Curso Cero de Matemáticas para las titulaciones de la Facultad de Economía y Empresa

Tema 9: Anexo: Representación gráfica de funciones

Facultad de Economía y Empresa
Dpto Economía e Historia Económica
Perfil Matemáticas

19 de junio de 2017

VNiVERSiDAD D SALAMANCA
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

800 AÑOS
1218 ~ 2018

J. Manuel Cascón, <casbar@usal.es>
Federico Cesteros, <fcesteros@usal.es>
Rodrigo del Campo, <rde@usal.es>
Aurora Manrique, <amg@usal.es>
M. Dolores García, <dgarcia@usal.es>
Bernardo García-Bernalt, <bgarcia@usal.es>
Guillermo Sánchez, <guillermo@usal.es>
Gustavo Santos, <santos@usal.es>

Esquema

Representación gráfica de funciones

Ejemplos

Esquema

Representación gráfica de funciones

Ejemplos

Representación gráfica de funciones

Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función real de variable real. Para representar f hay que hallar

Dominio y continuidad

Es importante destacar los puntos en los que la función no es continua pero existe al menos uno de los límites laterales

Simetrías

Periodicidad

Cortes con los ejes

Asíntotas y ramas parabólicas

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos

Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión

Representación gráfica de funciones

Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función real de variable real. Para representar f hay que hallar

Dominio y continuidad

Simetrías

Hay que estudiar si la función es par: $f(x) = f(-x)$ -simétrica respecto del eje Y- o impar: $f(x) = -f(-x)$ -simétrica respecto del origen de coordenadas-

Periodicidad

Cortes con los ejes

Asíntotas y ramas parabólicas

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos

Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión

Representación gráfica de funciones

Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función real de variable real. Para representar f hay que hallar

Dominio y continuidad

Simetrías

Periodicidad

f es periódica si $\exists\, k \in \mathbb{R}$ tal que $f(x+k) = f(x)\ \forall x \in D$ -e.g., funciones trigonométricas-

Cortes con los ejes

Asíntotas y ramas parabólicas

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos

Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión

Representación gráfica de funciones

Cortes con los ejes

Para hallar los puntos de corte con el eje x se resuelve la ecuación $\boxed{f(x) = 0}$

Para hallar el punto de corte con el eje y se halla $\boxed{f(0)}$ si $0 \in D$

Observación Puede haber uno, ninguno, varios o infinitos puntos de corte con el eje X

Puede haber, como mucho, un punto de corte con el eje Y

Representación gráfica de funciones

Asíntotas y ramas parabólicas

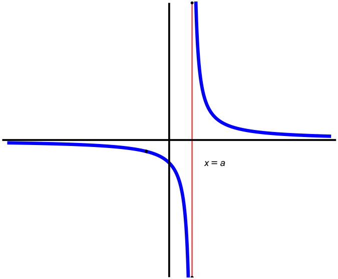
$x = a$ es asíntota vertical por la izquierda de f si

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty \quad \text{o} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$$

$x = a$ es asíntota vertical por la derecha de f si

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty \quad \text{o} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$$

Observación Las asíntotas verticales se buscan en los puntos de discontinuidad en los que existe al menos uno de los límites laterales



Representación gráfica de funciones

Asíntotas y ramas parabólicas

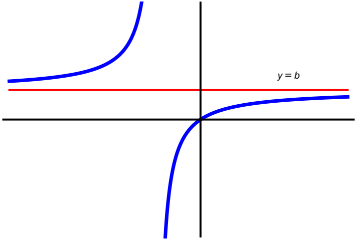
$y = b$ es asíntota horizontal de f cuando

$$x \to -\infty, \text{ si } \lim_{x \to -\infty} f(x) = b$$

$y = b$ es asíntota horizontal de f cuando

$$x \to +\infty, \text{ si } \lim_{x \to +\infty} f(x) = b$$

Observación Una función puede tener, como mucho, una asíntota horizontal en $x \to \infty$ y otra en $x \to -\infty$



Representación gráfica de funciones

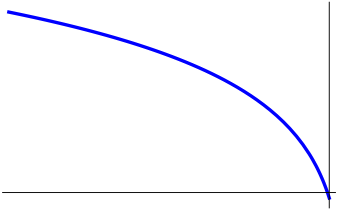
Asíntotas y ramas parabólicas

Cuando $x \to -\infty$

Si f satisface:

