Curso Cero de Matemáticas para las titulaciones de la Facultad de Economía y Empresa

Tema 10: Elementos básicos de integración

Facultad de Economía y Empresa
Dpto Economía e Historia Económica
Perfil Matemáticas

19 de junio de 2017

VNiVERSiDAD D SALAMANCA
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

800 AÑOS
1218 ~ 2018

J. Manuel Cascón, <casbar@usal.es>
Federico Cesteros, <fcesteros@usal.es>
Rodrigo del Campo, <rde@usal.es>
Aurora Manrique, <amg@usal.es>
M. Dolores García, <dgarcia@usal.es>
Bernardo García-Bernalt, <bgarcia@usal.es>
Guillermo Sánchez, <guillermo@usal.es>
Gustavo Santos, <santos@usal.es>

19 de junio de 2017

Esquema

Esquema

Concepto de función primitiva

Definición Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función real de variable real definida en un conjunto $D \subset \mathbb{R}$. Se llama función primitiva de f en D a otra función $F : D \to \mathbb{R}$, tal que

$$\boxed{F'(x) = f(x)}$$

Ejemplos

- Una primitiva de $f(x) = \frac{1}{x}$ es $F(x) = \ln x$ porque $F'(x) = \frac{1}{x} = f(x)$
- Una primitiva de $f(x) = \cos x$ es $F(x) = \operatorname{sen} x$ porque $F'(x) = \cos x = f(x)$.
  Otra primitiva sería $G(x) = \operatorname{sen} x + C$, donde C es una constante, dado que $G'(x) = f(x)$ independientemente del valor de C

Integral indefinida

Propiedad Si $F(x)$ y $G(x)$ son primitivas de una misma función $f(x)$, entonces difieren en una constante, esto es, $G(x) = F(x) + C$, con C constante

Definición Al conjunto de primitivas de una función $f(x)$ lo denotamos como

$$\boxed{\int f(x)\, dx}$$

y lo denominamos integral (indefinida) de $f(x)$

Así, si $F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$,

$$\boxed{\int f(x)\, dx = F(x) + C}$$

siendo C cualquier número real

Propiedades e integrales inmediatas

Sean $f, g : D \to \mathbb{R}$ dos funciones con primitiva en $D \subset \mathbb{R}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces:

- $$\int (f(x) + g(x))\ dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$$
- $$\int \lambda f(x)\, dx = \lambda \int f(x)\, dx$$

Una integral inmediata se deduce directamente de las reglas de derivación. Destacamos las siguientes:

$$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C\ (n \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x\, dx = e^x + C \qquad \int a^x\, dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C\ \ (a > 0)$$

$$\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + C$$

Esquema

Integración por sustitución o cambio de variable

Consiste en hacer un cambio de variable que transforme la integral en otra que resulte conocida o más sencilla

Proposición Sea $x = \varphi(t)$ una función derivable respecto de t, de modo que $dx = \varphi'(t)\,dt$. Entonces:

$$\boxed{\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt}$$

Integración por sustitución. Ejemplos

- $\int (2x+3)^3\,dx$

$$\left\{\begin{array}{l} t = 2x+3 \\ dt = 2\,dx \end{array}\right\} \Rightarrow \int (2x+3)^3\,dx = \int t^3\,\frac{dt}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\int t^3\,dt = \frac{1}{2}\frac{t^4}{4} = \frac{t^4}{8} + C$$

y deshaciendo el cambio

$$\int (2x+3)^3\,dx = \frac{(2x+3)^4}{8} + C$$

- $\int x \operatorname{sen} x^2\,dx$

$$\left\{\begin{array}{l} t = x^2 \\ dt = 2x\,dx \end{array}\right\} \Rightarrow \int x \operatorname{sen} x^2\,dx = \int \operatorname{sen} t\,\frac{dt}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}(-\cos t) + C = \frac{-\cos x^2}{2} + C$$

