VNiVERSiDAD D SALAMANCA
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

USal 800 AÑOS 1218 ~ 2018

Curso Cero de Matemáticas para las titulaciones de la Facultad de Economía y Empresa

Tema 6: Funciones reales de variable real (I): Introducción

Facultad de Economía y Empresa
Dpto Economía e Historia Económica
Perfil Matemáticas

19 de junio de 2017

J. Manuel Cascón, <casbar@usal.es>
Federico Cesteros, <fcesteros@usal.es>
Rodrigo del Campo, <rde@usal.es>
Aurora Manrique, <amg@usal.es>
M. Dolores García, <dgarcia@usal.es>
Bernardo García-Bernalt, <bgarcia@usal.es>
Guillermo Sánchez, <guillermo@usal.es>
Gustavo Santos, <santos@usal.es>

19 de junio de 2017

Esquema

Conceptos previos
- Definiciones generales
- Composición de funciones

Funciones inyectivas e inversa de una función

Algunos tipos de funciones
- Funciones pares e impares
- Funciones acotadas
- Funciones monótonas
- Funciones exponenciales y logarítmicas

Esquema

Conceptos previos

- Definiciones generales
- Composición de funciones

Funciones inyectivas e inversa de una función

Algunos tipos de funciones

- Funciones pares e impares
- Funciones acotadas
- Funciones monótonas
- Funciones exponenciales y logarítmicas

Definiciones generales

Definiciones

- Una función real de variable real es una aplicación

$$\boxed{f : D \to \mathbb{R}}$$

  Donde D es un subconjunto de $\mathbb{R}$. Normalmente una función de este tipo se denota $y = f(x)$, donde $x \in D$ representa la variable independiente e $y \in \mathbb{R}$ la variable dependiente

- El dominio o campo de existencia de la función f es el subconjunto de $\mathbb{R}$ donde f está definida: $\mathrm{Dom}(f) = D$

- El recorrido de la función es el subconjunto de $\mathbb{R}$ formado por todos los valores que toma la variable dependiente, es decir la imagen de la aplicación f: $\mathrm{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R}; \exists x \in D, f(x) = y\}$

Definiciones generales

Definiciones

- Una función real de variable real es una aplicación

$$\boxed{f : D \to \mathbb{R}}$$

Donde D es un subconjunto de $\mathbb{R}$. Normalmente una función de este tipo se denota $y = f(x)$, donde $x \in D$ representa la variable independiente e $y \in \mathbb{R}$ la variable dependiente

- El dominio o campo de existencia de la función f es el subconjunto de $\mathbb{R}$ donde f está definida: $\mathrm{Dom}(f) = D$

- El recorrido de la función es el subconjunto de $\mathbb{R}$ formado por todos los valores que toma la variable dependiente, es decir la imagen de la aplicación f: $\mathrm{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R}; \exists x \in D, f(x) = y\}$

Definiciones generales

Definiciones

- Una función real de variable real es una aplicación

$$\boxed{f : D \to \mathbb{R}}$$

  Donde D es un subconjunto de $\mathbb{R}$. Normalmente una función de este tipo se denota $y = f(x)$, donde $x \in D$ representa la variable independiente e $y \in \mathbb{R}$ la variable dependiente
- El dominio o campo de existencia de la función f es el subconjunto de $\mathbb{R}$ donde f está definida: $\mathrm{Dom}(f) = D$
- El recorrido de la función es el subconjunto de $\mathbb{R}$ formado por todos los valores que toma la variable dependiente, es decir la imagen de la aplicación f: $\mathrm{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R}; \exists x \in D, f(x) = y\}$

Ejemplos

- Sea $f(x) = x^3 + 3$. Esta función está definida para cualquier valor de x, es decir: $\boxed{\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}}$. Por otra parte $\forall y \in \mathbb{R}$ existe un $x \in \mathbb{R}$ que verifica $f(x) = x^3 + 3 = y$ (efectivamente esto ocurre para $x = \sqrt[3]{y-3}$), es decir $\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}}$
- Sea $f(x) = |x|$. El dominio de esta función es todo $\mathbb{R}$ y su recorrido los números reales no negativos

$$\boxed{\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}} \qquad \boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}}$$

- Se define la función de Dirichlet como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

En este caso:

$$\boxed{\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}} \qquad \boxed{\mathrm{Im}(f) = \{0\} \cup \{1\}}$$

Ejemplos

- Sea $f(x) = x^3 + 3$. Esta función está definida para cualquier valor de x, es decir: $\boxed{\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}}$. Por otra parte $\forall y \in \mathbb{R}$ existe un $x \in \mathbb{R}$ que verifica $f(x) = x^3 + 3 = y$ (efectivamente esto ocurre para $x = \sqrt[3]{y-3}$), es decir $\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}}$
- Sea $f(x) = | x |$. El dominio de esta función es todo $\mathbb{R}$ y su recorrido los números reales no negativos

$$\boxed{\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}} \qquad \boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}}$$

- Se define la función de Dirichlet como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

En este caso:

$$\boxed{\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}} \qquad \boxed{\mathrm{Im}(f) = \{0\} \cup \{1\}}$$

