Curso Cero de Matemáticas para las titulaciones de la Facultad de Economía y Empresa

Tema 1: Conjuntos de Números

Facultad de Economía y Empresa
Dpto Economía e Historia Económica
Perfil Matemáticas

19 de junio de 2017

J. Manuel Cascón, <casbar@usal.es>
Federico Cesteros, <fcesteros@usal.es>
Rodrigo del Campo, <rde@usal.es>
Aurora Manrique, <amg@usal.es>
M. Dolores García, <dgarcia@usal.es>
Bernardo García-Bernalt, <bgarcia@usal.es>
Guillermo Sánchez, <guillermo@usal.es>
Gustavo Santos, <santos@usal.es>

Esquema

Números naturales

Números enteros

Números racionales

Números reales

Números complejos

Esquema

Números naturales

Números enteros

Números racionales

Números reales

Números complejos

Números naturales

- Los números naturales surgen por la necesidad de contar
- El conjunto de los números naturales se representa con la letra $\mathbb{N}$
- El primer número natural es el 1. El 0 no se considera número natural

$$\boxed{\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}}$$

Números naturales. Operaciones

En el conjunto $\mathbb{N}$ se consideran las operaciones de suma $(+)$ y producto $(\cdot)$ (a menundo el punto se omite)

Suma: La suma (+) satisface las propiedades: conmutativa y asociativa en $\mathbb{N}$

Producto: El producto (·) satisface las propiedades: conmutativa, asociativa y elemento neutro (1) en $\mathbb{N}$

La suma y producto de números naturales verifica la propiedad distributiva:

$$a(b+c) = ab + ac, \quad \forall a, b, c \in \mathbb{N}$$

Números naturales. Teoría de la divisibilidad

Definiciones

- Un número $a \in \mathbb{N}$ es múltiplo de $b \in \mathbb{N}$ si existe $c \in \mathbb{N}$ tal que:

  $$a = b \cdot c,$$

  se indica $\boxed{a = \dot{b}}$

- Un número $a \in \mathbb{N}$ es divisor de $b \in \mathbb{N}$ si existe $c \in \mathbb{N}$ tal que:

  $$b = a \cdot c,$$

  se indica $\boxed{a|b}$

Definiciones

- Un número $a \in \mathbb{N}$ es múltiplo de $b \in \mathbb{N}$ si existe $c \in \mathbb{N}$ tal que:

  $$a = b \cdot c,$$

  se indica $\boxed{a = \dot{b}}$

  Ejemplo 14 es múltiplo de 7 $(14 = 7 \cdot 2)$

- Un número $a \in \mathbb{N}$ es divisor de $b \in \mathbb{N}$ si existe $c \in \mathbb{N}$ tal que:

  $$b = a \cdot c,$$

  se indica $\boxed{a|b}$

Números naturales. Teoría de la divisibilidad

Definiciones

- Un número $a \in \mathbb{N}$ es múltiplo de $b \in \mathbb{N}$ si existe $c \in \mathbb{N}$ tal que:

  $$a = b \cdot c,$$

  se indica $\boxed{a = \dot{b}}$

- Un número $a \in \mathbb{N}$ es divisor de $b \in \mathbb{N}$ si existe $c \in \mathbb{N}$ tal que:

  $$b = a \cdot c,$$

  se indica $\boxed{a|b}$

Números naturales. Teoría de la divisibilidad

Definiciones

- Un número $a \in \mathbb{N}$ es múltiplo de $b \in \mathbb{N}$ si existe $c \in \mathbb{N}$ tal que:
$$a = b \cdot c,$$
se indica $\boxed{a = \dot{b}}$

- Un número $a \in \mathbb{N}$ es divisor de $b \in \mathbb{N}$ si existe $c \in \mathbb{N}$ tal que:
$$b = a \cdot c,$$
se indica $\boxed{a|b}$

Ejemplo 3 es divisor de 15 ($15 = 3 \cdot 5$)

