Curso Cero de Matemáticas para las titulaciones de la Facultad de Economía y Empresa

Tema 7: Funciones reales de variable real (II): Límites y continuidad

Facultad de Economía y Empresa
Dpto Economía e Historia Económica
Perfil Matemáticas

19 de junio de 2017

J. Manuel Cascón, <casbar@usal.es>
Federico Cesteros, <fcesteros@usal.es>
Rodrigo del Campo, <rde@usal.es>
Aurora Manrique, <amg@usal.es>
M. Dolores García, <dgarcia@usal.es>
Bernardo García-Bernalt, <bgarcia@usal.es>
Guillermo Sánchez, <guillermo@usal.es>
Gustavo Santos, <santos@usal.es>

19 de junio de 2017

Esquema

Límite de una función en un punto
- Concepto de límite
- Límites laterales
- Límites infinitos
- Límites en el infinito

Propiedades de los límites

Cálculo de límites

Continuidad

Propiedades de las funciones continuas

Límite de una función en un punto

Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función real de variable real y sea $p \in \mathbb{R}$, tal que siempre hay elementos de D, distintos del propio p tan próximos a p como se quiera

Definición Diremos que $l \in \mathbb{R}$ es el límite de la función f en el punto p y escribiremos $\lim_{x \to p} f(x) = l$, si

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tal que } \forall x \in D - \{p\},\ \text{tal que}$$
$$\operatorname{dist}(x, p) = |\, x - p \,| < \delta \text{ se verifica que}$$
$$\operatorname{dist}(f(x), l) = |\, f(x) - l \,| < \epsilon$$

Es decir, a medida que nos aproximamos a p por puntos de D, las imágenes de esos puntos por la función f se aproximan al valor l

Límite de una función en un punto

Ejemplo Consideremos la función $f(x) = 3x + 5$.
Veamos que $\lim_{x \to 2} f(x) = 11$

El dominio de f es todo $\mathbb{R}$, de modo que siempre nos podremos acercar al punto $p = 2$ por puntos del dominio de la función tanto como queramos.

Sea $\epsilon > 0$. Hemos de demostrar que existe un $\delta > 0$ tal que si $| x - 2 | < \delta$ entonces $|f(x) - l| = | (3x + 5) - 11 | < \epsilon$.

Sea $\delta < \frac{\epsilon}{3}$. Si $| x - 2 | < \frac{\epsilon}{3}$ tenemos:

$$| (3x + 5) - 11 | = | 3x - 6 | = 3 | x - 2 | < 3\frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

como queríamos probar

Límites laterales

Definición: Diremos que $l_i \in \mathbb{R}$ es el límite por la izquierda la de la función f en el punto p y escribiremos $\lim\limits_{x \to p^-} f(x) = l_i$, si

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tal que } \forall x \in D - \{p\},\ \text{tal que } 0 < p - x < \delta$$
$$\text{se verifica que } \mid f(x) - l_i \mid < \epsilon$$

Definición: Diremos que $l_d \in \mathbb{R}$ es el límite por la derecha la de la función f en el punto p y escribiremos $\lim\limits_{x \to p^+} f(x) = l_d$, si

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tal que } \forall x \in D - \{p\},\ \text{tal que } 0 < x - p < \delta$$
$$\text{se verifica que } \mid f(x) - l_d \mid < \epsilon$$

Límites laterales

Poposición Existe el límite de la función f en el punto p y vale l si y sólo si:

$$\boxed{\lim_{x\to p^-} f(x) = l = \lim_{x\to p^+} f(x)}$$

Ejemplo Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 5 \\ 2x & \text{si } x \geqslant 5 \end{cases}$$

