VNiVERSiDAD
D SALAMANCA
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

800 AÑOS
1218 ~ 2018

Curso Cero de Matemáticas para las titulaciones de la Facultad de Economía y Empresa

Tema 8: Funciones reales de variable real (III): Derivabilidad

Facultad de Economía y Empresa
Dpto Economía e Historia Económica
Perfil Matemáticas

19 de junio de 2017

VNiVERSiDAD D SALAMANCA
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

USal 800 AÑOS
1218 ~ 2018

J. Manuel Cascón, <casbar@usal.es>
Federico Cesteros, <fcesteros@usal.es>
Rodrigo del Campo, <rde@usal.es>
Aurora Manrique, <amg@usal.es>
M. Dolores García, <dgarcia@usal.es>
Bernardo García-Bernalt, <bgarcia@usal.es>
Guillermo Sánchez, <guillermo@usal.es>
Gustavo Santos, <santos@usal.es>

19 de junio de 2017

Esquema

Derivabilidad de funciones
- Derivabilidad en un punto y función derivada
- Interpretación geométrica de la derivada
- Propiedades de la función derivada
- Ejemplos
- Derivadas sucesivas

Teoremas fundamentales

Aplicaciones de la derivada
- Crecimiento y decrecimiento de una función
- Cálculo de máximos y mínimos
- Concavidad y convexidad de una función. Puntos de inflexión

Aplicaciones de la segunda derivada
- Concavidad y convexidad y segunda derivada
- Extremos relativos y segunda derivada

Extremos absolutos

Esquema

Derivabilidad de funciones

- Derivabilidad en un punto y función derivada
- Interpretación geométrica de la derivada
- Propiedades de la función derivada
- Ejemplos
- Derivadas sucesivas

Teoremas fundamentales

Aplicaciones de la derivada

- Crecimiento y decrecimiento de una función
- Cálculo de máximos y mínimos
- Concavidad y convexidad de una función. Puntos de inflexión

Aplicaciones de la segunda derivada

- Concavidad y convexidad y segunda derivada
- Extremos relativos y segunda derivada

Extremos absolutos

Derivada en un punto

Definición Una función real de variable real $f : D \to \mathbb{R}$ es derivable en un punto $a \in D$ si existe el siguiente límite y es finito:

$$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

O escrito de otro modo

$$\boxed{\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$

A dicho límite lo denominamos derivada de f en a y lo denotamos $f'(a)$

Derivadas laterales. Derivada por la izquierda

Según la definición de límite, para que exista $f'(a)$, deben existir los límites laterales (por la izquierda y por la derecha), y además ser iguales. Formalizamos esta cuestión con las siguientes definiciones

Definición Una función real de variable real $f : D \to \mathbb{R}$ es derivable por la izquierda en un punto $a \in D$ si existe el siguiente límite y es finito:

$$\boxed{\lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

o bien

$$\boxed{\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$$

Derivadas laterales. Derivada por la derecha

Y análogamente

Definición Una función real de variable real $f : D \to \mathbb{R}$ es derivable por la derecha en un punto $a \in D$ si existe el siguiente límite y es finito:

$$\boxed{\lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

o bien

$$\boxed{\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$$

Derivabilidad. Ejemplo

Estudiar la derivabilidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leqslant 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Veamos en primer lugar que $f(x)$ es derivable en cualquier punto $a \neq 0$:

$$\text{Si } a > 0 : f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a+h-a}{h} = 1$$

$$\text{Si } a < 0 : f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2(a+h) - 2a}{h} = 2$$

El cálculo de estos límites no depende de si

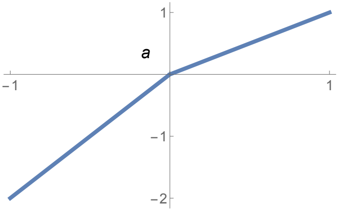
$$a \to h^+ \qquad \text{o} \qquad a \to h^-$$

Derivabilidad. Ejemplo

Veamos ahora la derivabilidad en el punto $a = 0$:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h},$$

que en este caso depende de si $h \to 0^+$ o $h \to 0^-$:



$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h}{h} = 2$$

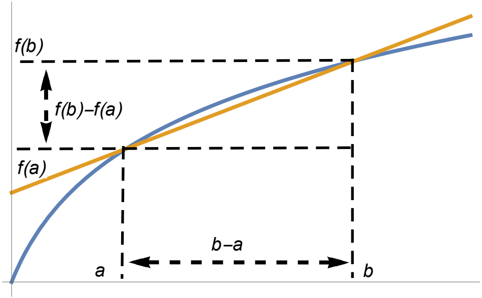
$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1$$