Números naturales. Teoría de la divisibilidad

Definiciones

- Un número $a \in \mathbb{N}$ es múltiplo de $b \in \mathbb{N}$ si existe $c \in \mathbb{N}$ tal que:

  $$a = b \cdot c,$$

  se indica $\boxed{a = \dot{b}}$

- Un número $a \in \mathbb{N}$ es divisor de $b \in \mathbb{N}$ si existe $c \in \mathbb{N}$ tal que:

  $$b = a \cdot c,$$

  se indica $\boxed{a|b}$

Observación

$$a \text{ es múltiplo de } b \quad \Leftrightarrow \quad b \text{ es divisor de } a$$

Números Naturales. Teoría de la divisibilidad

Definición Un número $p \in \mathbb{N}$ se dice primo si no tiene más divisores que la unidad y él mismo.

Ejemplo El 7, 29 y 131 son números primos.
El 8, 27 y 135 no son primos

Proposición Todo número natural descompone de forma única (salvo el orden) como producto de números primos

Ejemplo

$$39 = 3 \cdot 13, \qquad 3960 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$$

Esquema

Números naturales

Números enteros

Números racionales

Números reales

Números complejos

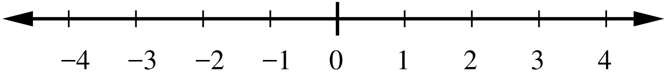
Números enteros

- Surgen de forma natural como la solución de las ecuaciones del tipo:

$$x + a = b, \qquad a, b \in \mathbb{N}$$

- El conjunto de los números enteros se representa con la letra $\mathbb{Z}$
- En $\mathbb{Z}$ se distinguen números positivos, números negativos y el 0.

$$\boxed{\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}}$$



Números enteros. Operaciones

En el conjunto $\mathbb{Z}$ se consideran las operaciones de suma $(+)$ y producto $(\cdot)$

Suma: La suma (+) satisface las propiedades: conmutativa, asociativa, elemento neutro (0), y elemento opuesto en $\mathbb{Z}$

Producto: El producto (·) satisface las propiedades: conmutativa, asociativa y elemento neutro (1) en $\mathbb{Z}$

La suma y producto de números enteros verifica la propiedad distributiva

Por lo anterior, $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo

Esquema

Números naturales

Números enteros

Números racionales

Números reales

Números complejos

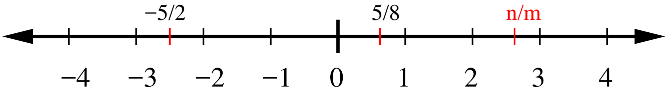
Números racionales

- Surgen como solución de las ecuaciones:

$$ax = b, \qquad a, b \in \mathbb{Z}, a \neq 0$$

- El conjunto de los números racionales se representa con la letra $\mathbb{Q}$
- Todo número racional admite una representación decimal, donde se distingue parte entera y parte decimal. La parte decimal de un número racional es finita o periódica (pura o mixta)

$$\boxed{\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m} \ : \ n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}, n \text{ y } m \text{ primos entre sí} \right\}}$$



Números racionales. Operaciones

En el conjunto $\mathbb{Q}$ se consideran las operaciones de suma $(+)$ y producto $(\cdot)$

Suma: La suma $(+)$ satisface las propiedades: conmutativa, asociativa, elemento neutro (0), y elemento opuesto en $\mathbb{Q}$

Producto: El producto $(\cdot)$ satisface las propiedades: conmutativa, asociativa, elemento neutro (1) y elemento inverso en $\mathbb{Q}$

La suma y producto de números racionales verifica la propiedad distributiva

Por lo anterior, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ es un cuerpo conmutativo

Esquema

Números naturales

Números enteros

Números racionales

Números reales

Números complejos

Números reales

- Introducir de forma rigurosa los números reales no es un proceso sencillo y supera los objetivos de este curso
- Tras incluir los números racionales en la recta numérica *quedan huecos*. Se trata de números cuya expresión decimal no es finita ni periódica
- Los números que verifican la propiedad anterior se denominan irracionales y se denotan por $\mathbb{I}$
- Ejemplos de números irracionales son: $\sqrt{2}$, e , π:

$$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488016887242096\ldots$$
$$e = 2.7182818284590452353602874713526624\ldots$$
$$\pi = 3.1415926535897932384626433832795028\ldots$$

