

Máster Universitario en Física y Matemáticas. Trabajo de
Fin de Máster



Título:

Perturbaciones en la densidad de energía de la materia
oscura y su relación con la creación de estructuras a gran
escala en el universo

Autora:

Laura Fernández Bafino

Tutores:

José Beltrán Jiménez

David Figueruelo Hernán

Año de presentación:

Curso académico 2022-2023

Máster Universitario en Física y Matemáticas. Trabajo de Fin de
Máster.



Título:

**Perturbaciones en la densidad de energía de la materia
oscura y su relación con la creación de estructuras a gran
escala en el universo**

Autora: Laura Fernández Bafino

Firma de la autora:



A fecha 11 de enero de 2023 los tutores José Beltrán Jiménez y David Figueruelo Hernán
aceptan la presentación de este TFM para la obtención del título de Máster.

Firma de los tutores:

Firmado por BELTRÁN JIMENEZ
JOSE - 47454704T el día
11/01/2023 con un certificado
emitido por AC FNMT Usuarios

Firmado por FIGUERUELO HERNÁN,
DAVID (AUTENTICACIÓN) el día
11/01/2023 con un certificado
emitido por AC DNIE 006

Salamanca, a 10 de enero de 2023

Índice

1. Objetivos	5
2. Introducción	6
2.1. El universo conocido	6
2.2. Métrica de Robertson-Walker	8
2.3. Universos con una única componente	9
2.3.1. Materia	11
2.3.2. Radiación	11
2.3.3. Energía oscura	12
2.4. Resumen	12
2.5. Función de Hubble	12
3. Perturbaciones escalares	15
3.1. Métrica de Robertson-Walker perturbada	17
3.2. Símbolos de Christoffel perturbados	18
3.3. Tensor momento-energía perturbado	19
3.3.1. Conservación del tensor momento-energía perturbado	21
3.4. Ecuaciones de Einstein perturbadas	23
3.4.1. Tensor de Ricci perturbado	23
3.4.2. Escalar de Ricci perturbado	24
3.4.3. Tensor de Einstein perturbado	24
3.4.4. Ecuaciones de Einstein perturbadas	25
3.5. Evolución del potencial gravitatorio	27
3.5.1. Universo dominado por radiación	29
3.5.2. Universo dominado por materia	29
4. Perturbaciones producidas por la materia oscura	31
4.1. Materia y radiación	31

4.2. Energía oscura	35
4.3. Espectro de potencias	36
5. Modelo Λ CDM	37
6. Más allá de Λ CDM	44
7. Conclusiones	50
Bibliografía	51

1. Objetivos

Este Trabajo de Fin de Máster tiene dos objetivos principales. Por una parte estudiar las perturbaciones en la densidad de la materia oscura en el modelo Λ CDM. Para esto se hará uso de aproximaciones como la adiabaticidad para llegar a resultados analíticos; y de herramientas de cálculo numérico como lo son CLASS y MontePython para llegar a resoluciones numéricas. Por otro lado, estudiar las perturbaciones en la densidad de la materia oscura en un modelo cuya única variación con respecto al modelo Λ CDM es la consideración de que la materia oscura sí tiene presión. En este caso se hará uso de los mismos programas para llegar a resultados numéricos.

Para hacer todo esto, primero se estudiarán las perturbaciones escalares en la métrica de Robertson-Walker, y las ecuaciones de Einstein a las que dan lugar. Con estas herramientas y las pertinentes aproximaciones, se podrá llegar a expresiones analíticas para la evolución de las inhomogeneidades en la densidad de energía de la materia oscura. Por último se utilizarán, como ya se ha dicho, CLASS y MontePython para obtener resultados numéricos, que serán representados de varias maneras. Finalmente se compararán los resultados que dan los dos modelos.

2. Introducción

2.1. El universo conocido

El Modelo más aceptado para describir el universo conocido es el modelo Lambda-CDM (Λ CDM), Lambda-Cold Dark Matter en inglés. Este modelo se apoya en el Principio Cosmológico y describe de forma acertada fenómenos empíricos como la radiación de fondo de microondas. El Principio Cosmológico es la hipótesis de que el universo es espacialmente homogéneo e isótropo. Este modelo también trata de explicar de forma adecuada la formación de estructuras en el universo. El modelo describe un universo de curvatura nula (globalmente plano) en expansión acelerada y gobernado por la Relatividad General de Einstein. Tiene cuatro componentes: energía oscura (68 %), materia oscura (27 %) y radiación y materia bariónica (5 %)[1]. No se sabe con exactitud qué es la energía oscura, pero se sabe que está distribuida de forma homogénea a lo largo del espacio y del tiempo. Es por esto que no tiene efectos gravitatorios locales, sino globales. Esta produce una fuerza repulsiva que da lugar a la expansión acelerada del universo. En el modelo Λ CDM se representa mediante un fluido perfecto con presión negativa. Por otro lado, lo mismo pasa con la materia oscura; parece ser un tipo de materia que se diferencia de la materia usual en que no interacciona con el campo electromagnético. Esta es la mayor responsable de la formación de las estructuras en el universo. De hecho, las respectivas densidades relativas en el presente $\Omega = \rho/\rho_{crit,0}$ de las componentes vienen dadas por [2]

$$|\Omega| \simeq 0,01 \quad \Omega_r = 9,4 \times 10^{-5} \quad \Omega_m = 0,32 \quad \Omega_\Lambda = 0,68 \quad (1)$$

y

$$\Omega_b = 0,05 \quad \Omega_c = 0,27, \quad (2)$$

donde $\rho_{crit,0} = 2,8 \times 10^1 h^2 M_{\odot} Mpc^{-3}$ ¹[2] es la densidad crítica en el presente y ρ la densidad observada.

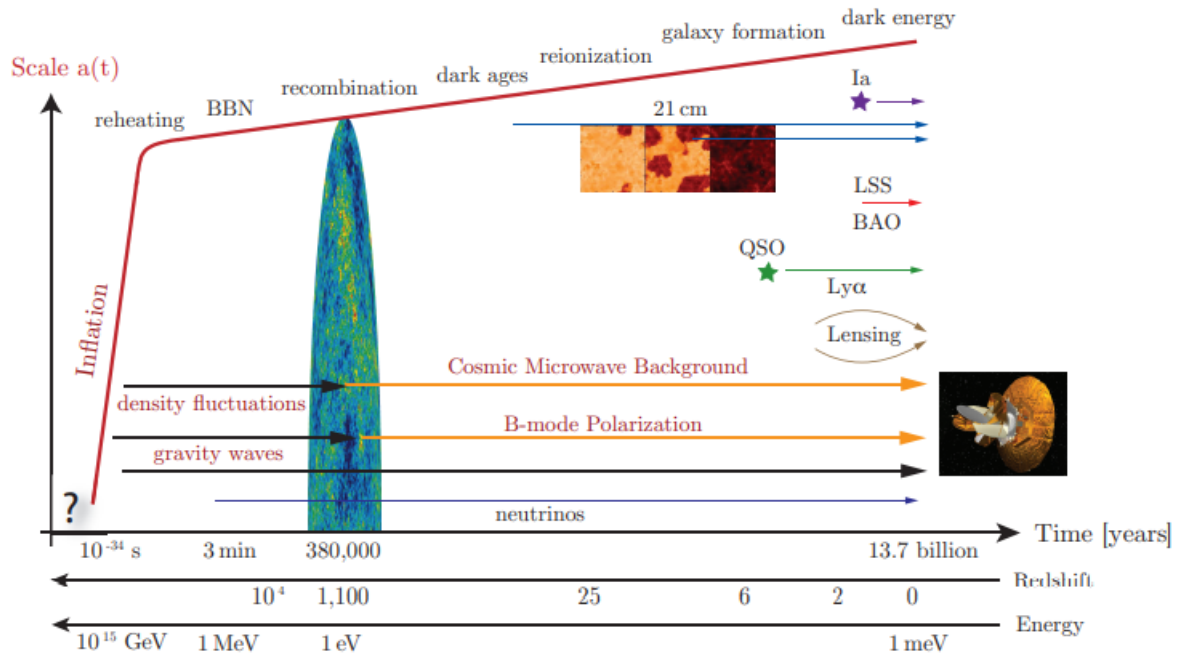


Figura 1: Línea temporal de la historia del universo [3]

A partir de 10^{-10} s después del Big Bang la historia del universo está respaldada por física bien estudiada. Este es el momento en el que la simetría que se consigue a altas energías entre los campos electromagnético y débil se rompe, y los bosones Z y W^{\pm} adquieren masa. Como consecuencia, los neutrinos se desacoplan del resto de la materia. Más tarde, cuando el universo tiene alrededor de un segundo de edad, la temperatura baja por debajo de la masa en reposo de los electrones y los positrones, de forma que estos comienzan a aniquilarse de forma eficiente. El fluido resultante de fotones y bariones está en equilibrio. Un poco después, alrededor de los 200 segundos de edad, la interacción fuerte se vuelve importante y comienza la nucleosíntesis; la combinación de protones y neutrones en elementos ligeros. Otro momento importante para la historia térmica del universo llega cuando la densidad

¹h es la constante de Hubble adimensional que se introducirá más tarde

de energía de la materia y de la radiación son iguales, que sucede cuando el universo tiene 10^{11} segundos de edad. Cuando han pasado ya 380000 años desde el Big Bang, los electrones y los protones se combinan en hidrógeno. Los fotones se pueden desacoplar entonces y dan lugar a lo que hoy en día llamamos fondo cósmico de microondas.

Por otro lado, los primeros 10^{-10} segundos del universo están basados en observaciones y especulaciones, ya que la energía en los procesos es muy superior a la que puede alcanzarse actualmente en los laboratorios. Inflación es la mejor hipótesis para explicar estos primeros segundos del universo. Es un periodo de expansión exponencial del espacio que habría sucedido en el universo temprano; 10^{-34} s después del Big Bang. Inflación explica tanto el fondo cósmico de microondas como la creación de estructuras a gran escala; y soluciona los problemas del horizonte y de la planitud del Big Bang[3].

2.2. Métrica de Robertson-Walker

El principio cosmológico se traduce en que el espacio ha de ser maximalmente simétrico. Entonces, el elemento de línea que describe el universo ha de ser [2]

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \gamma_{ij} dx^i dx^j, \quad (3)$$

donde $a(t)$ es una función escalar que solamente depende del tiempo. La métrica que se utiliza para describir el modelo Λ CDM es la Métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (para el caso de curvatura nula). La métrica de Robertson-Walker puede utilizarse para describir un espacio tiempo cuya parte espacial se va expandiendo a medida que avanza el tiempo. Entonces, el parámetro de expansión será $a(t)$. Escogiendo coordenadas esféricas y comóviles para poder obviar el efecto de

la expansión (r, θ, ϕ) , la parte espacial del elemento de línea se reescribe como [2]

$$\gamma_{ij} = \delta_{ij} + k \frac{x_i x_j}{1 - k x_k x^k}, \quad (4)$$

donde k es la curvatura del espacio. La curvatura puede ser

$$k = \begin{cases} -1 & \text{si la geometría global es hiperbólica.} \\ 0 & \text{si la geometría global es plana.} \\ 1 & \text{si la geometría global es esférica.} \end{cases} \quad (5)$$

Los símbolos de Christoffel de esta métrica vienen dados por [2]

$$\Gamma_{ij}^0 = a\dot{a}\gamma_{ij}, \quad \Gamma_{0j}^i = \frac{\dot{a}}{a}\delta_j^i, \quad \Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2}\gamma^{il}(\partial_j\gamma_{kl} + \partial_k\gamma_{jl} - \partial_l\gamma_{jk}) \quad (6)$$

Si se considera un universo globalmente plano, el elemento de línea se reduce a

$$ds^2 = a^2(\tau) [d\tau^2 - \delta_{ij}dx^i dx^j], \quad (7)$$

donde τ es el tiempo conforme $d\tau = dt/a(t)$.

