



**VNiVERSIDAD  
D SALAMANCA**

CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

**BIPLOT DE DATOS COMPOSICIONALES, UNA NUEVA  
HERRAMIENTA ESTADÍSTICA PARA EL ESTUDIO DE TEST  
PSICOLÓGICOS: APLICACIÓN AL CUESTIONARIO DE  
BIENESTAR DE CAROL RYFF.**

Departamento de Estadística.

Tesis Doctoral en Estadística Multivariante Aplicada.

**María Cortés Rodríguez**

**Directoras:**

Dra. María Purificación Galindo Villardón

Dra. Mercedes Sánchez Barba

Salamanca, 2023



**BIPLOT DE DATOS COMPOSICIONALES, UNA NUEVA  
HERRAMIENTA ESTADÍSTICA PARA EL ESTUDIO DE TEST  
PSICOLÓGICOS: APLICACIÓN AL CUESTIONARIO DE  
BIENESTAR DE CAROL RYFF.**



Universidad de Salamanca  
Departamento de Estadística

Memoria para optar al **Grado de Doctor,**  
**por el Departamento de Estadística de la**  
**Universidad de Salamanca,** presenta:

María Cortés Rodríguez

Salamanca, 2023



**DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA**

---

DIRECTORAS:

**DRA. MARIA PURIFICACIÓN GALINDO VILLARDÓN**

PROFESORA CATEDRÁTICA DEL DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA DE LA  
UNIVERSIDAD DE SALAMANCA.

**DRA. MERCEDES SÁNCHEZ BARBA**

PROFESORA TITULAR DEL DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA DE LA  
UNIVERSIDAD DE SALAMANCA

CERTIFICAN:

Que Doña **María Cortés Rodríguez**, ha realizado en el Departamento de Estadística de la Universidad de Salamanca, bajo su dirección, el trabajo que para optar al grado de Doctor, presente con el título: "Biplot De Datos Composicionales, Una Nueva Herramienta Estadística Para El Estudio De Test Psicológicos: Aplicación Al Cuestionario De Bienestar De Carol Ryff" y para que conste, firman el presente certificado en Salamanca, España,

6 de Noviembre de 2023.

---

**DRA. MARIA PURIFICACIÓN  
GALINDO VILLARDÓN**

---

**DRA. MERCEDES SÁNCHEZ  
BARBA**



*"Y la vida siguió, como siguen las cosas  
que no tienen mucho sentido"*

Joaquín Sabina, 1999  
(Y nos dieron las diez)



A mi Madre.

A mis hijas Lola y Abril.

A los Caireles, las Pelusas y los Jásteres.

Al Camarero de la Imprenta, el de arriba.



# ÍNDICE

<b>INTRODUCCIÓN .....</b>	<b>1</b>
Contexto y justificación.....	2
Pregunta de investigación .....	3
Estructura de la tesis.....	5
<b>CAPÍTULO 1: EL BIENESTAR.....</b>	<b>7</b>
1.1.-Comienzos Del Estudio Del Bienestar .....	8
1.2.-Introducción Al Bienestar Psicológico .....	14
1.3.-El Bienestar Psicologico Desde La Perspectiva De Carol Ryff	16
1.4.-Escala De Medida Del Bienestar .....	18
1.5.-La Escala De Bienestar Psicológico De Carol Ryff. ....	19
1.6.-La Escala De Carol Ryff A Lo Largo Del Tiempo Y En Diferentes Países. Validaciones. ....	20
1.7.-La Escala De Bienestar Psicológico De Carol Ryff En España	45
<b>CAPITULO 2: OBJETIVOS.....</b>	<b>47</b>
<b>CAPITULO 3: PROPUESTA ALTERNATIVA DEL CUESTIONARIO DE BIENESTAR PSICOLÓGICO: REDUCCIÓN Y VALIDACIÓN ..</b>	<b>49</b>
3.1.-Herramientas Estadísticas Para La Validacion De Instrumentos De Medida .....	50
3.1.1.-La Teoría Clásica De Los Test .....	50
3.1.2.-La Teoría De Respuesta Al Ítem.....	70
3.2.-Los Test Psicológicos .....	85
3.3.-Material .....	89
3.4.-Resultados .....	90
3.4.1.-Exploración De La Estructura Factorial.....	90
3.4.2.-Análisis de fiabilidad .....	98
3.4.3.-Teoría De Respuesta El Ítem: Función De Información ..	104

3.4.4.-Resumen De Los Resultados Presentados Hasta El Momento Por Dimensiones .....	118
3.4.5.-Reducción .....	131
<b>CAPITULO 4: PROPUESTA DESDE LA PERSPECTIVA DE ANÁLISIS DE DATOS COMPOSICIONALES DEL ESTUDIO DEL BIENESTAR PSICOLÓGICO .....</b>	<b>137</b>
4.1.-Los Datos Composicionales.....	138
4.2.-Definiciones .....	139
4.3.-Problemática De Los Datos Composicionales .....	142
4.4.-Geometría.....	148
4.5.-Transformaciones Del Simplex En El Espacio Euclídeo Ordinario: Transformaciones Log-Cociente .....	152
4.6.-Centros y variabilidad .....	156
4.7.-Análisis De Datos Composicionales .....	159
<b>4.7.1.-Biplot de Variación Relativa .....</b>	<b>166</b>
4.7.2.-Datos Composicionales En Psicología.....	176
4.8.-Material .....	178
4.9.-Resultados .....	179
4.9.1-Biplot de datos composicionales .....	179
4.9.2.-Ratios De Posición .....	185
4.9.3.-Propuesta de un indicador general de bienestar psicológico subjetivo (IGBPS). .....	193
<b>CONCLUSIONES .....</b>	<b>195</b>
<b>REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>199</b>



# **INTRODUCCIÓN**

## CONTEXTO Y JUSTIFICACIÓN

El bienestar psicológico es un constructo multidimensional que abarca diversos aspectos de la experiencia humana, incluyendo la autoaceptación, autonomía, relaciones positivas con otros, dominio del entorno, propósito en la vida y crecimiento personal (Ryff, 1989). Evaluar de manera precisa este concepto es esencial para comprender y promover la salud mental y el desarrollo personal. Para ello el instrumento más usado es el cuestionario de Bienestar Psicológico desarrollado por Carol Ryff en 1989.

La versión más extensa del cuestionario, compuesta por 84 ítems, ha sido ampliamente utilizada en diversas investigaciones. Sin embargo, es esencial adaptarla a la población española, asegurándonos de seleccionar los ítems que posean las mejores propiedades psicométricas.

El propósito de esta adaptación radica en maximizar la información que proporciona la escala, al tiempo que se minimiza el número de ítems necesarios para su administración. La selección de ítems óptimos se llevará a cabo mediante el empleo de técnicas provenientes tanto de la Teoría Clásica de los Test (TCT), como de la Teoría de Respuesta al Ítem (TRI). Esta combinación de enfoques nos permitirá obtener una versión reducida del cuestionario que sea psicométricamente sólida y culturalmente relevante para la población española.

Adicionalmente, para enriquecer el análisis de los datos y proporcionar una perspectiva más completa, se aplicarán técnicas específicas para el análisis de datos composicionales. Este enfoque estadístico es novedoso en el contexto de los test psicológicos en general, ya que en la literatura no se ha encontrado que estos datos se trabajen como composicionales, sin embargo, es particularmente pertinente para evaluar los datos de variables psicológicas ya que su naturaleza multidimensional hace que trabajarlos como vectores composicionales sea adecuado. En concreto, en el bienestar psicológico nos va a aportar una

visión de conjunto, permitiendo una comprensión más holística y equilibrada de las dimensiones que lo componen.

## PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

La evaluación del bienestar psicológico es un componente fundamental en la comprensión y promoción de la salud mental y el desarrollo humano. Sin embargo, la adaptación y validación de instrumentos de medición para contextos culturales específicos sigue siendo un desafío significativo en la investigación psicométrica.

En el caso del cuestionario de bienestar psicológico de Carol Ryff, la versión original de 84 ítems ha demostrado ser una herramienta valiosa en la evaluación de aspectos clave del bienestar. No obstante, su aplicación directa en la población española presenta desafíos relacionados con la adecuación cultural y lingüística, así como con la necesidad de una medida más ágil y específicamente adaptada a este contexto.

Se han hecho distintas aproximaciones a la reducción de este instrumento de medida, siendo la más utilizada la de Diaz et al. (2006) de 29 ítems, sin embargo, esta reducción no parte de un número significativamente grande de ítems, sino de una versión reducida previa de 39 ítems (van Dierendonk, 2005), llevada a cabo en Holanda.

La pregunta central de esta investigación surge de la necesidad de llevar a cabo una evaluación psicométrica exhaustiva y una posterior reducción del cuestionario de bienestar psicológico de Carol Ryff, para adaptarlo a las particularidades de la población española en estudiantes universitarios. Lo que implica seleccionar los ítems más relevantes y fiables.

Por lo tanto, la pregunta de investigación se formula de la siguiente manera:

**¿Cómo podemos adaptar y reducir de manera efectiva el cuestionario de bienestar psicológico de Carol Ryff, originalmente compuesto por 84 ítems, para que sea una herramienta validada y culturalmente pertinente en el contexto de la población española universitaria, manteniendo al mismo tiempo la precisión y relevancia psicométrica del instrumento?**

Esta pregunta guiará la metodología y el análisis en el proceso de evaluación, selección y validación de ítems, permitiendo así la creación de una versión adaptada y confiable del cuestionario que sirva como una herramienta valiosa en la medición del bienestar psicológico en la población española.

Por otro lado, nos planteamos una vez reducido el cuestionario, aportar un nuevo análisis a los datos de test psicológicos desde una perspectiva del análisis de datos composicionales.

El análisis de datos composicionales emerge como una herramienta esencial para comprender la riqueza y complejidad de los datos cuando trabajamos con proporciones ya que no se puede trabajar con ellos desde la geometría euclídea. Sin embargo, la aplicación efectiva de esta metodología en el contexto específico de la interpretación de datos de test psicológicos representa un desafío metodológico significativo.

La pregunta central que orienta esta etapa de la investigación se centra en:

**¿Cómo podemos interpretar y contextualizar los perfiles de bienestar psicológico, surgidos del análisis de datos composicionales, de manera que proporcionen una comprensión profunda y equilibrada de las distintas dimensiones del bienestar**

## **psicológico en la población española universitaria, y cómo estos hallazgos contribuyen a la práctica de los profesionales de la salud?**

Esta interrogante subraya la necesidad de no solo realizar el análisis composicional, sino también de traducir sus resultados en conocimientos que los profesionales de la salud que trabajan con esta variable puedan utilizar. Se busca no solo comprender la estructura relativa del bienestar, sino también utilizar esta comprensión para guiar la práctica clínica.

Esta pregunta de investigación servirá como marco orientador para la interpretación y contextualización de los resultados provenientes del análisis de datos composicionales, y proporcionará una base sólida para la toma de decisiones informadas en el contexto específico de la población española universitaria.

### **ESTRUCTURA DE LA TESIS**

En primer lugar, abordaremos un capítulo teórico en el que se hará un recorrido por el concepto del bienestar, desde sus orígenes hasta el momento actual, resaltando la importancia del constructo y de contar con una herramienta de medida adecuada, fiable y válida y que esté adaptada al contexto en el que se va a trabajar. En concreto, hablaremos del cuestionario de bienestar psicológico de Carol Ryff (1989) y de su evolución y transformación a lo largo del tiempo y de diferentes países, y en concreto en España, analizando la versión más utilizada en la actualidad (Díaz et al. 2006) y las diferentes áreas en las que se trabaja con este cuestionario.

En el capítulo 2, abordaremos los objetivos de la investigación, que van a ser los que van a guiar el trabajo.

En el capítulo 3, se plantea una alternativa al cuestionario de bienestar psicológico en su versión en España. Para ello, primero se hará una revisión por las técnicas utilizadas para la validación y reducción del cuestionario, enmarcadas tanto en la Teoría Clásica de los Test, como en la

Teoría de Respuesta al ítem. A continuación, se presenta el material con el que se va a trabajar, y por último un apartado de resultados, en el que se concluye con una nueva propuesta reducida del cuestionario de bienestar psicológico de la que se aportan también los índices de fiabilidad y validez.

En el capítulo 4, con la propuesta de cuestionario ya realizada, se hace una nueva propuesta de interpretación de datos desde la perspectiva del análisis de datos composicionales. En primer lugar, se hace una introducción al análisis de datos composicionales, su geometría y la transformación en el simplex, y a continuación se trata sobre el biplot de datos composicionales, y la interpretación extra que aporta frente a los biplot de datos directos. Después se aporta información sobre el apartado de material, y por último se abordan los resultados. En el apartado de resultados se analizan diferentes posibles interpretaciones, una vez que hemos hecho la transformación a datos composicionales. Por un lado, se interpretarán las dimensiones como vectores de un biplot de Varianzas, por otro lado, se darán 2 ratios de posición, en uno de ellos, se interpretarán las puntuaciones de los sujetos con respecto a la media geométrica del grupo normativo, y en el otro, se interpretará con respecto a la media. Por último, se propondrá un índice de ajuste general del bienestar psicológico, con el que podremos valorar como de equilibradas son las puntuaciones de los sujetos.

Por último, aparece el apartado conclusiones en el que se comentan los resultados que hemos obtenido acompañándolos de las interpretaciones que hacemos de ellos.

# CAPÍTULO 1: EL BIENESTAR

## 1.1.-COMIENZOS DEL ESTUDIO DEL BIENESTAR

El bienestar es un constructo que ha sido ampliamente estudiado. A lo largo de las décadas, el concepto de bienestar ha experimentado una notable evolución, reflejando los cambios sociales, económicos y culturales que han marcado cada periodo. En las primeras décadas del siglo XX, el bienestar se asociaba predominantemente con la satisfacción de necesidades básicas y la ausencia de carencias materiales. Sin embargo, con el tiempo, esta noción fue ampliándose para abarcar dimensiones más complejas e intangibles, como la salud mental, la calidad de vida, y la realización personal. Durante las décadas de los años 60 y 70, el bienestar se vio influenciado por movimientos sociales que promovían la igualdad, la libertad y el empoderamiento individual, dando lugar a una concepción más holística que considera tanto el bienestar físico como el emocional y social. En las últimas décadas, el avance tecnológico y la globalización han introducido nuevos desafíos y oportunidades para el bienestar, exigiendo una comprensión actualizada que tome en cuenta la interconexión entre individuos y comunidades en un mundo cada vez más interdependiente.



- **1940-1950:** En la primera mitad del siglo XX, la psicología se enfocó principalmente en el estudio de los trastornos mentales y las patologías psicológicas, y el bienestar psicológico no fue un tema relevante en la investigación.

- **1950-1960:** Durante la década de 1950, la psicología comenzó a interesarse por el estudio del bienestar y la felicidad, especialmente a través de la investigación de Abraham Maslow(1953) sobre la jerarquía de necesidades humanas y su teoría de la autorrealización. Surge en esta década el Humanismo como respuesta a las corrientes predominantes de la época como el conductismo y el psicoanálisis. Los aspectos clave del movimiento humanista fueron el énfasis en la experiencia individual y personal y subjetiva de cada individuo. Se consideraba que cada persona tiene una realidad única y que su experiencia es fundamental para comprender su comportamiento y desarrollo. Otro de los aspectos



fundamentales era la creencia en el potencial humano para alcanzar la autorrealización. Sostenían que las personas tenían la capacidad de crecer y desarrollarse hacia su mejor versión. Por otro lado daban importancia a la libertad y la autonomía en la toma de decisiones sobre sus vidas. Además de Maslow, Rogers fue otra figura importante con su enfoque terapéutico que enfatizaba la empatía la aceptación y la autenticidad del terapeuta, empezando a sentar las bases de la psicología positiva.

- **1970-1980**: En la década de 1970, la psicología positiva comenzó a desarrollarse como una rama de la psicología que se enfocaba en el estudio del bienestar, la felicidad y los aspectos positivos de la experiencia humana. En este período surgieron algunos modelos teóricos del bienestar, como el de Diener y Ryan (1984) que definieron el bienestar subjetivo como una combinación de satisfacción con la vida, emociones positivas y falta de emociones negativas. El cambio de paradigma de esta etapa es fundamental ya que se abandona en gran medida el enfoque de los trastornos mentales para investigar los factores que contribuyen al bienestar. En primer lugar, el foco se puso en la importancia de la satisfacción con la vida y la experiencia de la felicidad, y surgieron estudios para comprender que factores contribuyen a la felicidad de las personas. Se exploraron dimensiones como la calidad de vida, la satisfacción con las relaciones y el sentido del propósito en la vida. Para poder investigar estas áreas, se desarrollaron instrumentos de medida específicos para poder cuantificar estas variables. Por lo tanto, seguían sentándose las bases de la psicología positiva que se desarrollaría en las siguientes décadas. En este momento, Martín Seligman, padre de la psicología positiva, ya estaba involucrado en el estudio del bienestar.

Por otro lado, en la década de los 70 se desarrolla también la Psicología de los flujos y Experiencia optima. Este concepto introducido por Mihaly Csikszentmihalyi (1971) está relacionado con la satisfacción que se produce cuando estamos inmersos de una manera total y profunda en una actividad, y que está estrechamente relacionado con el bienestar emocional y mental. En este estado perdemos la noción del tiempo, estando



completamente inmersos en lo que se está haciendo. Este estado de flujo contribuye a una mayor satisfacción con la vida, reducción del estrés, desarrollo de habilidades, mayor sentido de propósito y un mayor compromiso y concentración.

- **1980-1990:** durante esta década se consolidó el campo de la psicología del Desarrollo Positivo que se centra en el estudio del crecimiento la prosperidad y el florecimiento a lo largo de toda la vida. Esta corriente se distingue por su interés en el crecimiento y desarrollo continuo de las personas a lo largo de todas las etapas de la vida. Este enfoque complementa la comprensión tradicional de desarrollo que a menudo se centraba solamente en las etapas de la infancia y la adolescencia. En este sentido se llevaron a cabo estudios longitudinales y transversales para ver el crecimiento y la prosperidad de las personas a medida que envejecen y estudiaban el bienestar eh como una variable que podía ser sostenida en el tiempo. Es aquí cuando surge el estudio de factores facilitadores del desarrollo positivo en la vida como la resiliencia la adaptabilidad el establecimiento de metas y la capacidad de encontrar significado y propósito en diferentes etapas de la vida. La contribución principal que hacen es considerar el ciclo de vida completo desde la infancia hasta la vejez entendiendo el crecimiento y bienestar como procesos continuos que pueden influir positivamente en la calidad de vida a todas las edades.

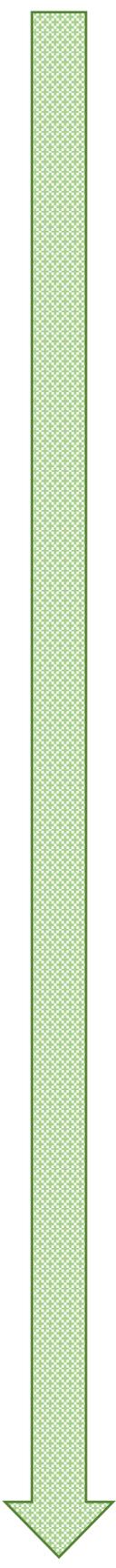
La psicología del desarrollo positivo de los años 80 proporcionó un contexto crucial para el desarrollo de los conceptos de bienestar subjetivo y psicológico, aunque estos términos surgieron en esta misma década estuvieron influenciados por el enfoque del crecimiento y la prosperidad a lo largo de toda la vida que promovía la psicología del desarrollo positivo. El bienestar subjetivo que incluye aspectos como la satisfacción con la vida la experiencia de emociones positivas se vio influenciado por la noción de prosperidad y crecimiento continuo que promovía la psicología del desarrollo positivo. Los estudios sobre bienestar subjetivo se nutrieron de la comprensión de que la felicidad y la satisfacción pueden ser aspectos perdurables en la vida de una persona a medida que esta atraviesa



diferentes etapas. El bienestar psicológico tal y como lo conceptualizó Carol Riff se benefició también de esta perspectiva proponiendo un modelo que enfatizaba 6 dimensiones clave para el bienestar psicológico que incluyen la autonomía el crecimiento personal y las relaciones positivas con nosotros, además de otras 3 dimensiones. Esta conceptualización resonó con la idea de que el desarrollo positivo es fundamental para el bienestar a lo largo de toda la vida.

- **1990-2000:** En los años 90 Carol Ryff continuó su trabajo en la conceptualización y medición del bienestar psicológico. Publicó investigaciones clave que refinaron y validaron su modelo de bienestar destacando la importancia de las 6 dimensiones propuestas. Durante esta década hubo un creciente interés en entender el bienestar desde una perspectiva multicultural y transcultural y se llevaron a cabo investigaciones que exploraron como las diferencias culturales influyen en la experiencia y la percepción del bienestar psicológico. A finales de los 90 la psicología positiva, un campo que se centra en el estudio de las fortalezas humanas y la vida y la búsqueda de una vida plena comenzó a ganar prominencia. Esta perspectiva completó el enfoque de bienestar psicológico de Carol Ryff expandiendo la comprensión del bienestar como un concepto más amplio que la ausencia de malestar. En esta década se llevaron a cabo un gran número de intervenciones y programas destinados a promover el bienestar psicológico se llevaron a cabo investigaciones sobre la efectividad de diversas intervenciones como la psicoterapia positiva y los programas de desarrollo de fortalezas. Además, se empezó a prestar más atención a la resiliencia y a la capacidad de adaptación como componentes clave del bienestar psicológico. Durante esta década se desarrollaron y validaron diversas escalas y cuestionarios para medir el bienestar psicológico lo que permitió una evaluación más precisa y detallada del constructo

- **2000-2010:** En la década de 2000, la psicología positiva continuó ganando relevancia. Se estableció como un campo distintivo de la psicología centrado en el estudio de las fortalezas las virtudes y los factores que contribuyen a una vida plena y significativa. Se crearon técnicas y enfoques



para promover la gratitud, el perdón, la resiliencia y otras fortalezas humanas. La investigación sobre bienestar se expandió para abarcar una variedad de contextos sociales incluyendo la educación, el trabajo, las organizaciones y la comunidad, y además se examinó como el bienestar impacta en el rendimiento académico, laboral y en la calidad de vida en diferentes entornos. En esta década el desarrollo de las Neurociencias llevó a que se realizaran estudios analizando las bases neurobiológicas de la felicidad y otras emociones positivas. Hubo una mayor atención a la felicidad y el sentido de la vida como componentes centrales del bienestar psicológico y se realizaron investigaciones para comprender las fuentes de la felicidad, comprender cómo las personas se encuentran significado y propósito en su vida. Además, la proliferación de la tecnología digital condujo a investigaciones sobre cómo la tecnología puede influir en el bienestar psicológico tanto positiva como negativamente.

- **2010-2020:** En los últimos años, la investigación del bienestar se ha expandido para incluir áreas como la psicología positiva organizacional, la salud positiva y el bienestar digital. También se ha enfocado en la implementación de intervenciones para promover el bienestar, como la terapia cognitivo-conductual y la terapia de aceptación y compromiso. Además, ha habido un interés por parte de los gobiernos y las organizaciones en medir y promover la felicidad y el bienestar de la población por lo que se han desarrollado índices de bienestar y estudios a nivel nacional. Las tecnologías han seguido jugando un papel importante con las redes sociales en la forma en la que las personas experimentan el bienestar y la conexión social. En el entorno laboral también se ha puesto interés en el desarrollo del bienestar, por lo tanto, se han incrementado el interés en promover y desarrollar programas para desarrollar el bienestar, afectando a aspectos como el estrés, la satisfacción laboral y el equilibrio entre el trabajo y la vida personal. En esta década se refleja una creciente conciencia y compromiso con el bienestar psicológico a nivel individual, comunitario y social.

El concepto de bienestar en psicología ha evolucionado desde la primera mitad del siglo XX, donde no era un tema relevante, hasta convertirse en un campo de investigación importante en la psicología actual. El modelo multidimensional de bienestar psicológico de Carol Ryff se ha convertido en uno de los más influyentes en el estudio del bienestar, y la investigación actual se enfoca en la identificación de factores que contribuyen al bienestar y la implementación de intervenciones para promoverlo.

## 1.2.-INTRODUCCIÓN AL BIENESTAR PSICOLÓGICO

El bienestar psicológico es un concepto fundamental en el campo de la psicología que se refiere al estado de salud mental y emocional de una persona. Implica sentirse bien consigo mismo, tener relaciones saludables con los demás, disfrutar de un sentido de propósito en la vida y tener la capacidad de hacer frente de manera efectiva a los desafíos y adversidades.

Bajo el enfoque de Carol Ryff, el bienestar psicológico se concibe como un constructo multidimensional compuesto por seis dimensiones principales. Estas dimensiones son fundamentales para evaluar y comprender el bienestar psicológico en su totalidad.

El bienestar psicológico es de vital importancia en la vida cotidiana, ya que tiene un impacto significativo en la calidad de vida de las personas. Un adecuado bienestar psicológico se relaciona con una mayor satisfacción con la vida, relaciones interpersonales más satisfactorias, mejor rendimiento académico y laboral, y una mayor resiliencia ante el estrés y los desafíos.

El bienestar psicológico se relaciona con una variedad de resultados positivos, como una mejor salud física y mental, una mayor satisfacción con la vida, relaciones más satisfactorias y un mejor desempeño laboral (Lyubomirsky et al., 2005). Además, el bienestar psicológico se asocia con una menor probabilidad de desarrollar trastornos mentales y una mayor resiliencia frente a los desafíos de la vida (Keyes, 2007)

El bienestar psicológico puede considerarse un tipo de bienestar eudaimónico (Waterman, 1993). El bienestar eudaimónico se refiere a la experiencia de vivir una vida significativa y satisfactoria a través del desarrollo de las fortalezas y virtudes personales. El enfoque de Ryff en el desarrollo de fortalezas y virtudes personales, como la autonomía, las relaciones positivas con los demás y el autocrecimiento, se alinea con esta definición de bienestar eudaimónico.

En contraste, el bienestar hedónico se enfoca en la experiencia de placer y la ausencia de dolor en la vida, y puede estar más relacionado con la felicidad a corto plazo. Aunque el bienestar hedónico y eudaimónico se pueden solapar, la perspectiva de Ryff se enfoca más en el bienestar eudaimónico, que se enfoca en el florecimiento personal y la realización de uno mismo a largo plazo.

### 1.3.-EL BIENESTAR PSICOLOGICO DESDE LA PERSPECTIVA DE CAROL RYFF

Carol Ryff, una investigadora destacada en el campo de la psicología positiva, ha realizado contribuciones significativas al estudio del bienestar psicológico. Su modelo teórico propone que el bienestar psicológico va más allá de la ausencia de enfermedad mental y se centra en el florecimiento y desarrollo pleno de la persona.

Este modelo identifica seis dimensiones clave del bienestar psicológico:

**Autoaceptación:** Esta dimensión se refiere a la capacidad de tener una actitud positiva y aceptación de uno mismo, incluyendo tanto las fortalezas como las debilidades. Implica el reconocimiento y la valoración de la propia identidad y la autoestima saludable.

**Relaciones positivas con los demás:** Esta dimensión se centra en la calidad de las relaciones interpersonales. Implica tener relaciones gratificantes y saludables con amigos, familiares y la comunidad en general. Las conexiones sociales positivas y el apoyo emocional son componentes esenciales de esta dimensión.

**Autonomía:** La autonomía se refiere a la capacidad de tomar decisiones y actuar de acuerdo con los propios valores y metas. Implica tener una sensación de independencia y autodirección, y no estar influenciado excesivamente por las expectativas o presiones externas.

**Dominio del entorno:** Esta dimensión se relaciona con la percepción de competencia y eficacia para enfrentar los desafíos y demandas del entorno. Incluye tener habilidades para resolver problemas, capacidad de adaptación y confianza en las propias capacidades para superar obstáculos.

**Propósito en la vida:** El propósito en la vida se refiere a tener un sentido de dirección y significado en la vida. Implica tener metas y motivaciones claras, y sentirse comprometido con algo más grande que uno mismo. Esta dimensión está asociada con la sensación de que la vida tiene un propósito y un sentido de trascendencia personal.

**Crecimiento personal:** Esta dimensión implica el deseo de buscar el autodesarrollo y la autorrealización a lo largo de la vida. Se refiere a estar abierto al cambio, aprender de las experiencias, buscar nuevas oportunidades de crecimiento y desarrollar el potencial personal.

Estas seis dimensiones, según el modelo de Carol Ryff, son fundamentales para evaluar y comprender el bienestar psicológico en su totalidad. Cada una de estas dimensiones puede influir en el equilibrio y la satisfacción general de una persona, y su interacción crea una experiencia de bienestar integral.

## 1.4.-ESCALAS DE MEDIDA DEL BIENESTAR

La medición del bienestar es un aspecto crucial en la investigación y la práctica de la psicología. Para evaluar de manera precisa y confiable el nivel de bienestar de una persona, se utilizan escalas de medida específicas. Estas escalas están diseñadas para capturar las diferentes dimensiones del bienestar y permitir una evaluación cuantitativa.

Existen diversas escalas de medida del bienestar, cada una de las cuales tiene sus propias características y enfoques. Algunas de las escalas más utilizadas incluyen:

**1. Escala de Bienestar Psicológico de Ryff (SPWB, por sus siglas en inglés):** Esta escala, desarrollada por Carol Ryff, se basa en el modelo de bienestar psicológico que mencionamos anteriormente. La SPWB evalúa las seis dimensiones clave del bienestar psicológico: autoaceptación, relaciones positivas con los demás, autonomía, dominio del entorno, propósito en la vida y crecimiento personal. Cada dimensión se mide mediante una serie de afirmaciones que los participantes califican en función de su grado de acuerdo.

**2. Escala de Bienestar Subjetivo (SWB, por sus siglas en inglés):** Esta escala se enfoca en la evaluación del bienestar subjetivo, que incluye aspectos como la satisfacción con la vida y la presencia de emociones positivas. La SWB se basa en la idea de que el bienestar psicológico se puede medir a través de la propia evaluación y percepción subjetiva de una persona sobre su vida y estado emocional.

**3. Índice de Bienestar Psicológico de Diener (PWB-I, por sus siglas en inglés):** Desarrollado por el reconocido psicólogo Ed Diener, este índice mide el bienestar psicológico a través de múltiples dimensiones, incluyendo el autoconcepto, el dominio personal, las relaciones positivas, el propósito en la vida y la autonomía.

## 1.5.-LA ESCALA DE BIENESTAR PSICOLÓGICO DE CAROL RYFF.

La Escala de Bienestar Psicológico de Carol Ryff (Ryff, 1989b), es una herramienta de evaluación diseñada para medir las 6 dimensiones del bienestar psicológico en individuos: Autonomía (AU), Relaciones Positivas con Otros (RP), Control del Entorno (CE), Propósito en la Vida (PV), Crecimiento Personal (CP), Autoaceptación (AA).

La escala inicial constaba de 120 ítems, 20 para cada una de las 6 dimensiones, aunque realmente esa versión se usó muy poco ya que aparecieron diferentes versiones abreviadas de 84, 56 y 18 ítems. Además de estas formas cortas, las validaciones que han ido haciéndose en diferentes países, han dado lugar a otras combinaciones de ítems y a diferentes extensiones de la escala. Actualmente en España la versión más utilizada es la de 29 ítems(Díaz et al., 2006).

La respuesta de los ítems es de categorías ordenadas con 6 opciones de respuesta que van desde el "totalmente en desacuerdo", al "totalmente de acuerdo", de tal manera que los participantes deben señalar el nivel de acuerdo con cada una de las afirmaciones de los ítems. En algunos países han utilizado otro formato de opciones de respuesta desde respuestas dicotómicas, hasta una escala de respuesta de 7 puntos.

## 1.6.-LA ESCALA DE CAROL RYFF A LO LARGO DEL TIEMPO Y EN DIFERENTES PAÍSES. VALIDACIONES.

A continuación, se muestra el desarrollo de la escala desde sus inicios.

**1989:** Aparece por primera vez la formulación de la escala de Ryff de Bienestar (Ryff, 1989b), y se definen las 6 dimensiones que la componen:

- Autoaceptación
- Autonomía
- Dominio del entorno
- Relaciones positivas con otras personas
- Crecimiento personal
- Propósito en la vida.

Para crear el cuestionario, en primer lugar, redactaron una definición operativa de cada una de las 6 dimensiones (Tabla 1), esto parte de la formulación teórica planteada previamente (Ryff, 1989a), de tal manera que explicitaron que significaba tener puntuaciones altas y bajas en cada una de las dimensiones, haciendo que cada una de ellas se entendiese como un continuo bipolar. Una vez claras las definiciones, se crearon 80 reactivos para cada dimensión, siendo la mitad para cada uno de los extremos de estos. Estos reactivos fueron formulados por tres escritores. Las instrucciones fueron que los ítems debían ser descriptivos a partir de las definiciones, que debían servir tanto para hombres como para mujeres y debían estar formulados para personas adultas de cualquier edad.

**Tabla 1:**

Definiciones del bienestar psicológico guiadas por la teoría

Dimensión	Puntuaciones altas	Puntuaciones bajas
<b>AUTONOMIA</b>	Es autodeterminado e independiente; capaz de resistir las presiones sociales para pensar y actuar de ciertas maneras; regula su comportamiento desde dentro; se evalúa a sí mismo según estándares personales.	Está preocupado por las expectativas y evaluaciones de los demás; depende de los juicios de los demás para tomar decisiones importantes; se conforma a las presiones sociales para pensar y actuar de ciertas maneras.
<b>CONTROL DEL ENTORNO</b>	Tiene un sentido de dominio y competencia en el manejo del entorno; controla una amplia gama de actividades externas; aprovecha eficazmente las oportunidades que le rodean; es capaz de elegir o crear contextos adecuados a sus necesidades y valores personales.	Tiene dificultades para manejar los asuntos cotidianos; se siente incapaz de cambiar o mejorar el contexto circundante; no es consciente de las oportunidades que le rodean; carece de un sentido de control sobre el mundo exterior.
<b>CRECIMIENTO PERSONAL</b>	Experimenta una sensación de desarrollo continuo; se percibe a sí mismo como creciendo y expandiéndose; está abierto a nuevas experiencias; tiene la sensación de estar realizando su potencial; observa mejoras en sí mismo y en su comportamiento con el tiempo; está cambiando de maneras que reflejan un mayor autoconocimiento y eficacia.	Experimenta una sensación de estancamiento personal; carece de una sensación de mejora o expansión con el tiempo; se siente aburrido y desinteresado en la vida; se percibe incapaz de desarrollar nuevas actitudes o comportamientos.
<b>RELACIONES POSITIVAS CON LOS OTROS</b>	Tiene relaciones cálidas, satisfactorias y confiables con los demás; se preocupa por el bienestar de los demás; es capaz de sentir empatía, afecto y cercanía; comprende el intercambio recíproco en las relaciones humanas.	Tiene pocas relaciones cercanas y confiables con los demás; le resulta difícil ser cálido, abierto y preocuparse por los demás; se siente aislado y frustrado en las relaciones interpersonales; no está dispuesto a hacer compromisos para mantener lazos importantes con los demás.
<b>PROPOSITO EN LA VIDA</b>	Tiene metas en la vida y un sentido de orientación; siente que hay un significado en la vida presente y pasada; posee creencias que dan propósito a la vida; tiene objetivos y propósitos para vivir.	Carece de un sentido de significado en la vida; tiene pocos objetivos o metas, falta de dirección; no percibe el propósito de la vida pasada; no posee perspectivas o creencias que otorguen sentido a la vida.
<b>AUTOACEPTACION</b>	Tiene una actitud positiva hacia sí mismo; reconoce y acepta múltiples aspectos de sí mismo, incluyendo las cualidades buenas y malas; se siente positivo acerca de su vida pasada.	Se siente insatisfecho consigo mismo; está decepcionado con lo que ha ocurrido en su vida pasada; se preocupa por ciertas cualidades personales; desea ser diferente de lo que es.

*Nota: Adaptada de Ryff 1989a*

Una vez redactados, fueron sometidos a varios procesos de cribado: En primer lugar, por el contenido teórico: por redundancia, ambigüedad, falta de ajuste con las definiciones, elementos que podrían pertenecer a varias dimensiones, definiciones extremas que no generarían grupos y si todos los aspectos de cada una de las definiciones estaban cubiertos. Con este proceso se quedaron con 32 ítems por dimensión, la mitad positivos, y la mitad negativos.

Para el segundo proceso de cribado, se administraron los ítems restantes a una muestra de población estadounidense de mediana edad, para que indicaran su grado de acuerdo con una escala de 6 puntos desde "muy en desacuerdo" a "muy de acuerdo", y se realizó un análisis estadístico de los mismos.

Los ítems que correlacionaban más alto con una escala que no fuese la suya propia, también fueron descartados.

En este punto, las dimensiones constaban de 20 ítems cada una (10 positivos y 10 negativos aproximadamente), y a partir de aquí se empezó a realizar el proceso de validación de escalas clásico, en el que se calculó la fiabilidad y validez obteniendo ajustes adecuados.

### **1992:**

- **EE.UU.:** (Ryff & Essex, 1992) Ryff y Essex publican un estudio en el que aplican una versión reducida de 14 ítems. Esta versión la consiguen quedándose con los ítems que mejor ajuste tienen con la escala total, con los coeficientes ítem-escala, con esto consiguen aumentar el Alpha de Cronbach de todas las dimensiones, y aun así, disminuir el número de ítems.

## 1995:

- **EE.UU.:** (Ryff & Keyes, 1995b) se realiza una encuesta a nivel nacional en los 48 estados de EE.UU. y para ello necesitan reducir la escala, por ello vuelven a reducir el cuestionario original, ahora con 3 ítems por dimensión, quedándose en total con 18 ítems. Para esta reducción, vuelven a basarse en principios teóricos, afirmando que, ya que todas las dimensiones son multifactoriales, se seleccionaron elementos de factores diferentes para maximizar la amplitud conceptual. En este estudio se encuentra que la fiabilidad de las dimensiones es muy baja (entre 0.13 y 0.46), probablemente por la poca cantidad de ítems, y que estos se han elegido para que sean diferentes entre sí, y así abarcar de una manera más completa cada dimensión. Se proponen diferentes modelos teóricos, y se estudia el ajuste de los datos limpios a los modelos. Se estudia el ajuste de: un único factor, un único factor con el efecto de los ítems negativos, dos factores, uno para los ítems negativos y otro para los positivos, 6 factores, uno para cada dimensión, y por último 6 factores con un factor de segundo orden que aglutine a todas las dimensiones. Como conclusión obtienen que el modelo que mejor se ajusta es el de 6 factores, basándose en el AGFI y el BIC. Apuntan que la correlación entre la escala de autoaceptación y dominio del ambiente es muy alta, y que podría indicar redundancias.

## 2001:

- **CANADÁ:** (Clarke et al., 2001) se hace la adaptación a población canadiense mayor (media de edad 76) de la escala de 18 ítems. Calculan la fiabilidad con el Alpha de Cronbach y la estructura factorial con un AFC, en este caso, proponen también diferentes modelos teóricos: modelos de dos factores en los que uno de los factores es una dimensión y el resto de los ítems la otra

dimensión. Esto lo hacen para todas las dimensiones. Además, prueban con el modelo de 6 dimensiones y con un modelo modificado de 6 dimensiones. Lo que encuentran es que el modelo que mejor ajuste consigue es el de 6 dimensiones, a pesar de que algunos ítems tienen malas cargas factoriales. Administran el test de forma oral

## 2002:

- **EE.UU:** (Keyes et al., 2002) empiezan a trabajar en una encuesta nacional en la que participa Carol Ryff, que van a ir replicando a lo largo de los años MIDUS (Midlife in the U.S), y en la que, entre otras escalas, se aplica la escala de PWB de 3 ítems por dimensión.
- **CANADÁ:** (Kafka & Kozma, 2002) Hacen una nueva validación de la escala de 14 ítems por dimensión. En primer lugar, hacen un AFE en el que con el criterio de los autovalores mayores que 1, se retienen 15 dimensiones, asique fuerzan el análisis a 6 dimensiones, y no les aparece un buen ajuste, los ítems se distribuyen por todas las dimensiones sin ningún criterio de contenido aparente.
- **SUECIA:** (Lindfors, 2002) En este caso hacen una traducción al sueco de la versión de 3 ítems por dimensión (Ryff & Keyes, 1995a), y calculan la fiabilidad a partir del Alpha de Cronbach, encontrando unos índices moderados. No hacen análisis factorial ni otras técnicas estadísticas con el objetivo de validar la escala, ya que no es el propósito del estudio.
- **FINLANDIA:** (Pulkkinen et al., 2002) Utilizan la escala de 18 ítems ((Ryff & Keyes, 1995a) pero no hacen una validación como tal, simplemente la traducen y la utilizan para su investigación. En 2021 se vuelve a utilizar referenciando a Pulkkinen.

## 2004:

- **TAILANDIA:** (Ingersoll-Dayton et al., 2004) En este caso, aunque parten de la conceptualización de partida de Ryff(1989b), sin embargo, hacen una adaptación cultural y crean nuevas dimensiones y nuevos ítems. Es decir, la toman como constructo teórico de partida, pero no usan la escala en sí.
- **JAPÓN:** (Kitamura et al., 2004), En Japón hacen una traducción de la versión de 84 ítems (Ryff & Essex, 1992) , pero en este caso las opciones de respuesta que proponen son si (1) y no (0) por lo que la puntuación máxima que se puede obtener en una dimensión es 14, y la mínima 0. Esto contrasta con la escala original, en las que las opciones de respuesta van de 1 a 6. La muestra con la que trabajan es de estudiantes universitarios japoneses. Realizan un AFE y consiguen un buen ajuste de los ítems a las 6 dimensiones propuestas. Sin embargo, los *indicadores* de fiabilidad calculados con el Alpha de Cronbach son moderados

## 2005:

- **HOLANDA:** (van Dierendonck, 2005) Esta validación es muy importante, ya que a partir de ella se realiza la validación española (Díaz et al., 2006), y a partir de ella la mayoría de las validaciones en español. Van Dierendonck parte de la versión de 14 ítems por dimensión(Ryff & Essex, 1992), y realiza análisis de la versión de 14, de 9 y de 3, y en cada una de las versiones comprueba los diferentes modelos teóricos para confirmarlos con un AFC. Propone el modelo de un único factor, de dos factores (positivo y negativo), de 5 factores, de 6 factores, de 5 factores y un factor de segundo orden, y de 6 factores y un factor de segundo orden. En todos los casos, el modelo teórico que mejor ajuste obtiene es el de 6 factores con un factor de segundo orden, y de todas las versiones, la que mejor ajuste obtiene es la

de 3 ítems, sin embargo, la de versión de tres ítems es la que peores valores de fiabilidad obtiene con el Alpha de Cronbach. Por lo tanto, lo que se propone es crear una nueva escala que tenga un número pequeño de ítems para encontrar una buena estructura factorial, y a la vez que sea suficientemente grande para obtener una buena fiabilidad. Para ello hacen una revisión de los ítems analizando la correlación ítem-total de dimensión, quedándose con los ítems que más correlacionan con cada dimensión, y que a la vez, tienen cargas factoriales pequeñas con el resto de dimensiones. De esta forma obtienen una versión con dimensiones compuestas por entre 6 y 8 ítems, planteando una nueva versión de 39 ítems. Esta versión es la primera que plantea un número diferente de ítems para cada dimensión

- **CHINA:** (Cheng & Chan, 2005) En su estudio proponen que la escala de 3 elementos por dimensión (Ryff & Keyes, 1995a), es demasiado corta, y es por eso que se produce un mal ajuste entre las dimensiones, por lo que añaden un ítem más por dimensión utilizando correlaciones, pero la fiabilidad obtenida es peor que con 3. Finalmente proponen una nueva escala con 4 ítems por dimensión, respetando solo algunos ítems de la escala de 3 original

## **2006:**

- **EE.UU.(SPRINGER):** (K. Springer & Hauser, 2006) Se lleva a cabo un estudio sobre la validez de constructo de las escalas de Ryff. Este estudio utiliza tres muestras de estudios previos desarrollados en la década de los 90: Wisconsin Longitudinal Study, National Survey of Families and Households II (NSFH II) y Midlife in the United States (MIDUS). La muestra de Wisconsin fue administrada por correo y solo contenía 6 de los 18 ítems (Ryff & Keyes, 1995a), la muestra de NSFH II y la de MIDUS utilizaron la misma escala de 18 ítems (Ryff & Keyes, 1995a). En la investigación aluden a la mala praxis en la validación de los

instrumentos, y concluyen que el bienestar no está compuesto de 6 dimensiones, ya que estas están altamente correlacionadas entre si, y proponen un modelo de una única dimensión.

- (Ryff & Singer, 2006) Ante esta crítica al modelo, unos días más tarde de la publicación de Springer y Hauser (2006), aparece una publicación por parte de Carol Ryff que titula "Best news yet on the six-factor model of well-being". En el artículo se contraargumenta a los ataques aportando evidencia de validaciones previas (Cheng & Chan, 2005; Clarke et al., 2001; Kafka & Kozma, 2002; Ryff & Keyes, 1995a; van Dierendonck, 2005), y concluyendo que el modelo de 6 dimensiones sigue siendo válido y que la crítica a utilizar el AFC para este constructo no es válida, no tiene ningún fundamento
- (K. W. Springer et al., 2006) A continuación, vuelve a responder Springer con el siguiente título: "Bad news indeed for Ryff's six-factor model of well-being" afirmando que en su primer artículo ellos demuestran con datos que las correlaciones entre 4 de las 6 dimensiones son tan altas, que no tiene sentido mantenerlas como factores separados, y que por tanto, el modelo de 6 dimensiones no es un modelo útil para medir bienestar. (Figura 1)

**Figura 1:**

Las tres publicaciones de Springer y Ryff en 2006. Se puede apreciar que se publican en páginas consecutivas del mismo número de la revista



Nota: extraído de (Ryff & Singer, 2006; K. Springer & Hauser, 2006; K. W. Springer et al., 2006)

- **U.K.:** (Abbott et al., 2006) En este estudio se hace una revisión previa de las validaciones publicadas hasta la fecha, (incluida la de EE.UU de 2006, (K. Springer & Hauser, 2006).) para aclarar lo

que han encontrado los diferentes autores hasta este momento. Ellos trabajan con una muestra de 1778 mujeres seleccionadas de un estudio anual de Reino Unido (Estudio Nacional de Desarrollo Infantil), cuyos datos se han recopilado desde la infancia. Estas mujeres tienen todas 52 años en el momento de responder la escala, la cual reciben por correo, y devuelven completada. Utilizan una escala de 42 ítems después de mantener conversaciones personales con Ryff. Para llevar a cabo la validación realizan AFC con diferentes modelos teóricos. Los modelos se basaron en diferentes combinaciones de tres componentes: número de factores de primer orden (1 o 6), factores de método (ninguno, positivo, negativo o ambos) y factores de segundo orden (presentes o ausentes). Concluyen que el mejor ajuste obtenido es para un modelo de 6 factores de primer orden, con factores de método positivo y negativo, y un factor de segundo orden que representa el bienestar psicológico en general. Añadir al análisis el factor de método positivo y negativo es lo que mejora el análisis. Proponen que el factor de segundo orden solo agrupe a 4 de las dimensiones: crecimiento personal, propósito en la vida, autoaceptación, dominio del ambiente, dejando la autonomía y las relaciones positivas como factores independientes

- **ESPAÑA:** (Díaz et al., 2006) Este estudio se realiza en colaboración con el autor de la validación holandesa (van Dierendonck, 2005), por lo que parten de los resultados obtenidos por él. En la versión holandesa de la escala, Van Dierendonck propone una escala de 39 ítems, y en esta investigación parten de esa versión. Traducen la escala al castellano y la aplican a una muestra de 467 con media de edad de 33 años (DT14). Estudian y analizan diferentes modelos teóricos: de un factor, de dos factores (ítems positivos y negativos), 5 factores, 6 factores, 5 factores y un factor de segundo orden, y 6 factores y un factor de segundo orden. Todos los modelos analizados con AFC muestran un ajuste poco

satisfactorio, por lo que proponen una nueva versión eliminando ítems. Los criterios que utilizan para eliminarlos fueron quedarse con los ítems con puntuaciones más altas en la correlación ítem-total, y presentar cargas factoriales bajas en el resto de dimensiones (misma estrategia que van Dierendonck, 2005). Se quedan con una versión de 29 ítems, repartidos en las 6 dimensiones con la que obtienen buen ajuste. Cada una de las dimensiones tiene entre 4 y 6 ítems. Vuelve a ser una versión en la que el número de ítems es diferente en cada dimensión igual que la de van Dierendonck (2005). No olvidemos que esta reducción parte de una reducción previa de la versión holandesa (van Dierendonck, 2005). Esta versión es de la que partirán la mayoría de validaciones en países hispanohablantes.

- **SUECIA:** (Lindfors et al., 2006) La autora de esta investigación tiene una publicación previa sobre la validación de la escala (Lindfors, 2002), en la que solamente realizan análisis de fiabilidad. En este caso analizan a trabajadores de sectores administrativos de edades comprendidas entre los 32 y los 58 años ( $n=1338$ ). Utilizan la escala de 18 ítems que usaron en el estudio anterior. En este caso añaden a los análisis un AFC con diferentes modelos teóricos, con el que concluyen que el modelo de 6 factores correlacionados es el que obtiene mejor ajuste.

## **2007:**

- **ESPAÑA:** (Triadó et al., 2007) Parten de la versión de 9 ítems por dimensión de Ryff, y la traducen al castellano. En este caso la muestra se recoge en centros para la tercera edad y está formada por 422 personas mayores de 65 años ( $M:74.2$ ,  $DT:7.6$ ). Se utiliza el formato entrevista para administrar los cuestionarios. Calcula la fiabilidad con Alpha de Cronbach obteniendo índices moderados, y un AFE, en el que el ajuste de los ítems a las dimensiones teóricas no es apropiado. Por último, realizan un AFC en el que prueban el ajuste de

diferentes modelos, y se concluyen que ninguno de los modelos tiene un ajuste aceptable. En este caso, la estructura de 6 factores no se replica en esta muestra de españoles mayores. Los autores proponen seguir haciendo estudios enfocándose en eliminar ítems problemáticos y con una muestra de edades diferentes.

## 2008:

- **ESPAÑA:** (Tomás Miguel et al., 2008) En este caso, vuelven a trabajar con adultos mayores (n=165, jubilados >65 años, entre 65 y 94 años). Trabajan con la escala de 54 ítems utilizada previamente en población española (*ESTUDIOS DE I+D+I*, n.d.). En este estudio se plantea una novedad respecto a estudios previos. Los ítems de cada dimensión (9 ítems) son agrupados de tres en tres en tres indicadores, de tal manera que se calcula la media de cada uno de los tres ítems que forman el indicador, y ese es el valor del indicador. Esta agrupación de ítems se hace a nivel teórico por la similitud entre los ítems, y a nivel estadístico agrupando los ítems que han demostrado unidimensionalidad en el AFE. Realizan AFC con diferentes modelos teóricos concluyendo que ninguno de ellos es adecuado en la muestra con la que trabajan
- **ESPAÑA Y COLOMBIA:** (van Dierendonck et al., 2008) Esta Investigación parte de la discusión de la literatura provocada por Springer y Ryff (Ryff & Singer, 2006; K. Springer & Hauser, 2006; K. W. Springer et al., 2006), y ponen a prueba todos los modelos teóricos publicados hasta el momento. Parten de la versión holandesa (van Dierendonck, 2005) de 39 ítems traducida al español, y cuentan con una muestra de origen español y colombiano (n. esp= 592, n. col= 327)(van Dierendonck et al., 2008). Los autores son los mismos de la versión holandesa y española(Díaz et al., 2006). En el AFC no encuentran respaldo para el modelo de tres factores de

Springer(K. Springer & Hauser, 2006), y si lo hacen para el modelo de 6 dimensiones. Los autores afirman que encontrar factores estrechamente correlacionados, no tiene porque significar que los factores son los mismos, y eliminando dimensiones, estamos perdiendo riqueza en los datos.

