VNIVERSIDAD D SALAMANCA
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

800 AÑOS
1218 ~ 2018

Curso Cero de Matemáticas para las titulaciones de la Facultad de Economía y Empresa

Tema 4: Sistemas de ecuaciones lineales

Facultad de Economía y Empresa
Dpto Economía e Historia Económica
Perfil Matemáticas

19 de junio de 2017

VNiVERSiDAD D SALAMANCA
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

800 AÑOS
1218 ~ 2018

J. Manuel Cascón, <casbar@usal.es>
Federico Cesteros, <fcesteros@usal.es>
Rodrigo del Campo, <rde@usal.es>
Aurora Manrique, <amg@usal.es>
M. Dolores García, <dgarcia@usal.es>
Bernardo García-Bernalt, <bgarcia@usal.es>
Guillermo Sánchez, <guillermo@usal.es>
Gustavo Santos, <santos@usal.es>

19 de junio de 2017

Esquema

Sistemas de ecuaciones lineales

Teorema de Rouché-Frobenius

Resolución de un SCD

Resolución de un SCI

Esquema

Sistemas de ecuaciones lineales

Teorema de Rouché-Frobenius

Resolución de un SCD

Resolución de un SCI

Sistemas de ecuaciones lineales

Sistema de m ecuaciones con n incógnitas

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ldots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{A\mathbf{x} = \mathbf{b}}$$

Notación:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\widehat{A} = (A|\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \text{(matriz ampliada)}$$

Esquema

Sistemas de ecuaciones lineales

Teorema de Rouché-Frobenius

Resolución de un SCD

Resolución de un SCI

Teorema de Rouché-Frobenius

Teorema Sea $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ un sistema de ecuaciones lineales con m ecuaciones y n incógnitas, entonces:

$1)$ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es sistema compatible (SC) $\Leftrightarrow$ $\boxed{\text{rang}(A) = \text{rang}(\widehat{A})}$

$2)$ Si $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es SC entonces :

$2a)$ $\text{rang}(A) < n \Rightarrow$ Sistema Compatible Indetermiando (SCI)(infinitas soluciones)

$2b)$ $\text{rang}(A) = n \Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado (SCD)(solución única)

Esquema

Sistemas de ecuaciones lineales

Teorema de Rouché-Frobenius

Resolución de un SCD

Resolución de un SCI

Resolución de un SCD

Dado el SCD

$$A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

la solución única puede calcularse mediante:

- Eliminación gaussiana
- Manipulación algebraica (Sustitución / Reducción / Igualación)
- Regla de Cramer
- Cálculo de la inversa
- Otros (factorizaciones)

Ejemplo Resolver:

$$\left.\begin{array}{rrrrrrrr} \text{eq1} \equiv & 3x & - & y & + & z & = & 7 \\ \text{eq2} \equiv & x & + & 3y & - & 2z & = & 0 \\ \text{eq3} \equiv & 2x & + & 2y & - & z & = & 2 \end{array}\right\} \Rightarrow (x, y, z) = \left(\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}, -4\right)$$

Resolución de un SCD. Eliminación gaussiana

- Se utilizan transformaciones elementales para calcular una matriz triangular equivalente a la ampliada
- El proceso consta de $n-1$ etapas
- En la etapa i-ésima se *hacen ceros* en la columna i por debajo de la diagonal
- En la etapa i-ésima la operación que se realiza con la fila j-ésima, viene dada por:

$$\boxed{f_j \leftarrow f_j - \frac{a_{ji}}{a_{ii}} f_j \qquad \forall j > i}$$

  siempre que $a_{ii} \neq 0$, en otro caso se deben permutar filas
- Efectuada la triangulación, se resuelve el sistema triangular de *abajo a arriba* (remonte)

Resolución de un SCD. Eliminación gaussiana

En nuestro caso:

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\substack{f_2 - \\ f_3 -}}{\overset{\text{Etapa 1}}{\Longrightarrow}} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & \frac{10}{3} & -\frac{7}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & \frac{8}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

$$\underset{f_3 -}{\overset{\text{Etapa 2}}{\Longrightarrow}} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & \frac{10}{3} & -\frac{7}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix} \overset{\text{Resol.}}{\Longrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} z = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{1}{5}} = -4 \\ y = \frac{-\frac{7}{3} + \frac{7}{3} z}{\frac{10}{3}} = -\frac{7}{2} \\ x = \frac{7 + y - z}{3} = \frac{5}{2} \end{array} \right.$$