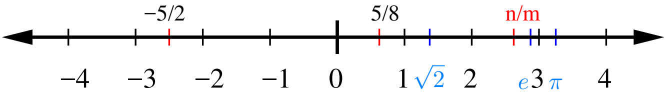
Números reales

- Los números reales resultan de la unión de los números racionales e irracionales:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

- Como ya hemos adelantado, los números reales se denotan con la letra $\mathbb{R}$
- Todo lo anterior puede resumirse, presentando los números reales como el conjunto

$$\boxed{\mathbb{R} = \left\{ a_0.a_1a_2a_3\ldots \quad : \quad \begin{array}{l} a_0 \in \mathbb{Z} \\ a_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}, \quad \forall i \in \mathbb{N} \end{array} \right\}}$$



Números reales. Operaciones

En el conjunto $\mathbb{R}$ se consideran las operaciones de suma $(+)$ y producto $(\cdot)$

Suma: La suma $(+)$ satisface las propiedades: conmutativa, asociativa, elemento neutro (0), y elemento opuesto en $\mathbb{R}$

Producto: El producto $(\cdot)$ satisface las propiedades: conmutativa, asociativa, elemento neutro (1) y elemento inverso en $\mathbb{R}$

La suma y producto de números reales verifica la propiedad distributiva

Por lo anterior, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ es un cuerpo conmutativo

Números reales. Orden

Sea $\mathbb{R}^+$ el conjunto de los números reales positivos incluido el cero

Dados $a, b \in \mathbb{R}$ se define la relación (binaria):

$$\boxed{a \leqslant b \quad \Leftrightarrow \quad b - a \in \mathbb{R}^+}$$

La relación anterior satisface las propiedades:

1. $a \leqslant a \quad \forall a \in \mathbb{R}$ (*reflexividad*)
2. $a \leqslant b$ y $b \leqslant a \quad \Rightarrow \quad a = b$ (*antisimetría*)
3. $a \leqslant b$ y $b \leqslant c \quad \Rightarrow \quad a \leqslant c$ (*transitividad*)
4. Dados $a, b \in \mathbb{R}$ se tiene $a \leqslant b$ o $b \leqslant a$
5. Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$ si $a \leqslant b \Rightarrow a + c \leqslant b + c$
6. Dados $a, b \in \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}^+$, si $a \leqslant b \Rightarrow ac \leqslant bc$

Números reales. Orden

Sea $\mathbb{R}^+$ el conjunto de los números reales positivos incluido el cero

Dados $a, b \in \mathbb{R}$ se define la relación (binaria):

$$\boxed{a \leqslant b \quad \Leftrightarrow \quad b - a \in \mathbb{R}^+}$$

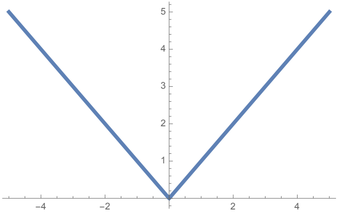
Por lo anterior $(\mathbb{R}, \leqslant)$ se dice conjunto totalmente ordenado

Es más, $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leqslant)$ es un cuerpo conmutativo totalmente ordenado

Números reales. Valor absoluto

Se define valor absoluto como la función sobre $\mathbb{R}$:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



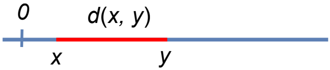
Propiedades

1. $|x| \geqslant 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \text{y} \qquad |x| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$
2. $|x| = |-x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$
3. $|x+y| \leqslant |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$ (desigualdad triangular)
4. $|xy| = |x||y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

Números reales. Distancia

El valor absoluto permite introducir el concepto de distancia entre dos puntos x, y de la recta real

$$\boxed{d(x,y) = |x - y|}$$



Propiedades

1. $d(x,y) \geqslant 0 \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$,
2. $d(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y, \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$,
3. $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$,
4. $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y) \quad \forall x,y,z \in \mathbb{R}$

