



José Javier González López

Dirección: Dra. María Gracia Manzano Arjona

Codirección: Dr. Andrei Moldovan

Tesis Doctoral 2023



**VNiVERSiDAD
 D SALAMANCA**
 CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL



VNiVERSiDAD
D SALAMANCA

CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

*Una traducción de la teoría de tipos proposicional híbrida
ecuacional (EHPTT) hacia la lógica multivariada de
primer orden (MSL)*

José Javier González López

Directora: María Gracia Manzano Arjona. Codirector: Andrei Moldovan
Universidad de Salamanca

Tesis para la obtención del grado de
Doctor en Lógica y Filosofía de la Ciencia

Salamanca, 2023

Agradecimientos

A mis padres, a mi hermano y a todas las personas que me han apoyado en todos estos años de doctorado.

Muchas gracias a Mara, a Andrei y a todos los profesores que me han enseñado tanto y gracias a los que he podido crecer. Sin la mano y la palabra de profesionales esto no hubiera sido posible. Sin la mano y la palabra de compañeros tampoco.

Gracias a la Universidad de Salamanca y a sus profesionales por el apoyo y el entorno. En particular, destacar que esta tesis ha sido posible gracias a la financiación obtenida gracias a las Ayudas para financiar contratos predoctorales de la Universidad de Salamanca, cofinanciadas por el Banco Santander.

Índice general

Capítulo 1	Introducción	1
1.1	Contexto y motivación	1
1.2	Objetivos	3
1.3	Metodología y estructura del trabajo	5
Capítulo 2	Teoría de tipos proposicional (PTT)	7
2.1	Introducción	8
2.2	Estructura, lenguaje y expresiones	8
2.2.1	Jerarquía de tipos	8
2.2.2	Jerarquía de dominios de tipos	9
2.2.3	Lenguaje y expresiones	10
2.2.4	Sustitución de una variable por una expresión dentro de cualquier expresión	14
2.2.5	Algunos elementos y algunas expresiones destacadas . .	14
2.2.6	Fórmulas	18
2.3	Semántica	22
2.3.1	Asignaciones de variables	23
2.3.2	Interpretaciones	24
2.3.3	Semántica de las fórmulas	27
2.4	Cálculo	29
2.4.1	Axiomas y reglas del cálculo	29
2.4.2	Deducciones, teoremas y consecuencia sintáctica	32
2.5	Metalógica	33
2.5.1	Teorema de nominabilidad	33
2.5.2	Corrección del cálculo	34
2.5.3	Compleitud del cálculo	34
Capítulo 3	Teoría de tipos proposicional híbrida ecuacional (EHPTT)	37
3.1	Introducción	38
3.2	Lenguaje, estructuras y expresiones	38
3.2.1	Jerarquías de tipos	38
3.2.2	Jerarquías de dominios de tipos	39
3.2.3	Variables	41

3.2.4	Lenguaje y expresiones	42
3.2.5	Sustitución de una variable por una expresión en cualquier expresión	49
3.2.6	Estructuras	52
3.3	Semántica	53
3.3.1	Expresiones rígidas	58
3.4	Cálculo	61
3.4.1	Esquemas axiomáticos y reglas del cálculo de EHPTT	62
3.4.2	Reglas del cálculo	66
3.4.3	Deducciones	67
3.5	Metalógica	69
3.5.1	Nominabilidad en EHPTT	69
3.5.2	Relación con PTT	69
3.5.3	Corrección	70
3.5.4	Compleitud	70
Capítulo 4	Lógica multivariada de primer orden (MSL)	71
4.1	Introducción	71
4.1.1	Signaturas y estructuras	72
4.1.2	Alfabeto y expresiones	75
4.1.3	Semántica	82
4.1.4	Isomorfía entre estructuras	85
4.1.5	Cálculo deductivo	87
4.1.6	Algunos metateoremas del cálculo	92
4.1.7	Corrección	92
4.1.8	Compleitud	93
Capítulo 5	Traducción de EHPTT hacia MSL	95
5.1	Introducción	96
5.2	Signatura Σ^*	96
5.2.1	Bijección entre las variables de \mathcal{L}_{EHPTT} y variables de \mathcal{L}_{EHPTT}	100
5.2.2	Conversión de estructuras de \mathcal{L}_{EHPTT} en estructuras de $\mathcal{L}_{MSL}^{\Sigma^*}$	101
5.2.3	Caracterización de la clase \mathcal{S}^* de Σ^* -estructuras obtenidas mediante conversión	103
5.2.4	Bijección entre dominios de una estructura de EHPTT y universos de su estructura obtenidos mediante conversión	108
5.2.5	Conversión de asignaciones de variables e interpretaciones de \mathcal{L}_{EHPTT}	109
5.2.6	Relación de consecuencia semántica módulo \mathcal{S}^*	113

