

UNIVERSIDAD DE SALAMANCA
MÁSTER UNIVERSITARIO EN MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

Métodos de Taylor en Ecuaciones Diferenciales Estocásticas

Autor: Alberto Guilabert Martínez

Tutor: Ángel Andrés Tocino García

Curso 2022-2023

CERTIFICADO DE LOS/AS TUTORES/AS DE TRABAJO DE FIN DE MÁSTER

MÁSTER UNIVERSITARIO EN MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

D./D^a ÁNGEL ANDRÉS TOCINO GARCÍA, profesor del Departamento de MATEMÁTICAS de la Universidad de Salamanca

HACE CONSTAR

Que el trabajo titulado “MÉTODOS DE TAYLOR EN ECUACIONES DIFERENCIALES ESTOCÁSTICAS”, que se presenta, ha sido realizado por ALBERTO GUILABERT MARTÍNEZ, con DNI número ***94521D y constituye la memoria del trabajo realizado para la superación de la asignatura Trabajo Fin de Máster del Máster Universitario en Modelización Matemática de la Universidad de Salamanca

Salamanca, a fecha de la firma electrónica

Firmado.

Índice general

Introducción	1
1. Preliminares	3
1.1. Procesos estocásticos	3
1.2. Integral de Itô	5
1.3. Procesos de Itô	7
1.4. Ecuaciones diferenciales estocásticas	9
2. Métodos de Itô-Taylor	11
2.1. Desarrollos de Itô-Taylor	13
2.1.1. Multi-índices	13
2.1.2. Integrales de Itô múltiples	14
2.1.3. Propiedades de las integrales de Itô múltiples	16
2.1.4. Coeficientes de la aproximación de Itô-Taylor	19
2.1.5. Conjuntos jerarquizados	20
2.1.6. Desarrollos de Itô-Taylor	21
2.2. Métodos de Itô-Taylor fuertes	25
2.2.1. Métodos implícitos de Itô-Taylor fuertes	32
2.3. Métodos de Itô-Taylor débiles	33
2.3.1. Métodos implícitos de Itô-Taylor débiles	37
2.4. Estabilidad lineal de los métodos de Itô-Taylor	38
3. Simulaciones numéricas	44
3.1. Estabilidad de los θ -métodos de Euler-Maruyama	44
3.2. Simulación del error fuerte y débil	46
Bibliografía	50
A. Código	51

Índice de figuras

1.1. Simulación de 100 realizaciones de un proceso estocástico. En línea negra continua se muestra el concepto de una realización. En línea discontinua se fija un t y se puede apreciar que se obtiene una variable aleatoria.	4
2.1. Región de MS -estabilidad del método de Euler-Maruyama explícito. En azul se muestra la región de estabilidad de la ecuación y en naranja la región de estabilidad del método numérico.	39
2.2. Región de MS -estabilidad para diferentes valores de θ en la familia de θ -métodos de Euler-Maruyama.	40
2.3. Región de MS -estabilidad del método de Milstein.	41
2.4. Región de MS -estabilidad para otros métodos de Itô-Taylor explícitos.	42
2.5. Comparación de la región de MS -estabilidad de diferentes métodos.	43
3.1. Estabilidad de los θ -métodos de Euler-Maruyama para diferentes valores de θ con $\lambda = -10$, $\mu = 1$ y $\Delta = 0,1$	44
3.2. Estabilidad de los θ -métodos de Euler-Maruyama para diferentes valores de θ con $\lambda = -40$, $\mu = \sqrt{20}$ y $\Delta = 0,1$	45
3.3. Estabilidad de los θ -métodos de Euler-Maruyama para diferentes valores de θ con $\lambda = -40$, $\mu = \sqrt{70}$ y $\Delta = 0,1$	45
3.4. Estabilidad de los θ -métodos de Euler-Maruyama para diferentes valores de θ con $\lambda = -20$, $\mu = \sqrt{45}$ y $\Delta = 0,1$	46
3.5. Simulación de una trayectoria para los diferentes métodos con $\lambda = 1,5$ y $\mu = 1$	46
3.6. $\log_2(e_f)$ como función de $\log_2 \Delta$ para $\Delta = 2^{-4}, 2^{-5}, 2^{-6}, 2^{-7}, 2^{-8}$. En línea discontinua se representan rectas con pendiente igual al orden de convergencia teórico de cada método.	47
3.7. $\log_2(e_d)$ como función de $\log_2 \Delta$ para $\Delta = 2^{-4}, 2^{-5}, 2^{-6}, 2^{-7}, 2^{-8}$. En línea discontinua se representan rectas con pendiente igual al orden de convergencia teórico de cada método.	48

Resumen

Este trabajo tiene como objetivo dar una introducción teórica y práctica a los métodos numéricos que son utilizados para la resolución de ecuaciones diferenciales estocásticas, en particular nos centraremos en el estudio de los métodos de Itô-Taylor. Veremos que estos métodos son en realidad una generalización de los métodos de Taylor para la resolución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Para llevar a cabo esta tarea se dará un breve capítulo con los conceptos básicos del cálculo de Itô, que serán necesarios para desarrollar la teoría posterior. Algunas de las herramientas principales serán la definición de integral de Itô o de la fórmula de Itô.

Posteriormente, definiremos de manera general los métodos de Itô-Taylor y daremos algunos ejemplos ampliamente conocidos como el método de Euler-Maruyama y el método de Milstein, entre otros.

Finalmente, en el último capítulo se mostrarán algunas simulaciones que permitirán poner en práctica la teoría desarrollada a lo largo del trabajo.

En resumen, este trabajo aporta una introducción sólida a los métodos de Itô-Taylor sin olvidar un enfoque riguroso y práctico, que permite al lector profundizar en este campo tan reciente de las matemáticas.

Abstract

This paper aims to give a theoretical and practical introduction to the numerical schemes that are used for the resolution of stochastic differential equations, in particular we will focus on the study of the Itô-Taylor schemes. We will see that these numerical methods are in fact a generalization of Taylor's schemes for the numerical solution of ordinary differential equations.

In order to carry out this task, a brief chapter will be given with the basic concepts of the Itô calculus that will be necessary to develop the subsequent theory. Some of the main tools will be the definition of the Itô integral and the Itô formula.

Afterwards, we will define in a general way the Itô-Taylor schemes and we will give some known examples such as the Euler-Maruyama scheme, the Milstein scheme and others.

Finally, in the last chapter we will show some simulations that will allow us to put into practice the theory developed throughout the work.

In summary, this work provides a solid introduction to the Itô-Taylor methods without forgetting a rigorous and practical approach that allows the reader to go deeper into this very recent field of mathematics.

Introducción

Desde el desarrollo del cálculo de Itô iniciado a mitad del siglo XX por Kiyoshi Itô [6] el cálculo estocástico ha cobrado gran relevancia en la modelización de gran diversidad de fenómenos de la realidad. Desde el precio de determinados activos financieros al número de infectados en una epidemia. En particular, este campo también ha sido introducido por los físicos para intentar dar una descripción acerca de los sistemas abiertos, tanto en el caso clásico como en el cuántico, que son aquellos sistemas que se encuentran en interacción con *el medio* y por tanto donde predominan los efectos aleatorios [2], [8].

De forma similar a como ocurre en el caso ordinario, se saben resolver analíticamente *pocas* ecuaciones diferenciales estocásticas: lineales o reducibles a lineales por un cambio de variable [7]. Es por ello que los métodos numéricos son de gran importancia para tratar de obtener una solución numérica y así obtener información acerca este tipo de ecuaciones. Por tanto, en este trabajo se pretende dar una introducción sistemática a la teoría de los métodos numéricos para ecuaciones diferenciales estocásticas, introduciendo las herramientas clave para definir estos métodos y mostrando algunas simulaciones que acompañen a los resultados teóricos.

Este trabajo está organizado como se sigue:

En el primer capítulo se da una breve introducción necesaria a la teoría de procesos estocásticos y al cálculo de Itô [1], [3]. En particular, se definirá el concepto de proceso estocástico y se darán algunos ejemplos fundamentales para la definición del cálculo estocástico. Posteriormente se dará una breve definición de integral de la Itô sin entrar en detalles de su deducción debido a las limitaciones del trabajo. Una vez definida la integral de Itô se estudiarán algunas de sus propiedades más importantes y se definirán los conocidos como procesos de Itô, que nos permitirán posteriormente construir la noción de ecuación diferencial estocástica y sobre las cuales daremos un teorema de existencia y unicidad de soluciones.

En el segundo capítulo se encuentra la parte principal de este trabajo. Con la intención de introducir los métodos de Itô-Taylor para resolver numéricamente ecuaciones diferenciales estocásticas introduciremos las bases necesarias para llegar a su definición, repasando el concepto de multi-índice, definiendo ciertos conjuntos especiales de multi-índices y el concepto de integral de Itô múltiple, donde estudiaremos ciertas propiedades y relaciones existentes entre ellas. Distinguiremos entre dos tipos de métodos numéricos en función del tipo de convergencia de cada uno y analizaremos la estabilidad en media cuadrática de una ecuación diferencial estocástica lineal, que da como solución al conocido como movimiento Browniano geométrico.

Por último, realizaremos algunas simulaciones numéricas con la intención de compro-

bar los resultados teóricos sobre el orden de convergencia y la estabilidad de los diferentes métodos numéricos obtenidos en el capítulo previo.

Adicionalmente se incluye un anexo donde se puede consultar el código utilizado en el último capítulo para las simulaciones.

Como continuación de este trabajo se disponen varias opciones: En primer lugar, continuar con el estudio de los métodos numéricos analizando los métodos Runge-Kutta u otros métodos diseñados para problemas concretos; por otro lado, aplicar los resultados estudiados a problemas reales como los mencionados en la introducción para analizar su efectividad; y finalmente intentar implementar esta teoría para problemas de la física en los que estén involucrados fuertes componentes de aleatoriedad, como es el caso de la mecánica estadística.

Agradecimientos

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a mi tutor, el profesor Ángel Andrés Tocino García, por su invaluable orientación a lo largo de este proyecto, así como a la Fundación Humanismo y Ciencia por el generoso apoyo económico que me ha brindado.

Capítulo 1

Preliminares

Antes de comenzar a tratar los métodos de Itô-Taylor, daremos una breve introducción a las ecuaciones diferenciales estocásticas.

1.1. Procesos estocásticos

Definamos en primer lugar el concepto de proceso estocástico.

Definición 1.1. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad e I un conjunto de índices no vacío. Llamamos proceso estocástico real d -dimensional a la familia $\{X_t : t \in I\}$ de vectores aleatorios que toman valores en el espacio de estados $\mathbb{R}^d$ sobre el conjunto de índices I .

A efectos prácticos consideraremos que el parámetro t denota el tiempo. Así, dado un $t \in I$ fijo tenemos un vector aleatorio

$$\begin{aligned} X_t(\cdot) &: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d \\ \omega &\mapsto X_t(\omega) \end{aligned}$$

y para $\omega \in \Omega$ fijada tenemos la función del tiempo

$$\begin{aligned} X_\cdot(\omega) &: I \rightarrow \mathbb{R}^d \\ t &\mapsto X_t(\omega). \end{aligned}$$

Para cada $\omega \in \Omega$ fijo, el conjunto $\{X_t(\omega) : t \in I\}$ se conoce como trayectoria del proceso o realización. En la figura 1.1 se muestran estos dos conceptos.

Un tipo de procesos estocásticos de gran relevancia son los conocidos como procesos de Wiener. Previamente a su definición es necesario definir en qué consiste una filtración.

Definición 1.2. Una filtración $\{\mathcal{F}_t, t \in I\}$ es una familia de sub- σ -álgebras de $\mathcal{F}$ tales que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ para todo $s, t \in I$ donde $s \leq t$.

Definición 1.3. Sea $\{W_t : t \in \mathbb{R}_+\}$ un proceso estocástico definido sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y sea $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ una filtración. Entonces W_t es un **proceso de Wiener** si:

- (a) W_t está adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$.

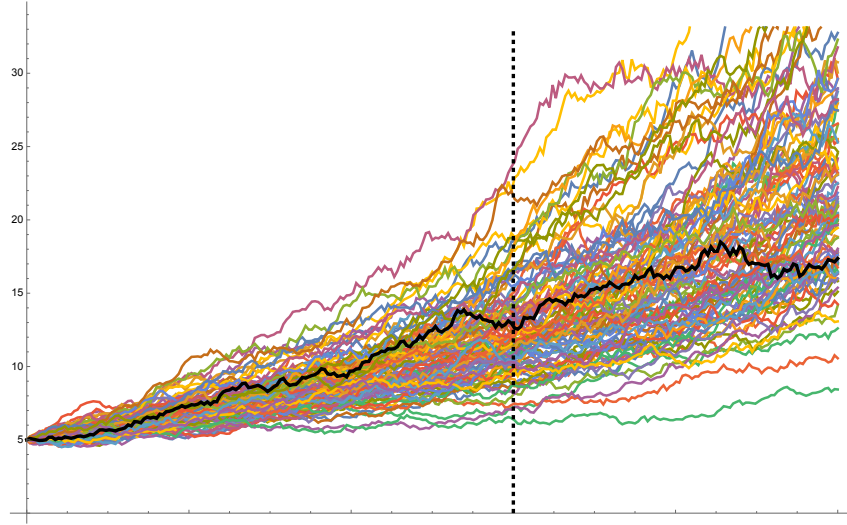


Figura 1.1: Simulación de 100 realizaciones de un proceso estocástico. En línea negra continua se muestra el concepto de una realización. En línea discontinua se fija un t y se puede apreciar que se obtiene una variable aleatoria.

- (b) $W_0 = 0$ y las trayectorias del proceso, $W_t(\omega)$, son continuas para c.t.p. $\omega \in \Omega$.
- (c) W_t tiene incrementos independientes.
- (d) La distribución de $W_t - W_s$ es $\mathcal{N}(0, (t - s)\mathcal{I})$, donde $\mathcal{I}$ es la matriz identidad, y por tanto los incrementos de W_t son estacionarios.

Es posible demostrar que las trayectorias de un proceso de Wiener no son diferenciables en ningún punto. A su vez también se puede probar que, con probabilidad 1, las variaciones de las trayectorias de un proceso de Wiener en cualquier intervalo finito de tiempo no son de varianza acotada.

Otra clase de procesos estocásticos importantes son los conocidos como procesos de ruido blanco. El ruido blanco es un proceso estocástico $\{\xi_t : t \in \mathbb{R}\}$ en el que *participan* todas las frecuencias con la misma intensidad de manera uniforme, es decir, que su densidad espectral sea constante (de ahí el nombre de ruido blanco en analogía con la luz blanca). Además cumple $\mathbb{E}[\xi_t] = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y su matriz de covarianzas es $\text{Cov}(\xi_{t+h}, \xi_t) = \gamma_\xi(h) = \mathcal{I}\delta(h)$ donde δ es la delta de Dirac. Debido a esta última propiedad se dice que el ruido blanco es *puramente aleatorio*, ya que no existe correlación entre los vectores aleatorios del proceso para ningún instante de tiempo. El proceso de ruido blanco se puede ver como la derivada distribucional de un proceso de Wiener, y en consecuencia se adopta la notación $\xi_t = \frac{dW_t}{dt}$.

La intención es estudiar ecuaciones diferenciales donde añadimos una componente de aleatoriedad a través del ruido blanco, es decir

$$\frac{dX_t}{dt} = a(t, X_t) + b(t, X_t)\xi_t$$

donde el término que acompaña a ξ_t modeliza la parte aleatoria. Dicho proceso lo podemos escribir, a partir de la relación existente entre proceso de Wiener y ruido blanco, como

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t$$

Por tanto a la hora de resolver

$$X_t = X_{t_0} + \int_I a(s, X_s) ds + \int_I b(s, X_s) dW_s$$

debemos definir la *integral*

$$\int_I b(s, X_s) dW_s$$

conocida como integral estocástica. Dado que, como se ha mencionado anteriormente, las trayectorias del proceso de Wiener no son de varianza acotada en un intervalo finito de tiempo la definición de la integral estocástica no se construye de forma análoga a la definición de integral de Riemann.

1.2. Integral de Itô

Definiremos la integral de Itô sobre un espacio de funciones que denotaremos por L_{ad}^2 y que introducimos a continuación.

