

Curso Cero de Matemáticas para las titulaciones de la Facultad de Economía y Empresa

Tema 4: Sistemas de ecuaciones lineales

Facultad de Economía y Empresa
Dpto Economía e Historia Económica
Perfil Matemáticas

J. Manuel Cascón, <casbar@usal.es>
Federico Cesteros, <fcesteros@usal.es>
Rodrigo del Campo, <rde@usal.es>
Aurora Manrique, <amg@usal.es>
M. Dolores García, <dgarcia@usal.es>
Bernardo García-Bernalt, <bgarcia@usal.es>
Guillermo Sánchez, <guillermo@usal.es>
Gustavo Santos, <santos@usal.es>

Esquema

Sistemas de ecuaciones lineales

Teorema de Rouché-Frobenius

Resolución de un SCD

Resolución de un SCI

Esquema

Sistemas de ecuaciones lineales

Teorema de Rouché-Frobenius

Resolución de un SCD

Resolución de un SCI

Sistemas de ecuaciones lineales

Sistema de m ecuaciones con n incógnitas

$$\left. \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \dots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{A\mathbf{x} = \mathbf{b}}$$

Notación:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\hat{A} = (A|\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \text{ (matriz ampliada)}$$

Esquema

Sistemas de ecuaciones lineales

Teorema de Rouché-Frobenius

Resolución de un SCD

Resolución de un SCI

Teorema de Rouché-Frobenius

Teorema Sea $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ un sistema de ecuaciones lineales con m ecuaciones y n incógnitas, entonces:

1) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es sistema compatible (SC) $\Leftrightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(\hat{A})$

2) Si $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es SC entonces :

2a) $\text{rang}(A) < n \Rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado
(SCI)(infinitas soluciones)

2b) $\text{rang}(A) = n \Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado
(SCD)(solución única)

Esquema

Sistemas de ecuaciones lineales

Teorema de Rouché-Frobenius

Resolución de un SCD

Resolución de un SCI

Resolución de un SCD

Dado el SCD

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

la solución única puede **calcularse** mediante:

- Eliminación gaussiana
- Manipulación algebraica (Sustitución / Reducción / Igualación)
- Regla de Cramer
- Cálculo de la inversa
- Otros (factorizaciones)

Ejemplo Resolver:

$$\left. \begin{array}{l} \text{eq1} \equiv 3x - y + z = 7 \\ \text{eq2} \equiv x + 3y - 2z = 0 \\ \text{eq3} \equiv 2x + 2y - z = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow (x, y, z) = \left(\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}, -4 \right)$$

Resolución de un SCD. Eliminación gaussiana

- Se utilizan **transformaciones elementales** para calcular una **matriz triangular** equivalente a la ampliada
- El proceso consta de $n - 1$ etapas
- En la etapa i -ésima se **hacen ceros** en la columna i por debajo de la diagonal
- En la etapa i -ésima la operación que se realiza con la fila j -ésima, viene dada por:

$$f_j \leftarrow f_i - \frac{a_{ji}}{a_{ii}} f_i \quad \forall j > i$$

siempre que $a_{ii} \neq 0$, en otro caso se deben **permutar filas**

- Efectuada la triangulación, se **resuelve el sistema triangular** de *abajo a arriba* (remonte)

Resolución de un SCD. Eliminación gaussiana

En nuestro caso:

$$\begin{aligned} \hat{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} & \xrightarrow[\substack{\text{Etapa 1} \\ f_2 - \\ f_3 -}]{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & \frac{10}{3} & -\frac{7}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & \frac{8}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{8}{3} \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow[\substack{\text{Etapa 2} \\ f_3 -}]{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & \frac{10}{3} & -\frac{7}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Resol.}]{\Rightarrow} \begin{cases} z = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{1}{5}} = -4 \\ y = \frac{-\frac{7}{3} + \frac{7}{3}z}{\frac{10}{3}} = -\frac{7}{2} \\ x = \frac{7 + y - z}{3} = \frac{5}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Resolución de un SCD. Eliminación gaussiana