Resolución de un SCD. Eliminación gaussiana

En nuestro caso:

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xRightarrow[\substack{f_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} f_1 \\ f_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} f_2}]{\text{Etapa 1}} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & \frac{10}{3} & -\frac{7}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & \frac{8}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

$$\xRightarrow[f_3 -]{\text{Etapa 2}} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & \frac{10}{3} & -\frac{7}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix} \xRightarrow{\text{Resol.}} \begin{cases} z = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{1}{5}} = -4 \\ y = \frac{-\frac{7}{3} + \frac{7}{3} z}{\frac{10}{3}} = -\frac{7}{2} \\ x = \frac{7 + y - z}{3} = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Resolución de un SCD. Eliminación gaussiana

En nuestro caso:

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\substack{f_2 - \frac{1}{3}f_1 \\ f_3 - \frac{2}{3}f_1}}{\overset{\text{Etapa 1}}{\Rightarrow}} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & \frac{10}{3} & -\frac{7}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & \frac{8}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

$$\underset{f_3 -}{\overset{\text{Etapa 2}}{\Rightarrow}} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & \frac{10}{3} & -\frac{7}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix} \overset{\text{Resol.}}{\Rightarrow} \begin{cases} z = \dfrac{-\frac{4}{5}}{\frac{1}{5}} = -4 \\ y = \dfrac{-\frac{7}{3} + \frac{7}{3}z}{\frac{10}{3}} = -\frac{7}{2} \\ x = \dfrac{7 + y - z}{3} = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Resolución de un SCD. Eliminación gaussiana

En nuestro caso:

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\substack{f_2 - \frac{1}{3}f_1 \\ f_3 - \frac{2}{3}f_1}}{\overset{\text{Etapa 1}}{\Rightarrow}} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & \frac{10}{3} & -\frac{7}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & \frac{8}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

$$\underset{f_3 - \frac{a_{32}}{a_{22}} f_2}{\overset{\text{Etapa 2}}{\Rightarrow}} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & \frac{10}{3} & -\frac{7}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix} \overset{\text{Resol.}}{\Rightarrow} \left\{ \begin{array}{l} z = \dfrac{-\frac{4}{5}}{\frac{1}{5}} = -4 \\ y = \dfrac{-\frac{7}{3} + \frac{7}{3}z}{\frac{10}{3}} = -\frac{7}{2} \\ x = \dfrac{7 + y - z}{3} = \frac{5}{2} \end{array} \right.$$

Resolución de un SCD. Eliminación gaussiana

En nuestro caso:

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\substack{f_2 - \frac{1}{3}f_1 \\ f_3 - \frac{2}{3}f_1}}{\overset{\text{Etapa 1}}{\Rightarrow}} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & \frac{10}{3} & -\frac{7}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & \frac{8}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

$$\underset{f_3 - \frac{4}{5}f_2}{\overset{\text{Etapa 2}}{\Rightarrow}} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & \frac{10}{3} & -\frac{7}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix} \overset{\text{Resol.}}{\Rightarrow} \left\{ \begin{array}{l} z = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{1}{5}} = -4 \\ y = \frac{-\frac{7}{3} + \frac{7}{3}z}{\frac{10}{3}} = -\frac{7}{2} \\ x = \frac{7+y-z}{3} = \frac{5}{2} \end{array} \right.$$

Resolución de un SCD. Eliminación gaussiana

En nuestro caso:

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\substack{f_2 - \frac{1}{3}f_1 \\ f_3 - \frac{2}{3}f_1}}{\overset{\text{Etapa 1}}{\Rightarrow}} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & \frac{10}{3} & -\frac{7}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & \frac{8}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

$$\underset{f_3 - \frac{4}{5}f_2}{\overset{\text{Etapa 2}}{\Rightarrow}} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & \frac{10}{3} & -\frac{7}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix} \overset{\text{Resol.}}{\Rightarrow} \left\{ \begin{array}{l} z = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{1}{5}} = -4 \\ y = \frac{-\frac{7}{3} + \frac{7}{3}z}{\frac{10}{3}} = -\frac{7}{2} \\ x = \frac{7+y-z}{3} = \frac{5}{2} \end{array} \right.$$

Resolución de un SCD. Regla de Cramer

La regla de Cramer determina que la componente i-ésima de la solución x_j viene dada por:

$$x_j = \frac{\det(A_1, \ldots, \overset{\overset{j}{\downarrow}}{\mathbf{b}}, \ldots A_n)}{\det(A)}$$

donde A_i denota la columna i-ésima de la matriz A.