5.3	Traducción de \mathcal{L}_{EHPTT} a $\mathcal{L}_{MSL}^{\Sigma^*}$	114
5.3.1	Motivación de la traducción	114
5.4	Traducción de expresiones de \mathcal{L}_{EHPTT} a expresiones de $\mathcal{L}_{MSL}^{\Sigma^*}$	116
5.4.1	Traducción de las expresiones algebraicas que no son fórmulas de \mathcal{L}_{EHPTT}	116
5.4.2	Traducción de las expresiones proposicionales que no son fórmulas de \mathcal{L}_{EHPTT}	118
5.4.3	Traducción de las fórmulas de \mathcal{L}_{EHPTT}	119
5.5	Metalógica de la traducción de sentencias \mathcal{L}_{EHPTT} a sentencias de $\mathcal{L}_{MSL}^{\Sigma^*}$	121
5.6	Teorema de traducción	128
Capítulo 6	Conclusiones	129
Apéndice A	Detalles y pruebas de algunos resultados del Capítulo 2	135
Apéndice B	Detalles y pruebas de algunos resultados del Capítulo 3	153
Apéndice C	Detalles y pruebas de algunos resultados del Capítulo 4	159
C.1	Esquema de la demostración del teorema de completud de MSL 4.1.53	171
Apéndice D	Detalles y pruebas de algunos resultados del Capítulo 5	181
Bibliografía		187

capítulo 1

Introducción

Contenido:

1.1	Contexto y motivación	1
1.2	Objetivos	3
1.3	Metodología y estructura del trabajo	5

1.1 Contexto y motivación

En el marco del proyecto de investigación “Lógica intensional unificadora: Lógica, Lenguaje y Filosofía.” del que era investigadora principal Mara Manzano, la directora de esta tesis, se buscaba como objetivo, entre los varios que había, definir traducciones entre las lógicas que se habían tratado en proyectos anteriores y la lógica multivariada de primer orden (en adelante MSL). Entre estas lógicas desarrolladas recientemente, como por ejemplo la teoría de tipos híbrida (HTT), expuesta y desarrollada en Areces, Blackburn, Huertas, and Manzano (2011) y Areces, Blackburn, Huertas, and Manzano (2014), se encontraba la teoría de tipos proposicional híbrida ecuacional (en adelante EHPTT) desarrollada en los artículos Manzano, Martins, and Huertas (2014) y Manzano, Martins, and

⁰Proyecto I+D concedido por el Ministerio de Economía, Industria y Competitividad y con referencia FFI2017-82554-P.

Huertas (2019). Elegimos como finalidad de la tesis doctoral desarrollar una traducción de EHP^{TT} a MSL.