Como los límites son distintos f no es derivable en $a = 0$, no exite $f'(0)$

Interpretación geométrica de la derivada

Sea $f : D \to \mathbb{R}$, su tasa de variación media (T.V.M.) en un intervalo $[a, b] \subseteq D$ viene dada por

$$\frac{\text{variación de } f(x)}{\text{variación de } x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \overset{(b=a+h)}{=} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

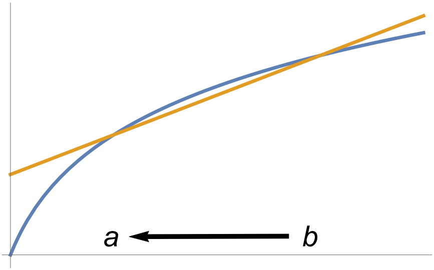


Esta expresión coincide con la tangente del ángulo que forma la recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ con el eje x, que es la pendiente de dicha recta

Interpretación geométrica de la derivada

Tomando límites en la expresión de la T.V.M cuando $b \to a$ (o $h \to 0$) obtenemos la expresión de la definición de derivada de f en el punto a

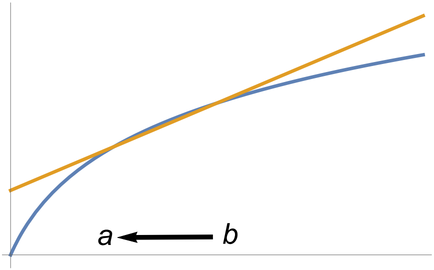
En cuanto a las rectas, al hacer $b \to a$, el punto $(b, f(b))$ se acerca a $(a, f(a))$, y la recta secante a $f(x)$ por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$, en el límite, es la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$



Interpretación geométrica de la derivada

Tomando límites en la expresión de la T.V.M cuando $b \to a$ (o $h \to 0$) obtenemos la expresión de la definición de derivada de f en el punto a

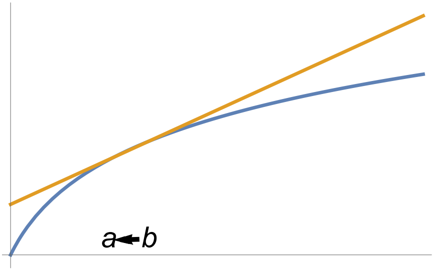
En cuanto a las rectas, al hacer $b \to a$, el punto $(b, f(b))$ se acerca a $(a, f(a))$, y la recta secante a $f(x)$ por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$, en el límite, es la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$



Interpretación geométrica de la derivada

Tomando límites en la expresión de la T.V.M cuando $b \to a$ (o $h \to 0$) obtenemos la expresión de la definición de derivada de f en el punto a

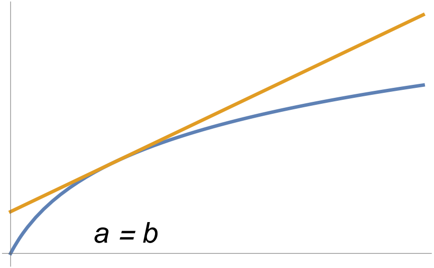
En cuanto a las rectas, al hacer $b \to a$, el punto $(b, f(b))$ se acerca a $(a, f(a))$, y la recta secante a $f(x)$ por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$, en el límite, es la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$



Interpretación geométrica de la derivada

Tomando límites en la expresión de la T.V.M cuando $b \to a$ (o $h \to 0$) obtenemos la expresión de la definición de derivada de f en el punto a

En cuanto a las rectas, al hacer $b \to a$, el punto $(b, f(b))$ se acerca a $(a, f(a))$, y la recta secante a $f(x)$ por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$, en el límite, es la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$



Interpretación geométrica de la derivada

Tomando límites en la expresión de la T.V.M cuando $b \to a$ (o $h \to 0$) obtenemos la expresión de la definición de derivada de f en el punto a

En cuanto a las rectas, al hacer $b \to a$, el punto $(b, f(b))$ se acerca a $(a, f(a))$, y la recta secante a $f(x)$ por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$, en el límite, es la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$

Concluimos así que:

La derivada de la función $f : D \to \mathbb{R}$ en un punto $a \in D$, $f'(a)$, coincide con la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$