2.3. Universos con una única componente

Las ecuaciones de Einstein para la métrica del modelo Λ CDM solo se pueden resolver analíticamente con el tensor energía-momento correspondiente al de un fluido perfecto. Este viene dado por [1]

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)U_\mu U_\nu - P g_{\mu\nu}, \quad (8)$$

donde U_μ es la cuadrivelocidad, ρ es la densidad de energía, P es la presión y $g_{\mu\nu}$ es la métrica del espacio-tiempo. Aplicando la conservación del tensor energía momento:

$$\nabla_\mu T_\nu^\mu = \partial_\mu T_\nu^\mu + \Gamma_{\mu\lambda}^\mu T_\nu^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda T^{\mu\lambda} = 0, \quad (9)$$

con

$$T_\nu^\mu = g^{\mu\lambda} T_{\lambda\nu} = g^{\mu\lambda} (\rho + P) U_\lambda U_\nu - P g_{\lambda\nu} g^{\mu\lambda} = (\rho + P) U^\mu U_\nu - P \delta_\nu^\mu. \quad (10)$$

Se obtiene entonces que la conservación da lugar a

$$\begin{aligned} \nabla_\mu T_\nu^\mu &= \partial_\mu ((\rho + P) U^\mu U_\nu - P \delta_\nu^\mu) + \Gamma_{\mu\lambda}^\mu ((\rho + P) U^\lambda U_\nu - P \delta_\nu^\lambda) - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda ((\rho + P) U^\mu U_\lambda - P \delta_\lambda^\mu) \\ &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

que es un sistema de cuatro ecuaciones. La componente $\nu = 0$, reflejará las propiedades de la densidad de energía, ya que esta es un escalar. La conservación para esta componente se escribe

$$\nabla_\mu T_0^\mu = \partial_\mu T_0^\mu + \Gamma_{\mu\lambda}^\mu T_0^\lambda - \Gamma_{\mu 0}^\lambda T^{\mu\lambda} = 0. \quad (12)$$

Escogiendo un observador comóvil tal que $U^\mu = (1, 0, 0, 0)$, el tensor energía momento es diagonal y la ecuación para $\nu = 0$ se simplifica de la siguiente manera

$$\nabla_\mu T_0^\mu = \partial_0 T_0^0 + \Gamma_{\mu 0}^\mu T_0^0 - \Gamma_{\mu 0}^\lambda T^{\mu\lambda} = \partial_0 \rho(t) + \Gamma_{\mu 0}^\mu \rho(t) - \Gamma_{\mu 0}^\lambda T^{\mu\lambda}. \quad (13)$$

Introduciendo los valores de los símbolos de Christoffel (6), se obtiene finalmente

$$\boxed{\dot{\rho} + 3 \frac{\dot{a}}{a} (\rho + P) = 0}. \quad (14)$$

Ahora se van a estudiar los universos que tienen una única componente a partir de la ecuación (14)

2.3.1. Materia

En este apartado se estudiarán todas las formas de materia que cumplan $|P| \ll \rho$, de forma que la presión es mucho menor que la densidad de energía : materia oscura y materia bariónica. Haciendo esta aproximación en (14), se obtiene

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho = 0 \rightarrow \frac{d\rho}{\rho} \frac{1}{a} = -3\frac{da}{a} \frac{1}{a} \rightarrow \int \frac{d\rho}{\rho} = -3 \int \frac{da}{a} \rightarrow \ln(\rho) = -3 \ln(a) + k \quad (15)$$

$$\rho = k'a^{-3}.$$

De manera que $\rho \propto a^{-3}$. Este es un resultado muy intuitivo, ya que el volumen aumenta como $V \propto a^3$.

2.3.2. Radiación

Entrará dentro de la categoría de radiación toda componente en la que domine la energía cinética, de forma que el momento sea mucho mayor que la masa. Entonces formarán parte de la radiación los fotones, los neutrinos (cuando sean relativistas) y los gravitones. Para representar la radiación se escoge un gas de fotones en equilibrio, de forma que la presión es un tercio de la densidad de energía $P = \rho/3$. Introduciendo esto en (14)

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a} \left(\rho + \frac{1}{3}\rho \right) = 0 \rightarrow \frac{d\rho}{\rho} \frac{1}{a} = -4\frac{da}{a} \frac{1}{a} \rightarrow \rho = k'a^{-4}. \quad (16)$$

Así $\rho \propto a^{-4}$. En este caso, hay un factor a^{-1} más, que proviene de la disminución de la energía por partícula que provoca la expansión del universo (corrimiento al rojo).

2.3.3. Energía oscura

La componente que queda es la energía oscura, que en el modelo Λ CDM viene definida por tener una presión negativa $P = -\rho$. De esta manera (14) queda

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho - p) = 0 \rightarrow \rho = \text{constante} \quad (17)$$

Entonces $\rho \propto a^0$, que está de acuerdo con lo que se sabe de la energía oscura; su densidad no se diluye con la expansión del universo.

2.4. Resumen

Definiendo $\omega = -p/3 - 1$, donde p es la potencia que acompaña al factor de expansión, la densidad se escribe en función del factor de expansión como

$$\rho \propto a^{-3(1+\omega)} \quad \text{con} \quad \begin{cases} \omega = 0 & \text{para materia.} \\ \omega = \frac{1}{3} & \text{para radiación.} \\ \omega = -1 & \text{para energía oscura.} \end{cases} \quad (18)$$

Por la diferencia de escalas entre las diferentes componentes, se puede decir que en cada etapa del universo solo domina una de las componentes. Considerando esto último como cierto, se pueden estudiar los universos como si tuvieran una sola componente.

2.5. Función de Hubble

La ecuación de Friedmann para un universo con múltiples componentes se escribe [2]

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_r a^{-4} + \Omega_m a^{-3} + \Omega_k a^{-2} + \Omega_\Lambda, \quad (19)$$

donde se ha normalizado el factor de expansión en el momento en que la densidad de energía de materia y radiación son iguales como $a_0 \equiv 1$ y $H = \dot{a}/a$ se llama función de Hubble. La función de Hubble actualmente es [2]

$$H_0 = (68,0 \pm 1,4) \text{ kms}^{-1}\text{Mpc}^{-1}, \quad (20)$$

También es conveniente definir la función de Hubble adimensional, ya que aparecerá más adelante:

$$h = \frac{H}{100} \text{ kms}^{-1}\text{Mpc}^{-1} \rightarrow h_0 \simeq 0,7 \quad (21)$$

Entonces si hay una única componente, y se utiliza la definición del parámetro de Hubble $H = \dot{a}/a$, (19) se transforma en

$$\frac{\dot{a}}{a} = H_0 \sqrt{\Omega_c a^{-3(1+\omega_c)}} = H_0 \sqrt{\Omega_c} a^{-\frac{3}{2}(1+\omega_c)}. \quad (22)$$

Esta ecuación se puede integrar directamente. De esta forma

$$\frac{da}{dt} = H_0 \sqrt{\frac{\Omega_c}{a^{1+\omega_c}}} \rightarrow \int_{a_0}^a \sqrt{a^{(1+\omega_c)}} da = \int_0^t H_0 \sqrt{\Omega_c} dt, \quad (23)$$

entonces,

$$t \propto a^{\frac{3}{2}(1+\omega_c)} \rightarrow a \propto t^{\frac{2}{3(1+\omega_c)}} \quad (24)$$

Además, la función de Hubble puede escribirse como

$$H = H_0 \sqrt{\Omega_c} a^{-\frac{3}{2}(1+\omega_c)} \rightarrow H = \begin{cases} H_0 \sqrt{\Omega_m} a^{-\frac{3}{2}} & \text{para materia.} \\ H_0 \sqrt{\Omega_r} a^{-\frac{1}{2}} & \text{para radiación.} \\ H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda} & \text{para energía oscura.} \end{cases} \quad (25)$$

El radio comóvil de Hubble es un horizonte conceptual que define la frontera entre las partículas que se mueven más despacio y más rápido que la luz, con respecto de

un observador a un tiempo dado. El radio comóvil de Hubble viene dado por [2]

$$r_H(t) = \frac{1}{a(t)H(t)} \quad (26)$$

Para explicar la importancia del radio de Hubble es recomendable recordar el concepto de transformada de Fourier de una función. Esta se define como

$$f(\tau, k^i) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau, x^i) e^{-ik^i x^i} dx^3, \quad (27)$$

donde cada k es un modo. Cada modo está asociado con una longitud de onda $\lambda \propto 1/k$. Cuando un modo tiene una longitud de onda tal que $k < H$ se dice que es subhorizonte, y cuando $k > H$ se dice que es superhorizonte. Cuando un modo es subhorizonte su longitud de onda es mayor que el radio de Hubble, de forma que ninguna física causal puede afectarlo: permanece constante. Por otro lado, cuando un modo es superhorizonte la longitud de onda es menor que el radio de Hubble y puede evolucionar debido a la física causal que esté ocurriendo.

El radio de Hubble en el presente es

$$r_H(t_0) \sim \frac{1}{H_0} \sim 4,1 \text{ Gpc}. \quad (28)$$

3. Perturbaciones escalares

La materia del universo está ordenada en estructuras. Desde estructuras pequeñas como los planetas, las estrellas y las pequeñas agrupaciones; estructuras intermedias como las galaxias; hasta estructuras grandes como los cúmulos y súper cúmulos de galaxias. Estas estructuras provienen de la inestabilidad gravitatoria. Cuando hay una región del espacio más densa, la gravedad hace que la materia se vea atraída hacia ella, añadiendo más densidad a dicha región. Al mismo tiempo, la repela la presión en esta región. Si la región es suficientemente densa, la gravedad gana y la densidad va aumentando con el tiempo. Esto esquemáticamente se puede

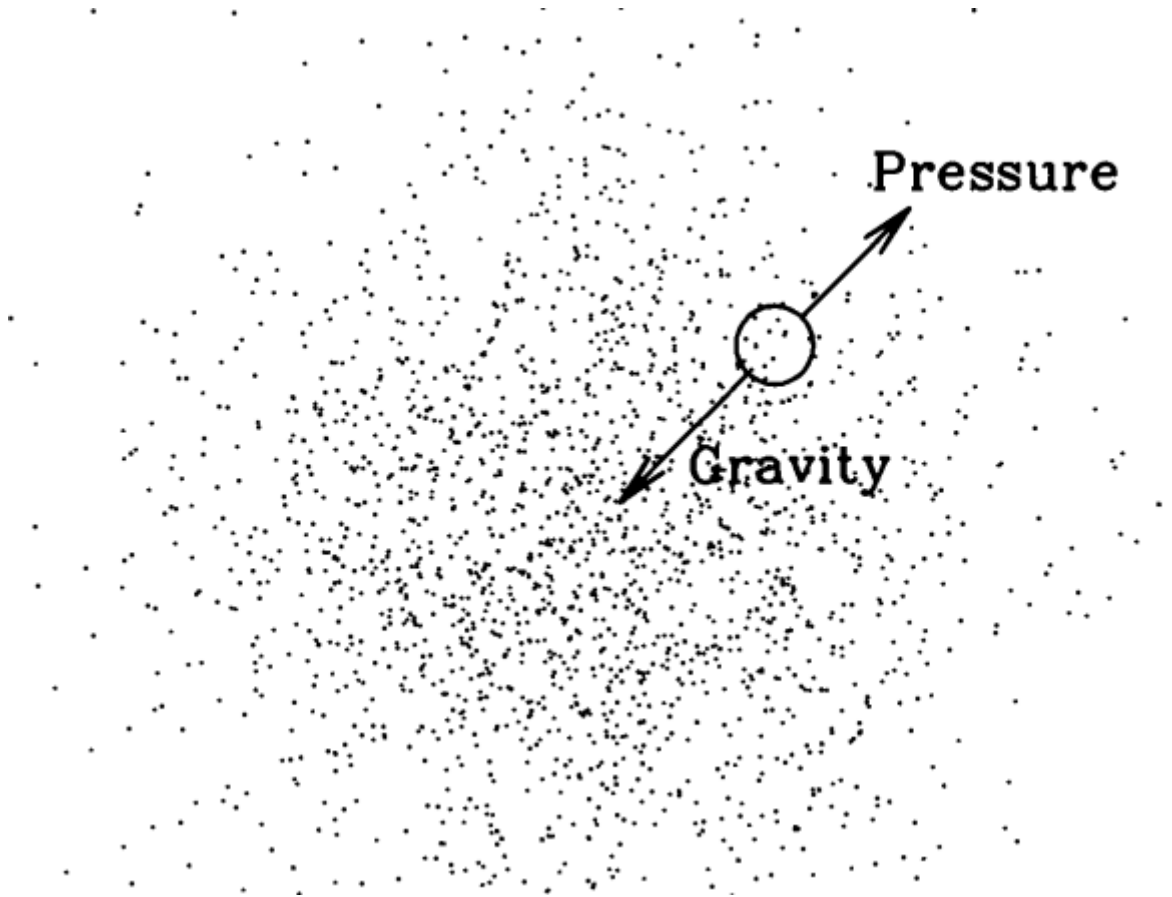


Figura 2: Inestabilidad gravitatoria [4]

escribir como [4]

$$\ddot{\delta} + (\text{presión} - \text{gravedad}) \delta = 0, \quad (29)$$

donde δ se denomina contraste de densidad, y su definición será introducida más adelante. Por eso, es de esperar que las estructuras crezcan más rápido cuando domina materia que cuando domina radiación.

Ya se ha hablado de que inflación es una hipótesis que resuelve muchos problemas de la cosmología actual. Esta establece las condiciones iniciales del universo. Si inflación se caracteriza mediante un campo cuántico ϕ , entonces por el principio de incertidumbre, éste tendrá que tener fluctuaciones $\phi(x) = \bar{\phi}(x) + \delta\phi(x)$. De hecho, las fluctuaciones en la temperatura del fondo cósmico de microondas requieren algún tipo de fluctuaciones primordiales [3].

