Curso Cero de Matemáticas para las titulaciones de la Facultad de Economía y Empresa

Tema 2: Vectores

Facultad de Economía y Empresa.
Dpto Economía e Historia Económica
Perfil Matemáticas

19 de junio de 2017

J. Manuel Cascón, <casbar@usal.es>
Federico Cesteros, <fcesteros@usal.es>
Rodrigo del Campo, <rde@usal.es>
Aurora Manrique, <amg@usal.es>
M. Dolores García, <dgarcia@usal.es>
Bernardo García-Bernalt, <bgarcia@usal.es>
Guillermo Sánchez, <guillermo@usal.es>
Gustavo Santos, <santos@usal.es>

19 de junio de 2017

Esquema

Vectores en $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^n$

Operaciones con vectores

- Módulo
- Suma
- Producto por escalar
- Producto escalar

Dependencia/independencia lineal

Bases

Esquema

Vectores en $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^n$

Operaciones con vectores
- Módulo
- Suma
- Producto por escalar
- Producto escalar

Dependencia/independencia lineal

Bases

Vectores en $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$

Definiciones

- El conjunto de vectores en el plano es el conjunto de pares de números reales. Se denota $\mathbb{R}^2$:

  $$\boxed{\mathbb{R}^2 = \{(a, b) \,:\, a, b \in \mathbb{R}\}}$$

  Matemáticamente, $\mathbb{R}^2$ se puede introducir como el producto cartesiano : $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

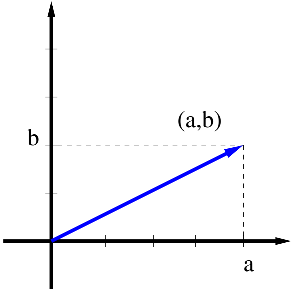
- El conjunto de vectores en el espacio es el conjunto de ternas de números reales.
  Se denota $\mathbb{R}^3$:

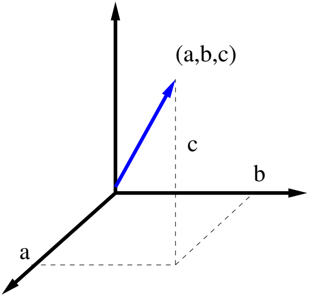
  $$\boxed{\mathbb{R}^3 = \{(a, b, c) \,:\, a, b, c \in \mathbb{R}\}}$$

  Matemáticamente, $\mathbb{R}^3$ se puede introducir como el producto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$

Vectores en $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$

Los espacios de vectores $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ se pueden identificar con los puntos de plano y espacio, respectivamente





Vectores en $\mathbb{R}^2$

Vectores en $\mathbb{R}^3$

Vectores en $\mathbb{R}^n$

- Las definiciones anteriores pueden extenderse al caso de *n-tuplas* (lista ordenada de n elementos), para obtener $\mathbb{R}^n$:

$$\boxed{\mathbb{R}^n = \{\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \, : \, a_i \in \mathbb{R}, \, \forall i = 1, 2, \ldots, n\}}$$

- Si bien la interpretación geométrica de $\mathbb{R}^n$ se pierde para $n > 3$, este tipo de conjuntos son ampliamente usados en Economía
- Por ejemplo, $\mathbb{R}^n$, puede modelizar las cestas de n bienes o los n activos que componen una cartera

Nota: Es habitual representar los vectores: $\vec{v}$ ó $\mathbf{v}$. En este curso utilizaremos la segunda opción (**negrita**)

Esquema

Vectores en $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^n$

Operaciones con vectores

- Módulo
- Suma
- Producto por escalar
- Producto escalar

Dependencia/independencia lineal

Bases

Operaciones con vectores

A continuación, revisaremos las principales operaciones con vectores, y las interpretaremos geométricamente:

- Módulo de un vector
- Suma de vectores
- Producto de un vector por un escalar
  (escalar $\equiv$ un número real)
- Producto escalar de vectores

Módulo de un vector

- El módulo de un vector es la longitud del mismo
- Si $\mathbf{v}$ es un vector, su módulo se denota $|\mathbf{v}|$
- Del Teorema de Pitágoras resulta:

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \quad \Rightarrow |\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 \quad \Rightarrow |\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n \quad \Rightarrow |\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2}$$

Propiedades Sean $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ vectores:

1. $|\mathbf{v}| \geqslant 0$
2. $|\mathbf{v}| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{v} = \mathbf{0}$
3. $|\mathbf{v} + \mathbf{w}| \leqslant |\mathbf{v}| + |\mathbf{w}|$
4. Si $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, $\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ es de módulo 1 (normalizar $\mathbf{v}$)