Función derivada y derivadas de funciones elementales

Definición Una función real de variable real $f : D \to \mathbb{R}$ es derivable en D si lo es en cada punto $a \in D$

A la función $f' : D \to \mathbb{R}$ que a cada $x \in \mathbb{R}$ le asigna su derivada en ese punto, $f'(x)$, la denominamos

función derivada de f

Derivadas de funciones elementales

$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \operatorname{sen} x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\operatorname{sen} x$
$f(x) = a^x \;\; (a > 0), \;\; (f(x) = e^x)$	$f'(x) = a^x \ln a, \quad (f'(x) = e^x)$
$f(x) = \log_a x \; (a > 0), \; (f(x) = \ln x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}\frac{1}{\ln a}, \quad (f'(x) = \frac{1}{x})$

Propiedades de la función derivada:

Propiedades Sean $f, g : D \to \mathbb{R}$ funciones derivables en D. Entonces:

- $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- $(kf(x))' = kf'(x)$
- $(f \cdot g)'(x) = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$
- $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$ si $g(x) \neq 0$

Regla de la cadena Sean $f : D \to \mathbb{R}$ y $g : D' \to \mathbb{R}$ funciones reales de variable real tales que $Im(f) \subseteq D'$. Consideramos la función compuesta $g \circ f : D \to \mathbb{R}$. Entonces:

$$\boxed{(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)}$$

Derivadas. Ejemplos

1. $\left(x^4+7x^2-5x+6\right)'=4x^3+14x-5$
2. $\left(e^x\cos x\right)'=e^x\cos x-e^x\operatorname{sen}x=e^x\left(\cos x-\operatorname{sen}x\right)$
3. $\left(\dfrac{\operatorname{sen}x}{x^2+1}\right)'=\dfrac{\cos x\cdot(x^2+1)-\operatorname{sen}x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$
4. $\left(\operatorname{sen}x^3\right)'=\cos x^3\cdot 3x^2$
5. $\left(\operatorname{sen}^3 x\right)'=3\operatorname{sen}^2 x\cdot\cos x$
6. $\left(\sqrt{x}\right)'=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
7. $\left(\sqrt{x^2+1}\right)'=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
8. $(\tan x)'=\left(\dfrac{\operatorname{sen}x}{\cos x}\right)'=\dfrac{\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

Derivadas sucesivas

Definición Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función derivable en D y $f' : D \to \mathbb{R}$ su función derivada. Si $f'(x)$ es derivable en un punto $a \in D$ definimos la derivada segunda de f en a, y la denotamos $f''(a)$, como

$$f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h}$$

Si existe $f''(a)$ para todo $a \in D$, entonces existe la función derivada segunda de f en D:

$$f'' : D \to \mathbb{R}, \text{dada por } f''(x) = (f')'(x)$$

Sucesivamente definimos, si existen, las funciones 'derivada tercera, cuarta,..., n-ésima':

$$\boxed{f^{(n}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f^{(n-1}(x+h) - f^{(n-1}(x)}{h} = (f^{(n-1})'(x)}$$

Derivadas sucesivas. Ejemplos

Consideramos los mismos ejemplos anteriores

1. $\left(x^4+7x^2-5x+6\right)''=12x^2+14$

2. $$\begin{aligned}\left(e^x\cos x\right)'' &= e^x(\cos x-\operatorname{sen}x)+e^x(-\operatorname{sen}x-\cos x)\\ &= -2e^x\operatorname{sen}x\end{aligned}$$

3. $$\left(\frac{\operatorname{sen}x}{x^2+1}\right)'' = \frac{[-\operatorname{sen}x\cdot(x^2+1)+2x\cos x-\cos x\cdot 2x-\operatorname{sen}x\cdot 2](x^2+1)^2}{(x^2+1)^4}-$$ $$-\frac{[\cos x\cdot(x^2+1)-\operatorname{sen}x\cdot 2x]2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{-(x^4-4x^2+3)\operatorname{sen}x-4x(x^2+1)\cos x}{(x^2+1)^3}$$

4. $\left(\operatorname{sen}x^3\right)''=-9x^4\operatorname{sen}x^3+6x\cos x^3$

5. $\left(\operatorname{sen}^3x\right)''=6\operatorname{sen}x\cdot\cos^2x-3\operatorname{sen}^3x$

6. $\left(\sqrt{x}\right)''=\dfrac{-2\frac{1}{2\sqrt{x}}}{4x}=\dfrac{-1}{4x\sqrt{x}}$

7. $$\left(\sqrt{x^2+1}\right)''=\frac{\sqrt{x^2+1}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

