Ejemplo de aplicación de derivadas en Economía en problemas de optimización,

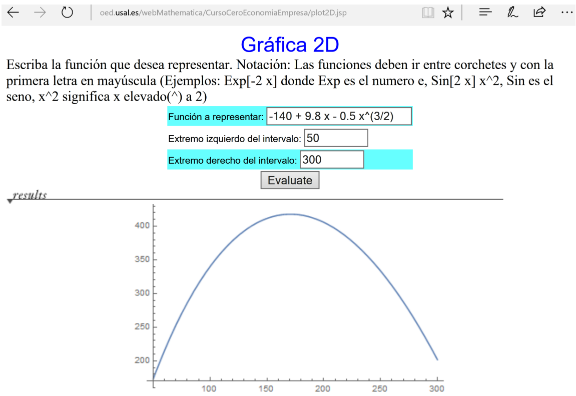
En una explotación agrícola se ha observado que en un año de meteorología normal cuando se utilizan x kg de abono por hectárea (Ha) se obtienen y kg de trigo, con

$$y(x) = -0.5\, x^{3/2} + 9.8\, x - 140, \text{ valida para } 50 \leqslant x \leqslant 300$$

Representala gráficamente e interpreta el resultado

La representación puede hacerse utilizando:

http://oed.usal.es/webMathematica/CursoCeroEconomiaEmpresa/plot2D.jsp



Observa que al principio mientras que más abono se utiliza la cantidad de trigo obtenida va aumentando hasta cierta cantidad, el máximo, a partir de la cual la cantidad de trigo producida va disminuyendo.

Si lo que queremos es maximizar la cantidad de trigo obtenido, en kg/Ha, ¿cuantos kg/Ha de abono hemos de utilizar?.

Una forma de calcularlo es aplicar un método de aproximaciones sucesivas hasta encontrar la solución. En la gráfica vemos que la cantidad de abono que maximiza la cantidad de trigo por Ha debe ser un valor comprendido entre 150 y 200 kg. Construimos una tabla en la que empezamos por dar a x un valor de 150, vamos incrementando de 5 en 5 (Δx=5) y vemos los los valores de y obtenidos.

x (kg abono/Ha)	y(kg trigo/Ha)
150	411.441
155	414.133
160	416.071
165	417.268
170	417.736
175	417.484
180	416.523
185	414.864
190	412.515
195	409.487
200	405.786

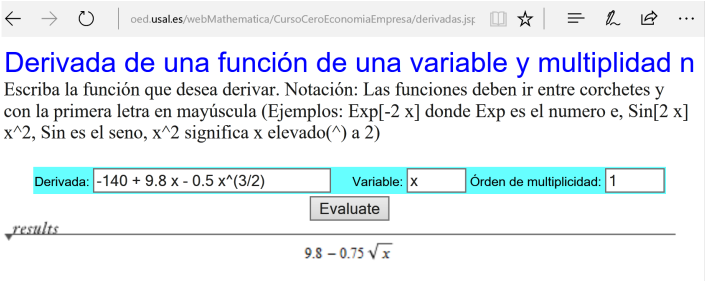
Observamos que el máximo debe estar en el rango 165-175 kg. Repetir el proceso para este rango pero ahora incrementando la cantidad de fertilizante de Δx=1 kg .

x (kg abono/Ha)	y(kg trigo/Ha)
165	417.268
166	417.42
167	417.542
168	417.636
169	417.7
170	417.736
171	417.742
172	417.721
173	417.67
174	417.591
175	417.484

Observamos que el máximo está en 171 kg. En la practica el resultado anterior es suficiente, pero aun podríamos afinar mas, por ejemplo seleccionamos el intervalo de 170 a 172 incrementando Δx=0.1 kg.

Pero todo puede hacerse mas sencillo recurriendo al concepto de derivada. En la gráfica anterior vemos que el máximo corresponde a la tangente a la curva con pendiente = 0, y eso es lo mismo que calcular la derivada primera e igualarla a 0

http://oed.usal.es/webMathematica/CursoCeroEconomiaEmpresa/derivadas.jsp



$$9.8 - 0.75\sqrt{x} = 0 \rightarrow \frac{9.8^2}{0.75^2} = \left(\sqrt{x}\right)^2 \rightarrow x = (9.8 / 0.75)^2 = 170.138$$

Por tanto la máximo productividad por Ha corresponde a $x =$ 170.138, que sustituyendo en $y(x) = -0.5\, x^{3/2} + 9.8\, x - 140$; da 417.743 kg trigo/Ha;

Es decir, si abonamos la tierra con 170.738 kg/Ha obtendremos 417.743 kg trigo/Ha. Si añadimos más abono el trigo producido por Ha será menos. Sin embargo obtener mas kg de trigo no significa ganar mas, todo dependerá del precio de venta del trigo y de lo que nos cueste el abono. Lo que realmente nos importa es el beneficio:

Beneficio = Ingresos - Gastos

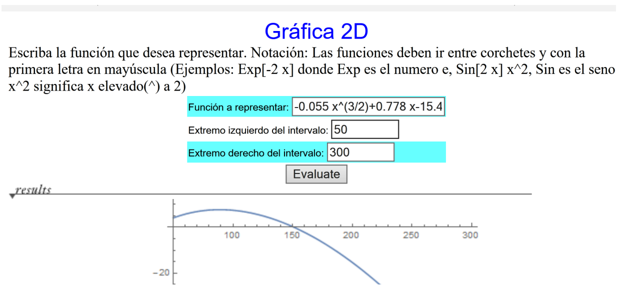
Supongamos que vendemos el trigo a 0.11 €/kg, entonces obtendremos unos ingresos por Ha de $0.11\left(-0.5\, x^{3/2} + 9.8\, x - 140\right)$ y un gasto por consumo de abono por Ha de 0.3 €/kg, como consumimos x kg de abono Ha el gasto por Ha será $0.3\, x$. Por tanto el beneficio por Ha será:

$$b(x) = 0.11\left(-0.5\, x^{3/2} + 9.8\, x - 140\right) - 0.3\, x = -0.055\, x^{3/2} + 0.778\, x - 15.4$$

¿Cuando obtendremos el máximo beneficio?

http://oed.usal.es/webMathematica/CursoCeroEconomiaEmpresa/plot2D.jsp

Representamos el beneficio en función de x



Vemos que la maxima producción del terreno, no implica el máximo beneficio, incluso podriamos perder dinero.

En la gráfica se observa el máximo se obtiene para un valor de x próximo a 90 kg abono/Ha, Para calcular el valor exacto hemos visto que lo mejor es calcular el máximo utilizando derivadas. El máximo corresponderá a $b'(x) = 0$. Esto es $b'(x) = 0.778 - 0.0825\, x^{1/2} = 0$, despejamos x, $x = (0.778 / 0.0825)^2 = 88.93$ kg abono/Ha, que nos produciría un beneficio por Ha de (sustituimos x = 88.93) en b(x)

$-15.4 + 0.778\, x - 0.055\, x^{3/2}$ con $x = 88.93$, $b(x) = 7.66$ € / Ha