Definición 1.4. Sea $\{\mathcal{F}_s\}_{s \in I}$ una filtración tal que el proceso de Wiener $\{W_s : s \in I\}$ m -dimensional está adaptado a $\mathcal{F}_s$ y tal que para todo $t_0 \leq s \leq t$, $W_t - W_s$ es independiente de $\mathcal{F}_s$. Definimos entonces el espacio $L_{\text{ad}}^2(I \times \Omega, \mathcal{B}(I) \times \mathcal{F}, \mu \times \mathbb{P})$, donde $I = [t_0, T]$ y μ denota la medida de Lebesgue, como el espacio de funciones

$$\begin{aligned} f : (I \times \Omega, \mathcal{B}(I) \times \mathcal{F}) &\rightarrow (\mathbb{R}^{d \times m}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d \times m})) \\ (s, \omega) &\mapsto f(s, \omega) \end{aligned}$$

tales que:

- (a) f es $\mathcal{B}(I) \times \mathcal{F}$ -medible.
- (b) f está adaptada a la filtración $\{\mathcal{F}_s\}_{s \in I}$. Así $f(s, \omega)$ se puede ver como un proceso estocástico con trayectorias $f(\cdot, \omega)$, con lo que es común utilizar también la notación $f_t(\omega)$. Los procesos estocásticos que cumplan esta condición reciben el nombre de procesos adaptados.
- (c) Las trayectorias $f(\cdot, \omega)$ son de cuadrado integrable para todo $\omega \in \Omega$, esto quiere decir $f(\cdot, \omega) \in L^2(I, \mathcal{B}(I), \mu)$, y por tanto

$$\int_{t_0}^T |f(s, \omega)|^2 ds < \infty$$

donde $|f| = \text{tr}(ff')^{1/2}$ es la norma de Frobenius¹.

En particular, nos interesará especialmente el caso unidimensional, es decir el caso $d = m = 1$.

¹Nótese que $f^* = f' \equiv f^t$ por ser una matriz real.

Observación 1.5. Se puede probar que L_{ad}^2 es un espacio de Banach con la norma

$$\|f\|_{L_{\text{ad}}^2} = \left[\int_{t_0}^T \mathbb{E} [|f|^2] ds \right]^{1/2}$$

De forma análoga a como se define la integral de Lebesgue, que se define primero sobre funciones *simples* o escalonadas, definiremos la integral de Itô sobre este subespacio de funciones de L_{ad}^2 .

Diremos que una función $f \in L_{\text{ad}}^2$ es una función escalonada si existe $t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ una partición de I tal que² $f(t) = f(t_{i-1})$ para todo $t \in [t_{i-1}, t_i)$ con $i = 1, \dots, n$. Denotaremos por L_{step}^2 al subespacio formado por las funciones escalonadas.

Definición 1.6. Si $f \in L_{\text{step}}^2$ se define su integral de Itô con respecto al proceso de Wiener $\{W_t : t \in I\}$ como el vector aleatorio

$$I[f] := \int_{t_0}^T f(s) dW_s = \sum_{i=1}^n f(t_{i-1}) (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) \quad (1.1)$$

Es importante remarcar que, a diferencia de la definición de la integral de Riemann, la definición de integral estocástica es sensible al punto del subintervalo donde evaluamos a la función f . En la definición anterior hemos tomado el punto izquierdo de cada subintervalo, t_{i-1} , lo que da como resultado la integral de Itô, pero esta no es la única integral estocástica que existe. Por ejemplo, si tomamos el punto medio del subintervalo obtenemos la integral de Stratonovich, cuyas propiedades son diferentes a las de la integral de Itô.

El concepto de integral de Itô se generaliza a L_{ad}^2 aplicando el siguiente teorema.

Teorema 1.7. L_{step}^2 es denso en L_{ad}^2 .

Así, dada cualquier función $f \in L_{\text{ad}}^2$ existe una sucesión de funciones $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L_{\text{step}}^2$ que aproximan a f en L_{ad}^2 . Es decir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L_{\text{ad}}^2} = 0.$$

Por tanto, definimos la integral de Itô sobre funciones de L_{ad}^2 como

$$I[f] := \lim_{n \rightarrow \infty} I[f_n] \quad (1.2)$$

donde se prueba que el límite existe y $I[f] \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Es posible extender el concepto de integral de Itô a un espacio de funciones más general denotado $\mathcal{L}_{\text{ad}}$ definido de forma análoga a 1.4 relajando la condición (c) por una en la que las trayectorias sean de cuadrado integrables con probabilidad 1. Sin embargo, debido a la limitación de este trabajo nos restringiremos principalmente a su estudio en L_{ad}^2 . Veamos algunas de sus propiedades.

Teorema 1.8. Dadas dos funciones $f, g \in L_{\text{ad}}^2$ se cumple que:

²Es común suprimir el argumento ω si no hay lugar a confusión.

(a) La integral de Itô es una aplicación lineal, es decir, para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$

$$\int_{t_0}^T (af(t) + bg(t)) dW_t = a \int_{t_0}^T f(t) dW_t + b \int_{t_0}^T g(t) dW_t. \quad (1.3)$$

(b) La integral de Itô tiene media cero, esto es

$$\mathbb{E} \left[\int_{t_0}^T f(t) dW_t \right] = 0. \quad (1.4)$$

(c) La matriz de covarianza para la integral viene dada por

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_{t_0}^T f(t) dW_t \right) \left(\int_{t_0}^T f(t) dW_t \right)' \right] = \int_{t_0}^T \mathbb{E} [f(t)f(t)'] dt. \quad (1.5)$$

(d) En particular, se satisface la llamada isometría de Itô,

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_{t_0}^T f(t) dW_t \right)^2 \right] = \int_{t_0}^T \mathbb{E} [|f(t)|^2] ds. \quad (1.6)$$

1.3. Procesos de Itô

En esta sección definiremos los procesos de Itô. Si dejamos variable el límite superior $t \geq 0$ en la integral de Itô podemos definir el proceso

$$X_t = \int_{t_0}^t f(s) dW_s,$$

es decir, tenemos un proceso estocástico definido como resultado de una integral de Itô. En particular, de la definición se puede comprobar que $X_{t_0} = 0$ y

$$X_t - X_s = \int_s^t f(u) dW_u$$

Veamos algunas de sus propiedades.

Teorema 1.9. Sea $f \in L_{ad}^2$ y supongamos que

$$X_t = \int_{t_0}^t f(s) dW_s$$

para todo $t \in I$. Entonces:

(a) X_t es $\mathcal{F}_t$ -medible³.

³Recordemos que $\mathcal{F}_t$ es la σ -álgebra definida en 1.4.

(b) X_t es una martingala con respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in I}$. Es decir,

$$\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s$$

para todo $0 \leq s < t$.

(c) Para $s, t \in I$ se cumple que $\mathbb{E}[X_t] = 0$ y la matriz de covarianzas será

$$\mathbb{E}[X_t X_s'] = \int_{t_0}^{\min\{s, t\}} \mathbb{E}[f(u)f(u)'] du$$

En particular, de la isometría de Itô se tiene

$$\mathbb{E}[|X_t|^2] = \int_{t_0}^t \mathbb{E}[|f(u)|^2] du$$

(d) Las realizaciones de X_t , es decir $X_t(\omega)$, son funciones continuas en c.t.p. $\omega \in \Omega$.

Podemos introducir una notación diferencial asociada a los procesos de Itô como

$$dX_t = f(t)dW_t \quad (1.7)$$

Nos centraremos concretamente en una forma más general de los procesos de Itô, aquellos de la forma

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t a(s)ds + \int_{t_0}^t b(s)dW_s \quad (1.8)$$

que análogamente a (1.7) tendrán su correspondiente notación⁴ diferencial

$$dX_t = a(t)dt + b(t)dW_t \quad (1.9)$$

Veamos un resultado fundamental en el cálculo diferencial estocástico conocido como fórmula de Itô. Presentaremos únicamente el caso unidimensional $d = m = 1$, una versión más general se puede encontrar en [1].

Teorema 1.10. Sea $u = u(t, x)$ una función continua sobre $I \times \mathbb{R}$ con derivadas parciales u_t, u_x, u_{xx} continuas. Si X_t es un proceso de Itô con diferencial definida sobre I tal que

$$dX_t = a(t)dt + b(t)dW_t$$

donde $a \in L^1$ y $b \in L^2_{\text{ad}}$ y W_t son funciones escalares de t , entonces $Y_t = u(t, X_t)$ es un proceso de Itô con forma diferencial sobre I definida por

$$dY_t = \left(u_t(t, X_t) + u_x(t, X_t)a(t) + \frac{1}{2}u_{xx}(t, X_t)b(t)^2 \right) dt + u_x(t, X_t)b(t)dW_t \quad (1.10)$$

⁴Recordemos que estamos obviando el argumento ω , por lo que la notación correcta sería $dX_t(\omega) = a(t, \omega)dt + b(t, \omega)dW_t$.

La fórmula de Itô es la regla de la cadena del cálculo diferencial estocástico de Itô. Observar que el término $\frac{1}{2}u_{xx}b^2$ no aparece en el cálculo diferencial ordinario ni en el de Stratonovich.

Tomando por ejemplo $u(x_1, x_2) = x_1x_2$ con $X_1(t)$ y $X_2(t)$ dos procesos de Itô⁵ cuyas diferenciales estocásticas son

$$\begin{aligned}dX_1(t) &= a_1(t)dt + b_1(t)dW_t \\dX_2(t) &= a_2(t)dt + b_2(t)dW_t\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}d(X_1(t)X_2(t)) &= X_1(t)dX_2(t) + X_2(t)dX_1(t) + b_1(t)b_2(t)dt \\&= (X_1a_2 + X_2a_1 + b_1b_2)dt + (X_1b_2 + X_2b_1)dW_t\end{aligned}$$

con lo que la regla de Leibniz no se verifica en el cálculo estocástico de Itô, ya que como vemos aparece el término b_1b_2 . Tomando $b_1 = b_2 = 0$ recuperamos el caso ordinario.

1.4. Ecuaciones diferenciales estocásticas

En este trabajo estudiaremos únicamente aquellos procesos de Itô de la forma (1.9) en los que las funciones a y b dependen de ω a través de X_t . Es decir,

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t \quad (1.11)$$

que junto con la condición inicial X_{t_0} es notación para denotar la ecuación integral

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t a(s, X_s)ds + \int_{t_0}^t b(s, X_s)dW_s \quad (1.12)$$

Así, la ecuación (1.11) recibe el nombre de ecuación diferencial estocástica (con condición inicial X_{t_0}). Definamos el concepto de solución de una ecuación diferencial estocástica.

Definición 1.11. Se dice que un proceso estocástico X_t es solución de (1.11) sobre $[t_0, T]$ si se cumple:

- (a) X_t está adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [t_0, T]}$.
- (b) Las funciones $a(t, X_t(\omega))$ y $b(t, X_t(\omega))$ son tales que

$$\int_{t_0}^T |a(s, X_t)|ds < \infty$$

y

$$\int_{t_0}^T |b(s, X_t)|^2ds < \infty$$

con probabilidad 1. Es decir, $b \in \mathcal{L}_{ad}$ y las trayectorias del proceso $a(t, X_t)$ están en $L^1(I, \mathcal{B}(I), \mu)$ con probabilidad 1.

⁵Por comodidad se ha tomado la notación $X(t)$ en lugar de X_t .

(c) X_t satisface la ecuación (1.12) para todo $t \in [t_0, T]$ con probabilidad 1.

De forma análoga al caso de ecuaciones diferenciales ordinarias, existe un teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales estocásticas.

Teorema 1.12. *Sea la ecuación diferencial estocástica*

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t \quad (1.13)$$

definida sobre $t \in [t_0, T]$ con condición inicial X_{t_0} , donde W_t es un proceso de Wiener m -dimensional y X_{t_0} es una variable aleatoria independiente de $W_t - W_{t_0}$ para $t \geq t_0$. Supongamos que las funciones $a : [t_0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ y $b : [t_0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times m}$ son medibles sobre $[t_0, T] \times \mathbb{R}^d$ y cumplen las siguientes propiedades: Existe $K > 0$ tal que

(a) *Para todo $t \in [t_0, T], x, y \in \mathbb{R}^d$ satisfacen la condición de Lipschitz, i.e.*

$$|a(t, x) - a(t, y)| + |b(t, x) - b(t, y)| \leq K|x - y| \quad (1.14)$$

(b) *Para todo $t \in [t_0, T]$ y $x \in \mathbb{R}^d$ la restricción de crecimiento*

$$|a(t, x)|^2 + |b(t, x)|^2 \leq K^2 (1 + |x|^2) \quad (1.15)$$

Entonces (1.13) tiene solución única en $[t_0, T]$ cuyas trayectorias son continuas con probabilidad 1 y satisface la condición inicial X_{t_0} . La unicidad implica que si X_t y $\tilde{X}_t$ son dos soluciones continuas en c.t.p. de (1.13) con el mismo valor inicial X_{t_0} , entonces

$$\mathbb{P} \left(\left\{ \omega \in \Omega : \sup_{t_0 \leq t \leq T} |X_t(\omega) - \tilde{X}_t(\omega)| > 0 \right\} \right) = 0$$

En este caso decimos que la solución tiene trayectorias únicas. Además, la solución verifica

$$\sup_{t \in [t_0, T]} \mathbb{E} [|X_t|^2] < \infty. \quad (1.16)$$

Dado que se saben resolver *muy pocas* ecuaciones diferenciales estocásticas (lineales o reducibles a lineales mediante un cambio de variable) los métodos numéricos tienen una gran relevancia. A lo largo de este trabajo nos centraremos en introducir la teoría de los métodos numéricos para ecuaciones diferenciales estocásticas generalizando los métodos de Taylor ya existentes para la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Capítulo 2

Métodos de Itô-Taylor

Para comenzar recordemos brevemente cómo se construyen y en qué consisten los métodos de Taylor para el caso ordinario¹. Partiendo de una ecuación diferencial ordinaria dada por

$$\frac{dX_t}{dt} = a(X_t)$$

definida sobre $[t_0, T]$ con X_{t_0} el valor inicial. Si tenemos $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable entonces aplicando la regla de la cadena

$$\frac{df(X_t)}{dt} = a(X_t) \frac{\partial f(X_t)}{\partial x};$$

por tanto, si se define el operador $L = a \frac{\partial}{\partial x}$ tendremos que, en forma integral,

$$f(X_t) = f(X_{t_0}) + \int_{t_0}^t a(X_s) \frac{\partial f(X_s)}{\partial x} ds = f(X_{t_0}) + \int_{t_0}^t Lf(X_s) ds$$

Notemos que si $f(x) = x$ entonces $Lf = a$ y recuperamos la ecuación diferencial inicial en su forma integral

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t a(X_s) ds. \quad (2.1)$$

Aplicando el mismo razonamiento a $a(X_s)$ vemos que

$$a(X_s) = a(X_{t_0}) + \int_{t_0}^s La(X_u) du$$

con lo cual la expresión (2.1) se puede escribir como

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t \left(a(X_{t_0}) + \int_{t_0}^s La(X_u) du \right) ds = X_{t_0} + a(X_{t_0})(t - t_0) + R_2$$

con $R_2 = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s La(X_u) du ds$. Podemos volver a repetir el mismo proceso aplicado a $La(X_u)$ para obtener

$$X_t = X_{t_0} + a(X_{t_0})(t - t_0) + La(X_{t_0}) \frac{(t - t_0)^2}{2} + \underbrace{\int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \int_{t_0}^u L^2 a(X_v) dv du ds}_{R_3}$$

¹Consideramos ecuaciones diferenciales ordinarias autónomas.

donde se ha denotado $L^2 = L \circ L$. Así, si suponemos que $a = a(x)$ es una función $r + 1$ veces diferenciable se obtiene

$$X_t = \sum_{l=0}^r \frac{(t-t_0)^l}{l!} L^l a(X_{t_0}) + \int_{t_0}^t \cdots \int_{t_0}^{s_2} L^{r+1} a(X_{s_1}) ds_1 \dots ds_{r+1} \quad (2.2)$$

donde $L^0 a(X_{t_0}) = X_{t_0}$. En general, tomando $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable $r + 1$ veces tenemos la formula de Taylor

$$f(X_t) = f(X_{t_0}) + \sum_{l=1}^r \frac{(t-t_0)^l}{l!} L^l f(X_{t_0}) + \int_{t_0}^t \cdots \int_{t_0}^{s_2} L^{r+1} f(X_{s_1}) ds_1 \dots ds_{r+1} \quad (2.3)$$

La idea principal de este trabajo es extender esta clase de aproximaciones a las ecuaciones diferenciales estocásticas. Dada una ecuación diferencial estocástica en su forma integral (1.12)

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t a(X_s) ds + \int_{t_0}^t b(X_s) dW_s \quad (2.4)$$

definida sobre $[t_0, T]$, si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función dos veces diferenciable sobre la cual aplicamos la fórmula de Itô² obtenemos

$$f(X_t) = f(X_{t_0}) + \int_{t_0}^t \left(a(X_s) \frac{\partial f}{\partial x}(X_s) + \frac{1}{2} b^2(X_s) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_s) \right) ds + \int_{t_0}^t b(X_s) dW_s$$

Así, de forma similar al caso anterior se definen los operadores

$$L^0 = a \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad \text{y} \quad L^1 = b \frac{\partial}{\partial x}$$

de tal forma que

$$f(X_t) = f(X_{t_0}) + \int_{t_0}^t L^0 f(X_s) ds + \int_{t_0}^t L^1 f(X_s) dW_s,$$

Tomando $f(x) = x$ recuperamos la ecuación integral estocástica dada en (2.4). Aplicando la fórmula de Itô para $f = a$ y $f = b$ y utilizando la notación introducida

$$\begin{aligned} X_t &= X_{t_0} + \int_{t_0}^t \left(a(X_{t_0}) + \int_{t_0}^s L^0 a(X_u) du + \int_{t_0}^s L^1 a(X_u) dW_u \right) ds \\ &\quad + \int_{t_0}^t \left(b(X_{t_0}) + \int_{t_0}^s L^0 b(X_u) du + \int_{t_0}^s L^1 b(X_u) dW_u \right) dW_s \\ &= X_{t_0} + a(X_{t_0}) \int_{t_0}^t ds + b(X_{t_0}) \int_{t_0}^t dW_s + R_2 \end{aligned}$$

con resto

$$\begin{aligned} R_2 &= \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s L^0 a(X_z) du ds + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s L^1 a(X_z) dW_u ds \\ &\quad + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s L^0 b(X_z) du dW_s + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s L^1 b(X_z) dW_u dW_s \end{aligned}$$

²Recordemos que la regla de la cadena no se verifica en el cálculo de Itô, como vimos en 1.10.