Ahora bien, ¿de qué manera traducir dicha lógica? ¿qué es una traducción? La respuesta a esta última pregunta no es única, ni mucho menos está establecida de una forma estándar, pero si nos fijamos en D'Ottaviano and de Araújo Feitosa (2020, pp.74-77) podemos decir que dadas dos lógicas $(\mathcal{L}_1, \models_1, \vdash_1)$ y $(\mathcal{L}_2, \models_2, \vdash_2)$, si $Exp(\mathcal{L}_1)$ y $Exp(\mathcal{L}_2)$ son sus respectivos conjuntos de expresiones, y $Form(\mathcal{L}_1)$, $Form(\mathcal{L}_2)$ sus respectivos conjuntos de fórmulas, una función de traducción, \mathcal{FT} , de \mathcal{L}_1 a \mathcal{L}_2 podría ser una función

$$\mathcal{FT}: Exp(\mathcal{L}_1) \longrightarrow Exp(\mathcal{L}_2)$$

tal que si $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq Form(\mathcal{L}_1)$, entonces

$$\mathcal{FT}(\Gamma) \cup \{\mathcal{FT}(\varphi)\} \subseteq Form(\mathcal{L}_2)$$

y, además, si ocurriera que

$$\Gamma \models_1 \varphi$$

y que

$$\Gamma \vdash_1 \varphi$$

entonces, también ocurriese que

$$\mathcal{FT}(\Gamma) \models_2 \mathcal{FT}(\varphi)$$

y que

$$\mathcal{FT}(\Gamma) \vdash_2 \mathcal{FT}(\varphi)$$

Este sería un caso de traducción en lógicas estrictamente proposicionales que conserva de una lógica a otra tanto la relación de consecuencia semántica, como el cálculo o relación de consecuencia sintáctica. Evidentemente esta puede ser una cantidad excesiva de requisitos para una función de traducción: podrían tomarse como suficientes una cantidad menor de los requisitos que acabamos de exponer. En particular, la consecuencia semántica de las traducciones opera en una clase restringida de modelos de la lógica \mathcal{L}_2 , pero no toda estructura de la lógica \mathcal{L}_2

está en consonancia con las estructuras de de la lógica \mathcal{L}_1 . Las equivalencias entre consecuencia semántica y deductiva entre ambas lógicas se circunscribe a esta clase restringida, que debe ser axiomatizada para que funcionen las equivalencias.

Ahora bien, además, tenemos que EHPTT es una lógica intensional¹, de hecho como lógica modal híbrida que es la denotación de cualquier expresión dependerá del mundo posible o estado en que se interprete. Así, que tomando como referencia las traducciones estándar de la lógica modal o de la modal híbrida que se desarrollan, por ejemplo, en van Benthem (2010, p.75), en Braüner (2022), en Blackburn and van Benthem (1988, pp.10-12) y en Manzano (1996, pp.263-351), y también fijándonos en el esquema de traducción en tres niveles que aparece en Manzano (1996) y Manzano and Aranda (2022) hemos diseñado una traducción de EHPTT a MSL buscando, al menos, una función entre expresiones de las dos lógicas y que en el caso particular de la traducción de las sentencias (fórmulas sin variables libres) de EHPTT podamos alcanzar los tres niveles de traducción que ya hemos citado.

1.2 Objetivos

Veamos los distintos objetivos principales que busca esta tesis:

Objetivo 1.2.1 (De traducción)

Traducir EHPTT hacia MSL buscando definir una función de traducción con dominio en el conjunto de expresiones de EHPTT y rango en el de expresiones de MSL bajo una determinada signatura. Además, conseguir, en particular, que la traducción del conjunto de fórmulas de EHPTT sea también fórmulas de MSL, y que el de sentencias, fórmulas sin variables libres, de EHPTT sea también un conjunto de sentencias de MSL. Por último, dado que el conjunto de expresiones de EHPTT, y también el de fórmulas, es infinito, buscar, dentro de este objetivo, definir una traducción construida de forma recursiva sobre la propia construcción de expresiones de EHPTT.

¹Para una definición precisa de lógica intensional puede consultarse Fitting (2022).

