Curso Cero de Matemáticas para las titulaciones de la Facultad de Economía y Empresa

Tema 5: Polinomios

Facultad de Economía y Empresa
Dpto Economía e Historia Económica
Perfil Matemáticas

19 de junio de 2017

J. Manuel Cascón, <casbar@usal.es>
Federico Cesteros, <fcesteros@usal.es>
Rodrigo del Campo, <rde@usal.es>
Aurora Manrique, <amg@usal.es>
M. Dolores García, <dgarcia@usal.es>
Bernardo García-Bernalt, <bgarcia@usal.es>
Guillermo Sánchez, <guillermo@usal.es>
Gustavo Santos, <santos@usal.es>

19 de junio de 2017

Esquema

Polinomios

- Operaciones con polinomios
- Regla de Ruffini

Raíces de polinomios

- Teorema del resto
- Teorema del factor
- Teorema fundamental del Álgebra
- Regla de los signos de Descartes

Factorización de polinomios

- Ecuaciones de segundo grado
- Ecuaciones bicuadradas

Esquema

Polinomios
- Operaciones con polinomios
- Regla de Ruffini

Raíces de polinomios
- Teorema del resto
- Teorema del factor
- Teorema fundamental del Álgebra
- Regla de los signos de Descartes

Factorización de polinomios
- Ecuaciones de segundo grado
- Ecuaciones bicuadradas

Polinomios

Definiciones

- Un monomio en x de grado $n \in \mathbb{N}$ es una expresión algebraica de la forma ax^n con $a \in \mathbb{R}$
- Un polinomio en x es una suma de monomios en x

$$\boxed{p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0, \quad a_0, \ldots a_n \in \mathbb{R}, \quad a_n \neq 0}$$

- Grado del polinomio es el mayor de los grados de los monomios que lo forman

Operaciones con polinomios

Suma/resta: Se suman/restan los monomios del mismo grado

Multiplicación: Se multiplica cada monomio de uno de los factores por todos los monomios del otro factor y después se suman los monomios del mismo grado

Ejemplos

$$(3x^3 - x^2 + 5x - 2) + (2x^2 + x - 3) = 3x^3 + x^2 + 6x - 5$$

$$(3x^3 - x^2 + 5x - 2) \cdot (2x^2 + x - 3) = 6x^5 + x^4 + 4x^2 - 17x + 6$$

$$\begin{array}{rrrrrrr}
 & & & 3x^3 & -x^2 & +5x & -2 \\
\times & & & & 2x^2 & +x & -3 \\
\hline
 & & & -9x^3 & +3x^2 & -15x & +6 \\
 & & 3x^4 & -x^3 & +5x^2 & -2x & \\
 & 6x^5 & -2x^4 & +10x^3 & -4x^2 & & \\
\hline
 & 6x^5 & +x^4 & & +4x^2 & -17x & +6
\end{array}$$

Operaciones con polinomios

División: Dividir $p(x)$ entre $q(x)$ con grado $p(x) \geqslant$ grado $q(x)$ consiste en hallar dos polinomios $c(x)$ -cociente- y $r(x)$ -resto- tales que $\boxed{p(x) = q(x) \cdot c(x) + r(x)}$ con grado $r(x) <$ grado $q(x)$

Si $r(x) = 0$ la división es exacta

Ejemplo

$$
\begin{array}{rr|l}
 & 6x^3 - 2x^2 + x + 3 & x^2 - x + 1 \\
\cline{3-3}
- & 6x^3 - 6x^2 + 6x \phantom{{}+3} & 6x + 4 \\
\cline{2-2}
 & 4x^2 - 5x + 3 & \\
- & 4x^2 - 4x + 4 & \\
\cline{2-2}
 & -x - 1 &
\end{array}
$$

$$6x^3 - 2x^2 + x + 3 = (x^2 + x + 1) \cdot (6x + 4) + (-x - 1)$$

Regla de Ruffini

División de un polinomio $p(x)$ entre un monomio $x-a$

Ejemplo Dividir x^3+x^2-1 entre $x-1$

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 1 & 0 & -1 \\
1 & & 1 & 2 & 2 \\
\hline
 & 1 & 2 & 2 & \boxed{1}
\end{array}$$