Aplicando nuevamente la fórmula de Itô por ejemplo a $f = L^1 b$ tenemos

$$X_t = X_{t_0} + a(X_{t_0}) \int_{t_0}^t ds + b(X_{t_0}) \int_{t_0}^t dW_s + L^1 b(X_{t_0}) \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s dW_u dW_s + R_3$$

donde R_3 contiene integrales iteradas triples con respecto a dW_s y ds . Estas expansiones se pueden generalizar al caso d -dimensional no homogéneo, es decir, cuando (2.4) es de la forma

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t a(s, X_s) ds + \sum_{j=1}^m \int_{t_0}^t b^j(s, X_s) dW_s^j \quad (2.5)$$

donde m es la dimensión del proceso de Wiener.

Por tanto, será necesario definir una serie de conceptos previos a la hora de generalizar las aproximaciones de Taylor al caso estocástico.

2.1. Desarrollos de Itô-Taylor

2.1.1. Multi-índices

Comenzaremos esta sección recordando la definición de multi-índice.

Definición 2.1. Decimos que α es un multi-índice de longitud $l := l(\alpha)$ si α es un vector de la forma

$$\alpha = (j_1, j_2, \dots, j_l) \quad (2.6)$$

donde $j_i \in \{0, 1, \dots, m\}$ para $i = 1, \dots, l$ y $m \in \mathbb{N}$.

Posteriormente veremos que m denotará el número de componentes que estemos considerando del proceso de Wiener. Por ejemplo, si estamos tomando un proceso de Wiener unidimensional entonces $m = 1$ y los multi-índices que consideraremos serán aquellos de la forma $(j_1, \dots, j_l)$ donde $j_i \in \{0, 1\}$ para todo $i = 1, \dots, l$. Por otro lado, en el caso trivial en el que no tengamos un proceso de Wiener entonces $m = 0$ y $\alpha = (0, \dots, 0)$ es el único multi-índice posible siguiendo la definición anterior.

Denotaremos por v al multi-índice de longitud cero, $l(v) = 0$. Además, definiremos $n(\alpha)$ como el número de componentes nulas en un multi-índice. En el caso trivial que hemos comentado anteriormente, es evidente que $n(\alpha) = l(\alpha)$.

Definición 2.2. Dado $m \in \mathbb{N}$ fijo, definiremos el conjunto de todos los multi-índices como el conjunto

$$\mathcal{M} = \{(j_1, j_2, \dots, j_l) : j_i \in \{0, 1, \dots, m\} \text{ con } i \in \{1, 2, \dots, l\}; l \in \mathbb{N}\} \cup \{v\} \quad (2.7)$$

Es importante ver que el conjunto definido depende del $m \in \mathbb{N}$ fijado. Debido a que el caso unidimensional es de gran relevancia, notemos que si $m = 1$ entonces

$$\mathcal{M} = \{(j_1, j_2, \dots, j_l) : j_i \in \{0, 1\} \text{ con } i \in \{1, 2, \dots, l\}; l \in \mathbb{N}\} \cup \{v\}$$

Para finalizar esta sección, dotaremos al conjunto $\mathcal{M}$ de algunas operaciones relevantes. Sea $\alpha \in \mathcal{M}$ tal que $l(\alpha) \geq 1$, definiremos los multi-índices $-\alpha$ y $\alpha-$ como aquellos multi-índices resultantes de eliminar la primera o la última componente de α , respectivamente. Nótese que si $l(\alpha) = 1$, entonces $-\alpha = \alpha- = v$.

Por último, definiremos la operación concatenación de dos multi-índices $\alpha, \beta \in \mathcal{M}$ con componentes $\alpha = (j_1, \dots, j_r)$ y $\beta = (i_1, \dots, i_s)$ como

$$\alpha * \beta = (j_1, \dots, j_r, i_1, \dots, i_s)$$

2.1.2. Integrales de Itô múltiples

Antes de describir el espacio de funciones $\mathcal{H}_\alpha$ sobre el que tienen que estar definidos los integrandos que aparecen a continuación, daremos la definición de integral de Itô múltiple y con ayuda de dicha definición construiremos el espacio $\mathcal{H}_\alpha$.

Definición 2.3. Sea $\alpha \in \mathcal{M}$ un multi-índice y $f \in \mathcal{H}_\alpha$ un proceso estocástico, definimos su integral de Itô múltiple de forma recursiva. Es decir, tomando $l = l(\alpha)$

$$I_\alpha[f]_{t_0, T} := \begin{cases} f(T) & \text{si } l = 0 \\ \int_{t_0}^T I_{\alpha-}[f]_{t_0, s} ds & \text{si } l \geq 1 \text{ y } j_l = 0 \\ \int_{t_0}^T I_{\alpha-}[f]_{t_0, s} dW_s^{j_l} & \text{si } l \geq 1 \text{ y } j_l \geq 1 \end{cases} \quad (2.8)$$

En resumen, vemos que dado $\alpha = (j_1, j_2, \dots, j_l) \in \mathcal{M}$ el orden de integración es de izquierda a derecha, donde $j_i = 0$ hace referencia a una integral de Lebesgue con respecto al parámetro t y $j_i \geq 1$ a la integral de Itô definida en (1.2) sobre la componente j_i -ésima del proceso de Wiener m -dimensional.

Algunos ejemplos que serán de utilidad más adelante son las integrales múltiples sobre los multi-índices v , (0) , (1) o $(0, 1)$,

$$\begin{aligned} I_v[f]_{t_0, T} &= f(T) \\ I_{(0)}[f]_{t_0, T} &= \int_{t_0}^T f(t) dt \\ I_{(1)}[f]_{t_0, T} &= \int_{t_0}^T f(t) dW_t^1 \\ I_{(0,1)}[f]_{t_0, T} &= \int_{t_0}^T \int_{t_0}^t f(s) ds dW_t^1 \end{aligned}$$

Observación 2.4. Recordemos que a lo largo del trabajo se utiliza frecuentemente un abuso de notación, ya que f no es únicamente una función de t sino que es notación simplificada para $f(t, \omega)$ con $\omega \in \Omega$. Así, las integrales múltiples correspondientes son a su vez variables aleatorias. Por tanto, dado $\omega \in \Omega$ la notación completa será

$$I_{(0,1)}[f]_{t_0, T}(\omega) = \int_{t_0}^T \int_{t_0}^t f(s, \omega) ds dW_t^1(\omega).$$

A continuación nos centraremos en la construcción del espacio $\mathcal{H}_\alpha$ con la intención de que las integrales múltiples mencionadas anteriormente estén correctamente definidas. Construiremos dicho espacio por recurrencia. Definiremos tres conjuntos de procesos estocásticos adaptados³ continuos por la derecha $\{f(t) : t \in [t_0, T]\}$.

- $\mathcal{H}_v$ es el conjunto de dichos procesos tales que

$$|f(t, \omega)| < \infty$$

- $\mathcal{H}_{(0)}$ es el conjunto de procesos tales que

$$\int_{t_0}^t |f(t, \omega)| < \infty$$

- $\mathcal{H}_{(j)}$ con $j > 1$ es el conjunto de todos los procesos tales que

$$\int_{t_0}^t |f(t, \omega)|^2 < \infty$$

donde las desigualdades anteriores se cumplen en c.t.p. $\omega \in \Omega$ y para todo $t \in [t_0, T]$.

Así, dado $\alpha = (j_1, \dots, j_l) \in \mathcal{M}$ y siguiendo el desarrollo anterior definiremos $\mathcal{H}_\alpha$ como los procesos estocásticos adaptados continuos por la derecha tales que las integrales $\{I_{\alpha-}[f]_{t_0,t}, t \in [t_0, T]\}$ que dependen de t satisfagan

$$I_{\alpha-}[f]_{t_0,t} \in \mathcal{H}_{(j_l)}.$$

De esta forma las integrales que aparecen en cada integral múltiple sobre α están correctamente definidas, tanto la integral de Lebesgue como la integral de Itô. Veamos un ejemplo:

$$I_{(1,0,2)}[f]_{t_0,T} = \underbrace{\int_{t_0}^T \underbrace{\int_{t_0}^t \underbrace{\int_{t_0}^s \underbrace{f(u)}_{\in \mathcal{H}_{(1)}} dW_u^1}_{\in \mathcal{H}_{(0)}} ds}_{\in \mathcal{H}_{(2)}} dW_t^2$$

Por tanto, $\mathcal{H}_{(1,0,2)}$ estará formado por los procesos tales que $f \in \mathcal{H}_{(1)}$, $I_{(1)}[f]_{t_0,s} \in \mathcal{H}_{(0)}$ y $I_{(2)}[I_{(1)}[f]_{t_0,s}]_{t_0,t} \in \mathcal{H}_{(2)}$.

Un caso particular de estas integrales múltiples se tiene cuando $f(t, \omega) \equiv 1$, y utilizaremos la notación $I_{\alpha, t_0, T}$. Además, si no hay confusión sobre el intervalo temporal simplificaremos la notación como I_α . A estas integrales se las conoce como integrales múltiples de la unidad. Veamos como ejemplo los multi-índices $\alpha = (0)$, $\alpha = (1)$, $\alpha = (0, 0)$ y

³Con adaptados nos referimos a que satisface la condición (b) de la definición 1.4.

$\alpha = (1, 1)$ con $t_0 = t_n$ y $T = t_{n+1}$:

$$\begin{aligned}
I_{(0)} &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} dt = t_{n+1} - t_n := \Delta \\
I_{(1)} &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} dW_t = W_{t_{n+1}} - W_{t_n} := \Delta W \\
I_{(0,0)} &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{t_n}^t ds dt = \Delta^2/2 \\
I_{(1,1)} &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{t_n}^t dW_s dW_t
\end{aligned} \tag{2.9}$$

En particular, si $\alpha = (0, 0, \dots, 0)$ entonces $I_\alpha = \Delta^{l(\alpha)}/l(\alpha)!$.

2.1.3. Propiedades de las integrales de Itô múltiples

En esta sección estudiaremos algunas propiedades y relaciones entre integrales múltiples de la unidad. Por simplicidad, denotaremos $I_\alpha[1]_{0,t}$ como $I_{\alpha,t}$ para $\alpha \in \mathcal{M}$, $W_t^0 = t$ para $t \geq 0$ y 1_A es la función indicadora definida sobre el conjunto A .

Proposición 2.5. Sea $l = l(\alpha)$ con $\alpha = (j_1, j_2, \dots, j_l) \in \mathcal{M}$ donde $j_i \in \{0, 1, \dots, m\}$. Entonces

$$\begin{aligned}
I_{(j),t} I_{\alpha,t} &= \sum_{i=0}^l I_{(j_1, \dots, j_i, j, j_{i+1}, \dots, j_l), t} \\
&\quad + \sum_{i=1}^l 1_{\{j_i=j \neq 0\}} I_{(j_1, \dots, j_{i-1}, 0, j_{i+1}, \dots, j_l), t}
\end{aligned} \tag{2.10}$$

para todo $t \geq 0$ y $j \in \{0, 1, \dots, m\}$.

Demostración. Sea $\{X_t, t \geq 0\}$ un proceso de Itô multidimensional cuyas componentes son integrales múltiples de la unidad

$$X_t = \begin{pmatrix} X_t^{(0)} \\ \vdots \\ X_t^{(m)} \\ X_t^{(j_1, j_2)} \\ \vdots \\ X_t^{(j_1, j_2, \dots, j_l)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{(0),t} \\ \vdots \\ I_{(m),t} \\ I_{(j_1, j_2),t} \\ \vdots \\ I_{(j_1, j_2, \dots, j_l),t} \end{pmatrix}$$

Sea $\beta = (i_1, i_2, \dots, i_r)$ con $1 \leq r \leq l$ y definamos

$$a^\beta = \begin{cases} x^{\beta-} & \text{si } i_r = 0, \\ 0 & \text{si } i_r \neq 0. \end{cases} \quad b^{\beta,i} = \begin{cases} x^{\beta-} & \text{si } i = i_r \in \{1, \dots, m\}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por definición de $I_{\beta,t}$, claramente $I_{\beta,0} = 0$, con lo que X_0 es el vector nulo y aplicando la fórmula de Itô

$$d(I_{(j),t} I_{\alpha,t}) = I_{\alpha,t} dI_{(j),t} + I_{(j),t} dI_{\alpha,t}$$

que en forma integral y aplicando la recursividad de las integrales múltiples

$$I_{(j),t}I_{\alpha,t} = \int_0^t I_{\alpha,s}dI_{(j),s} + \int_0^t I_{(j),s}I_{\alpha-,s}dW_s^{j_l} + 1_{\{j_l=j \neq 0\}} \int_0^t I_{\alpha-,s}ds \quad (2.11)$$

Vemos primero el caso $l(\alpha) = 1$. El primer término de (2.11) es

$$\int_0^t I_{\alpha,s}dI_{(j),s} = \int_0^t \int_0^s dW_u^{j_1} dW_s^j = I_{(j_1,j),t},$$

mientras que el segundo término

$$\int_0^t I_{(j),s}I_{\alpha-,s}dW_s^{j_1} = \int_0^t \int_0^s dW_u^j dW_s^{j_1} = I_{(j,j_1),t},$$

y el último término de (2.11) es $1_{\{j_1=j \neq 0\}}I_{(0)}$, por tanto para $l = 1$ (2.11) coincide con expresión buscada (2.10). Haremos inducción sobre $l(\alpha)$. Si $l(\alpha) \geq 2$ obtenemos mediante un razonamiento análogo

$$I_{(j),t}I_{\alpha,t} = I_{(j_1,\dots,j_l,j),t} + \int_0^t I_{(j),s}I_{\alpha-,s}dW_s^{j_l} + 1_{\{j_l=j \neq 0\}}I_{(j_1,\dots,j_l,0),t}$$

y dado que $l(\alpha-) < l(\alpha)$ aplicando inducción sobre el producto $I_{(j),s}I_{\alpha-,s}$ se tiene que

$$I_{(j),s}I_{\alpha-,s} = I_{(j_1,\dots,j_{l-1}),s} + \int_0^s I_{(j),u}I_{(\alpha-)-,u}dW_s^{l_{j-1}} + 1_{\{j_{l-1}=j \neq 0\}}I_{(j_1,\dots,j_{l-1},0),t}$$

y aplicando recursivamente este procedimiento se obtiene el resultado buscado. $\square$