Estas fluctuaciones primordiales se transmitirán a la densidad de energía, las cuales a su vez, serán “estiradas” en el proceso de inflación, convirtiéndose en perturbaciones macroscópicas. Será entonces cuando las heterogeneidades crecerán gracias a la inestabilidad gravitatoria. Las heterogeneidades se harán más grandes que el radio de Hubble, haciendo que estas salgan del horizonte y se congelen hasta volver a entrar, ya que una perturbación que sale del horizonte no puede verse afectada por ninguna física causal. Estas deberían volver a entrar en el horizonte cuando el universo tiene una edad de 100000 años, que es poco después del desacople de los fotones. Dentro del horizonte la física causal sí que puede afectar a amplitud de las perturbaciones, lo que da lugar a un pico en el fondo cósmico de microondas y al colapso de las fluctuaciones de alta densidad. De este colapso surgen las estructuras a gran escala que pueden observarse en el universo tardío: galaxias, cúmulos de galaxias y supercúmulos de galaxias [3].

3.1. Métrica de Robertson-Walker perturbada

Para estudiar las perturbaciones de la densidad que dan lugar a la creación de estructuras en el universo se van a considerar pequeñas perturbaciones en la métrica. Considerando una perturbación en el espacio tiempo, la métrica total es

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}, \quad (30)$$

donde $\bar{g}_{\mu\nu}$ es la métrica del fondo y $\delta g_{\mu\nu}$ es la perturbación. La perturbación puede representarse mediante una matriz simétrica 4×4 , de forma que se puede escribir en función de sus diez parámetros independientes como

$$-a^2(\tau) \begin{pmatrix} -2\psi & B_1 & B_2 & B_3 \\ B_1 & h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ B_2 & h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ B_3 & h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix}. \quad (31)$$

De manera similar al Teorema de Helmholtz, un tensor simétrico (3×3) se puede escribir en una suma de dos grados de libertad escalares, uno vectorial y uno tensorial [5]. De esta manera el tensor h_{ij} se escribe [2]

$$h_{ij} = 2\phi\delta_{ij} + 2\partial_{(i}\partial_{j)}E + 2\partial_{(i}\hat{E}_{j)} + 2E_{ij}, \quad (32)$$

donde [2]

$$\partial_{(i}\partial_{j)}E = \left(\partial_i\partial_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\nabla^2 \right) E \quad \text{y} \quad \partial_{(i}\hat{E}_{j)} = \frac{1}{2} \left(\partial_i\hat{E}_j + \partial_j\hat{E}_i \right) \quad (33)$$

De esta manera el tensor h_{ij} tiene once grados de libertad: dos provenientes de los escalares ϕ y E , tres del vector \hat{E} y 6 del tensor \hat{E}_{ij} . Con las condiciones añadidas $\partial^i\hat{E}_i = 0$, $\partial_i\hat{E}_{ij} = 0$ y $\hat{E}_i^i = 0$ [2], se recuperan los seis grados de libertad corres-

pondientes a un tensor simétrico representado por una matriz 3×3 . El elemento de línea de la perturbación se escribe

$$ds^2 = a^2(\tau) (2\phi d\tau^2 - 2B_i d\tau dx^i - h_{ij} dx^i dx^j) \quad (34)$$

Sea la métrica del fondo la de Robertson-Walker con curvatura nula (7), el elemento de línea para la métrica total se escribe

$$ds^2 = a^2(\tau) [(1 + 2\psi) d\tau^2 - 2B_i dx^i d\tau - (\delta_{ij} - h_{ij}) dx^i dx^j]. \quad (35)$$

Dado que hay invarianza bajo rotaciones, las perturbaciones con diferente helicidad no se mezclan a primer orden. Por eso, se pueden estudiar las perturbaciones escalares, vectoriales y tensoriales por separado [3]. En este trabajo se van a estudiar tan sólo las escalares, que son aquellas que producen las inhomogeneidades en la densidad de energía.

Además, imponiendo el gauge Newtoniano, en el que $E = B = 0$ [2], el elemento de línea (35) se reescribe como

$$ds^2 = a^2(\tau) [(1 + 2\psi) d\tau^2 - (1 - 2\phi) \delta_{ij} dx^i dx^j]. \quad (36)$$

3.2. Símbolos de Christoffel perturbados

El elemento de línea de la métrica tenía la forma

$$ds^2 = a(\tau)^2 [(1 + 2\psi) d\tau^2 - (1 - 2\phi) \delta_{ij} dx^i dx^j] \quad (37)$$

y los símbolos de Christoffel se definen como [2]

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\rho} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) \quad (38)$$

La métrica es diagonal, por lo que solo podrán ser no nulos aquellos símbolos que tengan, por lo menos $\mu = \nu$, $\nu = \alpha$ o $\mu = \alpha$. Así los símbolos de Christoffel no nulos son:

$$\begin{aligned}\Gamma_{00}^0 &= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_0 g_{00}) = \frac{1}{2a^2}(1-2\psi)\partial_\tau a^2(1+2\psi) = \frac{1}{a^2}(1-2\psi)a(1+2\psi+a\psi') \\ &= \frac{1}{a}(1+2\psi+a\psi'-2\psi) + \mathcal{O}(\psi^2) = \mathcal{H} + \psi' + \mathcal{O}(2)\end{aligned}\quad (39)$$

$$\Gamma_{0i}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_i g_{00}) = \frac{1}{2a^2}(1-2\psi)\partial_i a^2(1+2\psi) = \partial_i \psi + \mathcal{O}(2)\quad (40)$$

$$\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2}g^{ij}(-\partial_j g_{00}) = \frac{1}{2a^2}(1+2\psi)\partial_j a^2(1+2\psi)\delta^{ij} = \partial^i \psi + \mathcal{O}(2)\quad (41)$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij}^0 &= \frac{1}{2}g^{00}(-\partial_0 g_{ij}) = \frac{1}{2a^2}(1-2\psi)\partial_\tau a^2(1-2\phi)\delta_{ij} = \frac{1}{a}(1-2\psi)(1-2\phi-a\phi')\delta_{ij} \\ &\quad \frac{1}{a}(1-2\psi-2\phi-a\phi')\delta_{ij} = [\mathcal{H}(1-2\phi-2\psi)-\phi']\delta_{ij} + \mathcal{O}(2)\end{aligned}\quad (42)$$

$$\Gamma_{j0}^i = \frac{1}{2}g^{ik}(\partial_0 g_{jk}) = \frac{1}{2a^2}(1+2\phi)\partial_\tau a^2(1-2\phi)\delta^{ik}\delta_{jk} = (\mathcal{H}-\phi')\delta_j^i + \mathcal{O}(2)\quad (43)$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{jk}^i &= \frac{1}{2}g^{ii}(\partial_j g_{ki} + \partial_k g_{ji} - \partial_i g_{jk}) = \frac{1}{2a^2}(1+2\phi)[\partial_j(1-2\phi)\delta_{ki} + \partial_k(1-2\phi)\delta_{ji} - \partial_i(1-2\phi)\delta_{jk}] \\ &= -2\delta_{(j}^i \partial_{k)}\phi + \delta_{jk}\partial^i\phi + \mathcal{O}(2).\end{aligned}\quad (44)$$

3.3. Tensor momento-energía perturbado

Como se ha dicho, el tensor momento-energía que resuelve las ecuaciones de Einstein deforma analítica para un universo FLRW es el correspondiente al de un fluido perfecto, de forma que tensor momento energía del fondo será

$$\bar{T}_\nu^\mu = (\bar{\rho} + \bar{P})\bar{U}^\mu\bar{U}_\nu - P\delta_\nu^\mu, \quad (45)$$

donde \bar{U}^μ es la cuadrivelocidad del fluido del fondo. El tensor momento-energía total vendrá dado por la suma del tensor del fondo y su perturbación [2]

$$T_\nu^\mu = \bar{T}_\nu^\mu + \delta T_\nu^\mu, \quad (46)$$

donde δT_ν^μ es el tensor momento-energía de la perturbación. La perturbación del tensor energía-momento es [2]

$$\delta T_\nu^\mu = (\delta\bar{\rho} + \delta\bar{P}) U^\mu U_\nu + (\bar{\rho} + \bar{P}) [(\delta U^\mu) \bar{U}_\nu + \bar{U}^\mu (\delta U_\nu)] - \delta P_\nu^\mu. \quad (47)$$

Como la cuadrivelocidad es un cuadvivector de tipo temporal, se considera que está normalizado a la unidad como $g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = \bar{g}_{\mu\nu} \bar{U}^\mu \bar{U}^\nu = 1$. Entonces la perturbación de la norma se puede obtener como

$$\begin{aligned} \delta(\bar{g}_{\mu\nu} \bar{U}^\mu \bar{U}^\nu) &= (\delta\bar{g}_{\mu\nu}) \bar{U}^\mu \bar{U}^\nu + \bar{g}_{\mu\nu} ((\delta\bar{U}^\mu) \bar{U}^\nu + (\delta\bar{U}^\nu) \bar{U}^\mu) = (\delta\bar{g}_{\mu\nu}) \bar{U}^\mu \bar{U}^\nu + 2(\delta\bar{U}^\mu) \bar{U}_\mu \\ &= 0. \end{aligned} \quad (48)$$

Tomando un observador comóvil, $\bar{U}^\mu = a(\tau)^{-1} \delta_0^\mu$, y $\delta g_{00} = 2a(\tau)^2 \psi$ de (36), entonces

$$\delta g_{00} a(\tau)^{-2} + 2a(\tau) \delta U^0 = 2\psi + 2a\delta U^0 = 0 \rightarrow \delta U^0 = -\psi a^{-1}. \quad (49)$$

Escribiendo $\delta U^i = a^{-1} v^i$ y $\delta U^\mu = a(\tau)^{-1} (-\psi, v^i)$,

$$\delta U^\mu = U^\mu - \bar{U}^\mu \rightarrow U^\mu = \delta U^\mu + \bar{U}^\mu = a^{-1} (1 - \psi, v^i). \quad (50)$$

Y entonces a primer orden en la perturbación

$$\begin{aligned} U_\mu &= U^\nu g_{\nu\mu} = (U^\nu g_{\nu 0}, U^\nu g_{\nu i}) = (U^0 g_{00} + U^i g_{0i}, U^i g_{i0} + U^i g_{ij}) \\ &= (a^2 (i + 2\psi) a^{-1} (1 - \psi), -a^2 \delta_{ij} a^{-1} v^j) = (a(1 + \psi), -av_i) = a(1 + \psi, -v_i) \end{aligned} \quad (51)$$

De esta manera, utilizando (51) se obtiene

$$\delta U_\mu = U_\mu - \bar{U}_\mu = a(\psi, -v_i). \quad (52)$$

Finalmente la perturbación del tensor momento-energía resulta ser

$$\begin{aligned}\delta T_0^0 &= (\delta\rho + \delta P) \bar{U}^0 \bar{U}_0 + (\bar{\rho} + \bar{P}) [(\delta U^0) \bar{U}_0 + \bar{U}^0 (\delta U_0)] - P\delta_0^0 \\ &= \delta\rho + (\bar{\rho} + \bar{P}) [-\psi a^{-1} a + a^{-1} a\psi] = \delta\rho\end{aligned}\quad (53)$$

$$\begin{aligned}\delta T_i^0 &= (\delta\rho + \delta P) \bar{U}^0 \bar{U}_i + (\bar{\rho} + \bar{P}) [(\delta U^0) \bar{U}_i + \bar{U}^0 (\delta U_i)] - P\delta_i^0 = (\bar{\rho} + \bar{P}) [-a^{-1} a v_i] \\ &= -v_i (\bar{\rho} + \bar{P})\end{aligned}\quad (54)$$

$$\begin{aligned}\delta T_0^i &= (\delta\rho + \delta P) \bar{U}^i \bar{U}_0 + (\bar{\rho} + \bar{P}) [(\delta U^i) \bar{U}_0 + \bar{U}^i (\delta U_0)] = (\bar{\rho} + \bar{P}) [a^{-1} v_i a] \\ &= v_i (\bar{\rho} + \bar{P})\end{aligned}\quad (55)$$

$$\delta T_j^i = -\delta P \delta_j^i \quad (56)$$

3.3.1. Conservación del tensor momento-energía perturbado

Una vez obtenida la perturbación del tensor momento-energía ya se pueden calcular las ecuaciones que se obtienen de la conservación del tensor completo. La ecuación de conservación para el tensor energía-momento

$$\nabla_\mu T_\nu^\mu = 0, \quad (57)$$

que son cuatro ecuaciones. Para $\nu = 0$

$$\begin{aligned}\nabla_\mu T_0^\mu &= \partial_\mu T_0^\mu + \Gamma_{\mu\alpha}^\mu T_0^\alpha - \Gamma_{\mu 0}^\alpha T_\alpha^\mu = 0 \\ &= \partial_0 T_0^0 + \partial_i T_0^i + \Gamma_{00}^0 T_0^0 + \Gamma_{0i}^0 T_0^i + \Gamma_{i0}^i T_0^0 + \Gamma_{ij}^i T_0^j - \Gamma_{00}^0 T_0^0 - \Gamma_{0i}^0 T_0^i - \Gamma_{00}^i T_0^0 - \Gamma_{j0}^i T_0^j \\ &= \partial_0 T_0^0 + \partial_i T_0^i + \Gamma_{i0}^i T_0^0 + \mathcal{O}(2) \\ &= \partial_\tau (\bar{\rho} + \bar{P} + \delta\rho) + \partial_i [v_i (\bar{\rho} + \bar{P})] + (3\mathcal{H} - 3\phi') (\delta\rho + \bar{\rho} + \bar{P}) + \mathcal{O}(2).\end{aligned}\quad (58)$$