8. $(\tan x)''=\dfrac{2\cos x\operatorname{sen}x}{\cos^4x}=\dfrac{2\operatorname{sen}x}{\cos^3x}$

Esquema

Derivabilidad de funciones
- Derivabilidad en un punto y función derivada
- Interpretación geométrica de la derivada
- Propiedades de la función derivada
- Ejemplos
- Derivadas sucesivas

Teoremas fundamentales

Aplicaciones de la derivada
- Crecimiento y decrecimiento de una función
- Cálculo de máximos y mínimos
- Concavidad y convexidad de una función. Puntos de inflexión

Aplicaciones de la segunda derivada
- Concavidad y convexidad y segunda derivada
- Extremos relativos y segunda derivada

Extremos absolutos

Derivabilidad y continuidad

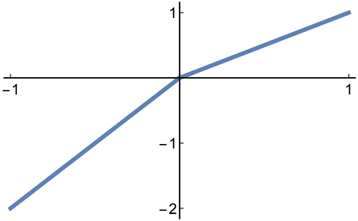
Teorema Si $f : D \to \mathbb{R}$ es derivable en un punto $a \in D$, entonces es continua en dicho punto

Observación El recíproco no es cierto: una función puede ser continua en un punto a y sin embargo no existir $f'(a)$

Ejemplo

Consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leqslant 0 \\ x & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$



Derivabilidad y continuidad. Ejemplo

La función $f(x)$ es continua en 0 ya que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$$

Calculamos ahora $f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$:

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h}{h} = 2$$

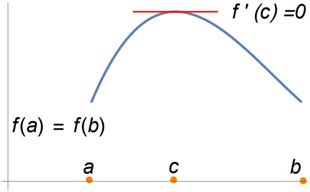
$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1$$

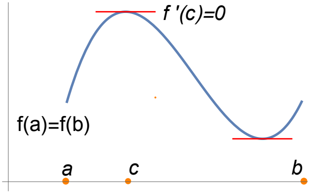
Como $2 \neq 1$, no existe $f'(0)$ y tendríamos

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Teorema de Rolle

Teorema Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Si $f(a) = f(b)$, entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$



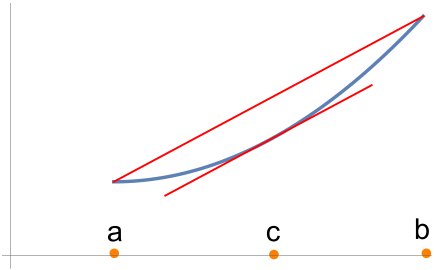


Observación Vemos en la gráfica que la recta tangente en el punto $(c, f(c))$ es horizontal (derivada 0)

Teorema del valor medio

Teorema Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Entonces existe un punto $c \in D$ tal que

$$\boxed{f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$$



Regla de L'Hopital

Teorema Sean $f, g : D \to \mathbb{R}$ dos funciones derivables en un intervalo que contiene al punto a, salvo quizás en el punto a, siendo además $g(x)$, $g'(x) \neq 0$ en todos los puntos de dicho intervalo. Supongamos que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \quad \text{o} \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\frac{\infty}{\infty}$$

Si existe $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces existe $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ y además

$$\boxed{\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

Regla de L'Hopital. Ejemplos

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{1-x}$

Tenemos que $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{1-x} = \frac{0}{0}$. Derivando numerador y denominador:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{-1} = \frac{1}{-1} = -1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{1-x} = -1$$

$\lim\limits_{x\to \infty} \frac{e^x}{x^4+7}$

Tenemos que $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{e^x}{x^4+7} = \frac{\infty}{\infty}$. Derivando numerador y denominador:

$$\lim_{x\to \infty} \frac{e^x}{4x^3} = \frac{\infty}{\infty}$$

y podemos seguir aplicando el criterio sucesivamente de modo que

$$\lim_{x\to \infty} \frac{e^x}{4x^3} = \lim_{x\to \infty} \frac{e^x}{12x^2} = \lim_{x\to \infty} \frac{e^x}{24x} = \lim_{x\to \infty} \frac{e^x}{24} = \infty$$

Esquema

Derivabilidad de funciones

- Derivabilidad en un punto y función derivada
- Interpretación geométrica de la derivada
- Propiedades de la función derivada
- Ejemplos
- Derivadas sucesivas

Teoremas fundamentales

Aplicaciones de la derivada

- Crecimiento y decrecimiento de una función
- Cálculo de máximos y mínimos
- Concavidad y convexidad de una función. Puntos de inflexión