Veamos a continuación algunos ejemplos en los que se aplica esta proposición. Fijaremos $j = 0$, si $\alpha = (1)$ entonces de (2.10) tenemos

$$I_{(0)}I_{(1)} = I_{(0,1)} + I_{(1,0)} \quad (2.12)$$

y análogamente si tomamos $\alpha = (1, 1)$ obtenemos

$$I_{(0)}I_{(1,1)} = I_{(0,1,1)} + I_{(1,0,1)} + I_{(1,1,0)}. \quad (2.13)$$

Corolario 2.6. Si $\alpha = (j, \dots, j) \in \mathcal{M}$ con $l(\alpha) = l \geq 2$ y $j \in \{0, 1, \dots, m\}$, entonces para todo $t \geq 0$

$$I_{\alpha,t} = \begin{cases} \frac{1}{l!}t^l & \text{si } j = 0, \\ \frac{1}{l}(W_t^j I_{\alpha-,t} - tI_{(\alpha-)-,t}) & \text{si } j \geq 1. \end{cases} \quad (2.14)$$

Demostración. Sea $\alpha = (j_1, j_2, \dots, j_l) = (j, j, \dots, j)$, analizaremos primero el caso en que $j \neq 0$. Aplicando la proposición 2.5 al multi-índice $(\alpha-)-$ y a $I_{(0),t} = t$,

$$\begin{aligned} I_{(0),t}I_{(\alpha-)-,t} &= \sum_{i=0}^{l-2} I_{(j_1,\dots,j_i,0,j_{i+1},\dots,j_{l-2})} + \sum_{i=1}^{l-2} \underbrace{1_{\{0=j \neq 0\}}}_0 I_{(j_1,\dots,j_{i-1},0,j_{i+1},\dots,j_{l-2})} \\ &= \sum_{i=0}^{l-2} I_{(j_1,\dots,j_i,0,j_{i+1},\dots,j_{l-2})} = \sum_{i=1}^{l-1} I_{(j_1,\dots,j_{i-1},0,j_{i+1},\dots,j_{l-1})} \end{aligned}$$

ya que $l((\alpha-)-) = l - 2$. Análogamente, tomando $\alpha-$ e $I_{(j),t}$ tenemos

$$\begin{aligned} I_{(j),t} I_{\alpha-,t} &= \sum_{i=0}^{l-1} I_{(j_1, \dots, j_i, j, j_{i+1}, \dots, j_{l-1}),t} + \sum_{i=1}^{l-1} \underbrace{1_{\{j=j \neq 0\}}}_1 I_{(j_1, \dots, j_{i-1}, 0, j_{i+1}, \dots, j_{l-1})} \\ &= \sum_{i=0}^{l-1} I_{(j_1, \dots, j_i, j, j_{i+1}, \dots, j_{l-1}),t} + \sum_{i=1}^{l-1} I_{(j_1, \dots, j_{i-1}, 0, j_{i+1}, \dots, j_{l-1})} \\ &= l I_{\alpha,t} + \sum_{i=1}^{l-1} I_{(j_1, \dots, j_{i-1}, 0, j_{i+1}, \dots, j_{l-1})}. \end{aligned}$$

Así, restando ambas igualdades

$$I_{(j),t} I_{\alpha-,t} - t I_{(\alpha-)-,t} = I_{(j),t} I_{\alpha-,t} - I_{(0),t} I_{(\alpha-)-,t} = l I_{\alpha,t}$$

probando el caso $j \geq 1$. Si $j = 0$, entonces $\alpha = (0, 0, \dots, 0)$ y por tanto las integrales son ordinarias y como vimos anteriormente $I_{\alpha,t} = t^l/l!$. $\square$

Por ejemplo, si tomamos $m = 1$ y $\alpha = (1, 1)$ tenemos que

$$I_{(1,1),t_n,t_{n+1}} = \frac{1}{2} (\Delta W \cdot I_{(1),t_n,t_{n+1}} - \Delta \cdot I_{v,t_n,t_{n+1}}) = \frac{1}{2} (\Delta W^2 - \Delta).$$

Es decir, el corolario 2.6 permite bajar el *grado*⁴ de las integrales múltiples de la unidad.

Dada su relevancia en los métodos numéricos que estudiaremos posteriormente, a continuación describiremos la variable aleatoria $I_{(1,0)}$.

Proposición 2.7. *La variable aleatoria $I_{(1,0),t_n,t_{n+1}} \equiv I_{(1,0)} = \Delta Z$ es una variable aleatoria normal con media, varianza y covarianza*

$$\mathbb{E} [I_{(1,0)}] = 0, \quad \mathbb{E} [I_{(1,0)}^2] = \frac{1}{3} \Delta^3, \quad \mathbb{E} [I_{(1,0)} I_{(1)}] = \frac{1}{2} \Delta^2.$$

Demostración. La normalidad de ΔZ es consecuencia de que las integrales son independientes de ω , ver [1]. Aplicando el teorema de Fubini y de la definición de proceso de Wiener

$$\mathbb{E} [I_{(1,0)}] = \mathbb{E} \left[\int_{t_n}^{t_{n+1}} (W_s - W_{t_n}) ds \right] = 0.$$

En general, si existe $j \geq 1$ tal que $j \in \alpha$, entonces $\mathbb{E} [I_\alpha] = 0$ debido a que la esperanza de una integral de Itô es cero. Por otra parte, de la proposición 2.5 vista anteriormente tenemos

$$I_{(1)} I_{(1,0)} = I_{(1,1,0)} + I_{(1,1,0)} + I_{(1,0,1)} + I_{(0,0)}$$

y tomando esperanzas $\mathbb{E} [I_{(1)} I_{(1,0)}] = \mathbb{E} [I_{(0,0)}] = \Delta^2/2$. Por último, de la relación (2.12) tenemos que

$$\mathbb{E} [I_{(1,0)}^2] = \mathbb{E} [(I_{(0)} I_{(1)} - I_{(0,1)})^2] = \Delta^2 \mathbb{E} [I_{(1)}^2] - 2\Delta \mathbb{E} [I_{(1)} I_{(0,1)}] + \mathbb{E} [I_{(0,1)}^2]$$

donde $\mathbb{E} [I_{(1)}^2] = \Delta$ es la varianza de la integral de Itô con integrando unidad. Nuevamente a partir de la proposición 2.5

$$I_{(1)} I_{(0,1)} = I_{(1,0,1)} + I_{(0,1,1)} + I_{(0,1,1)} + I_{(0,0)}$$

⁴En el sentido de expresar dicha integral en función de integrales sobre un multi-índice de menor longitud.

y tomando esperanzas $\mathbb{E} [I_{(1)}I_{(0,1)}] = \mathbb{E} [I_{(0,0)}] = \Delta^2/2$. Aplicando la isometría de Itô

$$\mathbb{E} [I_{(0,1)^2}] = \mathbb{E} \left[\left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} s \, dW_s \right)^2 \right] = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbb{E} [s^2] \, ds = \int_{t_n}^{t_{n+1}} s^2 \, ds = \frac{\Delta^3}{3}.$$

Así, $\mathbb{E} [I_{(1,0)}^2] = \Delta^2\Delta - 2\Delta\Delta^2/2 + \Delta^3/3 = \Delta^3/3$ como queríamos probar. $\square$

2.1.4. Coeficientes de la aproximación de Itô-Taylor

Recordemos que la expresión de la ecuación integral estocástica en el caso d -dimensional viene dada por

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t a(s, X_s) ds + \sum_{j=1}^m \int_{t_0}^t b^j(s, X_s) dW_s^j$$

donde $a : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ y $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times m}$. Análogamente a como se desarrolló en la introducción y siguiendo la fórmula de Itô, definiremos los operadores para el caso d -dimensional

$$L^0 = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^d a^k \frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^d \sum_{j=1}^m b^{k,j} b^{l,j} \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^l} \quad (2.15)$$

y para $j \in \{1, 2, \dots, m\}$

$$L^j = \sum_{k=1}^d b^{k,j} \frac{\partial}{\partial x^k} \quad (2.16)$$

con W^j la componente j -ésima de un proceso de Wiener m -dimensional y $b^{j,k}$ el elemento de matriz de b situado en la fila j y columna k . Exigiremos que f sea una función⁵ diferenciable con continuidad $l(\alpha) + n(\alpha)$ veces. Dado el multi-índice $\alpha = (j_1, j_2, \dots, j_l)$ denotaremos por L^α a la composición $L^{j_1} \circ \dots \circ L^{j_l}$ y llamaremos a $L^\alpha f$ coeficiente de Itô. Tomaremos que $L^v f = f$.

Veamos algunos ejemplos. En el caso más sencillo consideramos una ecuación autónoma, $d = m = 1$ y $f(t, x) = x$, entonces

$$L^{(0)} f = a, \quad L^{(1)} f = b \quad \text{y} \quad L^{(0,1)} f = ab' + \frac{1}{2} b^2 b''$$

donde a' y b' hacen referencia a la derivada con respecto a x . Calculemos el caso $\alpha = (1, 0)$,

$$L^{(1,0)} f = L^1(L^0 f) = L^1 \left(\frac{\partial f}{\partial t} + a \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) = L^1 a = ba'$$

ya que $f(t, x) = x$. Del mismo modo, si $\alpha = (1, 1, 1)$ entonces

$$L^{(1,1,1)} = L^{(1,1)}(L^1 f) = L^{(1,1)} \left(b \frac{\partial f}{\partial x} \right) = L^1(L^1 b) = L^1(bb') = b^2 b'' + b(b')^2$$

En general, los coeficientes para el caso autónomo unidimensional tales que $l(\alpha) \leq 3$ se pueden encontrar en [7].

⁵Salvo que se indique lo contrario tomaremos $f(t, x) = x$, tal y como hicimos al comienzo del capítulo.

2.1.5. Conjuntos jerarquizados

Las integrales múltiples que aparecerán en el desarrollo de Itô-Taylor no obedecen a cualquier conjunto de multi-índices, sino que aparecerán únicamente aquellos multi-índices pertenecientes a unos conjuntos concretos llamados conjuntos jerarquizados.

Definición 2.8. Dado $\mathcal{A} \neq \emptyset$ un subconjunto de $\mathcal{M}$, se dice que $\mathcal{A}$ es un conjunto jerarquizado si se cumplen:

- (a) $\sup_{\alpha \in \mathcal{A}} l(\alpha) < \infty$,
- (b) $-\alpha \in \mathcal{A}$ para todo $\alpha \in \mathcal{A} \setminus \{v\}$.

Es trivial ver que $v \in \mathcal{A}$ ya que por la condición 2 de la definición anterior siempre que exista $\alpha \in \mathcal{A}$ tal que $l(\alpha) \geq 1$ se tendrá que $-(\dots(-\alpha)) = v \in \mathcal{A}$. Por ejemplo, en el caso $m = 1$ los conjuntos $\{v\}$, $\{v, (0), (1)\}$ y $\{v, (0), (1, 0), (0, 1, 0)\}$ son conjuntos jerarquizados.

Como ya vimos en la introducción a este capítulo, en las aproximaciones de Itô-Taylor de diferentes órdenes quedará un resto que involucra integrales múltiples sobre multi-índices pertenecientes a un determinado conjunto que llamaremos conjunto del resto.

Definición 2.9. Dado $\mathcal{A}$ un conjunto jerarquizado, denotaremos como $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ al conjunto del resto de $\mathcal{A}$, dado por

$$\mathcal{R}(\mathcal{A}) = \{\alpha \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{A} : -\alpha \in \mathcal{A}\}$$

Siguiendo con el ejemplo anterior tendremos que

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\{v\}) &= \{(0), (1)\} \\ \mathcal{R}(\{v, (0), (1)\}) &= \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\} \\ \mathcal{R}(\{v, (0), (1, 0), (0, 1, 0)\}) &= \{(1), (0, 0), (1, 1, 0), (0, 0, 1, 0), (1, 0, 1, 0)\} \end{aligned} \quad (2.17)$$

En particular, estudiaremos a continuación dos conjuntos jerarquizados que serán clave a la hora de describir los métodos de Itô-Taylor.

Proposición 2.10. *El conjunto*

$$\Gamma_r = \{\alpha \in \mathcal{M} : l(\alpha) \leq r\} \quad (2.18)$$

es un conjunto jerarquizado para cualquier $r \in \mathbb{N}$.

Demostración. Claramente se cumple la primera condición ya que

$$\sup_{\alpha \in \mathcal{A}} l(\alpha) \leq \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} r = r < \infty$$

Por otra parte, dado $\alpha \in \mathcal{A} \setminus \{v\}$, entonces $l(-\alpha) = l(\alpha) - 1 < r$ y por tanto $-\alpha \in \mathcal{A}$. $\square$

Proposición 2.11. *El conjunto*

$$\Lambda_r = \{\alpha \in \mathcal{M} : l(\alpha) + n(\alpha) \leq r\} \quad (2.19)$$

es un conjunto jerarquizado para cualquier $r \in \mathbb{N}$.

Demostración. Dado que $0 \leq n(\alpha) \leq l(\alpha)$ entonces $l(\alpha) \leq l(\alpha) + n(\alpha) \leq r$ y en consecuencia

$$\sup_{\alpha \in \mathcal{A}} l(\alpha) \leq r < \infty$$

Basta comprobar que $-\alpha \in \mathcal{A}$ para cualquier $\alpha \in \mathcal{A} \setminus \{v\}$. Sea $\alpha \in \mathcal{A} \setminus \{v\}$, entonces $l(-\alpha) = l(\alpha) - 1 < r$ y $n(-\alpha) \leq n(\alpha)$, con lo cual

$$l(-\alpha) + n(-\alpha) < l(\alpha) + n(\alpha) \leq r$$

como queríamos probar. $\square$

Además, podemos estudiar los elementos que conforman el conjunto $\mathcal{R}(\Gamma_r)$. Dado $\alpha \in \mathcal{R}(\Gamma_r)$, como $-\alpha \in \mathcal{A}$ entonces $l(-\alpha) \leq r$ y en consecuencia $l(\alpha) \leq r + 1$. Sin embargo, notemos que necesariamente $l(\alpha) > r$ ya que en caso contrario $\alpha \in \mathcal{A}$ lo que es una contradicción con la definición de $\mathcal{R}$. Así, el conjunto del resto de Γ_r es

$$\mathcal{R}(\Gamma_r) = \{\alpha \in \mathcal{M} : l(\alpha) = r + 1\} \quad (2.20)$$

Una vez conocidos estos conceptos previos, podemos dar paso al estudio de las expansiones de Itô-Taylor, las cuales se definirán y estudiarán a continuación.

2.1.6. Desarrollos de Itô-Taylor

Asumiremos que X_t es un proceso de Itô d -dimensional, ver (1.8), que viene determinado por

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t a(s, X_s) ds + \sum_{j=1}^m \int_{t_0}^t b^j(s, X_s) dW_s^j \quad (2.21)$$

donde $t \in [t_0, T]$. Antes de definir las expansiones de Itô-Taylor estudiaremos algunos resultados previos que serán de utilidad en su demostración.

Lema 2.12. Sea $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ de clase⁶ $\mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$; entonces

$$f(t, X_t) = f(t_0, X_{t_0}) + \sum_{j=0}^m I_{(j)} [L^j f]_{t_0, t} \quad (2.22)$$

Lema 2.13. Sea $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y sean $\alpha, \beta \in \mathcal{M}$ tal que $l(\beta) \geq 1$, entonces

$$I_\alpha [L^\beta f]_{t_0, t} = (L^\beta f)(t_0, X_{t_0}) I_\alpha + \sum_{j=0}^m I_{(j)*\alpha} [L^{(j)*\beta} f]_{t_0, t}. \quad (2.23)$$

Estamos entonces en condiciones de introducir los desarrollos de Itô-Taylor, que tendrán un papel fundamental en el desarrollo de este trabajo.

⁶Esto es, f es de clase $\mathcal{C}^1$ con respecto a la primera componente y de clase $\mathcal{C}^2$ con respecto a la segunda en sus correspondientes dominios.