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ o $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$

entonces f tiene una rama parabólica de eje horizontal o eje OX



Representación gráfica de funciones

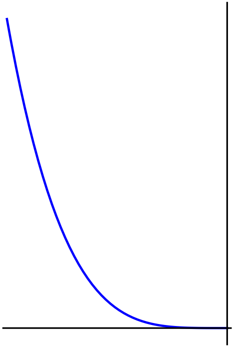
Asíntotas y ramas parabólicas

Cuando $x \to -\infty$

Si f satisface

1. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ o $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$
2. $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ o $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

entonces f tiene una rama parabólica de eje vertical o de eje OY



Representación gráfica de funciones

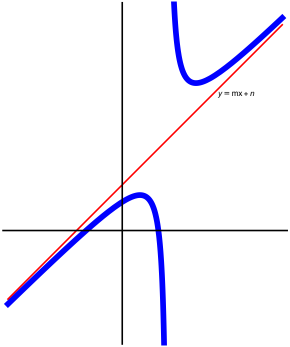
Asíntotas y ramas parabólicas

Cuando $x \to -\infty$

Si f verifica

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ o $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m \quad (m \neq 0)$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - mx) = n$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - (mx+n)) = 0$

entonces $y = mx + n$ es asíntota oblicua de f



Representación gráfica de funciones

Asíntotas y ramas parabólicas

Análogamente cuando $x \to +\infty$

Observación Si hay asíntota horizontal u oblicua en una dirección ($x \to -\infty$ o $x \to +\infty$), no puede haber rama parabólica en dicha dirección

Representación gráfica de funciones

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos

- Si f es derivable
- f es estrictamente creciente en los intervalos I en los que $f'(x) > 0 \quad \forall x \in I$
- f es estrictamente decreciente en los intervalos I en los que $f'(x) < 0 \quad \forall x \in I$
- Los puntos críticos de f, esto es, los puntos en los que $f'(x) = 0$, pueden ser máximos o mínimos relativos o puntos de inflexión

Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión

- Si f es dos veces derivable
- f es estrictamente convexa en los intervalos I en los que $f''(x) > 0 \quad \forall\, x \in I$
- f es estrictamente cóncava en los intervalos I en los que $f''(x) < 0 \quad \forall\, x \in I$
- Los puntos en los que se anula la derivada segunda y la función pasa de cóncava a convexa o viceversa son puntos de inflexión

Esquema

Representación gráfica de funciones

Ejemplos

Ejemplo. Gráfica de $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$ (I)

- Dom(f)$= \mathbb{R} - \{-1, 1\}$
- f es continua en todo punto de su dominio
- f es par -simétrica respecto del eje Y-
- f no es periódica
- Punto de corte con los ejes $(0, 0)$
- Crecimiento y decrecimiento

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$

En la siguiente tabla se estudia el signo de $f'(x)$ en los intervalos correspondientes

	$(-\infty, -1)$	(-1,0)	$(0,1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	+	-	-
$f(x)$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\downarrow$	$\downarrow$

Ejemplo. Gráfica de $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$ (II)

- - f es estrictamente creciente en $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ y estrictamente decreciente en $(0, 1) \cup (1, +\infty)$
  - En $x = 0$ hay un máximo relativo

- Concavidad y convexidad

$$f''(x) = \frac{6x^2 + 2}{(x^2 - 1)^3}$$

$$f''(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathrm{Dom}(f)$$

En la siguiente tabla se estudia el signo de $f''(x)$ en los intervalos correspondientes

	$(-\infty, -1)$	(-1,1)	$(1, +\infty)$
$f''(x)$	+	-	+
$f(x)$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

Ejemplo. Gráfica de $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$ (III)

- - f es estrictamente convexa en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y estrictamente cóncava en $(-1, 1)$
  - No hay puntos de inflexión

- Asíntotas verticales

x=-1 : $\lim_{x \to -1^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$

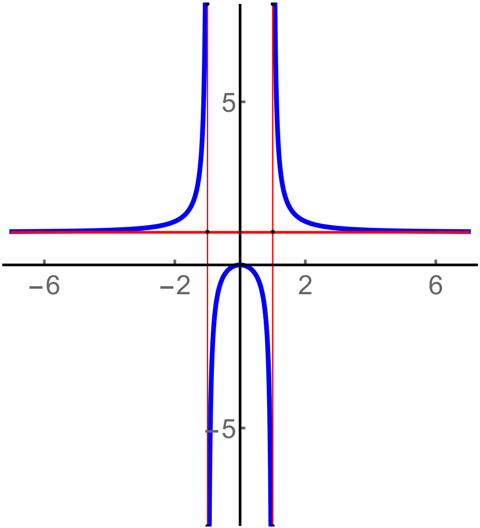
x=1 : $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