- **MÉXICO:** (Loera-Malvaez et al., 2008) En este trabajo se parte de la escala de 39 ítems (van Dierendonck, 2005) traducida al español (Díaz et al., 2006). La muestra está compuesta por 208 estudiantes de entre 14 y 18 años. Hacen un AFE con el que obtienen 4 factores, y eliminan 5 ítems quedándose solamente con 34. Analizan la fiabilidad con el Alpha de Cronbach obteniendo puntuaciones moderadas o altas para los cuatro factores.
- **TURQUIA:** (Akin, 2008) En esta ocasión se trabajó con la versión de 14 ítems por dimensión (Ryff & Essex, 1992), con el objetivo de validar su versión turca. Se obtuvieron dos muestras de universitarios (n1=1214, y n2=178) y una muestra de profesores de inglés (n=124) que se utilizaron para diferentes propósitos. Para estudiar la equivalencia del lenguaje, trabajo con la muestra de profesores, obteniendo unas altas correlaciones. Las muestras de estudiantes las utilizan para realizar estudios de fiabilidad con Alpha de Cronbach, y validez con AFC con los que obtienen buenos resultados, concluyendo que la versión turca del cuestionario de bienestar psicológico está formado por 6 dimensiones.

## 2009:

- **ITALIA:** (Sirigatti et al., 2009) Utilizan como muestra 602 adolescentes entre 13 y 18 años, y utilizan como instrumento la adaptación de la escala al italiano (Ruini et al., 2003) (no se incluye en el análisis por estar solamente en italiano) de 84 ítems. En este caso, seleccionan los 18 ítems (Ryff & Keyes, 1995a). Prueban con múltiples modelos teóricos realizando AFE y

AFC, y no pueden concluir que uno sea mejor que el resto, pero lo que aparece como claro es que el modelo teórico debe tener entre 5 o 6 factores de primer orden, y uno o dos de segundo orden, pero sin poder elegir uno de ellos.

- **AUSTRALIA:** (Burns & Machin, 2009) Trabajan con dos muestras, una de estudiantes universitarios (n=401), y una de profesores (n=679) con edades entre 30 y 55 años. En este caso trabajan con la versión de 9 ítems por dimensión, y realizan análisis factoriales exploratorios y confirmatorios, concluyendo que existen 3 factores: autonomía, relaciones positivas, y un factor que reúne los ítems del resto de dimensiones como mencionan algunos trabajos previos (Abbott et al., 2006). Además, los autores discuten la inclusión del factor "propósito en la vida", ya que consideran que no es un componente esencial del bienestar psicológico.
- **JAPÓN:** Parten de la versión previa japonesa (Kitamura et al., 2004). En este caso, las opciones de respuesta que utilizan son las originales (6 opciones) a diferencia del estudio de 2004 que utiliza solamente 2 opciones. En este caso se realizan AFC, que no se habían hecho en versiones japonesas hasta el momento, y obtienen que la estructura de 6 factores es adecuada con sus datos (Liu et al., 2009).

## **2010:**

- **ESPAÑA:** (Villar et al., 2010) En Este caso vuelven a trabajar con la versión de 54 ítems en adultos mayores españoles. Modifican la escala de respuesta reduciéndola a 4 puntos, desde "muy en desacuerdo" a "muy de acuerdo". Obtienen como resultado de la fiabilidad de la escala buenos índices, y también cuando realizan el AFC, que prueban con varios modelos teóricos, obtienen resultados aceptables, sin embargo, cuando realizan un AFE, no encuentran una solución factorial adecuada. Si no fijan el número de factores, llegan a obtener hasta 15, y si los fijan a 6

factores, los ítems no aparecen agrupados de la forma esperada. Por lo tanto, concluyen que en su población habría que seguir haciendo más investigación para aclarar los resultados obtenidos.

- **RUMANIA:** (Negovan, 2010) En este caso, aunque parten de los postulados teóricos de Ryff, crean una nueva escala en la que incluyen otros aspectos diferentes además de los propuestos por Ryff, por lo que no es una validación de la escala.
- **ESPAÑA:** (Tomas et al., 2010) parten de la versión de 54 ítems, y con ella analizan también la versión de 18, de 29 y de 39 ítems, de tal manera que prueban con todas ellas los diferentes modelos teóricos propuestos hasta ese momento con AFCs. Obtiene que la estructura factorial no es clara, aunque con la que mejor ajuste consiguen es con el modelo de 6 factores y un factor de método para los ítems negativos.
- **UK:** (Abbott et al., 2010) trabajan con la muestra de mujeres de 52 años con la que trabajaron previamente (Abbott et al., 2006), con la versión de 42 ítems recomendada por la autora del instrumento original. En este caso (Abbott et al., 2010) se hace un análisis factorial más profundo, en el que se utilizan métodos de análisis factorial ordinal para perfilar el rango efectivo de medición de las seis subescalas de PWB y un factor de bienestar general de segundo orden. Los parámetros se estiman utilizando métodos de mínimos cuadrados ponderados robustos (rWLS) que se basan únicamente en las asociaciones bivariadas entre los ítems. Los resultados sugieren que las PWB tienen una estructura factorial estable y que las subescalas tienen un rango efectivo de medición adecuado. Además, se encontró que el factor de bienestar general de segundo orden es un constructo válido y confiable.
- **PORTUGAL:** (Fernandes et al., 2010) Parten de una escala de 18 ítems validada previamente en población portuguesa (Novo et al., 1997), que no se incluye en el análisis por no estar disponible. El instrumento que utilizan tiene 18 ítems, pero no

son los mismos que la versión de 18 ítems de Ryff(Ryff & Keyes, 1995a). Calculan la fiabilidad con el Alpha de Cronbach y obtienen indicadores bajos, entre 0.27 y 0.5 y un mal ajuste con diferentes modelos teóricos para el AFC. En un segundo estudio, trabajan con la versión de Ryff de 18 ítems previamente validada en Portugal por Ferreira and Simoes (1999), y con ella obtienen también malos resultados, tanto en el estudio de la fiabilidad como en el de la estructura con el AFC. Por último, en un tercer estudio pasan la versión larga de 84 ítems. En este caso realizan un análisis de la escala y proponen una versión de 30 ítems basándose en los criterios de maximización psicométrica sugeridos por van Dierendonk. Con esta nueva versión propuesta obtienen resultados satisfactorios para la estructura de 6 dimensiones

- **ESPAÑA:** (Rodríguez-Carvajal et al., 2010) Los autores de la versión española de 29 ítems(Díaz et al., 2006), proponen en este caso añadir dos nuevas dimensiones al constructo de bienestar: vitalidad y recursos internos.

## **2012:**

- **IRÁN:** (Kalantarkousheh, 2012) Parten de la versión de 14 ítems por dimensión. Hacen una traducción y realizan análisis de fiabilidad y validez. Encuentran que, tras estos análisis preliminares, hay una cantidad importante de ítems que tienen pesos factoriales bajos y los eliminan. Se quedan con una versión de 28 ítems con 5 dimensiones: el dominio ambiental, el crecimiento personal, las relaciones positivas con los demás, la aceptación de uno mismo y el propósito en la vida. Por lo que eliminan la autoestima de su modelo. Con esta nueva estructura, los datos tampoco se ajustan del todo.
- **CHILE:** (Gallardo & Moyano-Díaz, 2012) Parten de la versión holandesa de 39 ítems(van Dierendonck, 2005), pero con la traducción de la versión española (Díaz et al., 2006). Hacen

varios AFC con diferentes modelos, y proponen una versión de 5 factores en la que aúnan las dimensiones de dominio del entorno y la de propósito en la vida. Aun así concluyen que el modelo que mejor se ajusta es el de 6 dimensiones, a pesar de que no es un ajuste perfecto y vuelven a poner de manifiesto el solapamiento y la intercorrelación entre las dimensiones.

- **CHILE:** (Veliz-Burgos, 2012) En este caso, utilizan también la versión de Holanda (van Dierendonck, 2005), traducida al castellano (Díaz et al., 2006). Analizan los datos realizando un análisis de fiabilidad mediante alfa de Cronbach, un AFE y un AFC, probando solamente el modelo de 6 factores. Obtienen resultados que interpretan como aceptables.
- **ARGENTINA:** (Rodriguez & Sebastianelli, 2012) En Argentina, parten de la versión de 29 ítems española (Díaz et al., 2006). Y realizan un AFE con el que concluyen que la escala tiene 6 dimensiones, aunque encuentran un par de ítems que no se ajustan al modelo

## 2013:

- **TAIWAN:** (Chiang et al., 2013) Parten de la versión de 14 ítems (Ryff & Keyes, 1995a). En este caso, en el artículo no tienen como objetivo principal validar la escala, si no ver como se relaciona el bienestar con las relaciones familiares en las personas mayores jubiladas en Taiwán. En primer lugar, traducen la escala a chino mandarín y realizan análisis de fiabilidad y AFC, concluyendo que la herramienta es adecuada para el tipo de población con el que trabajan.
- **CHILE:** (Vera-Villaruel et al., 2013) En este caso parten de la versión de 29 ítems en español (Díaz et al., 2006), y lo que tratan de ver en este artículo es si los diferentes grupos de edad se comportan diferente en cuanto a la validación de la escala. Trabajan con sujetos desde los 18 hasta los 90 años

agrupándolos en 4 grupos de edad. Tras realizar los análisis, concluyen que el grupo de edad de mayores de 65 es el que peor ajuste tiene, y que podría sacarse de la muestra para conseguir un ajuste mejor.

- **CHILE:** (Chitgian-Urzúa et al., 2013) Se vuelve a partir de la escala de 29 ítems en castellano (Díaz et al., 2006), en este caso se realizan análisis de consistencia interna, encontrando valores de entre 0,55 y 0,80, y AFC, en los que encuentra valores de ajuste bajo. En este caso se concluye que no se da un buen ajuste del modelo de 6 dimensiones.
- **MÉXICO:** (Areli Medina-Calvillo et al., 2013) Trabajan con la versión de 39 ítems holandesa (van Dierendonck, 2005), pero en su versión traducida al castellano (Díaz et al., 2006). Realizan análisis de consistencia interna obteniendo valores en algunas de las dimensiones especialmente bajos (0,39), y AFC, donde tampoco obtienen un buen ajuste, sugiriendo que sus datos no se ajustan a las 6 dimensiones propuestas por los autores
- **EE.UU.:** (Chen et al., 2013) Esta publicación se plantea dos objetivos: por una parte, estudiar la estructura factorial de la escala de bienestar subjetivo de Ryff, y por otra parte ver la relación existente entre el bienestar psicológico y el bienestar subjetivo. Para el primer objetivo, parten de la versión de 54 ítems y realizan diferentes propuestas con distintos modelos teóricos. Finalmente se quedan una versión de 4 dimensiones en las que se fusionan la dimensión de dominio del entrono con autoaceptación por un lado y crecimiento personal y propósito en la vida por otro, quedando las dos dimensiones restantes de manera independiente formando esas 4 dimensiones. Proponen una dimensión latente de segundo orden.
- **ITALIA Y BIELORRUSIA:** (Sirigatti et al., 2013) En esta investigación se realiza la validación en Italia y en Bielorrusia a la vez, realizando análisis independientes para cada país, y comparando finalmente los resultados entre ellos. En este caso,

trabajan con la versión de 18 ítems por escala. Encuentran que ambas versiones tienen una estructura similar, acorde con la versión original de 6 dimensiones, y una dimensión latente. En este caso los participantes fueron estudiantes en ambos países.

#### **2014:**

- **CHINA:** (Li, 2014) En esta investigación parten de la conceptualización teórica de Ryff, pero crean una nueva versión, desarrollando ítems diferentes a los originales, por lo tanto, no podemos considerarlo como una verdadera validación.
- **RUMANIA:** (Kállay & Rus, 2014) En este caso no aclaran de que versión parten, trabajan con una versión de 44 ítems, en la que las dimensiones están compuestas por entre 7 y 8 ítems, pero no citan como han llegado a ella. Realizan análisis de fiabilidad y validez y concluyen que la escala de bienestar psicológico es un instrumento válido para medir bienestar en la población rumana. En este caso el mejor ajuste lo consiguen con un modelo de 6 dimensiones y el modelo jerárquico.
- **EE.UU.:** (Ryff, 2014) (artículo teórico) Carol Ryff hace una evaluación del constructo del bienestar psicológico después de 25 años (Ryff, 1989b). En él, destaca la importancia del bienestar psicológico para la salud física y mental, y como el modelo propuesto ha sido útil para comprender y medir el bienestar. Además, se discuten las implicaciones del modelo en la psicoterapia.

#### **2015:**

- **ARGENTINA:** (Aranguren & Irrazabal, 2015) En esta publicación estudian cuál de las dos versiones, la holandesa de 39 ítems (van Dierendonck, 2005), o la española de 29 (Díaz et al., 2006) tiene mejor ajuste para la población de estudiantes argentinos. Prueban con diferentes modelos teóricos realizando diversos AFC

para la versión de 39 y 29 ítems y concluyen que el modelo que mejor se ajusta es el propuesto por Ryff de 6 factores para la versión de 29 ítems. A pesar de que es el modelo que mejor ajuste proporciona, el ajuste no es óptimo, por lo que realizan un AFE. En este caso, eliminan los ítems que tienen pesos factoriales menores que 0,30, y aquellos que tienen pesos similares en más de un factor. Con esto obtienen una escala de 3 factores: autonomía, con 6 ítems, relaciones positivas, con 6 ítems, y un conglomerado compuesto por 6 ítems también formado por el resto de dimensiones menos la dimensión autoaceptación.

- **CHINA:** (Li et al., 2015) En este caso estudian la invarianza de la escala por sexos, partiendo del estudio previo (Li, 2014). Encuentran que para ambos sexos existe el mismo número de factores y que la unidad de escala como el origen también puede considerarse el mismo

#### **2016:**

- **PUERTO RICO:** (González Rivera et al., 2016) Parten de la versión de 14 ítems por dimensión. Hacen una traducción y realizan análisis de fiabilidad y validez. Encuentran que, tras estos análisis preliminares, hay una cantidad importante de ítems que tienen pesos factoriales bajos y los eliminan. Se quedan con una versión de 28 ítems con 5 dimensiones: el dominio ambiental, el crecimiento personal, las relaciones positivas con los demás, la aceptación de uno mismo y el propósito en la vida. Por lo que eliminan la autoestima de su modelo. Con esta nueva estructura, los datos tampoco se ajustan del todo.
- **SOUTH ÁFRICA:** (Henn et al., 2016) Esta investigación trabaja con dos muestras, una de profesionales y una de estudiantes, y trata de estudiar la estructura factorial del cuestionario de Ryff. Parten de la versión original de 84 ítems, 14 por dimensión. En este caso encuentran que la estructura que mejor se ajusta a sus datos es el modelo de dos factores en el que se agrupan por un

lado los ítems positivos y por otro los negativos, sin embargo, sugieren que hay que tratar estos resultados con cautela ya que no son los encontrados mayoritariamente.

## 2017:

- **CHINA:** (Chan et al., 2017) Parten de la versión de 42 ítems, y realizan una reducción del cuestionario guiada por factores exploratorios y confirmatorios (AFE y AFC). Su versión final es de 24 ítems que validan para población joven y adolescente. Encuentran una estructura factorial adecuada con 6 dimensiones, confirmando las dimensiones teóricas de la autora
- **ESPAÑA:** (Freire et al., 2017) Parten de la versión española de 29 ítems (Díaz et al., 2006). En este caso, optan por eliminar una categoría de las opciones de respuesta dejándolo solamente en 5. Realizan AFC para diferentes modelos teóricos, obteniendo como resultado que el modelo teórico que mejor se ajusta a sus datos sería uno de solamente 4 factores. Los autores resaltan que los resultados obtenidos tanto para este modelo como para el resto de modelos restantes es solamente aceptable.
- **POLONIA:** (Karaś & Ciecuch, 2017) Prueban con la versión completa de 84 ítems y con la de 18. Realizan estudios de estructura factorial con AFC y obtienen mejor ajuste con la escala larga de 84 ítems, y 6 dimensiones teóricas.
- **EE.UU.:** (Hsu et al., 2017) Esta investigación está dentro del programa MIDUS que evalúan en EE.UU. con 3 ítems por dimensión. Realizan AFC en el que prueban con 6 modelos teóricos propuestos en la literatura previa, y añaden un factor de método para asociar los ítems redactados negativamente. Este modelo con el factor de método es el que mejor se ajusta a sus datos y es el que consideran óptimo.

## 2018:

- **COLOMBIA:** (Pineda Roa et al., 2017) En esta investigación parten de la versión holandesa de 39 ítems (van Dierendonck, 2005), pero con la traducción de la versión española (Díaz et al., 2006), y utilizan ambas versiones para estudiar el ajuste del modelo. La muestra está compuesta por 727 estudiantes universitarios. Encuentran que la versión de 29 ítems es ligeramente mejor que la de 39, pero ambas obtienen un buen ajuste. Además, corroboran la estructura factorial original de la autora de 6 dimensiones, encontrando que es el modelo que mejor se ajusta a los datos de la población colombiana
- **CHINA:** (Opree et al., 2018) en este estudio se proponen dos objetivos, por un lado, realizar una adaptación de la escala, y por otro estudiar las propiedades psicométricas de la escala adaptada. Para el primer objetivo, parten de la validación china previa (Cheng & Chan, 2005) y como las propiedades psicométricas son solo aceptables, añaden 2 o 3 ítems más a cada escala, y con grupos focales, hacen una adaptación al idioma. A través de un AFE se quedan con 33 ítems, y reducen la escala de respuesta a 5 opciones. A continuación, para el segundo objetivo, analizan las propiedades psicométricas de la escala de 33 ítems y comparan diferentes modelos teóricos desde modelos de un factor a modelos de 6 factores con un factor de segundo orden. En este caso, encuentran que el mejor modelo es el de 6 factores.
- **RUMANIA:** (Luștea et al., 2018) Parten de la versión de 84 ítems (Ryff, 1989b). La fiabilidad la miden con  $\alpha$  de Cronbach y solamente calculan la validez de criterio con la escala WEMWBS para medir el bienestar subjetivo en adultos y la escala CCAPS-34 que es una escala de 7 dimensiones de síntomas psicológicos. Concluyen que el instrumento es adecuado para trabajar con estudiantes rumanos

- **FILIPINAS:** (Villarosa & Ganotice, 2018) Trabajan con la versión de 42 ítems y utiliza como muestra a 237 profesores filipinos. Encuentran que el modelo no produce un ajuste adecuado a los datos, y eliminan los ítems que tienen pesos factoriales inferiores a 0,34 y con residuos estandarizados mayores a 2,58. De esta manera, eliminan 24 ítems y se quedan solamente con 18, con solo 3 ítems por dimensión. Con esta versión reducida encuentran un buen ajuste de los datos y prueban que el modelo teórico que proporciona mejor ajuste es el de 6 dimensiones.
- **RUMANIA:** (Costea-Bărluțiu et al., 2018) Trabajan a partir de la versión de 54 ítems que traducen al rumano. Realizan AFC con varios modelos teóricos y analizan la fiabilidad con el  $\alpha$  de Cronbach. Encuentran unos índices de fiabilidad aceptables, pero muy por debajo de los de la escala original, y sugieren que en sus datos el mejor ajuste se produce con un modelo de 6 dimensiones correlacionadas. Sin embargo, no se encuentran satisfechos con los resultados obtenidos.

## 2019:

- **VIETNAM:** (Calderón et al., 2019) Parten de la versión de 54 ítems y hacen la traducción al vietnamita y utilizan como muestra a 253 estudiantes universitarios. Proponen modelos de ecuaciones estructurales y se quedan con 28 ítems. Concluyen que, con sus datos, el modelo de 6 factores es adecuado y se ajusta a sus resultados, y que la versión de 28 ítems propuesta es más corta y por lo tanto más fácil de utilizar, posee buenas propiedades psicométricas y puede contribuir a avanzar en el estudio del bienestar en la población vietnamita.
- **TAIWÁN:** (Lee et al., 2019) En esta investigación pasan la versión larga de 84 ítems a 474 enfermeras de Taiwán, y comparan los resultados de esta versión con la versión de 3 ítems por dimensión, seleccionando los ítems correspondientes. Realizan un AFE y AFC para estudiar la estructura factorial y

estudian la fiabilidad con  $\alpha$  de Cronbach. Encuentran que la versión corta de 18 ítems se ajusta a un modelo teórico de 6 factores. Como limitaciones aportan que el personal de enfermería es una población con conocimientos sobre salud y bienestar y que esto puede haber hecho que los datos no sean generalizables a la población.

## 2020:

- **THAILANDIA:** (Calderon Jr. et al., 2020) trabajan con la versión de 54 ítems y realizan un análisis PLS-SEM (Partial Least Squares – Structural Equation Modeling. En primer lugar, realizan una especificación del modelo, a continuación determinan la validez del constructo, establecen la fiabilidad de los constructos reflectantes y por último interpretan los resultados. A través de sus análisis se quedan con 23 ítems que aportan una fiabilidad y validez aceptables y una estructura de 6 factores que concuerda con lo aportado por la autora de la versión original
- **JAPÓN:** (Sasaki et al., 2020) esta investigación parte de la versión de 42 ítems, 7 por cada dimensión y forma parte del estudio “Midlife in Japan” (MIDJA), que encuestó a 2102 residentes en Japón de entre 30 y 79 años. En este caso aumentaron las opciones de respuesta a 7, en vez de 6 que tiene la escala original. Se midió la fiabilidad a través de  $\alpha$  de Cronbach y la estructura factorial con AFC y AFE. En este caso, los datos no apoyan la literatura existente, ya que encuentran una estructura factorial de 5 dimensiones. Además, encontraron que la fiabilidad aportada por las escalas era menor a la de la escala original, con ítems que no correlacionaban de manera adecuada con el resto de la escala.

## 2021:

- **FINLANDIA:** (Saajanaho et al., 2021) la versión que utilizan en esta ocasión es la que se utiliza en el estudio MIDUS de EE.UU. de 42 ítems y lo pasan en una muestra de personas mayores de entre 75 y 85 años. En este caso, la estructura factorial no respaldó la estructura original de 6 factores basada en la teoría. La fiabilidad medida con el  $\alpha$  de Cronbach arrojó puntuaciones moderadas para las subescalas. La puntuación total de bienestar y las subescalas correlacionaron de manera adecuada con las variables que se trabajaron para proporcionar evidencias de validez de criterio: calidad de vida, satisfacción con la vida y síntomas depresivos.

## 2022:

- **ESPAÑA:** (Stavraki et al., 2022) En este caso crean una versión para niños y adolescentes de un ítem por dimensión. Para elegir el ítem que se utilizaría en cada dimensión, se atendió únicamente a cuestiones teóricas, profundizando en el sentido de cada una de las dimensiones y viendo lo que aportaba a ella cada uno de los ítems. El análisis psicométrico propone una estructura unidimensional en la que se agrupan los 6 ítems y proporciona correlaciones altas con el índice de bienestar de la OMS-5 evaluado a través de una entrevista semi-estructurada.
- **ESPAÑA:** (Blasco-Belled & Alsinet, 2022) trabajan con la versión de 14 ítems (Díaz et al., 2006). En este caso, usan un análisis de redes para estudiar la estructura factorial. Encuentran que las dimensiones satisfacción con la vida, propósito en la vida y control del entorno se agrupan en una única dimensión, y las otras tres dimensiones (autoaceptación, relaciones positivas y crecimiento personal) se quedan por separado, dando lugar a una estructura de 4 dimensiones.

## 2023:

- **CUBA:** (Arce González et al., 2023) Parten de la versión de 42 ítems y se quedan con 30. Eliminan 12 tras la prueba piloto, y otros dos por presentar cargas factoriales bajas. Encuentran una estructura factorial a través del AFE de 5 dimensiones, dejando fuera la dimensión de crecimiento personal. Encuentran con su instrumento de 28 ítems una fiabilidad y validez adecuadas

## 1.7.-LA ESCALA DE BIENESTAR PSICOLÓGICO DE CAROL RYFF EN ESPAÑA

Como hemos visto, en España se han propuesto multitud de estudios psicométricos sobre la escala de Carol Ryff, pero cabe destacar que la versión mayoritaria que se utiliza en nuestro país es la versión de Díaz et al., (2006). Curiosamente, esta versión de 29 ítems no parte de ninguna de las versiones originales de la autora, si no que parte de una reducción previa realizada en Holanda un año antes (van Dierendonck, 2005). Es decir, es una reducción, de una reducción. En el estudio español, participa también el único autor de la versión holandesa, y puede que sea este el motivo de no partir de una escala original. Sin embargo, es importante señalar que las adaptaciones culturales de los instrumentos de medida deben hacerse en cada uno de los países de manera individualizada, y que los ítems que se descartaron para la versión holandesa, puede que no sean los mismos que se deberían descartar en la versión española, de hecho, en la versión española se vuelven a descartar 10 ítems más.

El cuestionario de Diaz et al., se ha utilizado para múltiples propósitos desde su publicación en 2006, como por ejemplo para comprobar la eficacia de las intervenciones de psicología positiva frente a un protocolo de terapia cognitivo conductual y ver con cuál de ellas se obtienen mayores puntuaciones de bienestar (Chaves et al., 2017), para comprobar si la inteligencia emocional y el optimismo/pesimismo, pueden predecir bienestar psicológico (Augusto-Landa et al., 2011), en la misma línea, también para estudiar si los rasgos de personalidad junto a la inteligencia emocional pueden predecir el bienestar psicológico (Augusto Landa et al., 2010). También se ha estudiado la relación del bienestar psicológico con la frugalidad, evaluada como una restricción voluntaria de consumo y al uso ingenioso de los recursos disponibles (Muiños et al., 2015)

Durante la época de la pandemia de Covid-19, se utilizó para medir el bienestar psicológico con multitud de variables, como el autocuidado y el estrés (Luis et al., 2021), las fortalezas personales de las personas mayores

(Perez-Rojo et al., 2021), los efectos psicológicos causados por la exposición a información pseudocientífica en entornos rurales o urbanos (Escolà-Gascón et al., 2021), para estudios sobre cómo vivir el deporte en el confinamiento, junto al estudio del perfeccionismo y la resiliencia (González-Hernández et al., 2022), entre otros.

Y se ha utilizado con diferentes poblaciones, por ejemplo, en adultos emergentes (García Mendoza et al., 2019), en profesionales de la enfermería (Montes-Berges & Augusto-Landa, 2014), en adolescentes (González-Hernández et al., 2019), en personas con síndrome disfórico premenstrual (Saiz et al., 2021), esquizofrenia (Gutiérrez-Rojas et al., 2021), personas víctimas de terrorismo (Bajo et al., 2018; Díaz et al., 2018), pacientes con VIH y diabéticos (Rivera-Picón et al., 2022), entre otros.



## **CAPITULO 2: OBJETIVOS**

## OBJETIVOS

Introducir el Análisis de Datos Composicionales como nueva herramienta de estudio de test psicológicos.

Aportar una versión reducida del cuestionario de bienestar Psicológico de Carol Ryff (1989).

- Realizar una revisión bibliográfica de la evolución del cuestionario de bienestar psicológico (PWB por sus siglas en inglés) de Carol Ryff (1989) en los distintos países desde su conceptualización en 1989 hasta el momento actual.
- Realizar un análisis psicométrico de la escala de bienestar psicológico de Carol Ryff (1989) de 84 ítems, seleccionando todos los ítems disponibles y la versión más amplia del cuestionario para tener a nuestra disposición el mayor número de reactivos y así poder seleccionar los que mejor calidad psicométrica presenten.
- Utilizar técnicas estadísticas de la Teoría Clásica de los Test (TCT) y de la Teoría de Respuesta al Ítem (TRI) para la reducción del cuestionario de Bienestar Psicológico
- Realizar un estudio psicométrico de la nueva versión del cuestionario PBW- SMC comprobando que los índices de fiabilidad y validez son adecuados.

Analizar la nueva versión del cuestionario PBW- SMC desde la perspectiva del análisis de datos composicionales, aportando interpretación desde el campo de los test psicológicos

- Analizar e interpretar un biplot de varianzas
- Crear e interpretar ratios de posición entre individuos
- Crear e interpretar un Indicador General Bienestar Psicológico (IGBPS) para cada individuo

•

**CAPITULO 3: PROPUESTA  
ALTERNATIVA DEL CUESTIONARIO  
DE BIENESTAR PSICOLÓGICO:  
REDUCCIÓN Y VALIDACIÓN**

## 3.1.-HERRAMIENTAS ESTADÍSTICAS PARA LA VALIDACION DE INSTRUMENTOS DE MEDIDA

### 3.1.1.-LA TEORÍA CLÁSICA DE LOS TEST

El método predominante para evaluar la fiabilidad y validez de los instrumentos de medición en cuestionarios ha sido el modelo lineal clásico. Este enfoque se centra en la medición de la confiabilidad y validez del cuestionario. Sus orígenes se remontan al inicio del siglo XX, específicamente a los trabajos pioneros de Spearman en 1904, 1907 y 1913. Estos estudios marcaron un hito fundamental en el desarrollo y establecimiento de la teoría clásica de los test, proporcionando una estructura conceptual sólida para la evaluación de la calidad y consistencia de los instrumentos de medición.

El objetivo primordial radica en validar que el instrumento empleado logre una medición precisa y con mínima margen de error, asegurando que evalúe un aspecto específico de los individuos.

En el contexto de este enfoque, se hace mención a las puntuaciones empíricas, que hacen referencia a las puntuaciones obtenidas por el sujeto en el cuestionario, las cuales están representadas por la variable  $X$ . Estas puntuaciones están compuestas por las puntuaciones verdaderas ( $V$ ) y el error ( $e$ ). Este último, es el componente que introduce variabilidad en la medición y forma la base sobre la cual se sustenta el modelo lineal clásico, concebido originalmente por Spearman.

Es fundamental tener en cuenta el error asociado a la medición de ciertas variables en un test. En este contexto, este error puede estar influenciado por diversos factores, entre ellos, el contexto o el momento en el que se responde al cuestionario. Un ejemplo ilustrativo sería la diferencia en las respuestas dadas al cuestionario entre el momento justo después de perder un tren que lleva al aeropuerto y el momento de contestar el

cuestionario durante un día de vacaciones. En términos de fórmula, este error se representa como  $e = X - V$ .

- **El primer supuesto** es la determinación de la puntuación verdadera ( $V$ ), la cual se define como la esperanza matemática de la puntuación empírica:  $V = E(X)$ .
- **El segundo supuesto** se basa en el modelo homocedástico, lo que implica que el error de medición sigue una distribución normal con media cero  $E(e)=0$ , y que las varianzas de los errores son idénticas a la puntuación verdadera con la que están asociadas  $\sigma_e^2$ .
- **El tercer supuesto** asume que las puntuaciones verdaderas no son afectadas por el error. Esto significa que es posible obtener puntuaciones elevadas con errores mínimos y viceversa. Esta relación se expresa de la siguiente manera:  $r(v_{(j)}e_k) = 0$ .

Cabe destacar que se hace alusión al análisis de Test Paralelos. Esta prueba proporciona información sobre el número de componentes que configuran el cuestionario y contribuye a una interpretación adecuada del análisis factorial, que se abordará más adelante en la evaluación de la validez del cuestionario.

Excelente, has resumido de manera precisa el núcleo central de la Teoría Clásica de los Test. Al considerar el modelo lineal y sus tres supuestos, así como la aplicación de los test paralelos, estamos estableciendo un marco sólido para la evaluación y comprensión de los instrumentos de medición.

Con base en esta teoría, podemos determinar la solidez de nuestro cuestionario, utilizando los coeficientes de fiabilidad y de validez. Estos indicadores son cruciales para asegurar que el instrumento esté midiendo de manera precisa y válida el constructo que se pretende evaluar.

---

- **FIABILIDAD:**

La fiabilidad es un indicador crucial en la medición de cualquier constructo. Un instrumento fiable proporciona mediciones que son precisas, consistentes y estables en el tiempo, lo que significa que, si se repite la medición en condiciones similares, se obtendrán resultados similares.

La fiabilidad puede ser entendida de tres maneras, en función del objetivo de nuestra investigación:

- **Estabilidad Temporal (Test-Retest):** La fiabilidad entendida como estabilidad temporal se refiere a la consistencia de las mediciones cuando se administran dos veces a la misma muestra en diferentes momentos en el tiempo. Por ejemplo, si estamos midiendo la resiliencia con un cuestionario, queremos asegurarnos de que, si volvemos a administrar el cuestionario a las mismas personas en un momento posterior, obtendremos resultados similares. Esto indica que el instrumento es fiable en el sentido de que produce mediciones consistentes en el tiempo.
- **Consistencia Interna (Dos Mitades y Coeficiente Alfa de Cronbach):** La fiabilidad entendida como consistencia interna se refiere a la medida en que los ítems de una escala miden el mismo concepto. Esta se puede evaluar de varias formas:
  - **Dos Mitades:** Consiste en dividir los ítems de la escala en dos partes y calcular la correlación entre las puntuaciones obtenidas en ambas partes. Si las dos mitades están altamente correlacionadas, indica una alta consistencia interna.
  - **Coeficiente Alfa de Cronbach:** Es una medida más avanzada de la consistencia interna. Evalúa la relación entre cada ítem y el total de la escala, teniendo en cuenta todas las combinaciones posibles de pares de ítems. Un valor de alfa cercano a 1 indica alta consistencia interna. El

Coeficiente Alfa de Cronbach es una medida de consistencia interna que se basa en las correlaciones entre los ítems de la escala. Es una herramienta poderosa para evaluar la fiabilidad de un cuestionario y se considera más robusta que el método de las dos mitades. Se calcula a partir de la varianza de los ítems y proporciona una estimación más precisa de la consistencia interna de la escala

- **Test Paralelos:** Esta forma de entender la fiabilidad se basa en administrar dos versiones diferentes del mismo cuestionario a la misma muestra de personas. Si las puntuaciones en ambos cuestionarios están altamente correlacionadas, indica que el instrumento es fiable en el sentido de que produce mediciones consistentes incluso cuando se utilizan formas diferentes del cuestionario.

En la literatura, lo más habitual es encontrar el coeficiente Alfa de Cronbach como medida de fiabilidad, El Coeficiente de Alfa de Cronbach es un indicador valioso, pero es crucial reconocer que está influenciado por varios factores, como el número de ítems, el número de alternativas de respuesta y la proporción de varianza de la prueba. Por esta razón, la aplicación del Coeficiente Omega es altamente recomendable.

El Coeficiente Omega, (McDonald, 2013) también considerado un método de fiabilidad, opera con las cargas factoriales que representan la suma ponderada de las variables estandarizadas. Esta transformación en el cálculo proporciona una mayor estabilidad y precisión en la estimación de la fiabilidad, lo que lo convierte en una herramienta valiosa en la evaluación de la consistencia interna de una escala o instrumento de medición (Revelle & Condon, 2019).

Su fórmula corresponde con:

$$\omega = \frac{[\sum_{i=1}^i \lambda]^2}{[\sum_{i=1}^i \lambda]^2 + [\sum_{i=1}^i 1 - \lambda_i^2]}$$

Se extrae que  $\lambda_i$ , es la carga factorial estandarizada de  $i$ . Para obtener un valor aceptable  $\omega$  debe encontrarse entre los valores 0.70 y 0.90 según Ventura-León (2017).

---

- **VALIDEZ**

La fiabilidad, aunque es esencial en el análisis, requiere de la validez para ser completa. La validez se refiere al grado en que el instrumento de medición realmente evalúa el concepto que se propone o tiene la intención de medir. A través de la validez, podemos verificar que lo que estamos midiendo se ajusta efectivamente a lo que deseamos evaluar.

Existen tres tipos de validez a considerar:

- Validez de contenido
- Validez de criterio
- Validez de constructo

En primer lugar, **la Validez de Contenido** según Lawshe (1975), se refiere al grado en que el cuestionario aborda adecuadamente los contenidos a los que se refiere. En este caso, se espera que el cuestionario refleje con precisión un dominio específico de contenido relacionado con lo que se está midiendo. Para evaluar esto, se somete el cuestionario a una revisión por parte de expertos investigadores, quienes aportan una valoración cualitativa sobre la capacidad del cuestionario para medir la resiliencia.

**La Validez de Criterio**, como segundo tipo de validez a considerar, implica establecer una relación entre el desempeño en la prueba y algún otro criterio que se considera relevante y significativo en el contexto de la

medición. En esencia, este enfoque busca determinar si las puntuaciones obtenidas en el instrumento de medición están asociadas de manera coherente con el comportamiento o desempeño en una variable externa que se considera un indicador válido del constructo que se está midiendo.

**La Validez de Constructo** es una dimensión crucial en la validación de un instrumento de medición. Este tipo de validez se concentra en determinar si los datos recolectados a través del cuestionario o escala reflejan de manera adecuada las dimensiones o conceptos teóricos que se pretenden evaluar.

Para llevar a cabo esta validación, se aplican diferentes técnicas de análisis estadístico. Una de las más comunes es el Análisis Factorial Exploratorio, el cual ayuda a identificar los componentes o dimensiones subyacentes que explican la estructura de los datos. Este análisis proporciona evidencia sobre si las preguntas del cuestionario miden el constructo de interés de manera coherente.

Además, el Análisis Factorial Confirmatorio también se utiliza para confirmar que la estructura de factores propuesta teóricamente es válida, y los datos la respaldan

La adecuada realización y documentación de estos análisis proporciona evidencia sólida sobre la validez de constructo del instrumento de medición, lo que es esencial para asegurar la precisión y relevancia de los resultados obtenidos en la investigación.

## **ANÁLISIS FACTORIAL EXPLORATORIO**

---

El **Análisis Factorial Exploratorio** (AFE) es una técnica estadística multivariante utilizada para comprender la estructura subyacente de un conjunto de variables observadas. Su objetivo principal es identificar los factores o dimensiones latentes que explican las relaciones entre las

variables observadas. Estos factores representan conceptos o constructos no observables que influyen en las mediciones realizadas.

### **Pasos para realizar un AFE:**

**Formulación de la Hipótesis:** Antes de llevar a cabo el AFE, es importante tener una hipótesis o teoría sobre la estructura subyacente de los datos. Esta hipótesis guiará la interpretación de los resultados.

- **Establecimiento de la Matriz de Datos:** Se organiza la información en una matriz de datos  $X$  donde las filas representan las observaciones y las columnas representan las variables medidas.
- **Normalización de los Datos:** Si las variables tienen escalas diferentes o varianzas dispares, es recomendable normalizar los datos para asegurar que todas las variables tengan la misma influencia en el análisis.
- **Cálculo de la Matriz de Covarianzas o Correlaciones:** A partir de la matriz de datos, se calcula la matriz de covarianzas o correlaciones entre las variables. La matriz de correlaciones es más comúnmente utilizada ya que es menos sensible a las diferencias en escalas.
- **Obtención de Autovalores y Autovectores:** A través del cálculo de los autovalores y autovectores de la matriz de covarianzas o correlaciones, se determina cuántos factores pueden ser extraídos. Los autovalores indican la varianza explicada por cada factor.
- **Selección de Factores:** Se decide cuántos factores retener. Una regla común es conservar aquellos factores con autovalores mayores a 1, ya que indican que explican más varianza que una única variable observada.

El modelo del Análisis Factorial Exploratorio (AFE) se expresa matemáticamente de la siguiente manera:

Dado un conjunto de  $p$  variables observadas  $X_1, X_2, \dots, X_p$  y  $n$  observaciones, el modelo del AFE asume que estas variables son combinaciones lineales de  $m$  factores latentes no observados ( $F_1, F_2, \dots, F_m$ ) más un término de error específico ( $E_1, E_2, \dots, E_p$ ) para cada variable:

$$X_1 = \lambda_{11}F_1 + \lambda_{12}F_2 + \dots + \lambda_{1m}F_m + E_1$$

$$X_2 = \lambda_{21}F_1 + \lambda_{22}F_2 + \dots + \lambda_{2m}F_m + E_2$$

...

$$X_p = \lambda_{p1}F_1 + \lambda_{p2}F_2 + \dots + \lambda_{pm}F_m + E_p$$

Donde:

- $X_i$  representa la  $i$ -ésima variable observada.
- $F_j$  representa el  $j$ -ésimo factor latente no observado.
- $\lambda_{ij}$  es la carga factorial que indica la relación entre la variable observada  $X_i$  y el factor latente  $F_j$ .
- $E_i$  representa el término de error específico para la variable observada  $X_i$ .

El modelo también asume que los factores latentes están no correlacionados entre sí y que los términos de error son no correlacionados.

El objetivo del AFE es estimar las cargas factoriales ( $\lambda_{ij}$ ) y explorar la estructura subyacente de los datos, es decir, determinar cuántos factores son necesarios para explicar las correlaciones observadas entre las variables.

Es importante destacar que el AFE es una técnica exploratoria, lo que significa que no establece relaciones causales entre las variables observadas

y los factores latentes. En cambio, busca identificar patrones subyacentes en los datos.

Existen varios métodos para determinar cuántos factores retener en un Análisis Factorial Exploratorio (AFE). Cada uno de estos métodos proporciona un enfoque diferente para tomar esta decisión. A continuación, veremos los métodos más comunes:

- **Regla del Autovalor mayor que 1:** Este es uno de los métodos más simples. Consiste en retener todos los factores cuyos autovalores sean mayores que 1. Los autovalores representan la varianza explicada por cada factor. Si un autovalor es menor que 1, significa que ese factor explica menos varianza que una sola variable observada y, por lo tanto, no se retiene.
- **Criterio de Codo en el Gráfico de Escalones:** Se traza un gráfico de los autovalores en orden descendente. Se observa dónde se produce un cambio abrupto en la pendiente del gráfico. El punto en el que la pendiente se aplana puede considerarse como el número de factores a retener.
- **Regla del Porcentaje de Varianza Explicada:** Se retienen suficientes factores para explicar un porcentaje determinado de la varianza total.
- **Análisis Paralelo:** Este método compara los autovalores observados con los autovalores obtenidos de un conjunto de datos aleatorios con el mismo número de variables. Se retienen los factores cuyos autovalores superan a los autovalores simulados.
- **Método de Rotación de Factores:** A veces, la interpretación de los resultados mejora después de aplicar una rotación de factores. Esto puede ayudar a clarificar la estructura subyacente y facilitar la decisión sobre cuántos factores retener.

- **Consideración de Teoría y Conocimiento de Dominio:** En algunos casos, la decisión sobre cuántos factores retener se basa en la teoría subyacente del constructo que se está evaluando y el conocimiento de dominio del investigador.
- **Comparación de Criterios:** Algunos investigadores utilizan una combinación de métodos y consideran varios criterios antes de tomar una decisión final sobre cuántos factores retener.

Es importante recordar que la elección del número de factores a retener es una decisión importante y puede afectar la interpretación de los resultados del AFE. Por lo tanto, es recomendable utilizar múltiples métodos y considerar la consistencia entre ellos antes de tomar una decisión final

Para evaluar hasta qué punto es posible realizar el AFE, contamos con dos pruebas que nos van a ofrecer resultados para estudiar la idoneidad de las pruebas para nuestros datos:

El **Método de Kaiser-Meyer-Olkin (KMO)** es una medida utilizada en el análisis factorial exploratorio (AFE) para evaluar la idoneidad de los datos para este tipo de análisis. Fue desarrollado por Kaiser (1970) y posteriormente extendido por Kaiser y Rice (1974).

Se calcula utilizando correlaciones parciales y correlaciones simples entre variables. La fórmula general es un poco compleja, pero aquí está su representación:

$$KMO = \frac{\sum(\text{Correlaciones Parciales}^2)}{\sum(\text{Correlaciones Parciales}^2) + \sum(\text{Correlaciones Simples}^2)}$$

- Las correlaciones parciales representan la cantidad de varianza compartida entre cada par de variables, eliminando la influencia de las otras variables.
- Las correlaciones simples son las correlaciones directas entre las variables.

El KMO proporciona una puntuación que varía entre 0 y 1, donde valores cercanos a 1 indican que los datos son adecuados para el AFE. Esta medida evalúa la proporción de varianza compartida entre las variables observadas, lo que sugiere la presencia de factores subyacentes que pueden ser identificados a través del análisis.

Para calcular el KMO, se consideran las correlaciones entre pares de variables y se comparan con las correlaciones parciales. Si las correlaciones parciales son significativamente pequeñas en comparación con las correlaciones originales, esto indica que el AFE es apropiado.

Un KMO alto sugiere que los datos son apropiados para un AFE, lo que implica que las variables están interrelacionadas y pueden ser agrupadas en factores subyacentes. Por otro lado, un KMO bajo indica que el AFE puede no ser la técnica más adecuada y que las variables pueden no estar lo suficientemente relacionadas para identificar factores.

**La Prueba de Esfericidad de Bartlett** es una herramienta estadística crucial en el análisis factorial exploratorio (AFE) que evalúa si las correlaciones entre las variables observadas son lo suficientemente grandes como para justificar la realización del AFE. Fue desarrollada por Maurice Stevenson Bartlett en 1937 y es utilizada para determinar si la matriz de correlaciones de las variables es una matriz de identidad, lo que indicaría que no hay relaciones lineales significativas entre las variables.

La estadística de la prueba de Bartlett sigue una distribución chi-cuadrado ( $\chi^2$ ) y se calcula con la siguiente fórmula:

$$\chi^2 = -\left(n - 1 - \frac{2p + 5}{6}\right) \cdot \ln|R|$$

- $n$  es el número de observaciones.
- $p$  es el número de variables.
- $R$  es el determinante de la matriz de correlaciones.

Esta fórmula es utilizada para calcular el valor de la prueba de Bartlett, que luego se compara con la distribución chi-cuadrado para determinar la significancia.

La hipótesis nula de la prueba de esfericidad de Bartlett establece que la matriz de correlaciones poblacionales es una matriz de identidad, lo que implica que no hay correlaciones significativas entre las variables. Por otro lado, la hipótesis alternativa sugiere que hay al menos una correlación significativa entre las variables.

La prueba de Bartlett genera un estadístico de prueba y un valor p asociado. Si el valor p es menor que un umbral de significancia predefinido (por ejemplo, 0.05), se rechaza la hipótesis nula, lo que indica que las correlaciones entre las variables son lo suficientemente grandes como para justificar la realización de un AFE.

## MODELOS DE ECUACIONES ESTRUCTURALES

Los Modelos de Ecuaciones Estructurales (SEM por sus siglas en inglés, Structural Equation Modeling) representan una poderosa herramienta estadística utilizada en la investigación para analizar relaciones complejas entre variables latentes y observables. Este enfoque integra tanto el análisis de la covarianza como la estimación de parámetros estructurales, lo que permite examinar simultáneamente relaciones causales y asociaciones entre múltiples constructos. La flexibilidad inherente a los SEM los convierte en un método versátil aplicable en diversos campos científicos, desde psicología y sociología hasta economía y biología, para abordar cuestiones de naturaleza teórica y empírica.

El concepto “Modelos de Ecuaciones Estructurales” no se refiere a una técnica estadística única, sino a una familia de procedimientos relacionados, como el Análisis de la Estructura de Covarianza, Análisis de Variables Latentes y Análisis Factorial Confirmatorio, entre otros. Estos modelos se fundamentan en el análisis de la covarianza y se erigen como herramientas eficaces para explorar relaciones causales entre variables, siempre y cuando

estas relaciones sigan un patrón lineal. No obstante, es esencial tener presente que estos métodos no certifican causalidad de manera absoluta. En su lugar, se utilizan de forma confirmatoria para validar relaciones previamente definidas entre un conjunto de variables, o de manera exploratoria cuando el investigador busca evaluar hipótesis sobre un conjunto de datos.

Según Joreskog (1993), los Modelos de Ecuaciones Estructurales se aplican en tres objetivos distintos:

1. Confirmación de un modelo: cuando el investigador ya dispone de un modelo y busca determinar su validez o rechazo basándose en la correspondencia con las relaciones observadas en un conjunto de datos específico, con un enfoque estrictamente confirmatorio.

2. Selección entre modelos alternativos: cuando el investigador cuenta con varias opciones de modelos y necesita elegir uno.

3. Generación de un modelo: este es quizás el objetivo más común y se aplica cuando no se dispone de un modelo previo. El modelo que se busca debe cumplir con dos requisitos esenciales: tener una base teórica sólida y estar respaldado por evidencia estadística.

Los Modelos de Ecuaciones Estructurales, como conjunto de técnicas estadísticas, tienen raíces que se remontan al inicio del siglo XX con los trabajos de Charles Spearman en técnicas de Análisis Factorial Exploratorio. Posteriormente, Sewall Wright desarrolló las bases del Análisis de Trayectorias (Path Analysis) en el ámbito de la genética, que luego se extendió a disciplinas como la Sociología, Economía y Psicología. Desde entonces, la utilización de los Modelos de Ecuaciones Estructurales ha experimentado un crecimiento exponencial en diversas áreas de estudio.

En el ámbito de los tests psicológicos, el enfoque subyacente de estas técnicas radica en emplear el análisis de estructuras de covarianza a través

del Análisis Factorial Confirmatorio. Esto tiene como finalidad discernir la redefinición y recalibración mediante el análisis de modificaciones en la estructura y el patrón factorial a lo largo del tiempo. La evaluación de las estructuras factoriales, Schmitt (1982) sugiere contrastar la uniformidad de las estructuras de varianza-covarianza.

Según Kline (2005), se delinean seis pasos esenciales en la implementación de los Modelos de Ecuaciones Estructurales, estos pasos proporcionan un marco sistemático y riguroso para la implementación efectiva de los Modelos de Ecuaciones Estructurales en la investigación, asegurando la solidez y fiabilidad de los resultados obtenidos:

1) **Especificar el modelo:** Este primer paso implica la formalización de las hipótesis originales del investigador en la forma de un modelo de ecuaciones estructurales. Estas ecuaciones definen los parámetros del modelo y se fundamentan en el establecimiento de relaciones entre variables observadas y latentes. Esta etapa es crucial para establecer las bases teóricas del estudio.

2) **Verificar la identificación completa del modelo:** Es vital confirmar si el modelo puede ser plenamente identificado, lo que significa que teóricamente es posible obtener una única estimación para cada uno de los parámetros del modelo. Esto asegura la robustez y fiabilidad del análisis.

3) **Seleccionar y operacionalizar las medidas de las variables:** Se procede a elegir las medidas de las variables representadas en el modelo y a llevar a cabo su operacionalización. Esto incluye la recopilación y preparación de los datos, fundamentales para fundamentar las inferencias del estudio.

4) **Estimar el modelo:** Esta etapa implica el empleo de un programa informático especializado. Incluye la evaluación de la bondad del ajuste, es decir, determinar hasta qué punto el modelo ajustado se adecua al conjunto de datos. En muchas ocasiones, puede ser necesario reespecificar el modelo

y, en tal caso, se procede directamente al paso 5. Se continúa con la interpretación de las estimaciones de los parámetros y la consideración de modelos equivalentes que puedan explicar los datos de manera igualmente válida.

**5) Reespecificar el modelo y reevaluar el ajuste:** En caso de ser necesario, se reespecifica el modelo y se evalúa nuevamente su bondad de ajuste utilizando los mismos datos. Es esencial que cualquier reespecificación se base en las hipótesis de investigación iniciales para mantener la coherencia en el estudio.

**6) Describir el análisis del modelo seleccionado:** Una vez identificado un modelo que satisfaga los criterios de ajuste, se procede a detallar y explicar el análisis de este modelo en el contexto del estudio, resaltando las relaciones y hallazgos más significativos.

Los Modelos de Ecuaciones Estructurales se fundamentan en el análisis detallado de las relaciones entre variables. No obstante, la explicación de la correlación entre dos variables, X e Y, puede abarcar tanto relaciones causales (donde X causa Y) como asociaciones no causales, como posibles conexiones espurias entre X e Y. El propósito central de los Modelos de Ecuaciones Estructurales es discernir las componentes causales y no causales que subyacen en las correlaciones observadas.

En el contexto de la causalidad, se presupone que un cambio en una variable provoca un cambio en otra. Sin embargo, es importante destacar que la mera asociación entre dos variables no es suficiente para establecer una relación causal, ya que correlación no implica causalidad. Para atribuir a X la causalidad de Y, se deben verificar tres condiciones fundamentales:

1) Precedencia temporal: Es decir, que X preceda a Y. Se suele aceptar la prioridad temporal como una condición sine qua non para la causalidad, implicando que la causa debe preceder al efecto. Establecer esta

prioridad es esencial para determinar si un indicador es causa o efecto de una variable latente.

2) Correcta especificación de la dirección de causalidad: Esto significa que X causa Y y no al revés. En una relación causal, existe una dirección subyacente que debe ser identificada correctamente.

3) Persistencia de la asociación entre X e Y: Incluso cuando variables externas (como causas comunes) se mantienen constantes. Aunque la asociación bivariante no es una condición necesaria y suficiente para una relación causal, cuando se aíslan una causa y su efecto de otras influencias, es posible que las dos variables estén asociadas. Sin embargo, problemas como términos de perturbación heterocedásticos, autocorrelación o multicolinealidad pueden llevar a inferencias incorrectas respecto a la asociación.