Aplicaciones de la segunda derivada

- Concavidad y convexidad y segunda derivada
- Extremos relativos y segunda derivada

Extremos absolutos

Función creciente

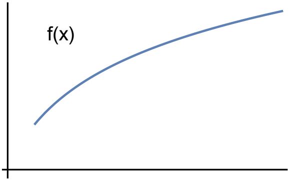
Definición Sea una función $f : D \to \mathbb{R}$. f es creciente en D si para cualesquiera $x, y \in D$:

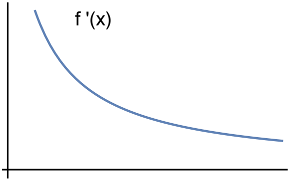
$$\text{si } x < y, \text{ entonces } f(x) \leqslant f(y)$$

Si la desigualdad es estricta, se dice que f es estrictamente creciente

Proposición Sea una función $f : D \to \mathbb{R}$ derivable en D.

$$f \text{ es creciente en } D \quad \Leftrightarrow \quad f'(x) \geqslant 0, \forall x \in D$$





Función decreciente

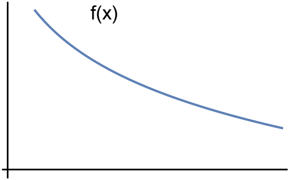
Definición Sea una función $f : D \to \mathbb{R}$. f es decreciente en D si para cualesquiera $x, y \in D$:

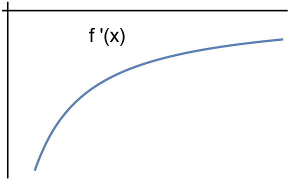
$$\text{si } x < y, \text{ entonces } f(x) \geqslant f(y)$$

Si la desigualdad es estricta, se dice que f es estrictamente decreciente

Proposición Sea una función $f : D \to \mathbb{R}$ derivable en D.

$$f \text{ es decreciente en } D \quad \Leftrightarrow \quad f'(x) \leqslant 0, \forall x \in D$$





Máximos y mínimos de una función

Definición Sea una función $f : D \to \mathbb{R}$. f alcanza en un punto $a \in D$ un máximo local o relativo si existe un entorno de a, E_a, tal que $f(a) \geqslant f(x), \forall x \in E_a \cap D$

Definición Sea una función $f : D \to \mathbb{R}$. f alcanza en un punto $a \in D$ un mínimo local o relativo si existe un entorno de a, E_a, tal que $f(a) \leqslant f(x), \forall x \in E_a \cap D$

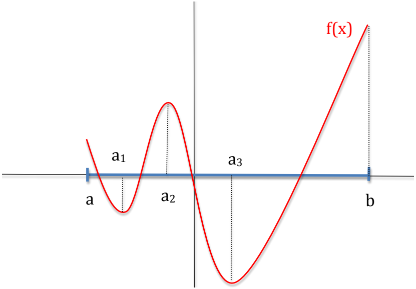
Definición Sea una función $f : D \to \mathbb{R}$. Un punto $a \in D$ es máximo global o absoluto de f en D si $f(a) \geqslant f(x), \forall x \in D$

Definición Sea una función $f : D \to \mathbb{R}$. Un punto $a \in D$ es mínimo global o absoluto de f en D si $f(a) \leqslant f(x), \forall x \in D$

Definición Sea una función $f : D \to \mathbb{R}$. Un punto $a \in D$ es un extremo relativo (absoluto) de f si es un máximo o mínimo relativo (absoluto) de f

Máximos y mínimos de una función. Ejemplo

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$



- a_2 máximo relativo
- a_1, a_3 mínimos relativos
- b máximo absoluto
- a_3 mínimo absoluto

Condición necesaria de extremo local

Proposición Sea una función $f : D \to \mathbb{R}$ derivable en $a \in D$. Si $f(x)$ alcanza un máximo o un mínimo relativo en a, entonces $\boxed{f'(a) = 0}$. Los puntos a en los que $f'(a) = 0$ se denominan **puntos críticos de f**

Observaciones

- La tangente a la gráfica de $f(x)$ en un punto crítico es paralela al eje x (es horizontal), tiene pendiente 0
- Para hallar los posibles extremos de una función habrá que resolver la ecuación $f'(x) = 0$

Ejemplo Posibles extremos de la función $x^3 - 2x^2 - 4x$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 48}}{6} = \begin{cases} 2 \\ -\frac{2}{3} \end{cases}$$