Objetivo 1.2.2 (De la metalógica)

Conseguir analizar la metalógica de EHPTT a través de la traducción de sus sentencias en los tres niveles de traducción que se plantean en Manzano (1996, pp.263-276) y Manzano and Aranda (2022):

- Un primer nivel con un “teorema de representación” en el que se establece la equivalencia entre la validez de una sentencia de EHPTT y la validez de la clausura universal de su traducción bajo una clase de estructura multivariadas axiomáticamente definidas. Esto es, la traducción es consecuencia semántica de dicha teoría en la lógica multivariada:

$$\models_{EHPTT} \varphi \text{ si y solo si } \Delta \models_{MSL} \forall Trans[u](\varphi)$$

para cada sentencia φ de *EHPTT*.

- Un segundo nivel con un “teorema principal” en el que se establece una equivalencia entre la consecuencia semántica en EHPTT y la consecuencia semántica de las traducciones usando la teoría axiomáticamente definida en el primer nivel. Esto es:

$$\Gamma \models_{EHPTT} \varphi \text{ si y solo si } Trans[u](\Gamma) \cup \Delta \models_{MSL} Trans[u](\varphi)$$

para cada sentencia φ y cada conjunto de sentencias Γ de *EHPTT*.

- Un tercer nivel paralelo al segundo, con un teorema que hemos denominado “de conservación del cálculo”, referente a la relación de consecuencia sintáctica, esto es, una equivalencia entre la deducibilidad en EHPTT y en MSL de las traducciones usando la teoría axiomáticamente definida en el primer orden. Esto es:

$$\Gamma \vdash_{EHPTT} \varphi \text{ si y solo si } Trans[u](\Gamma) \cup \Delta \vdash_{MSL} Trans[u](\varphi)$$

para cada sentencia φ y cada conjunto de sentencias Γ de *EHPTT*.

1.3 Metodología y estructura del trabajo

El texto se estructura en seis capítulos, en donde el primero es este de introducción en el que nos encontramos y el último es el de conclusiones. Para los capítulos centrales, 2, 3, 4 y 5 ofrecemos cuatro apéndices, uno por cada uno de estos capítulos, en los que hemos colocado las demostraciones de resultados, o esquemas de las demostraciones, más largas, menos importantes, más repetitivas o aquellas que simplemente hemos considerado que pueden interrumpir una lectura adecuada de este trabajo. Los cuatro capítulos centrales son de la siguiente manera:

- Capítulo 2: en primer lugar, era necesario presentar la lógica más importante de las que conforman EHPTT, esto es, la teoría de tipos proposicional (en adelante PTT) desarrollada en Henkin (1963). Los objetivos de este capítulo son el de actualizarla en cuanto a notación, con respecto al artículo original, y el de crear una concordancia entre la notación de EHPTT, proveniente de los artículos Manzano, Martins, and Huertas (2014) y Manzano et al. (2019), y MSL para evitar duplicidades en los símbolos a la hora de establecer la traducción en el penúltimo capítulo. Veremos, en este orden, las expresiones, la semántica, el cálculo y la metalógica de PTT.
- Capítulo 3: está dedicado en su totalidad a EHPTT. Ha sido necesario retocar algún elemento de la notación usada en los artículos Manzano, Martins, and Huertas (2014) y Manzano et al. (2019), pero en su mayoría se ha respetado en su totalidad, ya que es en estos artículos en donde se define la lógica que vamos a traducir. De forma paralela a como hacemos en el capítulo anterior, presentamos, en este orden, las expresiones, la semántica, el cálculo y la metalógica.
- Capítulo 4: está dedicado a la lógica de llegada de nuestra traducción, MSL. Al igual que con las anteriores hemos retocado algún elemento de la notación, y alguno estructural, usada en Manzano (1996), que usamos como referencia básica para esta lógica. Por lo demás la estructura del capítulo es similar a la de los dos anteriores: expresiones, semántica, cálculo y metalógica de MSL. Ahora bien, por concordancia con PTT y EHPTT, en MSL, hemos cambiado el cálculo de secuentes que aparece en Manzano (1996, pp.241-244)

por un cálculo estilo Hilbert, dotándola además de nuevas demostraciones de corrección y completud.