Ejemplos

- Sea $f(x) = x^3 + 3$. Esta función está definida para cualquier valor de x, es decir: $\boxed{\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}}$. Por otra parte $\forall y \in \mathbb{R}$ existe un $x \in \mathbb{R}$ que verifica $f(x) = x^3 + 3 = y$ (efectivamente esto ocurre para $x = \sqrt[3]{y-3}$), es decir $\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}}$
- Sea $f(x) = |\, x \,|$. El dominio de esta función es todo $\mathbb{R}$ y su recorrido los números reales no negativos

$$\boxed{\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}} \qquad \boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}}$$

- Se define la función de Dirichlet como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

En este caso:

$$\boxed{\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}} \qquad \boxed{\mathrm{Im}(f) = \{0\} \cup \{1\}}$$

Ejemplos

- La función $f : D \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -\sqrt{x+1}$ tiene como dominio el conjunto de todos los x tales que $x + 1 \geqslant 0$. El recorrido de esta función será $\mathbb{R}^- \cup \{0\}$:

$$\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R}; x \geqslant -1\} \qquad \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^- \cup \{0\}$$

- La función $f : D \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$ tiene como dominio todos los puntos donde no se anula el denominador $x^2 - 1$, es decir, $\mathbb{R} - \{1, -1\}$. El recorrido es $\mathbb{R} - (0, 1]$:

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\} \qquad \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} - (0, 1]$$

- La función $f : D \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \mathrm{sen}(\frac{x^2}{x^2-1})$ tiene el mismo dominio que la anterior. El recorrido serán todos los valores que puede tomar el seno en el recorrido de $\frac{x^2}{x^2-1}$, es decir:

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\} \qquad \mathrm{Im}(f) = [-1, 1]$$

Ejemplos

- La función $f : D \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -\sqrt{x+1}$ tiene como dominio el conjunto de todos los x tales que $x + 1 \geqslant 0$. El recorrido de esta función será $\mathbb{R}^- \cup \{0\}$:

$$\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R}; x \geqslant -1\} \qquad \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^- \cup \{0\}$$

- La función $f : D \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$ tiene como dominio todos los puntos donde no se anula el denominador $x^2 - 1$, es decir, $\mathbb{R} - \{1, -1\}$. El recorrido es $\mathbb{R} - (0, 1]$:

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\} \qquad \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} - (0, 1]$$

- La función $f : D \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \mathrm{sen}(\frac{x^2}{x^2-1})$ tiene el mismo dominio que la anterior. El recorrido serán todos los valores que puede tomar el seno en el recorrido de $\frac{x^2}{x^2-1}$, es decir:

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\} \qquad \mathrm{Im}(f) = [-1, 1]$$

Ejemplos

- La función $f : D \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -\sqrt{x+1}$ tiene como dominio el conjunto de todos los x tales que $x + 1 \geqslant 0$. El recorrido de esta función será $\mathbb{R}^- \cup \{0\}$:

  $$\boxed{\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R}; x \geqslant -1\}} \qquad \boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^- \cup \{0\}}$$

- La función $f : D \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$ tiene como dominio todos los puntos donde no se anula el denominador $x^2 - 1$, es decir, $\mathbb{R} - \{1, -1\}$. El recorrido es $\mathbb{R} - (0, 1]$:

  $$\boxed{\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}} \qquad \boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} - (0, 1]}$$

- La función $f : D \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \mathrm{sen}(\frac{x^2}{x^2-1})$ tiene el mismo dominio que la anterior. El recorrido serán todos los valores que puede tomar el seno en el recorrido de $\frac{x^2}{x^2-1}$, es decir:

  $$\boxed{\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}} \qquad \boxed{\mathrm{Im}(f) = [-1, 1]}$$

Gráfica de una función

Definición Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función real de variable real. Se denomina gráfica de f al siguiente conjunto de puntos del plano:

$$\boxed{\mathrm{Grf}(f) = \{(x, f(x)) \in D \times \mathbb{R}; \forall x \in D\}}$$

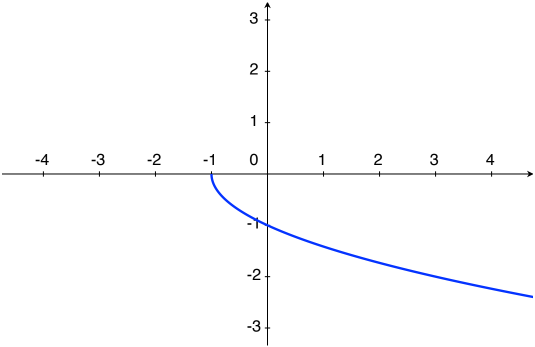
Observaciones

- La gráfica de f son los puntos del plano cuyas coordenadas cartesianas (x, y) verifican que $y = f(x)$, con $x \in D$
- La gráfica de una función ofrece de modo muy rápido e intuitivo información sobre las características de la misma (dominio, recorrido, cortes con los ejes, simetrías...)