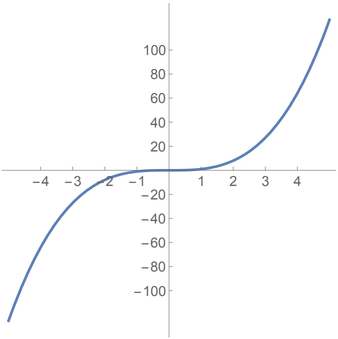
Luego los posibles extremos locales de $f(x)$ son

$$(2, f(2) = -8) \quad \text{y} \quad \left(-\frac{2}{3}, f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{40}{27}\right)$$

Condición necesaria de extremo local

Observación La condición necesaria de extremo local no es suficiente

Ejemplo La función $f(x) = x^3$ tiene derivada 0 ($f'(x) = 3x^2$) en $x = 0$, y f es estrictamente creciente en $x = 0$ por lo que no tiene extremo en dicho punto



Clasificación extremos locales

Para saber si un punto crítico es máximo o mínimo tenemos en cuenta lo siguiente:

- Si el punto $(a, f(a))$ es un máximo local de $f(x)$, debe existir un entorno de a, E_a, en el que la función $f(x)$ sea creciente a la izquierda de a y decreciente a su derecha. Por lo tanto debe ser:

$$\begin{cases} f'(x) > 0 & \text{para } x \in E_a \cap D \text{ y } x < a \\ f'(x) < 0 & \text{para } x \in E_a \cap D \text{ y } x > a \end{cases}$$

- Si el punto $(a, f(a))$ es un mínimo local de $f(x)$, debe existir un entorno de a, E_a, en el que la función $f(x)$ sea decreciente a la izquierda de a y creciente a su derecha. Por lo tanto debe ser:

$$\begin{cases} f'(x) < 0 & \text{para } x \in E_a \cap D \text{ y } x < a \\ f'(x) > 0 & \text{para } x \in E_a \cap D \text{ y } x > a \end{cases}$$

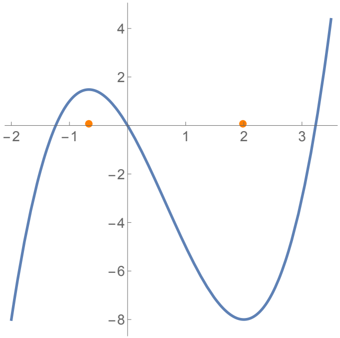
Clasificación de extremos locales. Ejemplo

Ejemplo En el ◂ ejemplo anterior, $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x$.

Observar que $f'(x) = (x + \frac{2}{3})(x - 2)$ verifica:

- $f'(x) > 0$ si $x \in \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$ (creciente)
- $f'(x) < 0$ si $x \in \left(-\frac{2}{3}, 2\right)$ (decreciente)
- $f'(x) > 0$ si $x \in (2, +\infty)$ (creciente)

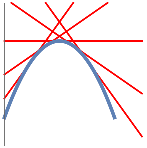
Por lo tanto el punto $\boxed{(-\frac{2}{3}, \frac{40}{27})}$ es un máximo local y el punto $\boxed{(2, -8)}$ un mínimo local.

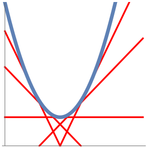


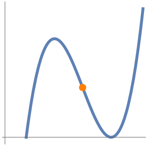
Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión

Definición Sea una función $f: D \to \mathbb{R}$. Sea $a \in D$ y $t(x)$ la recta tangente a $f(x)$ en el punto $(a, f(a))$

- $f(x)$ es cóncava en a si existe un entorno de a, E_a,tal que $t(x) \geqslant f(x)$ para todo $x \in E_a \cap D$
- $f(x)$ es convexa en a si existe un entorno de a, E_a, tal que $t(x) \leqslant f(x)$ para todo $x \in E_a \cap D$
- $a \in D$ es un punto de inflexión de f si existe un entorno de a, E_a, tal que $t(x) \leqslant f(x)$ para algún $x \in E_a \cap D$ y $t(x) \geqslant f(x)$ para algún $x \in E_a \cap D$. En estos puntos la función pasa de cóncava a convexa o viceversa


Cóncava


Convexa


Punto de Inflexión

Esquema

Derivabilidad de funciones

- Derivabilidad en un punto y función derivada
- Interpretación geométrica de la derivada
- Propiedades de la función derivada
- Ejemplos
- Derivadas sucesivas