Integración por sustitución. Ejemplos

- $$\int \sqrt{2x+7}\, dx$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t^2 = 2x+7 \\ 2t\, dt = 2\, dx \end{array} \right\} \Rightarrow \int \sqrt{2x+7}\, dx = \int t\, t\, dt =$$

$$= \int t^2\, dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{(2x+7)\sqrt{2x+7}}{3} + C$$

- $$\int \frac{2x+1}{x^2+x+17}\, dx$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t = x^2+x+17 \\ dt = (2x+1)\, dx \end{array} \right\} \Rightarrow \int \frac{2x+1}{x^2+x+17}\, dx = \int \frac{dt}{t} =$$

$$= \ln t = \ln(x^2+x+17) + C$$

Observación Los resultados pueden comprobarse calculando las derivadas de las soluciones

Aplicación del método de integración por sustitución

En la tabla de integrales inmediatas tenemos:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

Haciendo el cambio $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t)\,dt$:

$$\int \frac{1}{\varphi(t)}\varphi'(t)\,dt = \ln|\varphi(t)| + C$$

y en la notación habitual, con la variable x y llamando a la función f:

$$\int \frac{1}{f(x)}f'(x)\,dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

Si repetimos este proceso en cada una de las integrales inmediatas, obtenemos la tabla que aparece en la siguiente página

Aplicación del método de integración por sustitución

$$\int \varphi(x)^n \varphi'(x)\, dx = \frac{\varphi(x)^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\, dx = \ln|\varphi(x)| + C$$

$$\int \varphi'(x) e^{\varphi(x)}\, dx = e^{\varphi(x)} + C$$

$$\int \varphi'(x) a^{\varphi(x)}\, dx = \frac{1}{\ln a} a^{\varphi(x)} + C \quad (a > 0)$$

$$\int \varphi'(x)\, \mathrm{sen}(\varphi(x))\, dx = -\cos(\varphi(x)) + C$$

$$\int \varphi'(x) \cos\varphi(x)\, dx = \mathrm{sen}(\varphi(x)) + C$$

Integración por partes

Este método permite el cálculo de la integral de productos de funciones, mediante la siguiente fórmula:

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

Observación Dado que tenemos

$$\big(u(x)\,v(x)\,\big)' = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x),$$

entonces

$$u(x)\,v'(x) = (u(x)\,v(x))' - u'(x)\,v(x) \;\Rightarrow\; \boxed{u\,dv = d(u\,v) - v\,du}$$

E integrando en ambas partes:

$$\int u\,dv = \int \big[d(uv) - v\,du\big] = uv - \int v\,du$$

Integración por partes. Ejemplos

- $$\int \ln x \, dx = \boxed{\int u \, dv}$$

  Consideramos $u = \ln x$ y $dv = dx$ de modo que:

  $$\int \ln x \, dx = \boxed{uv - \int v \, du} = \ln x \cdot x - \int x \frac{1}{x} \, dx = \ln x \cdot x - x + C$$

- $$\int x^3 \ln x \, dx = \boxed{\int u \, dv} \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} u = \ln x & \Rightarrow & du = \frac{1}{x} \, dx \\ dv = x^3 \, dx & \Rightarrow & v = \frac{x^4}{4} \end{array} \right\}$$

  $$\Rightarrow \int x^3 \ln x \, dx = \boxed{uv - \int v \, du} = \ln x \; \frac{x^4}{4} - \int \frac{x^4}{4} \, \frac{1}{x} \, dx$$

  $$= \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{4} \int x^3 \, dx = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{4} \, \frac{x^4}{4} + C$$

  $$= \frac{x^4}{4} \left(\ln x - \frac{1}{4} \right) + C$$

Integración por partes. Ejemplos

- $$\int x\, e^x\, dx = \boxed{\int u\, dv} \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} u = x & \Rightarrow & du = dx \\ dv = e^x\, dx & \Rightarrow & v = e^x \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \int x e^x\, dx = \boxed{uv - \int v\, du} = x e^x - \int e^x\, dx$$

