\times 0+1\times 2 & 0\times 3+1\times 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -5 & 6 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Operaciones con matrices. Producto

Ejemplo Calcular:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\times 2+(-2)\times(-1) & 1\times 0+(-2)\times 2 & 1\times 3+(-2)\times 1 \\ (-1)\times 2+3\times(-1) & (-1)\times 0+3\times 2 & (-1)\times 3+3\times 1 \\ 0\times 2+1\times(-1) & 0\times 0+1\times 2 & 0\times 3+1\times 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -5 & 6 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Operaciones con matrices. Producto

Ejemplo Calcular:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -5 & 6 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz traspuesta

Definición Dada $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ se define la matriz traspuesta de A y se denota $A^t \in \mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ a:

$$\boxed{A^t \Leftrightarrow a^t_{ij} = a_{ji} \qquad \forall i,j}$$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Leftrightarrow \qquad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Propiedades

1. $(A+B)^t = A^t + B^t$
2. $(AB)^t = B^t A^t$
3. $A^t = A \Leftrightarrow$ A es simétrica

Matriz inversa

Definición: Una matriz $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ se dice invertible o regular si existe otra matriz $A^{-1} \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, que se denomina inversa, que satisface:

$$\boxed{AA^{-1} = A^{-1}A = I_n}$$

(siendo I_n la matriz identidad de orden n)

Propiedades

1. Si existe la inversa es única
2. Si A y B son invertibles $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
3. $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t = A^{-t}$

Rango de una matriz (I)

Dada una matriz A, se denominan transformaciones elementales de la matriz a las siguientes operaciones:

- Intercambiar de posición dos filas (o columnas) entre sí
- Multiplicar una fila (o columna) por un número distinto de 0
- Sumar a una fila (o columna) el múltiplo de otra

Una matriz A, se dice escalonada por filas si verifica:

Si a_{ij} es el primer elemento de la fila i-ésima no nulo, entonces, todos los elementos situados hasta la columna j y por debajo de la fila i son nulos

Dado i, sea j el menor índice verificando

$$a_{ij} \neq 0 \Rightarrow a_{kl} = 0, \ \forall k > i, \ l \leqslant j$$

$$\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_{ij} \neq 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \vdots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Rango de una matriz (II)

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Escalonada Escalonada No escalonada

Propiedades:

- Toda matriz escalonada por filas es triangular superior
- Toda matriz se puede reducir a una matriz escalonada por filas mediante transformaciones elementales.

Rango de una matriz (III)

Ejemplo Reducir a una matriz escalonada por filas

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \Rightarrow \\ f_2 - 3f_1 \\ f_3 + 2f_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \Rightarrow \\ f_3 + \frac{5}{4}f_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Definición Dos matrices se dicen equivalentes si una se puede obtener a partir de la otra mediante transformaciones elementales.

Rango de una matriz (III)

Ejemplo Reducir a una matriz escalonada por filas

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \underset{\substack{f_2 - 3f_1 \\ f_3 + 2f_1}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{f_3 + \frac{5}{4} f_2}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Definición Dos matrices se dicen equivalentes si una se puede obtener a partir de la otra mediante transformaciones elementales.

Rango de una matriz (III)

Ejemplo Reducir a una matriz escalonada por filas

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \underset{\substack{f_2 - 3f_1 \\ f_3 + 2f_1}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{f_3 + \frac{5}{4}f_2}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Definición Dos matrices se dicen equivalentes si una se puede obtener a partir de la otra mediante transformaciones elementales.

Rango de una matriz (III)

Ejemplo Reducir a una matriz escalonada por filas

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \underset{\substack{f_2 - 3f_1 \\ f_3 + 2f_1}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{f_3 + \frac{5}{4} f_2}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Definición Dos matrices se dicen equivalentes si una se puede obtener a partir de la otra mediante transformaciones elementales.