Teorema 2.14. Dada una función $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{A}$ un conjunto jerarquizado, se cumple que

$$f(t, X_t) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} (L^\alpha f)(t_0, X_{t_0}) I_\alpha + \sum_{\alpha \in \mathcal{R}(\mathcal{A})} I_\alpha [L^\alpha f]_{t_0, t} \quad (2.24)$$

donde X_t viene descrito por (2.21), asumiendo que las derivadas de f , a y b y las integrales de Itô múltiples que aparecen en (2.24) existen. A la expresión (2.24) se le conoce como desarrollo de Itô-Taylor.

Demostración. Definamos $l_\infty(\mathcal{A}) = \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} l(\alpha)$. Aplicaremos inducción sobre $l_\infty(\mathcal{A})$. Si $l_\infty(\mathcal{A}) = 0$ entonces $l(\alpha) = 0$ para todo $\alpha \in \mathcal{A}$ y necesariamente $\mathcal{A} = \{v\}$ y por tanto $\mathcal{R}(\mathcal{A}) = \{(0), (1), \dots, (m)\}$. Como consecuencia del lema 2.12 tenemos

$$f(t, X_t) = f(t_0, X_{t_0}) + \sum_{j=0}^m I_{(j)} [L^{(j)} f]_{t_0, t} = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} (L^\alpha f)(t_0, X_{t_0}) I_\alpha + \sum_{\alpha \in \mathcal{R}(\mathcal{A})} I_\alpha [L^\alpha f]_{t_0, t}$$

y por tanto (2.24) se satisface para $l_\infty(\mathcal{A}) = 0$. Supongamos ahora que la expansión se verifica cualquier conjunto jerarquizado de longitud $k-1$ con $k > 1$. Sea $l_\infty(\mathcal{A}) = k \geq 1$ y definamos $\mathcal{E} = \{\alpha \in \mathcal{A} : l(\alpha) \leq k-1\}$. Como $l_\infty(\mathcal{E}) = k-1$, por hipótesis de inducción

$$f(t, X_t) = \sum_{\alpha \in \mathcal{E}} (L^\alpha f)(t_0, X_{t_0}) I_\alpha + \sum_{\alpha \in \mathcal{R}(\mathcal{E})} I_\alpha [L^\alpha f]_{t_0, t}$$

Veamos que $\mathcal{A} \setminus \mathcal{E} \subseteq \mathcal{R}(\mathcal{E})$. Dado $\alpha \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{E}$ entonces $l(\alpha) > k-1$. En particular, $\alpha \in \mathcal{A}$ y por tanto $l(\alpha) \leq l_\infty(\mathcal{A}) = k$. Así $l(\alpha) = k$ y $l(-\alpha) = k-1$, con lo que $-\alpha \in \mathcal{E}$. Utilizando la definición de conjunto del resto dada en 2.9 queda probado que $\alpha \in \mathcal{R}(\mathcal{E})$.

Dado que $\mathcal{R}(\mathcal{E}) = (\mathcal{A} \setminus \mathcal{E}) \cup (\mathcal{R}(\mathcal{E}) \setminus (\mathcal{A} \setminus \mathcal{E}))$ es una unión disjunta entonces podemos reescribir la igualdad anterior como

$$f(t, X_t) = \sum_{\alpha \in \mathcal{E}} (L^\alpha f)(t_0, X_{t_0}) I_\alpha + \sum_{\alpha \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{E}} I_\alpha [L^\alpha f]_{t_0, t} + \sum_{\alpha \in \mathcal{R}(\mathcal{E}) \setminus (\mathcal{A} \setminus \mathcal{E})} I_\alpha [L^\alpha f]_{t_0, t}$$

y aplicando el lema 2.13 para $\alpha \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{E}$ y $\beta = \alpha$ obtenemos

$$\begin{aligned} f(t, X_t) &= \sum_{\alpha \in \mathcal{E}} (L^\alpha f)(t_0, X_{t_0}) I_\alpha + \sum_{\alpha \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{E}} \left((L^\alpha f)(t_0, X_{t_0}) I_\alpha + \sum_{j=0}^m I_{(j)*\alpha} [L^{(j)*\alpha} f]_{t_0, t} \right) \\ &\quad + \sum_{\alpha \in \mathcal{R}(\mathcal{E}) \setminus (\mathcal{A} \setminus \mathcal{E})} I_\alpha [L^\alpha f]_{t_0, t} \\ &= \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} (L^\alpha f)(t_0, X_{t_0}) I_\alpha + \sum_{\alpha \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{E}} \sum_{j=0}^m I_{(j)*\alpha} [L^{(j)*\alpha} f]_{t_0, t} \\ &\quad + \sum_{\alpha \in \mathcal{R}(\mathcal{E}) \setminus (\mathcal{A} \setminus \mathcal{E})} I_\alpha [L^\alpha f]_{t_0, t} \\ &= \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} (L^\alpha f)(t_0, X_{t_0}) I_\alpha + \sum_{\alpha \in \mathcal{R}_1} I_\alpha [L^\alpha f]_{t_0, t} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_1 &= \left(\bigcup_{j=0}^m \{(j) * \alpha : \alpha \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{E}\} \right) \cup (\mathcal{R}(\mathcal{E}) \setminus (\mathcal{A} \setminus \mathcal{E})) \\
&= \{\alpha \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{E} : -\alpha \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{E}\} \cup (\{\alpha \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{E} : -\alpha \in \mathcal{E}\} \setminus \{\alpha \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{E} : \alpha \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{E}\}) \\
&= \{\alpha \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{A} : -\alpha \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{E}\} \cup \{\alpha \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{A} : -\alpha \in \mathcal{E}\} \\
&= \{\alpha \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{A} : -\alpha \in \mathcal{A}\} \\
&= \mathcal{R}(\mathcal{A})
\end{aligned}$$

con lo cual se verifica (2.24). $\square$

A continuación veremos algunos ejemplos relevantes. Si tomamos el conjunto jerarquizado trivial, $\mathcal{A} = \{v\}$, entonces generalizando la primera igualdad en (2.17) al caso de un proceso de Wiener m -dimensional se tendrá $\mathcal{R}(\{v\}) = \{(0), (1), \dots, (m)\}$. Así, aplicando el teorema (2.14) obtenemos

$$f(t, X_t) = f(t_0, X_{t_0}) + \sum_{j=1}^m I_{(j)} [L^{(j)} f]_{t_0, t}$$

ya que $I_v = 1$, y de la definición de integral de Itô múltiple dada en 2.3

$$f(t, X_t) = f(t_0, X_{t_0}) + \int_{t_0}^t L^0 f(s, X_s) ds + \sum_{j=1}^m \int_{t_0}^t L^j f(s, X_s) dW_s^j$$

que es la fórmula de Itô en su forma integral. En particular, tomando $d = m = 1$ tenemos

$$f(t, X_t) = f(t_0, X_{t_0}) + \int_{t_0}^t \left(\frac{\partial f}{\partial s} + a \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) ds + \int_{t_0}^t b \frac{\partial f}{\partial x} dW_s,$$

donde se ha utilizado la definición L^0 y L^j dada en (2.15) y (2.16) para $d = m = 1$. Podemos escribir dicha expresión en forma diferencial como

$$df(t, X_t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + a \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + b \frac{\partial f}{\partial x} dW_t$$

que coincide con la fórmula de Itô en el caso unidimensional vista en 1.10. Así, podemos ver la expansión de Itô-Taylor como una versión generalizada de la fórmula de Itô.

Consideremos ahora el caso $f(t, x) = f(x)$ con $d = m = 1$, $a = 1$ y $b = 0$; por simplicidad tomaremos $t_0 = 0$. Dichas elecciones implican que $dX_t = dt$ o de forma equivalente $X_t = t$ con $t \in [0, T]$. Notemos que $L^1 f = 0$ por la elección de b y por otra parte $L^0 f = f' \equiv \partial f / \partial x$ ya que hemos tomado f independiente de t . En general⁷, para $\alpha = (0, 0, \dots, 0)$ un multi-índice de longitud $l(\alpha) = r$, entonces $L^\alpha f = f^{(r)}$.

⁷Asumiremos que $f \in C^{r+1}(\mathbb{R})$ y denotaremos la derivada r -ésima de f con respecto a x como $f^{(r)}$ y por f' si $r = 1$.

Tomemos entonces el conjunto jerarquizado Γ_r definido en la proposición 2.10 para $r = 1, 2, \dots$ y sea $\mathcal{R}(\Gamma_r)$ su conjunto del resto calculado en 2.20. Aplicando el desarrollo de Itô-Taylor (2.24)

$$\begin{aligned} f(X_t) &= \sum_{\alpha \in \Gamma_r} (L^\alpha f)(X_{t_0}) I_\alpha + \sum_{\alpha \in \mathcal{R}(\Gamma_r)} I_\alpha [L^\alpha f]_{t_0, t} \\ &= f(X_{t_0}) + f'(X_{t_0}) \int_{t_0}^t ds + \dots + f^{(r)}(X_{t_0}) \int_{t_0}^t \dots \int_{t_0}^{s_2} ds_1 \dots ds_r \\ &\quad + \int_{t_0}^t \dots \int_{t_0}^{s_2} f^{(r+1)}(X_{s_1}) ds_1 \dots ds_{r+1} \end{aligned}$$

y dado que $X_t \equiv t$ entonces

$$f(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) + \dots + f^{(r)}(t_0) \frac{(t - t_0)^r}{r!} + \int_{t_0}^t \dots \int_{t_0}^{s_2} f^{(r+1)}(s_1) ds_1 \dots ds_{r+1}$$

que es el desarrollo de Taylor para el caso ordinario. Es decir, el desarrollo de Itô-Taylor es una generalización del desarrollo de Taylor determinista.

Como primera aproximación a la utilidad de esta expansión a los métodos numéricos, consideremos el conjunto jerarquizado $\Gamma_2 = \{\alpha \in \mathcal{M} : l(\alpha) \leq 2\}$ y la función $f(t, x) = x$. Así, aplicando el desarrollo de Itô-Taylor (2.24) truncado para el caso unidimensional $d = m = 1$ tenemos

$$\begin{aligned} X_t &\approx \sum_{\alpha \in \Gamma_2} (L^\alpha X_t)(X_{t_0}) I_\alpha \\ &= X_{t_0} + a(X_{t_0}) I_{(0)} + b(X_{t_0}) I_{(1)} + \left(a(X_{t_0}) a'(X_{t_0}) + \frac{1}{2} b^2(X_{t_0}) a''(X_{t_0}) \right) I_{(0,0)} \\ &\quad + \left(a(X_{t_0}) b'(X_{t_0}) + \frac{1}{2} b^2(X_{t_0}) b''(X_{t_0}) \right) I_{(0,1)} + b(X_{t_0}) a'(X_{t_0}) I_{(1,0)} \\ &\quad + b(X_{t_0}) b'(X_{t_0}) I_{(1,1)} \end{aligned}$$

donde asumimos que $a = a(x)$ y $b = b(x)$. Si tomamos $t_0 = t_n$, $t = t_{n+1}$ y $\Delta = t_{n+1} - t_n$ entonces

$$\begin{aligned} X_{t_{n+1}} &\approx X_{t_n} + a(X_{t_n}) \Delta + b(X_{t_n}) \Delta W + \left(a(X_{t_n}) a'(X_{t_n}) + \frac{1}{2} b^2(X_{t_n}) a''(X_{t_n}) \right) \frac{\Delta^2}{2} \\ &\quad + b(X_{t_n}) b'(X_{t_n}) \frac{(\Delta W^2 - \Delta)}{2} + \left(a(X_{t_0}) b'(X_{t_0}) + \frac{1}{2} b^2(X_{t_0}) b''(X_{t_0}) \right) I_{(0,1)} \\ &\quad + b(X_{t_0}) a'(X_{t_0}) I_{(1,0)} \end{aligned}$$

con $\Delta W = W_{t_{n+1}} - W_{t_n}$.

Como hemos visto, la expansión de Itô-Taylor da amplia libertad a la hora de escoger el conjunto jerarquizado. En la siguiente sección veremos dos casos particulares de éstas expansiones para dos conjuntos jerarquizados dados, así como estudiaremos sus propiedades en cada caso.

2.2. Métodos de Itô-Taylor fuertes

Para comenzar definiremos el concepto de convergencia fuerte, que caracterizará a los métodos que se muestran en esta sección. A partir de ahora consideraremos $t_0 = 0$.

Definición 2.15. Sea Y_t^δ una aproximación de tiempo discreto, cuyo máximo tamaño de paso es δ , del proceso estocástico X_t . Decimos que Y_t^δ converge fuertemente a X_t con orden $\gamma > 0$ a tiempo T si existen $C > 0$ independiente de δ y $\delta_0 > 0$ tal que

$$\mathbb{E} [|X_T - Y_T^\delta|] \leq C\delta^\gamma$$

para todo $0 < \delta < \delta_0$.

En general, asumiremos una equipartición en el intervalo temporal $[t_0, T]$ y por tanto tendremos $t_n = t_0 + n\Delta$ (en cuyo caso $\delta = \Delta$) y escribiremos Y_t^δ como Y_t .

El método de Euler-Maruyama

El caso más sencillo se conoce como el método de Euler-Maruyama. En el caso unidimensional, $d = m = 1$, tomando el desarrollo de Itô-Taylor (2.24) truncado para el conjunto jerarquizado $\mathcal{A} = \{v, (0), (1)\}$ tenemos que

$$Y_{n+1} = Y_n + a(t_n, Y_n)\Delta + b(t_n, Y_n)\Delta W \quad (2.25)$$

donde hemos tomado una equipartición del intervalo $[0, T]$ e $Y_n := Y_{t_n}$. Además, se ha empleado la notación vista anteriormente donde $\Delta = t_{n+1} - t_n = I_{(0)}$ y $\Delta W = W_{t_{n+1}} - W_{t_n} = I_{(1)}$. De la definición de proceso de Wiener sabemos que $\Delta W \sim N(0, \Delta)$. A partir de ahora abreviaremos $a_n = a(t_n, Y_n)$ y $b_n = b(t_n, Y_n)$.

En un caso más general, tomando $\mathcal{A} = \{v, (0), (1), \dots, (m)\}$ como conjunto jerarquizado, si el proceso estocástico es d -dimensional y W_t es un proceso de Wiener m -dimensional entonces

$$Y_{n+1}^k = Y_n^k + a_n^k \Delta + \sum_{j=1}^m b_n^{k,j} \Delta W^j \quad (2.26)$$

denota la componente k -ésima del método de Euler-Maruyama. Recordemos que los incrementos del proceso de Wiener $\Delta W^j = I_{(j)}$ son independientes para distintos valores de $j = 1, \dots, m$.

A continuación veremos que bajo ciertos supuestos sobre las funciones $a(t, X_t)$ y $b(t, X_t)$ el método de Euler-Maruyama tiene convergencia fuerte con orden $\gamma = 0,5$. Estudiaremos únicamente el caso autónomo donde X_0 es una constante conocida y por tanto tomamos $Y_0 = X_0$. Antes de enunciar el teorema consideremos un resultado previo.

Lema 2.16. (Gronwall) Sea $\alpha : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ una función integrable. Si existen $A > 0$ y $B > 0$ tales que

$$0 \leq \alpha(t) \leq A + B \int_0^t \alpha(s) ds$$

para todo $t \in [0, T]$, entonces $\alpha(t) \leq Ae^{Bt}$. En particular, $\alpha(t) \leq Ae^{BT}$.