Resolución de un SCD. Regla de Cramer

La regla de Cramer determina que la componente i-ésima de la solución x_j viene dada por:

$$x_j = \frac{\det(A_1, \ldots, \overset{\overset{j}{\downarrow}}{\mathbf{b}}, \ldots A_n)}{\det(A)}$$

donde A_i denota la columna i-ésima de la matriz A.
En nuestro caso:

$$x = \frac{\det\begin{pmatrix} 7 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{5}{2}$$

Resolución de un SCD. Regla de Cramer

La regla de Cramer determina que la componente i-ésima de la solución x_j viene dada por:

$$x_j = \frac{\det(A_1, \ldots, \overset{\overset{j}{\downarrow}}{\mathbf{b}}, \ldots A_n)}{\det(A)}$$

donde A_i denota la columna i-ésima de la matriz A.

$$y = \frac{\det\begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{-7}{2}$$

Resolución de un SCD. Regla de Cramer

La regla de Cramer determina que la componente i-ésima de la solución x_j viene dada por:

$$x_j = \frac{\det(A_1, \ldots, \overset{\overset{j}{\downarrow}}{\mathbf{b}}, \ldots A_n)}{\det(A)}$$

donde A_i denota la columna i-ésima de la matriz A.

$$z = \frac{\det \begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{-8}{2} = -4$$

Resolución de un SCD. Regla de Cramer

La regla de Cramer determina que la componente i-ésima de la solución x_j viene dada por:

$$x_j = \frac{\det(A_1, \ldots, \overset{\overset{j}{\downarrow}}{\mathbf{b}}, \ldots A_n)}{\det(A)}$$

donde A_i denota la columna i-ésima de la matriz A.
Por tanto:

$$x = \frac{5}{2} \qquad y = -\frac{7}{2} \qquad z = -4$$

Resolución de un SCD. Manip. algrebraica

Manipulamos el sistema con el objetivo de obtener un sistema más sencillo (eliminación de incógnitas). Observar que:

$$\left.\begin{array}{rl} \text{eq1 + eq3} \equiv & 5x + y = 9 \\ \text{-eq2 + 2 eq3} \equiv & 3x + y = 4 \end{array}\right\} \overset{\text{Igualando } y's}{\Rightarrow} 9 - 5x = 4 - 3x$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \quad y = 9 - 5\frac{5}{2} = -\frac{7}{2}$$

Por último, sustituyendo x e y en eq1 concluimos:

$$z = 7 - 3x + y = 7 - 3\frac{5}{2} - \frac{7}{2} = -4$$

Esquema

Sistemas de ecuaciones lineales

Teorema de Rouché-Frobenius

Resolución de un SCD

Resolución de un SCI

Resolución de un SCI (I)

Dado el SCI

$$A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

para determinar la familia de soluciones se puede proceder del siguiente modo:

1. Calcular un menor de orden máximo
2. Eliminar las ecuaciones (filas de la matriz), si es el caso, que quedan fuera del menor (son dependientes)
3. Pasar al segundo miembro los términos que incluyen a las incógnitas (columnas de la matriz) no presentes en el menor seleccionado. Parametrizar estas incógnitas (sustituirlas por parámetros: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$)
4. El sistema resultante es SCD y puede ser resuelto por cuaquiera de los métodos descritos previamente

Resolución de un SCI (II)

Ejemplo Resolver:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & - & t & = & 0 \\ & & & & z & + & t & = & 0 \\ x & + & y & + & 2z & & & = & 0 \end{array}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2 = \text{rang}(\widehat{A}),$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{rcrcr} x & + & z & = & -y+t \\ & & z & = & -t \end{array}\right\} \underset{\substack{y=\lambda \\ t=\mu}}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{rcrcr} x & + & z & = & -\lambda+\mu \\ & & z & = & -\mu \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -\lambda + 2\mu \\ z = -\mu \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = -\lambda + 2\mu \\ y = \lambda \\ z = -\mu \\ t = \mu \end{array}}$$