- Capítulo 5: es el que contiene la totalidad de la traducción. En primer lugar definimos la signatura, denominada Σ^* , de MSL en la que están las expresiones traducidas. Seguidamente, definiremos la conversión de cualquier estructura de \mathcal{L}_{EHPTT} en una Σ^* -estructura de MSL para, a continuación caracterizar axiomáticamente la clase, denotada por \mathcal{S}^* , de todas las Σ^* -estructuras obtenidas por conversión de otra de \mathcal{L}_{EHPTT} . A través de una conversión de asignaciones de variables y, combinando ambas conversiones, definiremos una función de correspondencia entre interpretaciones de ambas lógicas. A continuación, presentamos una familia de funciones de traducción intensionales. Para construir esta última familia de traducciones separaremos las expresiones de EHPTT en conjuntos disjuntos: expresiones algebraicas, expresiones proposicionales que no fórmulas y fórmulas. Al final del capítulo vemos la metalógica de EHPTT a través del comportamiento de la función traducción restringida a las sentencias de esta. Por último, presentaremos un teorema recopilatorio que nos muestra en qué condiciones la denotación de una expresión que no es una fórmula coincide con la de su traducción y, en caso de ser una fórmula, cuando la interpretación esta es verdadera en EHPTT si y solo si su traducción lo es en MSL.

- En el primer nivel, y como corolario del teorema 5.5.2, un teorema que nos da una condición de equivalencia entre la validez de una sentencia de \mathcal{L}_{MSL} y la validez, no ya de la clausura de su traducción como esperábamos en el esquema establecido en Manzano (1996, pp.263-276), sino de la traducción misma usando los axiomas de Ω_{S^*} , esto es:

Para cada $\mathcal{J} = (\mathcal{B}, g)$, cada $A_t \in Sent(\mathcal{L}_{EHPTT})$ y cada $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, M_g^{Conv(\mathcal{B})}) \in \Theta(\mathcal{J})$, tenemos que

$$\models_{EHPTT} A_t \text{ si y solo si } \Omega_{S^*} \models_{MSL} Trans[w](A_t)$$

para cada $w \in W$.

- En el segundo nivel, a través del teorema 5.5.3, hemos establecido una condición de equivalencia entre la consecuencia semántica de un conjunto de sentencias y una sentencia, y la consecuencia semántica de la traducción del conjunto de sentencias y la traducción de la sentencia usando los axiomas de Ω_{S^*} , esto es:

Para cada $\Gamma \subseteq Sent(\mathcal{L}_{EHPTT})$ y cada $A_t \in Sent(\mathcal{L}_{EHPTT})$ ocurre que

$$\Gamma \models_{EHPTT} A_t \text{ si y solo si } Trans[w](\Gamma) \cup \Omega_{S^*} \models_{MSL} Trans[w](A_t)$$

para cada $w \in W$.

- Por último, en un tercer nivel, a través del teorema 5.5.5, una condición similar a la del nivel segundo, pero referente al cálculo o relación de consecuencia sintáctica, usando los axiomas de Ω_{S^*} , esto es:

Para cada $\Gamma \subseteq Sent(\mathcal{L}_{EHPTT})$ y cada $A_t \in Sent(\mathcal{L}_{EHPTT})$ ocurre que

$$\Gamma \vdash_{EHPTT} A_t \text{ si y solo si } Trans[w](\Gamma) \cup \Omega_{S^*} \vdash_{MSL} Trans[w](A_t)$$

para cada $w \in W$.

Además, más allá de este objetivo, hemos demostrado la compacidad de $EHPTT$ en el teorema 5.5.4 y hemos formulado el teorema recopilatorio 5.6.1 de traducción que nos garantiza la igualdad entre la interpretación de cualquier expresión de \mathcal{L}_{EHPTT} que no sea una fórmula, y la interpretación de su traducción y, además, para las fórmulas amplía el teorema débil de representación 5.5.2, es

decir, nos dice bajo qué condiciones una fórmula de EHPTT será verdadera si y solo si lo es su traducción.