Teorema 2.17. Sea X_t el proceso de Itô d -dimensional definido en el intervalo $[0, T]$ solución de (1.12). Supongamos que las funciones $a = a(x)$ y $b = b(x)$ cumplen la condición Lipschitz, esto es,

$$|a(x) - a(y)| + |b(x) - b(y)| \leq C_1|x - y| \quad (2.27)$$

y cumplen la restricción de crecimiento lineal

$$|a(x)|^2 + |b(x)|^2 \leq C_2(1 + |x|^2) \quad (2.28)$$

para cualesquiera $s, t \in [0, T]$, $x, y \in \mathbb{R}^d$. Entonces el método de Euler-Maruyama Y_n obtenido con una equipartición de longitud Δ converge fuertemente con orden $\gamma = 0,5$, esto es existe $C_3 > 0$ tal que

$$\mathbb{E}[|X_T - Y_T|] \leq C_3\Delta^{1/2}. \quad (2.29)$$

Demostración. Sea $\{t_n\}_{n=0}^N$ una equipartición del intervalo $[0, T]$ de forma que $t_n = n\Delta$ con $n = 0, 1, \dots, N$ y $T = N\Delta$. Definamos la función

$$Y(t) = \sum_{n=0}^{N-1} 1_{[t_n, t_{n+1}]}(t) Y_n$$

para todo $t \in [0, T)$ con $Y(T) = Y_N$. Así, $Y(t) = Y_n$ para todo $t \in [t_n, t_{n+1})$. Definamos

$$\alpha(s) = \sup_{r \in [0, s]} \mathbb{E}[|Y(r) - X_r|^2]$$

Del método de Euler-Maruyama (2.25) se obtiene

$$\begin{aligned} Y_{k+1} - Y_k &= a_k \Delta + b_k \Delta W = \int_{t_k}^{t_{k+1}} a_k ds + \int_{t_k}^{t_{k+1}} b_k dW_s \\ &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} a(Y(s)) ds + \int_{t_k}^{t_{k+1}} b(Y(s)) dW_s \end{aligned}$$

De esta igualdad, tomando $t \in [0, T]$ fijo y n el índice tal que $t \in [t_n, t_{n+1})$ podemos ver que

$$\begin{aligned} Y(t) &= Y_n = Y_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (Y_{k+1} - Y_k) \\ &= Y_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} a(Y(s)) ds + \int_{t_k}^{t_{k+1}} b(Y(s)) dW_s \right) \\ &= Y_0 + \int_0^{t_n} a(Y(s)) ds + \int_0^{t_n} b(Y(s)) dW_s. \end{aligned}$$

Por otro lado, si escribimos la ecuación diferencial inicial en forma integral (2.21) sabemos que

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(X_s) ds + \int_0^t b(X_s) dW_s$$

con lo que restando ambas igualdades y, dado que estamos considerando el caso $Y(0) = Y_0 = X_0$, entonces

$$\begin{aligned} Y(t) - X_t &= \underbrace{\int_0^{t_n} (a(Y(s)) - a(X_s)) ds}_{I_1} + \underbrace{\int_0^{t_n} (b(Y(s)) - b(X_s)) dW_s}_{I_2} \\ &\quad - \underbrace{\int_{t_n}^t a(X_s) ds}_{I_3} - \underbrace{\int_{t_n}^t b(X_s) dW_s}_{I_4} \end{aligned}$$

dado que previamente fijamos $t \in [t_n, t_{n+1})$ y así $t \geq t_n$. De la desigualdad de Cauchy-Schwarz sabemos que $(I_1 + I_2 - I_3 - I_4)^2 \leq 4(I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + I_4^2)$, con lo que tomando la esperanza de la norma al cuadrado

$$\mathbb{E} [|Y(t) - X_t|^2] \leq 4\mathbb{E} [I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + I_4^2].$$

Dada la linealidad de la esperanza, analicemos cada término por separado. Recordemos en primer lugar que para cualquier función $u \in L^2([0, T])$ la desigualdad de Cauchy-Schwarz implica

$$\left(\int_0^{t_n} u(s) ds \right)^2 \leq t_n \int_0^{t_n} |u(s)|^2 ds$$

por tanto aplicando esta desigualdad y la condición de Lipschitz (2.27)

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [I_1^2] &= \mathbb{E} \left[\left(\int_0^{t_n} (a(Y(s)) - a(X_s)) ds \right)^2 \right] \\ &\leq t_n \mathbb{E} \left[\int_0^{t_n} |a(Y(s)) - a(X_s)|^2 ds \right] \\ &\leq t_n C_1^2 \int_0^{t_n} \mathbb{E} [|Y(s) - X_s|^2] ds \\ &\leq TC_1^2 \int_0^{t_n} \mathbb{E} \left[\sup_{r \in [0, s]} |Y(r) - X_r|^2 \right] ds = TC_1^2 \int_0^{t_n} \alpha(s) ds \\ &\leq TC_1^2 \int_0^t \alpha(s) ds. \end{aligned}$$

Por otra parte, aplicando la isometría de Itô y nuevamente la condición de Lipschitz

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [I_2^2] &= \mathbb{E} \left[\left(\int_0^{t_n} (b(Y(s)) - b(X_s)) dW_s \right)^2 \right] \\ &= \int_0^{t_n} \mathbb{E} [|b(Y(s)) - b(X_s)|^2] ds \\ &\leq C_1^2 \int_0^{t_n} \mathbb{E} [|Y(s) - X_s|^2] ds \\ &\leq C_1^2 \int_0^t \alpha(s) ds. \end{aligned}$$

Aplicando la restricción de crecimiento lineal (2.28) y la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} [I_3^2] &= \mathbb{E} \left[\left(\int_{t_n}^t a(X_s) ds \right)^2 \right] \\
&\leq (t - t_n) \mathbb{E} \left[\int_{t_n}^t |a(X_s)|^2 ds \right] \\
&\leq \Delta C_2 \mathbb{E} \left[\int_{t_n}^t (1 + |X_s|^2) ds \right] \\
&\leq C \Delta
\end{aligned}$$

ya que

$$\sup_{s \in [0, T]} (1 + |X_s|^2) \leq K$$

en virtud del teorema 1.13 de existencia y unicidad de soluciones, donde hemos tomado $C = KC_2T$. Por último, mediante un desarrollo análogo utilizando la isometría de Itô

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} [I_4^2] &= \mathbb{E} \left[\left(\int_{t_n}^t b(X_s) dW_s \right)^2 \right] \\
&= \int_{t_n}^t \mathbb{E} [|b(X_s)|^2] ds \\
&\leq C_2 \mathbb{E} \left[\int_{t_n}^t (1 + |X_s|^2) ds \right] \\
&\leq C \Delta
\end{aligned}$$

Así, finalmente obtenemos

$$0 \leq \mathbb{E} [|Y(t) - X_t|^2] \leq \alpha(t) \leq 4(T+1)C_1^2 \int_0^t \alpha(s) ds + 8C\Delta$$

y aplicando el lema 2.16 (de Gronwall) tomando $B = 4(T+1)C_1^2$ y $A = 8C\Delta$ obtenemos

$$\alpha(t) \leq C_3^2 \Delta$$

donde $C_3^2 = 8Ce^{BT}$ para todo $t \in [0, T]$. Dado que para cualquier variable aleatoria se cumple que $\mathbb{E} [Z] \leq \sqrt{\mathbb{E} [Z^2]}$ entonces

$$\begin{aligned}
\max_{n=0, \dots, N} \mathbb{E} [|Y_n - X_{t_n}|] &\leq \sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E} [|Y(t) - X_t|] \\
&\leq \sup_{t \in [0, T]} \sqrt{\mathbb{E} [|Y(t) - X_t|^2]} \\
&= \sqrt{\alpha(t)} \\
&\leq C_3 \Delta^{1/2}.
\end{aligned}$$

En particular, se cumple para $n = N$ y por tanto $t_n = T$, llegando así a la expresión (2.29). $\square$

Caso general

Definiremos el método de Itô-Taylor fuerte de orden $\gamma = 0.5, 1, 1.5, \dots$ en el caso general tomando el conjunto de multi-índices

$$\mathcal{A}_\gamma = \left\{ \alpha \in \mathcal{M} : l(\alpha) + n(\alpha) \leq 2\gamma \text{ o } l(\alpha) = n(\alpha) = \gamma + \frac{1}{2} \right\}. \quad (2.30)$$

Proposición 2.18. *El conjunto $\mathcal{A}_\gamma$ descrito en (2.30) es un conjunto jerarquizado.*

Demostración. Reescribiendo (2.30) como

$$\mathcal{A}_\gamma = \Lambda_{2\gamma} \cup \mathcal{B}$$

donde $\Lambda_{2\gamma}$ está definido en 2.11 y $\mathcal{B} = \{\alpha \in \mathcal{M} : l(\alpha) = n(\alpha) = \gamma + 1/2\}$, entonces tenemos

$$\sup_{\alpha \in \mathcal{B}} l(\alpha) = \gamma + \frac{1}{2} < \infty$$

y $\sup_{\alpha \in \Lambda_{2\gamma}} l(\alpha) < \infty$ por ser $\Lambda_{2\gamma}$ un conjunto jerarquizado. Así, $\sup_{\alpha \in \mathcal{A}_\gamma} l(\alpha) < \infty$. Por otra parte, dado $\alpha \in \mathcal{A}_\gamma$ se cumple que

1. Si $\alpha \in \Lambda_{2\gamma}$ entonces $-\alpha \in \Lambda_{2\gamma} \subset \mathcal{A}_\gamma$ por ser $\Lambda_{2\gamma}$ un conjunto jerarquizado.
2. Si $\alpha \in \mathcal{B}$, entonces $l(-\alpha) = \gamma - 1/2$ y $n(-\alpha) \leq \gamma + 1/2$. Es decir, $l(-\alpha) + n(-\alpha) \leq 2\gamma$ y por tanto $-\alpha \in \Lambda_{2\gamma} \subset \mathcal{A}_\gamma$.

□

Notemos que si $\gamma \in \mathbb{N}$ entonces $\mathcal{A}_\gamma = \Lambda_{2\gamma}$. Además, definiremos los coeficientes de la aproximación como

$$L^\alpha f(t, x) = L^{\alpha^-} b^j(t, x) \quad (2.31)$$

para todo $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ y $\alpha = (j_1, j_2, \dots, j_l) \in \mathcal{M}$, donde denotaremos por $b^0(t, x)$ a la función $a(t, x)$.

Así, dada una discretización temporal $t_0 < t_1 < \dots < t_n < \dots$ definiremos el método fuerte de orden γ como el desarrollo de Itô-Taylor truncado

$$Y_{n+1} = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_\gamma} (L^\alpha f)(t_n, Y_n) I_\alpha \quad (2.32)$$

con $\mathcal{A}_\gamma$ el conjunto jerarquizado de (2.11) e I_α las integrales de Itô múltiples de la definición 2.3 calculadas sobre $[t_n, t_{n+1}]$. En particular, notemos que tomando $\mathcal{A}_{0.5} = \{v, (0), (1)\}$ se obtiene el método de Euler-Maruyama dado en (2.25) con orden $\gamma = 0.5$. Una propiedad importante de éstos métodos fuertes es que las trayectorias de las aproximaciones generadas son continuas y muestran un comportamiento irregular de igual forma que el proceso de Wiener. Análogamente a como hemos visto en el teorema 2.17 existe un resultado de convergencia para el caso general, que daremos sin demostración.

Teorema 2.19. Sea Y^δ la aproximación de Itô-Taylor asociada al conjunto jerarquizado $\mathcal{A}_\gamma$ de (2.11) definida en (2.32) para una discretización temporal con $0 < \delta < 1$ y $\gamma = 0.5, 1, 1.5, \dots$. Supongamos que los coeficientes de la aproximación definidos en (2.31) satisfacen la condición de Lipschitz

$$|L^\alpha f(t, x) - L^\alpha f(t, y)| \leq C_1 |x - y|$$

para todo $\alpha \in \mathcal{A}_\gamma$, $t \in [0, T]$, $x, y \in \mathbb{R}^d$; $L^{-\alpha} f \in \mathcal{C}^{1,2}$ y $L^\alpha f \in \mathcal{H}_\alpha$ para todo $\alpha \in \mathcal{A}_\gamma \cup \mathcal{R}(\mathcal{A}_\gamma)$; y los coeficientes cumplen la restricción de crecimiento

$$|L^\alpha f(t, x)| \leq C_2 (1 + |x|)$$

para todo $\alpha \in \mathcal{A}_\gamma \cup \mathcal{R}(\mathcal{A}_\gamma)$, $t \in [0, T]$ y $x \in \mathbb{R}^d$. Si consideramos $Y_0^\delta = X_0$ entonces

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t - Y_t^\delta|^2 \right] \leq C_3 \delta^\gamma$$

donde las constantes son independientes de δ .

Por tanto, las aproximaciones de Itô-Taylor fuertes no aseguran únicamente convergencia fuerte en el instante final T , sino que lo hacen uniformemente sobre todo el intervalo $[0, T]$.

El método de Euler-Maruyama que hemos introducido previamente es el método fuerte con la convergencia más débil, en la práctica estos métodos no son muy útiles dada su sencillez. Por ello, veremos a continuación algunos ejemplos que se derivan de esta definición general que aseguran un orden de convergencia mayor, a pesar de que son computacionalmente más costosos que el método de Euler-Maruyama.

El método de Milstein

El método de Milstein es el método de Itô-Taylor fuerte de orden $\gamma = 1$. Por tanto, tomaremos para el caso unidimensional autónomo $\mathcal{A}_1 = \{v, (0), (1), (1, 1)\}$ ya que si $\alpha = (j_1, j_2)$ y alguna de sus componente es nula entonces $l(\alpha) + n(\alpha) > 2$, y por otra parte $l(\alpha) = n(\alpha) = 3/2$ no se satisface para ningún $\alpha \in \mathcal{M}$. Bastará entonces añadir el término $\alpha = (1, 1)$ al método de Euler-Maruyama visto en (2.25), obteniendo

$$Y_{n+1} = Y_n + a_n \Delta + b_n \Delta W + \frac{1}{2} b_n b'_n (\Delta W^2 - \Delta) \quad (2.33)$$

ya que en virtud de (2.16) y (2.31)

$$L^{(1,1)} f = L^1 b(t, x) = b \frac{\partial b}{\partial x} := b(x) b'(x)$$

y por último $I_{(1,1)}$ se ha obtenido en (2.9) aplicando la fórmula de Itô. Extendiendo la expresión (2.33) al caso general multidimensional obtenemos que

$$Y_{n+1}^k = Y_n^k + a_n^k \Delta + \sum_{j=1}^m b^{k,j} \Delta W^j + \sum_{j_1, j_2=1}^m L^{j_1} b^{k, j_2} I_{(j_1, j_2)} \quad (2.34)$$

es la componente k -ésima del método de Milstein donde con intención de simplificar la notación $L^{j_1} b^{k, j_2}$ denota a la función $L^{j_1} b^{k, j_2}$ evaluada en (t_n, Y_n) , al igual que $b^{k, j}$ denota $b^{k, j}(t_n, Y_n)$. Es evidente que esta expresión es análoga al caso multidimensional del método de Euler-Maruyama (2.26) añadiendo los términos para $\alpha = (j_1, j_2)$ donde ninguna de dichas componentes es nula.

El método de Taylor de orden fuerte 1.5

Como último ejemplo del caso general estudiado veremos el método de Itô-Taylor con orden fuerte $\gamma = 1,5$. Empezando en primer lugar con el caso unidimensional autónomo debemos tomar $\mathcal{A}_{1,5} = \{v, (0), (1), (0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1), (1, 1, 1)\}$. Así, la aproximación de Itô-Taylor fuerte con orden $\gamma = 1,5$ es

$$\begin{aligned} Y_{n+1} = & Y_n + a_n \Delta + b_n \Delta W + \frac{1}{2} b_n b'_n (\Delta W^2 - \Delta) + a'_n b_n \Delta Z \\ & + \frac{1}{2} \left(a_n a'_n + \frac{1}{2} b_n^2 a''_n \right) \Delta^2 + \left(a_n b'_n + \frac{1}{2} b_n^2 b''_n \right) (\Delta W \Delta - \Delta Z) \\ & + \frac{1}{2} b_n (b_n b''_n + (b'_n)^2) \left(\frac{1}{3} \Delta W^2 - \Delta \right) \Delta W \end{aligned} \quad (2.35)$$

que resulta de añadir al método de Milstein los términos $(1, 0), (0, 1), (1, 1), (1, 1, 1)$. Nótese que

$$L^{(1,0)} f = L^1 b^0 = L^1 a = b(x) a'(x)$$

con $I_{(1,0)} = \Delta Z$ obtenida en la proposición 2.7. Por otra parte,

$$L^{(0,0)} f = L^0 b^0 = L^0 a = a(x) a'(x) + \frac{1}{2} b^2(x) a''(x)$$

e $I_{(0,0)} = \Delta^2/2$ generalizando el resultado obtenido en (2.9). Además,

$$L^{(0,1)} f = L^0 b = a(x) b'(x) + \frac{1}{2} b^2(x) b''(x)$$

ya que por (2.12) $I_{(0,1)} = \Delta W \Delta - \Delta Z$. Por último, veamos que

$$L^{(1,1,1)} f = L^{(1,1)} b = L^1 (b(x) b'(x)) = b(x) ((b'(x))^2 + b(x) b''(x))$$

donde se puede calcular $I_{(1,1,1)}$ a partir de (2.14) ya que

$$\begin{aligned} I_{(1,1,1)} &= \frac{1}{3} (I_{(1)} I_{(1,1)} - I_{(0)} I_{(1)}) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} I_{(1)} (I_{(1)} I_{(1)} - I_{(0)}) - I_{(0)} I_{(1)} \right) \\ &= (\Delta W^2/3 - \Delta) \Delta W/2. \end{aligned}$$

Notemos que en el caso determinista⁸ recuperamos el método de Taylor de orden 2. En el caso general (no autónomo) multidimensional tendremos que el método de Taylor de orden 1.5 viene determinado por

$$\begin{aligned} Y_{n+1}^k = & Y_n^k + a_n^k \Delta + \frac{1}{2} L^0 a^k \Delta^2 \\ & + \sum_{j=1}^m (b^{k,j} \Delta W^j + L^0 b^{k,j} I_{(0,j)} + L^j a^k I_{(j,0)}) \\ & + \sum_{j_1, j_2=1}^m L^{j_1} b^{k, j_2} I_{(j_1, j_2)} + \sum_{j_1, j_2, j_3=1}^m L^{(j_1, j_2)} b^{k, j_3} I_{(j_1, j_2, j_3)} \end{aligned} \quad (2.36)$$

Para completar esta sección estudiaremos las familias de θ -métodos⁹ que se definen

⁸Esto es, $b(x) = 0$.