La manera habitual de representar gráficamente los Modelos de Ecuaciones Estructurales es a través del "Path Diagram" (también conocido como "Diagrama de Trayectorias"). Este diagrama proporciona una visualización clara y concisa de las relaciones entre variables y sus correspondientes coeficientes estructurales en un modelo.

Los elementos que componen un Path Diagram son los siguientes:

### **1. Nodos y Variables:**

- En el Path Diagram, los elementos se representan como nodos. Cada nodo corresponde a una variable, ya sea observable o latente, que forma parte del modelo.

- Las variables observables son aquellas que se pueden medir directamente y se representan mediante rectángulos, mientras que las latentes representan conceptos teóricos que no se pueden medir de manera

directa y requieren indicadores o variables observables para su estimación, y en este caso se representan con óvalos.

## **2. Flechas o Trayectorias:**

- Las flechas representan las relaciones entre las variables en el modelo. Indican la dirección de la influencia o la asociación entre las variables.

- Por ejemplo, si hay una flecha que va desde la variable X hacia la variable Y, indica que X tiene un efecto sobre Y.

## **3. Coeficientes de Trayectorias:**

- A lo largo de las flechas, se colocan coeficientes estructurales que cuantifican la fuerza y la dirección de la relación entre las variables.

- Por ejemplo, si la flecha de X a Y tiene un coeficiente de 0.7, significa que un aumento de una unidad en X se asocia con un aumento de 0.7 unidades en Y.

## **4. Errores de Medición:**

- Si una variable es observable (no latente), se puede representar mediante un círculo alrededor del nodo. Este círculo, conocido como "error de medición", indica la parte de la variable que no está explicada por las otras variables en el modelo.

## **5. Covarianzas y Correlaciones:**

- Las covarianzas entre las variables latentes se muestran mediante flechas de dos puntas que conectan los nodos de las variables latentes. Las correlaciones entre las variables observables se representan de manera similar.

## 6. Variables Exógenas y Endógenas:

- Las variables exógenas son aquellas que no tienen flechas entrantes y cuyos valores son determinados fuera del modelo. Son las variables que influyen en otras variables del modelo, pero no son influenciadas por ellas.

- Las variables endógenas son aquellas que tienen flechas entrantes y son influenciadas por otras variables dentro del modelo.

## 7. Variables Mediadoras o Intermedias:

- En algunos casos, se pueden incluir variables mediadoras o intermedias que se sitúan entre una variable independiente y una variable dependiente, explicando la relación entre ambas.

## 8. Modelo de Trayectorias Múltiples:

- Los Path Diagrams también pueden representar modelos más complejos que incluyen múltiples relaciones y trayectorias entre las variables.

En concreto, dentro de los Modelos de Ecuaciones Estructurales, vamos a trabajar con el Análisis Factorial Confirmatorio.

El **Análisis Factorial Confirmatorio (AFC)** se basa en un modelo de medición en el cual las variables observadas ( $X_1, X_2, \dots, X_p$ ) se consideran medidas de factores latentes no observados ( $F_1, F_2, \dots, F_m$ ). Esta relación se describe mediante la siguiente fórmula:

$$X = \Lambda F + \epsilon$$

Donde  $\Lambda$  es la matriz de cargas factoriales que cuantifica la influencia de los factores latentes en las variables observadas,  $F$  es un vector de factores latentes, y  $\epsilon$  es un vector de errores de medición.

Las cargas factoriales ( $\lambda$ ) representan la fuerza y dirección de la relación entre las variables observadas y los factores latentes. Por ejemplo, la carga factorial de la variable  $X_i$  en el factor  $F_j$  se denota como  $\lambda_{ij}$ .

La matriz de covarianzas observadas ( $S$ ) es otra parte esencial del AFC. La covarianza entre  $X_i$  y  $X_j$  se calcula utilizando las cargas factoriales y las varianzas de los factores latentes y errores de medición:

$$s_{ij} = \lambda_{i1}\lambda_{j1}\sigma_{F1}^2 + \lambda_{i2}\lambda_{j2}\sigma_{F2}^2 + \dots + \lambda_{im}\lambda_{jm}\sigma_{Fm}^2 + \sigma_{\epsilon_i}^2\delta_{ij}$$

Donde  $\sigma_{Fk}^2$  es la varianza del factor  $F_k$  y  $\sigma_{\epsilon_i}^2$  es la varianza del error de medición de la variable  $X_i$ .

### Ajuste del modelo:

Los índices de ajuste se utilizan para evaluar el Análisis Factorial Confirmatorio (AFC). Estos índices son fundamentales para determinar como el modelo especificado se ajusta a los datos observados.

- **Índice de Ajuste Comparativo (Comparative Fit Index, CFI):** El Índice de Ajuste Comparativo (CFI) evalúa la bondad del ajuste del modelo propuesto en comparación con un modelo de nulidad completa (donde no hay relaciones entre variables). Un CFI cercano a 1 indica un buen ajuste. La fórmula para el CFI es:

$$CFI = \frac{2 \times (\text{Modelo Mejorado} - \text{Modelo Nulo})}{\text{Modelo Mejorado} + \text{Modelo Nulo}}$$

Donde "Modelo Mejorado" y "Modelo Nulo" son los índices de ajuste del modelo propuesto y del modelo de nulidad completa, respectivamente.

- **Error de Aproximación Cuadrático Medio Estandarizado (Root Mean Square Error of Approximation, RMSEA):** El RMSEA evalúa el error de aproximación del modelo respecto a la población. Un RMSEA menor a 0.05 indica un buen ajuste, mientras que valores entre 0.05 y 0.08 sugieren un ajuste moderado. La fórmula para el RMSEA es:

$$RMSEA = \sqrt{\frac{\sum(\text{Modelo} - \text{Datos})^2 / df}{\text{Varianza de Modelo} - \text{Varianza de Datos}}}$$

Donde "Modelo" y "Datos" son las matrices de correlaciones implicadas por el modelo y observadas respectivamente, y  $df$  es el número de grados de libertad del modelo.

- **Chi-cuadrado de Ajuste (Chi-Square Goodness of Fit):** El chi-cuadrado de ajuste compara las diferencias entre las covarianzas observadas y las covarianzas esperadas bajo el modelo. Sin embargo, es sensible al tamaño de la muestra, por lo que a menudo se combina con otros índices.
- **Índice de Tucker-Lewis (Tucker-Lewis Index, TLI):** El TLI es similar al CFI y también compara el modelo propuesto con un modelo de nulidad completa. Un TLI cercano a 1 indica un buen ajuste.

---

### 3.1.2.-LA TEORÍA DE RESPUESTA AL ÍTEM

---

- INTRODUCCIÓN

En diversas disciplinas, especialmente en campos como las ciencias sociales y la medicina, nos encontramos con conceptos que no pueden ser observados directamente o a menudo carecen de una medición precisa. Esto sucede debido a que estos conceptos son abstractos o representan características subyacentes, como el bienestar psicológico, la Calidad de Vida, la inteligencia, la dependencia económica, etc. Por lo tanto, para cuantificarlos, es necesario recurrir a indicadores indirectos y utilizar técnicas estadísticas que permitan definir una variable latente a partir de un conjunto de variables indicadoras o ítems. Una de las herramientas esenciales en este contexto es la Teoría de Respuesta al Ítem (TRI).

La *TRI* como su nombre indica, se enfoca en analizar el comportamiento de los cuestionarios, pero en lugar de examinarlos en su conjunto, se descompone en elementos individuales, es decir, los ítems (Sánchez Rivero, 2004). La variable latente que se busca medir, a menudo denominada "aptitud", proviene del ámbito educativo, donde se pretende estimar la capacidad o habilidad de un individuo para responder a las preguntas formuladas en un cuestionario.

En el contexto del Bienestar Psicológico, el rasgo latente ( $\theta$ ) o variable latente se refiere al "**Nivel de Bienestar Psicológico**" del individuo que es necesario para que elija una categoría de respuesta en cada ítem del cuestionario. De esta manera, aquellos individuos con bajos niveles de Bienestar Psicológico responderán seleccionando las categorías más altas en los ítems del cuestionario, o más bajas dependiendo del "sentido" del ítem, directo o inverso.

En el contexto de la educación, las repuestas a cada ítem son "correcta" o "incorrecta", de forma que, si se asocia a una variable para representar la respuesta del individuo, esta variable tomará el valor 1 si la

respuesta es correcta, y 0 si la respuesta es incorrecta. En el contexto de la medicina, la "respuesta" a un ítem será presentar o no presentar un síntoma en un determinado grado, dado un nivel particular de Calidad de Vida del sujeto. De esta forma, los individuos con bajos niveles de Calidad de Vida tendrán probabilidades más altas de presentar un síntoma en un determinado grado.

En el ámbito educativo, las respuestas a cada ítem se califican como "correctas" o "incorrectas". En este contexto, se asocia una variable para representar la respuesta de un individuo, donde esta variable toma el valor 1 si la respuesta es correcta y 0 si la respuesta es incorrecta. En el contexto de la medicina, la "respuesta" a un ítem podría referirse a la presencia o ausencia de un síntoma en un grado particular, dado el nivel específico de Bienestar Psicológico del sujeto.

A la probabilidad de contestar una categoría de respuesta de un ítem  $i$  a un determinado nivel de Bienestar Psicológico ( $P_i(\theta)$ ), se le conoce con el nombre de función de respuesta al ítem o Curva Característica del Ítem (CCI).

La CCI muestra probabilidades cercanas a cero para valores pequeños del nivel de "aptitud" y probabilidades cercanas a 1 para valores elevados de la misma, produciéndose un incremento gradual de la probabilidad a medida que aumentan los valores del rasgo latente. En particular, cuando se analiza el nivel de Bienestar Psicológico de un individuo mediante la CCI, se puede observar que a medida que los valores de este nivel aumentan, las probabilidades de ciertas características específicas de los mismos también aumentan gradualmente. En otras palabras, las personas con un alto Bienestar Psicológico tienen una probabilidad cercana a 1 de mostrar ciertos rasgos o comportamientos que se están estudiando, mientras que las personas con niveles bajos tienen una probabilidad cercana a cero de mostrar esos mismos rasgos o comportamientos.

Además del parámetro  $\theta$ , la probabilidad  $P_i(\theta)$ , va a depender también, en función del modelo que se proponga para su estimación, de otros dos parámetros, el parámetro de discriminación y el parámetro de dificultad.

El parámetro de dificultad (denotado como  $b_i$ ) representa el punto en la escala latente en el cual la probabilidad de responder correctamente a un ítem es del 50%. En otras palabras, este parámetro nos indica la posición en la escala latente donde el ítem es igualmente probable de ser respondido correcta o incorrectamente por un individuo. Este parámetro nos indica la relación entre la habilidad de un individuo y la probabilidad de dar la respuesta correcta a ese ítem específico.

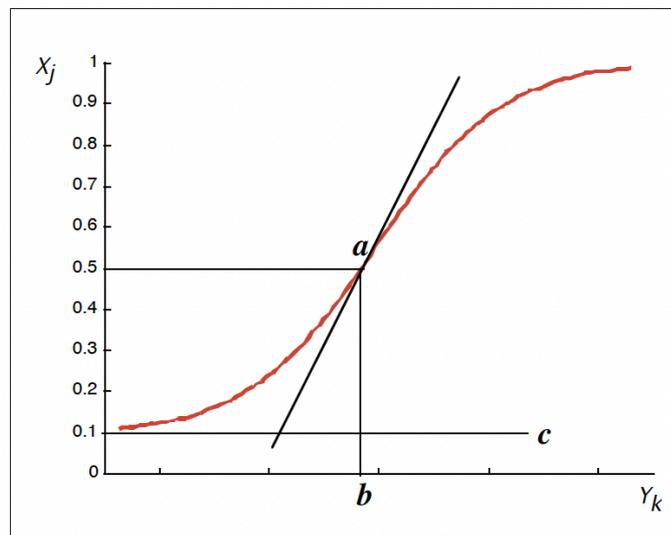
Para facilitar la comparación entre diferentes ítems, los valores de la escala latente suelen estandarizarse. En general, los valores del parámetro de dificultad tienden a variar en un rango de -2 a +2.

El parámetro de discriminación  $a_i$  está relacionado con la pendiente de la curva característica en el punto  $b_i$ , de manera que cuanto mayor sea la pendiente de la curva, mayores serán las diferencias en las probabilidades  $P_i(\theta)$ , de los valores latentes próximos. En resumen, el parámetro de discriminación refleja la capacidad del ítem para distinguir entre personas con diferentes niveles de habilidad, siendo la pendiente más pronunciada un indicador de una mayor sensibilidad del ítem para discriminar entre individuos con niveles de habilidad cercanos.

En algunas investigaciones, debido a que en la mayor parte de los tests, los ítems presentan respuestas categóricas, es un hecho que un ítem puede ser contestado por azar, por lo que se debe de tener en cuenta otro parámetro, el parámetro de adivinación  $c_i$ , que se define como el valor  $P(\theta)$ , si  $\theta$ , tiende a  $-\infty$ . Gráficamente se corresponde con la asíntota inferior de la curva característica (Ver Figura 2).

**Figura 2:**

Representación de los parámetros de la curva característica del ítem.



*Nota: Elaboración propia*

En términos de **Bienestar Psicológico** el parámetro de **discriminación** se interpreta como la capacidad del ítem para discriminar o diferenciar entre distintos individuos con distinto Bienestar Psicológico. El parámetro de **dificultad** se interpreta como la puntuación en la escala de Bienestar Psicológico necesaria que debe de tener un individuo para que sea más probable que conteste una de las categorías del ítem. Los ítems con mayores parámetros de dificultad se corresponderán con aquellos que seleccionan los pacientes afirmativamente con Bienestar Psicológico más bajo o más alto dependiendo del sentido del ítem (Positivo o Negativo)

### **Función de Información**

La TRI utiliza el concepto de información del test, y de cada ítem, para reemplazar la fiabilidad definida en la Teoría Clásica de los Test (TCT). La información es una función que varía a lo largo de la escala y tiene forma de campana, si bien la función de información del test tiende a ser mucho más variable que la de los ítems particulares.

La Función de Información es una función definida para los valores de la variable medida ( $\theta$ ) que indica, para todos los posibles valores, con que precisión se está midiendo el test, o el ítem.

La **Función de Información del Ítem** indica que cantidad de información aporta el ítem a la medida de  $\theta$  y a qué nivel aporta dicha información. La función de Información del Ítem en un nivel concreto ( $\theta$ ), es una función en dos aspectos: a) la discriminación del ítem, de modo que, a mayor pendiente, mayor información; y b) el error típico del ítem en  $\theta$ , de modo que a menor varianza mayor información (Martínez Arias, 1995).

La **Función de Información del Test** es un indicador de la precisión del test, ya que cuando mayor sea el valor del índice utilizado para su cálculo, menor será el error típico de medida y por consiguiente será mayor la información que las estimaciones aportan sobre el parámetro  $\theta$ . Birnbaum (1968) definió la función de información de un test para un determinado valor de theta como la inversa de la varianza de los errores de medida para ese valor.

Los ítems con mayor poder para discriminar tienen informaciones más altas, aunque sobre un rango estrecho, mientras que ítems con menor poder para discriminar tienen menor información, aunque en un rango más amplio.

### **Supuestos de la TRI**

Los modelos de Teoría de Respuesta a los Ítems intentan superar algunos de los problemas con los que se enfrenta el enfoque clásico para mejorar la precisión de la medición. Para lograrlo, los modelos tienen que partir de supuestos más restrictivos; entre estas hipótesis hay dos que son fundamentales: la unidimensionalidad y la independencia local.

El estudio de la **unidimensionalidad** recibió un fuerte impulso en los años 80 por su importancia para los modelos más populares de la Teoría de Respuesta a los Ítems (TRI) (Hambleton & Rovinelli, 1986).

El supuesto de unidimensionalidad implica que la puntuación de un individuo en el test depende exclusivamente de una única dimensión o factor. Esto parece ser una suposición lógica, ya que, al medir una variable específica, la medición debería estar directamente relacionada con el nivel de destreza de la persona en esa variable. Sin embargo, esta premisa plantea una limitación significativa en numerosos campos psicológicos y educativos, donde los datos tienden a no ser estrictamente unidimensionales.

El método más utilizado para evaluar este supuesto es el análisis factorial, Dado que empíricamente raras veces, si alguna, se encuentra una unidimensionalidad perfecta, esto es, que un solo factor dé cuenta de un 100 por 100 de la varianza, la unidimensionalidad se convierte en una cuestión de grado: cuanta más varianza explique el primer factor, más unidimensionalidad existe.

En el año 1961, Lumsden propuso el cociente entre la varianza explicada por el primer factor y el segundo como índice para medir la unidimensionalidad del test; aunque según Lord (1980) se necesitan procedimientos más rigurosos. Cinco años más tarde Hattie (1985) propuso 87 índices distintos basados en modelos de respuesta midiendo la magnitud en que un conjunto de respuestas se desvían del patrón ideal; confiabilidad el más utilizado es el coeficiente Alpha Cronbach propuesto en 1951; componentes principales, midiendo el porcentaje de varianza explicada por la primera componente) y análisis factorial, con el valor del mayor valor propio y por último con modelos de rasgos latentes.

Se han llevado a cabo abundantes estudios de simulación para evaluar la robustez de los modelos TRI a violaciones del supuesto de

unidimensionalidad (Ansley & Forsyth, 1985; Harrison, 1986; Muñiz et al., 1989).

Trabajos realizados por autores como Muñiz Fernández y Cuesta Izquierdo, (1993) o Cuesta Izquierdo, (1996) indican que los modelos de la TRI son bastantes resistentes a la violación del supuesto de unidimensionalidad.

La **independencia local** de los ítems se fundamenta en la premisa de que la respuesta a un ítem específico, por parte de un individuo con un nivel de habilidad particular, no influye en las respuestas dadas a otros ítems del test. En otras palabras, los ítems de un test diseñado para medir una variable unidimensional no deben tener la capacidad de medir una variable diferente. De acuerdo con esto, podemos establecer una definición matemática de independencia como el producto de las probabilidades de responder a cada uno de los ítems que componen un test unidimensional, es decir:

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n/\theta) = P(x_1/\theta)P(x_2/\theta) \dots P(x_n/\theta)$$

Si se cumple la unidimensionalidad, se deriva que existe independencia local entre los ítems; esto es, si se ha elegido la dimensionalidad correcta, los ítems son localmente independientes. Observamos por lo tanto que los conceptos de unidimensionalidad e independencia local son equivalentes (Goldstein, 1980).

---

- **MODELOS DE LA TRI**

Durante los últimos años, se han descrito y propuesto infinidad de modelos unidimensionales, aunque también multidimensionales para el uso en la Teoría de Respuesta al Ítem. Estos modelos son diferentes dependiendo si los datos son dicotómicos, politómicos ordenados (escalas Likert), y politómicos no ordenados; incluso.

En la mayoría de las investigaciones que usan modelos unidimensionales de la TRI utilizan dos tipos de funciones matemáticas para las CCI, la función logística y la curva normal acumulada. Así destacamos los modelos logísticos y los modelos de Ojiva Normal de uno, dos y tres parámetros.

En el cuestionario de Carol Ryff (1989b) los principales modelos unidimensionales que podemos estimar son: el Modelo de Respuesta Nominal (Bock, 1972), el Modelo de Respuesta Graduada (Samejima, 1969), el Modelo de Crédito Parcial (Masters & Wright, 1984) y el Modelo de Crédito Parcial Generalizado (Muraki & Bock, 2002) ya que las respuestas de los ítems son de respuesta politómica. De todos los propuestos, en nuestro estudio trabajaremos con el Modelos de Respuesta Graduada de Samejima ya que Samejima (1969, 1972, 1977) desarrolló una familia de modelos de respuesta graduada de clases latentes, los cuales pueden ser aplicados a categorías politómicas ordenadas. Estos modelos pueden ser utilizados para resolver preguntas planteadas en un cuestionario (por ejemplo, incorrecto, parcialmente correcto, correcto) o para medir actitudes y preferencias (por ejemplo, una escala likert, muy buena, buena, satisfactoria, regular, mala, muy mala).

### **Modelo De Respuesta Graduada**

Este modelo es una extensión del modelo logístico de dos parámetros, para el caso en que la respuesta al ítem es politómica.

El modelo se basa en las diferencias entre las funciones de respuestas categóricas, para un ítem con  $m$  respuestas categóricas, habrá  $m-1$  variables binarias, por ejemplo, para un ítem de cinco categorías, la primera variable binaria está entre individuos que seleccionaron una categoría frente a las cuatro categorías superiores, la segunda está entre individuos que seleccionaron la categoría 2 o una categoría más baja frente la categoría 3 o una categoría más alta y así sucesivamente, el proceso continúa hasta construir cuatro categorías. No hay necesidad de calcular la quinta variable

binaria porque el ítem será puntuado como un cero cuando un individuo no seleccione ninguna categoría.

Vamos a denotar, para un ítem  $i$ , la probabilidad de responder la categoría  $i$  o superior como  $P_r^{i*}(\theta)$ , y para la categoría  $r+1$  o superior como  $P_{(r+1)}^{i*}(\theta)$

Para el modelo de respuesta graduada logístico (Samejima, 1969, 1972, 1977), la probabilidad para un ítem  $i$  de que un individuo responda a la categoría  $r$  o superior de un ítem  $i$  es:

$$P_r^{i*}(\theta) = \frac{1}{1 + e^{-Da_i(\theta - b_{(r-1)_i})}} \quad \text{para } r = 1, 2, 3, \dots, m \quad \text{y} \quad P_1^{i*}(\theta) = 1, P_{(m+1)}^{i*}(\theta) = 0$$

La expresión de la *Función de respuesta categórica* para una respuesta determinada, de un ítem  $i$  puede expresarse como:

$$P_r^i(\theta) = P_r^{i*}(\theta) - P_{r(r+1)}^{i*}(\theta)$$

De las ecuaciones anteriores podemos obtener la expresión de la *Función de respuesta categórica* de respuesta graduada para un modelo logístico como:

$$P_r^i(\theta) = \frac{1}{1 + e^{-Da_i(\theta - b_{(r-1)_i})}} - \frac{1}{1 + e^{-Da_i(\theta - b_{r_i})}}$$

donde  $P_r^i(\theta)$  es la probabilidad de que un individuo con un nivel de habilidad conteste a la categoría de un ítem  $i$ ;  $a_i$  es el parámetro de discriminación del ítem  $i$ ; y  $b_{(r-1)_i}$  son los parámetros de dificultad para las categorías y del ítem  $i$ ; y  $D$  una constante.

El número de parámetros de dificultad ( $b$ ) es uno menos que el número de categorías de respuesta (si un ítem tiene seis respuestas categóricas, los parámetros de su curva característica serán también seis, un único parámetro de discriminación y cinco parámetros de dificultad).

Cada parámetro de dificultad especifica la puntuación sobre la escala latente ( $\theta$ ) en la que el individuo tiene un 50% de posibilidades de responder una categoría de un determinado ítem o una categoría superior.

La Información del ítem es la inversa de la variabilidad del estimador máximo verosímil de en cada nivel y es aproximadamente  $\frac{1}{s.e.(\theta)^2}$ . Esta información aportada por el ítem es una medida local y para una categoría de respuesta  $r$  de un ítem particular  $i$  la *Función de información del ítem* para el modelo de Respuesta Graduada vale:

$$I_i(\theta) = \sum_{r_i}^{m_i} - \left[ \frac{\partial^2 \log P_r^i(\theta)}{\partial \theta^2} \right] P_r^i(\theta)$$

La *Función de Información del Test*,  $I(\theta)$ , se define como la suma de las funciones de información de los  $n$  ítems que componen el test

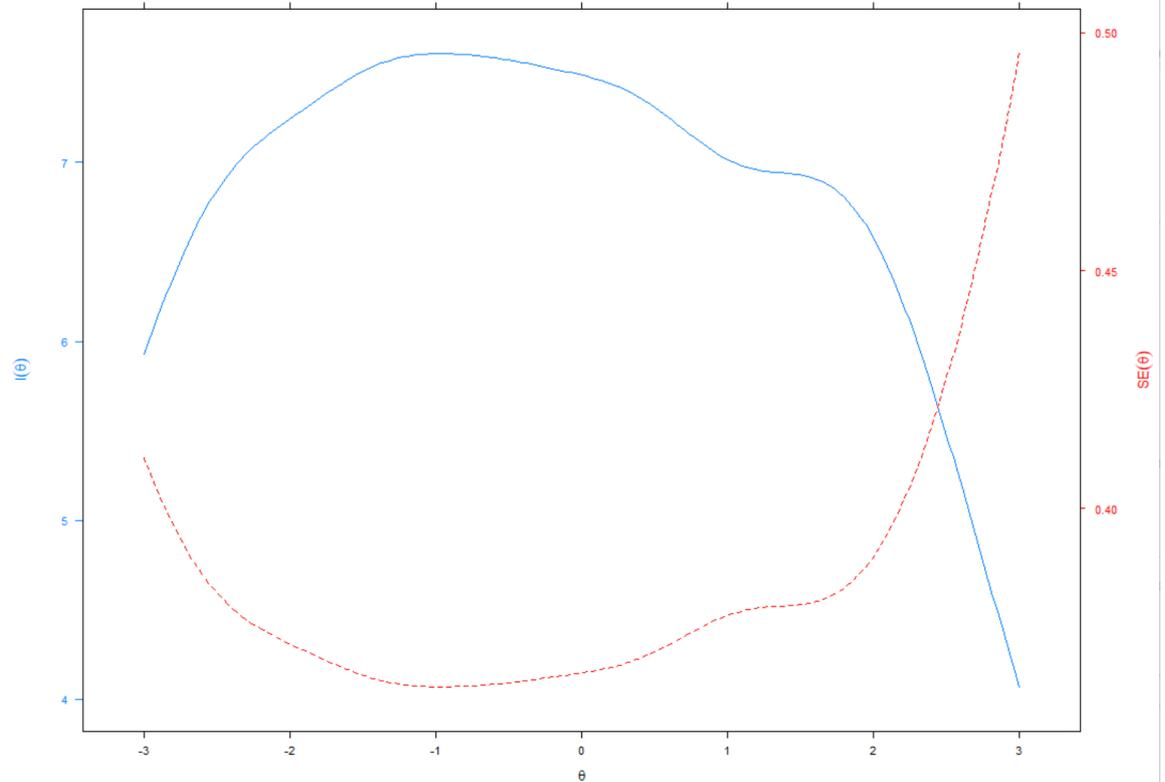
$$I(\theta) = \sum_{i=1}^n I_i(\theta)$$

En la siguiente figura (Figura 3) viene representada la Función de Información de una de las seis dimensiones que componen el cuestionario de bienestar psicológico la dimensión Control del entorno (CE). El gráfico nos indica el nivel de información proporcionado por el test en cualquier nivel de aptitud. La máxima información para el cuestionario es 58.07, lo que significa que cada uno de los seis ítems que componen esta dimensión debería de corresponder con una medida de información esperada de 4.15. El punto del rasgo latente en el que se alcanza la información máxima es

aproximadamente -1. Además, aparece el error estándar que da la misma información pero en términos de error estándar.

**Figura 3:**

*Función de Información de la Dimensión del CE del cuestionario de Bienestar Psicológico*



*Nota: Elaboración propia*

Con el modelo de Samejima, es posible calcular las puntuaciones esperadas para individuos sobre ítems o test de tipo Likert. La puntuación esperada para un individuo  $j$  sobre un ítem  $i$  se define como

$$t_{ji} = 1 + \sum_{r=1}^{m+1} P_r(\theta_j)$$

Tendríamos una expresión más complicada si los pesos para cada una de las categorías son diferentes.

La puntuación esperada para un individuo  $j$  sobre todo el test se define como

$$T_j = 1 + \sum_{r=1}^n t_{ji},$$

donde  $n$  es el número de ítems del test.

Seleccionado uno de los modelos, el paso siguiente será la estimación de los parámetros y de las puntuaciones  $\theta$  de cada sujeto a partir de las puntuaciones empíricas en el test. Lo único conocido son las respuestas de los sujetos a los ítems del test y a partir de ellas realizarse la estimación de los parámetros. El proceso de estimación de los parámetros de los modelos de la TRI se denomina "Calibración".

En la Teoría de Respuesta al Ítem, lo usual es considerar los estimadores Máximo Verosímiles Marginales (EML) que consisten en marginalizar la función de verosimilitud, integrando la función de densidad conjunta con respecto a los parámetros  $\theta_j$ , obteniéndose las estimaciones máximo-verosímiles marginales a través de un proceso iterativo conocido en la literatura como algoritmo **EM**, introducido explícitamente por Hartley, (1958), que permite encontrar los estimadores máximos verosímiles de los parámetros de los ítems.

No hay un acuerdo generalizado, entre los autores, en cuanto a la utilización de los estadísticos de ajuste; por lo que existe una gran variedad de procedimientos estadísticos para la comprobación del ajuste, si bien ninguno de ellos es totalmente satisfactorio. Ni siquiera todos los modelos admiten los procedimientos estadísticos habituales para el estudio de la bondad del ajuste, por lo que se proponen alternativamente procedimientos descriptivos para completar o sustituir a los procedimientos estadísticos. En particular, la bondad del ajuste de un modelo de respuesta graduada se mide por un estadístico chi-cuadrado donde sus grados de libertad depende de varios factores, incluyendo el número de ítems, el número de categorías de respuesta y el número de grupos o sujetos del estudio.

---

- ÍNDICES PARA EVALUAR LA ADECUACIÓN DE LOS ÍTEMS AL MODELO

En el contexto de la TRI, el Infit y el Outfit (Rasch, 1966) se destacan como dos índices cruciales que proporcionan información valiosa sobre el rendimiento de los ítems y la coherencia de la escala de medición. Ambos índices, Infit y Outfit, son necesarios para la validación y calibración de ítems en una escala de medición. Proporcionan información crucial sobre la calidad de los ítems y la fiabilidad de la prueba en su conjunto

El **Infit** es un índice que evalúa la adecuación de un ítem respecto a la TRI. Representa la sensibilidad del ítem a las variaciones en la habilidad de los participantes, con un enfoque en el comportamiento del ítem en la habilidad medida. Un Infit adecuado indica que el ítem es sensible y proporciona información relevante acerca de la habilidad del individuo.

El Infit se calcula como la suma de los cuadrados de las diferencias entre las respuestas observadas y las predicciones de la TRI, ponderadas por la varianza de las predicciones.

$$Infit = \sum_{i=1}^n w_i (X_i - \hat{X}_i)^2$$

Donde:

- $n$  es el número total de ítems.
- $w_i$  es el peso asignado al ítem  $i$  (generalmente la varianza de las predicciones del ítem).
- $X_i$  es la respuesta observada al ítem  $i$ .
- $\hat{X}_i$  es la predicción de la TRI para el ítem  $i$ .

Por otro lado, el **Outfit** es otro índice fundamental que evalúa la idoneidad de un ítem en relación con la TRI. A diferencia del Infit, el Outfit se enfoca en el comportamiento del ítem en un rango más amplio de habilidades. Un Outfit apropiado sugiere que el ítem se comporta de manera consistente en todo el espectro de habilidades, lo que es esencial para una medición precisa y fiable.

El Outfit se calcula de manera similar al Infit, pero en lugar de ponderar por la varianza de las predicciones, se utiliza la varianza de las respuestas observadas.

$$Outfit = \sum_{i=1}^n v_i (X_i - \hat{X}_i)^2$$

Donde:

- $n$  es el número total de ítems.
- $v_i$  es el peso asignado al ítem  $i$  (generalmente la varianza de las respuestas observadas).
- $X_i$  es la respuesta observada al ítem  $i$ .
- $\hat{X}_i$  es la predicción de la TRI para el ítem  $i$ .

La interpretación de los índices es la siguiente:

- *Infit y Outfit cercanos a 1*: Esto indica que el ítem se ajusta adecuadamente al modelo de medición y que está midiendo lo que se espera que mida.

- *Infit o Outfit menor a 1*: Puede indicar que el ítem es demasiado fácil para la muestra de participantes o que no está capturando

adecuadamente el rango de habilidades de la muestra(*Infit*). También indica un ajuste deficiente, posiblemente porque el ítem está influenciado por respuestas atípicas(*Outfit*).

- *Infit* o *Outfit* mayor a 1: Puede indicar que el ítem está midiendo de manera imprecisa, posiblemente debido a factores como ambigüedad en la redacción, confusión o ruido en las respuestas.

Es importante recordar que tanto el *Infit* como el *Outfit* son indicadores de la calidad del ítem en relación con el modelo de medición(Walker et al., 2018). Un ítem con un valor de *Infit* u *Outfit* que no se encuentra cerca de 1 no necesariamente es un mal ítem, pero puede requerir una revisión cuidadosa para determinar si necesita ajustes o eliminación.

### 3.2.-LOS TEST PSICOLÓGICOS

En psicología, como en otras ciencias sociales, uno de los problemas con los que se encuentran quienes tratan de realizar estudios científicos rigurosos es el problema de la medida. Cuando el objeto de estudio es la altura media de una determinada población, la solución pasa por utilizar un metro suficientemente largo y medir esa característica observable en la que estamos interesados. Sin embargo, cuando nuestro objetivo es calcular, por ejemplo, la inteligencia media de esa misma población, la tarea ya no resulta tan sencilla, no existe ningún metro ni ninguna báscula capaz de darnos una puntuación exacta como ocurría en el caso anterior.

Este tipo de variables son constructos o formulaciones teóricas, que no existían hasta que el ser humano ha sido capaz de definirlos como tal y por lo tanto no son observables directamente. Se las denomina variables o constructos latentes. Al no existir un acceso directo a la medida de ciertos constructos como pueden ser la calidad de vida, el altruismo, la hipocondría o la tolerancia, lo que debemos hacer es inferirlos a partir de indicadores o variables manifiestas (Corral Verdugo, 2001; Loehlin, 2004) es decir, de conductas observables que nos permitan obtener una aproximación lo más fidedigna posible a nuestro objeto de estudio.

A modo de analogía, si quisiésemos saber, por ejemplo, el peso de un determinado objeto, y no disponemos de báscula, o de cualquier otro instrumento destinado a tal fin, para poder inferirlo podemos recurrir a otro tipo de medidas que sí podamos realizar adecuadamente; podemos tirar el objeto desde una altura determinada y comprobar cuánto tarda en caer, podemos medir sus lados, podemos sumergirlo en un líquido y ver el volumen que desplaza..., y a partir de estas variables, calcular el peso que era nuestro objetivo.

En psicología, el tipo de variables manifiestas o conductas observables que pueden ser objeto de estudio podrían ser el número de palabras habladas por minuto, las horas de sueño, el porcentaje de

términos negativos que se emplean en una narración, el aumento o descenso de comida ingerida... una fuerte correlación entre estas variables observables puede dar lugar a una variable latente. En el caso de los ejemplos expuestos podríamos estar operacionalizando la depresión.

Cuando inferimos una variable latente a partir de correlaciones entre variables observables, hablamos de variables latentes de primer orden, cuando hablamos de un constructo que está formado por varias variables latentes de primer orden, lo que tenemos es una variable latente de segundo orden.

La manera habitual de trabajar con este tipo de variables latentes de segundo orden es en sentido inverso al expuesto hasta ahora. No se identifican las conductas observables y a partir de ahí se van construyendo los constructos latentes de primer y de segundo orden, si no que a partir de formulaciones teóricas, se llega al constructo latente con el que se va a trabajar y a partir de esa definición teórica se van desmenuzando todos los aspectos asociados hasta dejar el constructo operacionalizado en términos de conductas manifiestas. Estas conductas quedan definidas usualmente en cuestionarios (Martín Arribas, 2004).

Para construir un cuestionario, un grupo de teóricos expertos en el tema debe dar una definición lo más detallada posible del constructo a evaluar. Esta definición se operacionaliza a través de una serie de afirmaciones y debe pasar una serie de controles antes de poder trabajar con él.

La importancia de construir de manera correcta el cuestionario radica en que, si el constructo no está bien definido, puede que el cuestionario que se construya no mida dicho constructo, sino otra cosa, o que no sea del todo fiable y no arroje las mismas puntuaciones en distintas ocasiones bajo las mismas circunstancias. Si algo de esto ocurriese, las conclusiones que obtuviésemos no serían válidas.

Pongamos por ejemplo que queremos trabajar con el constructo "violencia de género". Este constructo es multidimensional y afecta a varios ámbitos o dimensiones dentro de la vida de un sujeto. Estas dimensiones a las que afecta son a su vez no observables directamente, como la "valoración cognitiva de los sujetos a la violencia de género", "la percepción de la violencia de género", " el tipo de violencia", " el entorno", y por tanto hay que buscar cuáles son las conductas observables que nos permiten hacer inferencia a dichas dimensiones. Así, el posicionamiento de un sujeto frente a la afirmación: "Cuando una mujer es agredida por su pareja, algo habrá hecho ella para provocarlo" será un indicador de la dimensión "valoración cognitiva de la violencia de género".

La idea es que cada dimensión quede perfectamente definida por una serie de afirmaciones. No debe haber información redundante, pero deben cubrirse todos los aspectos que sean importantes bajo una visión teórica, de esta forma cada dimensión captura un aspecto único de un constructo multidimensional.

Estos indicadores o conductas manifiestas no son todos iguales, ni se les puede tratar de la misma forma. En función de la direccionalidad de las variables, es decir, de si son causa o efecto del constructo, hablaremos de variables indicadoras si reflejan el constructo (si son síntomas de este, si están causados por él) y hablaremos de indicadores causales si son la causa.

Si nos referimos, por ejemplo, al constructo "borracho", variables indicadoras podrían ser el nivel de alcohol en sangre, andar haciendo eses, vomitar... y variables causales podría ser el número de cervezas que ha ingerido el sujeto, el número de whiskies, o el número de chupitos de tequila. Los ítems indicadores están correlacionados entre sí, y deben darse todos, en mayor o menor medida, mientras que entre los ítems formativos no tiene por qué existir relación alguna, ni deben darse todos a la vez para que se de la variable latente. (Serrano Cinca, 2013) .

Cada una de las dimensiones podrían estar formadas por ítems causales e indicadores o por ambos, pero sabemos que la forma que van a tener de relacionarse estos indicadores no va a ser la misma.

En cuanto a la manera de dar una puntuación global del constructo, lo más intuitivo podría ser dar una puntuación que provenga de la suma de las subescalas o subdimensiones con las que hemos trabajado, pero en psicología, como en otras ciencias, el concepto holístico de los constructos, es como resumía de forma muy concisa Aristóteles "algo más que la suma de las partes".

Es decir, no basta con conocer todos los componentes, también hay que conocer la forma en la que se relacionan y cuál es su función, importancia y peso en el constructo del que forman parte.

Por tanto, no tiene cabida en la mayoría de los casos dar puntuaciones globales, ya que de esta forma estaríamos perdiendo gran cantidad de información, y la información que diésemos no sería precisa. Lo más aconsejable es hablar de las distintas dimensiones por separado y de la relación entre ellas, que ya hemos dicho que, en el caso de las indicaciones formativas, no tienen por qué existir.

En el cuestionario de Bienestar Psicológico del que ya hemos hablado, contamos con 6 dimensiones: Autoaceptación, autonomía, Dominio del entorno, Relaciones positivas con otras personas, Crecimiento personal y Propósito en la vida.

Cada una de ellas está medida por varios ítems que miden conductas manifiestas. Al ser objeto de estudio el Bienestar psicológico, estos ítems son indicadores, es decir, el constructo marca la respuesta a los ítems.

### 3.3.-MATERIAL

El test utilizado fue el Cuestionario de Bienestar Psicológico de Carol Ryff (1989), en su versión de 84 ítems. El concepto de bienestar según la autora, se vertebra en torno a 6 dimensiones teóricas, como ya se ha comentado anteriormente, que son: relaciones positivas con los otros (RP), autonomía (AU), Control del entorno (CE), Crecimiento personal (CP), Propósito en la vida (PV) y Autoaceptación (AA). De tal manera, que los 84 ítems quedan repartidos equitativamente entre las 6 dimensiones, correspondiendo 14 a cada una de ellas. Los ítems están formulados de manera directa e inversa, siendo en cada dimensión 7 ítems directos y 7 inversos.

La consistencia interna medida con  $\alpha$  de Cronbach fue de 0.93 para la dimensión AA, 0.91 para RP, 0.86 para AU, 0.90 para CE, 0.90 para PV y 0.87 para la dimensión CP.

Los sujetos a los que se les pasó el cuestionario son 631, de los cuales el 75.34% fueron mujeres. Todos los sujetos tenían edades comprendidas entre los 18 y los 24 años de edad y se encontraban en el momento de responder el instrumento cursando estudios universitarios.

### 3.4.-RESULTADOS

A continuación, vamos a realizar el proceso estadístico para conseguir la reducción del instrumento de medida

El conjunto de datos sobre el que vamos a trabajar consta de 84 ítems divididos en 6 dimensiones teóricas, cada una de ellas compuesta por el mismo número de reactivos (14). Estos ítems se pasaron a 633 sujetos estudiantes universitarios de diferentes Universidades españolas.

Antes de comenzar con el análisis psicométrico de la escala, vamos a estudiar los descriptivos básicos. Encontramos que las dimensiones tienen una varianza que oscila entre 7.69 y 11.0. La media de las dimensiones está entre 56.5 y 66.7.

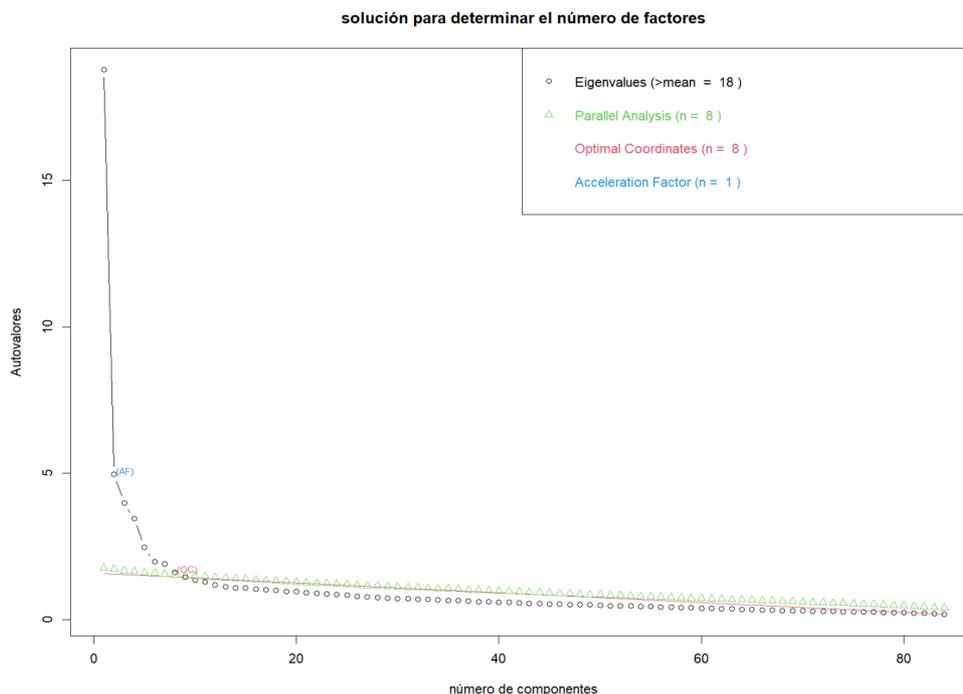
---

#### 3.4.1.-EXPLORACIÓN DE LA ESTRUCTURA FACTORIAL.

Para una primera aproximación de los datos, se realizó un análisis factorial exploratorio con rotación oblicua, ya que en este constructo psicológico está probado que las dimensiones están relacionadas entre sí (Ryff, 1989b), y por lo tanto debemos utilizar una rotación que nos permita trabajar con factores relacionados. En concreto se trabajó con una rotación Oblimin. De esta forma comenzamos a estudiar la estructura de los datos. En un primer momento, se utilizó como criterio para la elección de factores el análisis paralelo, ya que es el criterio estadístico más oportuno puesto que proporciona una base objetiva a partir de la comparación entre los resultados obtenidos con datos reales y los obtenidos con datos simulados o aleatorios, pero con la misma estructura de correlación que los datos reales, por lo tanto, nos aporta una evaluación estadística del número de factores a retener.

**Figura 4:**

Scatter plot para determinar el número de factores a retener.



*Nota: Elaboración propia*

El análisis paralelo retiene como óptimos 8 factores y los resultados se muestran en la figura 4. Analizamos también el número de factores retenidos según el criterio de los autovalores mayores que la media y obtenemos 18 factores, y analizando el factor de aceleración solamente nos quedaríamos con un único factor.

Con la solución factorial proporcionada con 8 factores, encontramos que los ítems no se organizan de forma adecuada, y que muchos de ellos no aparecen representados por tener cargas factoriales menores a 0.30. (ver Tabla 2) También encontramos ítems con cargas bajas (entre 0.30 y 0.5) que pesan en dos factores, con poca diferencia de peso factorial entre ellas, sin que quede claro a que factor pertenecen. Vamos a señalar los ítems problemáticos de las diferentes subescalas, para seguir posteriormente con el análisis. En este caso voy a señalar los ítems con baja carga factorial, o que cargan en varios factores. El tema de la estructura lo veremos más adelante.

- RP:1, 5 y 9
- AU: 3, 5 Y 12.
- CE: 1, 4, 6, 7, 9 Y 14
- CP: 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13 Y 14
- PV: 5, 7, 11, 12, 14
- AA: 2, 3, 4, 7, 9, 10, 14

**Tabla 2:**  
*Análisis Factorial Exploratorio Con Rotación Oblimin Y Método De Retención De Factores Basado En El Análisis Paralelo*

	Componente							
	1	2	3	4	5	6	7	8
@01RP								
@02RP		0.592						
@03RP		0.788						
@04RP		0.302						
@05RP						0.309	0.482	
@06RP		0.723						
@07RP		0.518					0.485	
@08RP		0.73						
@09RP		0.316					0.413	
@10RP		0.6						
@11RP		0.603						
@12RP		0.572					0.412	
@13RP		0.502						
@14RP		0.409						0.314
@01AU				0.567				
@02AU				0.531				
@03AU				0.405			0.307	
@04AU				0.623				
@05AU			0.306	0.43				
@06AU				0.559				
@07AU							0.546	
@08AU				0.609				
@09AU				0.553				
@10AU				0.569				
@11AU				0.554				
@12AU				0.439				0.344
@13AU				0.553				
@14AU				0.405				
@01CE			0.328		0.394			
@02CE					0.584			
@03CE		0.699						
@04CE	0.443				0.432		0.313	
@05CE					0.652			
@06CE	0.321		0.308					
@07CE	0.335						0.485	
@08CE					0.722			
@09CE	0.517				0.542			
@10CE	0.503							
@11CE					0.685			
@12CE	0.557							
@13CE	0.357				0.504			
@14CE	0.492		0.369					
@01CP						0.442		
@02CP	0.355					0.455		
@03CP						0.621		-0.332
@04CP						0.709		
@05CP						0.625		
@06CP				0.302				
@07CP						0.38	0.498	
@08CP	0.471					0.345		
@09CP	0.478							
@10CP					0.306	0.403		
@11CP	0.448					0.392		
@12CP	0.396					0.307	0.36	
@13CP						0.311		
@14CP								
@01PV	0.323		0.569					
@02PV								0.662
@03PV								0.667
@04PV	0.62							
@05PV	0.363	0.376						
@06PV	0.55							
@07PV	0.438					0.329		0.325
@08PV	0.587							
@09PV	0.59							
@10PV	0.656							
@11PV						0.39		
@12PV	0.47		0.457					
@13PV	0.462		0.548					
@14PV		0.335	0.463					
@01AA			0.627					
@02AA			0.458		0.446			
@03AA		0.323	0.341		0.35			
@04AA			0.46	0.34	0.344			
@05AA			0.443					
@06AA			0.496					
@07AA	0.361	0.325	0.479					
@08AA	0.465		0.613					
@09AA			0.319	0.393				
@10AA		0.315	0.383		0.372			
@11AA		0.381	0.542					
@12AA			0.618					
@13AA	0.322		0.508					
@14AA		0.418	0.337		0.307			

Nota: Elaboración propia.

Ante estos resultados, vemos que, aunque la mayor parte de los ítems se organizan en 6 dimensiones de manera correcta, hay muchos de ellos que aparecen descolocados, y además hay dos factores que tienen un número reducido de ítems.

Con esto, vamos a realizar de nuevo el AFE, pero ahora vamos a ajustar el análisis a 6 factores, utilizando el criterio teórico para ello.

En este segundo análisis vemos que volvemos a tener los mismos problemas, algunos ítems no aparecen por tener cargas factoriales  $<0,30$ , y otros tienen cargas factoriales bajas y muy similares en varios factores a la vez como se aprecia en la Tabla 3.

En cuanto a la estructura, se puede observar que algunos factores sí que agrupan de manera mayoritaria a las dimensiones teóricas, pero otras dimensiones están repartidas por varios factores.

La dimensión RP, está casi por completo agrupada en el factor 2, aunque algunos ítems se desplazan al 4 junto con el factor CP y el ítem 1 que no tiene una carga factorial suficiente.

La dimensión AU está completamente en el factor 5, aunque el ítem 7 y el 14 siguen siendo problemáticos por pesar en dos factores.

La dimensión CE está repartida mayoritariamente entre el factor 1 y el 3, aunque algunos de sus ítems pesan en el factor 2 o 4. Este factor es uno de los que menos agrupamiento presentan entre sus ítems.

La dimensión CP agrupa la mayoría de sus ítems en el factor 4, aunque los ítems 1, 4, 6, 10 y 13 tienen pesos mayores en el factor 6, y el ítem 14 no alcanza el umbral de 0,3.

La dimensión PV presenta también bastantes problemas. Sus ítems están repartidos entre el factor 1, junto con ítems de la dimensión CE y AA,

el factor 3, con otros ítems diferentes de la dimensión CE, y en el factor 6, junto con ítems de la dimensión CP.

Por último, la dimensión AA también presenta una buena agrupación de sus ítems, aunque como ya hemos comentado, algunos ítems de la dimensión CE y de la dimensión PV se mezclan con ella.

**Tabla 3:**

Análisis Factorial Exploratorio con Rotación Oblimin, utilizando como criterio para retener factores el criterio teórico.

	Cargas de los Componentes					
	1	2	3	4	5	6
@01RP						
@02RP		0.563				
@03RP		0.775				
@04RP		0.324		0.395		
@05RP				0.52		
@06RP		0.72				
@07RP		0.57		0.364		
@08RP		0.713				
@09RP		0.358		0.436		
@10RP		0.593				
@11RP		0.597				
@12RP		0.613		0.359		
@13RP		0.474				
@14RP		0.451				
@01AU					0.502	
@02AU					0.531	
@03AU					0.473	
@04AU					0.615	
@05AU				0.385	0.408	
@06AU					0.561	
@07AU			0.336		0.317	
@08AU					0.569	
@09AU				0.324	0.55	
@10AU					0.578	
@11AU					0.551	
@12AU					0.44	
@13AU					0.56	
@14AU				0.344	0.411	
@01CE	0.447		0.343			
@02CE	0.422					
@03CE		0.689				
@04CE			0.626			
@05CE				-0.38		
@06CE	0.348					
@07CE			0.508			
@08CE	0.338			-0.405		
@09CE			0.71			
@10CE			0.53			
@11CE			0.435			
@12CE	0.312		0.499			
@13CE	0.374		0.427			
@14CE	0.394		0.416			
@01CP						0.417
@02CP				0.529		
@03CP				0.398		
@04CP				0.365		0.477
@05CP				0.642		
@06CP				0.302		0.365
@07CP				0.528		
@08CP				0.534		
@09CP			0.364	0.441		
@10CP						0.325
@11CP				0.612		
@12CP				0.601		
@13CP	0.332					0.378
@14CP						
@01PV	0.574		0.329			
@02PV						0.491
@03PV						0.547
@04PV			0.5			
@05PV		0.346				0.34
@06PV			0.48			0.307
@07PV			0.391			0.464
@08PV			0.503			
@09PV			0.598			
@10PV			0.601			
@11PV				0.306		0.413
@12PV	0.513		0.388			
@13PV	0.539		0.384			
@14PV	0.492					
@01AA	0.643					
@02AA	0.623					
@03AA	0.459					
@04AA	0.557				0.349	
@05AA	0.512				0.319	
@06AA	0.44			0.348		
@07AA	0.532					0.345
@08AA	0.631		0.382			
@09AA	0.409				0.391	
@10AA	0.498				0.301	
@11AA	0.612	0.35				
@12AA	0.551					
@13AA	0.53					
@14AA	0.439	0.391			0.311	

Nota: Elaboración propia.