Entonces a primer orden se obtiene

$$\bar{\rho}' + \delta\rho' + \partial^i q_i + 3\mathcal{H} (\delta\rho + \bar{\rho} + \bar{P} + \delta P) - 3\phi' \bar{\rho} = 0, \quad (59)$$

donde $q_i = \bar{\rho}v_i$ es la densidad de momento lineal. Considerando ahora los términos de orden cero y orden uno por separado se obtiene el siguiente sistema

$$\begin{cases} \bar{\rho}' = -3\mathcal{H}(\bar{\rho} + \bar{P}) \\ \delta\rho' = 3\phi'(\bar{\rho} + \bar{P}) - 3\mathcal{H}(\delta\rho + \delta P) - \partial^i q_i, \end{cases} \quad (60)$$

donde la primera representa la conservación del tensor momento energía correspondiente al fondo, y la segunda describe a primer orden la evolución de las perturbaciones en la densidad. Para llegar a la ecuación de Meszaros, que se estudiará al final de esta sección, es conveniente introducir el contraste de densidad

$$\delta = \frac{\delta\rho}{\bar{\rho}}. \quad (61)$$

Introduciendo la definición (61) en la segunda ecuación de (60) se obtiene

$$\boxed{\delta' + \left(1 + \frac{\bar{P}}{\bar{\rho}}\right) (\partial^i v_i - 3\phi') + 3\mathcal{H} \left(\frac{\delta P}{\delta\rho} - \frac{\bar{P}}{\bar{\rho}}\right) = 0}. \quad (62)$$

Las tres ecuaciones restantes, $\nu = i$, dan

$$\begin{aligned} \nabla_\mu T_i^\mu &= \partial_\mu T_i^\mu + \Gamma_{\mu\alpha}^\mu T_i^\alpha - \Gamma_{\mu i}^\alpha T_\alpha^\mu = \partial_0 T_i^0 + \partial_j T_i^j + \Gamma_{00}^0 T_i^0 + \Gamma_{0j}^0 T_i^j - \Gamma_{0i}^0 T_0^0 - \Gamma_{ij}^0 T_0^j = 0 \\ &= \partial_\tau(-q_i) - \partial_i(\delta P)(\mathcal{H} + \psi')(-q_i) - (\partial_i \psi)(\bar{\rho} + \delta\rho) - 3[\mathcal{H}(1 - 2\phi - 2\psi) - \phi']q_i \\ &= -q_i' - \mathcal{H}q_i - \partial_i \psi \bar{\rho} - 3\mathcal{H}q_i + \mathcal{O}(2). \end{aligned}$$

De forma que a primer orden en la perturbación se obtiene

$$q_i' + 4\mathcal{H}q_i + \bar{\rho}\partial_i \psi = 0. \quad (63)$$

Introduciendo de nuevo la definición de densidad de momento lineal, se llega finalmente a

$$\boxed{v'_i + \mathcal{H}v_i = -\partial_i\psi} \quad (64)$$

3.4. Ecuaciones de Einstein perturbadas

3.4.1. Tensor de Ricci perturbado

Para obtener las ecuaciones de Einstein correspondientes a la métrica perturbada será necesario obtener el tensor de Ricci y el escalar de Ricci. El tensor de Ricci es [2]

$$R_{\mu\nu} = \partial_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha + \Gamma_{\alpha\rho}^\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \Gamma_{\mu\alpha}^\rho \Gamma_{\nu\rho}^\alpha \quad (65)$$

Las componentes no nulas del tensor de Ricci son

$$\begin{aligned} R_{00} &= \partial_\alpha \Gamma_{00}^\alpha - \partial_0 \Gamma_{0\alpha}^\alpha + \Gamma_{\alpha\rho}^\alpha \Gamma_{00}^\rho - \Gamma_{0\alpha}^\rho \Gamma_{0\rho}^\alpha \\ &= \partial_i \Gamma_{00}^i - \partial_0 \Gamma_{0i}^i + \Gamma_{i0}^i \Gamma_{00}^0 - \Gamma_{0j}^i \Gamma_{0i}^j + \mathcal{O}(2) \\ &= \nabla^2 \psi - 3\mathcal{H}' + 3\phi'' + 3\mathcal{H}(\psi' + \phi') + \mathcal{O}(2) \\ R_{0i} &= \partial_\alpha \Gamma_{0i}^\alpha - \partial_i \Gamma_{0\alpha}^\alpha + \Gamma_{\alpha\rho}^\alpha \Gamma_{0i}^\rho - \Gamma_{0\alpha}^\rho \Gamma_{i\rho}^\alpha \\ &= \partial_0 \Gamma_{0i}^0 + \partial_j \Gamma_{0i}^j - \partial_i \Gamma_{00}^0 - \partial_i \Gamma_0^{ij} + \Gamma_{j0}^j \Gamma_{0i}^0 - \Gamma_{00}^j \Gamma_{ji}^0 + \mathcal{O}(2) \\ &= 2\partial_i \phi' + 2\mathcal{H}\partial_i \psi \\ R_{ij} &= \partial_\alpha \Gamma_{ij}^\alpha - \partial_j \Gamma_{i\alpha}^\alpha + \Gamma_{\alpha\rho}^\alpha \Gamma_{ij}^\rho - \Gamma_{i\alpha}^\rho \Gamma_{j\rho}^\alpha \\ &= \partial_\tau [\mathcal{H} - \phi' - 2\mathcal{H}(\phi + \psi)] \delta_{ij} + \partial_k (-2\delta_{(i}^k \partial_{j)} \phi + \delta_{ij} \partial^k \phi) - \partial_j (\partial_i \psi) - \partial_j (-2\delta_{(i}^k \partial_{k)} \phi + \delta_{ik} \partial^k \phi) \\ &\quad + (\mathcal{H} + \psi') [\mathcal{H}\delta_{ij} - \phi' - 2\mathcal{H}(\psi + \phi)] \delta_{ij} + 3(\mathcal{H} - \phi') [\mathcal{H}\delta_{ij} - \phi' - 2\mathcal{H}(\psi + \phi)] \delta_{ij} \\ &\quad - 3(\mathcal{H}\delta_i^k - \phi'\delta_i^k) (\mathcal{H} - \phi' + 2\phi + 2\psi) \delta_{jk} + \mathcal{O}(2) \\ &= [\mathcal{H}' - \phi'' + \nabla^2 \phi - 2(\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)(\phi + \psi) + \mathcal{H}(2\mathcal{H} - \psi' - 5\phi')] \delta_{ij} + \partial_i \partial_j (\phi - \psi) + \mathcal{O}(2). \end{aligned} \quad (66)$$

3.4.2. Escalar de Ricci perturbado

El escalar de Ricci se define como [2]

$$R = R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}. \quad (67)$$

Como la métrica es diagonal

$$\begin{aligned} R &= R_{00}g^{00} + R_{ij}g^{ij} \\ &= [\nabla^2\psi - 3\mathcal{H}' + 3\phi'' + 3\mathcal{H}(\psi' + \phi')] \frac{(1 - 2\psi)}{a(\tau)^2} + \{[\mathcal{H}' - \phi'' + \nabla^2\phi - 2(\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)(\phi + \psi) \\ &\quad + \mathcal{H}(2\mathcal{H} - \psi' - 5\phi')] \delta_{ij} + \partial_i\partial_j(\phi - \psi)\} \frac{-(1 + 2\phi)}{a^2} \delta^{ij} \\ &= \frac{1}{a^2} (2\nabla^2\psi - 4\nabla^2\phi - 6\mathcal{H}' + 6\phi'' + 6\mathcal{H}\psi' + 18\mathcal{H}\phi' + 12\mathcal{H}'\psi + 12\mathcal{H}^2\psi - 6\mathcal{H}^2) + \mathcal{O}(2). \end{aligned} \quad (68)$$

Entonces a primer orden en la perturbación el escalar de Ricci es

$$R = \frac{2}{a^2} [\nabla^2(\psi - 2\phi) + 3\phi'' + 3\mathcal{H}(\psi' + 3\phi') + 3\mathcal{H}'(2\psi - 1) + 3\mathcal{H}^2(2\psi - 1)]. \quad (69)$$

3.4.3. Tensor de Einstein perturbado

Finalmente, el tensor de Einstein es [2]

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}. \quad (70)$$

Introduciendo entonces (66) y (69) en su definición se obtiene que las componentes no nulas del tensor de Einstein son las siguientes:

$$G_{00} = R_{00} - \frac{1}{2}Rg_{00} \quad (71)$$

$$\begin{aligned} &= \nabla^2\psi - 3\mathcal{H}' + 3\phi'' + 3\mathcal{H}(\psi' + \phi') - [\nabla^2(\psi - 2\phi) + 3\phi'' + 3\mathcal{H}(\psi' + 3\phi') \\ &\quad + 3\mathcal{H}^2(2\psi - 1)](1 + 2\psi) \\ &= -6\mathcal{H}\phi' + 2\nabla^2\phi + 3\mathcal{H}^2 \end{aligned}$$

$$G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R$$

$$\begin{aligned} &= [\mathcal{H}' - \phi'' + \nabla^2\phi - 2(\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)(\phi + \psi) + \mathcal{H}(2\mathcal{H} - \psi' - 5\phi')] \delta_{ij} + \partial_i\partial_j(\phi - \psi) + \\ &\quad [\nabla^2(\psi - 2\phi) + 3\phi'' + 3\mathcal{H}(\psi' + 3\phi') + 3\mathcal{H}'(2\psi - 1) + 3\mathcal{H}^2(2\psi - 1)](1 - 2\phi) \delta_{ij} \\ &= [\nabla^2(\psi - \phi) + 2\phi'' + \mathcal{H}(-\mathcal{H} + 2\mathcal{H}\psi + 2\mathcal{H}\phi + 2\psi' + 2\phi') + \mathcal{H}'(-2 + 4\psi + 4\phi)] \delta_{ij} \\ &\quad + \partial_i\partial_j(\phi - \psi) \end{aligned}$$

$$G_{i0} = R_{i0}$$

$$= 2\partial_i(\phi' + \mathcal{H}\psi).$$

3.4.4. Ecuaciones de Einstein perturbadas

Ahora que se han obtenido tanto el tensor de Einstein como el tensor momento-energía se pueden estudiar las ecuaciones de Einstein [2]

$$G_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu}, \quad (72)$$

donde $\chi = 8\pi$. Como el tensor momento-energía se corresponde con el de un fluido perfecto, no hay estrés anisótropo. Es por esto que se puede considerar que la diferencia entre los potenciales ϕ y ψ es lo suficientemente pequeña como para tomar

$\phi \equiv \psi$. Esto se obtendrá de las propias ecuaciones. Comenzando por $\nu = \mu = 0$,

$$\begin{aligned} G_{00} &= \chi T_{00} \\ 3\mathcal{H}^2 + 2\nabla^2\phi - 6\mathcal{H}\phi' &= \chi(\bar{\rho} + \delta\rho)(1 + 2\phi)a^2 \\ &= \chi(\bar{\rho} + \delta\rho + 2\phi\bar{\rho}) + \mathcal{O}(2), \end{aligned}$$

que a orden cero en las perturbaciones da la ecuación de Friedmann para el fondo

$$\mathcal{H}^2 = \frac{8\pi}{3}a^2\bar{\rho}. \quad (73)$$

Mientras que a orden lineal en las perturbaciones se obtiene

$$\nabla^2\phi - 3\mathcal{H}\phi' = 4\pi a^2(2\bar{\rho}\phi + \delta\rho) \quad (74)$$

Utilizando (73) se obtiene

$$\nabla^2\phi - 3\mathcal{H}(\phi' + \mathcal{H}\phi) = 4\pi a^2\delta\rho \quad (75)$$

Continuando con la componente diagonal,

$$\begin{aligned} G_{0i} &= \chi T_{0i} \\ 2\partial_i(\phi' + \mathcal{H}\psi) &= -\chi a^2 q_i \\ \partial_i(\phi' + \mathcal{H}\psi) &= -4\pi a^2(\bar{\rho} + \bar{P})\partial_i v. \end{aligned}$$

Entonces, integrando

$$\phi' + \mathcal{H}\phi = -4\pi a^2(\bar{\rho} + \bar{P})v. \quad (76)$$

Finalmente, para $i \neq j$

$$\begin{aligned} G_{ij} &= \chi \partial_i \partial_j (\phi - \psi) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{77}$$

De aquí $\phi = \psi$. Y para $i = j$ se puede tomar la traza para tratar con un escalar:

$$\begin{aligned} G_i^i &= \chi T_i^i \\ \frac{1 + 2\phi}{a^2} (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2 - 2\phi'' + 6\mathcal{H}\phi' + 8\mathcal{H}'\phi + 4\mathcal{H}^2\phi) &= -8\pi (\bar{P} + \delta P), \end{aligned}$$

que a orden cero en las perturbaciones da la segunda ecuación de Friedmann para el fondo con un fluido con presión \bar{P} :

$$2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2 = -8\pi a^2 \bar{P}. \tag{78}$$