No existe $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$ puesto que:

$$\lim_{x\to 5^-} f(x) = 25 \neq 10 = \lim_{x\to 5^+} f(x)$$

Límites infinitos

Definiciones

- Diremos que $\boxed{\lim\limits_{x\to p^-} f(x) = +\infty}$ si $\forall K \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0$ tal que si $0 < p - x < \delta$ entonces $f(x) > K$
- Diremos que $\boxed{\lim\limits_{x\to p^+} f(x) = +\infty}$ si $\forall K \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0$ tal que si $0 < x - p < \delta$ entonces $f(x) > K$
- Diremos que $\boxed{\lim\limits_{x\to p^-} f(x) = -\infty}$ si $\forall K \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0$ tal que si $0 < p - x < \delta$ entonces $f(x) < K$
- Diremos que $\boxed{\lim\limits_{x\to p^+} f(x) = -\infty}$ si $\forall K \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0$ tal que si $0 < x - p < \delta$ entonces $f(x) < K$

Límites en el infinito

Definiciones

- Diremos que $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = L}$ si $\forall\epsilon > 0\ \exists K \in \mathbb{R}$ tal que si $x > K$ entonces $| f(x) - L | < \epsilon$
- Diremos que $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$ si $\forall K \in \mathbb{R}\ \exists h \in \mathbb{R}$ tal que $\forall x > h$ se verifica $f(x) > K$
- Diremos que $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$ si $\forall K \in \mathbb{R}\ \exists h \in \mathbb{R}$ tal que $\forall x > h$ se verifica $f(x) < K$

Análogamente:

- Diremos que $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = L}$ si $\forall\epsilon > 0\ \exists K \in \mathbb{R}$ tal que si $x < K$ entonces $| f(x) - L | < \epsilon$
- Diremos que $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$ si $\forall K \in \mathbb{R}\ \exists h \in \mathbb{R}$ tal que $\forall x < h$ se verifica $f(x) > K$
- Diremos que $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$ si $\forall K \in \mathbb{R}\ \exists h \in \mathbb{R}$ tal que $\forall x < h$ se verifica $f(x) < K$

Propiedades de los límites (I)

Sean $f, g, h : D \to \mathbb{R}$ y sea $p \in D$ tal que siempre hay elementos de D distintos del propio p, tan próximos a p como se quiera. Sea $\lim_{x\to p} f(x) = l$ y $\lim_{x\to p} g(x) = l'$

Propiedades

1. Si existe, el límite de una función en un punto es único
2. Si una función tiene límite en un punto entonces está acotada en ese punto
3. Si $l \neq 0$ existe un entorno de p, E_p tal que si $x \in E_p \cap D$ entonces $f(x)$ tiene el mismo signo que l
4. Si $l < l'$, entonces existe un entorno de p, E_p tal que si $x \in E_p \cap D,\ x \neq p, f(x) < g(x)$
5. Si en un entorno E_p se verifica $\forall x \in D \cap E_p,\ x \neq p$ que $f(x) < g(x)$, entonces $l < l'$
6. Si $l = l'$ y en un entorno E_p se verifica $\forall x \in D \cap E_p$, $x \neq p$ que $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$, entonces $\lim_{x\to p} h(x) = l$ (criterio del emparedado)

Propiedades de los límites (II)

Sea

$$\boxed{\lim_{x \to p} f(x) = l} \quad \text{y} \quad \boxed{\lim_{x \to p} g(x) = l'}$$

Propiedades

- $\lim_{x \to p} [f(x) + g(x)] = l + l'$
- $\lim_{x \to p} [f(x) \cdot g(x)] = l \cdot l'$
- Si $l' \neq 0$ entonces $\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{l'}$
- $\lim_{x \to p} [f(x)]^a = l^a \qquad (a \in \mathbb{R})$
- $\lim_{x \to p} \sqrt[a]{f(x)} = \sqrt[a]{l} \qquad (a \in \mathbb{R}, a \neq 0)$
- $\lim_{x \to p} [f(x)]^{g(x)} = l^{l'}$

Cálculo de límites (I)

Para calcular el $\lim_{x \to p} f(x)$ sustituimos el x por p en la función y calculamos $f(p)$, teniendo en cuenta lo siguiente cuando aparecen límites $\pm\infty$:

$k + \infty = +\infty$	$k - \infty = -\infty$	$(k \in \mathbb{R})$
$k \cdot (+\infty) = +\infty$	$k \cdot (-\infty) = -\infty$	$(k > 0)$
$k^{+\infty} = +\infty$	$k^{-\infty} = 0$	$(k > 1)$
$k^{+\infty} = 0^+$	$k^{-\infty} = +\infty$	$(0 < k < 1)$
$\frac{1}{\infty} = 0$	$\frac{1}{0^+} = +\infty$	$\frac{1}{0^-} = -\infty$
$+\infty^{+\infty} = +\infty$	$\log(+\infty) = +\infty$	$\log(0^+) = -\infty$

Cálculo de límites (II)

- Si $\boxed{\lim_{x\to p} f(x) = a^{\infty}}$

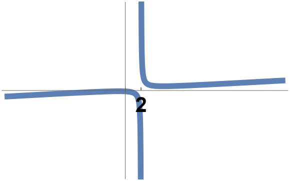
Si $a > 1$ $\begin{cases} a^{+\infty} \to +\infty \\ a^{-\infty} \to 0^{+} \end{cases}$ Si $0 < a < 1$ $\begin{cases} a^{+\infty} \to 0^{+} \\ a^{-\infty} \to +\infty \end{cases}$

- Si $\boxed{\lim_{x\to p} f(x) = \frac{a}{0}}$ calculamos los límites laterales de la función en el punto

Ejemplo Calcular $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+4}{x-2}$

$$\lim_{x\to 2^{+}} \frac{x^2+4}{x-2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2^{-}} \frac{x^2+4}{x-2} = -\infty$$



Los límites laterales son distintos, y por tanto la función no tiene límite en el punto $x = 2$

Casos de indeterminación

En esta tabla se presentan los casos de indeterminación en el cálculo de límites. En estas situaciones el resultado puede ser cualquiera, dependiendo del caso concreto de la función (puede tomar valores $\pm\infty, 0, l$). Cuando se presenta un caso de indeterminación se ha de recurrir a ciertas técnicas específicas

$0/0$	$f(x)/g(x)$	$f(x) \to 0$	$g(x) \to 0$
∞/∞	$f(x)/g(x)$	$f(x) \to \infty$	$g(x) \to \infty$
$0 \cdot \infty$	$f(x) \cdot g(x)$	$f(x) \to 0$	$g(x) \to \infty$
$\infty - \infty$	$f(x) - g(x)$	$f(x) \to \infty$	$g(x) \to \infty$
0^0	$f(x)^{g(x)}$	$f(x) \to 0$	$g(x) \to 0$
∞^0	$f(x)^{g(x)}$	$f(x) \to \infty$	$g(x) \to 0$
1^∞	$f(x)^{g(x)}$	$f(x) \to 1$	$g(x) \to \infty$

Cálculo de límites. Casos de indeterminación

Indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$$

- Si es una función racional (un cociente de polinomios) se descomponen estos en factores y se simplifica

  Ejemplo

  $$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x^2-x-6} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 3} \frac{(x+3)(x-3)}{(x-3)(x+2)} = \lim_{x\to 3} \frac{x+3}{x+2} = \frac{6}{5}$$

- Si es un cociente de funciones irracionales o una función irracional y un polinomio se multiplica y divide por la expresión irracional conjugada y se simplifica

  Ejemplo

  $$\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{\sqrt{x+7}-3} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}{(\sqrt{x+7}-3)(\sqrt{x+7}+3)}$$

  $$= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}{x+7-9} = \lim_{x\to 2} \sqrt{x+7}+3 = 6$$

Cálculo de límites. Casos de indeterminación

Indeterminaciones del tipo $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$$

- Podemos reducirlo al caso anterior sin más que tener en cuenta que $\lim\limits_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to p} \frac{1/g(x)}{1/f(x)} = \frac{0}{0}$
- Si $f(x)$ y $g(x)$ son polinomios o funciones con radicales dividimos numerador y denominador por la mayor potencia de x

Ejemplo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^7+x^2}+x}{x^2+2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\sqrt[3]{x^7+x^2}+x}{x^{7/3}}}{\frac{x^2+2}{x^{7/3}}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{1+x^{-5}}+x^{-4/3}}{x^{-1/3}+2x^{-7/3}} = \frac{1}{0} = \infty$$