⁹O de métodos implícitos.

a partir de los métodos explícitos aquí explicados, dando una breve introducción para el método de Euler-Maruyama, Milstein y Taylor fuerte de orden 1,5.

2.2.1. Métodos implícitos de Itô-Taylor fuertes

Partiendo del método de Euler-Maruyama para el caso unidimensional dado en (2.25) podemos definir la familia de métodos implícitos o familia de θ -métodos para el método de Euler-Maruyama como

$$Y_{n+1} = Y_n + (\theta a(t_{n+1}, Y_{n+1}) + (1 - \theta)a_n) \Delta + b_n \Delta W \quad (2.37)$$

Notemos que si $\theta = 0$ recuperamos el método explícito (2.25), y si $\theta = 1$ obtenemos el método de Euler implícito puro. Para el caso general multidimensional tenemos análogamente que

$$Y_{n+1}^k = Y_n^k + (\theta_k a^k(t_{n+1}, Y_{n+1}) + (1 - \theta)a_n^k) \Delta + \sum_{j=1}^m b^{k,j} \Delta W^j \quad (2.38)$$

es la componente k -ésima de la familia de θ -métodos para el método de Euler-Maruyama.

El caso general para el método de Milstein es análogo al anterior, obteniendo

$$Y_{n+1}^k = Y_n^k + (\theta_k a^k(t_{n+1}, Y_{n+1}) + (1 - \theta)a_n^k) \Delta + \sum_{j=1}^m b^{k,j} \Delta W^j \quad (2.39)$$

$$+ \sum_{j_1, j_2=1}^m L^{j_1} b^{k, j_2} I_{(j_1, j_2)} \quad (2.40)$$

Nótese que tomamos la combinación lineal convexa únicamente en los términos que no van acompañados por un incremento del proceso de Wiener; esto es debido a que los incrementos del proceso de Wiener no están acotados sobre un intervalo finito de tiempo y esto puede causar problemas en la definición de los métodos.

Estudiemos por último el método de Itô-Taylor con orden fuerte $\gamma = 1,5$. En el caso multidimensional tendemos la familia de θ -métodos

$$\begin{aligned} Y_{n+1}^k &= Y_n^k + (\theta_k a^k(t_{n+1}, Y_{n+1}) + (1 - \theta_k)a_n^k) \Delta \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} - \theta_k\right) (\eta_k L^0 a^k(t_{n+1}, Y_{n+1}) + (1 - \eta_k)L^0 a_n^k) \Delta^2 \\ &\quad + \sum_{j=1}^m (b^{k,j} \Delta W^j + L^0 b^{k,j} I_{(0,j)} + L^j a_n^k (I_{(j,0)} - \theta_k \Delta W^j \Delta)) \\ &\quad + \sum_{j_1, j_2=1}^m L^{j_1} b^{k, j_2} I_{(j_1, j_2)} + \sum_{j_1, j_2, j_3=1}^m L^{(j_1, j_2)} b^{k, j_3} I_{(j_1, j_2, j_3)} \end{aligned} \quad (2.41)$$

donde $\theta_k, \eta_k \in [0, 1]$.

Estas familias de métodos implícitos cobrarán relevancia más adelante, donde estudiaremos la estabilidad lineal de los métodos numéricos de forma análoga a la teoría existente para los métodos numéricos para ecuaciones diferenciales ordinarias.

2.3. Métodos de Itô-Taylor débiles

Antes de comenzar con el estudio de los métodos débiles, veamos en qué consiste el concepto de convergencia débil. Sea $\mathcal{C}^l(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ el espacio de funciones diferenciables con continuidad l veces $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$; denotaremos por $\mathcal{C}_P^l(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ al subespacio formado por $f \in \mathcal{C}^l(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ tales que todas sus derivadas parciales hasta orden l cumplen la restricción de crecimiento polinomial, esto es, existen constantes $C > 0$ y $r \in \{1, 2, \dots\}$ tales que

$$|\partial^k f(x)| \leq C(1 + |x|^{2r})$$

para todo $x \in \mathbb{R}^d$ donde $\partial^k f(x)$ denota cualquier derivada parcial de orden $k \leq l$.

Definición 2.20. Sea Y_t^δ una aproximación de tiempo discreto, cuyo máximo tamaño de paso es δ , del proceso estocástico X_t . Decimos que Y_t^δ converge débilmente con orden $\beta > 0$ a tiempo T si para todo $g \in \mathcal{C}_P^l(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ existen $C > 0$ independiente de δ y $\delta_0 > 0$ tales que

$$|\mathbb{E}[g(X_T)] - \mathbb{E}[g(Y_T^\delta)]| \leq C\delta^\beta$$

para todo $0 < \delta < \delta_0$.

Observación 2.21. Es importante remarcar que convergencia fuerte implica convergencia de las trayectorias, mientras que convergencia débil implica convergencia de momentos (si $g(x) = x^k$) o de probabilidades (si $g(x) = 1_{[a,b]}(x)$). En general, convergencia fuerte de orden γ implica convergencia débil de orden al menos γ .

Esta vez comenzamos estudiando en primer lugar el caso general.

Caso general

De forma análoga a los métodos de Itô-Taylor fuertes, podemos dar una expresión general para el caso de convergencia débil. Tomando el conjunto jerarquizado Γ_β definido en 2.10 y aplicando el desarrollo de Itô-Taylor (2.24) truncado definimos los métodos de Itô-Taylor con convergencia débil β como

$$Y_{n+1} = \sum_{\alpha \in \Gamma_\beta} (L^\alpha f)(t_n, Y_n) I_\alpha \quad (2.42)$$

donde los coeficientes $L^\alpha f$ vienen definidos en (2.31) e I_α denota la integral de Itô múltiple de la unidad calculada sobre el multi-índice α y el intervalo $[t_n, t_{n+1}]$. Análogamente al caso anterior, existe un teorema que asegura la convergencia débil de estos métodos con orden β . Daremos únicamente el enunciado del teorema para el caso autónomo, es decir para $a = a(x)$ y $b = b(x)$.

Teorema 2.22. Sea Y^δ la aproximación de Itô-Taylor débil definida en (2.42) para una discretización temporal con $0 < \delta < 1$ y $\beta \in \{1, 2, \dots\}$. Supongamos que $a = a(x)$ y $b = b(x)$ son funciones Lipschitz continuas cuyas componentes a^k y $b^{k,j}$ son funciones de $\mathcal{C}_P^{2(\beta+1)}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ para cualesquiera $k, j = 1, 2, \dots, d$. Supongamos además que $L^\alpha f$, donde $f(t, x) = x$, cumple la restricción de crecimiento lineal

$$|L^\alpha f| \leq C(1 + |x|) \quad (2.43)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^d$, $t \in [0, T]$ y $\alpha \in \Gamma_\beta$. Entonces para cada $g \in \mathcal{C}_P^{2(\beta+1)}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ existe $C_g > 0$ independiente de δ tal que

$$|\mathbb{E}[g(X_T)] - \mathbb{E}[g(Y_T^\delta)]| \leq C_g \delta^\beta, \quad (2.44)$$

es decir, Y^δ converge débilmente con orden β a X a tiempo T cuando $\delta \rightarrow 0$.

Observación 2.23. Nótese que, en particular, los polinomios de orden menor o igual a $2(\beta + 1)$ son funciones en $\mathcal{C}_P^{2(\beta+1)}$. Así (2.44) da la convergencia débil de los momentos de la aproximación hasta ese orden, como ya se mostró en 2.21.

A continuación, veremos algunos ejemplos de métodos con orden de convergencia débil.

El método de Euler-Maruyama

El método de Euler-Maruyama introducido anteriormente en (2.25) es a su vez el método de Itô-Taylor más simple con convergencia débil de orden $\beta = 1$. En el caso unidimensional, este método de Euler se corresponde con el desarrollo de Itô-Taylor truncado para el conjunto jerarquizado $\Gamma_1 = \{v, (0), (1)\}$ que coincide con el conjunto jerarquizado $\mathcal{A}_{0,5}$ del método fuerte.

Observación 2.24. El orden débil de estos métodos no se reduce si sustituimos ΔW por otra variable aleatoria con los mismos momentos. Por ejemplo, en (2.25) podemos sustituir ΔW por una variable aleatoria $\Delta \hat{W}$ tal que

$$\mathbb{P}(\Delta \hat{W} = \pm \sqrt{\Delta}) = \frac{1}{2} \quad (2.45)$$

Del teorema 2.22 vemos que para obtener convergencia débil con orden $\beta = 1$ en el método de Euler-Maruyama es necesario que los coeficientes sean 4 veces diferenciables con continuidad. Sin embargo, se puede probar un resultado específico para este método que permite relajar dicha condición.

Decimos que una función $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^l$ es continua Hölder con índice $\nu \in (0, 1)$ si existe una constante $C > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\nu$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^d$. Definimos entonces $\mathcal{H}_T^{(l)}$ para $l \in \mathcal{L} := (0, 1) \cup (1, 2) \cup (2, 3)$ como el conjunto de funciones $f : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ cuyas derivadas parciales son Hölder continuas con índice $l - [l]$ sobre x y con índice $(l - 2r - s)/2$ sobre t , donde r indica el orden de las derivadas con respecto a t y s el orden de las derivadas con respecto a x y cumplen que $2r + s \leq l$. En otras palabras, existe $C_1 > 0$ tal que para todo $x, x' \in \mathbb{R}^d$

$$|\partial_t^r \partial_x^s f(t, x) - \partial_t^r \partial_x^s f(t, x')| \leq C_1 |x - x'|^{l-[l]},$$

y existe $C_2 > 0$ tal que para todo $t, t' \in [0, T]$

$$|\partial_t^r \partial_x^s f(t, x) - \partial_t^r \partial_x^s f(t', x)| \leq C_2 |t - t'|^{l-2r-s}$$

donde ∂_t^r denota la derivada parcial de orden r con respecto a t y ∂_x^s cualquier derivada parcial de orden s con respecto a $x = (x_1, \dots, x_d)$. Si la función f es independiente de t denotaremos a dicho espacio por $\mathcal{H}^{(l)}$.

Veamos algún ejemplo: si $l = 1/2$ entonces $2r + s \leq l$ con $r, s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se cumple únicamente si $r = s = 0$. Por tanto $\mathcal{H}_T^{(1/2)}$ es el espacio de las funciones $u : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$|u(t, x) - u(t, x')| \leq C_1 |x - x'|^{1/2}$$

para cualesquiera $x, x' \in \mathbb{R}$ y

$$|u(t, x) - u(t', x)| \leq C_2 |t - t'|^{1/4}$$

para todo $t, t' \in [0, T]$.

Por otra parte, si $l \in (2, 3)$ entonces $2r + s \leq l$ si $(r, s) \in \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (0, 2)\}$. Así, en el caso unidimensional $\mathcal{H}_T^{(l)}$ está compuesto por las funciones $u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{aligned} |u(t, x) - u(t, x')| &\leq C_1 |x - x'|^{l-[l]} \\ \left| \frac{\partial u}{\partial x^j}(t, x) - \frac{\partial u}{\partial x^j}(t, x') \right| &\leq C_2 |x - x'|^{l-[l]} \\ \left| \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial u}{\partial t}(t', x) \right| &\leq C_3 |t - t'|^{l-[l]} \\ \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^j \partial x^i}(t, x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^j \partial x^i}(t, x') \right| &\leq C_4 |x - x'|^{l-[l]} \end{aligned} \quad (2.46)$$

En el caso autónomo tendremos que $\mathcal{H}^{(l)}$ con $l \in (2, 3)$ está formado por funciones dos veces diferenciables con continuidad Hölder. Una vez introducidos estos conceptos estamos entonces en disposición de dar el teorema que garantiza la convergencia débil del método de Euler-Maruyama. Daremos este teorema sin demostración, la cual se puede encontrar en [7].

Teorema 2.25. *Sea X_t un proceso de Itô d -dimensional (asumiremos $m = 1$) definido en el intervalo $[0, T]$ tal que todos los momentos de X_T existen y*

$$B(t, x) \zeta \cdot \zeta \geq \lambda |\zeta|^2$$

para todo $t \in [0, T]$ y $x, \zeta \in \mathbb{R}^d$, y $\lambda > 0$ constante, donde $B(t, x) = b(t, x)b(t, x)^t$. Supongamos que

$$a, B \in \mathcal{H}_T^{(l)}$$

para algún $l \in \mathcal{L}$. Si además tenemos Y^δ una aproximación discreta de X_t y una función $g \in \mathcal{H}^{(l+2)}$. Entonces

$$|\mathbb{E}[g(X_T)] - \mathbb{E}[g(Y_T^\delta)]| \leq C \delta^{\chi(l)}$$

donde

$$\chi(l) = \begin{cases} l/2 & , l \in (0, 1) \\ 1/(3-l) & , l \in (1, 2) \\ 1 & , l \in (2, 3) \end{cases}$$

con C independiente de δ .

Es decir, en virtud del teorema anterior, si queremos conseguir que el método de Euler-Maruyama tenga una convergencia débil $\beta = 1$, debemos imponer que $a(t, x)$ y $b(t, x)$ cumplan las condiciones vistas en (2.46). Esto es, que sean dos veces diferenciables con continuidad en x y satisfagan la continuidad Hölder sobre x con índice $l - [l]$. Es importante recalcar que cualquier función Lipschitz continua es Hölder continua. Por tanto en el caso autónomo, a partir de la expresión (2.46) vemos que si las funciones $a = a(x)$ y $b = b(x)$ y sus derivadas hasta segundo orden son Lipschitz continuas entonces el método de Euler-Maruyama converge con orden débil $\beta = 1$. A diferencia de las condiciones del teorema 2.22 no es necesario que los coeficientes sean 4 veces diferenciables con continuidad. En particular, tomando $\delta = \Delta$ se tiene el resultado buscado.

El método de Taylor de orden débil 2

Partiendo del caso autónomo y unidimensional, tomaremos el conjunto jerarquizado $\Gamma_2 = \{\alpha \in \mathcal{M} : l(\alpha) \leq 2\} = \{v, (0), (1), (0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$. Como podemos ver, éste método tiene más elementos que el método de Milstein (y por tanto tendrá orden fuerte 1) pero menos que el método de Taylor de orden fuerte 1,5 (con lo que no tendrá orden fuerte 1,5). Así, de la expresión (2.42) el método de Itô-Taylor de orden débil 2 viene dado por

$$\begin{aligned} Y_{n+1} = & Y_n + a_n \Delta + b_n \Delta W + \frac{1}{2} b_n b'_n (\Delta W^2 - \Delta) + a'_n b \Delta Z \\ & + \frac{1}{2} \left(a_n a'_n + \frac{1}{2} b_n^2 a''_n \right) \Delta^2 + \left(a_n b'_n + \frac{1}{2} b_n^2 b''_n \right) (\Delta W \Delta - \Delta Z) \end{aligned} \quad (2.47)$$

que es claramente el resultado de eliminar el último término en (2.35).