Y a primer orden en las perturbaciones se obtiene

$$\phi'' + 3\mathcal{H}\phi' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2) \phi = 4\pi a^2 \delta P \tag{79}$$

3.5. Evolución del potencial gravitatorio

Para las perturbaciones adiabáticas se definen la ecuación de estado y la velocidad del sonido como

$$\omega = \frac{\bar{P}}{\bar{\rho}} \quad \text{y} \quad c_s^2 = \frac{\delta P}{\delta \rho} \tag{80}$$

respectivamente. Para obtener una ecuación cerrada para la el potencial ϕ , se introduce la velocidad del sonido en (79), que está también relacionada con (75) y se

obtiene así

$$\phi'' + 3\mathcal{H}\phi' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\phi = c_s^2 [\nabla^2\phi - 3\mathcal{H}(\phi' + \mathcal{H}\phi)]. \quad (81)$$

Simplificando se obtiene

$$\phi'' + 3\mathcal{H}(1 + c_s^2)\phi' + 2\mathcal{H}'\phi + \mathcal{H}^2(1 + 3c_s^2)\phi = c_s^2\nabla^2\phi. \quad (82)$$

Para terminar de simplificar la ecuación de evolución se combinan las ecuaciones de Friedmann que se han obtenido en el apartado anterior para obtener

$$\omega = -\frac{1}{3} \left(1 + \frac{2\mathcal{H}'}{\mathcal{H}^2} \right) \rightarrow 2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2 = -3\omega\mathcal{H}^2. \quad (83)$$

Y finalmente

$$\phi'' + 3\mathcal{H}(1 + c_s^2)\phi' + 3\mathcal{H}^2(c_s^2 - \omega)\phi = c_s^2\nabla^2\phi, \quad (84)$$

que en el espacio de Fourier se escribe

$$\phi'' + 3\mathcal{H}(1 + c_s^2)\phi' + 3\mathcal{H}^2(c_s^2 - \omega)\phi = c_s^2k^2\phi \quad (85)$$

Si las perturbaciones son adiabáticas $c_s^2 \simeq \omega$. Así, (85) se transforma en

$$\phi'' + 3(1 + \omega)\mathcal{H}\phi' + \omega k^2\phi = 0. \quad (86)$$

Ahora se puede estudiar la evolución del potencial gravitatorio ϕ en las diferentes etapas.

3.5.1. Universo dominado por radiación

Cuando domina radiación $\omega = 1/3$, de forma que (86) toma la forma

$$\phi'' + \frac{4}{\tau}\phi' + \frac{k^2}{3}\phi = 0, \quad (87)$$

cuya solución es

$$\phi_k(\tau) = A_k \frac{j_1(x)}{x} + B_k \frac{n_1(x)}{x}, \quad \text{donde } x \equiv \frac{1}{\sqrt{3}}k\tau, \quad (88)$$

y $j_1(x)$ y $n_1(x)$ son las funciones de primera especie esféricas de Bessel y Neumann respectivamente. Como $n_1(x)$ diverge en $x \rightarrow 0$, B_k tiene que ser cero. Usando $A_k = 3\phi(\tau = 0)$

$$\phi_k(\tau) = 3\phi(0) \left(\frac{\sin x - x \cos x}{x^2} \right) \quad (89)$$

Para $x \ll 1$, ϕ es constante. De esto se puede concluir que en escalas de superhorizonte el potencial está congelado. Por otro lado, para $x \gg 1$

$$\phi_k(\tau) \approx 9\phi(0) \frac{\cos(1/\sqrt{3}k\tau)}{(k\tau)^2} \quad (90)$$

Mientras que en escalas de subhorizonte el potencial oscila con una frecuencia $\omega = k/\sqrt{3}$, y con una amplitud que decae como τ^{-2} . La amplitud de los modos que entran en el horizonte decae rápidamente, y el resto de los modos son constantes.

3.5.2. Universo dominado por materia

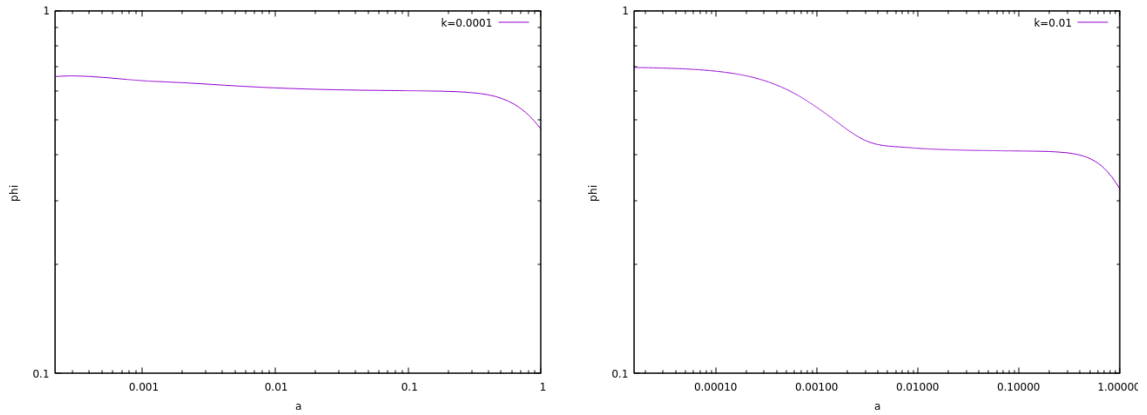
Por otro lado, cuando domina la materia $w = 0$, entonces (86) se escribe

$$\phi'' + 6\frac{\phi'}{\tau} = 0, \quad (91)$$

cuya solución es

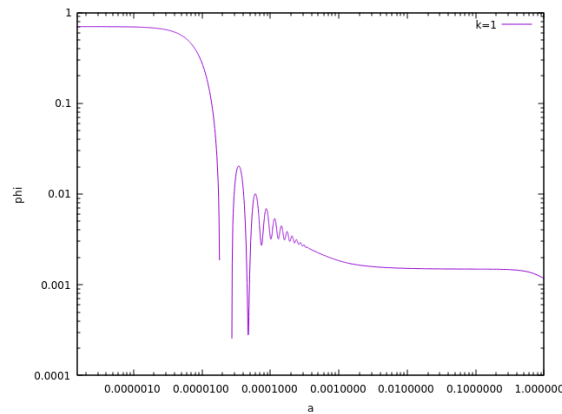
$$\phi = A + B\tau^{-5}. \quad (92)$$

Entonces, se puede decir que cuando domina la materia el potencial gravitatorio no evoluciona sea cual sea la escala.



(a) Potencial ϕ cuando $k = 0,0001$

(b) Potencial ϕ cuando $k = 0,01$



(c) Potencial ϕ cuando $k = 1$

Figura 3: Representaciones de varios modos del potencial [6].

4. Perturbaciones producidas por la materia oscura

De las ecuaciones de conservación del tensor energía-momento, (62) y (64)

$$\begin{cases} \delta' + (1 + \omega) (\partial^i v_i - 3\phi') + 3\mathcal{H} (c_s^2 - \omega) = 0 \\ v'_i + \mathcal{H}v_i = -\partial_i\phi \end{cases} . \quad (93)$$

Si además las perturbaciones son adiabáticas, $c_s^2 = \omega$ y (93) queda

$$\begin{cases} \delta' + (1 + \omega) (\partial^i v_i - 3\phi') = 0 \\ v'_i + \mathcal{H}v_i = -\partial_i\phi \end{cases} . \quad (94)$$

4.1. Materia y radiación

En tiempos tempranos el universo estaba dominado por una mezcla de radiación y materia, siendo la mayoría de esta materia oscura. Se ha estudiado la evolución del potencial gravitatorio, y se ha visto que cuando domina materia el potencial está congelado. Por otro lado, cuando domina radiación los modos decaen rápidamente al entrar en el horizonte, ya que su amplitud decae como τ^{-2} . Es por eso que el término que contiene la derivada temporal del potencial podrá desprejarse, ya que o será nulo (modos constantes) o pequeño en comparación (potencia negativa). Así

$$\begin{cases} \delta' + (1 + \omega) \partial^i v_i = 0 \\ v'_i + \mathcal{H}v_i = -\partial_i\phi \end{cases} . \quad (95)$$

Derivando con respecto del tiempo la primera ecuación de (95)

$$\delta'' + (1 + \omega) \bar{\nabla} \bar{v}' = 0, \quad (96)$$

e introduciendo una derivada parcial espacial en la segunda ecuación de (97)

$$\bar{\nabla} \bar{v}' = -\mathcal{H} \bar{\nabla} \bar{v} = -\nabla^2 \phi. \quad (97)$$

Introduciendo (97) en (96) se obtiene

$$\delta'' - (1 + \omega) (\mathcal{H} \bar{\nabla} \bar{v} + \nabla^2 \phi) = 0. \quad (98)$$

Recordando $\delta' = -(1 + \omega) \bar{\nabla} \bar{v}$, finalmente

$$\delta'' + \mathcal{H} \delta' - (1 + \omega) \nabla^2 \phi = 0. \quad (99)$$

El potencial gravitacional ϕ puede considerarse causado únicamente por la materia oscura [2], de manera que

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G a^2 \rho_m \delta_m \quad (100)$$

Para resolver esta ecuación diferencial ordinaria se hace el cambio de variable $y = a/a_{eq}$, donde a_{eq} es el valor del factor de escala en el momento en el que la densidad de materia y de radiación es el mismo. La primera derivada

$$\delta'_m = \frac{dy}{dt} \frac{d\delta_m}{dy} = \frac{d}{dt} \frac{a}{a_{eq}} \frac{d\delta_m}{dy} = \frac{a'}{a_{eq}} \frac{d\delta_m}{dy} = \mathcal{H} y \frac{d\delta_m}{dy}, \quad (101)$$

donde $a' = a\mathcal{H}$. Por otro lado, la segunda derivada

$$\delta''_m = \frac{d}{dt} \left(\mathcal{H} y \frac{d\delta_m}{dy} \right) = \frac{d\delta_m}{dy} \frac{d}{dt} \mathcal{H} y + (\mathcal{H} y)^2 \frac{d^2 \delta_m}{dy^2}, \quad (102)$$

y

$$\frac{d}{dt} \mathcal{H} y = \frac{dy}{dt} \frac{d}{dy} \mathcal{H} y = \mathcal{H} y \left(\mathcal{H} + y \frac{d\mathcal{H}}{dy} \right). \quad (103)$$

La ecuación de Friedmann para el fondo (73) se pueden escribir en tiempo conforme como [2]

$$\mathcal{H}^2 = \mathcal{H}_0^2 \frac{\Omega_m^2}{\Omega_r} (y^{-1} + y^{-2}). \quad (104)$$

Entonces derivando

$$\frac{d}{dy} \left[\mathcal{H}^2 = \mathcal{H}_0^2 \frac{\Omega_m^2}{\Omega_r} (y^{-1} + y^{-2}) \right] \rightarrow \frac{d\mathcal{H}}{dy} = -\frac{-\mathcal{H}_0 \Omega_m^2}{2\mathcal{H} \Omega_r} (-y^{-2} - 2y^{-3}). \quad (105)$$

Juntando todo

$$\frac{d\delta}{dy} \left[2\mathcal{H}^2 y - \frac{\mathcal{H}_0^2 \Omega_m^2}{2\Omega_r} (1 + 2y^{-1}) \right] + (\mathcal{H}y)^2 \frac{d^2\delta}{dy^2} = 4\pi a^2 \rho_m \delta_m \quad (106)$$

Utilizando de nuevo la ecuación de Friedmann para el fondo

$$4\pi a^2 \rho_m = \frac{3}{2} \mathcal{H}_0^2 \frac{\Omega_m^2}{\Omega_r} y^{-1} = \frac{3}{2} \frac{1}{y(1+y)} \quad (107)$$

y reordenando (106), se obtiene la ecuación

$$\boxed{\frac{d^2\delta_m}{dy^2} + \frac{3y+2}{2y(1+y)} \frac{d\delta_m}{dy} - \frac{3}{2} \frac{1+\omega}{y(1+y)} \delta_m = 0} \quad (108)$$

Si se considera que la materia oscura no tiene presión se obtiene finalmente la ecuación de Meszaros

$$\boxed{\frac{d^2\delta_m}{dy^2} + \frac{3y+2}{2y(1+y)} \frac{d\delta_m}{dy} - \frac{3}{2} \frac{1}{y(1+y)} \delta_m = 0} \quad (109)$$

cuya solución general viene dada por

$$\delta_m = A(2+3y) + B \left[(2+3y) \ln \frac{\sqrt{1+y}+1}{\sqrt{1+y}-1} - 6\sqrt{1+y} \right] \quad (110)$$

Se puede ver que cuando la variable $y \ll 1$ la primera solución es constante, mientras que la segunda evoluciona de manera logarítmica. Por otro lado, cuando $y \gg 1$, la primera solución crece de forma lineal, y la segunda decrece como $y^{-3/2}$.