$$= x e^x - e^x + C = e^x (x - 1) + C$$

- $$\int x \cos x\, dx = \boxed{\int u\, dv} \left\{ \begin{array}{lcl} u = x & \Rightarrow & du = dx \\ dv = \cos x\, dx & \Rightarrow & v = \operatorname{sen} x \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \int x \cos x\, dx = \boxed{uv - \int v\, du} = x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\, dx$$

$$= x \operatorname{sen} x - (-\cos x) + C = x \operatorname{sen} x + \cos x + C$$

Esquema

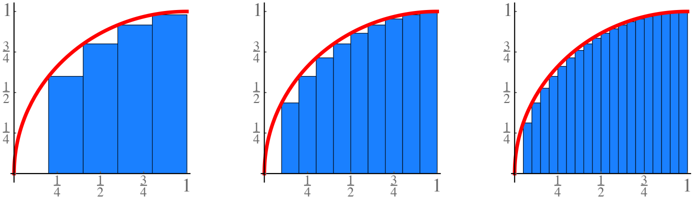
Suma inferior

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida y continua en todo el intervalo $[a, b]$. Consideramos una partición del intervalo, esto es, $P = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b\}$

Definición Llamamos suma inferior de f asociada a la partición P_n a

$$s(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

donde $m_i = \min\{f(x), x \in [x_{i-1}, x_i]\}$



$n = 5$ $\qquad$ $n = 10$ $\qquad$ $n = 20$

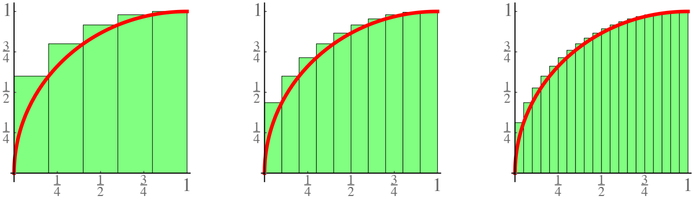
Suma superior

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida y continua en todo el intervalo $[a, b]$. Consideramos una partición del intervalo, esto es, $P_n = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b\}$

Definición Llamamos suma superior de f asociada a la partición P a

$$S(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$$

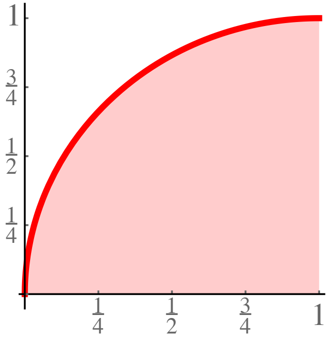
donde $M_i = \text{máx}\{f(x), x \in [x_{i-1}, x_i]\}$



$n = 5$ $\quad$ $n = 10$ $\quad$ $n = 20$

Suma inferior/superior. Ejemplo

Sea $f(x) = \sqrt{1-(x-1)^2}$. El área sombreada es $\boxed{\frac{\pi}{4}}$ (¿Por qué?). Calcularemos las sumas inferiores y superiores asociadas a particiones con puntos equiespaciados



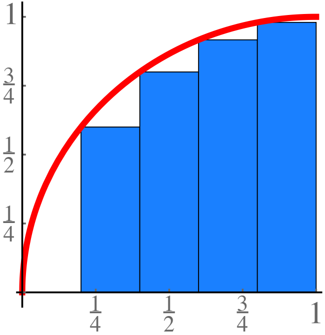
$$f(x) = \sqrt{1-(x-1)^2}$$

$$\text{Área} = \frac{\pi}{4} \approx 0.785398$$

P_n	$s(f, P_n)$	$S(f, P_n)$
5	0.659262	0.859262
10	0.726129	0.826129
20	0.757116	0.807116
100	0.780104	0.790104
1000	0.784889	0.785889