En nuestro caso:

$$\begin{aligned} \hat{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} & \xrightarrow[\substack{f_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}f_1 \\ f_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}}f_1}]{\text{Etapa 1}} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & \frac{10}{3} & -\frac{7}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & \frac{8}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{8}{3} \end{pmatrix} \\ \Rightarrow & \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & \frac{10}{3} & -\frac{7}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{f_3 - \frac{a_{32}}{a_{22}}f_2}]{\text{Etapa 2}} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & \frac{10}{3} & -\frac{7}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Resol.}} \begin{cases} z = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{1}{5}} = -4 \\ y = \frac{-\frac{7}{3} + \frac{7}{3}z}{\frac{10}{3}} = -\frac{7}{2} \\ x = \frac{7 + \frac{y}{3} - z}{3} = \frac{5}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Resolución de un SCD. Eliminación gaussiana

En nuestro caso:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xRightarrow[\substack{f_2 - \frac{1}{3}f_1 \\ f_3 - \frac{2}{3}f_1}]{\text{Etapla 1}} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & \frac{10}{3} & -\frac{7}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & \frac{8}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{8}{3} \end{pmatrix}$$
$$\xRightarrow[\substack{f_3 - \frac{4}{5}f_2}]{\text{Etapla 2}} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & \frac{10}{3} & -\frac{7}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix} \xRightarrow{\text{Resol.}} \begin{cases} z = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{1}{5}} = -4 \\ y = \frac{-\frac{7}{3} + \frac{7}{3}z}{\frac{10}{3}} = -\frac{7}{2} \\ x = \frac{7 + y - z}{3} = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Resolución de un SCD. Eliminación gaussiana

En nuestro caso:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xRightarrow[\substack{f_2 - \frac{1}{3}f_1 \\ f_3 - \frac{2}{3}f_1}]{\text{Etapla 1}} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & \frac{10}{3} & -\frac{7}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & \frac{8}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

$$\xRightarrow[\substack{f_3 - \frac{a_{32}}{a_{22}}f_2}]{\text{Etapla 2}} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & \frac{10}{3} & -\frac{7}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix} \xRightarrow{\text{Resol.}} \begin{cases} z = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{1}{5}} = -4 \\ y = \frac{-\frac{7}{3} + \frac{7}{3}z}{\frac{10}{3}} = -\frac{7}{2} \\ x = \frac{7 + y - z}{3} = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Resolución de un SCD. Eliminación gaussiana

En nuestro caso:

$$\begin{aligned} \hat{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} & \xRightarrow[\substack{f_2 - \frac{1}{3}f_1 \\ f_3 - \frac{2}{3}f_1}]{\text{Etapla 1}} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & \frac{10}{3} & -\frac{7}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & \frac{8}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{8}{3} \end{pmatrix} \\ \xRightarrow[\substack{f_3 - \frac{4}{5}f_2}]{\text{Etapla 2}} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & \frac{10}{3} & -\frac{7}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix} & \xRightarrow{\text{Resol.}} \begin{cases} z = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{1}{5}} = -4 \\ y = \frac{-\frac{7}{3} + \frac{7}{3}z}{\frac{10}{3}} = -\frac{7}{2} \\ x = \frac{7 + y - z}{3} = \frac{5}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Resolución de un SCD. Eliminación gaussiana

En nuestro caso:

$$\begin{aligned} \hat{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} & \xRightarrow[\substack{f_2 - \frac{1}{3}f_1 \\ f_3 - \frac{2}{3}f_1}]{\text{Etapla 1}} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & \frac{10}{3} & -\frac{7}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & \frac{8}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{8}{3} \end{pmatrix} \\ \xRightarrow[\substack{f_3 - \frac{4}{5}f_2}]{\text{Etapla 2}} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & \frac{10}{3} & -\frac{7}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix} & \xRightarrow{\text{Resol.}} \begin{cases} z = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{1}{5}} = -4 \\ y = \frac{-\frac{7}{3} + \frac{7}{3}z}{\frac{10}{3}} = -\frac{7}{2} \\ x = \frac{7 + y - z}{3} = \frac{5}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Resolución de un SCD. Regla de Cramer

La **regla de Cramer** determina que la componente i -ésima de la solución x_j viene dada por:

$$x_j = \frac{\det(A_1, \dots, \overset{j \downarrow}{\mathbf{b}}, \dots, A_n)}{\det(A)}$$

donde A_i denota la columna i -ésima de la matriz A .