Se puede concluir entonces que las agrupaciones de materia crecen de forma logarítmica en radiación, y crecen de forma lineal en materia. Esto es lo esperado, ya que cuando domina materia se ha despreciado la presión, de forma que esta no frenará a la gravedad, que es la que crea las heterogeneidades. Entonces se puede ver que incluso si el potencial gravitatorio se ve suprimido las perturbaciones crecen en el subhorizonte: las heterogeneidades y las estructuras evolucionan en escalas menores que el radio de Hubble. Resolviendo numéricamente la ecuación de Meszaros 109 se obtiene un crecimiento de tipo logarítmico hasta $a/a_{eq} = 1$, que es cuando termina el dominio de radiación, y un crecimiento lineal cuando comienza el dominio de materia. Esto puede verse a continuación en 4.

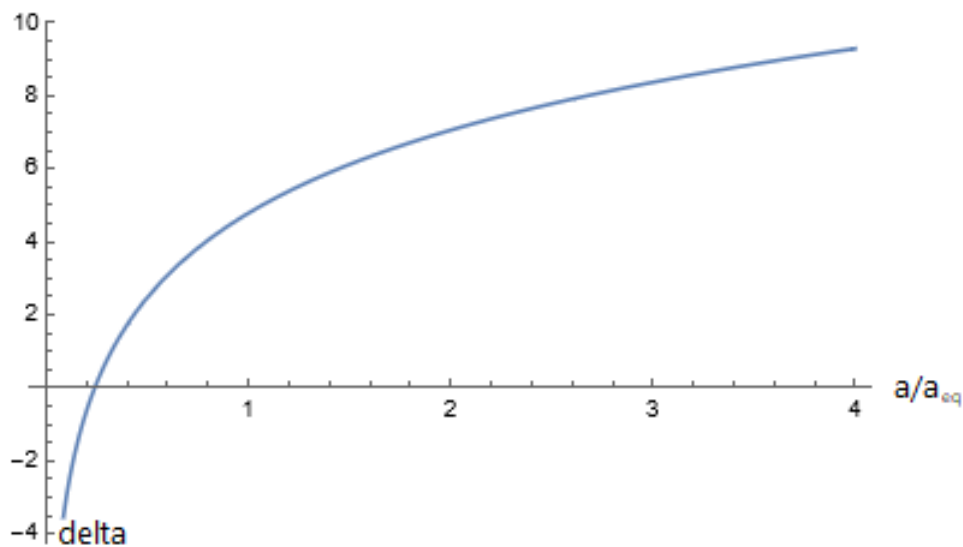


Figura 4: Resolución numérica de la ecuación de Meszaros

4.2. Energía oscura

En tiempo tardíos el universo es una mezcla de materia oscura y energía oscura. La energía oscura tampoco aporta fluctuaciones al potencial gravitatorio [2], es por eso que teniendo en cuenta que $\bar{\rho} \propto a^{-3}$

$$\nabla^2 \phi = 4\pi a^2 \bar{\rho}_m \delta_m \propto \frac{\delta_m}{a} \quad \rightarrow \quad \phi \propto \frac{\delta_m}{a} \quad (111)$$

En este caso, en la ecuación para el potencial no desaparece el término con la derivada temporal, pero por (111), la ecuación (99) puede escribirse como

$$\partial_\tau^2 \left(\frac{\delta_m}{a} \right) + 3\mathcal{H} \partial_\tau \left(\frac{\delta_m}{a} \right) + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2) \frac{\delta_m}{a} = 0 \quad (112)$$

Donde

$$a \partial_\tau^2 \left(\frac{\delta_m}{a} \right) = \delta_m'' - 2\mathcal{H} \delta_m' - \frac{a''}{a} \delta_m + 2\mathcal{H}^2 \delta_m \quad (113)$$

y

$$a \partial_\tau \left(\frac{\delta_m}{a} \right) = \delta_m' - \mathcal{H} \delta_m. \quad (114)$$

Así (112) se transforma en

$$\delta_m'' + \mathcal{H} \delta_m' + (\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2) \delta_m = 0 \quad \rightarrow \quad \delta_m'' + \mathcal{H} \delta_m'' - 4\pi a^2 \bar{\rho} \delta_m = 0 \quad (115)$$

Además, como domina la energía oscura $\mathcal{H}^2 \approx \text{constante} \gg 4\pi \bar{\rho}_m$ y (115) se simplifica a

$$\delta_m'' + \mathcal{H} \delta_m' \approx 0. \quad (116)$$

Que tiene como solución

$$\delta_m = A + B e^{-\mathcal{H}t}. \quad (117)$$

Esto quiere decir que las heterogeneidades dejan de crecer en tiempos tardíos, de forma que la mayoría de estructuras se forman en tiempos tempranos-intermedios;

cuando dominan materia o radiación, sobre todo materia.

4.3. Espectro de potencias

La función de transferencia $T(k, z)$ se define como [2]

$$\delta_{m,k}(z) = T(k, z) \mathcal{R}_k, \quad (118)$$

donde \mathcal{R}_k es la perturbación primordial. Y el cuadrado de la transformada de Fourier de la expresión anterior se define como el espectro de potencias [2]

$$P_\delta(k, z) = |\delta_{m,k}(z)|^2 = |T(k, z) \mathcal{R}_k|^2. \quad (119)$$

Se define σ_R a partir del espectro de potencias como [4]

$$\sigma_R^2 = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} |W(k, R)|^2 P(k), \quad (120)$$

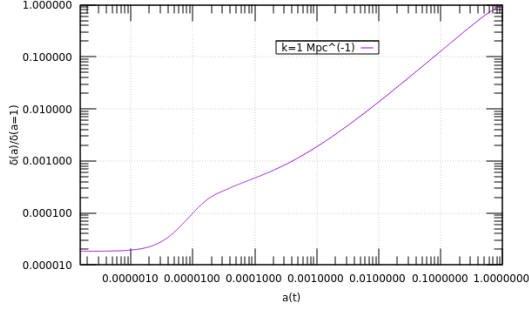
donde

$$W = \frac{3j_1(kR)}{kR} \quad (121)$$

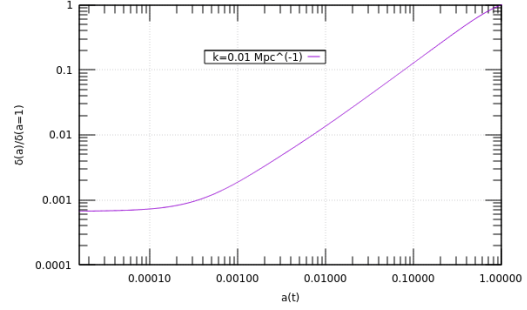
y $j_1(kR)$ es la función de Bessel de orden uno. Es especialmente importante el parámetro cosmológico σ_8 , que es el valor cuadrático medio de las fluctuaciones de la materia para una ventana del tamaño de $8h^{-1}$ MPcs, a redshift cero y a orden lineal. Se escoge esta σ porque una esfera de este radio contiene aproximadamente la suficiente materia como para formar un cluster [7].

5. Modelo Λ CDM

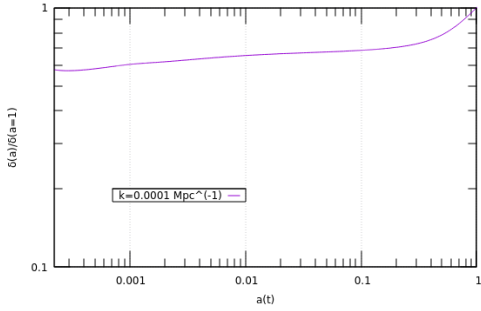
En esta sección se presentan los resultados numéricos obtenidos a través de CLASS [6] y MontePython [8] [9] para el modelo Λ CDM. CLASS es un programa basado en un código de Boltzmann, cuyo objetivo es simular la evolución de las perturbaciones lineales en el universo y calcular tanto el fondo cósmico de microondas como otros observables de las estructuras a gran escala en el universo (como el espectro de potencias)[10]. En este trabajo interesarán sobre todo la evolución de las perturbaciones a orden lineal. Por otro lado, MontePython es un código de Monte Carlo utilizado para obtener parámetros cosmológicos. Como cualquier otro método de Monte Carlo, se vale de realizar cálculos con número aleatorios (o pseudoaleatorios). Este utiliza los datos proporcionados por CLASS para dar los parámetros cosmológicos dentro de un cierto rango de confianza. En primer lugar se representan varios modos de perturbaciones de la materia oscura mediante CLASS.



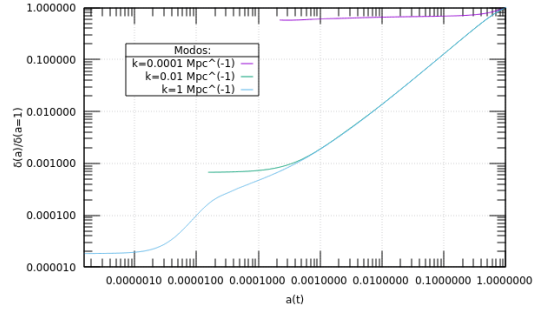
(a) Perturbaciones de la materia oscura para el modo ($k = 1$)



(b) Perturbaciones de la materia oscura para el modo ($k = 0,01$)



(c) Perturbaciones de la materia oscura para el modo ($k = 0,0001$)



(d) Los tres modos escogidos de las perturbaciones de la materia

Figura 5: Representaciones de varios modos de perturbaciones de materia oscura obtenidas mediante class para Λ CDM

Se puede ver que al principio todos los modos están congelados (son constantes). Esto ocurre porque al principio la longitud de onda de los modos es mayor que el radio de Hubble, de forma que no se ven afectados por ningún proceso físico causal. Los modos van entrando en el horizonte, primero el que mayor número de onda tiene $k = 1$, y menor longitud de onda $\lambda \sim 1$, después el modo con $k = 0,01$ y $\lambda \sim 100$ y finalmente el modo con menor número de onda $k = 0,0001$ y mayor longitud de onda $\lambda \sim 10000$. Los modos van entrando a medida que el radio de Hubble crece con el tiempo y se hace mayor que su longitud de onda.

El espectro de potencias para la materia oscura en el modelo Λ CDM se presenta

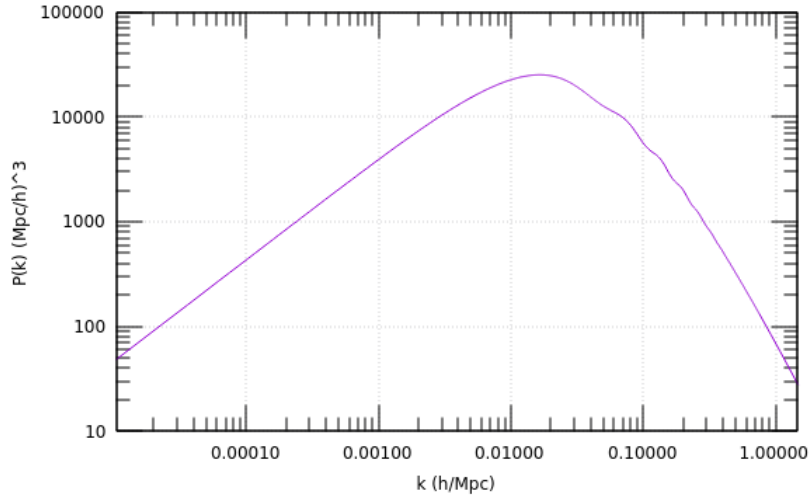


Figura 6: Espectro de potencias actual para la materia oscura para Λ CDM

también a continuación. Se puede ver que en la primera parte, para números de onda pequeños, evoluciona de forma lineal $P(k) \sim k$ hasta llegar a $k_* \approx 0,01 \text{Mpc}^{-1}$. Después de esto el espectro de potencias empieza a decrecer como $P(k) \sim k^{-3}$, cuando los números de onda son grandes. Esto muestra, por una parte, que la dinámica del universo ha cambiado con el tiempo, ya que la gráfica no es una línea recta. Del estudio anterior de las inhomogeneidades ya se sabe que las fluctuaciones han crecido de forma diferente a lo largo del tiempo, lo que aquí puede verse en la evolución del espectro de potencias. Los modos que más contribuyen son los que tienen la mayor longitud de onda, que son aquellos que entran más tarde en el horizonte, por lo tanto aquellos que entran cuando domina materia. De hecho, el pico representa el modo que entra cuando la densidad de energía de materia y radiación son iguales. Esto muestra de nuevo que las fluctuaciones aumentan cuando domina materia, lo que da lugar a que la mayoría de estructuras a gran escala se creen en este periodo. Antes de comentar los resultados que se han obtenido de MontePython será necesario definir algunos parámetros cosmológicos que no han aparecido hasta

ahora.

- El parámetro θ_s es la distancia angular característica de las perturbaciones en el fondo cósmico de microondas. Está determinada por el tamaño comóvil del horizonte del sonido en el momento del último scattering r_s y la distancia angular desde la que se observa la temperatura D_A . Entonces se aproxima mediante $\theta_s = r_s/D_A$ [11]
- El índice espectral n_s viene dado por [2]

$$n_s - 1 = \frac{d \ln \Delta_R^2}{d \ln k}, \quad (122)$$

donde Δ_R es la amplitud de las perturbaciones de curvatura.