Suma inferior/superior. Ejemplo

Sea $f(x) = \sqrt{1-(x-1)^2}$. El área sombreada es $\frac{\pi}{4}$ (¿Por qué?). Calcularemos las sumas inferiores y superiores asociadas a particiones con puntos equiespaciados



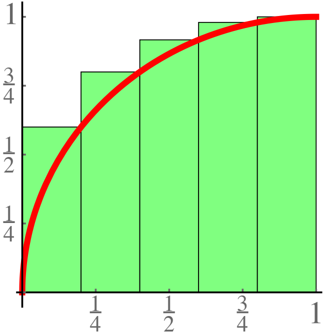
$$\text{Área} = \frac{\pi}{4} \approx 0.785398$$

P_n	$s(f,P_n)$	$S(f,P_n)$
5	0.659262	0.859262
10	0.726129	0.826129
20	0.757116	0.807116
100	0.780104	0.790104
1000	0.784889	0.785889

$$s(f,P_5) = 0.659262$$

Suma inferior/superior. Ejemplo

Sea $f(x) = \sqrt{1-(x-1)^2}$. El área sombreada es $\frac{\pi}{4}$ (¿Por qué?). Calcularemos las sumas inferiores y superiores asociadas a particiones con puntos equiespaciados



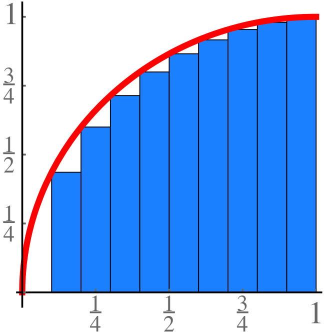
$S(f, P_5) = 0.859262$

$$\text{Área} = \frac{\pi}{4} \approx 0.785398$$

P_n	$s(f, P_n)$	$S(f, P_n)$
5	0.659262	0.859262
10	0.726129	0.826129
20	0.757116	0.807116
100	0.780104	0.790104
1000	0.784889	0.785889

Suma inferior/superior. Ejemplo

Sea $f(x) = \sqrt{1-(x-1)^2}$. El área sombreada es $\frac{\pi}{4}$ (¿Por qué?). Calcularemos las sumas inferiores y superiores asociadas a particiones con puntos equiespaciados



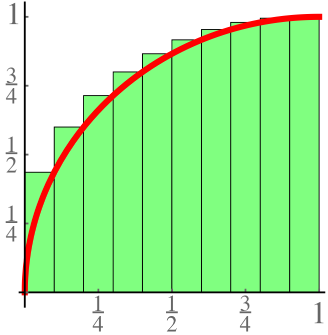
$$\text{Área} = \frac{\pi}{4} \approx 0.785398$$

P_n	$s(f,P_n)$	$S(f,P_n)$
5	0.659262	0.859262
10	0.726129	0.826129
20	0.757116	0.807116
100	0.780104	0.790104
1000	0.784889	0.785889

$$s(f,P_{10}) = 0.72613$$

Suma inferior/superior. Ejemplo

Sea $f(x) = \sqrt{1-(x-1)^2}$. El área sombreada es $\boxed{\frac{\pi}{4}}$ (¿Por qué?). Calcularemos las sumas inferiores y superiores asociadas a particiones con puntos equiespaciados



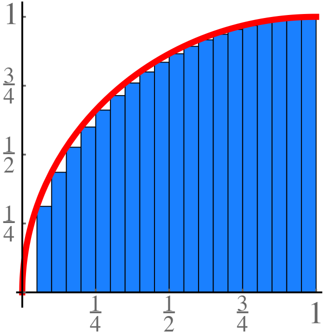
$S(f, P_{10}) = 0.859262$

$$\text{Área} = \frac{\pi}{4} \approx 0.785398$$

P_n	$s(f, P_n)$	$S(f, P_n)$
5	0.659262	0.859262
10	0.726129	0.826129
20	0.757116	0.807116
100	0.780104	0.790104
1000	0.784889	0.785889