El cociente de dividir x^3+x^2-1 entre $x-1$ es igual a x^2+2x+2 y el resto es 1, con lo que

$$x^3+x^2-1=(x-1)(x^2+2x+2)+1$$

Esquema

Polinomios

- Operaciones con polinomios
- Regla de Ruffini

Raíces de polinomios

- Teorema del resto
- Teorema del factor
- Teorema fundamental del Álgebra
- Regla de los signos de Descartes

Factorización de polinomios

- Ecuaciones de segundo grado
- Ecuaciones bicuadradas

Raíces de polinomios

Definiciones

Sea $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ un polinomio en x con coeficientes reales de grado n, $(a_n \neq 0)$

- Se dice que a es raíz de $p(x)$ si $p(a) = 0$
- Si a es una raíz de $p(x)$, se llama orden o multiplicidad (algebraica) de a al mayor número natural m tal que $p(x)$ es divisible por $(x - a)^m$. En particular, si $m = 1$ se dice que a es una raíz simple de $p(x)$
- Si $a_0 = 0$ la ecuación es homogénea y 0 es raíz de $p(x)$

Raíces de polinomios

Sea $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ un polinomio en x con coeficientes reales de grado n, $(a_n \neq 0)$

- **Teorema del resto** El resto de dividir $p(x)$ por $x - a$ es igual al valor numérico del polinomio en $x = a$, es decir, $p(a)$

- **Teorema del factor** $p(x)$ es divisible por $x - a$ si y sólo si a es raíz de $p(x)$

- **Teorema fundamental del Álgebra** Todo polinomio de grado $n \geqslant 1$ con coeficientes reales tiene exactamente n raíces complejas (reales o no), contando cada una tantas veces como indique su multiplicidad. Esto es,

$$\boxed{p(x) = a_n(x-\lambda_1)^{m_1}(x-\lambda_2)^{m_2}\cdots(x-\lambda_p)^{m_p}}$$

donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{C}$, $m_1 + \cdots + m_p = n$

Raíces de polinomios

Del teorema anterior se deduce que si $p(x)$ es un polinomio en x con coeficientes reales de grado n,

- $p(x)$ tiene a lo sumo n raíces reales
- Las raíces complejas aparecen por pares conjugados $(a+bi,\ a-bi,\quad a,b\in\mathbb{R})$
- Todo polinomio de grado impar con coeficientes reales tiene al menos una raíz real

Observación

Si $a_n = 1$, i.e., $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ con $n \geqslant 2$, entonces

$-a_{n-1}$ es igual a la suma de las raíces de $p(x)$

$(-1)^n a_0$ es igual al producto de las raíces de $p(x)$

Raíces de polinomios

Regla de los signos de Descartes

Si todas las raíces de $p(x)$ son reales,

- el número de raíces positivas es igual al número de cambios de signo que hay entre coeficientes consecutivos no nulos de $p(x)$
- el número de raíces negativas es igual al número de cambios de signo que hay entre coeficientes consecutivos no nulos de $p(-x)$

Ejemplo Determinar los signos de las raíces de $x^4 + 5x^3 - 7x^2 - 29x + 30$

$p(x) = +x^4 + 5x^3 - 7x^2 - 29x + 30$

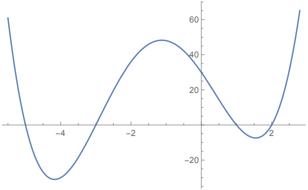
$\Rightarrow$ n^o cambios signo $= 2$

$\Rightarrow$ 2 raíces reales positivas

$p(-x) = +x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 29x + 30$

$\Rightarrow$ n^o cambios signo $= 2$

$\Rightarrow$ 2 raíces reales negativas



Esquema

Factorización de polinomios

Ecuaciones de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$

- La solución general de la ecuación es:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Se llama discriminante de la ecuación al número:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- En una ecuación de grado 2, si:
    - $\Delta > 0$ existen dos raíces reales
    - $\Delta = 0$ existe una raíz real doble
    - $\Delta < 0$ no existe ninguna raíz real (dos raíces complejas conjugadas)

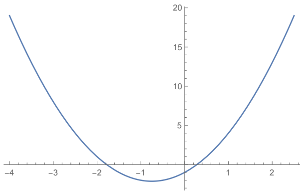
- Si x_1, x_2 son las raíces de la ecuación:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Factorización de polinomios

Ejemplos

- $2x^2 + 3x - 1$
  $= 2\left(x + \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{17}}{4}\right)\left(x + \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{17}}{4}\right)$
  $\Delta = 17$