- A_s es la el espectro de potencias de curvatura adimensional en $k = 0,005 \text{Mpc}^{-1}$ [11].

En cada uno de los cuadrados de 7 se puede ver la región de valores permitida por los dos parámetros (columna y fila). Para las distribuciones de probabilidad de los parámetros MontePython toma una gaussiana. El área más clara representa la región 2σ de confianza (el parámetro está en el rango con una probabilidad del 95.45 %), mientras que la más oscura representa la región 1σ de confianza (el parámetro está en el rango con una probabilidad del 68.27 %). Todos los parámetros cosmológicos han quedado constreñidos, ya que las regiones de confianza están delimitadas. En la siguiente tabla 1 se pueden ver los mejores ajustes para los mismos parámetros, así como los valores medidos de estos [1]. Se puede ver que todos los valores de los parámetros calculado se parecen mucho a los medidos.

De esta tabla podemos inferir, por ejemplo, que el valor más probable para este modelo con los datos de los que se disponen para la densidad de materia oscura en el presente es 0,1216, o que para la constante de Hubble en el presente el valor más probable es 66,79.

El parámetro más interesante con lo que a la formación de estructuras respecta es σ_8 , cuyo valor más probable es 0,8146. Pero a no ser que σ_8 no sea por lo menos 0,85 es difícil explicar que las estructuras se formaran suficientemente pronto [7].

La función de verosimilitud \mathcal{L} es una función de los parámetros cosmológicos que indica qué valores de los parámetros son más probables, que son aquellos que hacen que se reproduzcan los datos observados con una mayor probabilidad. Para comparar dos funciones de verosimilitud diferentes se utiliza el parámetro χ^2 , que se define como

$$\ln(\mathcal{L}_{min}) = \frac{1}{2}\chi^2. \quad (123)$$

Un modelo estadístico será mejor que otro si su χ^2 es menor. En este caso $\chi_1^2 = 2781$.

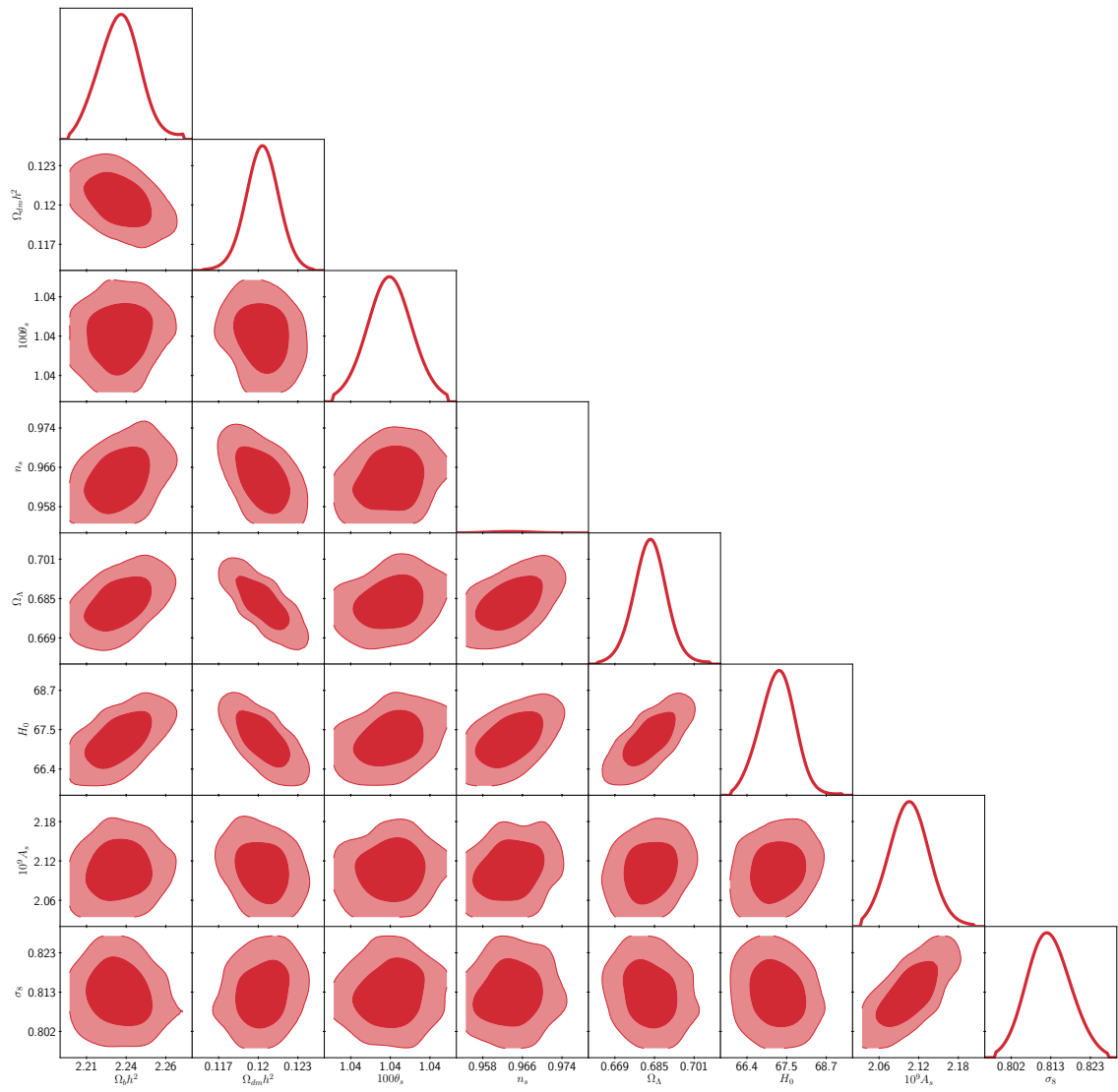


Figura 7: Gráficas bidimensionales obtenidas con MontePython para el modelo Λ CDM

Parámetro	Mejor ajuste	Media $\pm \sigma$	95 % inferior	95 % superior	Valor medido
$100h^2\Omega_b$	2,234	$2,235^{+0,014}_{-0,015}$	2,205	2,262	$2,237 \pm 0,15$
$h^2\Omega_{cdm}$	0,1216	$0,1203^{+0,0013}_{-0,0012}$	0,1177	0,1226	$0,1200 \pm 0,0012$
$100 * \theta_s$	1,042	$1,042^{+0,00034}_{-0,00027}$	1,041	1,042	$1,04092 \pm 0,00031$
n_s	0,9591	$0,964^{+0,0044}_{-0,0049}$	0,9552	0,9729	$0,9649 \pm 0,00031$
Ω_Λ	0,6758	$0,6832^{+0,0072}_{-0,0081}$	0,6679	0,699	$0,6847 \pm 0,0073$
$H0$	66,79	$67,26^{+0,53}_{-0,58}$	66,13	68,37	$67,36 \pm 0,54$
$10^9 A_s$	2,103	$2,106^{+0,032}_{-0,032}$	2,041	2,168	$2,100 \pm 0,030$
σ_8	0,8146	$0,8124^{+0,0059}_{-0,0066}$	0,8004	0,8246	$0,8111 \pm 0,0060$

Cuadro 1: Tabla con los valores calculados y medidos para el modelo Λ CDM [1]

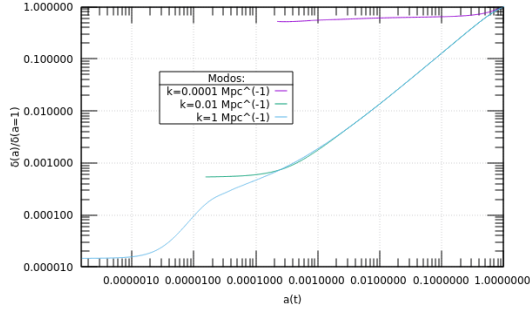
6. Más allá de Λ CDM

En los últimos años se han hecho grandes progresos en la cosmología, tanto teórica como observacional. Uno de los productos de estos avances es la creciente confianza en que la mayoría de la densidad de energía del universo observable no está hecha de materia usual, materia bariónica. Hay muchas evidencias que apuntan a la existencia de la materia oscura; el efecto lente gravitacional, las curvas de rotación de las galaxias o la discrepancia de Oort [12]. A pesar de que la idea de la existencia de la materia oscura está generalmente aceptada, su naturaleza sigue siendo en gran medida, un misterio, ya que su comportamiento no puede explicarse dentro del marco del modelo estándar. Aun así, ya hay varios candidatos como los neutrinos o los axiones [13][12].

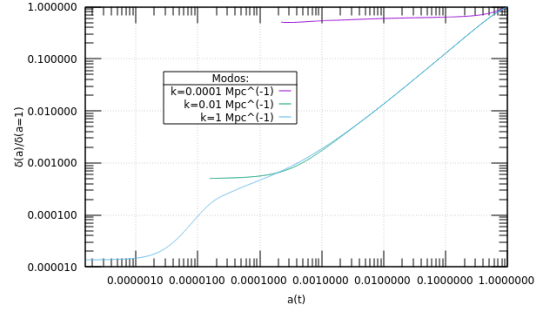
En este trabajo se propone un modelo de materia oscura con presión, de forma que la velocidad del sonido de las perturbaciones de materia oscura $c_s^2 \neq 0$, y se va a estudiar la diferencia en la creación de estructuras a gran escala que esta supone. En primer lugar se presentan las gráficas obtenidas mediante CLASS de varios modos de las perturbaciones de materia oscura.

Se puede ver fácilmente en 8 que la amplitud de las perturbaciones decrece a medida que aumenta la presión; que aumenta la ecuación de estado. Eso era de esperar, y se debe a que cuanto mayor es la presión, más le cuesta a la gravedad colapsar hacia las heterogeneidades. Es por eso que a mayor presión, más despacio crecerán estas y más lento será el crecimiento de las estructuras a gran escala. Por otro lado, la forma que tienen los diferentes modos es similar para todas las ecuaciones de estado, así como la entrada en el horizonte. De esto se puede deducir que el radio de Hubble, y por lo tanto la expansión, no dependen de la ecuación de estado de la materia oscura (por lo menos si esta es constante).

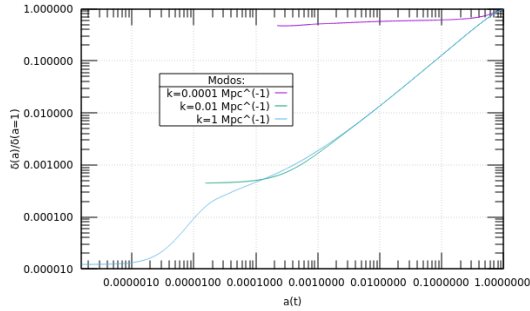
El espectro de potencias 9 tiene la misma forma para pequeñas escalas, aunque a mayor presión, mayor es el pico en la curva. Además en las escalas más grandes,



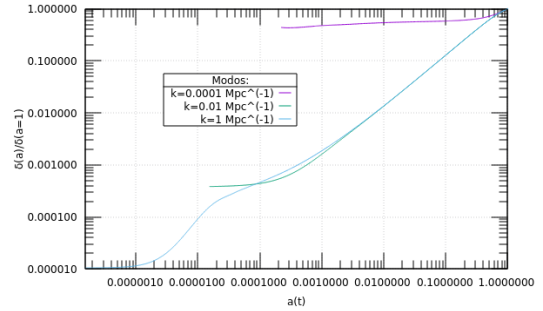
(a) Gráfica obtenida mediante CLASS para $c_s^2 = 0,25$



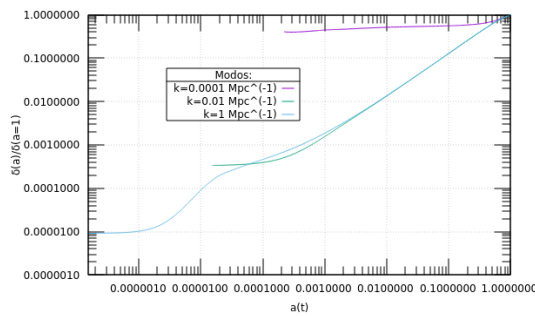
(b) Gráfica obtenida mediante CLASS para $c_s^2 = 1/3$, es decir, radiación



(c) Gráfica obtenida mediante CLASS para $c_s^2 = 0,5$



(d) Gráfica obtenida mediante CLASS para $c_s^2 = 0,75$



(e) Gráfica obtenida mediante CLASS para $c_s^2 = 1$, es decir, energía oscura

Figura 8: Modos de perturbaciones de materia oscura para diferentes velocidades del sonido c_s^2

que son los modos que entran cuando domina energía oscura, las inhomogeneidades decrecen. Esto ocurre porque ahora las inhomogeneidades tiene presión, que impide el colapso gravitatorio.