Rango de una matriz (III)

Ejemplo Reducir a una matriz escalonada por filas

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \underset{\substack{f_2 - 3f_1 \\ f_3 + 2f_1}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{f_3 + \frac{5}{4}f_2}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Definición Dos matrices se dicen equivalentes si una se puede obtener a partir de la otra mediante transformaciones elementales.

Rango de una matriz (IV)

Rango se denomina rango de una matriz:

- Al número máximo de filas (o columnas) linealmente independientes
- Al número de filas no nulas de una matriz escalonada por filas equivalente

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \operatorname{rang}(A) = 1$$

Observación Las dos definiciones de rango que figuran arriba son equivalentes

Esquema

Matrices
- Definición
- Operaciones
- Matriz traspuesta
- Matriz inversa
- Rango de una matriz

Determinantes
- Definición
- Aplicaciones: inversa y rango
- Propiedades

Determinantes (I)

- Sea $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ el conjunto de las matrices cuadradas de orden n, el determinante, que se denota $|\cdot|$ ó $\det(\cdot)$ es una función:

$$\det : \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

  que asigna a cada matriz $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ un número real
- Para definir el valor del determinante procedemos por recurrencia
- Si $n = 1$, la matriz es un número real y su determinante coincide con la matriz

$$\mathbb{M}_{1\times 1}(\mathbb{R}) : A = (a_{11}) \Rightarrow \det(a_{11}) = |a_{11}| = a_{11}$$

  Es decir, si $n = 1$ el determinante es la identidad
- Para $n > 1$ necesitamos introducir el concepto de adjunto

Determinantes (II)

Definición Dada una matriz $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, se denomina adjunto ij, de la matriz A y se denota A_{ij}, al determinante de la matriz que resulta de eliminar la fila i y la columna j y multiplicarlo por la cantidad $(-1)^{i+j}$

Observación El cálculo de un adjunto de una matriz de orden n, involucra el cálculo de un determinante de orden $n-1$. Dado que hemos introducido el determinante de orden 1, por el momento, podríamos calcular adjuntos de matrices de orden 2:

Ejemplo Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Entonces:

$$A_{11} = 4 \qquad A_{12} = 1 \qquad A_{21} = -3 \qquad A_{22} = 1$$

Determinantes (III)

Definición Dada $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, se denomina determinante de A, y se denota $\det(A)$ ó $|A|$ a:

- Si $n = 1$: $\det(A) = \det(a_{11}) = a_{11}$
- Si $n > 1$: Para cualesquiera $i, j \in \{1, \ldots, n\}$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} & \text{ó} \\ \det(A) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} & \end{array}}$$

Observaciones

- El determinante no depende de la fila i o columna j seleccionada para su cálculo
- El cálculo de un determinante de orden n, involucra el cálculo de n determinantes de orden $n - 1$

Determinantes (IV)

Si $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ con $n = 2$ y 3 la definición anterior conduce a las fórmulas:

$$\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) \\ -(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}) \end{array}$$

Determinantes (IV)

Si $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ con $n = 2$ y 3 la definición anterior conduce a las fórmulas:

$$\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}): \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}): \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) \\ -(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}) \end{array}$$

Determinantes (IV)

Si $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ con $n = 2$ y 3 la definición anterior conduce a las fórmulas:

$$\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) \\ -(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}) \end{array}$$

Determinantes (IV)

Si $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ con $n = 2$ y 3 la definición anterior conduce a las fórmulas:

$$\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) \\ -(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}) \end{array}$$

Determinantes (IV)

Si $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ con $n = 2$ y 3 la definición anterior conduce a las fórmulas:

$$\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}): \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}): \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) \\ -(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}) \end{array}$$

Determinantes (IV)

Si $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ con $n = 2$ y 3 la definición anterior conduce a las fórmulas:

$$\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) \\ -(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}) \end{array}$$

Determinantes (IV)

Si $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ con $n = 2$ y 3 la definición anterior conduce a las fórmulas:

$$\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) \\ -(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}) \end{array}$$

Determinantes (IV)

Si $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ con $n = 2$ y 3 la definición anterior conduce a las fórmulas:

$$\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) \\ -(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}) \end{array}$$