Cálculo de límites. Casos de indeterminación

Indeterminaciones del tipo $\infty - \infty$ $\lim\limits_{x\to p} f(x) - g(x) = \infty - \infty$

- Si la expresión es una diferencia de funciones racionales, realizando las operaciones se resuelve o se llega a una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$

  Ejemplo

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2}{x-2}-\frac{x^3+8}{x^2-4}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2(x+2)-x^3-8}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-8}{x^2-4}$$

$$=\lim_{x\to 2} 2\,\frac{x^2-4}{x^2-4}=2$$

- Si f y/o g son funciones con radicales, para hallar $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-g(x))$, multiplicamos y dividimos por el conjugado $f(x)+g(x)$

  Ejemplo

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2-2}-\sqrt{x^2-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2-2}-\sqrt{x^2-x})(\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2-x})}{(\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2-x})}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{(\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2-x})}=\frac{1}{2}$$

Cálculo de límites. Casos de indeterminación

Indeterminaciones del tipo $0 \cdot \infty$ $\quad \lim_{x\to p} f(x)\cdot g(x) = 0 \cdot \infty$

Se reducen al caso $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$

Indeterminaciones del tipo 1^∞ $\quad \lim_{x\to p} f(x)^{g(x)} = 1^\infty$

Tendremos en cuenta el siguiente resultado, conocido como fórmula de Euler:

Si $\lim_{x\to p} f(x) = 1$ y $\lim_{x\to p} g(x) = \infty$, entonces

$$\lim_{x\to p} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to p}(f(x)-1)g(x)}$$

Ejemplo

$$\lim_{x\to 2}(x-1)^{\frac{2}{x-2}} = 1^\infty = e^{\lim_{x\to 2}[(x-1)-1]\frac{2}{x-2}} = e^2$$

Otras indeterminaciones: 0^0, ∞^0, 1^∞

Pueden resolverse aplicando:

$$\lim_{x\to p} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to p} e^{\log(f(x)^{g(x)})} = e^{\lim_{x\to p}(g(x)\,\log f(x))}$$

Continuidad

Definición Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función real de variable real. Diremos que la función f es continua en el punto $p \in D$ si

$$\boxed{\lim_{x \to p} f(x) = f(p)}$$

Con esta definición, la función f será discontinua en p si se da alguna de estas tres situaciones

1. No existe $\lim_{x \to p} f(x)$
2. f no está definida en p
3. $\lim_{x \to p} f(x) \neq f(p)$

En el caso 1 diremos que la discontinuidad en p es esencial. Si existe $\lim_{x \to p} f(x)$ y se dan los casos 2 o 3 diremos que la discontinuidad es evitable

Definición Diremos que f es continua en un subconjunto de su dominio C, si es continua en todo punto de C

Continuidad

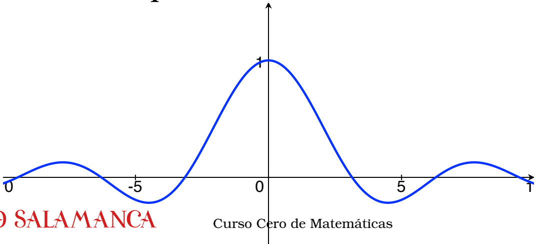
Ejemplo Veamos si la siguiente función es continua en el punto $p = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Observar que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \neq f(0)$$

por tanto la función será discontinua en 0, y la discontinuidad es evitable puesto que existe el límite de la función en el punto



Continuidad lateral

Definiciones

- Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función real de variable real. Diremos que la función f es continua por la izquierda en el punto $p \in D$ si

$$\boxed{\lim_{x \to p^-} f(x) = f(p)}$$

- Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función real de variable real. Diremos que la función f es continua por la derecha en el punto $p \in D$ si

$$\boxed{\lim_{x \to p^+} f(x) = f(p)}$$

Propiedad Si una función es continua por la derecha y por la izquierda en un punto, entonces es continua en dicho punto

Continuidad lateral

Ejemplo Estudiemos la continuidad de la siguiente función en el punto $p = 1$

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 1 \\ e & \text{si } x = 1 \\ e\,x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Como las definiciones de la función a la derecha y la izquierda del punto 1 son distintas hemos de hallar los límites laterales

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} e^x = e \quad = \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} e\,x^2 = e$$

Como $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$ la función es continua en el punto $p = 1$.