- Asíntotas horizontales

y=1 si $x \to -\infty$: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$

y=1 si $x \to +\infty$: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$

Ejemplo. Gráfica de $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$ (IV)



Ejemplo. Gráfica de $f(x) = e^{-x^2+x}$ (I)

- Dom(f)$= \mathbb{R}$
- f es continua en todo punto de su dominio
- f no es par ni impar
- f no es periódica
- Punto de corte con los ejes $(0, 1)$
- Crecimiento y decrecimiento

$$f'(x) = (1 - 2x)e^{-x^2+x}$$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}$$

En la siguiente tabla se estudia el signo de $f'(x)$ en los intervalos correspondientes

	$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$
$f'(x)$	+	-
$f(x)$	$\uparrow$	$\downarrow$

Ejemplo. Gráfica de $f(x) = e^{-x^2+x}$ (II)

- - f es estrictamente creciente en $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ y estrictamente decreciente en $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$
  - En $\boxed{x = \frac{1}{2}}$ hay un máximo relativo

- Concavidad y convexidad

$$f''(x) = (4x^2 - 4x - 1)e^{-x^2+x}$$

$$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \text{ o } x = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$$

En la siguiente tabla se estudia el signo de $f''(x)$ en los intervalos correspondientes

	$\left(-\infty, \frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$
$f''(x)$	+	-	+
$f(x)$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

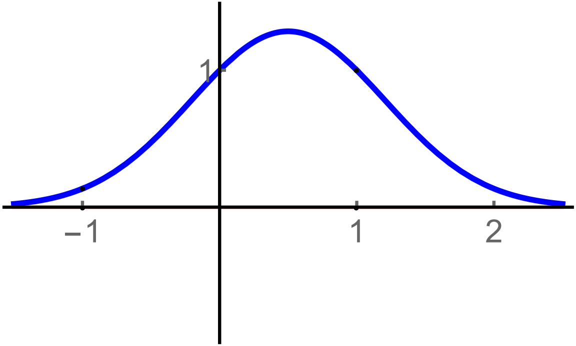
Ejemplo. Gráfica de $f(x) = e^{-x^2+x}$ (III)

- - f es estrictamente convexa en $\left(-\infty, \frac{1-\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$ y estrictamente cóncava en $\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$
  - En $\boxed{x=\frac{1-\sqrt{2}}{2}}$ y en $\boxed{x=\frac{1-\sqrt{2}}{2}}$ hay puntos de inflexión
- Asíntotas verticales: No hay
- Asíntotas horizontales

$$\boxed{y=0} \quad \text{si } x \to -\infty : \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

$$\boxed{y=0} \quad \text{si } x \to +\infty : \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

Ejemplo. Gráfica de $f(x) = e^{-x^2+x}$ (IV)



Ejemplo. Gráfica de $f(x) = \ln \frac{x+1}{x}$ (I)

- Dom(f)$= (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ (valores tales que $\frac{x+1}{x} > 0$)
- f es continua en todo punto de su dominio
- f no es par ni impar
- f no es periódica
- Punto de corte con los ejes: No hay
- Crecimiento y decrecimiento

$$f'(x) = -\frac{1}{x(x+1)}$$

$$f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in \text{ Dom}(f)$$

En la siguiente tabla se estudia el signo de $f'(x)$ en los intervalos correspondientes

	$(-\infty, -1)$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	-	-
$f(x)$	$\downarrow$	$\downarrow$

Ejemplo. Gráfica de $f(x) = \ln \frac{x+1}{x}$ (II)

- - f es estrictamente decreciente en todo su dominio
  - No hay extremos

- Concavidad y convexidad

$$f''(x) = \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$$

$$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{2} \notin \ \mathrm{Dom}(f)$$

En la siguiente tabla se estudia el signo de $f''(x)$ en los intervalos correspondientes

	$(-\infty, -1)$	$(0, +\infty)$
$f''(x)$	-	+
$f(x)$	$\cap$	$\cup$

Ejemplo. Gráfica de $f(x) = \ln \frac{x+1}{x}$ (III)

- - f es estrictamente convexa en $(0, +\infty)$ y estrictamente cóncava en $(-\infty, -1)$
  - No hay puntos de inflexión

- Asíntotas verticales

$$\boxed{x=-1} : \quad \lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$$

$$\boxed{x=0} : \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

- Asíntotas horizontales

$$\boxed{y=0} \quad \text{si } x \to -\infty : \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

$$\boxed{y=0} \quad \text{si } x \to +\infty : \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

Ejemplo. Gráfica de $f(x) = \ln \frac{x+1}{x}$ (IV)