Determinantes (IV)

Si $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ con $n = 2$ y 3 la definición anterior conduce a las fórmulas:

$$\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) \\ -(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}) \end{array}$$

Determinantes (IV)

Si $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ con $n = 2$ y 3 la definición anterior conduce a las fórmulas:

$$\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) \\ -(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}) \end{array}$$

Determinante. Ejemplos

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -4(10-1) = -36$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 2 - 20 + 8 + 64 + 40 - 8 - 4 = 82$$

Determinante. Ejemplos

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -4(10-1) = -36$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} - 8 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 2 - 20 + 8 + 64 + 40 - 8 - 4 = 82$$

Determinante. Ejemplos

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -4(10-1) = -36$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

$$+(-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 2 - 20 + 8 + 64 + 40 - 8 - 4 = 82$$

Determinante. Ejemplos

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -4(10-1) = -36$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 2 - 20 + 8 + 64 + 40 - 8 - 4 = 82$$

Determinante. Ejemplos

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -4(10-1) = -36$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

$$+(-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 2 - 20 + 8 + 64 + 40 - 8 - 4 = 82$$

Determinante. Ejemplos

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -4(10-1) = -36$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

$$+(-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 2 - 20 + 8 + 64 + 40 - 8 - 4 = 82$$

Determinante. Ejemplos

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -4(10-1) = -36$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 2 - 20 + 8 + 64 + 40 - 8 - 4 = 82$$

Cálculo de la inversa

Propiedad Sea $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, si A tiene inversa entonces se verifica que:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{det(A)}\text{Adj}(A)^t}$$

donde $\text{Adj}(A)$ denota la matriz adjunta de A (aquella en la cada elemento *ij* es el adjunto *ij*).

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = (3+4+0) - (-2+0+8) = 1$$

$$A_{11} = 1 \quad A_{12} = 2 \quad A_{13} = -2$$
$$A_{21} = 2 \quad A_{22} = 5 \quad A_{23} = -4$$
$$A_{31} = 3 \quad A_{32} = 7 \quad A_{33} = -5$$

Cálculo de la inversa

Propiedad Sea $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, si A tiene inversa entonces se verifica que:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{det(A)}\mathrm{Adj}(A)^t}$$

donde $\mathrm{Adj}(A)$ denota la matriz adjunta de A (aquella en la cada elemento *ij* es el adjunto *ij*).

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = (3+4+0) - (-2+0+8) = 1$$

$$\begin{array}{lll} A_{11} = 1 & A_{12} = 2 & A_{13} = -2 \\ A_{21} = 2 & A_{22} = 5 & A_{23} = -4 \\ A_{31} = 3 & A_{32} = 7 & A_{33} = -5 \end{array}$$

Cálculo de la inversa

Propiedad Sea $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, si A tiene inversa entonces se verifica que:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{det(A)}\mathrm{Adj}(A)^t}$$

donde $\mathrm{Adj}(A)$ denota la matriz adjunta de A (aquella en la cada elemento *ij* es el adjunto *ij*).

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = (3+4+0) - (-2+0+8) = 1$$

$$\begin{array}{lll} A_{11} = 1 & A_{12} = 2 & A_{13} = -2 \\ A_{21} = 2 & A_{22} = 5 & A_{23} = -4 \\ A_{31} = 3 & A_{32} = 7 & A_{33} = -5 \end{array}$$

Cálculo de la inversa

Propiedad Sea $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, si A tiene inversa entonces se verifica que:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{det(A)}\text{Adj}(A)^t}$$

donde $\text{Adj}(A)$ denota la matriz adjunta de A (aquella en la cada elemento *ij* es el adjunto *ij*).

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = (3+4+0) - (-2+0+8) = 1$$

$$\begin{array}{lll} A_{11} = 1 & A_{12} = 2 & A_{13} = -2 \\ A_{21} = 2 & A_{22} = 5 & A_{23} = -4 \\ A_{31} = 3 & A_{32} = 7 & A_{33} = -5 \end{array}$$

Cálculo del rango (I)

Definición Se denomina menor de una matriz A al determinante de una submatriz cuadrada de A. El orden de un menor es el orden de la submatriz asociada.