Números reales. Acotación

Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$

- Se dice que $x \in \mathbb{R}$ es una cota superior de A, si x es mayor o igual que todos los elementos de A, es decir:

$$a \leqslant x \quad \forall a \in A$$

- A se dice acotado superiormente si tiene alguna cota superior
- Se dice que $x \in \mathbb{R}$ es una cota inferior de A, si x es menor o igual que todos los elementos de A, es decir:

$$x \leqslant a \quad \forall a \in A$$

- A se dice acotado inferiormente si tiene alguna cota inferior
- A se dice acotado si es acotado superior e inferiormente

Números reales. Acotación (II)

Sea $A \subset \mathbb{R}$:

- Si A está acotado superiormente, se denomina supremo a la menor de las cotas superiores. Se denota $\sup A$
- Si A tiene supremo y además $\sup A \in A$, el supremo es máximo de A y se denota $\max A$
- Si A está acotado inferiormente, se denomina ínfimo a la mayor de las cotas inferiores. Se denota $\inf A$
- Si A tiene ínfimo y además $\inf A \in A$, el ínfimo es mínimo de A y se denota $\min A$

Números reales. Acotación (III)

Axioma del extremo

Todo conjunto de $\mathbb{R}$ no vacío y acotado superiormente tiene supremo

Observaciones

- El axioma anterior implica que todo $A \subset \mathbb{R}$ no vacío y acotado inferiormente tiene ínfimo. Además, todo $A \subset \mathbb{R}$ acotado tiene ínfimo y supremo
- El axioma del supremo también recibe el nombre de axioma de completitud o continuidad
- Este axioma garantiza que los números reales *llenan* la recta real
- $\mathbb{Q}$ no verifica el axioma del extremo. Por ejemplo:

  $$A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$$

  está acotado superiormente en $\mathbb{Q}$, pero no existe el supremo de A en $\mathbb{Q}$ ($\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$)

Números reales. Intervalos

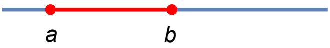
Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es un intervalo si dados $a, b \in A$ con $a < b$ se verifica que:

$$\forall c \in \mathbb{R} : a < c < b \quad \Rightarrow c \in A$$

Tipos de intervalos

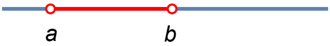
- Cerrado y acotado:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$$



- Abierto y acotado:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$



Números reales. Intervalos

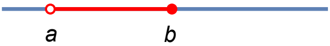
Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es un intervalo si dados $a, b \in A$ con $a < b$ se verifica que:

$$\forall c \in \mathbb{R} : a < c < b \quad \Rightarrow c \in A$$

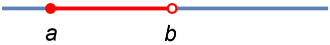
Tipos de intervalos

- Semiabiertos/semicerrados y acotados:

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$$



$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}$$



Números reales. Intervalos

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es un intervalo si dados $a, b \in A$ con $a < b$ se verifica que:

$$\forall c \in \mathbb{R} : a < c < b \quad \Rightarrow c \in A$$

Tipos de intervalos

- Cerrados y no acotados:

$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x\}$$

$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant b\}$$

Números reales. Intervalos

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es un intervalo si dados $a, b \in A$ con $a < b$ se verifica que:

$$\forall c \in \mathbb{R} \,:\, a < c < b \quad \Rightarrow c \in A$$

Tipos de intervalos

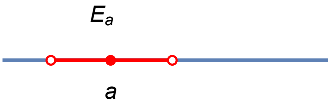
- Abiertos y no acotados:

$$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x\}$$

$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x < b\}$$

Números reales. Entorno de un punto

Dados $a \in \mathbb{R}$, se denomina entorno de a, E_a, a todo intervalo abierto que lo contiene