Gráfica de una función. Ejemplo 1

Ejemplo $f(x) = -\sqrt{x+1}$

$$\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R}; x \geqslant -1\} = [-1, +\infty)]$$
$$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^- \cup \{0\} = (-\infty, 0]$$

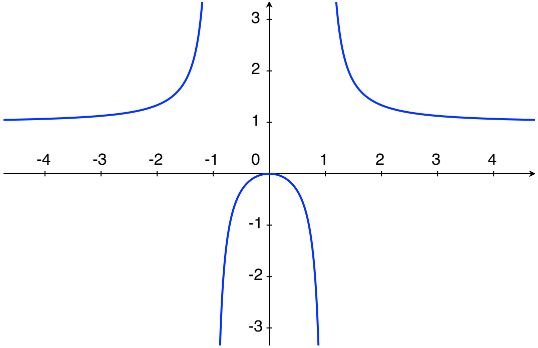


Gráfica de una función. Ejemplo 2

Ejemplo $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1, -1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$$

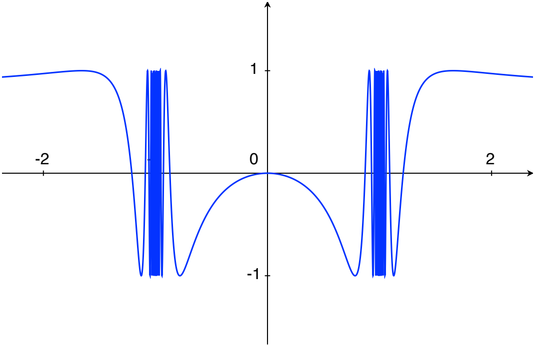
$$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} - (0, 1] = (-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$$



Gráfica de una función. Ejemplo 3

Ejemplo $f(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{x^2}{x^2-1}\right)$

$$\begin{aligned} \mathrm{Dom}(f) &= \mathbb{R} - \{1, -1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty) \\ \mathrm{Im}(f) &= [-1, 1] \end{aligned}$$



Composición de funciones

Definición Sean $f : D_1 \to \mathbb{R}$ y $g : D_2 \to \mathbb{R}$ funciones reales de variable real, tales que

$$\mathrm{Im}(f) = f(D_1) \subset D_2$$

La composición de f y g, es una función $g \circ f : D_1 \to \mathbb{R}$ definida como sigue

$$\boxed{(g \circ f)(x) = g(f(x))}$$

Ejemplo Sea $f(x) = x + 1$ y $g(x) = \frac{1}{x^2-4}$. Entonces:

- $(g \circ f)(x) = g(x+1) = \dfrac{1}{(x+1)^2 - 4} = \dfrac{1}{x^2 + 2x - 3}$
- $(f \circ g)(x) = f\left(\dfrac{1}{x^2 - 4}\right) = \dfrac{1}{x^2 - 4} + 1 = \dfrac{x^2 - 3}{x^2 - 4}$

Esquema

Conceptos previos

Definiciones generales

Composición de funciones

Funciones inyectivas e inversa de una función

Algunos tipos de funciones

Funciones pares e impares

Funciones acotadas

Funciones monótonas

Funciones exponenciales y logarítmicas

Función inyectiva y su inversa (I)

Definición Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función real de variable real. Diremos que es inyectiva o unívoca cuando si $x, x' \in D$ verifican $f(x) = f(x')$ entonces necesariamente $x = x'$:

$$\boxed{x, x' \in D, f(x) = f(x') \quad \Rightarrow \quad x = x'}$$

Es decir, cuando no hay dos elementos distintos de D que tengan la misma imagen

Ejemplo Veamos cómo la función $f(x) = 2x + 3$ es una función inyectiva.
Obsérvese que $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$ e $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$. Si $x, x' \in \mathbb{R}$ son tales que $f(x) = f(x')$. Entonces

$$2x + 3 = 2x' + 3 \quad \Rightarrow \quad x = x'$$

Obsevación Cuando una función $f : D \to \mathbb{R}$ es inyectiva podemos definir una función real de variable real

$$f^{-1} : \mathrm{Im}(f) \to D$$

que hace corresponder a cada elemento de $y \in \mathrm{Im}(f)$ el único $x \in D$ que verifica $f(x) = y$.

Función inyectiva y su inversa (II)

Ejemplo Si $f(x) = 2x + 3$ para determinar su inversa hacemos $y = 2x + 3$ y como consecuencia $x = \frac{y-3}{2}$. Es decir, $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se define $f^{-1}(y) = \frac{y-3}{2}$. Obtenemos así:

$$f(x) = 2x + 3, \qquad f^{-1}(y) = \frac{y-3}{2}$$

Las funciones f y f^{-1} del ejemplo pueden componerse. Obsérvese que:

$$\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = f^{-1}(2x+3) = \frac{(2x+3)-3}{2} = x$$