Propiedad El rango de una matriz $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ es el orden del menor de mayor orden no nulo.

Observación Si una matriz tiene al menos rango $n+1$, dado un menor de orden n no nulo, existe un menor de orden $n+1$ no nulo, cuya submatriz asociada contiene a la submatriz del menor dado.

La observación anterior permite establecer el siguiente algoritmo para el cálculo del rango de una matriz.

Cálculo del rango (II). Algoritmo

1. Dado $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ no nula, $n > 1$, seleccionar un menor no nulo de orden 1. Iniciar $r = 1$
2. Orlar (añadir fila y columna) el menor
3. ¿Es el menor orlado nulo?

   SI: Eliminar la orla,

   ¿Exiten otras formas de orlar el menor?

   - SI: Volver al paso 2
   - NO: El rango es r. FIN

   NO: Incrementar r en una unidad ($r \leftarrow r + 1$)

   ¿Se puede orlar de nuevo?

   - SI: Volver al paso 2
   - NO: El rango es r. FIN

Cálculo del rango (III)

Ejemplo Calcular el rango de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

$|1| = 1 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) \geqslant 1$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) \geqslant 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \\ 3 & 9 & 10 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \boxed{\operatorname{rang}(A) = 2}$$

Cálculo del rango (III)

Ejemplo Calcular el rango de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

$|1| = 1 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) \geqslant 1$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) \geqslant 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \\ 3 & 9 & 10 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \boxed{\operatorname{rang}(A) = 2}$$

Cálculo del rango (III)

Ejemplo Calcular el rango de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

$|1| = 1 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) \geqslant 1$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) \geqslant 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \\ 3 & 9 & 10 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \boxed{\operatorname{rang}(A) = 2}$$

Cálculo del rango (III)

Ejemplo Calcular el rango de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

$$|1| = 1 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) \geqslant 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) \geqslant 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \\ 3 & 9 & 10 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \boxed{\operatorname{rang}(A) = 2}$$

Cálculo del rango (III)

Ejemplo Calcular el rango de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

$$|1| = 1 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) \geqslant 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) \geqslant 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \\ 3 & 9 & 10 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \boxed{\operatorname{rang}(A) = 2}$$

Cálculo del rango (III)

Ejemplo Calcular el rango de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

$$|1| = 1 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) \geqslant 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) \geqslant 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \\ 3 & 9 & 10 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \boxed{\operatorname{rang}(A) = 2}$$

Cálculo del rango (III)

Ejemplo Calcular el rango de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

$$|1| = 1 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) \geqslant 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) \geqslant 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \\ 3 & 9 & 10 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \boxed{\operatorname{rang}(A) = 2}$$

Cálculo del rango (III)

Ejemplo Calcular el rango de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

$$|1| = 1 \neq 0 \Rightarrow \mathrm{rang}(A) \geqslant 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \mathrm{rang}(A) \geqslant 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \\ 3 & 9 & 10 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \boxed{\mathrm{rang}(A) = 2}$$

Cálculo del rango (III)

Ejemplo Calcular el rango de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

$$|1| = 1 \neq 0 \Rightarrow \mathrm{rang}(A) \geqslant 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \mathrm{rang}(A) \geqslant 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \\ 3 & 9 & 10 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \boxed{\mathrm{rang}(A) = 2}$$

Cálculo del rango (III)

Ejemplo Calcular el rango de

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 & \mathbf{4} \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ \mathbf{3} & 6 & 9 & \mathbf{10} \end{pmatrix}$$

$$|1| = 1 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) \geqslant 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) \geqslant 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \\ 3 & 9 & 10 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \boxed{\operatorname{rang}(A) = 2}$$

Cálculo del rango (III)