Propiedades de las funciones continuas

Sean $f, g : D \to \mathbb{R}$ funciones reales de variable real y sea $p \in D$:

- Si f y g son continuas en p entonces las funciones $f+g$, $f \cdot g$ y kf $(k \in \mathbb{R})$ son continuas en p
- Si f y g son continuas en p y $g(p) \neq 0$ entonces $\frac{f}{g}$ es continua en p
- Si f es continua en p y g es continua en $f(p)$ entonces la composición de ambas $g \circ f$ es continua en p
- Si f es continua en p entonces tiene límite en p
- Si f es continua en p entonces está acotada en p
- Si f es continua en p y $f(p) \neq 0$ entonces existe un entorno de p , E_p tal que $\forall x \in E_p \cap D$ se verifica que $\operatorname{signo} f(x) = \operatorname{signo} f(p)$
- Si f es continua en p y toma valores positivos y negativos en todo entorno de p entonces $f(p) = 0$

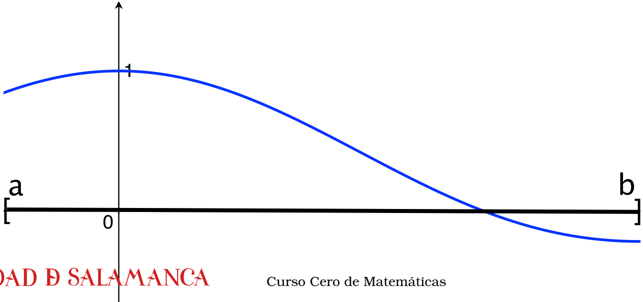
Algunas funciones continuas conocidas

- La función constante $f(x) = K$ es continua en todo $\mathbb{R}$, puesto que $\forall p \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \to p} f(x) = k = f(p)$
- La función identidad $f(x) = x$ es continua en todo $\mathbb{R}$, ya que $\forall p \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \to p} f(x) = p = f(p)$
- Las funciones potenciales $f(x) = x^n$ son continuas en todo $\mathbb{R}$, puesto que es un producto de funciones continuas ($x^n = x\,x \overset{(n)}{\ldots} x$)
- Las funciones polinómicas $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ son continuas en todo $\mathbb{R}$, puesto que cada monomio es un producto de funciones continuas, y el polinomio es entonces una suma de funciones continuas
- Las funciones racionales $\frac{P(x)}{Q(x)}$ son continuas en todos los puntos p donde $Q(p) \neq 0$

Propiedades de las funciones continuas

Teorema (de Bolzano) Sea f una función real de variable real continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ tal que $\text{signo}\, f(a) \neq \text{signo}\, f(b)$. Entonces, existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$

Observación: Geométricamente lo que este teorema indica es que si la función es continua en el intervalo y en uno de sus extremos está por encima del eje de abscisas y en otro por debajo, entonces la función corta al eje de abscisas en algún punto entre a y b



Propiedades de las funciones continuas

Teorema (de Darboux): Sea f una función real de variable real continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ tal que $f(a) \neq f(b)$. Se verifica que:

$$\boxed{\forall k \in (f(a), f(b)), \exists c \in (a,b) \text{ tal que } f(c) = k}$$

Observación: Este teorema es en realidad el mismo que el anterior aplicado a la función $h(x) = f(x) - k$

Teorema: Sea f una función real de variable real continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, entonces f está acotada en $[a,b]$, es decir, existen números reales K y k' tales que:

$$\forall x_0 \in [a,b], K < f(x_0) < k'$$

Teorema (de Weierstrass) Sea f una función real de variable real continua en un intervalo cerrado $[a,b]$. Entonces f alcanza el máximo y el mínimo absoluto en $[a,b]$, es decir $\exists c, c' \in [a,b]$ tales que:

$$\boxed{\forall x_0 \in [a,b],\ f(c') \leqslant f(x_0) \leqslant f(c)}$$