Suma inferior/superior. Ejemplo

Sea $f(x) = \sqrt{1-(x-1)^2}$. El área sombreada es $\frac{\pi}{4}$ (¿Por qué?). Calcularemos las sumas inferiores y superiores asociadas a particiones con puntos equiespaciados



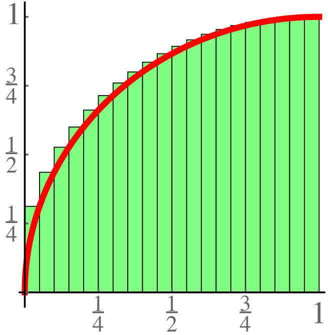
$$\text{Área} = \frac{\pi}{4} \approx 0.785398$$

P_n	$s(f,P_n)$	$S(f,P_n)$
5	0.659262	0.859262
10	0.726129	0.826129
20	0.757116	0.807116
100	0.780104	0.790104
1000	0.784889	0.785889

$s(f, P_{20}) = 0.757116$

Suma inferior/superior. Ejemplo

Sea $f(x) = \sqrt{1-(x-1)^2}$. El área sombreada es $\frac{\pi}{4}$ (¿Por qué?). Calcularemos las sumas inferiores y superiores asociadas a particiones con puntos equiespaciados



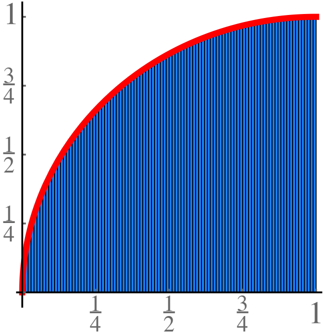
$$\text{Área} = \frac{\pi}{4} \approx 0.785398$$

P_n	$s(f,P_n)$	$S(f,P_n)$
5	0.659262	0.859262
10	0.726129	0.826129
20	0.757116	0.807116
100	0.780104	0.790104
1000	0.784889	0.785889

$S(f, P_{20}) = 0.807116$

Suma inferior/superior. Ejemplo

Sea $f(x) = \sqrt{1-(x-1)^2}$. El área sombreada es $\frac{\pi}{4}$ (¿Por qué?). Calcularemos las sumas inferiores y superiores asociadas a particiones con puntos equiespaciados



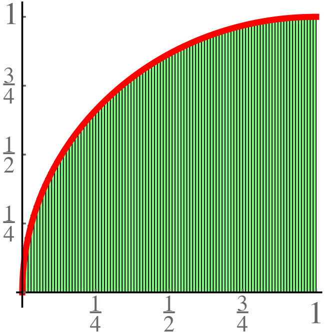
$$\text{Área} = \frac{\pi}{4} \approx 0.785398$$

P_n	$s(f, P_n)$	$S(f, P_n)$
5	0.659262	0.859262
10	0.726129	0.826129
20	0.757116	0.807116
100	0.780104	0.790104
1000	0.784889	0.785889

$s(f, P_{100}) = 0.780104$

Suma inferior/superior. Ejemplo

Sea $f(x) = \sqrt{1-(x-1)^2}$. El área sombreada es $\frac{\pi}{4}$ (¿Por qué?). Calcularemos las sumas inferiores y superiores asociadas a particiones con puntos equiespaciados



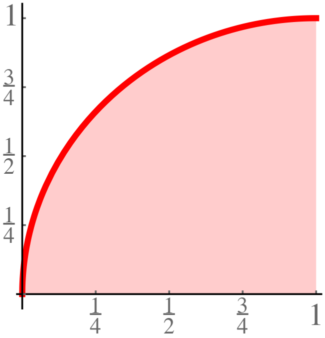
$$\text{Área} = \frac{\pi}{4} \approx 0.785398$$