Con 6 dimensiones, explicamos el 42.40% de la varianza total como podemos observar en la tabla 4

**Tabla 4:**

*Porcentaje de la varianza explicado por cada factor y acumulado.*

Componente	SC Cargas	% de la Varianza	% Acumulado
1	8.07	9.61	9.61
2	6.95	8.27	17.88
3	5.89	7.02	24.90
4	5.03	5.99	30.88
5	6.01	7.15	38.04
6	3.67	4.37	42.40

*Nota: Elaboración propia.*

Además, podemos observar en la tabla 5, la correlación entre los 6 componentes o factores. Como vemos, el factor 4 correlaciona muy bajo con el resto de factores, y solo encontramos correlaciones moderadas entre el factor 1 y el 2, el 1 y el 3 y el 1 y el 5.

**Tabla 5:**

*Correlación entre las parejas de factores.*

	1	2	3	4	5	6
1	—	0.394	0.316	0.0899	0.426	0.23421
2		—	0.242	0.0150	0.248	0.19696
3			—	0.0538	0.161	0.17698
4				—	0.102	-0.00753
5					—	0.15944
6						—

*Nota: Elaboración propia.*

Como hemos visto, no todos los ítems se agrupan de manera satisfactoria con el resto de ítems de su dimensión, por lo que vamos a estudiar si es un problema de falta de correlación entre ellos y por lo tanto no hay unidimensionalidad entre las escalas.

Para ello vamos a realizar un análisis de fiabilidad, y a estudiar el grado en el que los ítems de una misma dimensión miden lo mismo.

---

### 3.4.2.-ANÁLISIS DE FIABILIDAD

- 
- DIMENSIÓN RELACIONES PERSONALES CON LOS OTROS

En este caso encontramos una consistencia interna alta, de 0.849 para el Alpha de Cronbach y de 0.853 para  $\omega$  de McDonald.

Vamos a estudiar los estadísticos de fiabilidad:

En primer lugar, encontramos que el ítem 1 y el 5 son candidatos a ser eliminados, ya que los valores de fiabilidad aumentan si los eliminamos, y además tienen una correlación muy baja con el resto de la escala ( $<0.3$ ). Vemos que hay otros ítems que también correlacionan bajo ( $<0.4$ ) como son el ítem 4, el 9 y el 14. En la Tabla 6 y en el mapa de calor de la matriz de correlaciones policóricas de la Figura 5 podemos apreciar las correlaciones de cada uno de los ítems con el total de la escala, y la correlación policórica entre todas las parejas de ítems. Vemos que hay un subconjunto de ítems que correlacionan alto entre sí, pero que no lo hacen con el resto de ítems, como son el ítem 3, 6, 11, 10, 8, 2 y otra serie de ítems que correlacionan bajo o muy bajo con todos los ítems.

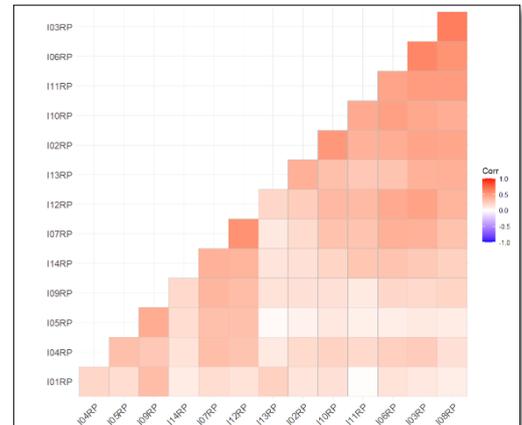
**Tabla 6:**  
Estadísticos de fiabilidad

Estadísticas de Fiabilidad de Elemento				Si se descarta el elemento	
	Media	DE	Correlación del elemento con otros	$\alpha$ de Cronbach	$\omega$ de McDonald
@01RP	4.37	1.215	0.244	0.853	0.856
@02RP	4.33	1.333	0.543	0.835	0.843
@03RP	4.68	1.290	0.695	0.825	0.832
@04RP	5.5	0.764	0.37	0.845	0.85
@05RP	5.47	0.727	0.264	0.849	0.855
@06RP	4.7	1.310	0.653	0.828	0.834
@07RP	5.15	0.963	0.533	0.837	0.84
@08RP	4.19	1.512	0.638	0.828	0.836
@09RP	4.96	0.852	0.382	0.845	0.849
@10RP	4.56	1.288	0.583	0.833	0.84
@11RP	4.19	1.384	0.553	0.835	0.841
@12RP	5.18	0.971	0.593	0.834	0.837
@13RP	3.64	1.503	0.438	0.844	0.849
@14RP	4.38	1.171	0.388	0.845	0.849

Nota: Elaboración propia

**Figura 5:**

Matriz de correlaciones Policóricas entre los ítems de la dimensión Relaciones Positivas con los otros



## • DIMENSIÓN AUTONOMÍA

En esta dimensión tenemos un  $\alpha$  de Cronbach de 0.829, y una  $\omega$  de McDonald de 0.832. En este caso no hay ningún ítem que aumente el  $\alpha$  al ser eliminado, ni las correlaciones con el total de la escala están por debajo de 0.30 para ningún ítem (Tabla 7).

Tenemos ítems que correlacionan por debajo de 0,40 como son el ítem 3, 7 y 12.

Recordemos que esta escala, en el AFE salía con todos los ítems en el mismo factor. Si analizamos la Figura 6, vemos que en este caso todos los ítems tienen una relación moderada entre ellos, y que no hay ninguno que destaque especialmente por tener correlaciones excesivamente altas o bajas con el resto de ítems.

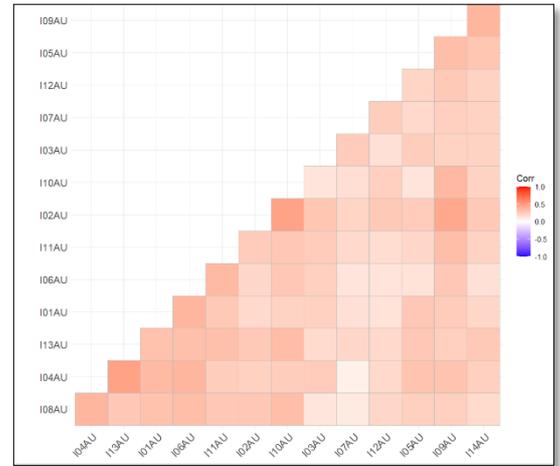
**Tabla 7:**  
Estadísticos de fiabilidad de la escala

AU

	Media	DE	Correlación del elemento con otros	Si se descarta el	
				$\alpha$ de Cronbach	$\omega$ de McDonald
@14AU	4.63	1.072	0.429	0.82	0.823
@13AU	4.02	1.337	0.531	0.812	0.817
@12AU	4.37	1.353	0.369	0.825	0.827
@11AU	4.16	1.079	0.481	0.817	0.82
@10AU	4.23	1.401	0.489	0.816	0.82
@09AU	4.77	0.956	0.55	0.814	0.815
@08AU	4.3	1.252	0.471	0.817	0.821
@07AU	4.56	1.141	0.333	0.826	0.83
@06AU	4.14	1.260	0.473	0.817	0.821
@05AU	5.02	0.967	0.437	0.82	0.823
@04AU	3.33	1.356	0.523	0.813	0.817
@03AU	4.1	1.202	0.393	0.822	0.826
@02AU	4.55	1.259	0.516	0.814	0.818
@01AU	4.42	1.233	0.467	0.817	0.821

**Figura 6:**

Matriz de Correlaciones Policóricas entre los ítems de la dimensión Autoaceptación



Nota: Elaboración propia

## • DIMENSIÓN CONTROL DEL ENTORNO

En esta dimensión, encontramos un  $\alpha$  de Cronbach de 0.850, y una  $\omega$  de McDonald de 0.852. En este caso no hay ningún ítem que aumente el  $\alpha$  al ser eliminado, ni las correlaciones con el total de la escala  $<0.30$ .

En este caso, sin embargo, el AFE nos mostraba que la estructura factorial de la escala no estaba clara, y que había ítems que pesaban en más de una dimensión. (Tabla 8)

Los únicos ítems que tienen una baja correlación con la escala ( $<0.4$ ) son el 3 y el 7.

En la matriz de correlaciones policóricas encontramos dos grupos de ítems diferenciados, por un lado, están los ítems 13, 9, 11, 1, 4, 7, 6, 10, 12, 14, que se encuentran con una correlación moderada entre ellos, y por otro lado el resto de los ítems que tienen correlaciones bajas o muy bajas entre ellos (Figura 7).

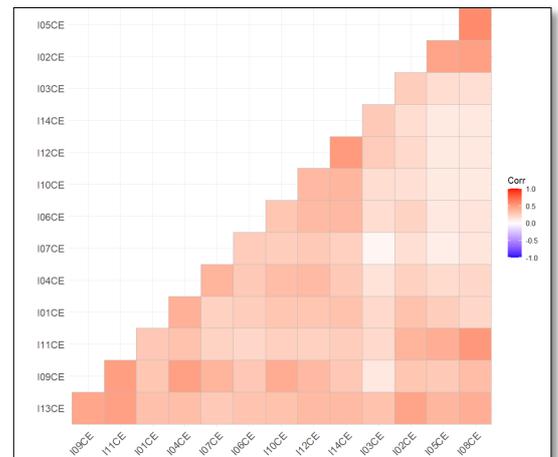
**Tabla 8:**

*Estadísticos de fiabilidad*

Estadísticas de Fiabilidad de Elemento					
	Media	DE	Correlación del elemento con otros	Si se descarta el	
				$\alpha$ de Cronbach	$\omega$ de McDonald
@01CE	4.22	1.015	0.485	0.841	0.842
@02CE	3.84	1.314	0.529	0.838	0.841
@03CE	4.73	1.231	0.331	0.85	0.851
@04CE	4.32	1.006	0.52	0.839	0.84
@05CE	2.75	1.251	0.453	0.842	0.846
@06CE	4.66	1.041	0.424	0.844	0.846
@07CE	4.61	0.966	0.384	0.846	0.848
@08CE	2.75	1.377	0.493	0.84	0.843
@09CE	3.9	1.262	0.604	0.833	0.835
@10CE	4.31	1.088	0.451	0.842	0.844
@11CE	3.57	1.329	0.592	0.833	0.837
@12CE	4.3	1.106	0.495	0.84	0.841
@13CE	4	1.264	0.658	0.829	0.832
@14CE	4.42	1.128	0.475	0.841	0.843

**Figura 7:**

*Matriz de Correlaciones Policóricas entre los ítems de la dimensión Control del Entorno*



*Nota: Elaboración propia*

## • DIMENSIÓN CRECIMIENTO PERSONAL

La fiabilidad de esta dimensión baja con respecto a las dimensiones previas. En este caso encontramos un  $\alpha$  de Cronbach de 0.791, y una  $\omega$  de McDonald de 0.818.

Los ítems candidatos a ser eliminados en esta dimensión son el 10 y el 14 ya que, al eliminarlos, aumenta la fiabilidad y además tienen una correlación con el total de la escala muy baja (Tabla 9). Vemos además en la matriz de correlaciones policóricas (Figura 8) que estos dos ítems no correlacionan con el resto de los ítems individuales. Los ítems 11, 12, 8 y 9 sin embargo tienen correlaciones altas entre sí.

**Tabla 9:**  
Estadísticos de fiabilidad

Estadísticas de Fiabilidad de Elemento				Si se descarta el elemento	
	Media	DE	Correlación del elemento con otros	$\alpha$ de Cronbach	$\omega$ de McDonald
@01CP	5.17	1.125	0.346	0.784	0.814
@02CP	5.16	0.891	0.464	0.775	0.803
@03CP	4.66	1.121	0.454	0.774	0.807
@04CP	4.44	1.069	0.393	0.78	0.812
@05CP	5.26	0.825	0.513	0.772	0.8
@06CP	4.84	1.142	0.46	0.774	0.806
@07CP	5.41	0.775	0.393	0.781	0.809
@08CP	5.02	0.9	0.505	0.772	0.799
@09CP	4.86	0.928	0.54	0.769	0.797
@10CP	3.6	1.286	0.256	0.795	0.821
@11CP	5.13	0.894	0.546	0.769	0.795
@12CP	5.09	0.856	0.533	0.77	0.796
@13CP	4.6	1.228	0.461	0.774	0.807
@14CP	3.53	1.351	0.136	0.809	0.827

Nota: Elaboración propia

• DIMENSIÓN PROPÓSITO EN LA VIDA

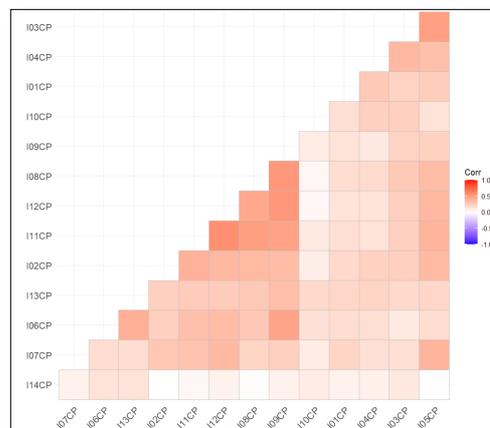
En esta dimensión encontramos un  $\alpha$  de Cronbach de 0.829, y una  $\omega$  de McDonald de 0,838. En este caso los ítems 2 y 3 aumenta la fiabilidad de la escala si se eliminan, y además la correlación con el total es muy baja ( $<0.3$ ) (Tabla 10). El ítem 11 también tiene una correlación baja con el resto de ítems de la escala ( $<0.4$ ) (Figura 9). Esta escala no aparecía de manera correcta en el AFE previo, ya que los ítems aparecían repartidos por varios factores.

**Tabla 10:**  
Estadísticos de fiabilidad

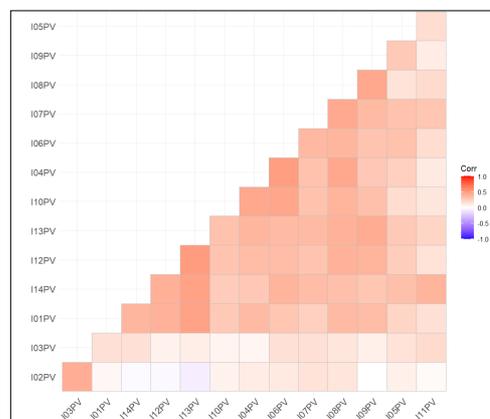
Estadísticas de Fiabilidad de Elemento				Si se descarta el elemento	
	Media	DE	Correlación del elemento con otros	$\alpha$ de Cronbach	$\omega$ de McDonald
@01PV	4.69	1.05	0.508	0.816	0.825
@02PV	3.76	1.24	0.134	0.842	0.847
@03PV	4	1.12	0.253	0.832	0.842
@04PV	4.5	1.24	0.542	0.813	0.823
@05PV	3.89	1.18	0.404	0.823	0.833
@06PV	4.63	1.31	0.585	0.809	0.821
@07PV	4.88	1.08	0.55	0.813	0.823
@08PV	4.82	1.03	0.58	0.811	0.82
@09PV	4.54	1.04	0.496	0.817	0.826
@10PV	4.3	1.24	0.49	0.817	0.827
@11PV	5.23	1.07	0.312	0.828	0.838
@12PV	4.55	1.09	0.528	0.814	0.823
@13PV	4.75	1.06	0.578	0.811	0.819
@14PV	5.22	1.14	0.551	0.812	0.822

Nota: Elaboración propia

**Figura 8:**  
Matriz de Correlaciones policóricas entre los ítems de la dimensión Crecimiento Personal



**Figura 9:**  
Matriz de Correlaciones policóricas entre los ítems de la dimensión Propósito en la Vida



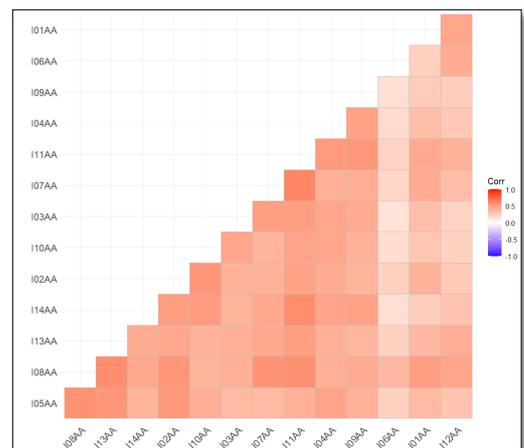
• DIMENSIÓN AUTOACEPTACIÓN

En esta dimensión la fiabilidad es muy alta, con una fiabilidad de 0.901 para el  $\alpha$  de Cronbach y de 0.905 para el  $\omega$  de McDonald. En este caso el ítem 6 es el único candidato a ser eliminado, ya que aumenta la fiabilidad de la escala sin él (Tabla 11). En este caso no encontramos ítems que correlacionen bajo con el total de la escala, el único es el ítem 6, que correlaciona por debajo de 0.4. Además este ítem es el que menos correlaciona con todos los demás como podemos observar en la Figura 10.

**Tabla 11:**  
**Estadísticos de fiabilidad**

	Media	DE	Correlación del elemento con otros	Si se descarta el elemento	
				$\alpha$ de Cronbach	$\omega$ de McDonald
@01AA	4.44	1.237	0.531	0.896	0.901
@02AA	4.23	1.264	0.65	0.892	0.896
@03AA	4.04	1.328	0.585	0.894	0.899
@04AA	3.6	1.360	0.625	0.893	0.898
@05AA	4.52	0.994	0.613	0.894	0.898
@06AA	4.53	1.078	0.338	0.903	0.907
@07AA	4.91	1.115	0.644	0.892	0.897
@08AA	4.97	1.011	0.716	0.89	0.893
@09AA	3.99	1.363	0.585	0.894	0.899
@10AA	3.6	1.505	0.599	0.894	0.899
@11AA	4.6	1.375	0.734	0.888	0.893
@12AA	4.63	1.258	0.494	0.898	0.902
@13AA	4.76	1.028	0.639	0.893	0.896
@14AA	4.39	1.477	0.631	0.893	0.897

**Figura 10:**  
*Matriz de Correlaciones policóricas entre los ítems de la dimensión Autoaceptación*



*Nota: Elaboración propia*

Una vez analizada la fiabilidad de cada subescala, vamos a realizar un análisis de la información que aporta cada uno de los ítems al modelo apoyándonos en las técnicas ofrecidas por la Teoría de Respuesta al Ítem.

---

### 3.4.3.-TEORÍA DE RESPUESTA EL ÍTEM: FUNCIÓN DE INFORMACIÓN

Antes de calcular las funciones de información para cada una de las dimensiones y para cada 1 de los ítems vamos a comprobar que cada una de las dimensiones cumple la unidimensionalidad necesaria para poder aplicar los modelos de la TRI, en este caso vamos a realizar un análisis de componentes principales para cada dimensión, si la mayor parte de la varianza está explicada por un único factor, concluiremos que la dimensión es unidimensional (Tabla 12).

**Tabla 12:**

*Varianza explicada por el primer factor en cada dimensión de la escala de Bienestar Psicológico*

<b>Dimensión RP</b>	<b>Dimensión AU</b>	<b>Dimensión CE</b>
35.23	31.62	34.45
<b>Dimensión CP</b>	<b>Dimensión PV</b>	<b>Dimensión AA</b>
30.85	33.52	45.00

*Nota: Elaboración propia*

Según la teoría, podemos considerar que, si el primer factor explica entre un 30 y un 40% de la varianza total, podemos asumir que la dimensión con la que estamos trabajando es unidimensional (Slocum-Gori & Zumbo, 2011). Como vemos, la premisa se cumple para todas las dimensiones, así que pasamos a analizarlas según el modelo de respuesta graduada.

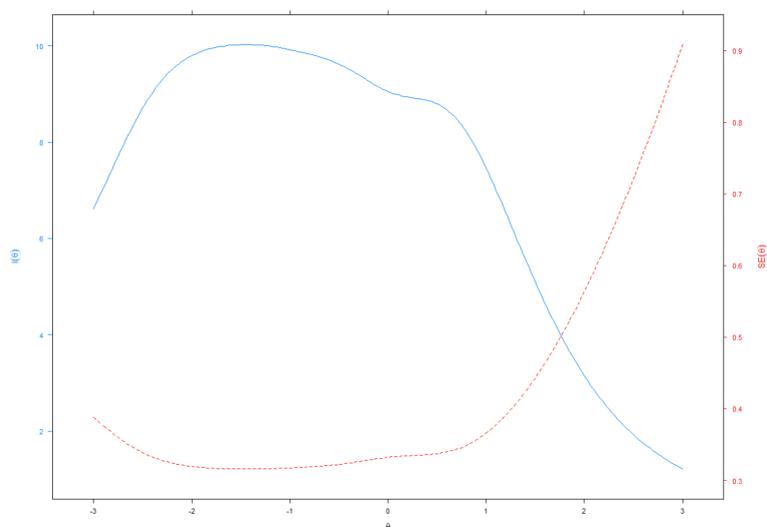
---

- **DIMENSIÓN RELACIONES POSITIVAS CON LOS OTROS**

La dimensión RP aporta una información total de 61.92 como podemos ver en la Figura 11

**Figura 11:**

*Curva de la Función de Información del test y curva del error estándar*



*Nota: Elaboración propia*

Haciendo un análisis individual para cada uno de los ítems encontramos que cada uno de ellos debe aportar al menos 4,42 para que sea tenido en cuenta en la escala. En este caso son los ítems 3, 6, 8, 10, 11 y 12 los que superan ese umbral como podemos observar en la Tabla 13 y la Figura 12.

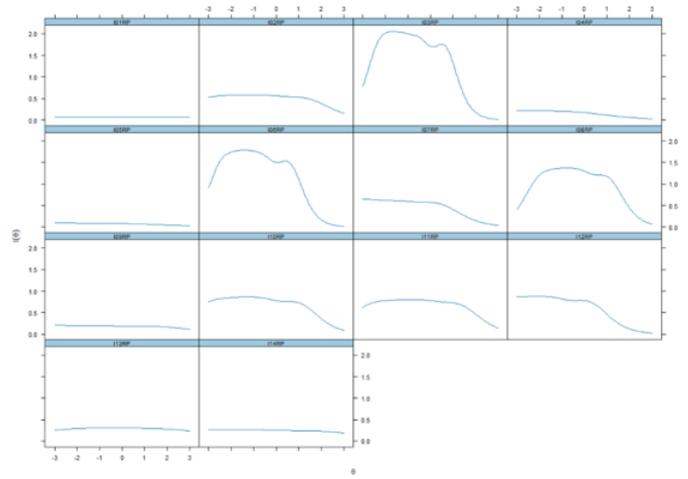
**Tabla 13:**

Información aportada por cada uno de los ítems al total de la dimensión

**Figura 12:**

Función de información de cada uno de los ítems de la dimensión

ítem 1	0.32
ítem 2	2.85
ítem 3	12.01
ítem 4	1.23
ítem 5	0.57
ítem 6	10.73
ítem 7	3.10
ítem 8	8.41
ítem 9	0.99
ítem 10	6.89
ítem 11	5.97
ítem 12	6.08
ítem 13	1.54
ítem 14	1.23



Nota: Elaboración propia

Si analizamos el Infit y el Outfit de la dimensión RP (Tabla 14), encontramos que no hay ningún ítem excesivamente con valores excesivamente bajos, pero en este caso, el ítem 1 muestra una puntuación alejada de 1, por lo que podemos concluir que es un ítem que puede estar midiendo de manera imprecisa

**Tabla 14:**

Índices Infit y Outfit de la escala RP

	Infit	Outfit
@01RP	1.258	1.325
@02RP	0.992	1.007
@03RP	0.895	0.851
@04RP	1.168	1.093
@05RP	1.130	1.092
@06RP	1.003	0.982
@07RP	0.941	0.933
@08RP	1.033	1.023
@09RP	0.807	0.808
@10RP	0.966	0.951
@11RP	0.996	1.055
@12RP	0.915	0.852
@13RP	1.229	1.274
@14RP	1.012	1.109

Nota: Elaboración propia

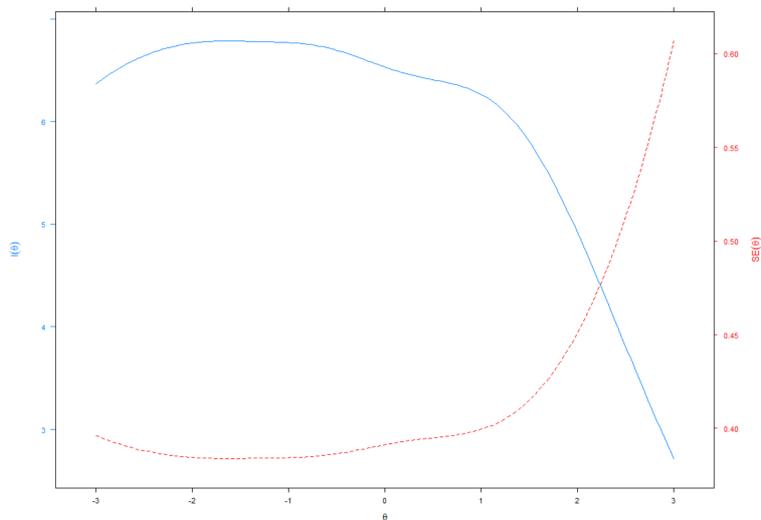
---

- DIMENSIÓN AUTOACEPTACIÓN

La máxima información de la dimensión AU es de 53.25 como se observa en la función de información para esta (véase Figura 13).

**Figura 13:**

Curva de la Función de Información del test y curva del error estándar



Nota: Elaboración propia

Podemos observar que esta dimensión aporta información para niveles medios o bajos de autoestima, sin embargo, para puntuaciones altas o muy altas, no aporta información.

Vamos a ver ahora cuanto aporta cada uno de los ítems a la información total de la dimensión:

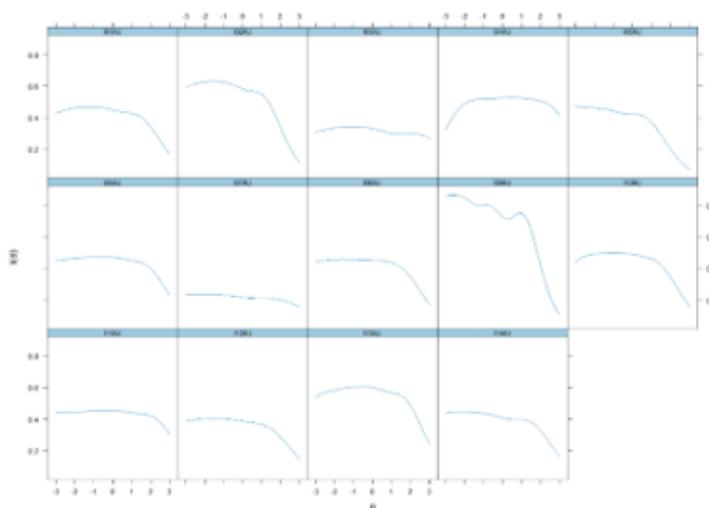
**Tabla 15:**

*Información aportada por cada uno de los ítems al total de la dimensión*

**Figura 14:**

*Función de información de cada uno de los ítems de la dimensión*

ítem 1	3.77
ítem 2	4.11
ítem 3	3.33
ítem 4	3.81
ítem 5	3.77
ítem 6	3.77
ítem 7	2.55
ítem 8	3.61
ítem 9	5.77
ítem 10	3.41
ítem 11	4.22
ítem 12	3.07
ítem 13	4.2
ítem 14	3.85



*Nota: Elaboración propia*

Lo mínimo que debe aportar cada ítem para ser tenido en cuenta en la dimensión es 3.80, y encontramos 8 de los 14 ítems no superan ese umbral, y además, los ítems que eran problemáticos en el análisis de fiabilidad (3, 7 Y 12), lo son ahora también. (Véase Tabla 15 y Figura 14)

Pasamos a realizar también un análisis del Infit y el Outfit de la dimensión Autoaceptación (Tabla 16), y encontramos que un ítem que se aleja del 1, en este caso por encima, lo que indicaría que está midiendo de manera imprecisa o que hay mucho ruido en las respuestas.

**Tabla 16 :**

*Índices Infit y Outfit de la escala AU*

Item statistics of the rating scale model		
	Infit	Outfit
@01AU	1.051	1.085
@02AU	1.103	1.088
@03AU	0.987	1.087
@04AU	0.952	0.957
@05AU	0.99	1.024
@06AU	0.981	0.997
@07AU	1.104	1.171
@08AU	1.029	1.050
@09AU	0.693	0.691
@10AU	1.211	1.226
@11AU	0.747	0.787
@12AU	1.345	1.466
@13AU	0.994	1.023
@14AU	0.931	0.999

Nota. Infit= Information-weighted mean square statistic; Outfit= Outlier-sensitive means square

*Nota: Elaboración propia*

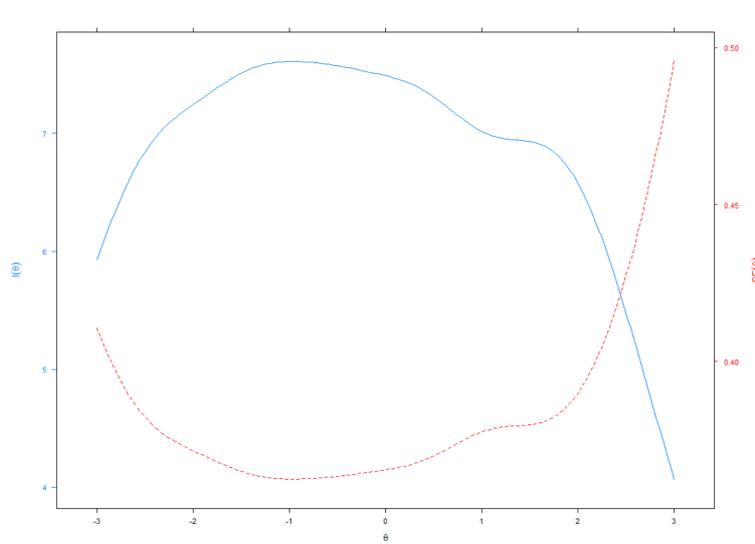
---

- **DIMENSIÓN CONTROL DEL ENTORNO**

La información total aportada por la dimensión CE es 58.07, y la curva de la función de información es la que se muestra en la figura 15.

**Figura 15:**

Curva de la Función de Información del test y curva del error estándar.



Nota: Elaboración propia.

Cada ítem debe aportar al menos 4.19 para ser tenido en cuenta en el análisis. Vemos que solamente 4 de los 14 ítems aportan información a la escala, el 4, 9, 11 y 13, estos ítems aparecen agrupados en el mismo factor en el AFE, que hemos analizado previamente (Véase Tabla 17 y Figura 16).

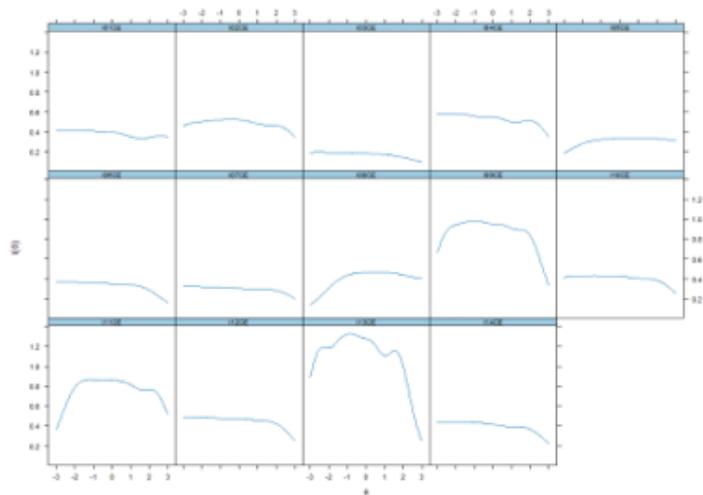
**Tabla 17:**

Información aportada por cada uno de los ítems al total de la dimensión

**Figura 16 :**

Función de información de cada uno de los ítems de la dimensión

ítem 1	3.94
ítem 2	3.93
ítem 3	2.04
ítem 4	4.72
ítem 5	3.05
ítem 6	3.43
ítem 7	3.33
ítem 8	3.47
ítem 9	5.92
ítem 10	3.97
ítem 11	5.26
ítem 12	4.05
ítem 13	7.3
ítem 14	3.68



Nota: Elaboración propia.

Si analizamos los valores de Infit y Outfit, vemos que el único ítem con un valor elevado es el ítem 3, como se puede ver en la Tabla 18, lo que indica imprecisión a la hora de realizar las medidas.

**Tabla 18:**

*Índices Infit y Outfit de la escala CE*

Item statistics of the rating scale model		
	Infit	Outfit
CE	0.772	0.8
CE	1.069	1.077
CE	1.669	1.682
CE	0.755	0.743
CE	1.034	1.034
CE	1.070	1.064
CE	0.963	0.939
CE	1.156	1.157
CE	0.898	0.891
CE	0.952	0.982
CE	0.95	0.958
CE	0.932	0.937
CE	0.858	0.868
CE	1.041	1.044

*Nota.* Infit= Information-weighted mean square statistic; Outfit= Outlier-sensitive means square statistic.

*Nota: Elaboración propia*

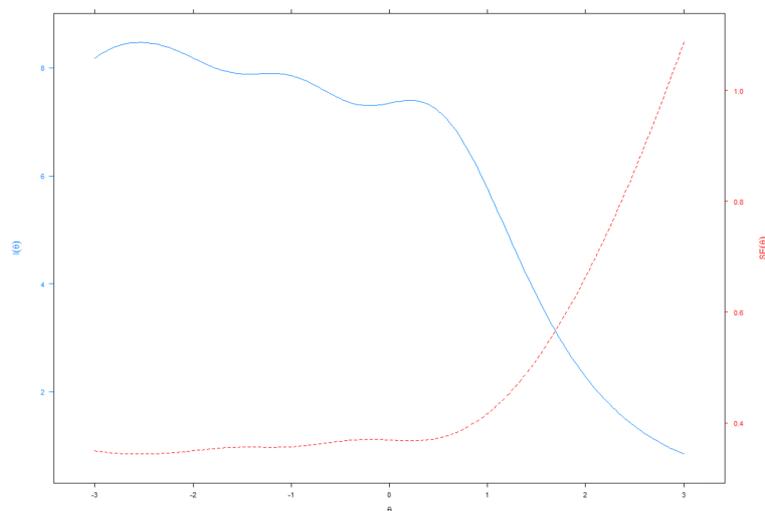
.....

- **DIMENSIÓN CRECIMIENTO PERSONAL**

Esta dimensión aporta una información de 53.69, como puede observarse en la Figura 17. Vemos que la información la aporta en puntuaciones medias o bajas del constructo, y que, para niveles del constructo más altos, no aporta a penas información.

**Figura 17:**

Curva de la Función de Información del test y curva del error estándar.



Nota: Elaboración propia.

En la Tabla 19 y la Figura 18, vemos la información que aporta a la dimensión cada uno de los ítems, en este caso, para que el ítem sea tenido en cuenta, debe aportar al menos 3.835, y como vemos, solo 4 de los 14 ítems cumplen este requisito.

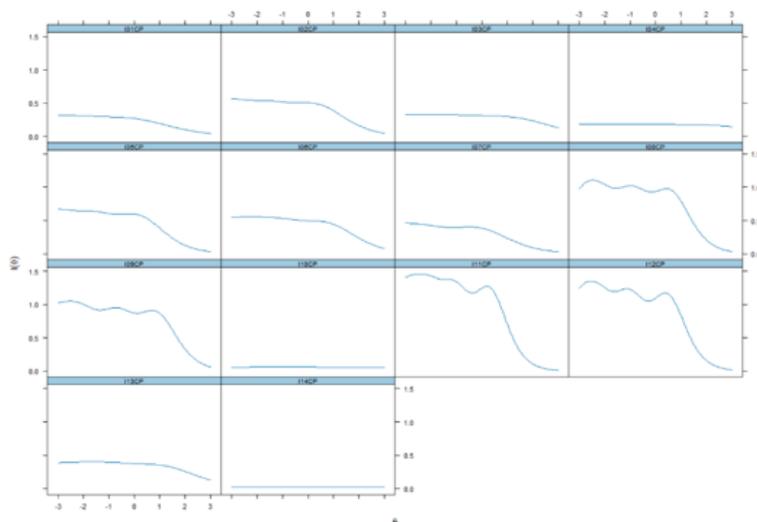
**Tabla 19:**

Información aportada por cada uno de los ítems al total de la dimensión

**Figura 18 :**

Función de información de cada uno de los ítems de la dimensión

ítem 1	2.80
ítem 2	3.78
ítem 3	1.94
ítem 4	1.43
ítem 5	3.88
ítem 6	3.42
ítem 7	3.27
ítem 8	6.63
ítem 9	6.89
ítem 10	0.84
ítem 11	7.98
ítem 12	7.23
ítem 13	2.87
ítem 14	0.73



Nota: Elaboración propia.

En la tabla 20, podemos apreciar que en el análisis del Infit y el Outfit, el valor de Infit del ítem 1 está por encima de 1, por lo que podemos pensar que la medida de este ítem será bastante imprecisa.

**Tabla 20:**  
*Índices Infit y Outfit de la escala CP*

Item statistics of the rating scale model		
	Infit	Outfit
l01CP	1.664	1655
l02CP	0.947	0.914
l03CP	1.000	1005
l04CP	0.89	0.923
l05CP	1	1
l06CP	1.163	1138
l07CP	1.046	0.992
l08CP	0.809	0.815
l09CP	0.722	0.736
l10CP	1.174	1.228
l11CP	0.851	0.84
l12CP	0.756	0.765
l13CP	1.139	1161
l14CP	1.415	1496

*Nota.* Infit= Information-weighted mean square statistic;  
Outfit= Outlier-sensitive means square statistic.

*Nota: Elaboración propia*

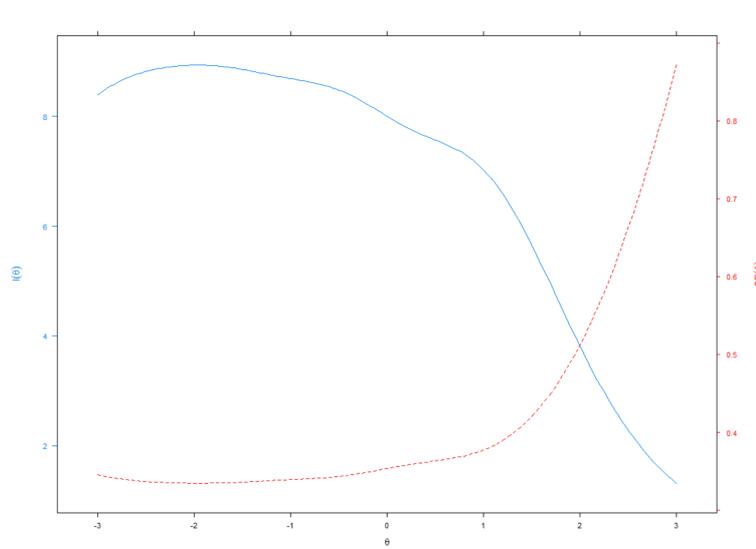
---

- **DIMENSIÓN PROPOSITO EN LA VIDA**

En esta dimensión, la información total aportada es de 57.36. El gráfico de la función de información aparece en la Figura 19.

**Figura 19:**

Curva de la Función de Información del test y curva del error estándar.



Nota: Elaboración propia.

La información aportada por cada ítem aparece en la Tabla 21 y en la Figura 20. En este caso cada ítem debería aportar al menos 4.09 para ser tenido en cuenta. Vemos que la dimensión es bastante homogénea y que la mayoría de los ítems aportan el mismo nivel de información, a excepción de los ítems 2, 3, 5 y 11 cuya aportación es muy bajita o casi nula.

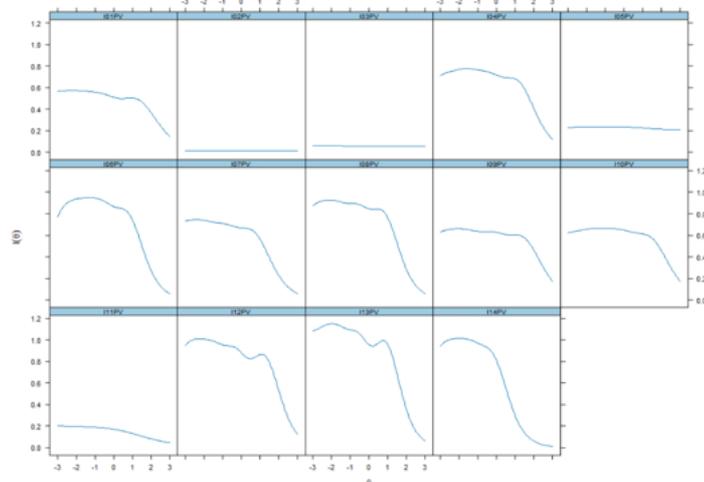
**Tabla 21:**

Información aportada por cada uno de los ítems al total de la dimensión

**Figura 20:**

Función de información de cada uno de los ítems de la dimensión

ítem 1	4.34
ítem 2	0.24
ítem 3	1.06
ítem 4	4.78
ítem 5	2.67
ítem 6	4.94
ítem 7	4.6
ítem 8	6.08
ítem 9	5.1
ítem 10	4.53
ítem 11	1.95
ítem 12	5.9
ítem 13	6.5
ítem 14	4.69



Nota: Elaboración propia.

Haciendo un análisis del Infit y el Outfit, encontramos que el valor para los ítems 2, 11, y 14 puede considerarse alto, indicando que los ítems están midiendo de manera imprecisa, como podemos observar en la Tabla 22. En este caso no encontramos ningún ítem con valores por debajo de 0.6.

**Tabla 22:**

*Índices Infit y Outfit de la escala PV*

Item statistics of the rating scale model		
	Infit	Outfit
@01PV	0.853	0.85
@02PV	1.334	1.389
@03PV	1.056	1.074
@04PV	1.023	1.020
@05PV	0.942	0.973
@06PV	1.171	1.128
@07PV	0.979	0.968
@08PV	0.82	0.817
@09PV	0.802	0.793
@10PV	1.003	1.049
@11PV	1.647	1.548
@12PV	0.844	0.886
@13PV	0.825	0.836
@14PV	1.519	1.341

Nota. Infit= Information-weighted mean square statistic; Outfit= Outlier-sensitive means square statistic.

*Nota: Elaboración propia*

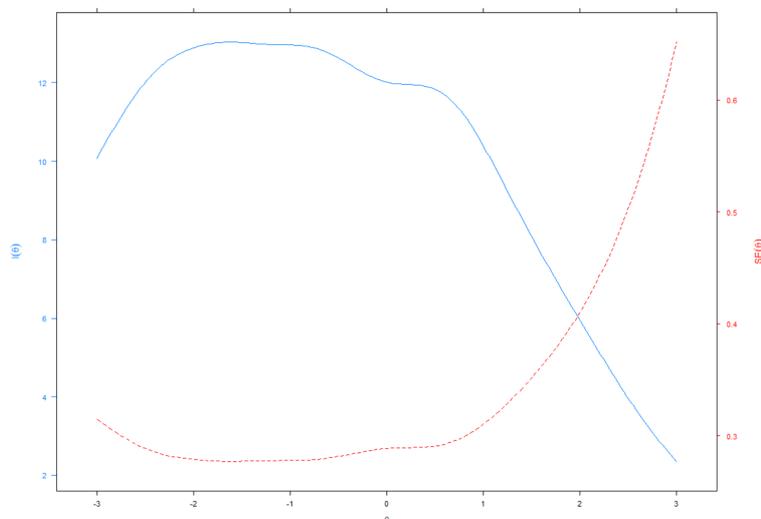
---

- **DIMENSIÓN AUTOACEPTACIÓN**

La información que aporta esta dimensión es de 73.84, como podemos ver en la siguiente Figura 21

**Figura 21:**

Curva de la Función de Información del test y curva del error estándar.



Nota: Elaboración propia.

La información mínima que tiene que aportar cada uno de los ítems es de 5.27 para que sea tenido en cuenta para el modelo.

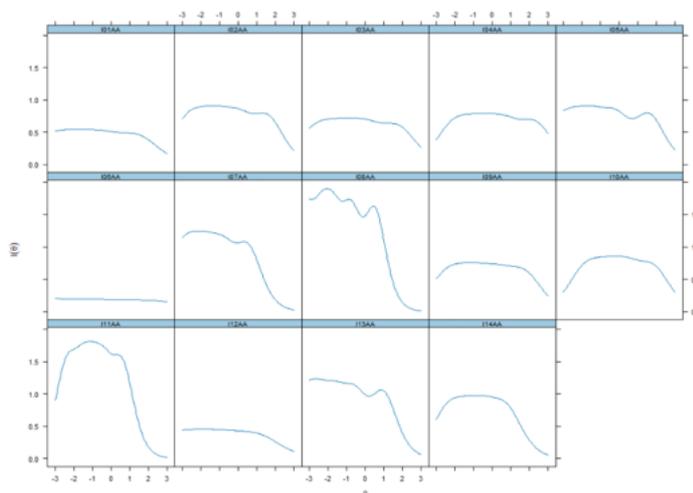
**Tabla 23:**

Información aportada por cada uno de los ítems al total de la dimensión

**Figura 22:**

Función de información de cada uno de los ítems de la dimensión

ítem 1	3.83
ítem 2	5.36
ítem 3	4.55
ítem 4	4.92
ítem 5	6.34
ítem 6	2.26
ítem 7	6.17
ítem 8	8.86
ítem 9	4.54
ítem 10	4.68
ítem 11	7.46
ítem 12	3.29
ítem 13	6.8
ítem 14	4.78



Nota: Elaboración propia.

Como podemos observar en la Tabla 23 y la Figura 22, solamente hay 6 ítems que superan ese umbral en esta dimensión, que son el ítem 2, 5, 7, 8, 11 y 13.

Si analizamos el Infit y el Outfit (tabla 24) para ver el ajuste del modelo, nos encontramos que hay 3 ítems cuyos índices se pueden considerar altos, que son los ítems 6, 12 y 14, que indican que estamos midiendo de manera imprecisa, y ningún ítem con puntuaciones por debajo de 0.6

**Tabla 24:**

*Índices Infit y Outfit de la escala AA*

Item statistics of the rating scale model		
	Infit	Outfit
@01AA	1.108	1.146
@02AA	0.859	0.866
@03AA	1.022	1.060
@04AA	0.918	0.944
@05AA	0.68	0.676
@06AA	1.230	1.354
@07AA	0.993	0.934
@08AA	0.732	0.699
@09AA	1.048	1.059
@10AA	1.131	1.190
@11AA	1.070	1.010
@12AA	1.311	1.407
@13AA	0.764	0.823
@14AA	1.302	1.290

*Nota.* Infit= Information-weighted mean square statistic; Outfit= Outlier-sensitive means square statistic.

*Nota: Elaboración propia.*

---

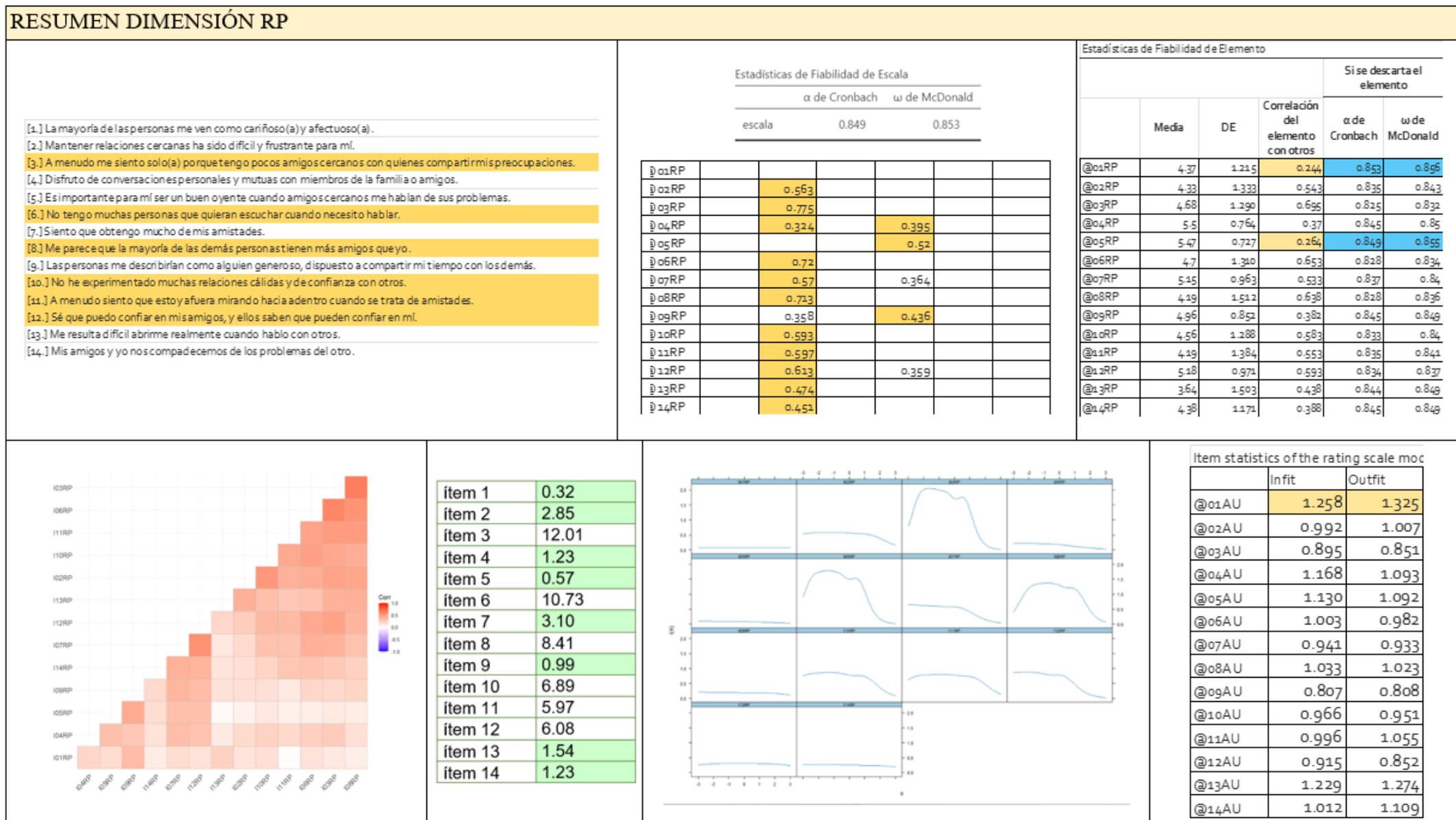
#### 3.4.4.-RESUMEN DE LOS RESULTADOS PRESENTADOS HASTA EL MOMENTO POR DIMENSIONES

A continuación, se va a presentar el resumen para cada una de las dimensiones, para decidir cuáles son los ítems que tienen mejor calidad en vista de las pruebas psicométricas aplicadas, y cuáles son los ítems candidatos a ser eliminados.

Como criterio para la selección de ítems seguiremos los siguientes:

- La escala final debe estar compuesta, al menos por 5 ítems, para que el constructo esté bien representado.
- Descartaremos los ítems que, al eliminarse, aumenten el  $\alpha$  de Cronbach global.
- Descartaremos los ítems que tengan poca correlación con el resto de la escala.
- Los ítems seleccionados, deben aparecer en el mismo factor en el AFE de 6 dimensiones presentado previamente.
- Los ítems seleccionados deben aportar información por encima del punto de corte a la escala.
- Se descartarán los ítems con puntuaciones de Infit y Outfit por encima de 1.4 y por debajo de 0.6.

**Tabla 25:** Texto de los ítems de la dimensión relaciones personales. Extracto del Análisis Factorial Exploratorio. Índices de fiabilidad y estadísticos de escala. Mapa de calor de correlaciones Policóricas. Información aportada por los ítems. Función de Información de los ítems. Índices Infit y Outfit.