Así pues, podemos concluir que hemos conseguido alcanzar los tres niveles que expusimos en el objetivo 1.2.2 y que nos garantizan que bajo una signatura determinada y una clase axiomatizada de estructuras de dicha signatura sí se cumple la conservación de las relaciones de consecuencia semántica y sintáctica módulo una teoría axiomatizada.

Por último, resaltamos que este trabajo añade una nueva lógica, EHPTT, a aquellas que han sido traducidas hasta ahora a MSL buscando en esta una lógica marco¹. Es decir, que las propiedades de MSL, tales como compacidad, completud,.. puedan ser trasladadas a la lógica traducida, y que los teoremas de esta última puedan ser probados por un demostrador automático de teoremas. Así, basta el estudio de la teoría de modelos de MSL para saber de las propiedades de otras lógicas distintas, e incluso para poder llegar a establecer una comparación entre ellas haciendo la perspectiva que da verlas como teorías de MSL.

¹Por ejemplo, pueden consultarse las traducciones de la lógica de segundo orden en Manzano (1996, pp.277-288), de la lógica modal proposicional en Manzano (1996, pp.312-327), de la lógica modal de primer orden en Manzano (1996, pp.312-327), de la lógica dinámica proposicional Manzano (1996, pp.342-351),...

Bibliografía

- Andrews, P. B. (1963). A reduction of the axioms for the theory of propositional types. *Fundamenta Mathematicae*, 52, 345-350.
- Andrews, P. B. (1986). An introduction to mathematical logic and type theory: To truth through proof. Academic Press.
- Andrews, P. B. (2014). A Bit of History Related to Logic Based on Equality. In M. Manzano, S. Idikó, & E. Alonso (Eds.), *The life and work of leon henkin*. Birkhäuser.
- Areces, C., Blackburn, P., Huertas, A., & Manzano, M. (2011). Hybrid type theory: A quartet in four movements. *Principia: An International Journal of Epistemology*, 15(2), 225. doi: 10.5007/1808-1711.2011v15n2p225
- Areces, C., Blackburn, P., Huertas, A., & Manzano, M. (2014). Completeness in hybrid type theory. *Journal of Philosophical Logic*, 43(2/3), 209-238.
- Barbosa, L. S., Martins, M. A., & Carreteiro, M. (2014). A hilbert-style axiomatisation for equational hybrid logic. *Journal of Logic, Language, and Information*, 23(1), 31-52.
- Blackburn, P., & Marx, M. (2002). Tableaux for quantified hybrid logic. In U. Egly & C. G. Fermüller (Eds.), *Automated reasoning with analytic tableaux and related methods* (p. 38-52). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.
- Blackburn, P., & van Benthem, J. (1988). Modal logic: A semantic perspective. *Ethics*, 98, 501-517. doi: 10.1016/s1570-2464(07)80004-8
- Boolos, G. S., Burgess, J. P., & Jeffrey, R. C. (2007). *Computability and logic* (5th ed.). Cambridge University Press. doi: 10.1017/CBO9780511804076
- Braüner, T. (2022). Hybrid Logic. In E. N. Zalta & U. Nodelman (Eds.), *The Stanford encyclopedia of philosophy* (Winter 2022 ed.). Metaphysics Research Lab, Stanford University.
<https://plato.stanford.edu/archives/win2022/entries/logic-hybrid/>.
- Carnielli, W. A., & D'Ottaviano, I. M. (1997). Translations between logical systems: A manifesto. *Logique et Analyse*, 40(157), 67-81.
- Church, A. (1940). A formulation of the simple theory of types. *The Journal of Symbolic Logic*, 5(2), 56-68.
- D'Ottaviano, I. M. L., & de Araújo Feitosa, H. (2020). Translations between logics: A