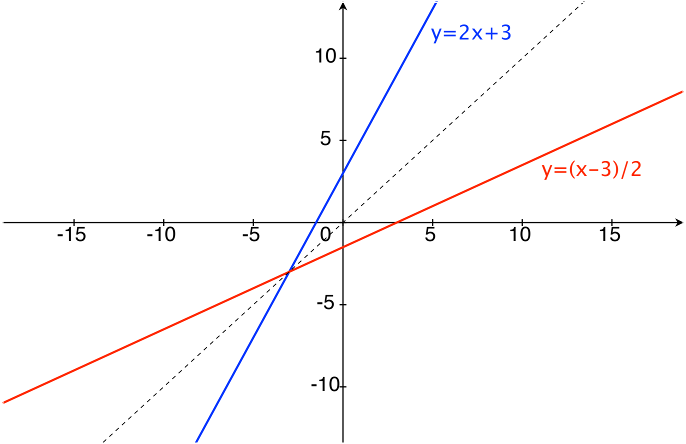
Y análogamente

$$\left(f \circ f^{-1}\right)(y) = f\left(\frac{y-3}{2}\right) = 2\left(\frac{y-3}{2}\right) + 3 = y$$

Es decir, $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id} = f^{-1} \circ f$ donde Id es la función identidad: $\mathrm{Id}(x) = x$

Función inyectiva y su inversa (III)

Obsérvese que si (x, y) es un punto de la gráfica de f entonces (y, x) es un punto de la gráfica de f^{-1}, es decir, la gráfica de una función y la de su inversa son simétricas respecto a la recta $y = x$



Inversa de una función

Definición Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función inyectiva. Existe una función $f^{-1} : Im(f) \to D$ que verifica:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x, \forall x \in D \text{ y } (f \circ f^{-1})(y) = y, \forall y \in \mathrm{Im}(f)$$

Llamaremos a f^{-1} función inversa de f. Su definición es:

$$\boxed{f^{-1}(y) = x, \text{donde } x \text{ es la antiimagen de } y \text{ por } f}$$

Ejemplo Sea $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la función $f(x) = +\sqrt{x}$. Nótese que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$. La inversa de f es la función $f^{-1}(y) = y^2$. En efecto:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(+\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$$

Análogamente, para $y \in \mathbb{R}^+$,

$$(f \circ f^{-1})(y) = f(y^2) = +\sqrt{y^2} = y$$

Esquema

Conceptos previos
- Definiciones generales
- Composición de funciones

Funciones inyectivas e inversa de una función

Algunos tipos de funciones
- Funciones pares e impares
- Funciones acotadas
- Funciones monótonas
- Funciones exponenciales y logarítmicas

Funciones pares e impares

Definición: Sea $D \subset \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in D; -x \in D$. Diremos que la función $f : D \to \mathbb{R}$ es una función impar cuando:

$$\boxed{\forall x \in D \text{ se verifica que } f(-x) = -f(x)}$$

Observación: Si f es impar y el punto del plano $p = (x, f(x))$ es un punto de su gráfica, entonces el punto $p' = (-x, -f(x))$ también estaría en la gráfica de f, es decir, la gráfica de las funciones impares es simétrica respecto al origen de coordenadas

Ejemplo: La función $f(x) = \frac{x^3 - x^5}{\cos(x)}$ es una función impar, puesto que

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 - (-x)^5}{\cos(-x)} = \frac{-(x^3 - x^5)}{\cos(x)} = -f(x)$$

Funciones pares e impares

Definición: Sea $D \subset \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in D; -x \in D$. Diremos que la función $f : D \to \mathbb{R}$ es una función impar cuando:

$$\boxed{\forall x \in D \text{ se verifica que } f(-x) = -f(x)}$$

Observación: Si f es impar y el punto del plano $p = (x, f(x))$ es un punto de su gráfica, entonces el punto $p' = (-x, -f(x))$ también estaría en la gráfica de f, es decir, la gráfica de las funciones impares es simétrica respecto al origen de coordenadas

Ejemplo: La función $f(x) = \frac{x^3 - x^5}{\cos(x)}$ es una función impar, puesto que

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 - (-x)^5}{\cos(-x)} = \frac{-(x^3 - x^5)}{\cos(x)} = -f(x)$$

Funciones pares e impares

Definición: Sea $D \subset \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in D; -x \in D$. Diremos que la función $f : D \to \mathbb{R}$ es una función impar cuando:

$$\boxed{\forall x \in D \text{ se verifica que } f(-x) = -f(x)}$$

Observación: Si f es impar y el punto del plano $p = (x, f(x))$ es un punto de su gráfica, entonces el punto $p' = (-x, -f(x))$ también estaría en la gráfica de f, es decir, la gráfica de las funciones impares es simétrica respecto al origen de coordenadas

Ejemplo: La función $f(x) = \frac{x^3 - x^5}{\cos(x)}$ es una función impar, puesto que

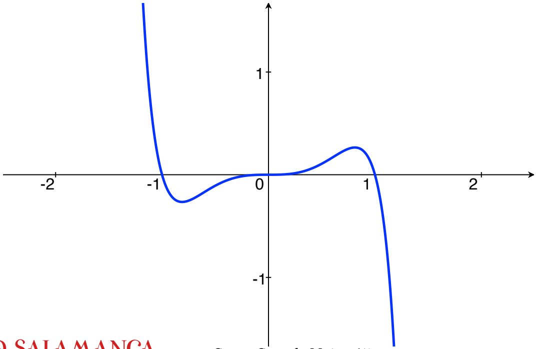
$$f(-x) = \frac{(-x)^3 - (-x)^5}{\cos(-x)} = \frac{-(x^3 - x^5)}{\cos(x)} = -f(x)$$