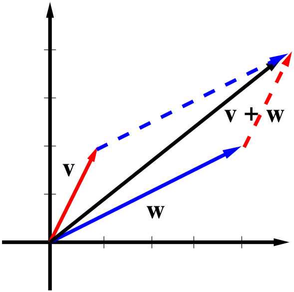
Suma de vectores

La suma de dos vectores es otro vector que tiene por componentes la suma de las componentes:

- $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2), \mathbf{w} = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$$
$$\Rightarrow \mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_1, v_2) + (w_1, w_2) = (v_1 + w_1, v_2 + w_2)$$

Geométricamente:



Suma de vectores

La suma de dos vectores es otro vector que tiene por componentes la suma de las componentes:

- $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3), \mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3 \\ \Rightarrow \mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_1, v_2, v_3) + (w_1, w_2, w_3) \\ = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3)\end{aligned}$$

- $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n), \mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n) \in \mathbb{R}^n \\ \Rightarrow \mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) + (w_1, w_2, \ldots, w_n) \\ = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \ldots, v_n + w_n)\end{aligned}$$

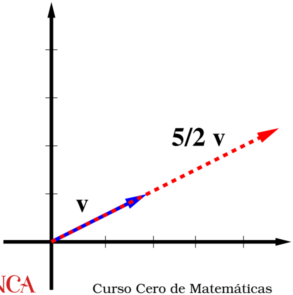
Producto de un vector por un escalar

El producto de un vector por un escalar (n^o real) es otro vector que resulta de multiplicar cada una de sus componentes por dicho escalar

- $\mathbb{R}^2$:

$$\lambda \in \mathbb{R},\ \mathbf{v} = (v_1, v_2)\mathbb{R}^2$$
$$\Rightarrow \lambda\mathbf{v} = \lambda(v_1, v_2) = (\lambda v_1, \lambda v_2)$$

Geométricamente:



Producto de un vector por un escalar

El producto de un vector por un escalar (n^{o} real) es otro vector que resulta de multiplicar cada una de sus componentes por dicho escalar

- $\mathbb{R}^3$:

$$\lambda \in \mathbb{R},\ \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$$
$$\Rightarrow \lambda \mathbf{v} = \lambda(v_1, v_2, v_3) = (\lambda v_1, \lambda v_2, \lambda v_3)$$

- $\mathbb{R}^n$:

$$\lambda \in \mathbb{R},\ \mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$$
$$\Rightarrow \lambda \mathbf{v} = \lambda(v_1, v_2, \ldots, v_n) = (\lambda v_1, \lambda v_2, \ldots, \lambda v_n)$$

Producto escalar de dos vectores

El producto escalar $\boxed{\cdot}$ de dos vectores es el número real que resulta de multiplicar el modulo de ambos vectores por el coseno del ángulo que forman

$$\boxed{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = |\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}|\,\cos(\mathbf{v}, \mathbf{w})}$$

Observación Si $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ están en coordenadas cartesianas, su producto escalar es la suma del producto de sus componentes

Producto escalar de dos vectores

El producto escalar $\cdot$ de dos vectores es el número real que resulta de multiplicar el modulo de ambos vectores por el coseno del ángulo que forman

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = |\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}| \cos(\mathbf{v}, \mathbf{w})$$

Observación Si $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ están en coordenadas cartesianas, su producto escalar es la suma del producto de sus componentes

Producto escalar de dos vectores

El producto escalar $\boxed{\cdot}$ de dos vectores es el número real que resulta de multiplicar el modulo de ambos vectores por el coseno del ángulo que forman

$$\boxed{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = |\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}|\,\cos(\mathbf{v}, \mathbf{w})}$$

Observación Si $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ están en coordenadas cartesianas, su producto escalar es la suma del producto de sus componentes

Esto es:

- $\mathbb{R}^2 \; : \; (v_1, v_2) \cdot (w_1, w_2) = v_1 w_1 + v_2 w_2$

Producto escalar de dos vectores

El producto escalar $\cdot$ de dos vectores es el número real que resulta de multiplicar el modulo de ambos vectores por el coseno del ángulo que forman

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = |\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}| \cos(\mathbf{v}, \mathbf{w})$$

Observación Si $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ están en coordenadas cartesianas, su producto escalar es la suma del producto de sus componentes

Esto es:

- $\mathbb{R}^3$: $(v_1, v_2, v_3) \cdot (w_1, w_2, w_3) = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$