**Tabla 26:**

*Ítems de la dimensión Relaciones positivas con los otros*

[1.] La mayoría de las personas me ven como cariñoso(a) y afectuoso(a).
[2.] Mantener relaciones cercanas ha sido difícil y frustrante para mí.
[3.] A menudo me siento solo(a) porque tengo pocos amigos cercanos con quienes compartir mis preocupaciones.
[4.] Disfruto de conversaciones personales y mutuas con miembros de la familia o amigos.
[5.] Es importante para mí ser un buen oyente cuando amigos cercanos me hablan de sus problemas.
[6.] No tengo muchas personas que quieran escuchar cuando necesito hablar.
[7.] Siento que obtengo mucho de mis amistades.
[8.] Me parece que la mayoría de las demás personas tienen más amigos que yo.
[9.] Las personas me describirían como alguien generoso, dispuesto a compartir mi tiempo con los demás.
[10.] No he experimentado muchas relaciones cálidas y de confianza con otros.
[11.] A menudo siento que estoy afuera mirando hacia adentro cuando se trata de amistades.
[12.] Sé que puedo confiar en mis amigos, y ellos saben que pueden confiar en mí.
[13.] Me resulta difícil abrirme realmente cuando hablo con otros.
[14.] Mis amigos y yo nos compadecemos de los problemas del otro.

*Nota: Elaboración propia.*

Atendiendo a los criterios mencionados anteriormente en la Tabla 25 podemos observar que en esta escala seleccionaríamos los ítems 3, 6, 8, 10,11 y 12, corresponden con los ítems coloreados en la Tabla 26. Son los ítems que más información aportan a la escala, y no presentan ningún problema con las pruebas estadísticas aplicadas. Además, en el AFE inicial, aparecían agrupados en el mismo factor

**Tabla 27:** Texto de los ítems de la dimensión Autoaceptación. Extracto del Análisis Factorial Exploratorio. Índices de fiabilidad y estadísticos de escala. Mapa de calor de correlaciones Policóricas. Información aportada por los ítems. Función de Información de los ítems. Índices Infit y Outfit.

## RESUMEN DIMENSIÓN AU

1. A veces cambio la forma en que actúo o pienso para ser más parecido(a) a quienes me rodean.
2. No tengo miedo de expresar mis opiniones, incluso cuando están en oposición a las opiniones de la mayoría de las personas.
3. Mis decisiones generalmente no se ven influenciadas por lo que hacen todos los demás.
4. Tiendo a preocuparme por lo que piensan de mí otras personas.
5. Ser feliz conmigo mismo(a) es más importante para mí que obtener la aprobación de los demás.
6. Suelo dejarme influenciar por personas con opiniones fuertes.
7. Rara vez las personas me convencen de hacer cosas que no quiero hacer.
8. Es más importante para mí "encajar" con los demás que mantenerme firme en mis principios.
9. Tengo confianza en mis opiniones, incluso si son contrarias al consenso general.
10. Me resulta difícil expresar mis propias opiniones sobre asuntos controvertidos.
11. A menudo cambio de opinión sobre decisiones si mis amigos o familiares están en desacuerdo.
12. No soy el tipo de persona que cede ante las presiones sociales para pensar o actuar de ciertas maneras.
13. Me preocupa cómo evalúan otras personas las elecciones que he hecho en mi vida.
14. Me juzgo a mí mismo(a) según lo que considero importante, no según los valores de lo que otros consideran importante.

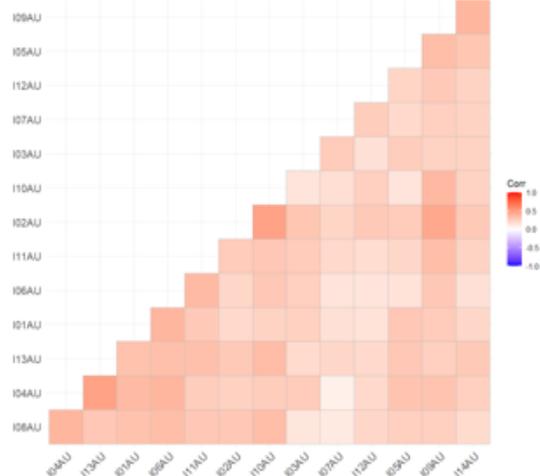
### Estadísticas de Fiabilidad de Escala

	$\alpha$ de Cronbach	$\omega$ de McDonald
escala	0.849	0.853

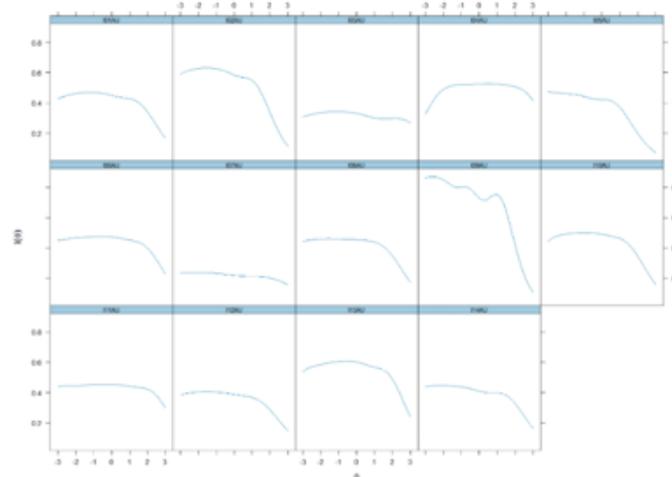
Ítem	$\alpha$ de Cronbach	$\omega$ de McDonald
@01AU		0.502
@02AU		0.531
@03AU		0.473
@04AU		0.615
@05AU	0.385	0.408
@06AU		0.561
@07AU	0.336	0.317
@08AU		0.569
@09AU	0.324	0.555
@10AU		0.578
@11AU		0.551
@12AU		0.44
@13AU		0.56
@14AU	0.344	0.411

### Estadísticas de Fiabilidad de Elemento

	Media	DE	Correlación del elemento con otros	Si se descarta el	
				$\alpha$ de Cronbach	$\omega$ de McDonald
@14AU	4.63	1.072	0.429	0.82	0.823
@13AU	4.02	1.337	0.531	0.812	0.817
@12AU	4.37	1.353	0.369	0.825	0.827
@11AU	4.16	1.079	0.481	0.817	0.82
@10AU	4.23	1.401	0.489	0.816	0.82
@09AU	4.77	0.956	0.55	0.814	0.815
@08AU	4.3	1.252	0.471	0.817	0.821
@07AU	4.56	1.141	0.333	0.826	0.83
@06AU	4.14	1.260	0.473	0.817	0.821
@05AU	5.02	0.967	0.437	0.82	0.823
@04AU	3.33	1.356	0.523	0.813	0.817
@03AU	4.1	1.202	0.393	0.822	0.826
@02AU	4.55	1.259	0.516	0.814	0.818
@01AU	4.42	1.233	0.467	0.817	0.821



ítem 1	3,77
ítem 2	4,11
ítem 3	3,33
ítem 4	3,81
ítem 5	3,77
ítem 6	3,77
ítem 7	2,55
ítem 8	3,61
ítem 9	5,77
ítem 10	3,41
ítem 11	4,22
ítem 12	3,07
ítem 13	4,2
ítem 14	3,85



### Item statistics of the rating scale moc

	Infit	Outfit
@01RP	1.258	1.325
@02RP	0.992	1.007
@03RP	0.895	0.851
@04RP	1.168	1.093
@05RP	1.130	1.092
@06RP	1.003	0.982
@07RP	0.941	0.933
@08RP	1.033	1.023
@09RP	0.807	0.808
@10RP	0.966	0.951
@11RP	0.996	1.055
@12RP	0.915	0.852
@13RP	1.229	1.274
@14RP	1.012	1.109

**Tabla 28:**

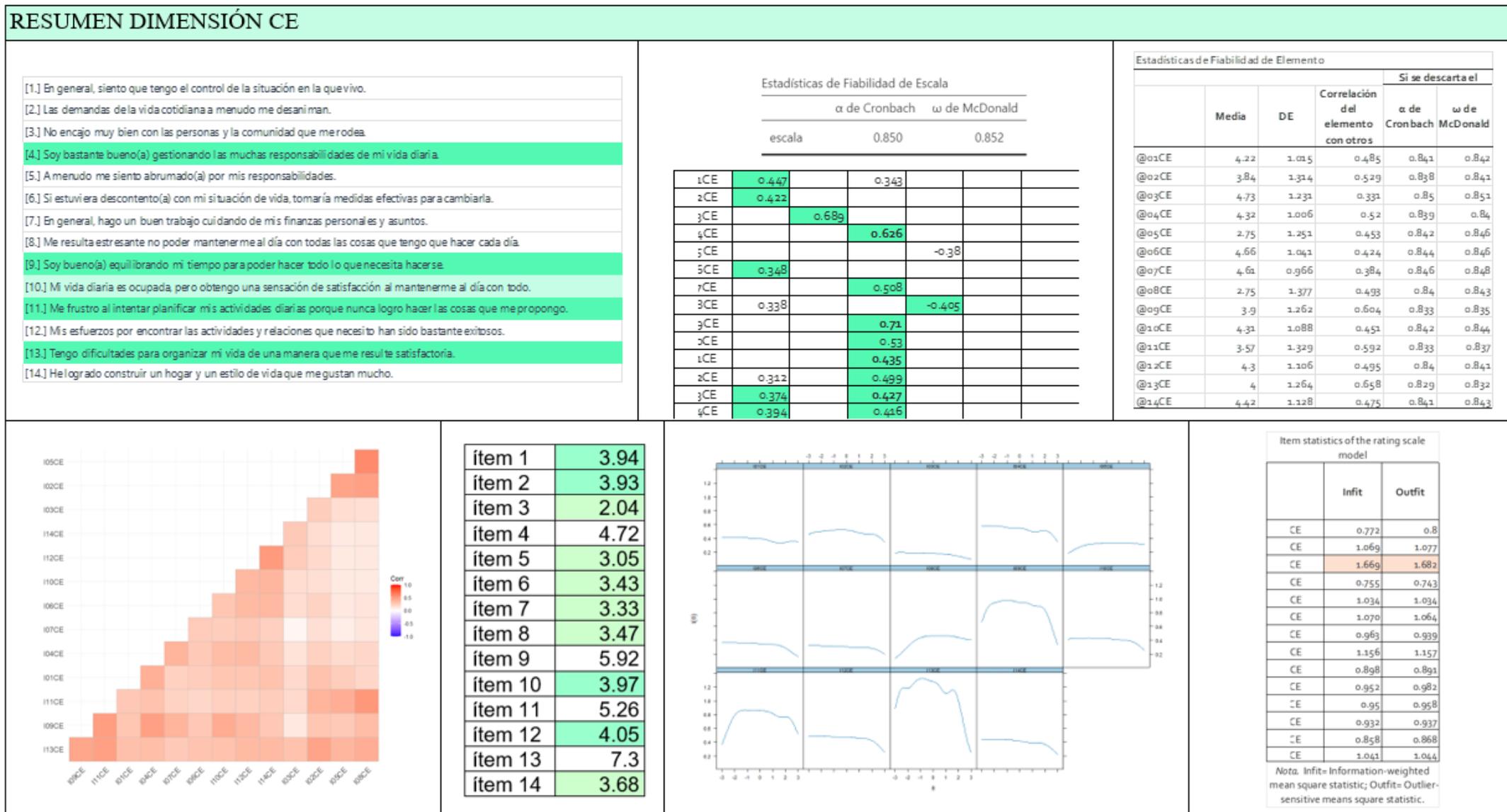
*Ítems de la dimensión Autoaceptación*

1. A veces cambio la forma en que actúo o pienso para ser más parecido(a) a quienes me rodean.
[2.] No tengo miedo de expresar mis opiniones, incluso cuando están en oposición a las opiniones de la mayoría de las personas.
[3.] Mis decisiones generalmente no se ven influenciadas por lo que hacen todos los demás.
[4.] Tiendo a preocuparme por lo que piensan de mí otras personas.
[5.] Ser feliz conmigo mismo(a) es más importante para mí que obtener la aprobación de los demás.
[6.] Suelo dejarme influenciar por personas con opiniones fuertes.
[7.] Rara vez las personas me convencen de hacer cosas que no quiero hacer.
[8.] Es más importante para mí "encajar" con los demás que mantenerme firme en mis principios.
[9.] Tengo confianza en mis opiniones, incluso si son contrarias al consenso general.
[10.] Me resulta difícil expresar mis propias opiniones sobre asuntos controvertidos.
[11.] A menudo cambio de opinión sobre decisiones si mis amigos o familiares están en desacuerdo.
[12.] No soy el tipo de persona que cede ante las presiones sociales para pensar o actuar de ciertas maneras.
[13.] Me preocupa cómo evalúan otras personas las elecciones que he hecho en mi vida.
[14.] Me juzgo a mí mismo(a) según lo que considero importante, no según los valores de lo que otros consideran importante.

*Nota: Elaboración propia.*

En esta dimensión comenzando con el criterio de información aportada por cada ítem, nos quedamos con los ítems 2, 4, 9, 11, 13 y 14. En este caso, no hay ítems que destaquen por tener características psicométricas poco adecuadas, ya que vemos en todas las pruebas que la mayoría se comporta de manera homogénea, por lo tanto, el criterio que hemos utilizado es el único que nos ayuda a decidir con que ítems debemos quedarnos, teniendo en cuenta que los ítems descartados no son malos, si no que simplemente hay ítems que son mejores. (Tablas 27 y 28)

**Tabla 29:** Texto de los ítems de la dimensión Control del Entorno. Extracto del Análisis Factorial Exploratorio. Índices de fiabilidad y estadísticos de escala. Mapa de calor de correlaciones Policóricas. Información aportada por los ítems. Función de Información de los ítems. Índices Infit y Outfit.



**Tabla 30:**

*Ítems de la dimensión Control del Entorno.*

[1.] En general, siento que tengo el control de la situación en la que vivo.
[2.] Las demandas de la vida cotidiana a menudo me desaniman.
[3.] No encajo muy bien con las personas y la comunidad que me rodea.
[4.] Soy bastante bueno(a) gestionando las muchas responsabilidades de mi vida diaria.
[5.] A menudo me siento abrumado(a) por mis responsabilidades.
[6.] Si estuviera descontento(a) con mi situación de vida, tomaría medidas efectivas para cambiarla.
[7.] En general, hago un buen trabajo cuidando de mis finanzas personales y asuntos.
[8.] Me resulta estresante no poder mantenerme al día con todas las cosas que tengo que hacer cada día.
[9.] Soy bueno(a) equilibrando mi tiempo para poder hacer todo lo que necesita hacerse.
[10.] Mi vida diaria es ocupada, pero obtengo una sensación de satisfacción al mantenerme al día con todo.
[11.] Me frustró al intentar planificar mis actividades diarias porque nunca logro hacer las cosas que me propongo.
[12.] Mis esfuerzos por encontrar las actividades y relaciones que necesito han sido bastante exitosos.
[13.] Tengo dificultades para organizar mi vida de una manera que me resulte satisfactoria.
[14.] He logrado construir un hogar y un estilo de vida que me gustan mucho.

*Nota: Elaboración propia.*

En la dimensión CE, si atendemos a los criterios estadísticos propuestos para la selección de ítems, nos quedaríamos solamente con los ítems 4, 9, 11 y 13, insuficientes para representar de manera adecuada el constructo, por lo tanto, vamos a revisar los ítems descartados desde una perspectiva más teórica (Tablas 29 y 30).

Si nos fijamos en el contenido de los ítems, los 4 que hemos seleccionado de esta dimensión (CE - control del entorno), tienen como temática principal la gestión del tiempo, y dejan de lado otros aspectos de la gestión del entorno. Por lo tanto, el ítem a añadir debería estar teóricamente en esa línea también. El ítem 10 cumple con esta premisa teórica ya que en su enunciado habla de "mantenerse al día con todo" lo que nos vuelve a indicar "gestión del tiempo". Atendiendo al resto de resultados psicométricos de este ítem, vemos que en el AFE se agrupa en el mismo factor que el resto de ítems seleccionados, sus estadísticas de fiabilidad son buenas, la correlación con el resto de ítems es homogénea a la de los demás elementos, sus medidas de Infit y Outfit son adecuadas, y el único índice en el que presenta dificultades es en la función de información, quedando por debajo del umbral establecido (4.19). Por lo tanto, vamos a tomar la decisión de añadir este ítem a la dimensión CE y quedarnos con 5 ítems.

**Tabla 31:** Texto de los ítems de la dimensión Crecimiento Personal. Extracto del Análisis Factorial Exploratorio. Índices de fiabilidad y estadísticos de escala. Mapa de calor de correlaciones Policóricas. Información aportada por los ítems. Función de Información de los ítems. Índices Infit y Outfit.

## RESUMEN DIMENSIÓN CP

1. No me interesa participar en actividades que ampliarán mis horizontes.
2. En general, siento que sigo aprendiendo más sobre mí mismo(a) a medida que pasa el tiempo.
3. Soy el tipo de persona a quien le gusta probar cosas nuevas.
4. No quiero probar nuevas formas de hacer las cosas; mi vida está bien tal como está.
5. Creo que es importante tener nuevas experiencias que desafíen la forma en que piensas sobre ti mismo(a) y el mundo.
6. Cuando lo pienso, no he mejorado mucho como persona a lo largo de los años.
7. En mi opinión, las personas de todas las edades pueden seguir creciendo y desarrollándose.
8. Con el tiempo, he adquirido mucha perspicacia sobre la vida que me ha convertido en una persona más fuerte y capaz.
9. Tengo la sensación de que he evolucionado mucho como persona con el tiempo.
10. No disfruto estar en situaciones nuevas que requieran cambiar mis viejas formas familiares de hacer las cosas.
11. Para mí, la vida ha sido un proceso continuo de aprendizaje, cambio y crecimiento.
12. Disfruto ver cómo mis puntos de vista han cambiado y madurado a lo largo de los años.
13. Dejé de intentar hacer grandes mejoras o cambios en mi vida hace mucho tiempo.
14. Hay verdad en el dicho de que no se puede enseñar trucos nuevos a un perro viejo.

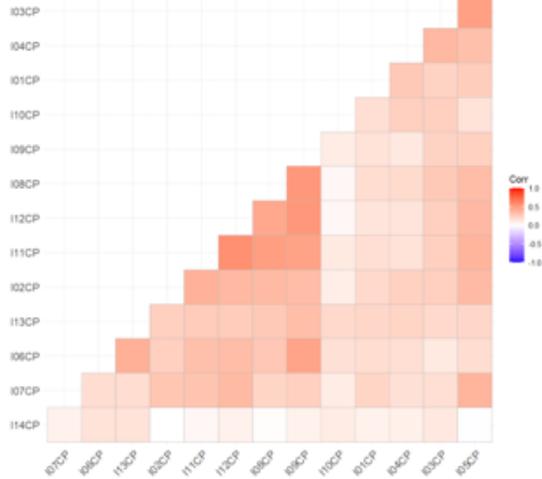
### Estadísticas de Fiabilidad de Escala

	$\alpha$ de Cronbach	$\omega$ de McDonald
escala	0.791	0.818

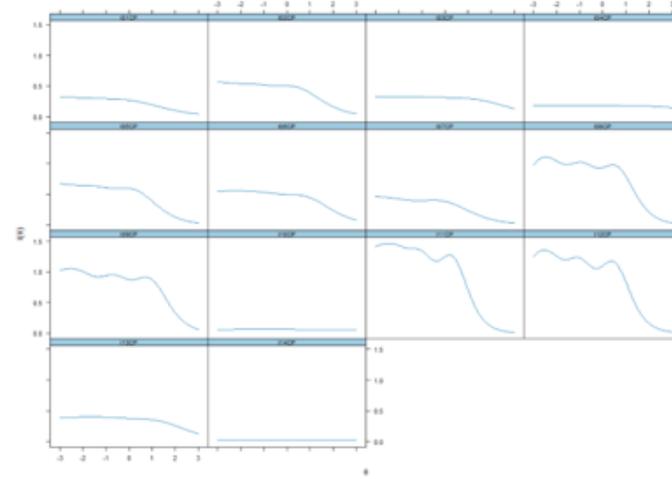
Ítem	$\alpha$ de Cronbach	$\omega$ de McDonald
@01CP		0,417
@02CP	0,529	
@03CP	0,398	
@04CP	0,365	0,477
@05CP	0,642	
@06CP	0,302	0,365
@07CP	0,528	
@08CP	0,534	
@09CP	0,364	0,441
@10CP		0,325
@11CP	0,612	
@12CP	0,601	
@13CP	0,332	0,378
@14CP		

### Estadísticas de Fiabilidad de Elemento

Ítem	Media	DE	Correlación de elemento con otros	Si se descarta el elemento	
				$\alpha$ de Cronbach	$\omega$ de McDonald
@01CP	5,17	1,125	0,346	0,784	0,814
@02CP	5,26	0,891	0,464	0,775	0,803
@03CP	4,66	1,121	0,454	0,774	0,807
@04CP	4,44	1,069	0,393	0,778	0,812
@05CP	5,26	0,825	0,513	0,772	0,8
@06CP	4,84	1,142	0,46	0,774	0,806
@07CP	5,41	0,775	0,393	0,781	0,809
@08CP	5,02	0,9	0,505	0,772	0,799
@09CP	4,86	0,928	0,54	0,769	0,797
@10CP	3,6	1,286	0,256	0,795	0,821
@11CP	5,13	0,894	0,546	0,769	0,795
@12CP	5,09	0,895	0,533	0,77	0,796
@13CP	4,6	1,228	0,461	0,774	0,807
@14CP	3,53	1,351	0,136	0,809	0,827



Ítem	Información
ítem 1	2.80
ítem 2	3.78
ítem 3	1.94
ítem 4	1.43
ítem 5	3.88
ítem 6	3.42
ítem 7	3.27
ítem 8	6.63
ítem 9	6.89
ítem 10	0.84
ítem 11	7.98
ítem 12	7.23
ítem 13	2.87
ítem 14	0.73



### Item statistics of the rating scale model

Ítem	Infit	Outfit
l01CP	1.664	1655
l02CP	0.947	0.914
l03CP	1.000	1005
l04CP	0.89	0.923
l05CP	1	1
l06CP	1.163	1138
l07CP	1.046	0.992
l08CP	0.809	0.815
l09CP	0.722	0.736
l10CP	1.174	1.228
l11CP	0.851	0.84
l12CP	0.756	0.765
l13CP	1.139	1161
l14CP	1.415	1496

Nota: Infit= Información-weighted mean square statistic; Outfit= Outlier-sensitive mean square statistic.

**Tabla 32:**

*Ítems de la dimensión Crecimiento Personal*

1. No me interesa participar en actividades que ampliarán mis horizontes.
2. En general, siento que sigo aprendiendo más sobre mí mismo(a) a medida que pasa el tiempo.
3. Soy el tipo de persona a quien le gusta probar cosas nuevas.
4. No quiero probar nuevas formas de hacer las cosas; mi vida está bien tal como está.
5. Creo que es importante tener nuevas experiencias que desafíen la forma en que piensas sobre ti mismo(a) y el mundo.
6. Cuando lo pienso, no he mejorado mucho como persona a lo largo de los años.
7. En mi opinión, las personas de todas las edades pueden seguir creciendo y desarrollándose.
8. Con el tiempo, he adquirido mucha perspicacia sobre la vida que me ha convertido en una persona más fuerte y capaz.
9. Tengo la sensación de que he evolucionado mucho como persona con el tiempo.
10. No disfruto estar en situaciones nuevas que requieran cambiar mis viejas formas familiares de hacer las cosas.
11. Para mí, la vida ha sido un proceso continuo de aprendizaje, cambio y crecimiento.
12. Disfruto ver cómo mis puntos de vista han cambiado y madurado a lo largo de los años.
13. Dejé de intentar hacer grandes mejoras o cambios en mi vida hace mucho tiempo.
14. Hay verdad en el dicho de que no se puede enseñar trucos nuevos a un perro viejo.

*Nota: Elaboración propia.*

En esta dimensión, igual que en la anterior, solamente hay 4 ítems que cumplan todos los criterios que hemos propuesto, por lo que en este caso, volvemos a recurrir al aspecto más teórico y de contenido de los ítems. Los ítems seleccionados (8, 9, 11 y 12) de la dimensión CP (crecimiento personal) hacen referencia a los aspectos positivos de haber evolucionado a lo largo de la vida. Hablan de aprendizaje, maduración, evolución..., a nivel de contenido, uno de los ítems que más se acerca a esta perspectiva es el ítem 2, que habla sobre "lo que aprendemos de nosotros mismos", por lo tanto, está en concordancia con el resto. Analizando a nivel psicométrico el ítem, encontramos que en el AFE se encuentra en el mismo factor que los ítems que habíamos seleccionado previamente, los estadísticos de escala son adecuados, y las correlaciones con el resto de ítems de manera individual son homogéneas con los otros ítems seleccionados. Además los índices de Infit y Outfit son adecuados. Volvemos a encontrarnos con el problema en la función de información, pero en este caso, la información que aporta el ítem está en el límite para ser tomada en cuenta, por lo tanto, añadimos el ítem 2 a los ítems seleccionados, y en esta dimensión se encontrarán los ítems 2, 8, 9, 11 y 12 (Tabla 31 y 32).

**Tabla 33:** Texto de los ítems de la dimensión Propósito en la Vida. Extracto del Análisis Factorial Exploratorio. Índices de fiabilidad y estadísticos de escala. Mapa de calor de correlaciones Policóricas. Información aportada por los ítems. Función de Información de los ítems. Índices Infit y Outfit.

## RESUMEN DIMENSIÓN PV

1. Me siento bien cuando pienso en lo que he hecho en el pasado y en lo que espero hacer en el futuro.
2. Vivo la vida día a día y realmente no pienso en el futuro.
3. Tiendo a enfocarme en el presente, porque el futuro casi siempre me trae problemas.
4. Tengo un sentido de dirección y propósito en la vida.
5. Mis actividades diarias a menudo me parecen triviales e insignificantes.
6. No tengo una buena idea de lo que estoy tratando de lograr en la vida.
7. Solía establecer metas para mí mismo(a), pero eso ahora parec una pérdida de tiempo.
8. Disfruto haciendo planes para el futuro y trabajar para hacerlos realidad.
9. Soy una persona activa en llevar a cabo los planes que establezco para mí mismo(a).
10. Algunas personas vagan sin rumbo por la vida, pero yo no soy una de ellas.
11. A veces siento como si ya hubiera hecho todo lo que hay por hacer en la vida.
12. Mis objetivos en la vida han sido más una fuente de satisfacción que de frustración para mí.
13. Me resulta satisfactorio pensar en lo que he logrado en la vida.
14. En última instancia, no estoy tan seguro(a) de que mi vida surte mucho.

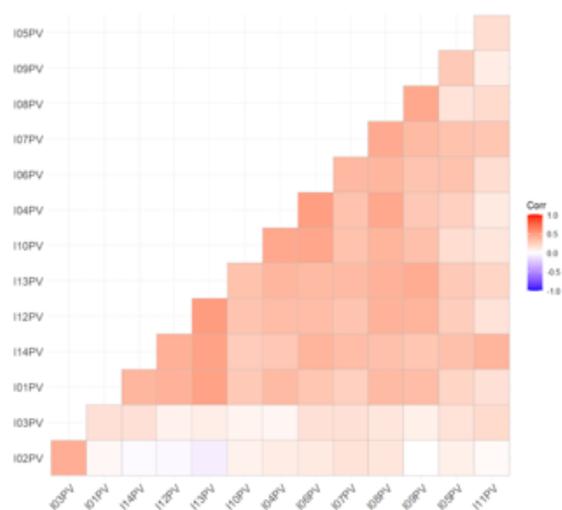
### Estadísticas de Fiabilidad de Escala

	$\alpha$ de Cronbach	$\omega$ de McDonald
escala	0.849	0.853

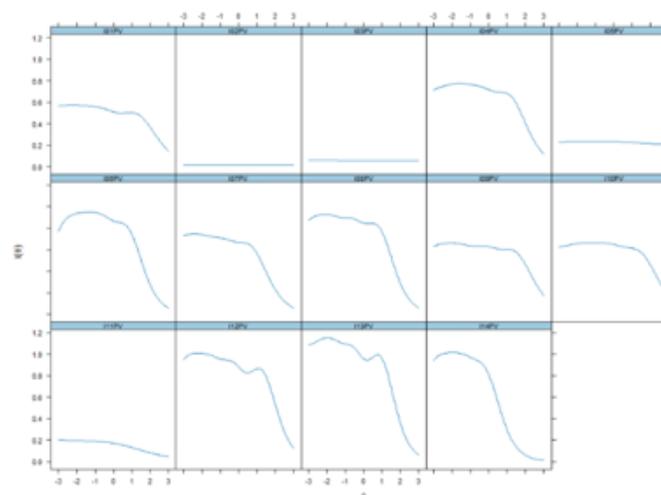
	$\alpha$	$\omega$		
@01PV	0,574	0,320		
@02PV				0,432
@03PV				0,547
@04PV		0,5		
@05PV	0,346			0,34
@06PV		0,48		0,307
@07PV		0,332		0,464
@08PV		0,503		
@09PV		0,508		
@10PV		0,502		
@11PV			0,306	0,423
@12PV	0,513	0,388		
@13PV	0,533	0,384		
@14PV	0,492			

### Estadísticas de Fiabilidad de Elemento

	Media	DE	Correlación del elemento con otros	Si se descarta el elemento	
				$\alpha$ de Cronbach	$\omega$ de McDonald
@01PV	4,69	1,05	0,508	0,816	0,825
@02PV	3,76	1,24	0,234	0,842	0,847
@03PV	4	1,12	0,253	0,832	0,842
@04PV	4,5	1,24	0,542	0,823	0,823
@05PV	3,89	1,18	0,404	0,823	0,833
@06PV	4,63	1,31	0,585	0,809	0,822
@07PV	4,88	1,08	0,55	0,823	0,823
@08PV	4,82	1,03	0,58	0,822	0,82
@09PV	4,54	1,04	0,496	0,827	0,826
@10PV	4,3	1,24	0,49	0,827	0,827
@11PV	5,23	1,07	0,312	0,828	0,838
@12PV	4,55	1,09	0,528	0,824	0,823
@13PV	4,75	1,06	0,578	0,822	0,829
@14PV	5,22	1,14	0,552	0,822	0,822



ítem 1	4,34
ítem 2	0,24
ítem 3	1,06
ítem 4	4,78
ítem 5	2,67
ítem 6	4,94
ítem 7	4,6
ítem 8	6,08
ítem 9	5,1
ítem 10	4,53
ítem 11	1,95
ítem 12	5,9
ítem 13	6,5
ítem 14	4,69



### Item statistics of the rating scale model

	Infit	Outfit
@01PV	0.853	0.85
@02PV	1.334	1.389
@03PV	1.056	1.074
@04PV	1.023	1.020
@05PV	0.942	0.973
@06PV	1.172	1.128
@07PV	0.979	0.968
@08PV	0.82	0.817
@09PV	0.802	0.793
@10PV	1.003	1.049
@11PV	1.647	1.548
@12PV	0.844	0.886
@13PV	0.825	0.836
@14PV	1.519	1.341

Nota. Infit= Information-weighted mean square statistic; Outfit= Outlier-sensitive means square statistic.

**Tabla 34:**

*Ítems de la dimensión Propósito en la Vida*

1. Me siento bien cuando pienso en lo que he hecho en el pasado y en lo que espero hacer en el futuro.
[2.] Vivo la vida día a día y realmente no pienso en el futuro.
[3.] Tiendo a enfocarme en el presente, porque el futuro casi siempre me trae problemas.
4. Tengo un sentido de dirección y propósito en la vida.
[5.] Mis actividades diarias a menudo me parecen triviales e insignificantes.
[6.] No tengo una buena idea de lo que estoy tratando de lograr en la vida.
[7.] Solía establecer metas para mí mismo(a), pero eso ahora parece una pérdida de tiempo.
[8.] Disfruto haciendo planes para el futuro y trabajar para hacerlos realidad.
[9.] Soy una persona activa en llevar a cabo los planes que establezco para mí mismo(a).
[10.] Algunas personas vagan sin rumbo por la vida, pero yo no soy una de ellas.
[11.] A veces siento como si ya hubiera hecho todo lo que hay por hacer en la vida.
[12.] Mis objetivos en la vida han sido más una fuente de satisfacción que de frustración para mí.
[13.] Me resulta satisfactorio pensar en lo que he logrado en la vida.
[14.] En última instancia, no estoy tan seguro(a) de que mi vida sume mucho.

*Nota: Elaboración propia.*

Para la dimensión de propósito en la vida, encontramos 6 ítems que cumplan los criterios propuestos: 4, 6, 7, 8, 9 y 10. Ya que, aunque hay otros ítems que aportan información al constructo, pertenecen a factores diferentes en el análisis factorial exploratorio de 6 dimensiones (Tablas 33 y 34). Si nos vamos al plano más teórico, encontramos que los ítems seleccionados hablan abiertamente del propósito en la vida, y los ítems que también aportaban información, pero en otro factor, están relacionados con la satisfacción y no tanto con el sentido de propósito, es por eso que nos quedamos con los ítems seleccionados, ya que describen mejor la definición de la dimensión

**Tabla 35:** Texto de los ítems de la dimensión Autoaceptación. Extracto del Análisis Factorial Exploratorio. Índices de fiabilidad y estadísticos de escala. Mapa de calor de correlaciones Policóricas. Información aportada por los ítems. Función de Información de los ítems. Índices Infit y Outfit.

## RESUMEN DIMENSIÓN AA

- [1.] Cuando observo la historia de mi vida, estoy satisfecho(a) con cómo han resultado las cosas.
- [2.] En general, me siento seguro(a) y positivo(a) acerca de mí mismo(a).
- [3.] Siento que muchas de las personas que conozco han obtenido más de la vida que yo.
- [4.] Si se me presentara la oportunidad, hay muchas cosas sobre mí mismo(a) que cambiaría.
- [5.] Me gustan la mayoría de los aspectos de mi personalidad.
- [6.] Cometí algunos errores en el pasado, pero siento que en general todo ha resultado para lo mejor.
- [7.] En muchos aspectos, me siento decepcionado(a) con mis logros en la vida.
- [8.] En su mayor parte, estoy orgulloso(a) de quién soy y de la vida que llevo.
- [9.] Envidio a muchas personas por las vidas que llevan.
- [10.] Mi actitud hacia mí mismo(a) probablemente no es tan positiva como la mayoría de las personas sienten acerca de sí mismas.
- [11.] Muchos días me despierto sintiéndome desanimado(a) por cómo he vivido mi vida.
- [12.] El pasado tuvo sus altibajos, pero en general, no quisiera cambiarlo.
- [13.] Cuando me comparo con amigos y conocidos, me hace sentir bien acerca de quién soy.
- [14.] Todos tienen debilidades, pero parece que tengo más que mi parte.

### Estadísticas de Fiabilidad de Escala

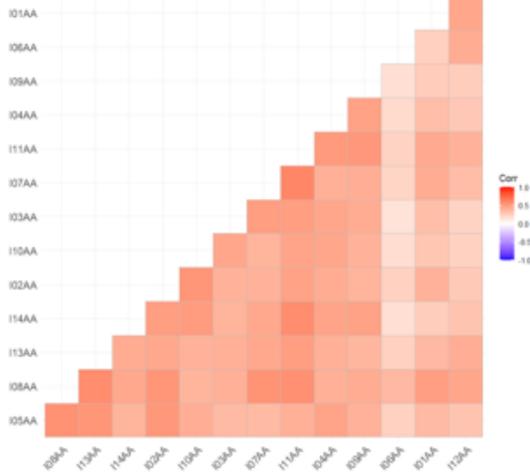
α de Cronbach      ω de McDonald

escala      0,901      0,905

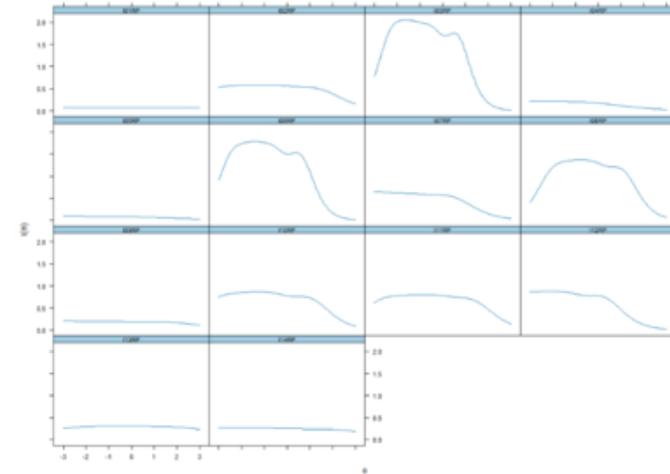
@01AA	0,643				
@02AA	0,623				
@03AA	0,459				
@04AA	0,557			0,349	
@05AA	0,512			0,319	
@06AA	0,44		0,348		
@07AA	0,532				0,345
@08AA	0,631	0,382			
@09AA	0,409			0,391	
@10AA	0,498			0,301	
@11AA	0,612	0,35			
@12AA	0,551				
@13AA	0,53				
@14AA	0,439	0,391		0,311	

### Estadísticas de Fiabilidad de Elemento

	Media	DE	Correlación del elemento con otros	Si se descarta el elemento	
				α de Cronbach	ω de McDonald
@01RP	4,37	1,215	0,244	0,853	0,856
@02RP	4,33	1,333	0,543	0,835	0,843
@03RP	4,68	1,290	0,695	0,825	0,832
@04RP	5,5	0,764	0,37	0,845	0,85
@05RP	5,47	0,727	0,264	0,849	0,855
@06RP	4,7	1,310	0,653	0,828	0,834
@07RP	5,15	0,963	0,533	0,837	0,84
@08RP	4,19	1,512	0,638	0,828	0,836
@09RP	4,96	0,852	0,382	0,845	0,849
@10RP	4,56	1,288	0,583	0,833	0,84
@11RP	4,19	1,384	0,553	0,835	0,841
@12RP	5,18	0,971	0,593	0,834	0,837
@13RP	3,64	1,503	0,438	0,844	0,849
@14RP	4,38	1,171	0,388	0,845	0,849



ítem 1	3,83
ítem 2	5,36
ítem 3	4,55
ítem 4	4,92
ítem 5	6,34
ítem 6	2,26
ítem 7	6,17
ítem 8	8,86
ítem 9	4,54
ítem 10	4,68
ítem 11	7,46
ítem 12	3,29
ítem 13	6,8
ítem 14	4,78



### Item statistics of the rating scale model

	Infit	Outfit
@01AA	1,108	1,146
@02AA	0,859	0,866
@03AA	1,022	1,060
@04AA	0,928	0,944
@05AA	0,68	0,676
@06AA	1,230	1,354
@07AA	0,993	0,934
@08AA	0,732	0,699
@09AA	1,048	1,059
@10AA	1,131	1,190
@11AA	1,070	1,020
@12AA	1,311	1,407
@13AA	0,764	0,823
@14AA	1,302	1,290

Nota: Infit=Information-weighted mean square statistic; Outfit=Outlier-sensitive means square statistic.

**Tabla 36:**

*Ítems de la dimensión Autoaceptación.*

[1.] Cuando observo la historia de mi vida, estoy satisfecho(a) con cómo han resultado las cosas.
[2.] En general, me siento seguro(a) y positivo(a) acerca de mí mismo(a).
[3.] Siento que muchas de las personas que conozco han obtenido más de la vida que yo.
[4.] Si se me presentara la oportunidad, hay muchas cosas sobre mí mismo(a) que cambiaría.
[5.] Me gustan la mayoría de los aspectos de mi personalidad.
[6.] Cometí algunos errores en el pasado, pero siento que en general todo ha resultado para lo mejor.
[7.] En muchos aspectos, me siento decepcionado(a) con mis logros en la vida.
[8.] En su mayor parte, estoy orgulloso(a) de quién soy y de la vida que llevo.
[9.] Envidio a muchas personas por las vidas que llevan.
[10.] Mi actitud hacia mí mismo(a) probablemente no es tan positiva como la mayoría de las personas sienten acerca de sí mismas.
[11.] Muchos días me despierto sintiéndome desanimado(a) por cómo he vivido mi vida.
[12.] El pasado tuvo sus altibajos, pero en general, no quisiera cambiarlo.
[13.] Cuando me comparo con amigos y conocidos, me hace sentir bien acerca de quién soy.
[14.] Todos tienen debilidades, pero parece que tengo más que mi parte.

*Nota: Elaboración propia.*

En la dimensión Autoaceptación, volvemos a tener 6 ítems que cumplen los criterios expuestos previamente: 2, 5, 7, 8, 11 y 13. Además en este caso, los ítems no seleccionados aportan muy poca (casi nula) información al constructo (Tablas 35 y 36).

---

### 3.4.5.-REDUCCIÓN

Por lo tanto, a modo de resumen, los ítems seleccionados para cada dimensión son los que aparecen en la Tabla 37:

**Tabla 37:**

*Selección de ítems para la versión reducida.*

RP	AU	CE
3, 6, 8, 10, 11 y 12	2, 4, 9, 11, 13 y 14	4, 9, 10, 11 y 13
CP	PV	AA
2, 8, 9, 11 y 12	4, 6, 7, 8, 9 y 10	2, 5, 7, 8, 11, 13

*Nota: Elaboración propia*

Si realizamos con estos ítems un análisis factorial exploratorio, la estructura factorial que encontramos es la que aparece en la Tabla 38. Como vemos, cada ítem aparece colocado en el factor correspondiente. En este caso, el número de factores se ha determinado a nivel teórico fijándose en 6 y se ha realizado una rotación Oblimin.

**Tabla 38:***Análisis Factorial Exploratorio con rotación Oblimin.*

	Componente					
	1	2	3	4	5	6
I03RP	0.825					
I06RP	0.771					
I08RP	0.792					
I10RP	0.633					
I11RP	0.708					
I12RP	0.628					
I02AU						0.609
I04AU						0.573
I09AU						0.552
I11AU						0.696
I13AU						0.559
I14AU						0.453
I04CE			0.695			
I09CE			0.855			
I10CE			0.514			
I11CE			0.695			
I13CE			0.437			
I02CP		0.546				
I08CP		0.623				
I09CP		0.526				
I11CP		0.702				
I12CP		0.732				
I04PV				0.757		
I06PV				0.726		
I07PV				0.562		
I08PV				0.58		
I09PV				0.632		
I10PV				0.596		
I02AA					0.636	
I05AA					0.695	
I07AA					0.451	
I08AA					0.608	
I11AA					0.447	
I13AA					0.611	

Nota: Se utilizó la rotación 'oblimin'

*Nota: Elaboración propia*

En la tabla 39, aparece la fiabilidad de las dimensiones de la nueva escala, junto con los valores de fiabilidad de la escala completa.

**Tabla 39:***Análisis de la fiabilidad del test completo de 84 ítems, y de su reducción de 34.*

	Escala con 84 ítems		Escala con 34 ítems	
	$\alpha$ de Crombach	$\omega$ de McDonald	$\alpha$ de Crombach	$\omega$ de McDonald
RP	0.849	0.853	0.844	0.847
AU	0.829	0.832	0.723	0.730
CE	0.850	0.852	0.768	0.772
CP	0.791	0.818	0.806	0.809
PV	0.829	0.838	0.775	0.777
AA	0.901	0.905	0.853	0.859

*Nota: Elaboración propia.*

Teniendo en cuenta la gran sensibilidad de los estadísticos  $\alpha$  de Cronbach y  $\omega$  de McDonald al número de ítems, podemos observar que seguimos obteniendo unos buenos índices de ajuste, encontrándose todos por encima de 0,7.

Para ninguna de las escalas encontramos ahora ningún elemento que al eliminarlo aumente el  $\alpha$  ni el  $\omega$ , y por tanto no se muestran las estadísticas de fiabilidad de los elementos.

A continuación, vamos a confirmar la estructura factorial realizando un Modelo de Ecuaciones Estructurales, utilizando el método de Mínimos Cuadrados Ponderados Robustos, y obtenemos los índices de ajuste que aparecen en la Tabla 40 y 41. Como podemos observar, de acuerdo a estos resultados, el ajuste de nuestros datos al modelo teórico propuesto es muy bueno, situándose todos los índices por encima del umbral establecido.

**Tabla 40:**

*Tabla de índices de ajuste del modelo.*

Type	SRMR	RMSEA	95% Confidence Intervals	
			Lower	Upper
Classical	0.057	0.038	0.035	0.042
Robust	0.057			
Scaled	0.057	0.046	0.043	0.050

*Nota: Elaboración propia*

**Tabla 41:**

*Índices de bondad de ajuste.*

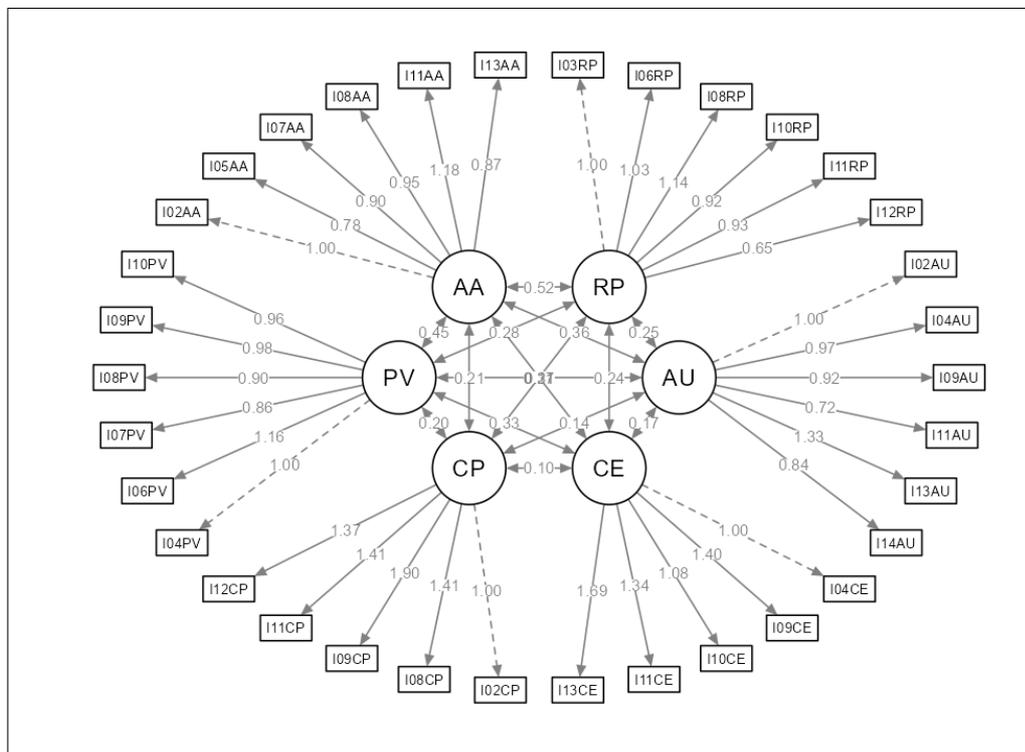
	Model
Comparative Fit Index (CFI)	0.976
Tucker-Lewis Index (TLI)	0.973
Bentler-Bonett Non-normed Fit Index (NNFI)	0.973
Relative Noncentrality Index (RNI)	0.976
Bentler-Bonett Normed Fit Index (NFI)	0.951
Bollen's Relative Fit Index (RFI)	0.946
Bollen's Incremental Fit Index (IFI)	0.976
Parsimony Normed Fit Index (PNFI)	0.868

*Nota: Elaboración propia*

En la Figura 23, podemos observar el Path Diagram resultante del Modelo de Ecuaciones Estructurales, en el que vemos que el ajuste se produce sin introducir ningún tipo de covariación entre los términos de error de las variables propuestos por los índices de modificación.

**Figura 23:**

*Path Diagram del modelo de ecuaciones estructurales*



*Nota: Elaboración propia.*

Por lo tanto, **proponemos una nueva escala a la que denominaremos *PBW-SMC formada por 34 ítems distribuidos en las 6 dimensiones y con 6 respuestas categóricas*** (ver tabla 42)

**Tabla 42:**

*Ítems de la propuesta final*

A menudo me siento solo(a) porque tengo pocos amigos cercanos con quienes compartir mis preocupaciones.
No tengo muchas personas que quieran escuchar cuando necesito hablar.
Me parece que la mayoría de las demás personas tienen más amigos que yo.
No he experimentado muchas relaciones cálidas y de confianza con otros.
A menudo siento que estoy afuera mirando hacia adentro cuando se trata de amistades.
Sé que puedo confiar en mis amigos, y ellos saben que pueden confiar en mí.
No tengo miedo de expresar mis opiniones, incluso cuando están en oposición a las opiniones de la mayoría de las personas.
Tiendo a preocuparme por lo que piensan de mí otras personas.
Tengo confianza en mis opiniones, incluso si son contrarias al consenso general.
A menudo cambio de opinión sobre decisiones si mis amigos o familiares están en desacuerdo.
Me preocupa cómo evalúan otras personas las elecciones que he hecho en mi vida.
Me juzgo a mí mismo(a) según lo que considero importante, no según los valores de lo que otros consideran importante.
Soy bastante bueno(a) gestionando las muchas responsabilidades de mi vida diaria.
Soy bueno(a) equilibrando mi tiempo para poder hacer todo lo que necesita hacerse.
Mi vida diaria es ocupada, pero obtengo una sensación de satisfacción al mantenerme al día con todo.
Me frustro al intentar planificar mis actividades diarias porque nunca logro hacer las cosas que me propongo.
Tengo dificultades para organizar mi vida de una manera que me resulte satisfactoria.
En general, siento que sigo aprendiendo más sobre mí mismo(a) a medida que pasa el tiempo
Con el tiempo, he adquirido mucha perspicacia sobre la vida que me ha convertido en una persona más fuerte y capaz
Tengo la sensación de que he evolucionado mucho como persona con el tiempo
Para mí, la vida ha sido un proceso continuo de aprendizaje, cambio y crecimiento
Disfruto ver cómo mis puntos de vista han cambiado y madurado a lo largo de los años
Tengo un sentido de dirección y propósito en la vida
No tengo una buena idea de lo que estoy tratando de lograr en la vida.
Solía establecer metas para mí mismo(a), pero eso ahora parece una pérdida de tiempo.
Disfruto haciendo planes para el futuro y trabajar para hacerlos realidad.
Soy una persona activa en llevar a cabo los planes que establezco para mí mismo(a).
Algunas personas vagan sin rumbo por la vida, pero yo no soy una de ellas.
En general, me siento seguro(a) y positivo(a) acerca de mí mismo(a).
Me gustan la mayoría de los aspectos de mi personalidad.
En muchos aspectos, me siento decepcionado(a) con mis logros en la vida.
En su mayor parte, estoy orgulloso(a) de quién soy y de la vida que llevo.
Muchos días me despierto sintiéndome desanimado(a) por cómo he vivido mi vida.
Cuando me comparo con amigos y conocidos, me hace sentir bien acerca de quién soy.

*Nota: Elaboración propia.*





**CAPITULO 4: PROPUESTA DESDE  
LA PERSPECTIVA DE ANÁLISIS DE  
DATOS COMPOSICIONALES DEL  
ESTUDIO DEL  
BIENESTAR PSICOLÓGICO**

#### 4.1.-LOS DATOS COMPOSICIONALES

Los datos composicionales aparecen en áreas muy diversas como, por ejemplo, economía, para identificar en que partidas se invierten los recursos económicos de una empresa, en arqueometría, para estudiar la composición de diferentes rocas o terrenos, en sanidad, para calcular la composición celular de cierto organismo, o en biología para caracterizar la fauna existente en un determinado hábitat.

El objetivo de este trabajo es trasladar esta idea al ámbito de los test psicológicos. La mayoría de los constructos con los que trabajamos son constructos latentes y para inferirlos evaluamos conductas observables (ítems) que se suelen agrupar en diferentes dimensiones formando un test. Estas dimensiones las podemos entender como esas partes que sumadas nos ofrecen una visión global de las puntuaciones de un sujeto en ese constructo y en cada una de las dimensiones.

En ocasiones puede servirnos para la evaluación del valor bruto de los resultados de un test, pero más allá de eso, lo que nos ofrece esta técnica es poder hacer una evaluación más precisa poniendo de manifiesto las relaciones existentes entre las partes, ya que no es lo mismo evaluar la puntuación de 90 de un sujeto por si misma en la escala A de un test, que evaluarla en relación a la puntuación de 10 obtenida en una escala B.

El análisis de datos composicionales se inicia con el trabajo de Aitchison(1982, 1986) en los que formula unos principios a los que debe responder la caracterización y análisis de datos composicionales. Trabajos como los de Barceló-Vidal et al(2001); Aitchison & Egozcue, (2005); Martín-Fernández et al. (2001, 2004); Egozcue, han dado varias reformulaciones de esos principios.

Aitchison en 1982, prueba que las técnicas estadísticas clásicas no proporcionan una solución óptima y desarrolla una geometría específica para este tipo de datos.