Funciones pares e impares

Definición: Sea $D \subset \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in D; -x \in D$. Diremos que la función $f : D \to \mathbb{R}$ es una función impar cuando:

$$\forall x \in D \text{ se verifica que } f(-x) = -f(x)$$

Ejemplo La gráfica de $f(x) = \frac{x^3 - x^5}{\cos(x)}$ (impar) es:



Funciones pares e impares

Definición: Sea $D \subset \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in D; -x \in D$. Diremos que la función $f : D \to \mathbb{R}$ es una función par cuando:

$$\boxed{\forall x \in D \text{ se verifica que } f(-x) = f(x)}$$

Observación: Si f es par y el punto del plano $p = (x, f(x))$ es un punto de su gráfica, entonces el punto $p' = (-x, f(x))$ también estaría en la gráfica de f, es decir la gráfica de las funciones impares es simétrica respecto al eje de ordenadas

Ejemplo: La función $f(x) = -x\,\mathrm{sen}(x)$ es una función par, puesto que

$$f(-x) = -(-x)\,\mathrm{sen}(-x) = x\,\mathrm{sen}(-x) = -x\,\mathrm{sen}(x) = f(x)$$

Funciones pares e impares

Definición: Sea $D \subset \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in D; -x \in D$. Diremos que la función $f : D \to \mathbb{R}$ es una función par cuando:

$$\boxed{\forall x \in D \text{ se verifica que } f(-x) = f(x)}$$

Observación: Si f es par y el punto del plano $p = (x, f(x))$ es un punto de su gráfica, entonces el punto $p' = (-x, f(x))$ también estaría en la gráfica de f, es decir la gráfica de las funciones impares es simétrica respecto al eje de ordenadas

Ejemplo: La función $f(x) = -x\,\mathrm{sen}(x)$ es una función par, puesto que

$$f(-x) = -(-x)\,\mathrm{sen}(-x) = x\,\mathrm{sen}(-x) = -x\,\mathrm{sen}(x) = f(x)$$

Funciones pares e impares

Definición: Sea $D \subset \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in D; -x \in D$. Diremos que la función $f : D \to \mathbb{R}$ es una función par cuando:

$$\boxed{\forall x \in D \text{ se verifica que } f(-x) = f(x)}$$

Observación: Si f es par y el punto del plano $p = (x, f(x))$ es un punto de su gráfica, entonces el punto $p' = (-x, f(x))$ también estaría en la gráfica de f, es decir la gráfica de las funciones impares es simétrica respecto al eje de ordenadas

Ejemplo: La función $f(x) = -x\,\mathrm{sen}(x)$ es una función par, puesto que

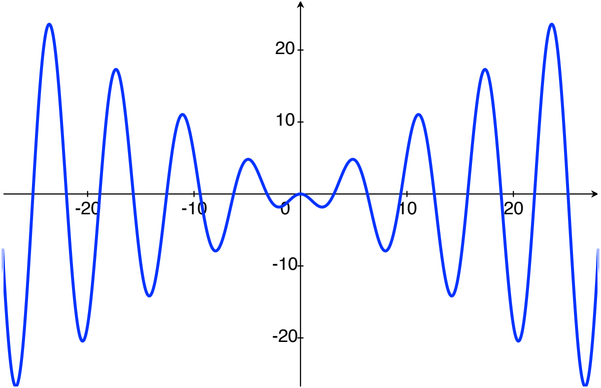
$$f(-x) = -(-x)\,\mathrm{sen}(-x) = x\,\mathrm{sen}(-x) = -x\,\mathrm{sen}(x) = f(x)$$

Funciones pares e impares

Definición: Sea $D \subset \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in D; -x \in D$. Diremos que la función $f : D \to \mathbb{R}$ es una función par cuando:

$$\boxed{\forall x \in D \text{ se verifica que } f(-x) = f(x)}$$

Ejemplo La gráfica de $f(x) = x\,\mathrm{sen}(x)$ (par) es:



Funciones acotadas

Definiciones

- Diremos que la función $f : D \to \mathbb{R}$ está acotada superiormente (resp. inferiormente) si existe un número real M tal que

$$\boxed{f(x) \leqslant M \text{ (resp. } f(x) \geqslant M); \forall x \in D}$$

- Diremos que f está acotada si lo está superior e inferiormente
- Diremos que f está acotada superiormente (resp. inferiormente) en un punto $a \in D$, si lo está en un entorno E_a del punto a

Observación Si f está acotada en D lo está en todos los puntos de D, pero el recíproco no es cierto. Una función puede estar acotada en todos los puntos de su dominio y no estar acotada en todo el dominio. Un ejemplo es la función $f(x) = x^4 + x^2$, cuyo dominio es todo $\mathbb{R}$

Funciones acotadas

Definiciones

- Diremos que la función $f: D \to \mathbb{R}$ **está acotada superiormente (resp. inferiormente)** si existe un número real M tal que

$$\boxed{f(x) \leqslant M \text{ (resp. } f(x) \geqslant M); \forall x \in D}$$

- Diremos que f **está acotada** si lo está superior e inferiormente
- Diremos que f **está acotada superiormente (resp. inferiormente)** en un punto $a \in D$, si lo está en un entorno E_a del punto a