P_n	$s(f, P_n)$	$S(f, P_n)$
5	0.659262	0.859262
10	0.726129	0.826129
20	0.757116	0.807116
100	0.780104	0.790104
1000	0.784889	0.785889

$S(f, P_{100}) = 0.790104$

Suma inferior/superior. Ejemplo

Sea $f(x) = \sqrt{1-(x-1)^2}$. El área sombreada es $\frac{\pi}{4}$ (¿Por qué?). Calcularemos las sumas inferiores y superiores asociadas a particiones con puntos equiespaciados



$$f(x) = \sqrt{1-(x-1)^2}$$

$$\text{Área} = \frac{\pi}{4} \approx 0.785398$$

P_n	$s(f,P_n)$	$S(f,P_n)$
5	0.659262	0.859262
10	0.726129	0.826129
20	0.757116	0.807116
100	0.780104	0.790104
1000	0.784889	0.785889

Funciones integrables Riemann. La integral definida

Observación En el ejemplo anterior se observa:

$$s(f, P_n) \leqslant \text{Área} \leqslant S(f, P_n)$$

De hecho, se puede demostrar que si f es continua y acotada el límite de ambas sumas cuando $n \to \infty$ coincide. Esto permite introducir la integral definida

Teorema Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua y acotada en $[a, b]$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} s(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} S(f, P_n)$$

Decimos entonces que f es integrable-Riemann (o simplemente integrable) en $[a, b]$. Ese valor lo denominamos integral de f en $[a, b]$, y se denota por

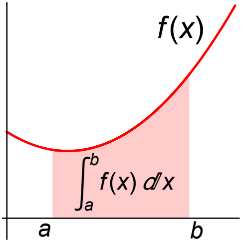
$$\boxed{\int_a^b f(x)\, dx}$$

Cálculo de integrales definidas

Regla de Barrow Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada en $[a, b]$. Si f es continua en $[a, b]$ y $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función primitiva cualquiera de $f(x)$ en $[a, b]$, entonces

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)}$$

Interpretación geométrica



Integral definida. Ejemplos

- $$\int_{-1}^{1} (x^3 - 3x^2 + 2x - 1)\, dx$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} (x^3 - 3x^2 + 2x - 1)\, dx = \boxed{\Big[F(x)\Big]_{-1}^{1}}$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - 3\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} - x\right]_{-1}^{1}$$

$$= \left(\frac{1}{4} - 1 + 1 - 1\right) - \left(\frac{1}{4} + 1 + 1 + 1\right) = \boxed{-4}$$

- $$\int_{0}^{1} e^x\, dx$$

$$\Rightarrow \int_{0}^{1} e^x\, dx = \boxed{\Big[F(x)\Big]_{0}^{1}} = \Big[e^x\Big]_{0}^{1} = e - e^0 = \boxed{e - 1}$$

Integral definida. Ejemplos

- $\displaystyle\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\,dx \qquad \left\{\begin{array}{l} t = x^2+9 \\ dt = 2x\,dx \end{array}\right\}$

$$\Rightarrow \int x\sqrt{x^2+9}\,dx = \int \sqrt{t}\,\frac{dt}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{\sqrt{(x^2+9)^3}}{3} + C$$

Así:

$$\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\,dx = \boxed{\Big[F(x)\Big]_0^4} = \left[\frac{\sqrt{(x^2+9)^3}}{3}\right]_0^4$$

$$= \frac{25\sqrt{25}}{3} - \frac{9\sqrt{9}}{3} = \boxed{\frac{98}{3}}$$

Esquema

Integrales impropias de primera especie

Sea $f : D \to \mathbb{R}$ con $D \subset \mathbb{R}$ una función integrable en cada intervalo $[a, x]$ con $x \geqslant a$