Resolución de un SCI (II)

Ejemplo Resolver:

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & - & t & = & 0 \\ & & & & z & + & t & = & 0 \\ x & + & y & + & 2z & & & = & 0 \end{array}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2 = \text{rang}(\widehat{A}),$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{ccccc} x & + & z & = & -y+t \\ & & z & = & -t \end{array}\right\} \underset{\substack{y=\lambda \\ t=\mu}}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{ccccc} x & + & z & = & -\lambda+\mu \\ & & z & = & -\mu \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -\lambda + 2\mu \\ z = -\mu \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = -\lambda + 2\mu \\ y = \lambda \\ z = -\mu \\ t = \mu \end{array}}$$

Resolución de un SCI (II)

Ejemplo Resolver:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & - & t & = & 0 \\ & & & & z & + & t & = & 0 \\ x & + & y & + & 2z & & & = & 0 \end{array}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) = 2 = \operatorname{rang}(\widehat{A}),$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{rcrcr} x & + & z & = & -y+t \\ & & z & = & -t \end{array}\right\} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ y = \lambda \\ t = \mu \end{array} \left.\begin{array}{rcrcr} x & + & z & = & -\lambda+\mu \\ & & z & = & -\mu \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -\lambda + 2\mu \\ z = -\mu \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = -\lambda + 2\mu \\ y = \lambda \\ z = -\mu \\ t = \mu \end{array}}$$

Resolución de un SCI (II)

Ejemplo Resolver:

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & - & t & = & 0 \\ & & & & z & + & t & = & 0 \\ x & + & y & + & 2z & & & = & 0 \end{array}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \mathrm{rang}(A) = 2 = \mathrm{rang}(\widehat{A}),$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{ccccc} x & + & z & = & -y+t \\ & & z & = & -t \end{array}\right\} \underset{\substack{y=\lambda \\ t=\mu}}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{ccccc} x & + & z & = & -\lambda+\mu \\ & & z & = & -\mu \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -\lambda + 2\mu \\ z = -\mu \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = -\lambda + 2\mu \\ y = \lambda \\ z = -\mu \\ t = \mu \end{array}}$$

Resolución de un SCI (II)

Ejemplo Resolver:

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & - & t & = & 0 \\ & & & & z & + & t & = & 0 \\ x & + & y & + & 2z & & & = & 0 \end{array}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \mathrm{rang}(A) = 2 = \mathrm{rang}(\widehat{A}),$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{ccccc} x & + & z & = & -y+t \\ & & z & = & -t \end{array}\right\} \underset{t=\mu}{\underset{y=\lambda}{\Rightarrow}} \left.\begin{array}{ccccc} x & + & z & = & -\lambda+\mu \\ & & z & = & -\mu \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -\lambda + 2\mu \\ z = -\mu \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = -\lambda + 2\mu \\ y = \lambda \\ z = -\mu \\ t = \mu \end{array}}$$

Resolución de un SCI (II)

Ejemplo Resolver:

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & - & t & = & 0 \\ & & & & z & + & t & = & 0 \\ x & + & y & + & 2z & & & = & 0 \end{array}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) = 2 = \operatorname{rang}(\widehat{A}),$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{ccccc} x & + & z & = & -y+t \\ & & z & = & -t \end{array}\right\} \underset{\substack{y=\lambda \\ t=\mu}}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{ccccc} x & + & z & = & -\lambda+\mu \\ & & z & = & -\mu \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -\lambda + 2\mu \\ z = -\mu \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = -\lambda + 2\mu \\ y = \lambda \\ z = -\mu \\ t = \mu \end{array}}$$

Resolución de un SCI (II)

Ejemplo Resolver:

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & - & t & = & 0 \\ & & & & z & + & t & = & 0 \\ x & + & y & + & 2z & & & = & 0 \end{array}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) = 2 = \operatorname{rang}(\widehat{A}),$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{ccccc} x & + & z & = & -y+t \\ & & z & = & -t \end{array}\right\} \underset{\substack{y=\lambda \\ t=\mu}}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{ccccc} x & + & z & = & -\lambda+\mu \\ & & z & = & -\mu \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -\lambda + 2\mu \\ z = -\mu \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = -\lambda + 2\mu \\ y = \lambda \\ z = -\mu \\ t = \mu \end{array}}$$