Observación Si f está acotada en D lo está en todos los puntos de D, pero el recíproco no es cierto. Una función puede estar acotada en todos los puntos de su dominio y no estar acotada en todo el dominio. Un ejemplo es la función $f(x) = x^4 + x^2$, cuyo dominio es todo $\mathbb{R}$

Funciones acotadas

Definiciones

- Diremos que la función $f : D \to \mathbb{R}$ está acotada superiormente (resp. inferiormente) si existe un número real M tal que

$$\boxed{f(x) \leqslant M \text{ (resp. } f(x) \geqslant M); \forall x \in D}$$

- Diremos que f está acotada si lo está superior e inferiormente
- Diremos que f está acotada superiormente (resp. inferiormente) en un punto $a \in D$, si lo está en un entorno E_a del punto a

Observación Si f está acotada en D lo está en todos los puntos de D, pero el recíproco no es cierto. Una función puede estar acotada en todos los puntos de su dominio y no estar acotada en todo el dominio. Un ejemplo es la función $f(x) = x^4 + x^2$, cuyo dominio es todo $\mathbb{R}$

Funciones acotadas

Definiciones

- Diremos que la función $f : D \to \mathbb{R}$ está acotada superiormente (resp. inferiormente) si existe un número real M tal que

$$\boxed{f(x) \leqslant M \text{ (resp. } f(x) \geqslant M); \forall x \in D}$$

- Diremos que f está acotada si lo está superior e inferiormente
- Diremos que f está acotada superiormente (resp. inferiormente) en un punto $a \in D$, si lo está en un entorno E_a del punto a

Observación Si f está acotada en D lo está en todos los puntos de D, pero el recíproco no es cierto. Una función puede estar acotada en todos los puntos de su dominio y no estar acotada en todo el dominio. Un ejemplo es la función $f(x) = x^4 + x^2$, cuyo dominio es todo $\mathbb{R}$

Máximos y mínimos absolutos y relativos

Definiciones

- Se llama extremo superior de una función $f : D \to \mathbb{R}$, y denotaremos $\sup(f)$, a la menor de sus cotas superiores
- Diremos que un punto $x_0 \in D$ es un máximo global o absoluto de f si $f(x_0) = \sup(f)$
- Se llama extremo inferior de una función $f : D \to \mathbb{R}$, y denotaremos $\inf(f)$, a la mayor de sus cotas inferiores
- Diremos que un punto $x_0 \in D$ es un mínimo global o absoluto de f si $f(x_0) = \inf(f)$
- Diremos que un punto $x_0 \in D$ es un máximo local o relativo de f si existe un entorno de x_0, E_{x_0} tal que $\forall x \in E_{x_0} \cap D$, se verifica $f(x) \leqslant f(x_0)$
- Diremos que un punto $x_0 \in D$ es un mínimo local o relativo de f si existe un entorno de x_0, E_{x_0} tal que $\forall x \in E_{x_0} \cap D$, se verifica $f(x) \geqslant f(x_0)$

Máximos y mínimos absolutos y relativos

Definiciones

- Se llama extremo superior de una función $f : D \to \mathbb{R}$, y denotaremos $\sup(f)$, a la menor de sus cotas superiores
- Diremos que un punto $x_0 \in D$ es un máximo global o absoluto de f si $f(x_0) = \sup(f)$
- Se llama extremo inferior de una función $f : D \to \mathbb{R}$, y denotaremos $\inf(f)$, a la mayor de sus cotas inferiores
- Diremos que un punto $x_0 \in D$ es un mínimo global o absoluto de f si $f(x_0) = \inf(f)$
- Diremos que un punto $x_0 \in D$ es un máximo local o relativo de f si existe un entorno de x_0, E_{x_0} tal que $\forall x \in E_{x_0} \cap D$, se verifica $f(x) \leqslant f(x_0)$
- Diremos que un punto $x_0 \in D$ es un mínimo local o relativo de f si existe un entorno de x_0, E_{x_0} tal que $\forall x \in E_{x_0} \cap D$, se verifica $f(x) \geqslant f(x_0)$

Máximos y mínimos absolutos y relativos

Definiciones

- Se llama extremo superior de una función $f : D \to \mathbb{R}$, y denotaremos $\sup(f)$, a la menor de sus cotas superiores
- Diremos que un punto $x_0 \in D$ es un máximo global o absoluto de f si $f(x_0) = \sup(f)$
- Se llama extremo inferior de una función $f : D \to \mathbb{R}$, y denotaremos $\inf(f)$, a la mayor de sus cotas inferiores
- Diremos que un punto $x_0 \in D$ es un mínimo global o absoluto de f si $f(x_0) = \inf(f)$
- Diremos que un punto $x_0 \in D$ es un máximo local o relativo de f si existe un entorno de x_0, E_{x_0} tal que $\forall x \in E_{x_0} \cap D$, se verifica $f(x) \leqslant f(x_0)$
- Diremos que un punto $x_0 \in D$ es un mínimo local o relativo de f si existe un entorno de x_0, E_{x_0} tal que $\forall x \in E_{x_0} \cap D$, se verifica $f(x) \geqslant f(x_0)$