Esquema

Números naturales

Números enteros

Números racionales

Números reales

Números complejos

Números complejos. Introducción

- En ocasiones, la resolución de ecuaciones algebraicas conduce a raíces que no son números reales:

$$x^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$$

- Los números complejos son una extensión de los números reales que incluyen este tipo de raíces
- Para definir el conjunto de los números complejos, primero se debe introducir la denominada unidad imaginaria que se denota con la letra i, y formalmente es:

$$\boxed{i = \sqrt{-1}}$$

Observación De la definición de unidad imaginaria se tiene: $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{0, 1, 2, 3\}$:

$$i = \sqrt{-1}, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = i, \dots, i^{4n+k} = i^k$$

Números complejos. Definición

El conjunto de los números complejos se denota con la letra $\mathbb{C}$ y viene dado por:

$$\boxed{\mathbb{C} = \{a + bi \ : \ a, b \in \mathbb{R}\}}$$

Observaciones

- En todo número complejo se distingue parte real (Re) e imaginaria (Im):

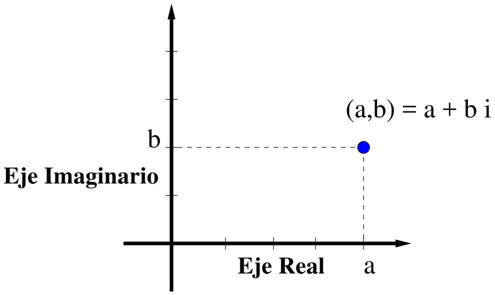
$$\mathrm{Re}(a + bi) = a, \qquad Im(a + bi) = b$$

- Todo número real es en particular un número complejo ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$)
- Los números complejos con parte real nula ($a = 0$), se denominan imaginarios (puros)
- En ocasiones los números complejos se presentan como un par ordenado:

$$a + bi \equiv (a, b)$$

Números complejos. Plano complejo

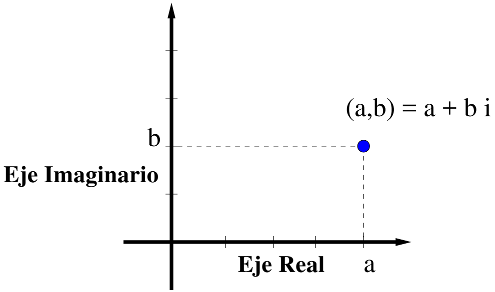
Los números complejos pueden identificarse con los puntos del plano (Plano complejo)



Observación Los puntos (números) sobre el eje de abcisas (eje real) son los números reales. Los puntos (números) sobre el eje de ordenadas (eje imaginario) son los números imaginarios (puros)

Números complejos. Plano complejo

Los números complejos pueden identificarse con los puntos del plano (Plano complejo)



Definición Se denomina módulo de un número complejo, $a + bi$, a la longitud del vector (a, b), se denota $|a + bi|$:

$$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Números complejos. Operaciones

En el conjunto $\mathbb{C}$ se consideran las operaciones de suma $(+)$ y producto $(\cdot)$ (extienden operaciones en $\mathbb{R}$)

- Suma: $a+bi,\ c+di \in \mathbb{C}$

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$

- Producto: $a+bi,\ c+di \in \mathbb{C}$

$$(a+bi)\cdot(c+di)=ac+bdi^2+adi+bci$$

$$\overset{i^2=-1}{=} (ac-bd)+(ad+bc)i$$

La suma y producto satisfacen en $\mathbb{C}$ las mismas propiedades que fueron descritas en Prop.. Por ello, $(\mathbb{C},+,\cdot)$ es un cuerpo conmutativo

Los elementos neutros con respecto a la suma y el producto son respectivamente $0=0+0i$, y $1=1+0i$

Números complejos. Conjugado

Definición Dado un número complejo $z = a + bi \in \mathbb{C}$ se denomina conjugado y se denota $\overline{z}$ al número $\overline{z} = a - bi \in \mathbb{C}$.

Propiedades Para todo $z = a + bi \in \mathbb{C}$

1. $\overline{z} = z \quad \Leftrightarrow \quad z \in \mathbb{R}$
2. $z \cdot \overline{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$
3. Si $z \neq 0$
$$\frac{1}{a+bi} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$$