## 4.2.-DEFINICIONES

Formalmente, un dato composicional es un vector  $x = [x_1, x_2, \dots, x_D]$ , cuyas componentes positivas  $x_1, x_2, \dots, x_D$  representan partes de un todo, y por tanto, es un vector que está sujeto a la restricción de que la suma de sus componentes sea la unidad, o en el caso general una constante  $x_1 + \dots + x_D = k$ .

Los vectores de componentes positivas proporcionales representan la misma composición, es decir, al multiplicar una composición por una constante, por ejemplo, al pasar de tantos por uno a tantos por cien, obtendremos la misma composición y la información contenida en ella es totalmente equivalente. A este principio se le conoce con el principio de invarianza por escala y podemos concluir entonces que, todos los vectores de D componentes positivas que son proporcionales son equivalentes y representan la misma composición; luego es lógico elegir un representante de la clase de equivalencia para facilitar el trabajo e interpretación. La forma tradicional de elegir el representante es normalizar el vector para que sus componentes sumen una constante prefijada k, que puede ser 1, 100, 1000, 106, o cualquier otra que pueda ser conveniente. Esta operación se realiza mediante el operador clausura C. Este operador hace corresponder a cada vector  $w = [w_1, w_2, \dots, w_D]$  de componentes positivas su dato composicional asociado:

$$[x_1, x_2, \dots, x_D] = C(w) = k \left( \frac{w_1}{\sum_{i=1}^D w_i}, \frac{w_2}{\sum_{i=1}^D w_i}, \dots, \frac{w_D}{\sum_{i=1}^D w_i} \right)$$

Las componentes del vector clausurado se denominan partes, referidas al total k.

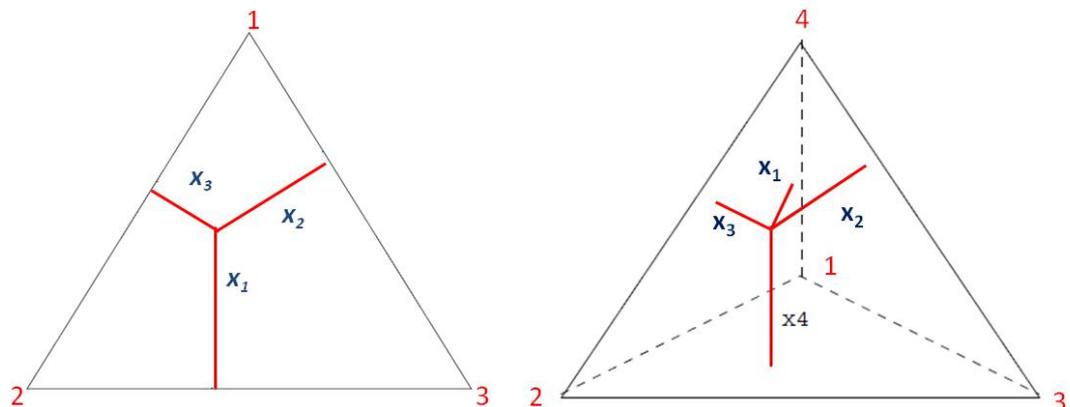
El conjunto de vectores de D componentes positivas cuyas componentes suman la constante k constituyen el simplex de D partes:

$$S^D = \{[x_1, x_2, \dots, x_D]: x_j > 0; j = 1, \dots, D; x_1 + \dots + x_D = k\}.$$

Para el caso tridimensional,  $D = 3$ , el simplex  $S^3$  suele representarse mediante el diagrama ternario, triangulo equilátero de altura la unidad (Ver figura 24). Existe una correspondencia biunívoca entre los datos composicionales con 3 partes y los puntos del diagrama ternario. Un dato composicional  $x = [x_1, x_2, x_3]$  se corresponde con el punto que dista  $x_1, x_2, x_3$ , respectivamente, de los lados opuestos a los vértices, 1, 2 y 3. En el caso  $D=4$ , el simplex  $S^4$  se representa por el interior de un tetraedro de altura la unidad y su representación se denomina diagrama cuaternario.

**Figura 24**

*Representación de un dato composicional  $x = [x_1, x_2, x_3]$  del simplex  $S^3$  en el diagrama ternario (izquierda); Representación de un dato composicional  $x = [x_1, x_2, x_3, x_4]$  del simplex  $S^4$  en el diagrama cuaternario (derecha).*



*Nota: Elaboración propia.*

En algunos casos puede interesar analizar únicamente el valor de las magnitudes relativas de un subconjunto de partes (subcomposición) de unos datos composicionales, el papel de marginales en el simplex los hacen las subcomposiciones, que son proyecciones del simplex  $S^D$ , el espacio de las composiciones con  $D$  partes, sobre un sub-simplex de dimensión menor ( $S^D$ ), obtenidas mediante la clausura de un subvector formado por  $d$  de las partes de una composición en  $S^D$ . Si  $S_x$  simboliza el subvector de  $x$  formado por  $S$  partes de la  $D$ , entonces  $C(x_S)$  es la subcomposición correspondiente.

En economía, un ejemplo de subcomposición sería por ejemplo la parte que dedica una familia a la educación de los hijos, y se trabajaría de

manera aislada con las variables "matrícula del colegio", "clases de inglés", "material escolar" y "uniforme del colegio", dentro de la composición global presupuesto general; en geología, si estamos estudiando la composición de diferentes tipos de roca, podemos tener interés en estudiar de manera aislada solo los componentes minerales; en psicología, haciendo un análisis global de la inteligencia, trabajaremos con tipos de ella, puede interesar centrarse en la inteligencia manipulativa y trabajar solamente con las variables que intervienen en ella.

### 4.3.-PROBLEMÁTICA DE LOS DATOS COMPOSICIONALES

El espacio muestral que habitualmente se utiliza en estadística es el espacio real D-dimensional ( $R^D$ ), junto con las operaciones básicas se suma de dos vectores y producto por un escalar, que le confieren estructura de espacio vectorial real. La cuestión clave es que la geometría del espacio muestral sobre el que se define un vector de proporciones es diferente de la geometría clásica Euclídea de  $R^D$ . En su formulación estadística los datos composicionales son realizaciones de una composición, vector aleatorio cuyo recorrido está en el simplex ( $S^D$ ). En el espacio real sumamos vectores, los multiplicamos por constantes, estudiamos su ortogonalidad, medimos distancias, y esto es posible porque  $R^D$ . En su formulación estadística los datos composicionales son realizaciones es espacio vectorial Euclideo, pero la geometría euclídea de  $R^D$ . En su formulación estadística los datos composicionales son realizaciones no es una geometría apropiada para datos composicionales porque los resultados pueden no estar en el Simplex, por ejemplo, al sumar vectores composicionales, al multiplicarlos por una constante, al calcular regiones de confianza o regiones predictivas. Además, las diferencias euclídeas no siempre son medidas razonables (Martín-Fernández et al, 1998), por ejemplo, entre el 5% y el 10% hay un incremento relativo del 100%, entre el 50% y el 55% hay un incremento relativo del 10%, pero la distancia euclídea es la misma. Suponemos que tenemos la puntuación de cuatro individuos en 3 de las dimensiones de un cuestionario, que forman una subcomposición (ver tabla 43):

**Tabla 43:**

*Puntuaciones de cuatro individuos en tres dimensiones.*

	<b>D1</b>	<b>D2</b>	<b>D3</b>
<b>I1</b>	30	10	60
<b>I2</b>	40	30	30
<b>I3</b>	20	20	60
<b>I4</b>	10	40	80

*Nota: Elaboración propia. Adaptado de Martín- Fernández et al, 1998.*

El incremento relativo que hay en la puntuación dada en la primera dimensión (D1) entre los individuos I4 e I3 es del 100%, mientras que

entre el individuo I1 y el I2 es de un 33,3%. Sin embargo, las diferencias euclídeas entre estos individuos son de 10 puntos.

Esto tiene consecuencias estadísticas importantes porque existen multitud de conceptos y técnicas estadísticas que se fundamentan de forma más o menos explícita en la distancia euclidiana, más adelante veremos la distancia que plantea Aitchison para resolver este problema.

Además, en la década de los 60, un gran número de científicos en el campo de la geología (Chayes, 1956, 1960, 1962, 1971; Krumbein, 1962; Sarmanov & Vistelius, 1959) y de la biología (Mosimann, 1963) advirtieron que la matriz de correlaciones y los coeficientes de correlación habitual no puede analizarse en el estudio de datos composicionales debido a la existencia de una falsa correlación entre las componentes de una composición. La matriz de correlaciones no puede analizarse en un estudio de vectores de suma una constante porque presenta necesariamente correlaciones negativas no nulas, determinadas precisamente por dicha restricción. Este problema es conocido como el problema del sesgo negativo (negative bias problem) y las correlaciones se han clasificado como "espurias" ya que falsea la imagen de las relaciones de dependencia y puede conducir a interpretaciones erróneas.

Si consideramos una composición de la  $D$ -parte  $[x_1, x_2, \dots, x_D]$ , donde  $x_1 + \dots + x_D = k$ , tenemos que:

$$Cov(x_1, x_i) + Cov(x_2, x_i) + \dots + Cov(x_D, x_i) = 0 \text{ con } i = 1, 2, \dots, D$$

debido a la restricción  $x_1 + \dots + x_D = k$ .

Sabemos que  $Cov(x_i, x_i) = Var(x_i) > 0$ , excepto en el caso en que la componente  $x_i$  sea una constante. Por lo tanto, al menos, una de las covarianzas de la izquierda debe ser negativo ( $Cov(x_i, x_j) < 0, i \neq j$ ) o, de manera equivalente, debe haber por lo menos un elemento negativo en la primera fila de la matriz de covarianza de partida, por lo tanto, las

covarianzas no son libres de tomar cualquier valor y esto invalida la interpretación habitual de las covarianzas y, por ende, de las correlaciones, pues a priori suponemos que deberían de poder tomar valores positivos, negativos o nulos. Por el mismo motivo, las correlaciones no son libres de variar en el intervalo usual  $(-1, 1)$  ya que el coeficiente de correlación entre dos componentes cualesquiera de una composición sea igual a 0 no puede interpretarse, como es habitual, como indicio de independencia entre ambas partes.

Debido a que la gran mayoría de métodos estadísticos multivariantes la matriz de covarianzas juega, en mayor o menor medida, un papel importante, nos hace pensar que el análisis de los datos composicionales no podrá ser realizado mediante la aplicación de las técnicas clásicas.

La metodología de Aitchison se basa en la transformación de los datos composicionales al espacio real multivariante. La mayor aportación de la monografía de Aitchison (1986) consistió en establecer que un estudio apropiado de la variación relativa en un conjunto de datos composicionales debe basarse en "log ratio analysis" (Krzanowski & Marriott, 1994).

Por la estructura de los datos, al tener que hacer comparaciones entre términos relativos tenemos que hablar en términos de ratio y de esa forma, trabajando con los cocientes, desaparecen los problemas de las correlaciones espurias, y tomando logaritmos de estos cocientes, el espacio final es el real y ya en este espacio podemos aplicar cualquier técnica estadística.

Hay que tener en cuenta, que cuando se examina un subconjunto de las partes de una composición, una *subcomposición*, se requiere que los resultados del análisis no sean contradictorios con los obtenidos de la composición original. La coherencia puede resumirse en dos criterios:

El principio de invariancia por escala se aplica a cada una de las subcomposiciones posibles.

Dominancia subcomposicional: exige que la forma de medir distancias en la composición y las subcomposiciones siga las reglas de una proyección: las distancias se reducen cuando se observa una proyección.

La distancia euclídea ordinaria entre vectores reales no puede ser aplicada para medir distancias entre composiciones ya que se violan tanto el principio de invariancia por escala como la dominancia subcomposicional. Si dos vectores de componentes positivas se multiplican por una constante positiva  $c$ , entonces la distancia euclídea entre ellas queda multiplicada por  $c$  violando así el principio de invariancia por escala.

Trabajando con cocientes se cumple el principio de invarianza por escala ya que:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{\lambda x_1}{\lambda x_2}$$

Trabajar con cocientes asegura además la coherencia subcomposicional. Por ejemplo, si consideremos dos analistas financieros, A y B, interesados en estudiar la relación entre las proporciones de capital invertido por los clientes en distintos productos financieros. Supongamos que existen cinco productos, siendo  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  las proporciones de capital invertido en cada uno de ellos. Supongamos además que el analista A tiene acceso a toda la información sobre las cantidades invertidas, es decir, trabaja con la composición  $[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$ , mientras que el analista B sólo tiene acceso a la información sobre los tres primeros, trabaja con la subcomposición  $[s_1, s_2, s_3]$ . En la tabla 44 vienen detallados los datos que maneja cada analista sobre los tres clientes:

**Tabla 44:**

*Datos de dos analistas y sus productos financieros.*

<b>Datos analista A:</b> [ $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ ]	<b>Datos analista B:</b> [ $s_1, s_2, s_3$ ]
[0.2, 0.1, 0.2, 0.5, 0.1]	[0.4, 0.2, 0.4].
[0.2, 0.2, 0.2, 0.1, 0.1]	[0.333, 0.333, 0.333].
[0.5, 0.1, 0.1, 0.1, 0.2]	[0.714, 0.143, 0.143].

*Nota: Elaboración propia*

Aún así, lo lógico sería que si B calcula el coeficiente de correlación lineal habitual entre por ejemplo de  $s_1$  y  $s_2$  obtenga el mismo resultado que si A lo calcula entre  $x_1$  y  $x_2$ , ya que las proporciones se refieren a los mismos productos financieros. Pero esto no es así cuando la medida se calcula sobre las proporciones absolutas. El coeficiente de correlación lineal entre las proporciones de capital invertido en los productos 1 y 2 es de -0.500 para el analista A y de -0.837 para el B. Por lo tanto, queda claro que esta medida de dependencia no es coherente cuando se aplica directamente sobre proporciones. Sin embargo, es fácil comprobar que los cocientes entre las partes  $x_i/x_j$  no varían al pasar de la composición a la subcomposición. Así, para el cliente 1  $x_1/x_2 = s_1/s_2 = 2$ . Por lo que si trabajamos con los cocientes evitaremos el problema de la incoherencia subcomposicional. Si en lugar de considerar dos analistas consideramos dos psicólogos A y B interesados en estudiar la relación entre las dimensiones de un cuestionario que evalúa bienestar psicológico en tres individuos, pero que uno de ellos está interesado en las seis dimensiones del cuestionario y el otro sólo en tres de ellas, estaríamos ante un ejemplo dentro del contexto de los cuestionarios de la psicología.

Encontramos otra incoherencia en relación a las subcomposiciones. Intuitivamente cabe encontrar cierta relación entre la matriz de covarianzas de una subcomposición y la de la composición de procedencia, sin embargo, no la hay. Es posible que dos partes estén correlacionadas positivamente y al analizarlas como parte de una subcomposición pasen a estar correlacionadas negativamente (Aitchison, 1997)

Los cocientes entre proporciones, por lo tanto, se convierten en el centro del análisis composicional, sin embargo, los cocientes entre partes que son cantidades positivas tienen escala relativa por este motivo se toman logaritmos de los cocientes de proporciones de forma que su escala se transforma en absoluta (diferencia de logaritmos). Además, el trabajar con logaritmos soluciona el problema del orden de los cocientes, es decir como:

$$\frac{x_1}{x_2} \neq \frac{x_2}{x_1}$$

entonces, si tomamos logaritmos:

$$\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = -\ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$$

#### 4.4.-GEOMETRÍA

Antes todos los problemas explicados en el apartado anterior que surgen al tratar con datos composicionales se plantea la necesidad de aplicar técnicas estadísticas para el estudio e interpretación de este tipo de datos.

El desarrollo de los conceptos propuestos por Aitchison (1986) ha llevado a la llamada *geometría de Aitchison* del símplex (Pawlowsky-Glahn & Egozcue, 2001) que, siendo una geometría de tipo euclídeo, requiere definiciones específicas de las operaciones y la métrica cuya apariencia es peculiar.

Las operaciones básicas definidas en el símplex son la perturbación, la potenciación (operación interna) y el producto escalar, simbolizadas, respectivamente, por  $\oplus, \dots, \langle, \rangle_\alpha$

$$x \oplus y = \left[ \frac{x_1 y_1}{\sum x_j y_j}, \dots, \frac{x_D y_D}{\sum x_j y_j} \right]$$

$$\alpha \otimes x = \left[ \frac{x_1^\alpha}{\sum_j x_j^\alpha}, \dots, \frac{x_D^\alpha}{\sum_j x_j^\alpha} \right]$$

$$\langle x, y \rangle_\alpha = \frac{1}{D} \sum_{i < j} \ln \frac{x_i}{x_j} \ln \frac{y_i}{y_j}$$

donde  $x, y \in S^D$  y  $\alpha$  es un número real. En estas operaciones se ha considerado, sin pérdida de generalidad, que la constante de la restricción de la suma de componentes es igual a la unidad ( $k = 1$ ). Estas tres operaciones dotan al símplex  $S^D$  de estructura de espacio vectorial euclidiano de dimensión  $D - 1$ .

Las perturbaciones sobre las composiciones de  $S^D$  vienen a jugar un papel equivalente al que desempeña el grupo de las traslaciones en  $\mathcal{R}^D$ .

La perturbación, además de atender a los principios del análisis composicional, tiene interpretación en el campo que se trabaja. Por ejemplo, en el campo de la agricultura: tenemos un plantel con una composición en kilos [180, 120, 60] correspondientes a agua, tierra y simiente cuyos datos clausurados son:  $x_0 = [0.5, 0.333, 0.167]$ . Transcurrida una noche, la composición es:  $x_1 = [0.667, 0.222, 0.111]$ . Para calcular la perturbación correspondiente al cambio tenemos que:

$$[0.5, 0.333, 0.167] \oplus [y_1, y_2, y_3] = [0.667, 0.222, 0.111]$$

por lo tanto:

$$y = C \left[ \frac{0.667}{0.5}, \frac{0.222}{0.333}, \frac{0.111}{0.167} \right] = \left[ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right]$$

La composición en kilos inicial [180, 120, 60] ha podido sufrir una de las siguientes transformaciones:

- Llovió, resultando [360; 120; 60] kilos de agua, tierra y simiente.
- Hizo viento, se llevó tierra y simiente, resultando [180; 60; 30] kilos de agua, tierra y simiente.
- Llovió e hizo viento, resultando [270; 90; 45] kilos de agua, tierra y simiente

En cualquiera de las tres situaciones las partes (componentes del vector clausurado) son equivalentes y por tanto la perturbación es la misma. Sin información externa es imposible decidir qué escenario es correcto (limitación), pero podemos usarlos como hipótesis de trabajo (potencialidad).

En el campo de la psicología, consideramos el "*Test de Empatía Cognitiva y Afectiva*" (López-Pérez et al., 2008) y las puntuaciones de un sujeto (baremación dada en percentiles) [0.30, 0.22, 0.15, 0.41] en las cuatro dimensiones, adopción de perspectivas, comprensión emocional,

manejo del estrés empático y alegría empática, cuyos datos clausurados son:  $x_0 = [0.277, 0.204, 0.139, 0.380]$ . Si sometiésemos al individuo a un tratamiento para manejar el estrés basado en terapia cognitivo-conductual basándonos en una perturbación como hipótesis de trabajo  $y = [\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}]$ , la composición resultante sería:

$$x_1 = [0.277, 0.204, 0.139, 0.380] \oplus [\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}] = [0.244, 0.179, 0.244, 0.333]$$

Luego la puntuación inicial en el manejo del estrés ha mejorado con respecto al resto de las dimensiones.

El producto interior definido anteriormente induce una distancia en  $S^D$ , conocida como la distancia de Aitchison y definida como:

$$d_a(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \left[ \frac{1}{D} \sum_{i < j} \left( \ln \frac{x_i}{x_j} - \ln \frac{x'_i}{x'_j} \right)^2 \right]^{1/2} = \left[ \sum_{i=1}^D \left( \ln \frac{x_i}{g(\mathbf{x})} - \ln \frac{x'_i}{g(\mathbf{x}')} \right)^2 \right]^{1/2}$$

donde  $g(\mathbf{x}) = (\prod_{i=1}^D x_i)^{1/D}$ , es decir, la media geométrica de las componentes de la composición  $\mathbf{x}$ .

La distancia de Aitchison verifica:

$$\text{I. } d_a(\mathbf{x} \oplus \mathbf{z}, \mathbf{y} \oplus \mathbf{z}) = d_a(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

$$\text{II. } d_a(\alpha \otimes \mathbf{x}, \alpha \otimes \mathbf{y}) = |\alpha| d_a(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

Esta distancia, es totalmente compatible con las operaciones básicas en el simplex y con la particular naturaleza de los datos composicionales (Aitchison et al, 2000). La estructura de espacio Euclídeo implica que sobre el simplex pueden definirse todos los entes y conceptos geométricos usuales tales como líneas, ángulos, ortogonalidad, paralelismo, etc. Sin embargo, aunque matemáticamente equivalentes, las características, y el aspecto, de estos elementos en la geometría del simplex difieren de

aquellas a las que estamos habituados en la geometría Euclídea clásica del espacio real.

Las geometrías del espacio Euclídeo real y del Simplex se detallan en la tabla 45:

**Tabla 45:**  
*Geometría del espacio Euclídeo y del Simplex*

Espacio real $\mathcal{R}^D$	Simplex $S^D$
<b>Suma</b> $x + y = [x_1 + y_1, \dots, x_D + y_D]$	<b>Perturbación</b> $x \oplus y = \left[ \frac{x_1 y_1}{\sum_j x_j y_j}, \dots, \frac{x_D y_D}{\sum_j x_j y_j} \right]$
<b>Producto</b> $\alpha \cdot x = [\alpha x_1, \dots, \alpha x_D]$	<b>Potenciación</b> $\alpha \otimes x = \left[ \frac{x_1^\alpha}{\sum_j x_j^\alpha}, \dots, \frac{x_D^\alpha}{\sum_j x_j^\alpha} \right]$
<b>Distancia Euclídea</b> $d_e(x, y) = \left[ \sum_{i=1}^D (y_i - x_i)^2 \right]^{1/2}$	<b>Distancia de Aitchison</b> $d_a(x, y) = \left[ \sum_{i=1}^D \left( \ln \frac{x_i}{g(x)} - \ln \frac{y_i}{g(y)} \right)^2 \right]^{1/2}$
<b>Vector de medias</b> $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n x_l$	<b>Centro métrico</b> $g(x) = \left( \prod_{i=1}^D x_i \right)^{1/D}$
<b>Distancia y traslación:</b> $d_e(x + z, y + z) = d_e(x, y)$	<b>Distancia y perturbación:</b> $d_a(x \oplus z, y \oplus z) = d_a(x, y)$
<b>Distancia y escalado</b> $d_e(\alpha \cdot x, \alpha \cdot y) =  \alpha  d_e(x, y)$	<b>Distancia y potenciación</b> $d_a(\alpha \otimes x, \alpha \otimes y) =  \alpha  d_a(x, y)$

*Nota: Elaboración propia*

#### 4.5.-TRANSFORMACIONES DEL SIMPLEX EN EL ESPACIO EUCLÍDEO ORDINARIO: TRANSFORMACIONES LOG-COCIENTE

Un primer intento de representar composiciones en forma de log-ratio es la transformación aditivo-logística (alr) (Aitchison 1986). Si  $\mathbf{x}$  es una composición del simplex  $S^D$ , entonces:

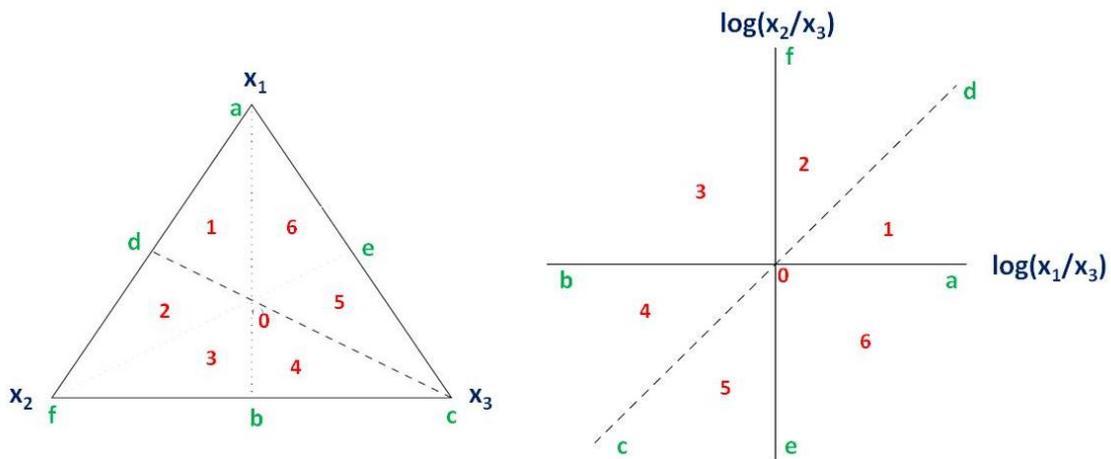
$$\text{alr}(\mathbf{x}) = \left[ \ln \frac{x_1}{x_D}, \dots, \ln \frac{x_{D-1}}{x_D} \right]$$

donde el  $\ln$  se aplica a cada una de las componentes, de forma que la componente  $i$ -ésima es el log-ratio  $\text{alr}_i(\mathbf{x}) = \ln \left( \frac{x_i}{x_D} \right)$ .

En la siguiente figura (figura 25) tenemos un ejemplo de una transformación alr.

**Figura 25:**

A la izquierda: regiones en que queda dividido el simplex  $S^3$  por las bisectrices del triángulo; A la derecha: regiones de  $\mathbb{R}^2$  en correspondencia con las regiones de  $S^3$  por la transformación.



Nota: Elaboración propia

A la transformación alr se le asocia la denominada *matriz de covarianzas de log-ratio* de una composición  $\mathbf{x} \in S^D$  definida por:

$$\Sigma = \left[ \text{cov} \left\{ \ln \left( \frac{x_k}{x_D} \right), \ln \left( \frac{x_c}{x_D} \right) \right\} : k, c = 1, 2, \dots, D - 1 \right]$$

Observamos que la matriz de covarianzas de log-ratio  $\Sigma$  no es más que la matriz de covarianzas del vector aleatorio  $\mathbf{y}$  de  $\mathfrak{R}^{D-1}$  que se obtiene de aplicar la transformación alr a la composición  $\mathbf{x}$ . Esta matriz no posee ninguna restricción más que la de ser simétrica y definida no negativa, por tratarse de una matriz de covarianzas.

Esta transformación se suele utilizar para la modelización de conjuntos de datos composicionales con distribuciones multivariantes.

Un inconveniente de la transformación alr es su asimetría respecto a las partes de la composición, por este motivo siempre que se trabaje con datos alr-transformados, debe comprobarse que la técnica estadística utilizada es invariante frente a perturbaciones de las partes. Otro inconveniente que presenta es que los ángulos y distancias en el simplex, con la métrica de Aitchison, no pueden asociarse con ángulos y distancias en el espacio real, con la métrica Euclídea, ya que:

$$d_a(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \neq d_e(\text{alr}(\mathbf{x}), \text{alr}(\mathbf{x}'))$$

Para superar la asimetría de la transformación arl se definió la transformación log-cociente centrada *clr* (Aitchison, 1986):

$$\mathbf{v} = \text{clr}(\mathbf{x}) = \left[ \ln \frac{x_1}{g(x)}, \dots, \ln \frac{x_D}{g(x)} \right]$$

donde  $g(x) = \left( \prod_{i=1}^D x_i \right)^{1/D}$ , es decir, la media geométrica de las  $D$  partes de  $\mathbf{x}$ .

Se cumple que las  $D$  componentes  $\text{clr}_i(\mathbf{x}) = \ln \left( \frac{x_i}{g(x)} \right)$  suman cero.

La transformación clr está más vinculada a contextos no paramétricos, ya que a partir de ella es posible especificar la distancia de

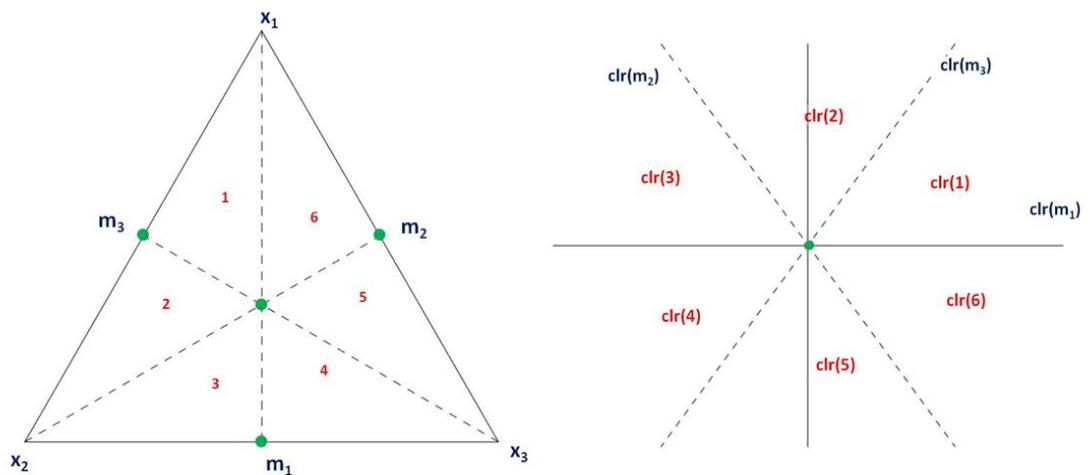
Aitchison en términos de la distancia Euclídea entre los vectores clr-transformaciones, esto es:

$$d_a(x, x') = d_e(\text{clr}(x), \text{clr}(x'))$$

Consideremos las 6 regiones en que las tres alturas o mediatrices  $(m_1, m_2, m_3)$  dividen al triángulo  $S^3$  de la parte izquierda de la figura 25. La aplicación clr transforma esas regiones en las regiones del plano  $\mathbb{R}^2$  que se muestran en la parte derecha de la figura 26.

**Figura 26:**

A la izquierda: regiones en que queda dividido el simplex  $S^3$  por las mediatrices del triángulo; A la derecha: regiones de  $\mathbb{R}^2$  en correspondencia con las regiones de  $S^3$  por la transformación clr.



*Nota: Elaboración propia.*

Esta transformación cumple que si  $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$  son dos composiciones de  $D$  partes y  $\alpha, \beta$  dos escalares, entonces:

$$\text{clr}((\alpha\mathbf{x}) \oplus (\beta\mathbf{x}')) = \alpha\text{clr}(\mathbf{x}) + \beta\text{clr}(\mathbf{x}')$$

A la transformación clr se le asocia también la denominada *matriz de covarianzas de log-ratio centrados* de una composición  $\mathbf{x} \in S^D$  definida por:

$$\Gamma = \left[ \text{cov} \left\{ \ln \left( \frac{x_k}{g(x)} \right), \ln \left( \frac{x_c}{g(x)} \right) \right\} : k, c = 1, 2, \dots, \right]$$

Esta matriz tiene dimensión  $D \times D$ , y se trata de una matriz singular dado que, la suma de los elementos de una fila cualquiera es igual a cero.

Egozcue *et al* (2003) proponen la transformación *log ratio isométrica (ilr)*, que salva los principales inconvenientes de las dos anteriores. Esta transformación tiene su fundamento en el hecho que las operaciones perturbación y potenciación dotan al simplex de estructura de espacio vectorial euclidiano con dimensión  $D-1$ . En consecuencia, si denotamos como  $e_1, \dots, e_{D-1}$  a una base ortonormal del simplex, toda composición  $\mathbf{x}$  está determinada de forma única por su vector de coordenadas:

$$\text{ilr}(\mathbf{x}) = [ \langle x, e_1 \rangle_\alpha, \dots, \langle x, e_{D-1} \rangle_\alpha ]$$

El principal problema de esta transformación es determinar cuál es la base ortonormal más apropiada para un problema en concreto, la que proporciona las expresiones que hacen más fácil la interpretación de los resultados. Una posibilidad es utilizar las coordenadas y expresar los resultados en la base canónica de  $\mathfrak{R}^D$  sin abandonar el simple.

La existencia de más de una transformación nos lleva a la situación de deber elegir entre una de ellas como paso previo a la aplicación de cualquier método estadístico multivariante. Ciertamente, las tres transformaciones están relacionadas mediante expresiones matriciales que permiten obtener cada una de ellas a partir de cualquiera de las otras.

## 4.6.-CENTROS Y VARIABILIDAD

En este apartado vamos a definir la media y la varianza-covarianza para datos composicionales ya que son los dos estadísticos más frecuentes en escenarios multivariantes.

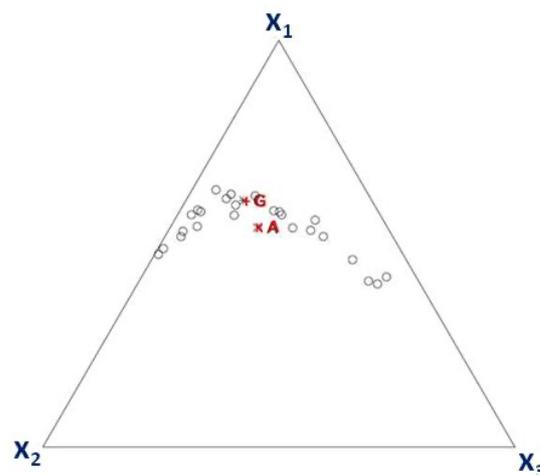
Aitchison en 1997 propuso la media geométrica composicional  $g(\mathbf{X})$  como una medida más representativa del centro de un conjunto, ya que para datos composicionales la media aritmética no es representativa. La media geométrica de las  $D$  partes de  $\mathbf{x}$  viene dada por la expresión:

$$g(x) = \left( \prod_{i=1}^D x_i \right)^{1/D}.$$

La figura 27 muestra un conjunto de datos y sus dos medidas de tendencia central (media aritmética y media geométrica). Se observa que la media aritmética no es una medida representativa del centro de este conjunto de datos composicionales. En general esto ocurrirá siempre que el conjunto de datos composicionales de  $S^3$  tenga apariencia cóncava o de "media luna".

**Figura 27:**

*A Medidas de tendencia central para el conjunto de datos: A= media aritmética y G=media geométrica.*



*Nota: Elaboración propia*

La medida de tendencia central  $g(x)$  es compatible con las operaciones básicas: perturbación, producto escalar y subcomposición ya que se verifica que si  $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$  es un conjunto de datos composicionales de  $S^D$ :

- I.  $g(\alpha\mathbf{X}) = \alpha g(\mathbf{X}), \forall \alpha \in \mathfrak{R}$
- II.  $g(\mathbf{p} \oplus \mathbf{X}) = \mathbf{p}g(\mathbf{X}), \forall \mathbf{p} \in \mathfrak{R}_+^D$

$g(C(\mathbf{X}_s)) = C(g(\mathbf{X}_s))$ , sea cual sea la subcomposición  $s$  escogida.

Además, se cumple que la media geométrica composicional y la media aritmética para datos del espacio real  $\mathfrak{R}^D$ , están relacionados mediante la transformación  $\text{clr}$ . Sea  $\mathbf{X}$  un conjunto de datos composicionales de  $S^D$  y  $g(\mathbf{X})$  su media aritmética composicional. Entonces se cumple que:

$$\text{clr}(g(\mathbf{X})) = \overline{\text{clr}(\mathbf{X})}$$

donde

$$\overline{\text{clr}(\mathbf{X})} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{clr}(x_i)$$

es la media aritmética del conjunto  $\text{clr}(\mathbf{X})$  o  $\text{clr}$ -transformado.

Ya sabemos que la medida de dispersión más utilizada para un conjunto de datos en el espacio real  $\mathfrak{R}^D$  es la traza de la matriz de covarianzas asociada al conjunto, pero ya hemos dicho anteriormente que los inconvenientes que tiene utilizar la matriz de covarianzas directa de un conjunto de datos composicionales. Se define la varianza de una composición  $\mathbf{x}$  como:

$$\text{totvar}(\mathbf{x}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_a^2(\mathbf{x}_i, g(\mathbf{X})) = \frac{1}{2n^2} \sum_{i,j=1}^n d_a^2(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$$

Esta medida está basada en la traza de la matriz de covarianzas ( $\Gamma$ ) del conjunto de datos clr-transformados y fue definida por Aitchison (1997) ya que es invariante por perturbaciones, propiedad que debe cumplir cualquier medida de variabilidad.

Si  $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$  es un conjunto de datos composicionales de  $S^D$  se verifica que:

- I.  $totvar(\alpha\mathbf{X}) = \alpha^2 totvar(\mathbf{X}), \forall \alpha \in \mathfrak{R}$
- II.  $totvar(\mathbf{p} \oplus \mathbf{X}) = totvar(\mathbf{X}), \forall \mathbf{p} \in \mathfrak{R}_+^D$
- III.  $totvar(C(\mathbf{X}_s)) \leq totvar(\mathbf{X})$ , sea cual sea la subcomposición  $s$  escogida.

#### 4.7.-ANÁLISIS DE DATOS COMPOSICIONALES

A menudo, la dimensión de las composiciones con las que trabajamos es muy alta, como ocurre por ejemplo con las composiciones geoquímicas que habitualmente utilizan 10 o más óxidos, o en el caso de la psicología, donde los test (cuestionarios) utilizan varias dimensiones para medir un constructo. En estos casos resulta indispensable disponer de técnicas que permitan proyectar nuestros datos sobre subespacios de dimensión 2 o 3 (representables gráficamente), de manera que la representación obtenida conserve al máximo la información contenida en los datos originales.

Un biplot es una representación gráfica de datos multivariantes (1971). De acuerdo con Galindo (1986) es una forma de representar de modo conjunto filas y columnas, es decir, individuos y variables de una matriz cualquiera, donde para representarlas se utilizan los elementos de la matriz como productos internos de vectores. Los biplot son útiles para describir gráficamente los datos o para mostrar los resultados proporcionados por modelos más formales.

En un biplot las variables son representadas normalmente por vectores, que se dirigen hacia donde existe más variabilidad para cada una de dichas variables y los individuos son representados por puntos en el plano.

Las dos factorizaciones biplot más importantes propuestas por Gabriel (1971) fueron el GH-biplot que consigue una alta calidad en la representación de las columnas (variables) y no tan alta para las filas (individuos); y el JK-biplot que consigue una alta calidad de representación para las filas (individuos), y no tal alta para las columnas.

Como una alternativa a los biplot clásicos de Gabriel (1971, 1981a), Galindo (1985, 1986) demuestra que es posible con una conveniente selección de los marcadores, que ambos conjuntos se pueden representar simultáneamente sobre un mismo sistema de coordenadas cartesiana, con

la misma calidad en la representación tanto para las filas como para las columnas, Galindo denomina a este biplot, HJ-biplot.

La fundamentación teórica de los biplot clásicos, se basa en la descomposición de la matriz de datos  $\mathbf{Z}$  de orden ( $n$  individuos  $\times$   $D$  variables), y de rango  $s$ , por una de bajo rango ( $q < s$ )

$$\mathbf{Z} = \mathbf{GH}' ,$$

donde  $\mathbf{G}$  es una matriz de orden  $n \times s$  y  $\mathbf{H}$  una matriz de orden  $D \times s$ .

Las  $n$  filas de  $\mathbf{G}$  y las  $D$  de  $\mathbf{H}$  proporcionan las coordenadas de los  $n$  individuos y de las  $D$  variables en un espacio euclídeo  $s$ -dimensional (con la misma dimensión que el rango  $r$  de  $\mathbf{Y}$ ).

La descomposición de  $\mathbf{Z}$  en el producto de las matrices  $\mathbf{G}$  y  $\mathbf{H}'$  puede realizarse de infinitas maneras distintas, cumpliéndose sea cual sea la descomposición que se realice, que el producto escalar ordinario del  $i$ -ésimo punto fila de  $\mathbf{G}$  con el  $j$ -ésimo punto columna de  $\mathbf{H}'$  con respecto al origen, es igual al  $(i, j)$ -ésimo elemento  $y_{ij}$  de la matriz  $\mathbf{Z}$ .

Habitualmente el interés se centra en biplots de dimensión 2 o 3 de  $\mathbf{Z}$  y se parte de la descomposición en valores singulares (SVD) de  $\mathbf{Z}$ :

$$\mathbf{Z} = \mathbf{GH}' = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}'$$

donde:

$\mathbf{Z}$  es una matriz de datos de orden  $n \times D$  construida a partir de los valores propios no nulos de  $\mathbf{Y}$  ( $\sqrt{\lambda_1} > \sqrt{\lambda_2} > \dots > \sqrt{\lambda_s} > 0$ ).

$\mathbf{\Sigma}$  es una matriz diagonal de orden  $s \times s$  construida a partir de los valores propios no nulos de  $\mathbf{Z}$  ( $\sqrt{\lambda_1} > \sqrt{\lambda_2} > \dots > \sqrt{\lambda_s} > 0$ ).

$\mathbf{U}$  es una matriz de orden de orden  $n \times s$  cuyas  $s$  columnas  $(u_1, u_2, \dots, u_s)$  constituyen un conjunto ortonormal de vectores de  $\mathfrak{R}^n$ .

$\mathbf{V}$  es una matriz de orden de orden  $s \times D$  cuyas  $s$  columnas  $(v_1, v_2, \dots, v_s)$  constituyen un conjunto ortonormal de vectores de  $\mathfrak{R}^D$ .

Debe cumplirse que  $\mathbf{U}'\mathbf{U} = \mathbf{V}'\mathbf{V} = \mathbf{I}$ , es decir, las columnas de  $\mathbf{U}$  y  $\mathbf{V}$  son ortonormales para garantizar así la unicidad de la factorización

Como los vectores  $u_1, u_2, \dots, u_s$  son los vectores propios unitarios de la matriz  $\mathbf{Z}'$  asociados a los valores propios  $\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_s}$ , y los  $v_1, v_2, \dots, v_s$  son los vectores propios unitarios de la matriz  $\mathbf{Z}$  asociados a los mismos valores propios, tenemos que:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1D} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n1} & \cdots & z_{nD} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & \cdots & u_{ns} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{D1} & \cdots & v_{Ds} \end{bmatrix}$$

Si en  $\mathbf{U}$  y en  $\mathbf{V}$  tomamos tan solo las  $q$  ( $1 \leq q \leq s$ ) primeras columnas la matriz:

$$\mathbf{Z} \cong \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1D} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{nD} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & \cdots & u_{nq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1D} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{q1} & \cdots & v_{qD} \end{bmatrix}$$

es, la matriz que mejor aproxima la matriz  $\mathbf{Z}$  (Eckart & Young, 1936).

De esta manera, si el biplot lo hacemos a partir de la matriz  $\mathbf{Y}$  de rango  $q$  en vez de la matriz  $\mathbf{Z}$ , obtendremos un *biplot aproximado* en el espacio reducido de dimensión  $q$ .

En particular, si el rango de  $\mathbf{Y}$  es  $q=2$ , entonces el biplot representa de forma exacta la matriz sobre el plano:

$$\mathbf{Z} \cong \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1D} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{nD} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ \vdots & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 1 & \sqrt{\lambda_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1D} \\ v_{21} & \cdots & v_{2D} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ \vdots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1D} \\ h_{21} & \cdots & h_{2D} \end{bmatrix}$$

Donde los  $n$  vectores  $\mathbf{g}_1 \mathbf{g}_2 \cdots \mathbf{g}_n$ , llamados marcadores fila, se corresponden con las proyecciones de los  $n$  puntos sobre el plano. Y los  $D$  vectores  $\mathbf{h}_1 \mathbf{h}_2 \cdots \mathbf{h}_D$ , llamados marcadores columna, se corresponden a las proyecciones de los  $D$  puntos sobre el plano.

La factorización Biplot garantiza la representación gráfica aproximada de la matriz, ya que cada  $z_{ij}$  puede reconstruirse de la siguiente forma:

$$z_{ij} = \mathbf{g}_i' \mathbf{h}_j \quad (i=1, \dots, n ; j=1, 2, \dots, D)$$

Considerando la aproximación biplot de la matriz  $\mathbf{Z}$  y aplicando la definición de producto escalar tenemos que:

$$z_{ij} = \mathbf{g}_i' \mathbf{h}_j = \|\mathbf{Proy}(\mathbf{g}_i/\mathbf{h}_j)\|(\text{signo})\|\mathbf{h}_j\|$$

Siendo:

$\|\mathbf{Proy}(\mathbf{g}_i/\mathbf{h}_j)\|$  = longitud de la proyección de  $\mathbf{g}_i$  sobre  $\mathbf{h}_j$

$\|\mathbf{h}_j\|$  = modulo del segmento que une el origen con el extremo del vector  $\mathbf{h}_j$

La proporción:

$$\frac{\lambda_1 + \cdots + \lambda_q}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_s}$$

nos dará una medida de la "bondad" de la representación reducida.

Para el caso particular de  $q=2$  la bondad del ajuste será:

$$\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s}$$

La asignación del valor propio a los factores **G** nos lleva al llamado JK-biplot (**G=UΣ** y **H=V**), para este biplot se impone la métrica **HH' = I** en el espacio de las filas de la matriz **Z**, luego **Z'Z = GG'**. Por lo tanto, este biplot preserva la métrica usual entre las filas, pero no entre las columnas, obteniéndose alta calidad de representación para las filas.

La asignación del valor propio a los factores **H** nos lleva al llamado GH-biplot (**G=U** y **H=VΣ**), como trabajamos con la métrica identidad en el espacio de las filas, **G** debe verificar que **GG' = I**, es decir, **Z'Z = HH'**, por lo tanto, este biplot preserva la métrica usual entre las columnas, pero no entre las filas, por lo que se obtiene una alta calidad de representación para las columnas.

La factorización para el HJ-biplot (Galindo, 1985, 1986) sería **G=UΣ** y **H=VΣ**. Para el HJ-biplot, los elementos de la matriz **Z** están centrados por filas y columnas, por lo que la métrica introducida en el espacio de las filas es equivalente a la inversa de la matriz de covarianzas entre variables, mientras que en el espacio de las columnas la métrica es equivalente a la inversa de la matriz de dispersión entre los individuos. La representación de filas y columnas es simultánea por lo que se obtienen la misma calidad de representación tanto para los individuos (filas) como para las variables (columnas).

Las propiedades de los marcadores filas y columnas dependen del biplot elegido. El conocimiento de estas propiedades es de fundamental importancia a la hora de la elección del tipo de Biplot a utilizar, así como para la interpretación de los resultados obtenidos. Como el interés de este trabajo se centra en los marcadores columnas (variables, dimensiones del cuestionario) vamos a ver las propiedades de los marcadores del GH-Biplot.

Recordemos que en este tipo de biplot la métrica utilizada es:  $\mathbf{G}\mathbf{G}' = \mathbf{I}$

Veamos a continuación las propiedades de los marcadores columna ( $\mathbf{H} = \mathbf{V}\Sigma$ ):

**Propiedad 1.** El producto escalar de las columnas de  $\mathbf{Z}$ , coincide con el producto escalar de los marcadores columna, o sea:  $z_i'z_j = h_i'h_j$ , o bien en forma matricial  $\mathbf{Z}'\mathbf{Z} = \mathbf{H}'\mathbf{H}$ .

**Propiedad 2.** Si los elementos de la matriz  $\mathbf{Z}$ , han sido centrados por columnas, se obtiene el Biplot de Componentes Principales. En este caso la longitud al cuadrado de los vectores que representan a los marcadores columna, aproximan la covarianza entre las variables correspondientes:

$$h_i'h_j = \text{COV}(z_i, z_j)$$

De esta propiedad se desprenden las tres propiedades siguientes:

**Propiedad 3.** La longitud al cuadrado de los marcadores columna aproxima la varianza de la variable  $\mathbf{Z}$ , y por lo tanto la longitud, aproxima la desviación estándar.

$$\|h_j\| = \|z_j\| = \sqrt{\text{Var}(z_j)}$$

**Propiedad 4.** El coseno del ángulo que forman dos marcadores columna aproxima la correlación entre las variables correspondientes.

$$\text{Cos}(h_i, h_j) \approx (h_i'h_j)/\|h_i\|\|h_j\| = \text{Cos}(z_i, z_j)/\|z_i\|\|z_j\|$$

De donde:

$$\text{Cos}(h_i, h_j) = \text{Corr}(z_i, z_j)$$

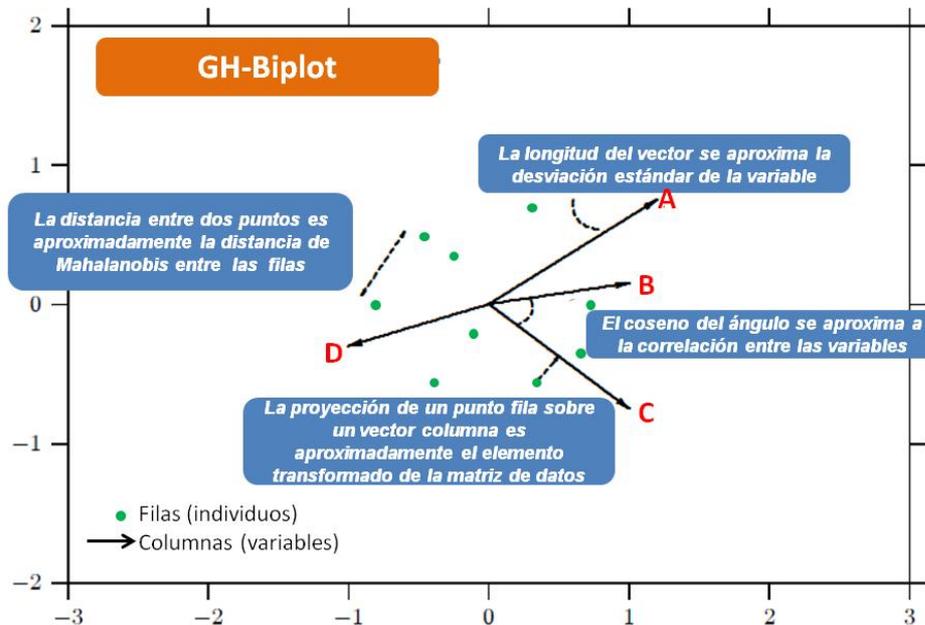
**Propiedad 5.** La distancia euclídea entre dos vectores columna coincide con la distancia entre los respectivos marcadores columna.

$$d^2(z_i, z_j) = d^2(h_i, h_j)$$

Las propiedades de los marcadores fila ( $G = U$ ) son las siguientes:

La distancia de Mahalanobis entre dos filas (individuos) ( $k$  y  $l$ ) de  $Z$  se aproxima mediante la distancia euclídea entre dos marcadores fila ( $k$  y  $l$ ).

**Figura 28:**  
*Geometría del GH-biplot*



*Nota: Adaptada de Aitchison y Greenacre (2002)*

A menudo, antes de proceder a la representación gráfica (ver figura 28), se aplican diversas transformaciones a una matriz  $X$  hasta obtener una matriz  $Z$ , que es la que finalmente se representa. Las transformaciones que se aplican dependen de la naturaleza de los datos y suelen consistir en el centrado de las variables (columnas) respecto de sus medias, en la normalización de las variables, en transformaciones logarítmicas, etc.

---

### 4.7.1.-BIPLOT DE VARIACIÓN RELATIVA

Sea  $X = [x_{ij}]$  una matriz de datos composicionales de dimensión  $n \times D$ . Al aplicarle la transformación clr a esta matriz, es decir, centrar las columnas de la matriz  $X$  de los log-ratio centrados de las composiciones, obtenemos una nueva matriz  $Z^* = [z_{ij}^*]$  donde:

$$z_{ij}^* = \ln \frac{x_{ij}}{\sqrt[D]{\prod_{j=1}^D x_{ij}}} = \ln(x_{ij}) - \frac{1}{D} \sum_{j=1}^D \ln(x_{ij})$$

Si denotamos por  $l_{ij} = \ln(x_{ij})$ , y a  $\frac{1}{D} \sum_{j=1}^D \ln(x_{ij}) = l_{i.}$ , tenemos que:

$$z_{ij}^* = l_{ij} - l_{i.}$$

Por lo tanto:

$$z_{ij}^* = \frac{1}{D} \sum_{j=1}^D z_{ij}^* = 0$$

es decir, la media de los elementos de de una misma fila es igual a cero.

Si centramos esta matriz con respecto a las medias de las columnas, es decir, la media de los elementos de una misma columna es igual a cero, obtenemos una matriz  $Z = [z_{ij}]$  de la forma:

$$z_{ij} = l_{ij} - l_{i.} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (l_{ij} - l_{i.}) = l_{ij} - l_{i.} - l_{.j} + l_{..}$$

por lo tanto:

$$\frac{1}{D} \sum_{j=1}^D z_{ij} = 0 \text{ y } \frac{1}{D} \sum_{i=1}^n z_{ij} = 0$$

Luego  $\mathbf{Z}$  es una matriz doblemente centrada, por filas y por columnas. Su rango es siempre menor o igual que  $D - 1$ .