Máximos y mínimos absolutos y relativos

Definiciones

- Se llama extremo superior de una función $f : D \to \mathbb{R}$, y denotaremos $\sup(f)$, a la menor de sus cotas superiores
- Diremos que un punto $x_0 \in D$ es un máximo global o absoluto de f si $f(x_0) = \sup(f)$
- Se llama extremo inferior de una función $f : D \to \mathbb{R}$, y denotaremos $\inf(f)$, a la mayor de sus cotas inferiores
- Diremos que un punto $x_0 \in D$ es un mínimo global o absoluto de f si $f(x_0) = \inf(f)$
- Diremos que un punto $x_0 \in D$ es un máximo local o relativo de f si existe un entorno de x_0, E_{x_0} tal que $\forall x \in E_{x_0} \cap D$, se verifica $f(x) \leqslant f(x_0)$
- Diremos que un punto $x_0 \in D$ es un mínimo local o relativo de f si existe un entorno de x_0, E_{x_0} tal que $\forall x \in E_{x_0} \cap D$, se verifica $f(x) \geqslant f(x_0)$

Máximos y mínimos absolutos y relativos

Definiciones

- Se llama extremo superior de una función $f : D \to \mathbb{R}$, y denotaremos $\sup(f)$, a la menor de sus cotas superiores
- Diremos que un punto $x_0 \in D$ es un máximo global o absoluto de f si $f(x_0) = \sup(f)$
- Se llama extremo inferior de una función $f : D \to \mathbb{R}$, y denotaremos $\inf(f)$, a la mayor de sus cotas inferiores
- Diremos que un punto $x_0 \in D$ es un mínimo global o absoluto de f si $f(x_0) = \inf(f)$
- Diremos que un punto $x_0 \in D$ es un máximo local o relativo de f si existe un entorno de x_0, E_{x_0} tal que $\forall x \in E_{x_0} \cap D$, se verifica $f(x) \leqslant f(x_0)$
- Diremos que un punto $x_0 \in D$ es un mínimo local o relativo de f si existe un entorno de x_0, E_{x_0} tal que $\forall x \in E_{x_0} \cap D$, se verifica $f(x) \geqslant f(x_0)$

Máximos y mínimos absolutos y relativos

Definiciones

- Se llama extremo superior de una función $f : D \to \mathbb{R}$, y denotaremos $\sup(f)$, a la menor de sus cotas superiores
- Diremos que un punto $x_0 \in D$ es un máximo global o absoluto de f si $f(x_0) = \sup(f)$
- Se llama extremo inferior de una función $f : D \to \mathbb{R}$, y denotaremos $\inf(f)$, a la mayor de sus cotas inferiores
- Diremos que un punto $x_0 \in D$ es un mínimo global o absoluto de f si $f(x_0) = \inf(f)$
- Diremos que un punto $x_0 \in D$ es un máximo local o relativo de f si existe un entorno de x_0, E_{x_0} tal que $\forall x \in E_{x_0} \cap D$, se verifica $f(x) \leqslant f(x_0)$
- Diremos que un punto $x_0 \in D$ es un mínimo local o relativo de f si existe un entorno de x_0, E_{x_0} tal que $\forall x \in E_{x_0} \cap D$, se verifica $f(x) \geqslant f(x_0)$

Máximos y mínimos absolutos y relativos

Observación Con las definiciones anteriores un máximo o mínimo absoluto de una función en un conjunto D lo es también relativo. El recíproco no es cierto, es decir, un máximo o mínimo relativo no tiene por qué ser absoluto

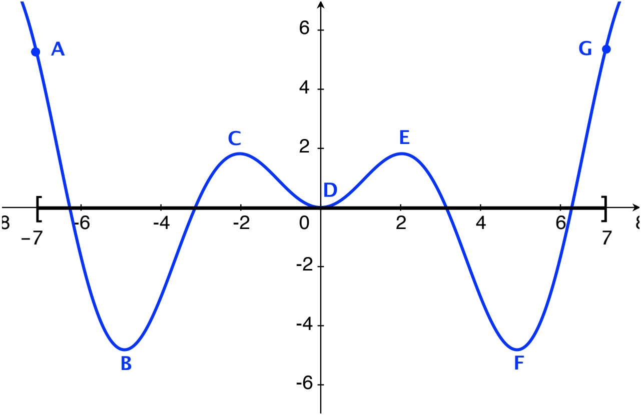
Ejemplo Consideremos la función (ver gráfica en la siguiente página)

$$f(x) = x \operatorname{sen} x$$

en el intervalo cerrado $I = [-7, 7]$, que alcanza el máximo absoluto en los puntos A y G de su gráfica, y el mínimo absoluto en B y F. Los puntos C y E representan máximos relativos, pero no absolutos, y el punto D un mínimo relativo, pero no absoluto

Máximos y mínimos absolutos y relativos

$f(x) = x\,\mathrm{sen}\,x$ en el intervalo D = [-7,7]



Máx. absolutos: A,G

Máx. relativos (no abs.): C, E

Mín. absolutos: B,F

Mín. relativos (no abs.): D

Funciones monótonas

Definiciones Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función real de variable real y sea $a \in D$