Se llama integral impropia de primera especie de f sobre $[a, +\infty)$, $\int_a^\infty f(x)\,dx$, al límite

$$\boxed{\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\,dt}$$

si dicho límite existe. En este caso se dice que la integral es convergente. Si este límite no existe, se dice que la integral es divergente

Igualmente, se analiza

$$\boxed{\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{x \to -\infty} \int_x^b f(t)\,dt}$$

Integral impropia de primera especie. Ejemplo

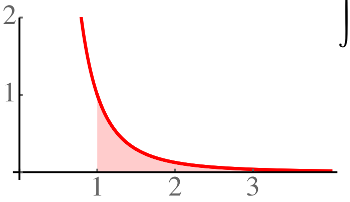
Calculemos la siguiente integral impropia

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\, dx$$

Calcularemos $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\, dx = \lim_{x\to+\infty} \int_1^{x} \frac{1}{t^3}\, dt$

Como $F(t) = \frac{t^{-2}}{-2}$ cumple $F'(t) = \frac{1}{t^3}$ en cualquier $t > 0$,

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\, dx &= \lim_{x\to+\infty} \big[F(t)\big]_1^x \\ &= \lim_{x\to+\infty} \big(F(x) - F(1)\big) \\ &= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{-1}{2x^2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \boxed{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$



Área calculada

Integrales impropias de segunda especie

Sea $f:(a,b]\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función integrable en todo $[x,b]$ para $x\in(a,b]$ $\left(\text{existe } \int_x^b f(t)\,dt,\ \forall\, x\in(a,b]\right)$, que no está acotada a la derecha de a.

Se llama integral impropia de segunda especie de f en $(a,b]$, $\int_a^b f(x)dx$, al límite

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x\to a^+}\int_x^b f(t)\,dt \equiv \int_{a^+}^b f(x)\,dx}$$

si dicho límite existe

Igualmente se analiza

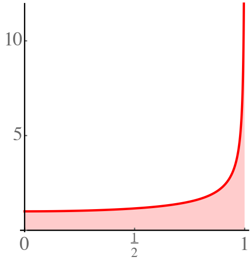
$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x\to b^-}\int_a^x f(t)\,dt \equiv \int_a^{b^-} f(x)\,dx}$$

Integral impropia de segunda especie. Ejemplo

Calculemos la siguiente integral impropia:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx$$

Es una integral impropia de segunda especie pues $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{1}{\sqrt{1-x}} = +\infty$. Como $F(x) = -2\sqrt{1-x}$ cumple $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ en $[0, 1)$, procedemos



Área calculada

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx &= \lim_{x\to 1}\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,dt \\ &= \lim_{x\to 1}\left[-2\sqrt{1-t}\right]_0^x \\ &= \lim_{x\to 1}\left(-2\sqrt{1-x} - (-2\sqrt{1-0})\right) \\ &= \lim_{x\to 1}(2 - 2\sqrt{1-x}) = \boxed{2}\end{aligned}$$

Esquema

Aplicación: la función Gamma

La función Gamma, $\Gamma : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, se define como:

$$\boxed{\Gamma(x) = \int_{0^+}^{\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt}$$

Propiedad $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, para todo $x > 0$

Demostración Por definición

$$\Gamma(x+1) = \int_{0^+}^{+\infty} t^{x} e^{-t}\, dt$$

e integrando por partes con $u = t^x$ y $dv = e^{-t}\, dt$:

$$\Gamma(x+1) = \Big[- t^x e^{-t} \Big]_{0^+}^{+\infty} + \int_{0^+}^{+\infty} e^{-t} x\, t^{x-1}\, dt$$

Como $\lim\limits_{t\to+\infty} (-t^x e^{-t}) = 0$ y $\lim\limits_{t\to 0^+} (-t^x e^{-t}) = 0$:

$$\Gamma(x+1) = x \int_{0^+}^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt = x\,\Gamma(x)$$