Teoremas fundamentales

Aplicaciones de la derivada

- Crecimiento y decrecimiento de una función
- Cálculo de máximos y mínimos
- Concavidad y convexidad de una función. Puntos de inflexión

Aplicaciones de la segunda derivada

- Concavidad y convexidad y segunda derivada
- Extremos relativos y segunda derivada

Extremos absolutos

Concavidad/convexidad y segunda derivada (I)

Proposición Sea una función $f : D \to \mathbb{R}$ que es derivable hasta al menos el segundo orden en un punto $a \in D$:

- Si $f(x)$ es cóncava en a, $f'(x)$ es decreciente en a, luego $f''(a) \leqslant 0$
- Si $f(x)$ es convexa en a, $f'(x)$ es creciente en a, luego $f''(a) \geqslant 0$
- Si $f(x)$ tiene un punto de inflexión en a, entonces $f''(a) = 0$

Concavidad/convexidad y segunda derivada (II)

Los enunciados recíprocos de las afirmaciones de la proposición anterior se formalizan como sigue:

Proposición Sea una función $f : D \to \mathbb{R}$ que es derivable hasta al menos el segundo orden en un punto $a \in D$.

- $f''(a) < 0$, entonces $f(x)$ es cóncava en a
- $f''(a) > 0$, entonces $f(x)$ es convexa en a
- $f''(a) = 0$ y $f'(x)$ no cambia de signo en un entorno de a, entonces a es un punto de inflexión

Observación Si f tiene derivadas de orden superior al segundo en a, la condición que determina el punto de inflexión es equivalente a que la primera derivada de f en a de orden superior al segundo no nula es de orden impar

Extremos relativos y segunda derivada. Condición suficiente

Proposición Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función real de variable real. Si f tiene derivada segunda continua en un extremo relativo $a \in D$, entonces

- $f''(a) > 0 \Rightarrow \begin{cases} f \text{ tiene en a un mínimo} \\ \text{relativo estricto} \end{cases}$
- $f''(a) < 0 \Rightarrow \begin{cases} f \text{ tiene en a un máximo} \\ \text{relativo estricto} \end{cases}$
- $f''(a) = 0$, y existen derivadas de orden superior en a, consideramos la primera distinta de 0, $f^{(n}(a) \neq 0$:
  - Si n es par, $f(x)$ tiene en a un punto de inflexión
  - Si n es impar, tiene un máximo relativo si $f^{(n}(a) < 0$ y un mínimo relativo si $f^{(n}(a) > 0$

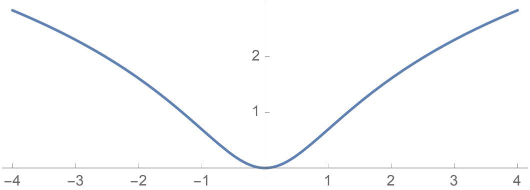
Extremos relativos. Ejemplos

Ejemplo Determinar los extremos relativos de $f(x) = \ln(x^2+1)$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} = 0 \Rightarrow \boxed{x=0} \quad \text{Punto crítico}$$

$$f''(x) = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2} \Rightarrow f''(0) = 2 > 0$$

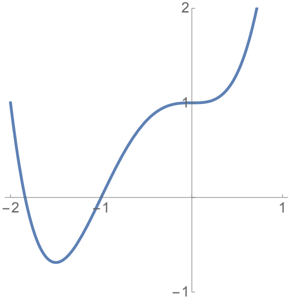
$\Rightarrow$ en $\boxed{x=0}$ hay un mínimo relativo estricto



Extremos relativos. Ejemplos

Ejemplo Determinar los extremos relativos de

$$f(x) = x^4 + 2x^3 + 1$$



$$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 = 4x^2\left(x + \frac{3}{2}\right) = 0$$

$\Rightarrow$ $\boxed{x = 0}$, $\boxed{x = -\frac{3}{2}}$

Puntos críticos

$$\Rightarrow f''(x) = 12x^2 + 12x, \quad f''(0) = 0, \quad f''\left(-\frac{3}{2}\right) = 9 > 0$$

En $\boxed{x = \frac{3}{2}}$ hay un mínimo relativo estricto y en $x = 0$ no se sabe. Sin embargo,

$$f'''(x) = 24x + 12 \Rightarrow f'''(0) = 12 > 0$$

luego $\boxed{x = 0}$ es punto de inflexión

Extremos relativos. Ejemplos

Ejemplo Determinar los extremos relativos de

$$f(x) = \begin{cases} -x(x+1) & \text{si } x \leqslant 0 \\ e^x - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Obsevar que f es continua en $\mathbb{R}$ porque