- Diremos que f es creciente en el punto a si existe un entorno de a, E_a, tal que:

$$\forall x \in E_a \cap D \text{ si } \begin{cases} x \leqslant a \text{ entonces } f(x) \leqslant f(a) \\ x \geqslant a \text{ entonces } f(x) \geqslant f(a) \end{cases}$$

  Si las desigualdades son todas estrictas diremos que es estrictamente creciente

- Diremos que f es decreciente en el punto a si existe un entorno de a, E_a, tal que:

$$\forall x \in E_a \cap D \text{ si } \begin{cases} x \leqslant a \text{ entonces } f(x) \geqslant f(a) \\ x \geqslant a \text{ entonces } f(x) \leqslant f(a) \end{cases}$$

  Si las desigualdades son todas estrictas diremos que es estrictamente decreciente

Funciones monótonas

Definiciones Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función real de variable real y sea $a \in D$

- Diremos que f es creciente en el punto a si existe un entorno de a, E_a, tal que:

$$\forall x \in E_a \cap D \text{ si } \begin{cases} x \leqslant a \text{ entonces } f(x) \leqslant f(a) \\ x \geqslant a \text{ entonces } f(x) \geqslant f(a) \end{cases}$$

  Si las desigualdades son todas estrictas diremos que es estrictamente creciente

- Diremos que f es decreciente en el punto a si existe un entorno de a, E_a, tal que:

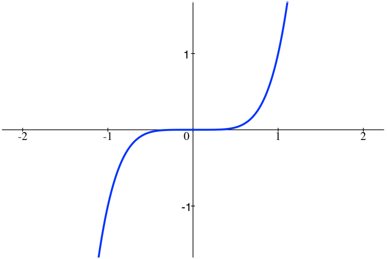
$$\forall x \in E_a \cap D \text{ si } \begin{cases} x \leqslant a \text{ entonces } f(x) \geqslant f(a) \\ x \geqslant a \text{ entonces } f(x) \leqslant f(a) \end{cases}$$

  Si las desigualdades son todas estrictas diremos que es estrictamente decreciente

Funciones monótonas

Definición Diremos que f es monótona creciente o estrictamente creciente (resp. monótona decreciente o estrictamente decreciente) en un conjunto C si es creciente o estrictamente creciente (resp. decreciente) en todos los puntos $a \in C$

Ejemplo: La función $f(x) = x^5$ es estrictamente creciente en todo su dominio de definición



Función exponencial

Una función exponencial es una función del tipo

$$\boxed{f(x) = a^x \text{ donde } a \in \mathbb{R} \text{ y } a > 0, a \neq 1}$$

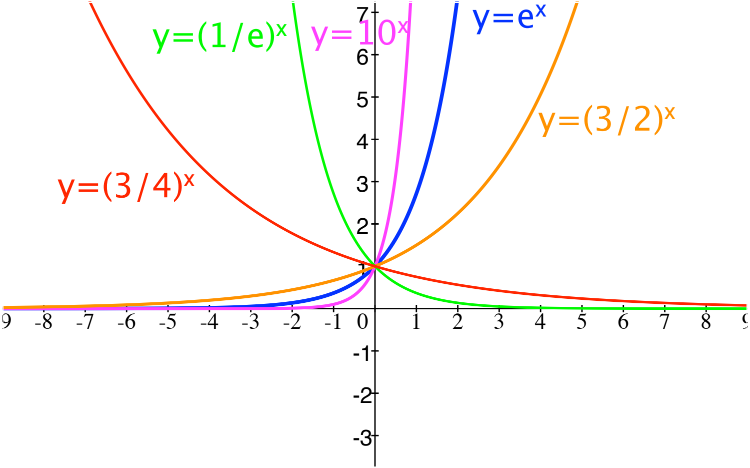
Muy frecuentemente en las funciones exponenciales el número real a es el número de Euler:

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.718281\ldots$$

La función exponencial verifica estas propiedades:

- Su dominio es todo $\mathbb{R}$
- $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$, es decir $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$
- $f(0) = 1$
- $f(x+x') = f(x)f(x')$
- $f(x-x') = \frac{f(x)}{f(x')}$
- Si $a > 1$ entonces f es monótona creciente
- Si $a < 1$ entonces f es monótona decreciente

Funciones exponenciales. Gráficas



Función logarítmica

Una función logarítmica es una función del tipo

$$\boxed{f(x) = \log_a(x) \text{ donde } a \in \mathbb{R} \text{ y } a > 0, a \neq 1}$$

Recuérdese $log_a(x) = b \quad \Leftrightarrow \quad a^b = x$

Muy frecuentemente en las funciones logarítmicas el número real a es el número e y en ese caso el $\log_e(x)$ se denota por $\ln(x)$ o, simplemente por $\log(x)$

La función logarítmica verifica estas propiedades:

- Sólo está definida si $x > 0$ es decir, $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}^+$
- $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$
- $f(1) = 0$ y $f(a) = 1$
- Si $a > 1$ entonces f es monótona creciente
- Si $a < 1$ entonces f es monótona decreciente

La función $f(x) = \log_a(x)$ es la función inversa de $g(x) = a^x$, es decir $g(f(x)) = x$

Funciones logarítmicas. Gráficas