Resolución de un SCD. Regla de Cramer

La **regla de Cramer** determina que la componente i -ésima de la solución x_j viene dada por:

$$x_j = \frac{\det(A_1, \dots, \overset{j \downarrow}{\mathbf{b}}, \dots, A_n)}{\det(A)}$$

donde A_i denota la columna i -ésima de la matriz A .
En nuestro caso:

$$x = \frac{\det \begin{pmatrix} \mathbf{7} & -1 & 1 \\ \mathbf{0} & 3 & -2 \\ \mathbf{2} & 2 & -1 \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{5}{2}$$

Resolución de un SCD. Regla de Cramer

La **regla de Cramer** determina que la componente i -ésima de la solución x_j viene dada por:

$$x_j = \frac{\det(A_1, \dots, \overset{j \downarrow}{\mathbf{b}}, \dots, A_n)}{\det(A)}$$

donde A_i denota la columna i -ésima de la matriz A .

$$y = \frac{\det \begin{pmatrix} 3 & \mathbf{7} & 1 \\ 1 & \mathbf{0} & -2 \\ 2 & \mathbf{2} & -1 \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{-7}{2}$$

Resolución de un SCD. Regla de Cramer

La **regla de Cramer** determina que la componente i -ésima de la solución x_j viene dada por:

$$x_j = \frac{\det(A_1, \dots, \overset{j \downarrow}{\mathbf{b}}, \dots, A_n)}{\det(A)}$$

donde A_i denota la columna i -ésima de la matriz A .

$$z = \frac{\det \begin{pmatrix} 3 & -1 & \mathbf{7} \\ 1 & 3 & \mathbf{0} \\ 2 & 2 & \mathbf{2} \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{-8}{2} = -4$$

Resolución de un SCD. Regla de Cramer

La **regla de Cramer** determina que la componente i -ésima de la solución x_j viene dada por:

$$x_j = \frac{\det(A_1, \dots, \overset{j}{\downarrow} \mathbf{b}, \dots, A_n)}{\det(A)}$$

donde A_i denota la columna i -ésima de la matriz A .
Por tanto:

$$x = \frac{5}{2} \quad y = -\frac{7}{2} \quad z = -4$$

Resolución de un SCD. Manip. algebraica

Manipulamos el sistema con el objetivo de obtener un sistema más sencillo (eliminación de incógnitas).

Observar que:

$$\left. \begin{array}{l} \text{eq1} + \text{eq3} \equiv 5x + y = 9 \\ -\text{eq2} + 2 \text{eq3} \equiv 3x + y = 4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Igualando } y's \\ \Rightarrow \end{array} \begin{array}{l} 9 - 5x = 4 - 3x \\ \Rightarrow x = \frac{5}{2} \\ \Rightarrow y = 9 - 5\frac{5}{2} = -\frac{7}{2} \end{array}$$

Por último, sustituyendo x e y en **eq1** concluimos:

$$z = 7 - 3x + y = 7 - 3\frac{5}{2} - \frac{7}{2} = -4$$

Esquema

Sistemas de ecuaciones lineales

Teorema de Rouché-Frobenius

Resolución de un SCD

Resolución de un SCI

Resolución de un SCI

Dado el SCI

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

para determinar la familia de soluciones se puede proceder del siguiente modo:

- 1 Calcular un **menor de orden máximo**
- 2 **Eliminar las ecuaciones** (filas de la matriz), si es el caso, que quedan **fuera del menor** (son dependientes)
- 3 **Pasar al segundo miembro** los términos que incluyen a las **incognitas** (columnas de la matriz) **no presentes en el menor** seleccionado. Parametrizar estas incognitas (sustituirlas por parámetros: $\lambda_1, \lambda_2, \dots$)
- 4 El **sistema resultante es SCD** y puede ser resuelto por cualquiera de los métodos descritos previamente

Resolución de un SCI II

Ejemplo Resolver:

$$\left. \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & - & t & = & 0 \\ & & & & z & + & t & = & 0 \\ x & + & y & + & 2z & & & = & 0 \end{array} \right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2 = \text{rang}(\hat{A}),$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{ccc} x & + & z & = & -y + t \\ & & z & = & -t \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Rightarrow \\ y = \lambda \\ t = \mu \end{array} \left. \begin{array}{ccc} x & + & z & = & -\lambda + \mu \\ & & z & = & -\mu \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = -\lambda + 2\mu \\ z = -\mu \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{l} x = -\lambda + 2\mu \\ y = \lambda \\ z = -\mu \\ t = \mu \end{array}$$