Factorizando  $\mathbf{Z}$  usando una descomposición en valores singulares (SVD) de  $\mathbf{Z}$ :

$$\mathbf{Z} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}'$$

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & \cdots & u_{ns} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1D} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{s1} & \cdots & v_{sD} \end{bmatrix}'$$

Donde:

$$s = \text{rango}(\mathbf{Z})$$

$\mathbf{u}_i = [u_{i1} \ u_{i2} \ \dots \ u_{is}]$  son los valores propios de  $\mathbf{Z}\mathbf{Z}'$

$\mathbf{v}'_j = [v_{j1} \ v_{j2} \ \dots \ v_{js}]$  son los valores propios de  $\mathbf{Z}'\mathbf{Z}$

$\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_s$  son los autovectores de  $\mathbf{Z}\mathbf{Z}'$  o  $\mathbf{Z}'\mathbf{Z}$

Debe cumplirse que las matrices  $\mathbf{U}$  y  $\mathbf{V}$  deben de cumplir:  $\mathbf{U}'\mathbf{U} = \mathbf{V}'\mathbf{V} = \mathbf{I}$ , es decir, las columnas de  $\mathbf{U}$  y  $\mathbf{V}$  son ortonormales para garantizar así la unicidad de la factorización

Por ejemplo, tomamos una matriz  $\mathbf{Y}$  de rango 2 como aproximación  $\mathbf{Z}$ :

$$\mathbf{Z} \approx \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ \dots & \dots \\ u_{n1} & u_{n2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} & \dots & v_{1D} \\ v_{21} & \dots & v_{2D} \end{bmatrix}$$

La proporción de variabilidad explicada en  $\mathbf{Y}$  será:

$$\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s}$$

Se selecciona la siguiente aproximación para  $\mathbf{Y}$ :

$$\begin{bmatrix} \sqrt{n-1}u_{11} & \sqrt{n-1}u_{12} \\ \sqrt{n-1}u_{21} & \sqrt{n-1}u_{22} \\ \dots & \dots \\ \sqrt{n-1}u_{n1} & \sqrt{n-1}u_{n2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{\lambda_1}v_{11}}{\sqrt{n-1}} & \frac{\sqrt{\lambda_1}v_{12}}{\sqrt{n-1}} & \dots & \frac{\sqrt{\lambda_1}v_{1D}}{\sqrt{n-1}} \\ \frac{\sqrt{\lambda_2}v_{21}}{\sqrt{n-1}} & \frac{\sqrt{\lambda_2}v_{22}}{\sqrt{n-1}} & \dots & \frac{\sqrt{\lambda_2}v_{2D}}{\sqrt{n-1}} \end{bmatrix}$$

Donde vamos a denotar por:

$$\mathbf{g}_i = (\sqrt{n-1}u_{i1}, \sqrt{n-1}u_{i2})$$

$$\mathbf{h}_j = \left( \frac{\sqrt{\lambda_1}v_{1j}}{\sqrt{n-1}}, \frac{\sqrt{\lambda_2}v_{2j}}{\sqrt{n-1}} \right)$$

Luego:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{g}_n \end{bmatrix} [\mathbf{h}_1 \ \mathbf{h}_2 \ \dots \ \mathbf{h}_D]$$

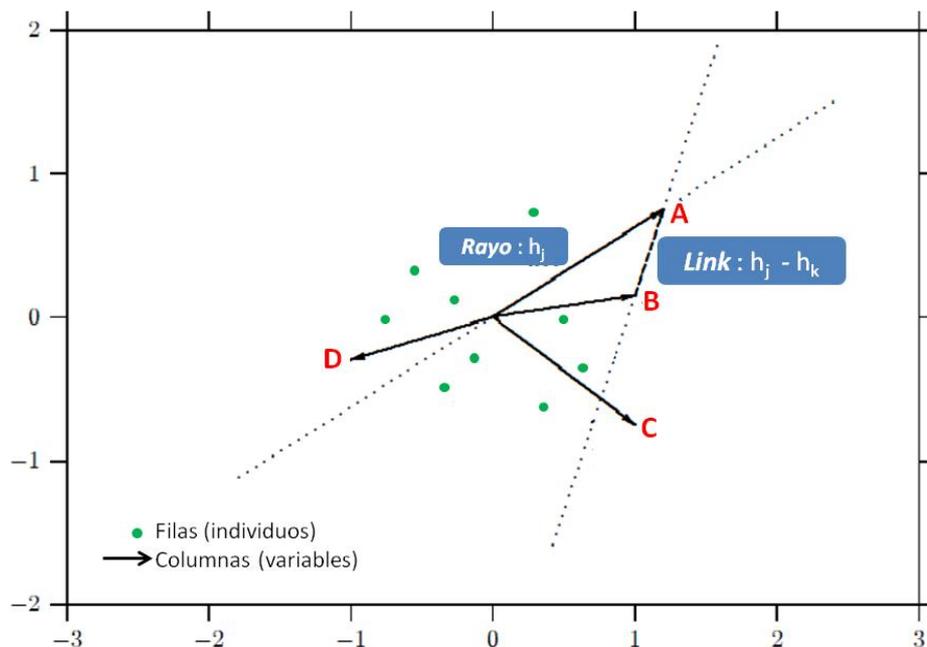
Donde los  $n$  vectores  $\mathbf{g}_1 \ \mathbf{g}_2 \ \dots \ \mathbf{g}_n$ , llamados marcadores fila, se corresponden con las proyecciones de los  $n$  puntos sobre el plano. Y los  $D$  vectores  $\mathbf{h}_1 \ \mathbf{h}_2 \ \dots \ \mathbf{h}_D$ , llamados marcadores columna, se corresponden a las proyecciones de las  $D$  dir-partes sobre el plano.

Siguiendo a Aitchison (1982) y Aitchison & Grenacre (2002) , convendremos en denominar *biplot de variación relativa* a los biplot contruidos a partir de conjuntos de composiciones, ya que representa la variación en todas las relaciones de los componentes.

Vamos a simbolizar por  $O$  el origen del biplot, a los vectores  $\mathbf{h}_j$ , se les denominan *rayos* y a la unión de dos vértices  $\mathbf{h}_j$  y  $\mathbf{h}_k$ ,  $(\mathbf{h}_j - \mathbf{h}_k)$ , se denomina *link*. Ver figura 29.

**Figura 29:**

Representación gráfica de un link y un rayo.



Nota: Adaptada de Aitchison y Greenacre (2002)

Las consecuencias geométricas más importantes provienen de la equivalencia de los miembros de la descomposición en valores singulares de  $\mathbf{Y}$  y  $\mathbf{Z}$ . Centraremos nuestra atención primero en los biplot que favorecen la representación de los individuos, denominados *biplot de forma* (figura 30) en este contexto y después en los que favorecen la representación de las variables, denominados *biplot de covarianza*.

Una propiedad para ambos biplot (biplot de forma y el biplot de covarianzas) es que el origen  $O$  es el centroide tanto los puntos fila (individuos) como de los  $D$  extremos de los rayos que representan las  $D$  partes de las composiciones. Esto es una consecuencia directa de la transformación doble centrado de la matriz de datos.

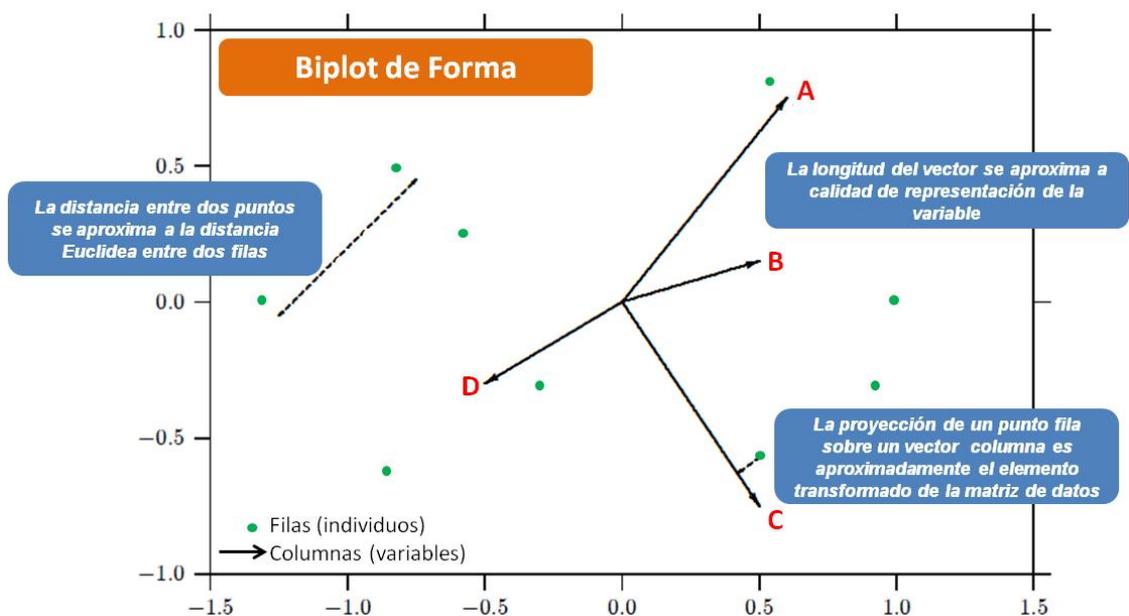
A continuación, veamos tres propiedades que tienen los **biplot de forma**:

**Propiedad 1.-** Las distancias entre los puntos de fila (individuos) en el biplot de forma son aproximaciones de las distancias euclídeas entre los individuos, calculados a partir de la matriz de log-ratios centrados.

**Propiedad 2.-** La longitud de un rayo (vector), se aproxima a la calidad de representación de la variable que representa.

**Propiedad 3.-** La proyección de un punto fila (individuo) sobre el vector columna (rayo) es aproximadamente el elemento transformado de la matriz de datos de partida.

**Figura 30:**  
Claves para la interpretación de un Biplot de forma.



Nota: Adaptada de Aitchison y Greenacre (2002)

En los *biplot de covarianzas* (figura31) las propiedades que se cumplen son las siguientes:

**Propiedad 1.-** La longitud de un rayo ( $\|\mathbf{h}_j\|$ ) asociado a la variable  $Z_j$  es aproximadamente  $\sqrt{\text{var}(Z_j)}$ .

Hay que tener en cuenta que como  $Z_j$  es el logaritmo de la razón centrada por filas y por columnas, no es interpretable en la práctica.

**Propiedad 2.** La longitud de un *link* ( $\|\mathbf{h}_j - \mathbf{h}_k\|$ ) entre las  $Z_j$  y  $Z_k$  es aproximadamente:

$$\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (z_{ij} - z_{ik})^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (l_{ij} - l_{ik} - (l_{.j} - l_{.k}))^2} =$$

$$\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left( \ln \frac{x_{ij}}{x_{ik}} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \frac{x_{ij}}{x_{ik}} \right)^2} =$$

$$\sqrt{\text{var}\left(\ln \frac{X_j}{X_k}\right)}$$

Es decir, la distancia entre dos vértices (*link*) es una aproximación de la desviación estándar de los correspondientes log-ratio. De esta manera, *links* pequeños corresponderán aproximadamente a varianzas de log-ratio pequeñas, es decir, a partes proporcionales.

En particular si dos vértices coinciden, o son casi coincidentes, significa que el link asociado ( $\mathbf{h}_j - \mathbf{h}_k$ ), tiene una longitud aproximadamente cero, y su varianza ( $\text{var}\left(\ln \frac{X_j}{X_k}\right)$ ), también es prácticamente cero, por lo tanto el ratio  $\frac{X_j}{X_k}$  es aproximadamente una constante:

$$\ln\left(\frac{X_j}{X_k}\right) \approx K \Leftrightarrow X_j \approx \exp(c) X_k \text{ donde } c \text{ es una constante.}$$

En consecuencia, las dos variables siguen una relación lineal, es decir, hay una redundancia en las dos partes implicadas,  $X_j$  y  $X_k$ .

**Propiedad 3.** El coseno del ángulo que forman dos rayos, se aproxima a la correlación entre las variables correspondientes.

$$\text{Cos}(h_i, h_j) = \text{Corr}(Z_i, Z_j)$$

donde  $Z_i$  y  $Z_j$  son el logaritmo de la razón centrada por filas y por columnas.

**Propiedad 4.** La distancia de Aitchison entre dos rayos, coincide con la distancia entre los respectivos marcadores columna transformados:

$$d_a^2(x_i, x_j) = d_e^2(\text{clr}(x_i), \text{clr}(x_j)) = d^2(h_i, h_j)$$

**Propiedad 5.** El coseno de los ángulos del link  $(\mathbf{h}_j - \mathbf{h}_k)$ , entre las variables  $Z_j$  y  $Z_k$ , y el link  $(\mathbf{h}_j - \mathbf{h}_m)$ , entre las variables  $Z_j$  y  $Z_m$  es aproximadamente la correlación entre los correspondientes log-ratio:

$$\text{corr}(Z_j - Z_k, Z_j - Z_m) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (z_{ij} - z_{ik})(z_{ij} - z_{im}) =$$

$$\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left( \ln \frac{x_{ij}}{x_{ik}} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \frac{x_{ij}}{x_{ik}} \right) \left( \ln \frac{x_{ij}}{x_{im}} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \frac{x_{ij}}{x_{im}} \right)$$

$$\text{corr}\left(\ln \frac{X_j}{X_k}, \ln \frac{X_j}{X_m}\right)$$

En particular, si dos *links* forman ángulos aproximadamente nulos o aproximadamente de  $180^\circ$  ( $\ln\left(\frac{X_j}{X_k}\right) = -\ln\left(\frac{X_k}{X_j}\right)$ ), entonces los correspondientes log-ratio están altamente correlacionados con correlación aproximadamente 1. Esto significa que existe una relación lineal entre los correspondientes log-ratio, y por lo tanto un modelo de datos composicionales resume esta interdependencia como:

$$\text{corr}\left(\ln\frac{X_j}{X_k}, \ln\frac{X_j}{X_m}\right) \approx 1 \Leftrightarrow \ln\frac{X_j}{X_k} \approx \ln\frac{X_j}{X_m} + c \Leftrightarrow \frac{X_j}{X_k} \approx \exp(c) \frac{X_j}{X_m}$$

donde  $c$  es una constante.

Si dos *links* forman un ángulo recto, entonces la correlación entre los correspondientes log-ratio es aproximadamente cero.

**Propiedad 6.** El coseno de los ángulos del link  $(\mathbf{h}_j - \mathbf{h}_k)$ , entre las variables  $Z_j$  y  $Z_k$ , y el link  $(\mathbf{h}_l - \mathbf{h}_m)$ , entre las variables  $Z_l$  y  $Z_m$  es aproximadamente la correlación entre los correspondientes log-ratio:

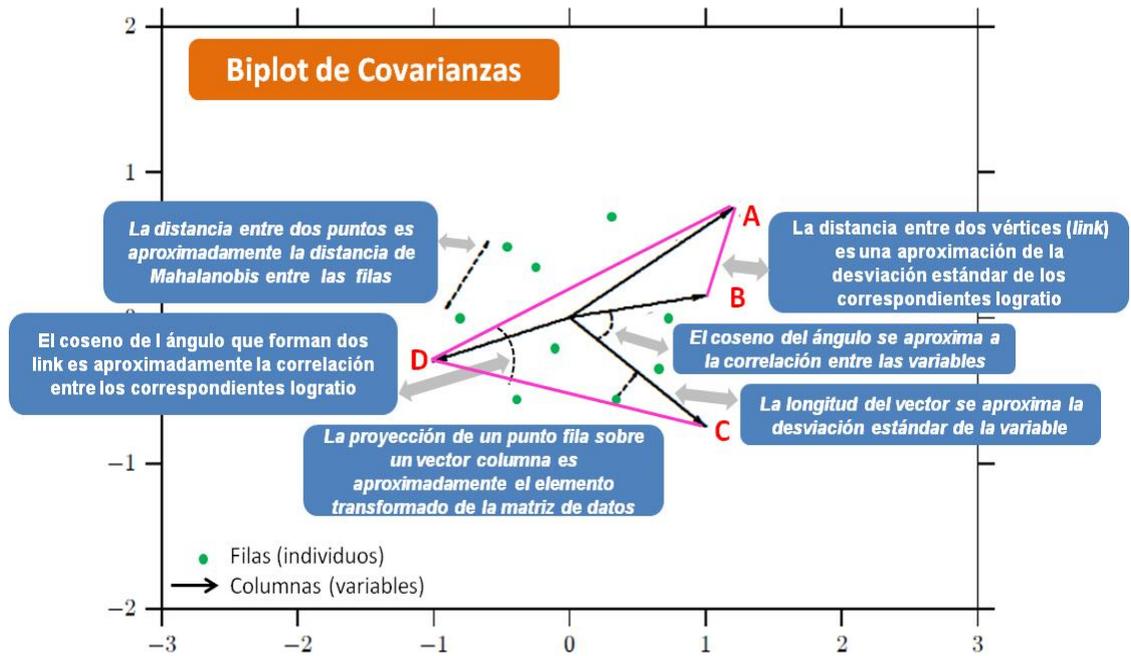
$$\begin{aligned} \text{corr}(Z_j - Z_k, Z_l - Z_m) &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (z_{ij} - z_{ik})(z_{il} - z_{im}) = \\ &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left( \ln \frac{x_{ij}}{x_{ik}} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \frac{x_{ij}}{x_{ik}} \right) \left( \ln \frac{x_{il}}{x_{im}} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \frac{x_{il}}{x_{im}} \right) \text{corr}\left(\ln \frac{X_j}{X_k}, \ln \frac{X_l}{X_m}\right) \end{aligned}$$

Por este motivo, si observamos que los *links* son aproximadamente paralelos, podemos concluir que los log-ratio  $\ln\frac{X_j}{X_k}$  y  $\ln\frac{X_l}{X_m}$  están altamente correlacionados entre sí. En cambio, si son perpendiculares, dichos log-ratio son prácticamente independientes.

**Propiedad 7.** Las distancias entre los puntos de fila (individuos) son aproximaciones de las distancias de Mahalanobis entre los individuos, calculados a partir de la matriz de log-ratio centrados.

**Figura 31:**

Claves para la interpretación de un Biplot de covarianzas.



Nota: Adaptada de Aitchison y Greenacre (2002)

En general, si dos subconjuntos de vértices están situados aproximadamente sobre sendas rectas perpendiculares entre sí, las subcomposiciones asociadas a los correspondientes subconjuntos de pares son independientes, es decir, los log-ratio formados a partir de las partes pertenecientes al primer subconjunto no están prácticamente correlacionados con ninguno de los log-ratio formados a partir de las partes pertenecientes al segundo subconjunto.

En la siguiente Tabla (46) quedan resumidas las propiedades del GH-biplot y del biplot de covarianzas de variación relativa:

**Tabla 46:**

*Propiedades del GH-biplot y del biplot de covarianzas de variación relativa.*

<b>GH-Biplot</b>	<b>Biplot de Variaciones Relativas</b>
<p>La longitud al cuadrado de los marcadores columna aproxima la varianza de la variable <math>Z</math>, y por lo tanto la longitud, aproxima la desviación estándar.</p> $\ h_j\  = \ z_j\  = \sqrt{\text{Var}(z_j)}$	<p>La longitud de un rayo (<math>\ h_j\ </math>) asociado a la variable <math>Z_j</math> es aproximadamente la desviación estándar de la variable:</p> $\ h_j\  = \sqrt{\text{var}(Z_j)}$ <p>Hay que tener en cuenta que como <math>Z_j</math> es el logaritmo de la razón centrada por filas y por columnas, no es interpretable en la práctica.</p>
<p>El coseno del ángulo que forman dos marcadores columna, aproxima la correlación entre las variables correspondientes.</p> $\text{Cos}(h_i, h_j) = \text{Corr}(z_i, z_j)$	<p>El coseno del ángulo que forman dos rayos, se aproxima a la correlación entre las variables correspondientes.</p> $\text{Cos}(h_i, h_j) = \text{Corr}(Z_i, Z_j)$ <p><math>Z_i</math> y <math>Z_j</math> son el logaritmo de la razón centrada por filas y por columnas</p>
<p>La distancia euclídea entre dos vectores columna coincide con la distancia entre los respectivos marcadores columna.</p> $d^2(z_i, z_j) = d^2(h_i, h_j)$	<p>La distancia de Aitchison entre dos rayos, coincide con la distancia entre los respectivos marcadores columna transformados:</p> $d_a^2(x_i, x_j) = d^2(h_i, h_j)$
	<p>La distancia entre dos vértices (<i>link</i>) es una aproximación de la desviación estándar de los correspondientes log-ratio.</p> $\sqrt{\text{var}\left(\ln \frac{X_j}{X_k}\right)}$
	<p>El coseno de los ángulos del link (<math>h_j - h_k</math>), entre las variables <math>Z_j</math> y <math>Z_k</math>, y el link (<math>h_l - h_m</math>), entre las variables <math>Z_l</math> y <math>Z_m</math> es aproximadamente la correlación entre los correspondientes log-ratio:</p> $\text{corr}(Z_j - Z_k, Z_l - Z_m) = \text{corr}\left(\ln \frac{X_j}{X_k}, \ln \frac{X_l}{X_m}\right)$
<p>La distancia de Mahalanobis entre dos filas (individuos) (<math>k</math> y <math>l</math>) de <math>Z</math> se aproxima mediante la distancia euclídea entre dos marcadores fila (<math>k</math> y <math>l</math>).</p>	<p>Las distancias entre los puntos de fila (individuos) son aproximaciones de las distancias de Mahalanobis entre los individuos, calculados a partir de la matriz de log-ratio centrados.</p>

*Nota: Elaboración propia.*

---

#### 4.7.2.-DATOS COMPOSICIONALES EN PSICOLOGÍA

Los test psicológicos, como se ha comentado anteriormente, se utilizan para medir constructos que no son directamente observables. Además, estos constructos psicológicos están formados en muchas ocasiones por varias dimensiones. No son variables planas, sino que son constructos poliédricos, y en muchas ocasiones, estas dimensiones aportan información por si mismas sin necesidad de dar una puntuación total del constructo, por lo tanto, a la hora de estudiar cómo afecta cada una de las dimensiones, teniendo en cuenta que la puntuación final es trivial, en cuanto al dato absoluto, la forma de estudiarla será viendo en qué proporción afectan cada una de las dimensiones a la formación de ese constructo y de esa forma quedará estudiado de manera más global.

Para ello debemos entender las puntuaciones de las dimensiones de un test como partes de un todo, la puntuación global del test, por lo que dejaremos de lado los valores directos de las puntuaciones, y las transformaremos en proporciones con respecto al total de la escala. De tal manera que, si un sujeto tiene una puntuación de 100 en un tests de 5 dimensiones, y en cada dimensión obtiene 20 puntos, cada una de las dimensiones aportará un 20% al total de su escala, pero de la misma forma, un sujeto cuya puntuación total sea 50, y cada una de las dimensiones aporte 10 puntos, lo que aportará cada una de las dimensiones al total será el 20% también. De esta forma, esos dos sujetos, con puntuaciones directas diferentes, pasarán a tener la misma puntuación en datos composicionales.

Para poder trabajar con este tipo de datos, vamos a recurrir al análisis de datos composicionales. Este tipo de datos tienen como característica fundamental que la suma de todos los valores de las diferentes dimensiones de un mismo individuo da como resultado una constante, y no se tiene en cuenta el valor del individuo en cada dimensión de forma aislada, sino su valor en relación con el total y por tanto en relación al resto de dimensiones. En otras áreas como la geología o la

economía, es frecuente trabajar con este tipo de datos, y es en esta área donde se han desarrollado las técnicas que permiten abordarlos de forma rigurosa (Aitchison, 1986) como ya hemos señalado

Este tipo de tratamiento de los datos nos obliga a dejar los datos brutos para otro tipo de análisis que completarán el estudio de los mismos, y hacer una transformación a porcentajes en primera instancia, y posteriormente un centrado de los mismos.

## 4.8.-MATERIAL

El test utilizado fue el Cuestionario de Bienestar Psicológico reducido para población española que se valida en el capítulo 3 del presente trabajo. El cuestionario consta de 34 ítems repartidas en 6 dimensiones: relaciones positivas con los otros (RP), autonomía (AU), Control del entorno (CE), Crecimiento personal (CP), Propósito en la vida (PV) y Autoaceptación (AA).

Los 34 ítems quedan repartidos de la siguiente manera, en la dimensión RP 6 ítems, en la dimensión AU 6 ítems, en la dimensión CE 5 ítems, en la dimensión CP 5 ítems, en la dimensión PV 6 ítems, en la dimensión AA 6 ítems

La consistencia interna medida con  $\alpha$  de Cronbach y con  $\omega$  de McDonald la vemos en la Tabla 47:

**Tabla 47:**

*Fiabilidad mediad con  $\alpha$  de Cronbach y con  $\omega$  de McDonald*

<b>Escala con 34 ítems</b>	
$\alpha$ de Crombach	$\omega$ de McDonald
0.844	0.847
0.723	0.730
0.768	0.772
0.806	0.809
0.775	0.777
0.853	0.859

*Nota: Elaboración propia*

Los sujetos a los que se les pasó el cuestionario son 631, de los cuales el 75.34% fueron mujeres. Todos los sujetos tenían edades comprendidas entre los 18 y los 24 años de edad y se encontraban en el momento de responder el instrumento cursando estudios universitarios.

## 4.9.-RESULTADOS

Una vez que tenemos una versión que se ajusta y nos aporta unos índices de fiabilidad y validez adecuados, vamos a dar respuesta al segundo objetivo general de la investigación, que es aportar diferentes formas de interpretación de los datos a través del análisis de datos composicionales. Esto lo haremos de dos formas: primero a través de la interpretación de un biplot de datos composicionales, y en segundo lugar a través de ratios de posición y un indicador de ajuste general.

### 4.9.1-BIPLLOT DE DATOS COMPOSICIONALES

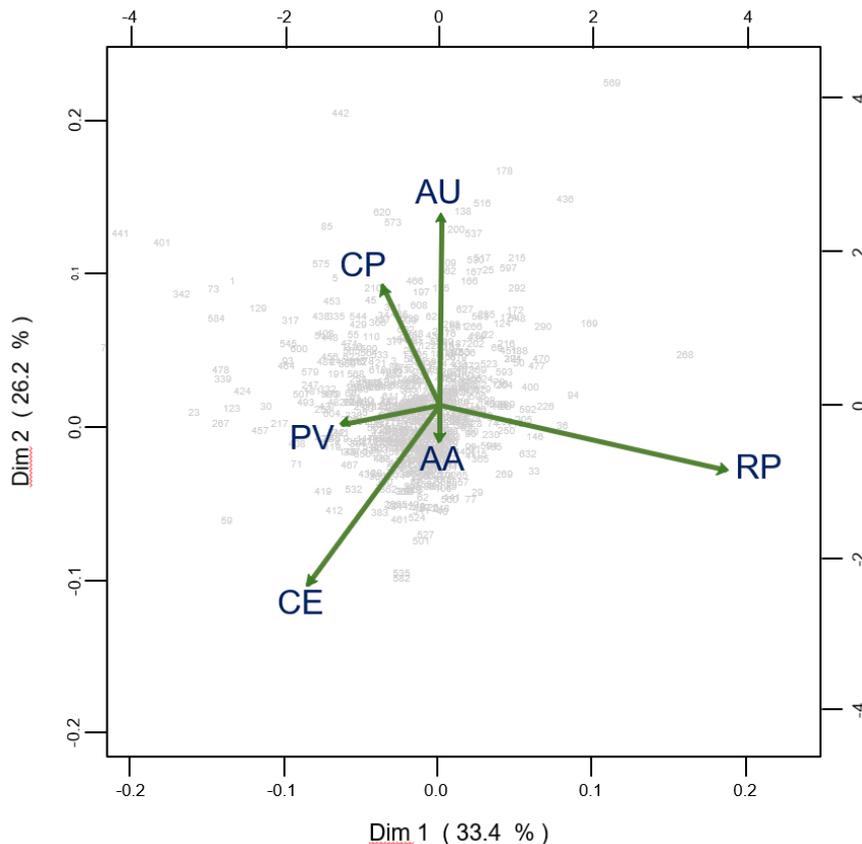
La matriz de datos se ha construido a partir de los datos directos dados por cada uno de los individuos. En primer lugar, se obtuvieron las puntuaciones para cada una de las dimensiones (sumando la puntuación dada cada ítem y dividiendo por el número total de ítems que componen la subescala) y a continuación se calculó el porcentaje que le corresponde del total para cada una de ellas. A esta matriz se le realizó la transformación clr-centrada propuesta por Aitchison en 1986.

Con la matriz una vez preparada, se construyó el Biplot con el software gratuito R projet versión 2.8.0.

En este caso vamos a representar el biplot de covarianzas ya que es el que maximiza la representación de las variables, ya que conserva la métrica de las columnas, que es lo que nos interesa en este caso.

**Figura 32:**

*Biplot de Covarianza de la versión reducida del cuestionario de Bienestar psicológico de Ryff (1989).*



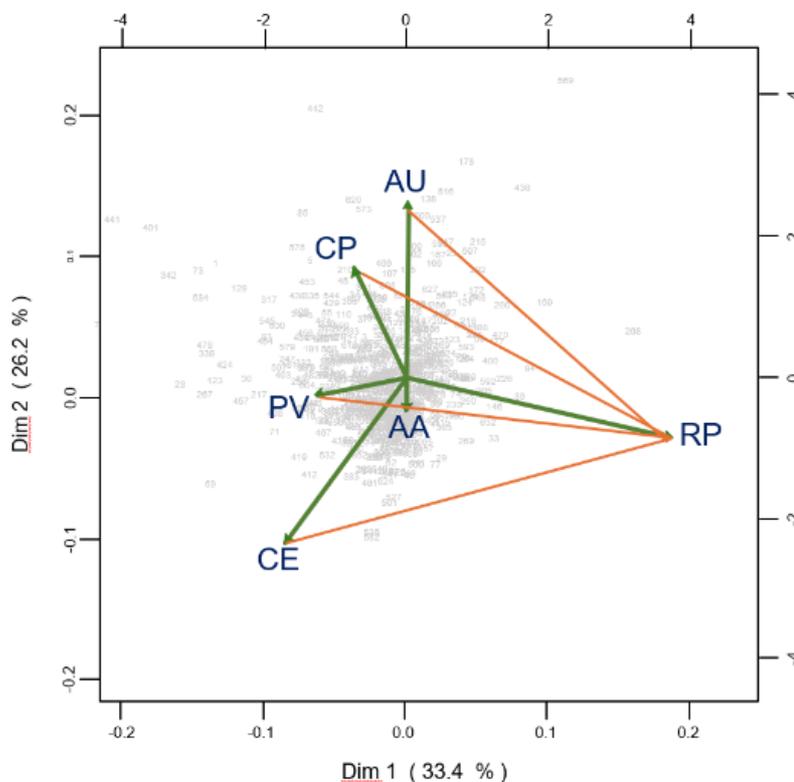
*Nota: Elaboración propia.*

Como podemos observar en la figura 32, la estructura de covariación que encontramos nos indica que 5 de las 6 dimensiones están bien representadas, pero sin embargo la dimensión AA (autoaceptación), tiene una variabilidad relativa muy pequeña, por lo que no va a aportar información en este caso. Por lo tanto, lo dejaremos a parte en la interpretación de los resultados.

A continuación, vamos a ir analizando los links que unen los vértices de los pares de rayos para interpretarlos, para ello añadiremos a la figura inicial los links que iremos interpretando.

**Figura 33:**

*Links dimensión Relaciones Positivas con los otros.*



*Nota: Elaboración propia.*

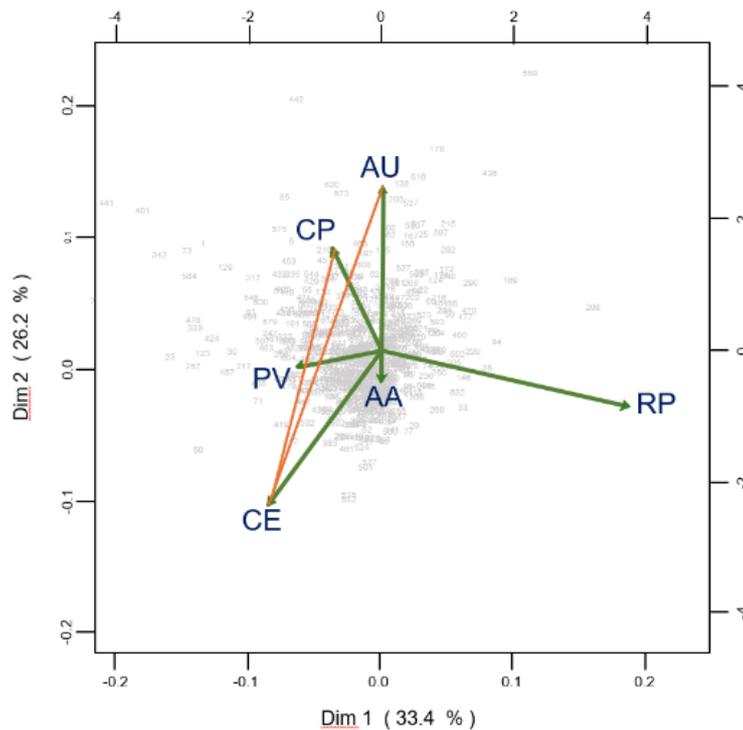
En la figura 33 podemos ver que los link que unen la dimensión RP con el resto de dimensiones son links largos, lo que indica variabilidad entre los correspondientes log-ratio.

Si vemos el ángulo que forman el link RP-AU, con el link RP-CP vemos que es un ángulo agudo, es decir que la correlación que existe entre las dimensiones RP y AU es proporcional a la correlación existente entre las dimensiones RP y CP. Si el grado de relación entre AU y RP es alto, será alto también entre RP y CP, y si es bajo, lo será también entre RP y CP.

De la misma manera podemos observar los link que unen las dimensiones RP y CP con el link que une RP con PV, el ángulo que forman es un ángulo agudo, y por tanto, la relación que se da entre las parejas de variables debe ser proporcional, es decir, la correlación que existe entre las variables RP y CP es proporcional a la que existe entre RP y PV.

Además, podemos observar que el ángulo formado por el link AU-RP y el link RP-CE es un ángulo prácticamente recto, por lo que podemos concluir que la relación entre pares de links es inexistente o muy pequeña, es decir no hay proporcionalidad entre la relación encontrada entre las dimensiones AU y RP y la encontrada entre la relación entre RP y CE.

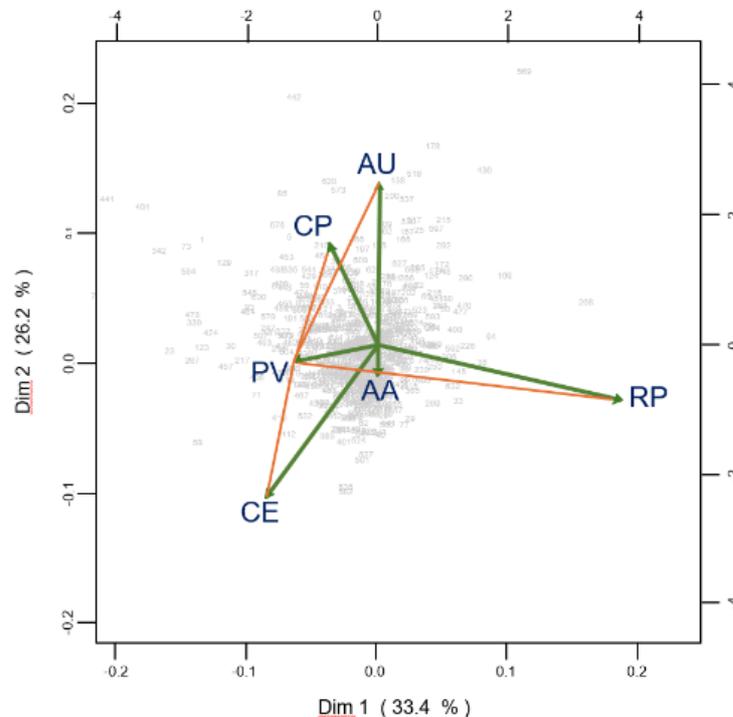
**Figura 34:**  
*Links de la dimensión Control del Entorno.*



*Nota: Elaboración propia*

En la figura 34, observamos que el ángulo formado por los link CE-CP y CE-AU es un ángulo agudo, por lo que podemos interpretar que la relación entre pares de dimensiones son prácticamente iguales, es decir, que la relación existente entre las variables CE-CP y la relación entre las dimensiones CE- AU es prácticamente la misma, lo que nos indica que los individuos que encuentren una relación positiva fuerte entre la variable autoestima (AU) y la variable control del entorno (CE), encontraran esa misma relación fuerte entre las variables crecimiento personal (CP) y control del entorno (CE).

**Figura 35:**  
*Links en la dimensión Propósito en la Vida.*



*Nota: Elaboración propia*

En la figura 35 vemos que el ángulo formado por los link CE-PV y PV-RP es un ángulo recto, por lo que la relación entre ambos pares de variables es nula, es decir, la manera en la que se relacionan las dimensiones CE-PV, no está relacionada con la manera en la que se relacionan las variables PV-RP.

De la misma manera encontramos la relación entre las variables PV-RP y PV-CP, que forman también un ángulo prácticamente recto.

Por otro lado, sin embargo, vemos que la relación entre los pares de variables PV-CP y PV-AU es una relación prácticamente proporcional, ya que el ángulo que forman es agudo y muy pequeño, es decir, la relación que encontramos entre la variable PV-CP y la relación que encontramos entre la variable PV-AU es proporcional.

Por último, encontramos también que los link de los pares de variables PV-CE y PV-CP forman un ángulo llano, indicando que la relación entre las dimensiones PV-CE y PV-CP es inversamente proporcional.

---

#### 4.9.2.-RATIOS DE POSICIÓN

Las proporciones de las dimensiones del BP caracterizan a cada individuo y para interpretarlas, es adecuado comparar su valor con tres estadísticos de posición: media geométrica, máximo y mínimo. En la Tabla 48 se ilustran los valores que corresponden a tres individuos seleccionados intencionalmente para ilustrar la técnica y los estadísticos mencionados. En la Figura 36 se representan gráficamente las poligonales correspondientes a estos valores que permiten un análisis visual muy adecuado y directo de esos valores. Pueden compararse los valores de las proporciones de los individuos entre ellos y en relación a los estadísticos. Si comparamos los individuos ID1036 y ID411, ambos dan puntuaciones directas muy diferentes entre sí en cada una de las dimensiones, sin embargo, sus dimensiones están equilibradas. Para el ID411 todas las puntuaciones son altas (4.6, 3.67, 4.60, 6.00, 5.20, 5.00) mientras que para el individuo ID1036 sus puntuaciones son más bajas (3.6, 2.33, 2.40, 4.00, 3.00, 3.00). Al trabajar con Datos Composicionales, encontramos que ambos individuos son muy parecidos, es decir que lo que aporta cada dimensión al bienestar psicológico, es lo mismo en ambos sujetos. Para el sujeto ID710 las dimensiones que más aportan al bienestar son AUT y PGR teniendo el resto de las dimensiones un menor peso en el constructo. Por lo tanto, los perfiles de este sujeto respecto a los dos anteriores son marcadamente diferentes, coincidiendo sus puntuaciones directas (2.80, 5.50, 3.20, 6.00, 3.00, 3.25). Ello permite concluir, que ID411 y ID1036 tienen características muy similares y a su vez diferentes de ID710. Además, ID411 y ID1036 tienen unos indicadores más armónicos (menos diferentes entre ellos), mientras que ID710 tiene unas diferencias relativas mucho más acusadas.

**Tabla 48:**

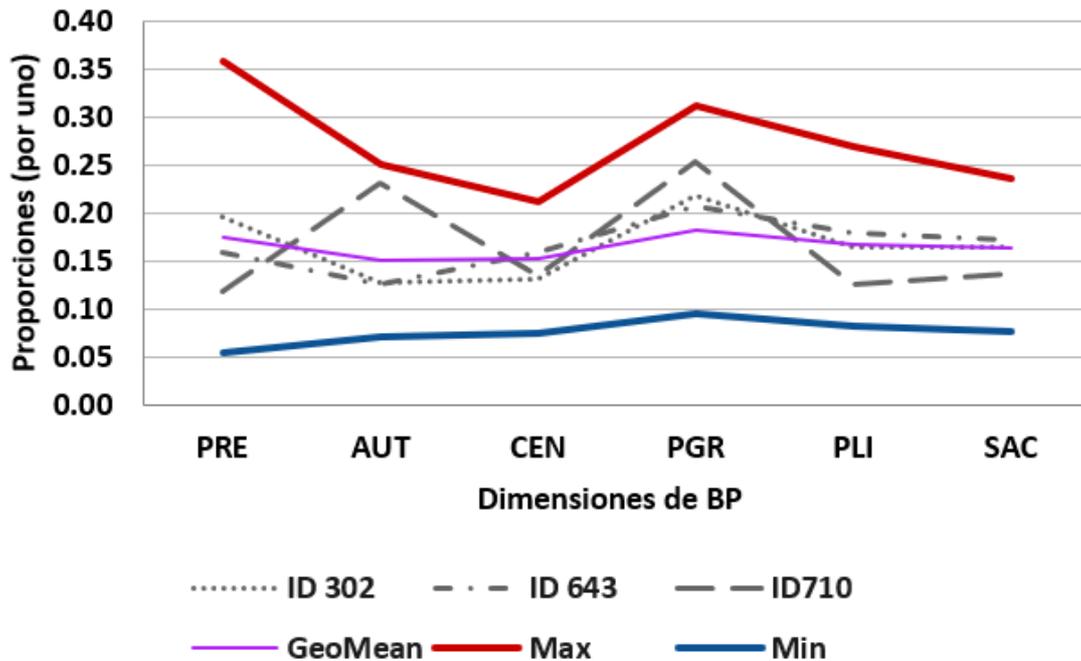
Valores de las proporciones de las dimensiones del PWB en tres individuos de la muestra seleccionados (ID411, ID1036, ID710) y de la media geométrica general, el mínimo absoluto general y el máximo absoluto general.

	PRE	AUT	CEN	PGR	PLI	SAC
<b>ID1036</b>	0.1964	0.1273	0.1309	0.2182	0.1636	0.1636
<b>ID411</b>	0.1583	0.1261	0.1583	0.2064	0.1789	0.1720
<b>ID710</b>	0.1179	0.2316	0.1347	0.2526	0.1263	0.1368
<b>MedGeo</b>	0.1750	0.1505	0.1528	0.1817	0.1673	0.1634
<b>Max</b>	0.3571	0.2513	0.2120	0.3119	0.2686	0.2348
<b>Min</b>	0.0543	0.0717	0.0754	0.0956	0.0814	0.0756

Nota: Elaboración propia.

**Figura 36:**

Ilustración de los valores de la tabla 50



Nota: Elaboración propia.

---

- ESTUDIO DE LA RATIO DE POSICIÓN RP1

La ratio de posición RP1 caracteriza la posición relativa (diferencia) de cada una de sus proporciones en relación a su indicador de centralidad (media geométrica). Como antes, es adecuado comparar su valor con tres estadísticos de posición de la RP1: media aritmética, máximo y mínimo. En la Tabla 49 se ilustran los valores que corresponden a los mismos tres individuos anteriores y los estadísticos mencionados. En la Figura 37 se representan gráficamente las poligonales correspondientes.

Para cada uno de los individuos, podemos saber si cada una de las dimensiones del cuestionario PWB aporta al bienestar psicológico más o menos que el promedio de sus dimensiones, comparando cada una de las puntuaciones con el eje cero. Si las puntuaciones son positivas, esa dimensión aporta más que el promedio y si es negativa aporta menos. Por ejemplo, para el ID710 las dimensiones que más le aportan bienestar son AUT y PGR y el resto le aportan menos; sin embargo, a los sujetos ID1036 y ID411 todas dimensiones contribuyen aproximadamente de igual manera a su constructo de bienestar.

**Tabla 49:**

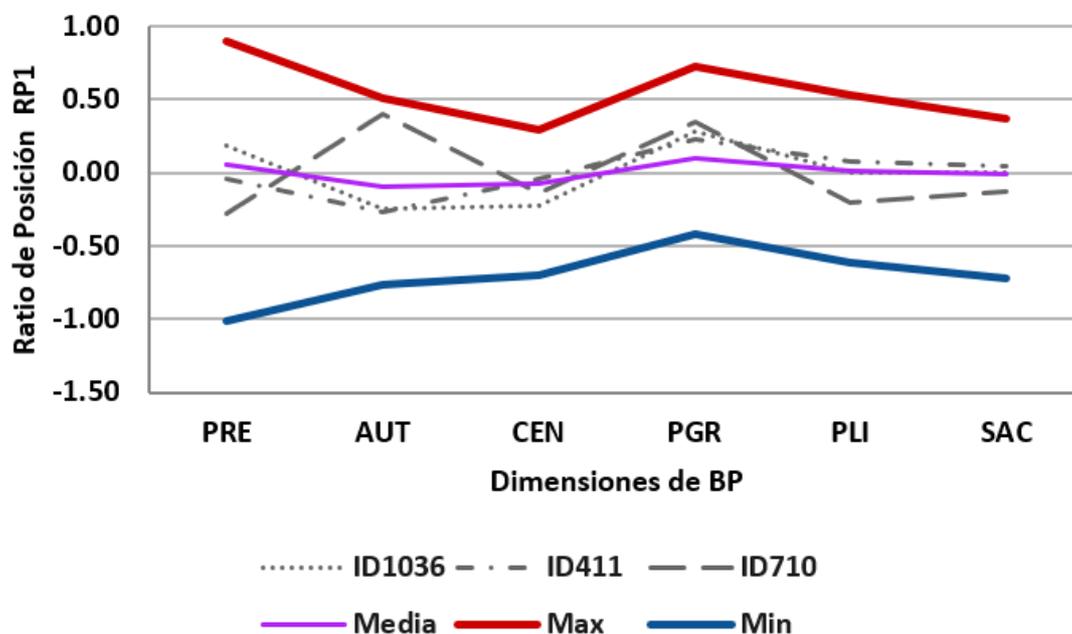
*Valores de la ratio de posición RP1 de las proporciones de las dimensiones del PWB en tres individuos de la muestra seleccionados (ID411, ID1036, ID710) y del valor medio general, el mínimo absoluto general y el máximo absoluto general.*

RP1	PRE	AUT	CEN	PGR	PLI	SAC
<b>ID1036</b>	0.1831	-0.2506	-0.2224	0.2884	0.0007	0.0007
<b>ID411</b>	-0.0408	-0.2676	-0.0408	0.2249	0.0818	0.0426
<b>ID710</b>	-0.2759	0.3992	-0.1424	0.3527	-0.2069	-0.1268
<b>Media</b>	0.0603	-0.0904	-0.0752	0.0981	0.0153	-0.0081
<b>Max</b>	0.8992	0.5115	0.2964	0.7260	0.5328	0.3756
<b>Min</b>	-1.0157	-0.7606	-0.7009	-0.4181	-0.6082	-0.7210

*Nota: Elaboración propia*

**Figura 37:**

Ilustración de los valores de la tabla 51.



Nota: Elaboración propia

- ESTUDIO DE LA RATIO DE POSICIÓN RP2

La ratio de posición RP2 caracteriza la posición relativa (diferencia) de cada una de las proporciones en relación a un indicador de centralidad de la propia dimensión (media geométrica). Como antes, es adecuado comparar su valor con tres estadísticos de posición de la RP2: media aritmética, máximo y mínimo. En la Tabla 50 se ilustran los valores que corresponden a los mismos tres individuos anteriores y los estadísticos mencionados. En la Figura 52 se representan gráficamente las poligonales correspondientes.

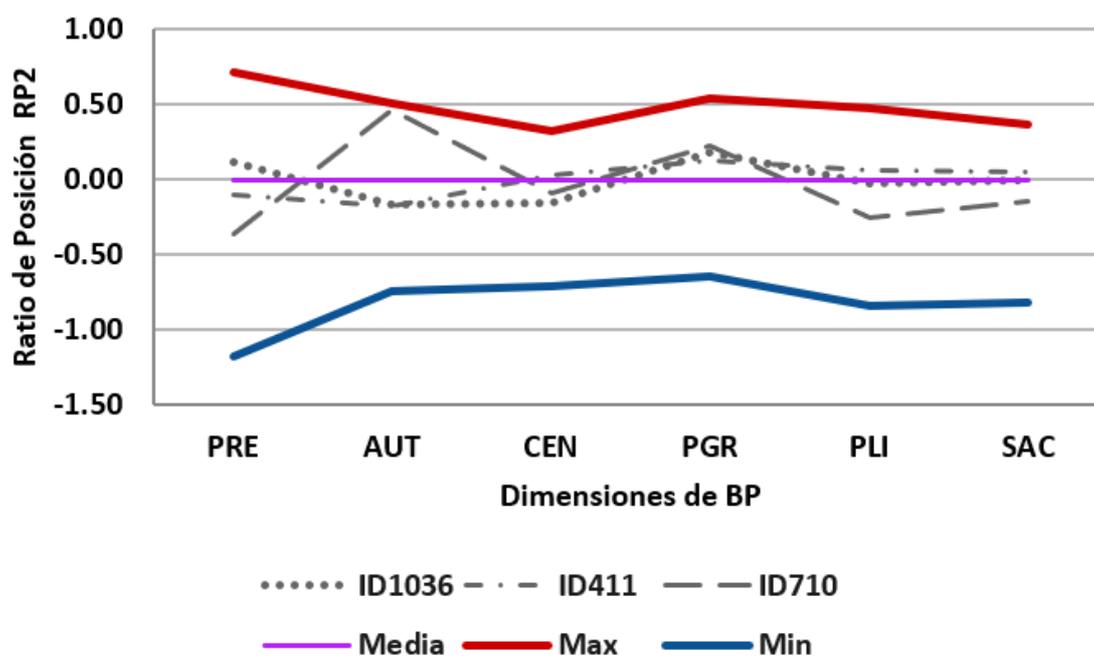
**Tabla 50:**

Valores de la ratio de posición RP2 de las proporciones de las dimensiones del PWB en tres individuos de la muestra seleccionados al azar (ID411, ID1036, ID710) y del valor medio general, el mínimo absoluto general y el máximo absoluto general.

RP2	PRE	AUT	CEN	PGR	PLI	SAC
<b>ID1036</b>	0.1161	-0.1698	-0.1543	0.1846	-0.0218	0.0014
<b>ID411</b>	-0.0996	-0.1786	0.0354	0.1291	0.0674	0.0514
<b>ID710</b>	-0.3620	0.4609	-0.0934	0.2297	-0.2485	-0.1453
<b>Media</b>	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
<b>Max</b>	0.7131	0.5127	0.3273	0.5402	0.4736	0.3639
<b>Min</b>	-1.1703	-0.7413	-0.7064	-0.6419	-0.8387	-0.8156

Nota: Elaboración propia.

**Figura 38: Ilustración de los valores de la tabla 52.**



Nota: Elaboración propia.

En este caso, podemos comparar las puntuaciones de cada dimensión de los sujetos con lo que aporta cada dimensión para el conjunto de individuos global, comparándolo con eje 0X y así saber si está por encima o por debajo de la media del grupo normativo. Por ejemplo, podemos apreciar que el sujeto ID1036 sigue siendo un sujeto muy equilibrado en sus puntuaciones, pero al comparar con el grupo la dimensión AUT o CEN está por debajo de la media del grupo normativo. Por el contrario, el individuo ID710 que en general es mucho más desequilibrado encontramos sin embargo que su puntuación PGR es muy parecida a la del grupo normativo y que en la dimensión AUT tiene una puntuación muy por encima del promedio y la dimensión PRE muy por debajo.

---

- ESTUDIO DE SUBPOBLACIONES POR CARACTERÍSTICAS DIFERENCIALES

Puede resultar de interés analizar las dimensiones del PWB en subpoblaciones de la muestra definidas por alguna característica objetiva asignable: sexo, nivel de estudios, grupo de edad, etc. En la Tabla 51 se muestran los valores medios de las proporciones en dos grupos: mujeres y hombres; estos valores se ilustran junto con los estadísticos mínimo y máximo en la Figura 39. En la Tabla 52 se muestran los valores medios de las ratios de posición RP1 en los mismos dos grupos; estos valores se ilustran junto con los estadísticos mínimo y máximo en la Figura 40. Ambas tablas y figuras permiten afirmar que no hay diferencias significativas en los valores de las dimensiones correspondientes a cada uno de los dos grupos.