Producto escalar de dos vectores

El producto escalar $\cdot$ de dos vectores es el número real que resulta de multiplicar el modulo de ambos vectores por el coseno del ángulo que forman

$$\boxed{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = |\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}|\,\cos(\mathbf{v}, \mathbf{w})}$$

Observación Si $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ están en coordenadas cartesianas, su producto escalar es la suma del producto de sus componentes

Esto es:

- $\mathbb{R}^n$: $(v_1, v_2, \ldots, v_n) \cdot (w_1, w_2, \ldots, w_n)$
  $= v_1 w_1 + v_2 w_2 + \ldots + v_n w_n$

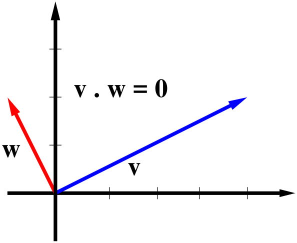
Producto escalar de dos vectores

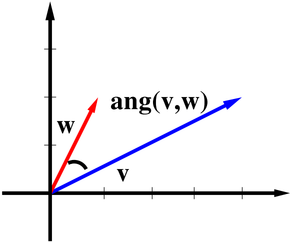
Propiedades

1. $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son perpendiculares $\quad\Leftrightarrow\quad \boxed{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=0}$

2. $|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}$

3. $\cos(\mathbf{v},\mathbf{w}) = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{|\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}|} \Rightarrow \text{áng}(\mathbf{v},\mathbf{w}) = \arccos\left[\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{|\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}|}\right]$





Esquema

Vectores en $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^n$

Operaciones con vectores

- Módulo
- Suma
- Producto por escalar
- Producto escalar

Dependencia/independencia lineal

Bases

Combinación lineal

Dados dos vectores $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ y dos números reales λ y μ, se denomina combinación lineal a todo vector de la forma:

$$\lambda\,\mathbf{v} + \mu\,\mathbf{w}$$

Ejemplos

- El vector $(-4, 5)$ es combinación lineal de los vectores $(1, -1)$ y $(-2, 3)$ pues

$$(-4, 5) = 2\,(1, -2) + 3\,(-2, 3)$$

- Cualquier vector de $\mathbb{R}^2$ es combinación lineal de $\{(1, 0), (0, 1)\}$, pues

$$(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$$

Combinación lineal

Dados dos vectores $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ y dos números reales λ y μ, se denomina combinación lineal a todo vector de la forma:

$$\lambda\,\mathbf{v} + \mu\,\mathbf{w}$$

La definición anterior se puede extender al caso de n-vectores. Así cualquier vector de la forma:

$$\lambda_1\,\mathbf{v}_1 + \lambda_2\,\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_n\,\mathbf{v}_n$$

con $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ es una combinación lineal de $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$

Dependencia lineal

Definición Los vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ se dicen linealmente dependientes si alguno de ellos se puede obtener como combinación lineal de los restantes

Ejemplos

- Los vectores $\{(-4, 5), (1, -2), (-2, 3)\}$ son linealmente dependientes, pues $(-4, 5)$ es combinación lineal de $\{(1, -2), (-2, 3)\}$
- Cualquier conjunto de vectores de $\mathbb{R}^3$, que incluya a los vectores $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ y a algún otro, es linealmente dependiente

Independencia lineal

Definición Si los vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ NO son linealmente dependientes se dicen linealmente independientes

Ejemplos

- Los vectores $(1, 0), (1, 1)$ son linealmente independientes
- Los vectores $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ son linealmente independientes

Esquema

Vectores en $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^n$

Operaciones con vectores

- Módulo
- Suma
- Producto por escalar
- Producto escalar

Dependencia/independencia lineal

Bases

Bases canónicas

Se denominan bases canónicas a los conjuntos:

- $\{(1,0),(0,1)\}$ en $\mathbb{R}^2$
- $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ en $\mathbb{R}^3$
- $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ en $\mathbb{R}^n$ donde $\mathbf{e}_i=(0,\ldots,0,\overset{\overset{i}{\downarrow}}{1},0,\ldots,0)$

Observación Las bases canónicas permiten expresar cualquier vector como combinación lineal de sus elementos de forma única:

$$(a,b)=a(1,0)+b(0,1)\quad \forall a,b\in\mathbb{R}$$

$$(a,b,c)=a(1,0,0)+b(0,1,0)+c(0,0,1),\quad \forall a,b,c\in\mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}(a_1,a_2,\ldots,a_n)&=a_1(1,0,\ldots,0)+a_2(0,1,0,\ldots,0)+\ldots\\ &\ldots+a_n(0,\ldots,0,1)\quad \forall a_i\in\mathbb{R}, i=1,\ldots,n\end{aligned}$$