Resolución de un SCI II

Ejemplo Resolver:

$$\left. \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & - & t & = & 0 \\ & & & & z & + & t & = & 0 \\ x & + & y & + & 2z & & & = & 0 \end{array} \right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2 = \text{rang}(\hat{A}),$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{ccc} x + z = -y + t \\ z = -t \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Rightarrow \\ y = \lambda \\ t = \mu \end{array} \left. \begin{array}{ccc} x + z = -\lambda + \mu \\ z = -\mu \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = -\lambda + 2\mu \\ z = -\mu \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{l} x = -\lambda + 2\mu \\ y = \lambda \\ z = -\mu \\ t = \mu \end{array}$$

Resolución de un SCI II

Ejemplo Resolver:

$$\left. \begin{array}{rrcrrcl} x & + & y & + & z & - & t & = & 0 \\ & & & & z & + & t & = & 0 \\ x & + & y & + & 2z & & & = & 0 \end{array} \right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2 = \text{rang}(\hat{A}),$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{rcl} x + z & = & -y + t \\ z & = & -t \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Rightarrow \\ y = \lambda \\ t = \mu \end{array} \left. \begin{array}{rcl} x + z & = & -\lambda + \mu \\ z & = & -\mu \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = -\lambda + 2\mu \\ z = -\mu \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{l} x = -\lambda + 2\mu \\ y = \lambda \\ z = -\mu \\ t = \mu \end{array}$$

Resolución de un SCI II

Ejemplo Resolver:

$$\left. \begin{array}{rrcrrcrl} \textcolor{red}{x} & + & y & + & \textcolor{red}{z} & - & t & = & 0 \\ & & & & \textcolor{red}{z} & + & t & = & 0 \\ x & + & y & + & 2z & & & = & 0 \end{array} \right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} \textcolor{red}{1} & 1 & \textcolor{red}{1} & -1 \\ \textcolor{red}{0} & 0 & \textcolor{red}{1} & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2 = \text{rang}(\hat{A}),$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{rrc} x & + & z = -y + t \\ & & z = -t \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Rightarrow \\ y = \lambda \\ t = \mu \end{array} \left. \begin{array}{rrc} x & + & z = -\lambda + \mu \\ & & z = -\mu \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = -\lambda + 2\mu \\ z = -\mu \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{l} x = -\lambda + 2\mu \\ y = \lambda \\ z = -\mu \\ t = \mu \end{array}$$

Resolución de un SCI II

Ejemplo Resolver:

$$\left. \begin{array}{rrcrrcl} x & + & y & + & z & - & t & = & 0 \\ & & & & z & + & t & = & 0 \\ x & + & y & + & 2z & & & = & 0 \end{array} \right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2 = \text{rang}(\hat{A}),$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{rrc} x & + & z = -y + t \\ & & z = -t \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Rightarrow \\ y = \lambda \\ t = \mu \end{array} \left. \begin{array}{rrc} x & + & z = -\lambda + \mu \\ & & z = -\mu \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = -\lambda + 2\mu \\ z = -\mu \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{l} x = -\lambda + 2\mu \\ y = \lambda \\ z = -\mu \\ t = \mu \end{array}$$

Resolución de un SCI II

Ejemplo Resolver:

$$\left. \begin{array}{rrcrrcl} x & + & y & + & z & - & t & = & 0 \\ & & & & z & + & t & = & 0 \\ x & + & y & + & 2z & & & = & 0 \end{array} \right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2 = \text{rang}(\hat{A}),$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{rrc} x & + & z = -y + t \\ & & z = -t \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Rightarrow \\ y = \lambda \\ t = \mu \end{array} \left. \begin{array}{rrc} x & + & z = -\lambda + \mu \\ & & z = -\mu \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = -\lambda + 2\mu \\ z = -\mu \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{l} x = -\lambda + 2\mu \\ y = \lambda \\ z = -\mu \\ t = \mu \end{array}$$

Resolución de un SCI II

Ejemplo Resolver:

$$\left. \begin{array}{rrcrrcl} x & + & y & + & z & - & t & = & 0 \\ & & & & z & + & t & = & 0 \\ x & + & y & + & 2z & & & = & 0 \end{array} \right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2 = \text{rang}(\hat{A}),$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{rrcl} x & + & z & = & -y + t \\ & & z & = & -t \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Rightarrow \\ y = \lambda \\ t = \mu \end{array} \left. \begin{array}{rrcl} x & + & z & = & -\lambda + \mu \\ & & z & = & -\mu \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = -\lambda + 2\mu \\ z = -\mu \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{l} x = -\lambda + 2\mu \\ y = \lambda \\ z = -\mu \\ t = \mu \end{array}$$