**Tabla 51:***Valores medios de las proporciones en hombres y mujeres*

	PRE	AUT	CEN	PGR	PLI	SAC
Mujer	0.1675	0.1519	0.1546	0.1818	0.1701	0.1663
Hombre	0.2082	0.1451	0.1460	0.1816	0.1567	0.1524
Max	0.3571	0.2513	0.2120	0.3119	0.2686	0.2348
Min	0.0543	0.0717	0.0754	0.0956	0.0814	0.0756

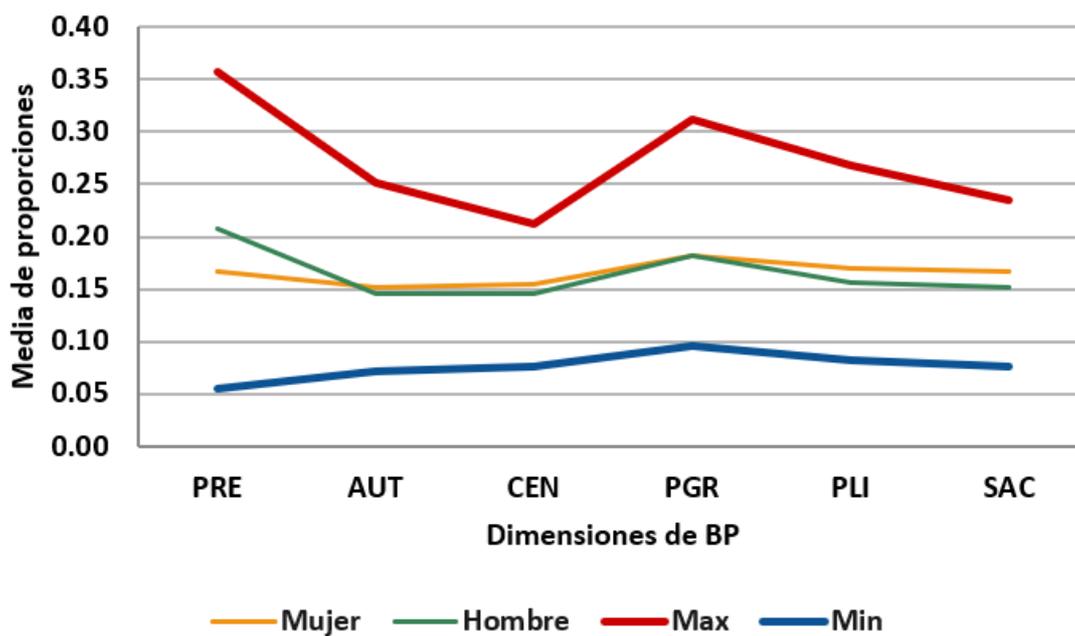
*Nota: Elaboración propia.***Tabla 52:***Valores medios de las ratios de posición RP1 en hombres y mujeres.*

	PRE	AUT	CEN	PGR	PLI	SAC
Mujer	0.0144	-0.0830	-0.0654	0.0963	0.0300	0.0078
Hombre	0.2414	-0.1195	-0.1135	0.1049	-0.0426	-0.0707
Max	0.8992	0.5115	0.2964	0.7260	0.5328	0.3756
Min	-1.0157	-0.7606	-0.7009	-0.4181	-0.6082	-0.7210

*Nota: Elaboración propia*

**Figura 39:**

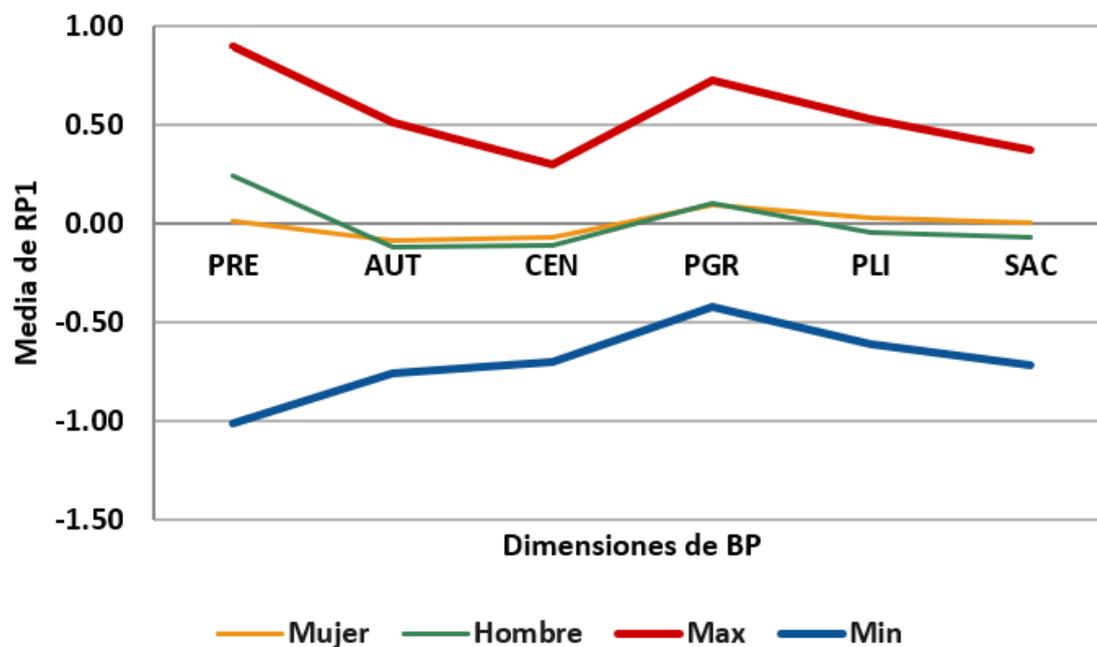
*Ilustración de los valores de la tabla 53.*



*Nota: Elaboración propia*

**Figura 40:**

*Ilustración de los valores de la tabla 54.*



*Nota: Elaboración propia*

---

#### 4.9.3.-PROPUESTA DE UN INDICADOR GENERAL DE BIENESTAR PSICOLÓGICO SUBJETIVO (IGBPS).

Los conceptos y herramientas del Análisis de Datos Composicionales permiten caracterizar a cada individuo mediante unas ratios de posición tal como se han definido y formulado. Ello permite un paso más: definir un indicador general de bienestar psicológico subjetivo (IGBPS), que sin duda constituye la contribución más original y relevante de este trabajo, ya que hasta donde sabemos, un tal indicador no existe ni se ha definido en estos términos analíticos. El IGBPS se define como una combinación lineal ponderada de las ratios de posición RP1 de cada individuo; la ponderación se hace mediante unos pesos de suma unidad que puede definir la persona que realiza la evaluación psicológica, de acuerdo a su criterio profesional. Evidentemente el equilibrio psicológico corresponde a un valor del IGBPS igual a cero y las variaciones en positivo o negativo muestran desequilibrios respecto al valor central. En la Tabla 53 se pueden ver unos valores propuestos a título de ejemplo. En la Figura 41 se visualiza el resultado del cálculo del IGBPS según estos pesos, para la muestra de 628 individuos que sirve de marco a este trabajo.

**Tabla 53:**

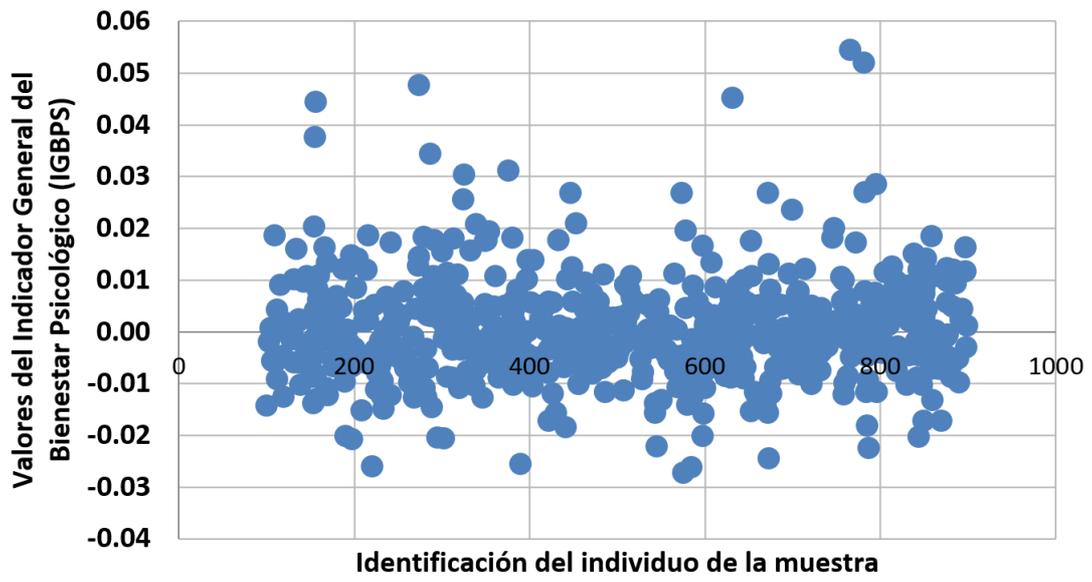
*Valores de los pesos asignados a dimensiones del PWB para el cálculo del indicador general de bienestar psicológico subjetivo (IGBPS).*

Dimensión	PRE	AUT	CEN	PGR	PLI	SAC
Peso	0.15	0.2	0.15	0.2	0.15	0.15

*Nota: Elaboración propia.*

**Figura 41:**

*Ilustración de los valores de IGBPS de la muestra de estudio.*



*Nota: Elaboración propia*



**CONCLUSIONES**

1.- La amplísima revisión bibliográfica ha puesto de manifiesto que el cuestionario de Carol Ryff es un instrumento que ha sido validado en más de 40 países, y que actualmente sigue validándose a lo largo del mundo. No en todos los países se detecta la estructura teórica de la autora original.

2.-En España existen diferentes versiones validadas del cuestionario de Bienestar psicológico, sin embargo, ninguna de ellas parte de la totalidad de los ítems propuestos por la autora, por lo que no podemos asegurar que los ítems seleccionados sean los que cuentan con las mejores propiedades psicométricas.

3.- En nuestro trabajo se ha evaluado la validez factorial en el Cuestionario de Bienestar Psicológico de 84 ítems, en estudiantes universitarios, con un análisis factorial exploratorio con rotación oblicua, y tampoco se corroboró la estructura factorial esperada. No obstante, la fiabilidad era alta ( $>0.79$ )

4.-El Modelo de Respuesta Graduada de Samejima, los índices Infit y Outfit, en el marco de la Teoría de Respuesta al Ítem (TRI), nos han permitido identificar los ítems con mejores propiedades psicométricas; los ítems portadores de más información, los que mejor se ajustan al modelo de medición y los más representativos de cada dimensión, y con ellos hemos creado, la propuesta del cuestionario reducida. PWB-SMC, que permitirá medir de manera más precisa el bienestar Psicológico y será una herramienta útil para los profesionales de la salud.

5.-Las dimensiones de los test psicológicos pueden ser entendidas como partes de un todo, y por lo tanto, tiene cabida su interpretación en términos composicionales, por lo que la puntuación total de cada individuo pasará a ser la constante composicional, y cada una de las dimensiones las D partes del vector clausurado. De esta forma no se tendrá en cuenta el valor del individuo en cada dimensión de forma aislada, sino en relación con el total y por tanto con el resto de dimensiones.

6.-El Biplot de datos composicionales aporta información a la interpretación de las dimensiones del cuestionario de Bienestar Psicológico en términos relativos, pudiendo explorar relaciones entre las dimensiones que no habían sido capaces de capturar otros autores que han utilizado las técnicas clásicas.

7.- La relación entre Control del Entorno-Crecimiento Personal y Control del Entorno-Autonomía pone de manifiesto que los individuos en los que se encuentren una relación positiva fuerte entre la Autonomía y Control del Entorno, también tienen una relación fuerte entre Crecimiento Personal y Control del Entorno. Esto lo podemos explicar ya que el control del entorno es una dimensión que abarca aspectos como el aprovechamiento de oportunidades y la capacidad para cubrir las propias necesidades, y valores personales, algo muy relacionado tanto con la autonomía, como con el crecimiento personal.

8.- La relación entre Control del Entorno y Propósito en la Vida y Propósito en la Vida y Relaciones Positivas con los otros pone de manifiesto que la manera en la que se relacionan las dimensiones Control del Entorno-Propósito en la Vida, es independiente de la manera en la que se relacionan las dimensiones Propósito en la Vida-Relaciones Positivas con los otros. Es decir, un sujeto que tenga capacidad para establecer relaciones cálidas con los demás va a relacionar esa capacidad con su propósito en la vida, pero no será la misma que la relación que se establezca entre la dimensión que tiene que ver con metas y orientación en la vida, y la dimensión de control y dominio del entorno.

9.-La ratio de posición RP1 nos permite comparar las posiciones de cada individuo en términos de proporción con la media geométrica que nos sirve de medida de centralidad. De tal manera que podemos saber, para cada individuo, si cada una de las dimensiones aporta más o menos bienestar que el promedio de sus dimensiones,

10.- La ratio de posición RP2, nos permite comparar cada una de las puntuaciones de las dimensiones del individuo con el promedio de puntuaciones en cada dimensión, del total de los individuos, es decir podemos comparar la puntuación de un individuo en una dimensión, con el promedio de puntuaciones del total de los individuos en esa dimensión.

11.- Estas ratios de posición pueden utilizarse para comparar subpoblaciones de la muestra definidas por alguna característica objetiva asignable: sexo, nivel de estudios o grupo de edad.

12.- El Indicador General de Bienestar Psicológico propuesto (IGBPS) nos permite obtener una medida del equilibrio de las puntuaciones de un individuo en las 6 dimensiones del cuestionario, de tal forma que individuos con puntuaciones similares en todas las dimensiones serán individuos equilibrados, e individuos con puntuaciones no homogéneas en las dimensiones, serán individuos menos equilibrados.

13.-Estudiar datos en psicología desde la perspectiva del análisis de datos composicionales aporta información relevante y novedosa que complementa el estudio clásico que habitualmente se hace de la interpretación de las puntuaciones de los test.



## **REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

- Abbott, R. A., Ploubidis, G. B., Huppert, F. A., Kuh, D., & Croudace, T. J. (2010). An Evaluation of the Precision of Measurement of Ryff's Psychological Well-Being Scales in a Population Sample. *Social Indicators Research*, 97(3), 357–373. <https://doi.org/10.1007/s11205-009-9506-x>
- Abbott, R. A., Ploubidis, G. B., Huppert, F. A., Kuh, D., Wadsworth, M. E., & Croudace, T. J. (2006). Psychometric evaluation and predictive validity of Ryff's psychological well-being items in a UK birth cohort sample of women. *Health and Quality of Life Outcomes*, 4(1), 76. <https://doi.org/10.1186/1477-7525-4-76>
- Aitchison, J. (1982). The Statistical Analysis of Compositional Data. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, 44(2), 139–160. <https://doi.org/10.1111/j.2517-6161.1982.tb01195.x>
- Aitchison, J. (1986). *CODA: A microcomputer package for the statistical analysis of compositional data*. Chapman and Hall London.
- Aitchison, J., & Greenacre, M. (2002). Biplots of compositional data. *Journal of the Royal Statistical Society: Series C (Applied Statistics)*, 51(4), 375–392.
- Aitchison, J., & Egozcue, J. (2005). Compositional Data Analysis: Where Are We and Where Should We Be Heading? *Mathematical Geology*, 37(7), 829–850. <https://doi.org/10.1007/s11004-005-7383-7>
- Akin, A. (2008). *The Scales of Psychological Well-being: A Study of Validity and Reliability*. 8(3), 741–750. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ837765.pdf>

- Ansley, T. N., & Forsyth, R. A. (1985). An Examination of the Characteristics of Unidimensional IRT Parameter Estimates Derived From Two-Dimensional Data. *Applied Psychological Measurement*, 9(1), 37–48. <https://doi.org/10.1177/014662168500900104>
- Aranguren, M., & Irrazabal, N. (2015). Estudio de las propiedades psicométricas de las escalas de bienestar psicológico de Ryff en una muestra de estudiantes Argentinos. *Ciencias Psicológicas*, 9(1), 73–83. [http://www.scielo.edu.uy/scielo.php?pid=S1688-42212015000100008&script=sci\\_arttext&tlng=en](http://www.scielo.edu.uy/scielo.php?pid=S1688-42212015000100008&script=sci_arttext&tlng=en)
- Arce González, M. A., Pérez-Borroto Oliva, D. B., Mayea González, S. de la C., Otero Ramos, I. M., Guerra Morales, V. M., & Molerio Pérez, O. (2023). Validación de la Escala de Bienestar Psicológico de Carol Ryff en adultos mayores cubanos. *Medicent Electrón*, 27(2).
- Areli Medina-Calvillo, M., Yunuen Gutiérrez-Hernández, C., & Padrós-Blázquez, F. (2013). *Psychometric Properties of Ryff's Scale of Psychological Well-being in a Mexican Population*.
- Augusto Landa, J. M., Martos, M. P., & López-Zafra, E. (2010). Emotional Intelligence and Personality Traits as Predictors of Psychological Well-Being in Spanish Undergraduates. *Social Behavior and Personality: An International Journal*, 38(6), 783–793. <https://doi.org/10.2224/sbp.2010.38.6.783>
- Augusto-Landa, J. M., Pulido-Martos, M., & Lopez-Zafra, E. (2011). Does Perceived Emotional Intelligence and Optimism/pessimism Predict Psychological Well-being? *Journal of Happiness Studies*, 12(3), 463–474. <https://doi.org/10.1007/s10902-010-9209-7>
- Bajo, M., Blanco, A., Stavradi, M., Gandarillas, B., Cancela, A., Requero, B., & Díaz, D. (2018). Post-traumatic cognitions and quality of life in terrorism victims: the role of well-being in indirect

versus direct exposure. *Health and Quality of Life Outcomes*, 16(1), 96. <https://doi.org/10.1186/s12955-018-0923-x>

Barceló-Vidal, C., Martín-Fernández, J. A., & Pawlowsky-Glahn, V. (2001). *Mathematical Foundations of Compositional Data Analysis*.

Birnbaum, A. (1968). Some latent trait models and their use in inferring an examinee's ability. *Statistical Theories of Mental Test Scores*. <https://cir.nii.ac.jp/crid/1571698600108572800>

Blasco-Belled, A., & Alsinet, C. (2022). The architecture of psychological well-being: A network analysis study of the Ryff Psychological Well-Being Scale. *Scandinavian Journal of Psychology*, 63(3), 199–207. <https://doi.org/10.1111/sjop.12795>

Bock, D. R. (1972). Estimating item parameters and latent ability when responses are scored in two or more nominal categories. *Psychometrika*, 37(1), 29–51. <https://doi.org/10.1007/BF02291411>

Burns, R., & Machin, M. (2009). Investigating the structural validity of Ryff's psychological well-being scales across two samples. *Social Indicators Research*, 93(2), 359–375. <http://link.springer.com/article/10.1007/s11205-008-9329-1>

Calderon Jr., R., Kim, G., Ratsameemonthon, C., & Pupanead, S. (2020). Assessing the Adaptation of a Thai Version of the Ryff Scales of Psychological Well-Being: A PLS-SEM Approach. *Psychology*, 11(07), 1037–1053. <https://doi.org/10.4236/psych.2020.117068>

Chan, D. W., Chan, L., & Sun, X. (2017). Developing a Brief Version of Ryff's Scale to Assess the Psychological Well-Being of Adolescents

in Hong Kong. *European Journal of Psychological Assessment*, 1–9.  
<https://doi.org/10.1027/1015-5759/a000403>

Chaves, C., Lopez-Gomez, I., Hervas, G., & Vazquez, C. (2017). A Comparative Study on the Efficacy of a Positive Psychology Intervention and a Cognitive Behavioral Therapy for Clinical Depression. *Cognitive Therapy and Research*, 41(3), 417–433.  
<https://doi.org/10.1007/s10608-016-9778-9>

Chayes, F. (1956). *Petrographic modal analysis: an elementary statistical appraisal*. Wiley New York.

Chayes, F. (1960). On correlation between variables of constant sum. *Journal of Geophysical Research*, 65(12), 4185–4193.

Chayes, F. (1962). Numerical correlation and petrographic variation. *The Journal of Geology*, 70(4), 440–452.

Chayes, F. (1971). *Ratio correlation: a manual for students of petrology and geochemistry*. University of Chicago Press.

Chen, F. F., Jing, Y., Hayes, A., & Lee, J. M. (2013). Two Concepts or Two Approaches? A Bifactor Analysis of Psychological and Subjective Well-Being. *Journal of Happiness Studies*, 14(3), 1033–1068. <https://doi.org/10.1007/s10902-012-9367-x>

Cheng, S., & Chan, A. (2005). Measuring psychological well-being in the Chinese. *Personality and Individual Differences*, 38(6), 1307–1316.  
<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S019188690400251X>

Chiang, H. H., Chien, L. H., Lin, J. S., Yeh, Y. H., & Lee, T. S. H. (2013). Modeling psychological well-being and family relationships

among retired older people in Taiwan. *International Journal of Mental Health Nursing*, 22(1), 93–101.  
<https://doi.org/10.1111/j.1447-0349.2012.00840.x>

Chitgian-Urzúa, V., Urzúa, A., & Vera-Villaruel, P. (2013). Análisis preliminar de las Escalas de Bienestar Psicológico en población chilena. *Revista Argentina de Clínica Psicológica XXII*, 1, 5–14.  
[https://www.researchgate.net/profile/Alfonso\\_Urzuu/publication/291331368\\_PRELIMINARY\\_ANALYSIS\\_OF\\_PSYCHOLOGICAL\\_WELLNESS\\_SCALES\\_IN\\_CHILEAN\\_POPULATION/links/570e2aee08aed31341d2eda9.pdf](https://www.researchgate.net/profile/Alfonso_Urzuu/publication/291331368_PRELIMINARY_ANALYSIS_OF_PSYCHOLOGICAL_WELLNESS_SCALES_IN_CHILEAN_POPULATION/links/570e2aee08aed31341d2eda9.pdf)

Clarke, P. J., Marshall, V. W., Ryff, C. D., & Wheaton, B. (2001). Measuring Psychological Well-Being in the Canadian Study of Health and Aging. *International Psychogeriatrics*, 13(S1), 79–90.  
<https://doi.org/10.1017/S1041610202008013>

Corral Verdugo, V. (2001). El significado de " variables latentes" en psicología. *Acta Comportamentalia: Revista Latina de Análisis Del Comportamiento*, 9(1).

Costea-Bărluțiu, C., Bălaș-Baconschi, C., & Hathazi, A. (2018). Romanian adaptation of the Ryff's Psychological Well-Being Scale: Brief report of the factor structure and psychometric properties. *Journal of Evidence-Based Psychotherapies*, 18(1), 21–34.  
<https://doi.org/10.24193/jebp.2018.1.2>

Cronbach, L. J. (1951). Coefficient alpha and the internal structure of tests. *Psychometrika*, 16(3), 297–334.  
<https://doi.org/10.1007/BF02310555>

Csikszentmihalyi, M., & Getzels, J. W. (1971). Discovery-oriented behavior and the originality of creative products: A study with

artists. *Journal of Personality and Social Psychology*, 19(1), 47–52.  
<https://doi.org/10.1037/h0031106>

Cuesta Izquierdo, M. (1996). Unidimensionalidad. In J. Muñiz (Ed.), *Psicometría* (Ed. Universitas., pp. 239–292).  
<https://digibuo.uniovi.es/dspace/handle/10651/55860>

Díaz, D., Rodríguez-Carvajal, R., Blanco, A., Moreno Jimenez, B., Gallardo, I., Valle, C., & van Dierendonck, D. (2006). Adaptación española de las escalas de bienestar psicológico de Ryff. *Psicothema*.

<http://www.unioviedo.net/reunido/index.php/PST/article/view/847>

4

Díaz, D., Stavradi, M., Blanco, A., & Bajo, M. (2018). 11-M Victims 3 Years After Madrid Terrorist Attacks: Looking for Health Beyond Trauma. *Journal of Happiness Studies*, 19(3), 663–675.  
<https://doi.org/10.1007/s10902-016-9842-x>

Diener, E. (1984). Subjective well-being. *Psychological Bulletin*, 95(3), 542–575. <https://doi.org/10.1037/0033-2909.95.3.542>

Eckart, C., & Young, G. (1936). The approximation of one matrix by another of lower rank. *Psychometrika*, 1(3), 211–218.

Egozcue, J. J., Pawlowsky-Glahn, V., Mateu-Figueras, G., & Barceló-Vidal, C. (2003). Isometric logratio transformations for compositional data analysis. *Mathematical Geology*, 35(3), 279–300.

Escolà-Gascón, Á., Marín, F.-X., Rusiñol, J., & Gallifa, J. (2021). Evidence of the psychological effects of pseudoscientific information about COVID-19 on rural and urban populations. *Psychiatry*

*Research*, 295, 113628.  
<https://doi.org/10.1016/j.psychres.2020.113628>

*ESTUDIOS DE I+D+I.* (n.d.).  
<http://www.imsersomayores.csic.es/documentos/documentos/imse-rso-estudiosidi-19.pdf>

Fernandes, H. M., Raposo, J. V., & Teixeira, C. M. (2010). Preliminary Analysis of the Psychometric Properties of Ryff ' s Scales of Psychological Well-Being in Portuguese Adolescents. *The Spanish Journal of Psychology*, 13(2), 1032–1043. <https://doi.org/1032-1043>

Freire, C., Ferradás, M. del M., Núñez, J. C., & Valle, A. (2017). Estructura factorial de las Escalas de Bienestar Psicológico de Ryff en estudiantes universitarios. *European Journal of Education and Psychology*, 10(1), 1–8. <https://doi.org/10.1016/j.ejeps.2016.10.001>

Galindo, M. P. (1985). *Contribuciones a la representación simultánea de datos multidimensionales. Valencia, España. 250 p.* Tesis doctoral. Universidad de Salamanca. Departamento de Estadística.[Links].

Galindo Villardon, M. (1986). Una alternativa de representación simultánea: HJ-Biplot. *Qüestiió. 1986, Vol. 10, Núm. 1.*

Gallardo, I., & Moyano-Díaz, E. (2012). Análisis psicométrico de las escalas Ryff (versión española) en una muestra de adolescentes chilenos. *Universitas Psychologica*, 11(3), 931–939. <http://search.proquest.com/openview/e8dc99bff5295d189cad5f2f6c1831a7/1?pq-origsite=gscholar&cbl=2041157>

García Mendoza, M. D. C., Sánchez Queija, I., & Parra Jiménez, Á. (2019). The Role of Parents in Emerging Adults' Psychological

Well-Being: A Person-Oriented Approach. *Family Process*, 58(4), 954–971. <https://doi.org/10.1111/famp.12388>

Goldstein, H. (1980). Dimensionality, bias, independence and measurement scale problems in latent trait test score models. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, 33(2), 234–246. <https://doi.org/10.1111/j.2044-8317.1980.tb00610.x>

González Rivera, J. A., Quintero-Jiménez, N., Veray-Alicea, J., Rosario-Rodríguez Universidad Carlos Albizu, A., Juan, S., & Rico, P. (2016). Adaptación y Validación de la Escala de Bienestar Psicológico de Ryff en una Muestra de Adultos Puertorriqueños. *Salud Y Conducta Humana*, 3(1), 1–14. [https://s3.amazonaws.com/academia.edu.documents/51127137/Gonzalez-Rivera\\_\\_et\\_al.\\_\\_2016.pdf?AWSAccessKeyId=AKIAIWOWYYGZ2Y53UL3A&Expires=1524758180&Signature=L1lyQ0DUvIwr%2Bm5WfgUyH9MwZQQ%3D&response-content-disposition=inline%3Bfilename%3DAdaptacion\\_y\\_V](https://s3.amazonaws.com/academia.edu.documents/51127137/Gonzalez-Rivera__et_al.__2016.pdf?AWSAccessKeyId=AKIAIWOWYYGZ2Y53UL3A&Expires=1524758180&Signature=L1lyQ0DUvIwr%2Bm5WfgUyH9MwZQQ%3D&response-content-disposition=inline%3Bfilename%3DAdaptacion_y_V)

González-Hernández, Gómez-López, Pérez-Turpin, Muñoz-Villena, & Andreu-Cabrera. (2019). Perfectly Active Teenagers. When Does Physical Exercise Help Psychological Well-Being in Adolescents? *International Journal of Environmental Research and Public Health*, 16(22), 4525. <https://doi.org/10.3390/ijerph16224525>

González-Hernández, J., Bianco, A., Marques da Silva, C., & Gómez-López, M. (2022). Perfectionism, Resilience and Different Ways of Experiencing Sport during COVID-19 Confinement. *International Journal of Environmental Research and Public Health*, 19(10), 5994. <https://doi.org/10.3390/ijerph19105994>

Gutiérrez-Rojas, L., González-Domenech, P. J., Junquera, G., Halverson, T. F., & Lahera, G. (2021). Functioning and Happiness

in People with Schizophrenia: Analyzing the Role of Cognitive Impairment. *International Journal of Environmental Research and Public Health*, 18(14), 7706. <https://doi.org/10.3390/ijerph18147706>

Hambleton, R. K., & Rovinelli, R. J. (1986). Assessing the Dimensionality of a Set of Test Items. *Applied Psychological Measurement*, 10(3), 287–302. <https://doi.org/10.1177/014662168601000307>

Harrison, D. A. (1986). Robustness of Irt Parameter Estimation to Violations of The Unidimensionality Assumption. *Journal of Educational Statistics*, 11(2), 91–115. <https://doi.org/10.3102/10769986011002091>

Hartley, H. O. (1958). Maximum Likelihood Estimation from Incomplete Data. *Biometrics*, 14(2), 174. <https://doi.org/10.2307/2527783>

Hattie, J. (1985). Methodology Review: Assessing Unidimensionality of Tests and Itenls. *Applied Psychological Measurement*, 9(2), 139–164. <https://doi.org/10.1177/014662168500900204>

Henn, C. M., Hill, C., & Jorgensen, L. I. (2016). An investigation into the factor structure of the Ryff Scales of Psychological Well-Being. *SA Journal of Industrial Psychology*, 42(1). <https://doi.org/10.4102/sajip.v42i1.1275>

Hsu, H. Y., Hsu, T. L., Lee, K. F., & Wolff, L. (2017). Evaluating the Construct Validity of Ryff's Scales of Psychological Well-Being Using Exploratory Structural Equation Modeling. *Journal of Psychoeducational Assessment*, 35(6), 633–638. <https://doi.org/10.1177/0734282916652756>

- Ingersoll-Dayton, B., Saengtienchai, C., Kespichayawattana, J., & Aunguroch, Y. (2004). Measuring Psychological Well-Being: Insights From Thai Elders. *The Gerontologist*, *44*(5), 596–604. <https://doi.org/10.1093/geront/44.5.596>
- Kafka, G. J., & Kozma, A. (2002). The Construct Validity of Ryff's Scales of Psychological Well-Being (SPWB) and their Relationship to Measures of Subjective Well-Being. *Social Indicators Research*, *57*(2), 171–190. <https://doi.org/10.1023/A:1014451725204>
- Kaiser, H. F. (1970). A second generation little jiffy. *Psychometrika*, *35*(4), 401–415. <https://doi.org/10.1007/BF02291817>
- Kaiser, H. F., & Rice, J. (1974). Little Jiffy, Mark Iv. *Educational and Psychological Measurement*, *34*(1), 111–117. <https://doi.org/10.1177/001316447403400115>
- Kalantarkousheh, S. M. (2012). *Reliability and Exploratory Factor Analysis of Psychological Well-being in a Persian Sample*. *4*(June), 11–27.
- Kállay, É., & Rus, C. (2014). Psychometric properties of the 44-item version of Ryff's psychological well-being scale. *European Journal of Psychological Assessment*, *30*(1), 15–21. <https://doi.org/10.1027/1015-5759/a000163>
- Karaś, D., & Ciecuch, J. (2017). Polish adaptation of Carol Ryff's Psychological Well-Being Scales. *Roczniki Psychologiczne*, *20*(4), 837–853. <https://doi.org/10.18290/rpsych.2017.20.4-4en>
- Keyes, C. L. M. (2007). Promoting and protecting mental health as flourishing: A complementary strategy for improving national mental health. *American Psychologist*, *62*(2), 95–108. <https://doi.org/10.1037/0003-066X.62.2.95>

- Keyes, C. L. M., Shmotkin, D., & Ryff, C. D. (2002). Optimizing well-being: The empirical encounter of two traditions. *Journal of Personality and Social Psychology, 82*(6), 1007–1022. <https://doi.org/10.1037//0022-3514.82.6.1007>
- Kitamura, T., Kishida, Y., Gatayama, R., Matsuoka, T., Miura, S., & Yamabe, K. (2004). Ryff's Psychological Well-Being Inventory: Factorial Structure and Life History Correlates among Japanese University Students. *Psychological Reports, 94*(1), 83–103. <https://doi.org/10.2466/pr0.94.1.83-103>
- Krumbein, W. C. (1962). Open and closed number systems in stratigraphic mapping. *AAPG Bulletin, 46*(12), 2229–2245.
- Krzanowski, W. J., & Marriott, F. H. C. (1994). *Multivariate analysis*. Edward Arnold London.
- Lee, T.-H., Sun, H.-F., & Chiang, H.-H. (2019). Development and validation of the short-form Ryff's psychological well-being scale for clinical nurses in Taiwan. *Journal of Medical Sciences, 39*(4), 157. [https://doi.org/10.4103/jmedsci.jmedsci\\_191\\_18](https://doi.org/10.4103/jmedsci.jmedsci_191_18)
- Li, R.-H. (2014). Reliability and validity of a shorter Chinese version for Ryff's psychological well-being scale. *Health Education Journal, 73*(4), 446–452. <https://doi.org/10.1177/0017896913485743>
- Li, R.-H., Kao, C.-M., & Wu, Y.-Y. (2015). Gender differences in psychological well-being: tests of factorial invariance. *Quality of Life Research, 24*(11), 2577–2581. <https://doi.org/10.1007/s11136-015-0999-2>
- Lindfors, P. (2002). Positive Health in a Group of Swedish White-Collar Workers. *Psychological Reports, 91*(3), 839–845. <https://doi.org/10.2466/pr0.2002.91.3.839>

- Lindfors, P., Berntsson, L., & Lundberg, U. (2006). Factor structure of Ryff's psychological well-being scales in Swedish female and male white-collar workers. *Personality and Individual Differences, 40*(6), 1213–1222. <https://doi.org/10.1016/j.paid.2005.10.016>
- Liu, Q., Shono, M., & Kitamura, T. (2009). Psychological well-being, depression, and anxiety in Japanese university students. *Depression and Anxiety, 26*(8), E99–E105. <https://doi.org/10.1002/da.20455>
- Loehlin, J. C. (2004). *Latent Variable Models*. Psychology Press. <https://doi.org/10.4324/9781410609823>
- Loera-Malvaez, N., Balcázar-Nava, P., Trejo-González, L., Gurrola-Peña, G. M., & Bonilla-Muñoz, M. P. (2008). Adaptación de la escala de bienestar psicológico de Ryff en adolescentes preuniversitarios. *Neurología, Neurocirugía y Psiquiatría, 41*(3–4), 90–97. <http://www.medigraphic.com/cgi-bin/new/resumen.cgi?IDARTICULO=70703>
- López-Pérez, B., Fernández-Pinto, I., & Abad, F. J. G. (2008). *TECA, Test de Empatía Cognitiva y Afectiva*.
- Lord, F. M. (1980). *Applications of item response theory to practical testing problems*. L. Erlbaum Associates.
- Luis, E., Bermejo-Martins, E., Martinez, M., Sarrionandia, A., Cortes, C., Oliveros, E. Y., Garces, M. S., Oron, J. V., & Fernández-Berrocal, P. (2021). Relationship between self-care activities, stress and well-being during COVID-19 lockdown: a cross-cultural mediation model. *BMJ Open, 11*(12), e048469. <https://doi.org/10.1136/bmjopen-2020-048469>

- Lumsden, J. (1961). The construction of unidimensional tests. *Psychological Bulletin*, 58(2), 122–131. <https://doi.org/10.1037/h0048679>
- Luștrea, A., Ghazi, L. Al, & Predescu, M. (2018). Adapting and validating Ryff's psychological well-being scale on Romanian student population. *Educatia* 21, 16, 117–126. <https://doi.org/10.24193/ed21.2018.16.15>
- Lyubomirsky, S., King, L., & Diener, E. (2005). The Benefits of Frequent Positive Affect: Does Happiness Lead to Success? *Psychological Bulletin*, 131(6), 803–855. <https://doi.org/10.1037/0033-2909.131.6.803>
- Martín Arribas, M. C. (2004). Diseño y validación de cuestionarios. *Matronas profesión*, 5(17 (septiembre)), 23–29. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6125935>
- Martínez Arias, R. (1995). *Psicometría: Teoría de los tests psicológicos y educativos*. Madrid: síntesis.
- Martín-Fernández, J. A., Daunis-I-Estadella, J., & Tyutyunnik, Y. G. (2004). *Experiencia del estudio geoestadístico de composición química de suelos, de los indicadores de factores y de las condiciones geoquímicas Report de investigación IMA*.
- Martín-Fernández, J. A., Olea-Meneses, R. A., & Pawlowsky-Glahn, V. (2001). Criteria to Compare Estimation Methods of Regionalized Compositions. *Mathematical Geology*, 33(8), 889–909. <https://doi.org/10.1023/A:1012293922142>
- Maslow, A. H. (1943). Preface to Motivation Theory. *Psychosomatic Medicine*, 5(1), 85.

[https://journals.lww.com/psychosomaticmedicine/Abstract/1943/01000/Preface\\_to\\_Motivation\\_Theory.12.aspx](https://journals.lww.com/psychosomaticmedicine/Abstract/1943/01000/Preface_to_Motivation_Theory.12.aspx)

Masters, G. N., & Wright, B. D. (1984). The essential process in a family of measurement models. *Psychometrika*, 49(4), 529–544. <https://doi.org/10.1007/BF02302590>

McDonald, R. P. (2013). *Test Theory*. Psychology Press. <https://doi.org/10.4324/9781410601087>

Montes-Berges, B., & Augusto-Landa, J.-M. (2014). Emotional Intelligence and Affective Intensity as Life Satisfaction and Psychological Well-Being Predictors on Nursing Professionals. *Journal of Professional Nursing*, 30(1), 80–88. <https://doi.org/10.1016/j.profnurs.2012.12.012>

Mosimann, J. E. (1963). On the Compound Negative Multinomial Distribution and Correlations Among Inversely Sampled Pollen Counts. *Biometrika*, 50(1/2), 47. <https://doi.org/10.2307/2333745>

Muiños, G., Suárez, E., Hess, S., & Hernández, B. (2015). Frugality and psychological wellbeing. The role of voluntary restriction and the resourceful use of resources / Frugalidad y bienestar psicológico. El papel de la restricción voluntaria y el uso ingenioso de recursos. *Psycology*, 6(2), 169–190. <https://doi.org/10.1080/21711976.2015.1026083>

Muñiz Fernández, J., & Cuesta Izquierdo, M. (1993). El problema de la unidimensionalidad en la medición psicológica. <https://Dialnet.Unirioja.Es/Servlet/Extart?Codigo=5003478>, 51–70. <https://digibuo.uniovi.es/dspace/handle/10651/55699>

Muñiz, J., Rogers, J., & Hariharan, S. (1989). Robustez de las estimaciones del modelo de Rasch en presencia de aciertos al azar

y discriminación variable los items. *Dialnet.Unirioja.Es*, 43(4), 83–97. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2945004>

Muraki, E., & Bock, R. (2002). IRT based test scoring and item analysis for graded open-ended exercises and performance tasks (Version 3). *Chicago: Scientific Software*.

Negovan, V. (2010). Dimensions of students' psychosocial well-being and their measurement: Validation of a students' Psychosocial Well Being Inventory. In *Europe's Journal of Psychology* (Vol. 2). [www.ejop.org](http://www.ejop.org)

Oprea, S. J., Buijzen, M., & van Reijmersdal, E. A. (2018). Development and validation of the psychological well-being scale for children (Pwb-c). *Societies*, 8(1). <https://doi.org/10.3390/soc8010018>

Pawlowsky-Glahn, V., & Egozcue, J. J. (2001). Geometric approach to statistical analysis on the simplex. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, 15(5), 384–398.

Perez-Rojo, G., Lopez, J., Noriega, C., Martinez-Huertas, J. angel, Velasco, C., Carretero, I., Lopez-Frutos, P., Galarraga, L., & Pillemer, K. (2021). Older People's Personal Strengths During the First Wave of the COVID-19 Pandemic. *Psicothema*, 33, 423+. <https://link.gale.com/apps/doc/A671195665/AONE?u=anon~86ed6ac&sid=googleScholar&xid=bd430a4f>

Pineda Roa, C. A., Castro Muñoz, J. A., & Chaparro Clavijo, R. A. (2017). Estudio psicométrico de las Escalas de Bienestar Psicológico de Ryff en adultos jóvenes colombianos. *Pensamiento Psicológico*, 16(1). <https://doi.org/10.11144/javerianacali.ppsi16-1.epeb>

- Pulkkinen, L., Nygren, H., & Kokko, K. (2002). Successful Development: Childhood Antecedents of Adaptive Psychosocial Functioning in Adulthood. *Journal of Adult Development*, 9(4), 251–265. <https://doi.org/10.1023/A:1020234926608>
- Rasch, G. (1966). An item analysis which takes individual differences into account. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, 19(1), 49–57. <https://doi.org/10.1111/j.2044-8317.1966.tb00354.x>
- Revelle, W., & Condon, D. M. (2019). Reliability from  $\alpha$  to  $\omega$ : A tutorial. *Psychological Assessment*, 31(12), 1395–1411. <https://doi.org/10.1037/pas0000754>
- Rivera-Picón, C., Benavente-Cuesta, M. H., Quevedo-Aguado, M. P., & Rodríguez-Muñoz, P. M. (2022). Differences in Resilience, Psychological Well-Being and Coping Strategies between HIV Patients and Diabetics. *Healthcare*, 10(2), 266. <https://doi.org/10.3390/healthcare10020266>
- Rodríguez, M., & Sebastianelli, M. (2012). PROPIEDADES PSICOMETRICAS DE LA ESCALA DE BIENESTAR PSICOLOGICO DE RYFF EN DOCENTES ARGENTINOS. *De Investigación y ...* <http://www.aacademica.org/000-072/977>
- Rodríguez-Carvajal, R., Méndez, D. D., Moreno-Jiménez, B., Abarca, A. B., & van Dierendonck, D. (2010). Vitalidad y recursos internos como componentes del constructo to de bienestar psicológico. (Spanish). *Psicothema*, 22(1), 63–70. <http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=a9h&AN=47832930&site=ehost-live>
- Ruini, C., Ottolini, F., Rafanelli, C., Ryff, C., & Fava, G. A. (2003). *La validazione italiana delle Psychological Well-being Scales (PWB)*.

*Italian validation of Psychological Well-being Scales (PWB).*  
[http://www.rivistadipsichiatria.it/allegati/00173\\_2003\\_03/fulltext/117-130.pdf](http://www.rivistadipsichiatria.it/allegati/00173_2003_03/fulltext/117-130.pdf)

Ryff, C. (1989a). Beyond Ponce de Leon and life satisfaction: New directions in quest of successful ageing. *International Journal of Behavioral Development*.  
<http://journals.sagepub.com/doi/abs/10.1177/016502548901200102>

Ryff, C. (1989b). Happiness is everything, or is it? Explorations on the meaning of psychological well-being. *Journal of Personality and Social Psychology*, 57(6), 1069–1081.  
<https://doi.org/10.1037/0022-3514.57.6.1069>

Ryff, C. (2014). Psychological Well-Being Revisited: Advances in the Science and Practice of Eudaimonia. *Psychotherapy and Psychosomatics*, 83(1), 10–28. <https://doi.org/10.1159/000353263>

Ryff, C., & Essex, M. J. (1992). The interpretation of life experience and well-being: the sample case of relocation. *Psychology and Aging*, 7(4), 507–517. <https://doi.org/10.1037//0882-7974.7.4.507>

Ryff, C., & Keyes, C. (1995a). The structure of psychological well-being revisited. *Journal of Personality and Social Psychology*, 69(4), 719–727. <http://psycnet.apa.org/journals/psp/69/4/719/>

Ryff, C., & Keyes, C. L. M. (1995b). The structure of psychological well-being revisited. *Journal of Personality and Social Psychology*, 69(4), 719–727. <https://doi.org/10.1037/0022-3514.69.4.719>

Ryff, C., & Singer, B. H. (2006). Best news yet on the six-factor model of well-being. *Social Science Research*, 35(4), 1103–1119. <https://doi.org/10.1016/j.ssresearch.2006.01.002>

- Saajanaho, M., Kokko, K., Pynnönen, K., Tourunen, A., Törmäkangas, T., Portegijs, E., & Rantanen, T. (2021). The Scales of Psychological Well-Being – a validation, usability and test-retest study among community-dwelling older people in Finland. *Aging & Mental Health, 25*(5), 913–922. <https://doi.org/10.1080/13607863.2020.1725801>
- Saiz, J., Chen-Chen, X., & Mills, P. J. (2021). Religiosity and Spirituality in the Stages of Recovery From Persistent Mental Disorders. *Journal of Nervous & Mental Disease, 209*(2), 106–113. <https://doi.org/10.1097/NMD.0000000000001271>
- Samejima, F. (1969). Estimation of latent ability using a response pattern of graded scores. *Psychometrika Monograph Supplement, 34*(4, Pt. 2), 100.
- Samejima, F. (1972). A general model for free-response data. *Psychometrika Monograph Supplement, 37*(1, Pt. 2), 68.
- Samejima, F. (1977). Weakly parallel tests in latent trait theory with some criticisms of classical test theory. *Psychometrika, 42*(2), 193–198. <https://doi.org/10.1007/BF02294048>
- Sarmanov, O. V, & Vistelius, A. B. (1959). On the correlation of percentage values. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 126*, 22–25.
- Sasaki, N., Watanabe, K., Imamura, K., Nishi, D., Karasawa, M., Kan, C., Ryff, C. D., & Kawakami, N. (2020). Japanese version of the 42-item psychological well-being scale (PWBS-42): a validation study. *BMC Psychology, 8*(1), 75. <https://doi.org/10.1186/s40359-020-00441-1>
- Sirigatti, S., Penzo, I., Iani, L., Mazzeschi, A., Hatalskaja, H., Giannetti, E., & Stefanile, C. (2013). Measurement Invariance of Ryff's

Psychological Well-being Scales Across Italian and Belarusian Students. *Social Indicators Research*, 113(1), 67–80.  
<https://doi.org/10.1007/s11205-012-0082-0>

Sirigatti, S., Stefanile, C., Giannetti, E., Iani, L., Penzo, I., & Mazzeschi, A. (2009). Assessment of factor structure of Ryff's Psychological Well-Being Scales in Italian adolescents. *Bollettino di Psicologia Applicat.* 30–50.

Slocum-Gori, S. L., & Zumbo, B. D. (2011). Assessing the Unidimensionality of Psychological Scales: Using Multiple Criteria from Factor Analysis. *Social Indicators Research*, 102(3), 443–461.  
<https://doi.org/10.1007/s11205-010-9682-8>

Springer, K., & Hauser, R. (2006). An assessment of the construct validity of Ryff's scales of psychological well-being: Method, mode, and measurement effects. *Social Science Research*.  
<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0049089X05000451>

Springer, K. W., Hauser, R. M., & Freese, J. (2006). Bad news indeed for Ryff's six-factor model of well-being. *Social Science Research*, 35(4), 1120–1131.  
<https://doi.org/10.1016/j.ssresearch.2006.01.003>

Stavraki, M., García-Márquez, R., Bajo, M., Callejas-Albiñana, A. I., Paredes, B., & Díaz, D. (2022). Brief Version of the Ryff Psychological Well-Being Scales for Children and Adolescents: Evidence of Validity. *Psicothema*, 34(2), 316–322.  
<https://doi.org/10.7334/psicothema2021.235>

Tomas, J., Meléndez, J., Oliver, A., & Navarro, E. (2010). Efectos de método en las escalas de Ryff: Un estudio en población de personas mayores. *Psicológica*, 31, 383–400.

[https://www.researchgate.net/profile/Esperanza\\_Navarro-Pardo/publication/237103231\\_Efectos\\_de\\_mtudo\\_en\\_las\\_escalas\\_de\\_Ryff\\_Un\\_estudio\\_en\\_poblacin\\_de\\_personas\\_mayores/links/02e7e52793fc335458000000.pdf](https://www.researchgate.net/profile/Esperanza_Navarro-Pardo/publication/237103231_Efectos_de_mtudo_en_las_escalas_de_Ryff_Un_estudio_en_poblacin_de_personas_mayores/links/02e7e52793fc335458000000.pdf)

Tomás Miguel, J. M., Meléndez Moral, J. C., & Navarro Pardo, E. (2008). Modelos factoriales confirmatorios de las escalas de Ryff en una muestra de personas mayores. *Psicothema*, *20*(2), 304–310.

Triadó, C., Villar, F., Solé, C., & Celdrán, M. (2007). Construct Validity of Ryff's Scale of Psychological Well-Being in Spanish Older Adults. *Psychological Reports*, *100*(3\_suppl), 1151–1164. <https://doi.org/10.2466/pr0.100.4.1151-1164>

van Dierendonck, D. (2005). The construct validity of Ryff's Scales of Psychological Well-being and its extension with spiritual well-being. *Personality and Individual Differences*, *36*(3), 629–643. [https://doi.org/10.1016/S0191-8869\(03\)00122-3](https://doi.org/10.1016/S0191-8869(03)00122-3)

van Dierendonck, D., Díaz, D., Rodríguez-Carvajal, R., Blanco, A., & Moreno-Jiménez, B. (2008). Ryff's Six-factor Model of Psychological Well-being, A Spanish Exploration. *Social Indicators Research*, *87*(3), 473–479. <https://doi.org/10.1007/s11205-007-9174-7>

Veliz-Burgos, A. (2012). Propiedades psicométricas de la Escala de Bienestar Psicológico y estructura factorial en universitarios chilenos. *Psicoperspectivas. Individuo y Sociedad*, *11*(2), 143–163. <https://doi.org/10.5027/psicoperspectivas-Vol11-Issue2-fulltext-196>

Vera-Villarroel, P., Urzúa, A., Silva, J., Pavez, P., & Celis-Atenas, K. (2013). Escala de bienestar de Ryff: Análisis comparativo de los modelos teóricos en distintos grupos de edad. : : *Reflexão e Crítica*, *26*(1), 106–112.

[https://www.researchgate.net/profile/Alfonso\\_Urzua/publication/262473851\\_Ryff\\_Scale\\_of\\_Well-Being\\_Factorial\\_Structure\\_of\\_Theoretical\\_Models\\_in\\_Different\\_Age\\_Groups/links/0f31753aae379b5cce000000.pdf](https://www.researchgate.net/profile/Alfonso_Urzua/publication/262473851_Ryff_Scale_of_Well-Being_Factorial_Structure_of_Theoretical_Models_in_Different_Age_Groups/links/0f31753aae379b5cce000000.pdf)

Villar, F., Triadó, C., Celdrán, M., & Solé, C. (2010). Measuring Well-Being among Spanish Older Adults: Development of a Simplified Version of Ryff's Scales of Psychological Well-Being. *Psychological Reports*, 107(1), 265–280. <https://doi.org/10.2466/02.07.08.10.21.PR0.107.4.265-280>

Villarosa, J., & Ganotice, F. (2018). Construct Validation of Ryff's Psychological Well-being Scale: Evidence From Filipino Teachers in the Philippines. *Philippine Journal of Psychology*, 51(1). <https://doi.org/10.31710/pjp/0051.01.01>

Walker, A. A., Jennings, J. K., & Engelhard, G. (2018). Using person response functions to investigate areas of person misfit related to item characteristics. *Educational Assessment*, 23(1), 47–68. <https://doi.org/10.1080/10627197.2017.1415143>

Waterman, A. S. (1993). Two conceptions of happiness: Contrasts of personal expressiveness (eudaimonia) and hedonic enjoyment. *Journal of Personality and Social Psychology*, 64(4), 678–691. <https://doi.org/10.1037/0022-3514.64.4.678>