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 0 = \lim_{x\to 0^-} f(x)$$

Como

$$f'(x) = \begin{cases} -2x - 1 & \text{si } x < 0 \\ e^x & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad f$$

no es derivable en $x = 0$ porque

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -1 \neq \lim_{x\to 0^-} f'(x) = 1$$

El único punto de derivada 0 es $x = -\frac{1}{2}$

Extremos relativos. Ejemplos

Dado que:

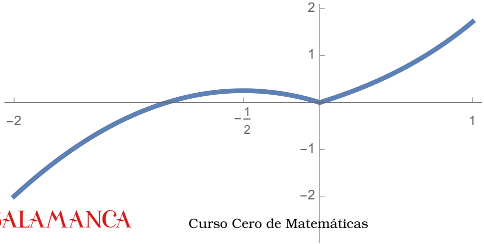
$$f''(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 0 \\ e^x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

tenemos $f''\left(-\frac{1}{2}\right) = -2 < 0$ obtenemos que $x = -\frac{1}{2}$ es un máximo relativo estricto.

Para estudiar qué pasa en $x = 0$, observamos que en un entorno de 0, $(-\epsilon, \epsilon)$:

$$f(0) < f(\epsilon), \qquad f(-\epsilon) < f(0), \qquad (\epsilon > 0)$$

por lo que en $x = 0$ hay un mínimo relativo estricto



Esquema

Derivabilidad de funciones

- Derivabilidad en un punto y función derivada
- Interpretación geométrica de la derivada
- Propiedades de la función derivada
- Ejemplos
- Derivadas sucesivas

Teoremas fundamentales

Aplicaciones de la derivada

- Crecimiento y decrecimiento de una función
- Cálculo de máximos y mínimos
- Concavidad y convexidad de una función. Puntos de inflexión

Aplicaciones de la segunda derivada

- Concavidad y convexidad y segunda derivada
- Extremos relativos y segunda derivada

Extremos absolutos

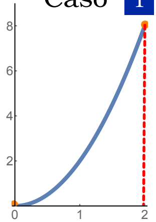
Extremos absolutos

Teorema de Weierstrass Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua definida en el intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces $f(x)$ alcanza un máximo y un mínimo absolutos en $[a, b]$.

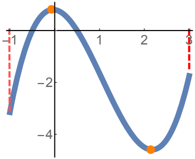
Observación Dichos puntos pueden estar:

1. en los extremos del intervalo
2. en puntos del interior del intervalo en los que la función es derivable (y se anula)
3. en puntos del interior del intervalo en los que la función no es derivable

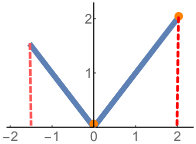
Caso 1



Caso 2



Casos 1, 3



Cálculo de extremos absolutos

Para hallar los máximos y mínimos absolutos de una función continua f en un intervalo cerrado $[a, b]$:

1. Se hallan los puntos de $[a, b]$ en los que f no es derivable
2. Se hallan los puntos donde $f'(x)$ se anula en (a, b)
3. Se hallan los valores de $f(x)$ en todos los puntos hallados y en los extremos del intervalo
4. El valor máximo corresponde al máximo absoluto y el valor mínimo al mínimo absoluto

Extremos absolutos. Ejemplo

Ejemplo Determinar los extremos absolutos en $\boxed{\left[-\frac{1}{2}, 3\right]}$ de

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x + 1 & \text{si } x \leqslant 2 \\ -2x + 7 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Observar que f es continua en $\left[-\frac{1}{2}, 3\right]$ porque

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 3 = \lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2)$$

Como

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 3 & \text{si } x < 2 \\ -2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

f no es derivable en $\boxed{x = 2}$ porque

$$\lim_{x\to 2^+} f'(x) = -2 \neq \lim_{x\to 2^-} f'(x) = 9$$

El único punto donde f' se anula en $\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$ es $\boxed{x = 1}$

Extremos absolutos. Ejemplo

De modo que los candidatos a extremos son:

$x = -\frac{1}{2}$ (extremo intervalo) $\quad x = 3$ (extremo intervalo)

$x = 2$ (f no derivable) $\quad x = 1$ (f' se anula)

Hallando los valores de f:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{19}{8}, \qquad f(3) = 1, \qquad f(2) = 3, \qquad f(1) = -1$$

se concluye que $x = 1$ es el mínimo absoluto y $x = 2$ es el máximo absoluto