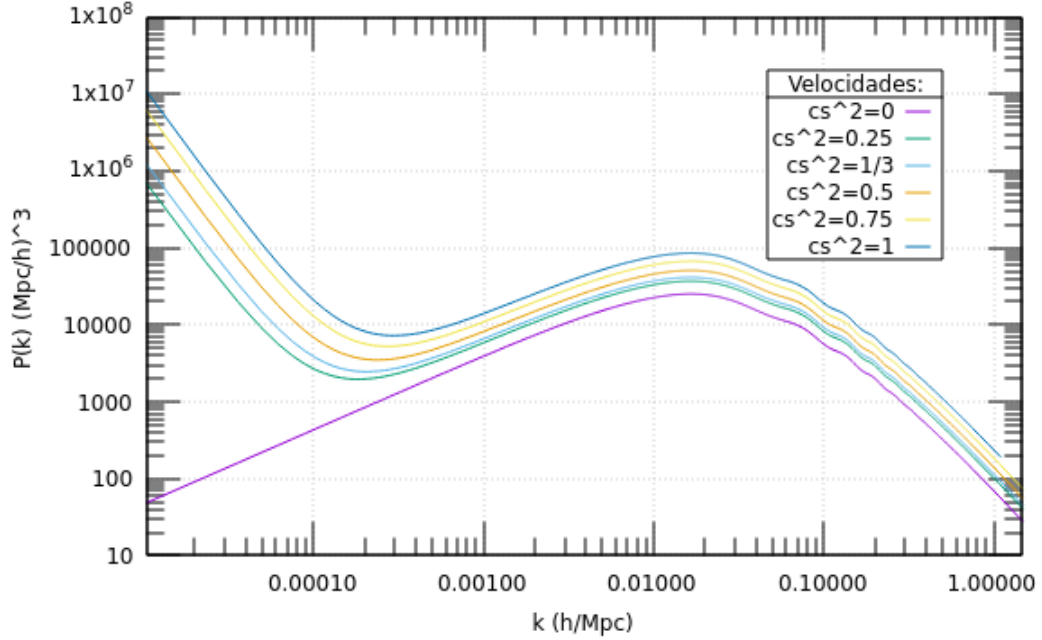


Figura 9: Espectro de potencias actual para varias ecuaciones de estado

En cuanto a los resultados obtenidos con Montepython 10, se puede ver que excepto la velocidad del sonido ($c_{new} = c_s^2$) que diferencia este modelo del usual Λ CDM todos los parámetros han quedado de nuevo contrainformados dos a dos. El mejor ajuste que hay para la ecuación de estado es $\omega = 0,3983$, de forma que esta sería muy similar a la de un gas fotones.

Además por la tabla 2 se puede saber que de nuevo los parámetros calculados son muy similares a los medidos. En este caso σ_8 sigue sin ser suficientemente grande.

En este caso se ha obtenido $\chi^2_2 = 2777$.

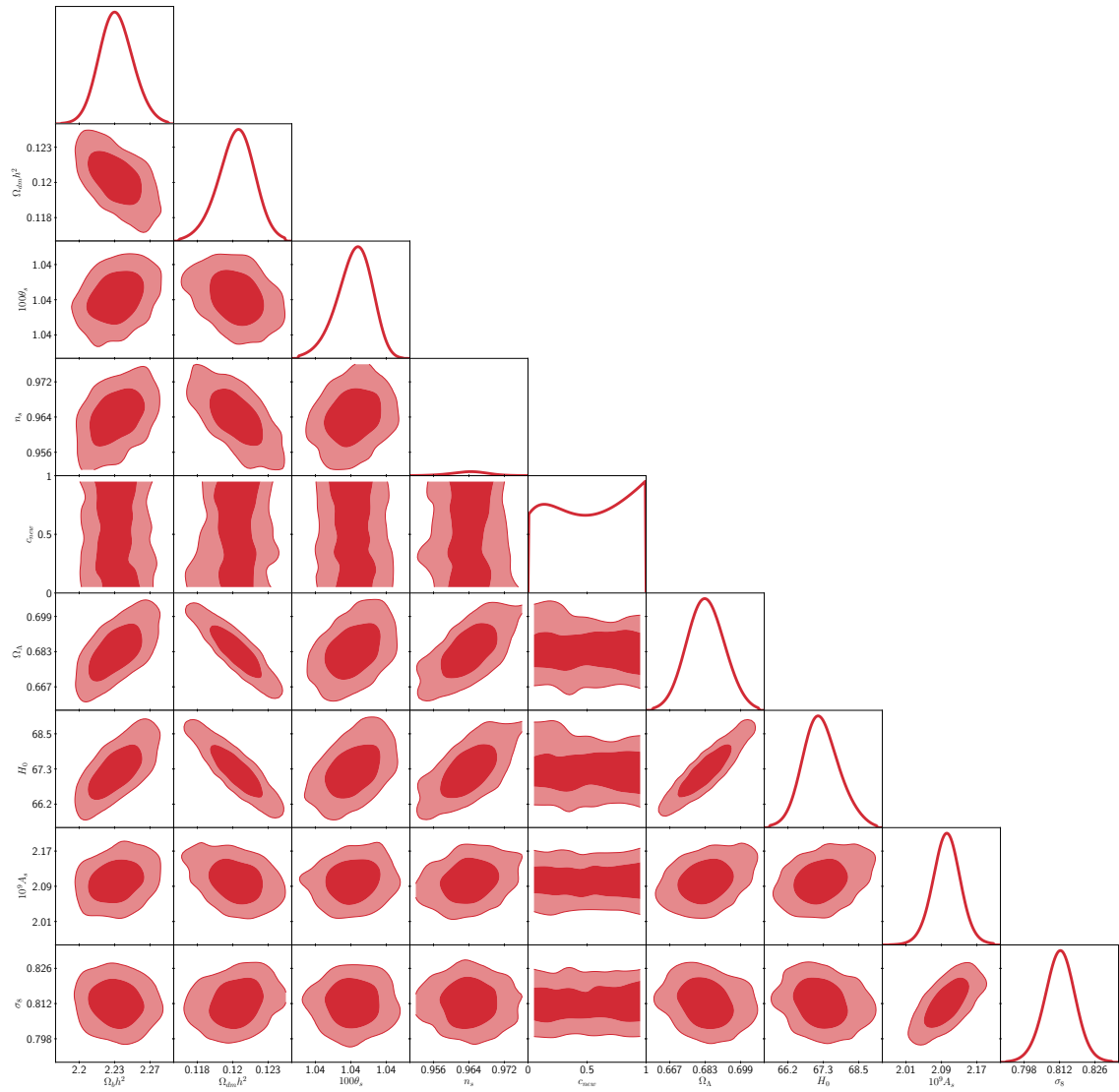


Figura 10: Gráficas bidimensionales obtenidas con MontePython para la nueva ecuación de estado

Parámetro	Mejor ajuste	Media $\pm\sigma$	95 % inferior	95 % superior	Valor medido
$100h^2\Omega_b$	2,224	$2,235^{+0,015}_{-0,017}$	2,204	2,267	$2,237 \pm 0,15$
$h^2\Omega_{cdm}$	0,1213	$0,1203^{+0,0014}_{-0,0013}$	0,1176	0,1229	$0,1200 \pm 0,0012$
$100 * \theta_s$	1,042	$1,042^{+0,00032}_{-0,00031}$	1,041	1,043	$1,04092 \pm 0,00031$
n_s	0,9603	$0,964^{+0,0045}_{-0,0043}$	0,9544	0,9731	$0,9649 \pm 0,0042$
c_s^2	0,3983	$0,5172^{+nan}_{nan}$	<i>nan</i>	<i>nan</i>	—
Ω_Λ	0,6763	$0,6831^{+0,0083}_{-0,0081}$	0,6662	0,6999	$0,7005 \pm 0,0073$
$H0$	66,75	$67,27^{+0,56}_{-0,63}$	66,05	68,58	$67,36 \pm 0,54$
$10^9 A_s$	2,1	$2,104^{+0,033}_{-0,033}$	2,037	2,172	$2,100 \pm 0,030$
σ_8	0,8139	$0,8123^{+0,0067}_{-0,0063}$	0,7996	0,8253	$0,8111 \pm 0,0060$

Cuadro 2: Tabla con los valores calculados para el nuevo modelo y valores medidos [1]

7. Conclusiones

El modelo Λ CDM predice muy bien la mayoría de los parámetros, que coinciden bastante bien con las medidas que se han realizado hasta ahora. Aunque por lo que se ha visto, no da un σ_8 lo suficientemente grande como para explicar lo pronto que se formaron las estructuras. En este modelo, como se esperaba, se ve claramente que la formación de estructuras se da sobre todo en tiempos medios-tardíos, que es cuando más crecen las heterogeneidades, dando a veces lugar al colapso y a la posterior creación de estructuras mayores. Después de esto, cuando domina energía oscura las heterogeneidades dejan de crecer.

En el modelo en el que se ha introducido una nueva velocidad del sonido para la materia oscura, se han obtenido una forma de los modos de las perturbaciones muy similares a las de Λ CDM, aunque su amplitud ha sido menor. Esto era de esperar ya que la presión se opone al colapso gravitatorio; lo que se ha obtenido efectivamente es que a mayor presión menor es la amplitud de los modos de las perturbaciones. Por otro lado, el espectro de potencias refleja exactamente esto: para las mayores longitudes de onda decrecen las heterogeneidades, y en los tiempos más tardíos el universo es homogéneo.

En el modelo propuesto no se ha conseguido constreñir el valor de la velocidad del sonido; esto podría deberse a que no se dispongan de suficientes parámetros como para hacerlo. Además, se ha obtenido $\chi_2^2 < \chi_1^2$, lo que quiere decir que la introducción una velocidad del sonido distinta de cero da lugar a una mayor probabilidad de que el modelo estadístico replique las observaciones, aunque esta no se haya podido restringir.

Bibliografía

- [1] N. Aghanim, Y. Akrami, M. Ashdown et al., “iPlanck/i2018 results,” *Astronomy & Astrophysics*, vol. 641, A6, sep. de 2020. DOI: 10.1051/0004-6361/201833910. dirección: <https://doi.org/10.1051%5C%2F0004-6361%5C%2F201833910>.
- [2] D. Baumann, *Cosmology Part III Mathematical Tripos*. Cambridge University Press, 2022, ISBN: 1108838073.
- [3] D. Baumann, *TASI Lectures on Inflation*. arXiv, 2009. DOI: 10.48550/ARXIV.0907.5424. dirección: <https://arxiv.org/abs/0907.5424>.
- [4] S. Dodelson, *Modern Cosmology*. Academic Press, 2014, ISBN: 1493300393.
- [5] H. Kurki-Suonio, *Cosmological Perturbation Theory, part 1*, 2022.
- [6] D. Blas, J. Lesgourgues y T. Tram, “The Cosmic Linear Anisotropy Solving System (CLASS). Part II: Approximation schemes,” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2011, n.º 07, págs. 034-034, jul. de 2011. DOI: 10.1088/1475-7516/2011/07/034. dirección: <https://doi.org/10.1088%5C%2F1475-7516%5C%2F2011%5C%2F07%5C%2F034>.
- [7] J. R. Primack, “Precision cosmology,” *New Astronomy Reviews*, vol. 49, n.º 2-6, págs. 25-34, mayo de 2005. DOI: 10.1016/j.newar.2005.01.039. dirección: <https://doi.org/10.1016%5C%2Fj.newar.2005.01.039>.
- [8] T. Brinckmann y J. Lesgourgues, “MontePython 3: boosted MCMC sampler and other features,” 2018. arXiv: 1804.07261 [astro-ph.CO].
- [9] B. Audren, J. Lesgourgues, K. Benabed y S. Prunet, “Conservative Constraints on Early Cosmology: an illustration of the Monte Python cosmological parameter inference code,” *JCAP*, vol. 1302, pág. 001, 2013. DOI: 10.1088/1475-7516/2013/02/001. arXiv: 1210.7183 [astro-ph.CO].

- [10] J. Lesgourgues, The Cosmic Linear Anisotropy Solving System (CLASS) I: Overview, 2011. DOI: 10.48550/ARXIV.1104.2932. dirección: <https://arxiv.org/abs/1104.2932>.
- [11] P. A. R. Ade, N. Aghanim, C. Armitage-Caplan et al., “iPlanck/i2013 results. XVI. Cosmological parameters,” *Astronomy & Astrophysics*, vol. 571, A16, oct. de 2014. DOI: 10.1051/0004-6361/201321591. dirección: <https://doi.org/10.1051%5C%2F0004-6361%5C%2F201321591>.
- [12] L. Bergström, “Non-baryonic dark matter: observational evidence and detection methods,” *Reports on Progress in Physics*, vol. 63, n.º 5, págs. 793-841, abr. de 2000. DOI: 10.1088/0034-4885/63/5/2r3. dirección: <https://doi.org/10.1088%5C%2F0034-4885%5C%2F63%5C%2F5%5C%2F2r3>.
- [13] J. Espinosa, D. Racco y A. Riotto, “Cosmological Signature of the Standard Model Higgs Vacuum Instability: Primordial Black Holes as Dark Matter,” *Physical Review Letters*, vol. 120, n.º 12, mar. de 2018. DOI: 10.1103/physrevlett.120.121301. dirección: <https://doi.org/10.1103%5C%2Fphysrevlett.120.121301>.