Ejemplo Calcular el rango de

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 & \mathbf{4} \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ \mathbf{3} & 6 & 9 & \mathbf{10} \end{pmatrix}$$

$$|1| = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) \geqslant 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) \geqslant 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \\ 3 & 9 & 10 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \boxed{\text{rang}(A) = 2}$$

Determinantes: Propiedades

1. A es invertible (o regular) $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$
2. Si $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ es triangular:
$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} \times a_{22} \times \ldots \times a_{nn}.$$
3. $\det(A^t) = \det(A)$
4. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
5. $\det(I_n) = 1$ (I_n matriz identidad de orden n)
6. Si $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces
$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$$
7. Si una fila (o columna) de A es combinación lineal de las restantes filas (o columnas), entonces $\det(A) = 0$. En particular, si dos filas (o columnas) de A son proporcionales se tiene $\det(A) = 0$

Determinantes: Propiedades

1. A es invertible (o regular) $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$
2. Si $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ es triangular:

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} \times a_{22} \times \ldots \times a_{nn}.$$

3. $\det(A^t) = \det(A)$
4. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
5. $\det(I_n) = 1$ (I_n matriz identidad de orden n)
6. Si $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$$

7. Si una fila (o columna) de A es combinación lineal de las restantes filas (o columnas), entonces $\det(A) = 0$. En particular, si dos filas (o columnas) de A son proporcionales se tiene $\det(A) = 0$

Determinantes: Propiedades

1. A es invertible (o regular) $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$
2. Si $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ es triangular:

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} \times a_{22} \times \ldots \times a_{nn}.$$

3. $\det(A^t) = \det(A)$
4. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
5. $\det(I_n) = 1$ (I_n matriz identidad de orden n)
6. Si $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$$

7. Si una fila (o columna) de A es combinación lineal de las restantes filas (o columnas), entonces $\det(A) = 0$. En particular, si dos filas (o columnas) de A son proporcionales se tiene $\det(A) = 0$

Determinantes: Propiedades

1. A es invertible (o regular) $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$
2. Si $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ es triangular:

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} \times a_{22} \times \ldots \times a_{nn}.$$

3. $\det(A^t) = \det(A)$
4. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
5. $\det(I_n) = 1$ (I_n matriz identidad de orden n)
6. Si $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$$

7. Si una fila (o columna) de A es combinación lineal de las restantes filas (o columnas), entonces $\det(A) = 0$. En particular, si dos filas (o columnas) de A son proporcionales se tiene $\det(A) = 0$

Determinantes: Propiedades

1. A es invertible (o regular) $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$
2. Si $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ es triangular:

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} \times a_{22} \times \ldots \times a_{nn}.$$

3. $\det(A^t) = \det(A)$
4. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
5. $\det(I_n) = 1$ (I_n matriz identidad de orden n)
6. Si $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$$

7. Si una fila (o columna) de A es combinación lineal de las restantes filas (o columnas), entonces $\det(A) = 0$. En particular, si dos filas (o columnas) de A son proporcionales se tiene $\det(A) = 0$

Determinantes: Propiedades

1. A es invertible (o regular) $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$
2. Si $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ es triangular:

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} \times a_{22} \times \ldots \times a_{nn}.$$

3. $\det(A^t) = \det(A)$
4. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
5. $\det(I_n) = 1$ (I_n matriz identidad de orden n)
6. Si $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$$

7. Si una fila (o columna) de A es combinación lineal de las restantes filas (o columnas), entonces $\det(A) = 0$. En particular, si dos filas (o columnas) de A son proporcionales se tiene $\det(A) = 0$

Determinantes: Propiedades

1. A es invertible (o regular) $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$
2. Si $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ es triangular:

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} \times a_{22} \times \ldots \times a_{nn}.$$

3. $\det(A^t) = \det(A)$
4. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
5. $\det(I_n) = 1$ (I_n matriz identidad de orden n)
6. Si $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$$

7. Si una fila (o columna) de A es combinación lineal de las restantes filas (o columnas), entonces $\det(A) = 0$. En particular, si dos filas (o columnas) de A son proporcionales se tiene $\det(A) = 0$