- survey. In G. M. Mras, P. Weingartner, & B. Ritter (Eds.), *Philosophy of logic and mathematics. proceedings of the 41st international ludwig wittgenstein symposium* (p. 71-90). Berlin, Boston: De Gruyter.
- Enderton, H. B. (1972). *A mathematical introduction to logic*. New York Academic Press.
- Fitting, M. (2022). Intensional Logic. In E. N. Zalta & U. Nodelman (Eds.), *The Stanford encyclopedia of philosophy* (Winter 2022 ed.). Metaphysics Research Lab, Stanford University. <https://plato.stanford.edu/archives/win2022/entries/logic-intensional/>.
- Garson, J. (2023). Modal Logic. In E. N. Zalta & U. Nodelman (Eds.), *The Stanford encyclopedia of philosophy* (Spring 2023 ed.). Metaphysics Research Lab, Stanford University. <https://plato.stanford.edu/archives/spr2023/entries/logic-modal/>.
- Grzegorzczak, A. (1955). The systems of lesniewski in relation to contemporary logical research. *Studia Logica*, 3(2), 56-68.
- Henkin, L. (n.d.). Identity as a logical primitive. *Philosophia*, 5((1-2)), 31-45.
- Henkin, L. (1949). The completeness of the first order functional calculus. *The Journal of Symbolic Logic*, 14, 159-166.
- Henkin, L. (1950). Completeness in the theory of types. *The Journal of Symbolic Logic*, 15(2), 81-91.
- Henkin, L. (1963). A theory of propositional types. *Fundamenta Mathematicae*, 52, 323-344.
- Henkin, L. (1964). Errata to the paper “a theory of propositional types”. *Fundamenta Mathematicae*, 53, 119.
- Kushida, H., & Okada, M. (2007). A proof-theoretic study of the correspondence of hybrid logic and classical logic. *Journal of Logic, Language, and Information*, 16(1), 35-61.
- Manzano, M. (1996). *Extensions of first order logic*. Cambridge University Press.
- Manzano, M., & Aranda, V. (2022). Many-Sorted Logic. In E. N. Zalta & U. Nodelman (Eds.), *The Stanford encyclopedia of philosophy* (Winter 2022 ed.). Metaphysics Research Lab, Stanford University. <https://plato.stanford.edu/archives/win2022/entries/logic-many-sorted/>.
- Manzano, M., Idikó, S., & Alonso, E. (Eds.). (2014). *The Life and Work of Leon Henkin*. Birkhäuser.
- Manzano, M., Martins, M., & Huertas, A. (2014). A semantics for equational hybrid propositional type theory. *Bulletin of the Section of Logic*, 43, 121-138.
- Manzano, M., Martins, M., & Huertas, A. (2019). Completeness in equational hybrid propositional type theory. *Studia Logica*, 107, 1159-1198.

- Manzano, M., & Moreno, M. C. (2017). Identity, equality, nameability and completeness. *Bulletin of the Section of Logic*, 46(3/4).
- Manzano, M., & Moreno, M. C. (2018). Identity, equality, nameability and completeness. part ii. *Bulletin of the Section of Logic*, 47(3).
- Mceldowney, P. A. (2020). On morita equivalence and interpretability. *The Review of Symbolic Logic*, 13(2), 388-415.
- Meinke, K., & Tucker, J. V. (1993). *Many-sorted logic and its applications* (K. Meinke & J. V. Tucker, Eds.).
- Monk, J. D. (1976). *Mathematical logic*. Springer.
- Project, O. L. (2022). *An open mathematical introduction to logic*. Retrieved from <https://builds.openlogicproject.org/courses/enderton/open-logic-enderton.pdf>
- Van Benthem, J. (1984). Correspondence theory. In D. Gabbay & F. Guentner (Eds.), *Handbook of philosophical logic: Volume ii: Extensions of classical logic* (p. 167-247). Dordrecht: Springer Netherlands.
- van Benthem, J. (2010). *Modal logic for open minds*. Stanford, CA, USA: Center for the Study of Language and Inf.