- $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$
  $\Delta = 0$

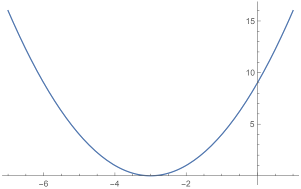
- $3x^2 - x + 4$
  no tiene raíces reales
  $\Delta = -47$

Factorización de polinomios

Ejemplos

- $2x^2 + 3x - 1$
  $= 2\left(x + \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{17}}{4}\right)\left(x + \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{17}}{4}\right)$
  $\Delta = 17$

- $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$
  $\Delta = 0$



- $3x^2 - x + 4$
  no tiene raíces reales
  $\Delta = -47$

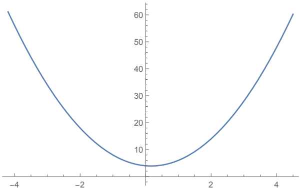
Factorización de polinomios

Ejemplos

- $2x^2 + 3x - 1$
  $= 2\left(x + \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{17}}{4}\right)\left(x + \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{17}}{4}\right)$
  $\Delta = 17$

- $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$
  $\Delta = 0$

- $3x^2 - x + 4$
  no tiene raíces reales
  $\Delta = -47$



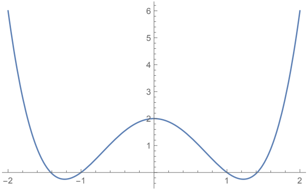
Factorización de polinomios

Ecuaciones bicuadradas $ax^4 + bx^2 + c = 0$

Se resuelven aplicando $\boxed{z = x^2}$

Ejemplo

$$x^4 - 3x^2 + 2 = (x^2 - 1)(x^2 - 2)$$
$$= (x - 1)(x + 1)\left(x + \sqrt{2}\right)\left(x - \sqrt{2}\right)$$



Factorización de polinomios

- Si $p(x)$ es un polinomio con coeficientes reales de grado n, y las raíces reales de $p(x)$ son $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ con multiplicidades $m_1, \dots, m_p$ respectivamente, entonces

$$\boxed{p(x) = (x-\lambda_1)^{m_1}(x-\lambda_2)^{m_2} \cdots \ (x-\lambda_p)^{m_p} q(x)}$$

  donde $m_1 + \cdots + m_p \leqslant n$ y $q(x)$ es un polinomio de grado $n-(m_1+\cdots+m_p)$ con $q(\lambda_i) \neq 0, \ i = 1, \dots, p$

- Si $p(x)$ es un polinomio con coeficientes enteros y $\boxed{x = a}$ es una raíz entera del polinomio, entonces $\boxed{a}$ es un divisor del término independiente del polinomio

Factorización de polinomios

Ejemplo Factorizar $p(x) = x^4 + x^3 - 6x^2 - 4x + 8$

Los divisores enteros del término independiente son $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & 1 & -6 & -4 & 8 \\
1 & & 1 & 2 & -4 & -8 \\
\hline
 & 1 & 2 & -4 & -8 & \boxed{0}
\end{array}$$

$$x^4 + x^3 - 6x^2 - 4x + 8 = (x-1)\cdot(x^3 + 2x^2 - 4x - 8)$$

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 2 & -4 & -8 \\
1 & & 1 & 3 & -1 \\
\hline
 & 1 & 3 & -1 & \boxed{-9}
\end{array}$$

$\Rightarrow$ 1 no es raíz de $x^3 + 2x^2 - 4x - 8$

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 2 & -4 & -8 \\
2 & & 2 & 8 & 8 \\
\hline
 & 1 & 4 & 4 & \boxed{0}
\end{array}$$

$$x^4 + x^3 - 6x^2 - 4x + 8 = (x-1)\cdot(x-2)\cdot(x^2 + 4x + 4)$$

Factorización de polinomios

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 4 & 4 \\ 2 & & 2 & 12 \\ \hline & 1 & 6 & \boxed{16} \end{array}$$

$\Rightarrow$ 2 no es raíz de $x^2 + 4x + 4$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 4 & 4 \\ -2 & & -2 & -4 \\ \hline & 1 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

Se concluye que

$$x^4 + x^3 - 6x^2 - 4x + 8 = (x-1)\,(x-2)\,(x+2)^2$$