Observación 2.26. De forma análoga a la observación 2.24, en (2.47) podemos sustituir ΔW por una variable aleatoria $\Delta \hat{W}$ tal que

$$\mathbb{P}(\Delta \hat{W} = \pm \sqrt{3\Delta}) = \frac{1}{6}, \quad \mathbb{P}(\Delta \hat{W} = 0) = \frac{2}{3} \quad (2.48)$$

Para el caso multidimensional (y no necesariamente autónomo) se puede generalizar el método de Taylor débil de orden 2 donde

$$\begin{aligned} Y_{n+1}^k = & Y_n^k + a_n^k \Delta + \frac{1}{2} L^0 a^k \Delta^2 + \sum_{j_1, j_2=1}^m L^{j_1} b^{k, j_2} I_{(j_1, j_2)} \\ & + \sum_{j=1}^m (b^{k, j} \Delta W^j + L^0 b^{k, j} I_{(0, j)} + L^j a^k I_{(j, 0)}) \end{aligned} \quad (2.49)$$

determina la componente k -ésima del método. Notemos que esta expresión se corresponde con el caso general del método fuerte de orden 1,5 visto en (2.36) donde se ha eliminado el sumatorio sobre las integrales $I_{(j_1, j_2, j_3)}$, es decir, los elementos correspondientes a los multi-índices de longitud 3 que no están en Γ_2 .

En relación con la observación 2.21 vemos que el método de Itô-Taylor de orden fuerte 1,5 visto en (2.35) contiene a todos los elementos del método débil de orden 2 (2.47). Por tanto el método fuerte con orden 1,5 tiene también (al menos) orden débil 2.

2.3.1. Métodos implícitos de Itô-Taylor débiles

De igual forma que definimos las familias de θ -métodos para los métodos fuertes, mostraremos las familias de métodos implícitos para los métodos débiles vistos en esta sección.

Siguiendo la observación 2.24 podemos escribir el método implícito de Euler-Maruyama para el caso multidimensional como

$$Y_{n+1}^k = Y_n^k + a^k(t_{n+1}, Y_{n+1})\Delta + \sum_{j=1}^m b_n^{k,j} \Delta \hat{W}^j \quad (2.50)$$

donde $\Delta \hat{W}^j$ es una variable aleatoria dada por

$$\mathbb{P}(\Delta \hat{W}^j = \pm \sqrt{\Delta}) = \frac{1}{2}$$

para todo $j = 1, 2, \dots, d$ y $n = 1, 2, \dots$. Así, definiremos la familia de θ -métodos para el método de Euler-Maruyama como

$$Y_{n+1}^k = Y_n^k + (\theta_k a^k(t_{n+1}, Y_{n+1}) + (1 - \theta) a_n^k) \Delta + \sum_{j=1}^m b_n^{k,j} \Delta \hat{W}^j \quad (2.51)$$

donde k denota la componente k -ésima del método.

Por otra parte, para el caso autónomo, a partir del método de Itô-Taylor de orden débil 2 podemos definir la familia de θ -métodos

$$\begin{aligned} Y_{n+1} &= Y_n + a(Y_{n+1}) + b_n \Delta \hat{W} + \frac{1}{2} b_n b'_n (\Delta \hat{W}^2 - \Delta) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(a(Y_{n+1}) a'(Y_{n+1}) + \frac{1}{2} b^2(Y_{n+1}) a''(Y_{n+1}) \right) \Delta^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(-a'_n b_n + a_n b'_n + \frac{1}{2} b''_n b_n^2 \right) \Delta \hat{W} \Delta \end{aligned} \quad (2.52)$$

en el caso unidimensional, donde $\Delta \hat{W}$ viene definido como en 2.26. Para el caso general multidimensional se construye la familia de θ -métodos dada por

$$\begin{aligned} Y_{n+1} &= Y_n + (\theta a(Y_{n+1}) + (1 - \theta) a_n) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{j_1, j_2=1}^m L^{j_1} b^{j_2} (\Delta \hat{W}^{j_1} \Delta \hat{W}^{j_2} + V_{j_1, j_2}) \\ &\quad + \sum_{j=1}^m \left(b_n^j + \frac{1}{2} (L^0 b^j + (1 - 2\theta) L^j a) \right) \Delta \hat{W}^j \\ &\quad + \frac{1}{2} (1 - 2\theta) (\eta L^0 a + (1 - \eta) L^0 a(t_{n+1}, Y_{n+1})) \Delta^2 \end{aligned} \quad (2.53)$$

donde $\theta, \eta \in [0, 1]$, $\Delta \hat{W}$ viene definido en 2.26 y V_{j_1, j_2} es una variable aleatoria tal que

$$\mathbb{P}(V_{j_1, j_2} = \pm \Delta) = \frac{1}{2}$$

para $j_2 = 1, \dots, j_1 - 1$, $V_{j_1, j_1} = -\Delta$ y $V_{j_1, j_2} = -V_{j_2, j_1}$.

2.4. Estabilidad lineal de los métodos de Itô-Taylor

En esta sección introduciremos el concepto de estabilidad lineal para los métodos de Itô-Taylor [4], [5]. De igual forma que el estudio de los métodos numéricos en el caso ordinario debemos tomar una ecuación diferencial estocástica de prueba sobre la que haremos el análisis. En esta sección consideraremos únicamente el caso unidimensional $d = m = 1$. De [9] consideremos la ecuación diferencial estocástica lineal

$$dX_t = \lambda X_t dt + \mu X_t dW_t \quad (2.54)$$

definida sobre $t \in [0, T]$ con condición inicial X_0 constante. A pesar de que el análisis se puede extender al caso complejo, asumiremos que λ y μ son números reales tales que $\lambda < 0$. La ecuación diferencial (2.54) tiene solución exacta dada por

$$X_t = X_0 \exp \left(\left(\lambda - \frac{1}{2} \mu^2 \right) t + \mu W_t \right). \quad (2.55)$$

Obsérvese que si $X_0 = 0$ la solución única es la solución trivial $X_t = 0$. Queremos estudiar para qué valores de λ y μ se cumple la condición

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} [|X_t|^2] = 0; \quad (2.56)$$

en tal caso hablaremos de estabilidad lineal en media cuadrática (o del momento de segundo orden).

Lema 2.27. *La condición (2.56) se satisface para la ecuación diferencial estocástica (2.54) si, y solo si, $\lambda + \frac{1}{2} \mu^2 < 0$.*

Demostración. Tomando $Y_t = \mathbb{E} [|X_t|^2]$ entonces Y_t es solución de la ecuación diferencial ordinaria

$$dY_t = (2\lambda + \mu^2) Y_t dt$$

con condición inicial $Y_0 = 1$. Como la solución de dicha ecuación diferencial es $Y_t = \exp((2\lambda + \mu^2)t)$ entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Y_t = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{(2\lambda + \mu^2)t} = 0$$

si, y sólo si, $2\lambda + \mu^2 < 0$. □

Nuestra intención es realizar un análisis similar a los métodos numéricos¹⁰ introducidos. Es decir, si Y_n es una aproximación discreta de X_t como solución de (2.55) queremos comprobar bajo qué circunstancias se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} [|Y_n|^2] = 0 \quad (2.57)$$

Definamos $\bar{Y}_n = \mathbb{E} [|Y_n|^2]$. Al aplicar un método numérico a (2.54) y tomando media cuadrática podemos simplificar¹¹ la expresión obtenida a

$$\bar{Y}_{n+1} = R(h, k) \bar{Y}_n \quad (2.58)$$

¹⁰Consideraremos únicamente el caso de una discretización temporal equiespaciada.

¹¹Podemos afirmar que esto siempre ocurre para ecuaciones diferenciales estocásticas de la forma (2.54).

donde $h = \Delta\lambda$ y $k = \mu^2\Delta$. A dicha función la llamaremos función de estabilidad del método numérico. Por tanto podemos asegurar que se cumple (2.57) si

$$|R(h, k)| < 1. \quad (2.59)$$

Definición 2.28. Diremos que un método numérico M aplicado con tamaño de paso Δ es MS -estable (o estable en media cuadrada) para el conjunto de valores (h, k) tales que (2.59) se cumpla. Definiremos el dominio de MS -estabilidad de un método como el conjunto $\mathcal{S}$ dado por

$$\mathcal{S}_M = \{(h, k) : |R(h, k)| < 1\}. \quad (2.60)$$

A continuación, estudiaremos las regiones de estabilidad lineal para algunos de los métodos vistos en las secciones anteriores. Para ello, compararemos $\mathcal{S}_M$ con la región de estabilidad de la ecuación $\mathcal{S} = \{(h, k) : 2h + k < 0\}$

Euler-Maruyama

Del método de Euler-Maruyama visto en (2.25) y dado que $a(t, x) = \lambda x$ y $b(t, x) = \mu x$ tenemos

$$Y_{n+1} = Y_n + \lambda Y_n \Delta + \mu Y_n \Delta W$$

con lo cual, tomando la esperanza del cuadrado

$$\mathbb{E}[|Y_{n+1}|^2] = \mathbb{E}[|Y_n + \lambda Y_n \Delta + \mu Y_n \Delta W|^2] = \mathbb{E}[|Y_n|^2] (1 + 2\lambda\Delta + \mu^2\Delta + \lambda^2\Delta^2)$$

de donde simplificando y aplicando la definición de $\bar{Y}_n$ tenemos

$$R(h, k) = |1 + h|^2 + |k| \quad (2.61)$$

y podemos representar su región de MS -estabilidad como se muestra en la figura 2.1.

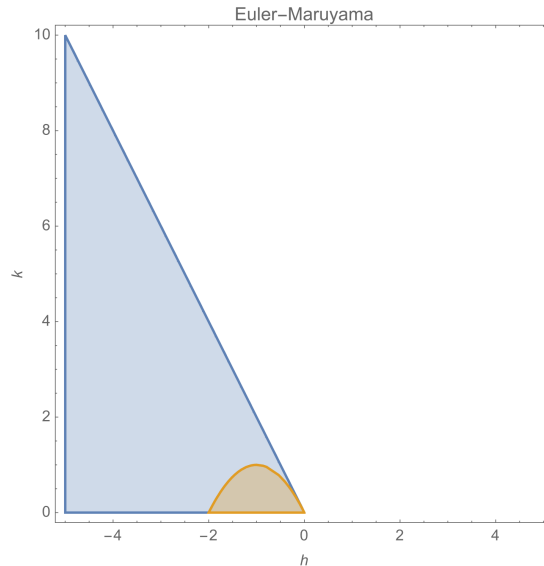


Figura 2.1: Región de MS -estabilidad del método de Euler-Maruyama explícito. En azul se muestra la región de estabilidad de la ecuación y en naranja la región de estabilidad del método numérico.

Por otra parte, podemos hacer el mismo procedimiento para la familia de θ -métodos de Euler-Maruyama dada en (2.37). Tomando esperanza del cuadrado obtenemos

$$\bar{Y}_{n+1}|1 - \lambda\Delta\theta|^2 = \bar{Y}_n(|1 + (1 - \theta)\lambda\Delta|^2 + |k|)$$

con lo que

$$R(h, k) = \frac{|1 + (1 - \theta)h|^2 + |k|}{|1 - h\theta|^2} \quad (2.62)$$

Por ejemplo, en la figura 2.2 se representa la región de estabilidad de los θ -métodos (2.37) para diferentes valores de θ .

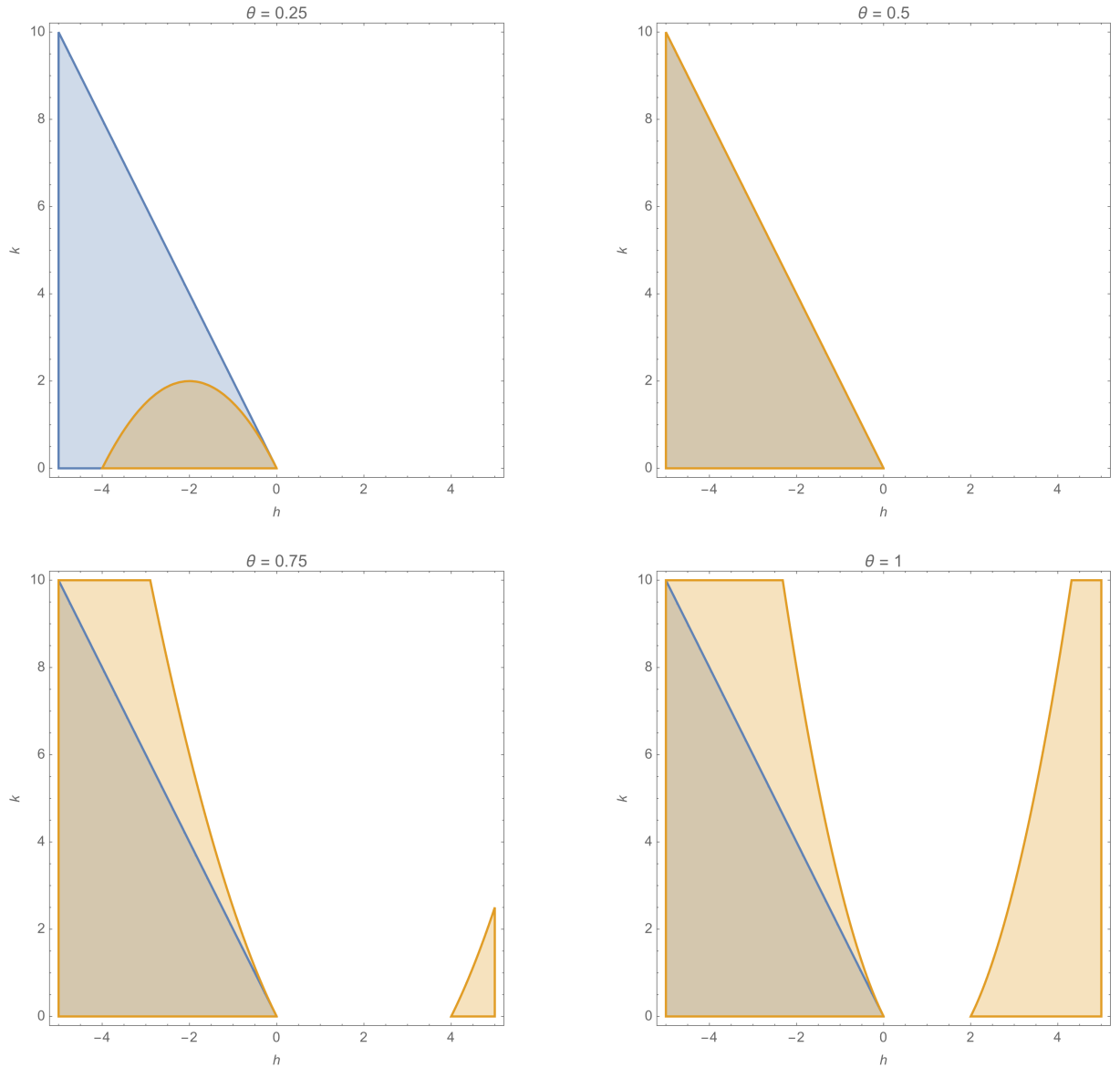


Figura 2.2: Región de MS -estabilidad para diferentes valores de θ en la familia de θ -métodos de Euler-Maruyama.

Como era de esperar, a medida que aumentamos el valor de θ los métodos tienen mayor región de estabilidad, igualándose las regiones de estabilidad del método y de la

ecuación en el caso $\theta = \frac{1}{2}$. Sin embargo, se observa que para $\theta > \frac{1}{2}$ la región de estabilidad del método es mayor que la región de estabilidad de la ecuación, lo cual implica que para ciertos valores de λ y μ el método muestra estabilidad a pesar de la solución teórica no es estable.

Milstein

Tomando el método de Milstein descrito en (2.33) para la ecuación diferencial estocástica (2.54) tenemos

$$Y_{n+1} = Y_n + \lambda Y_n \Delta + \mu Y_n \Delta W + \frac{1}{2} \mu^2 Y_n (\Delta W^2 - \Delta)$$

y por tanto tomando esperanza del cuadrado obtenemos

$$R(h, k) = |1 + h|^2 + |k| + \frac{1}{2} |k|^2 \quad (2.63)$$

cuyo dominio de estabilidad se muestra en la figura 2.3.

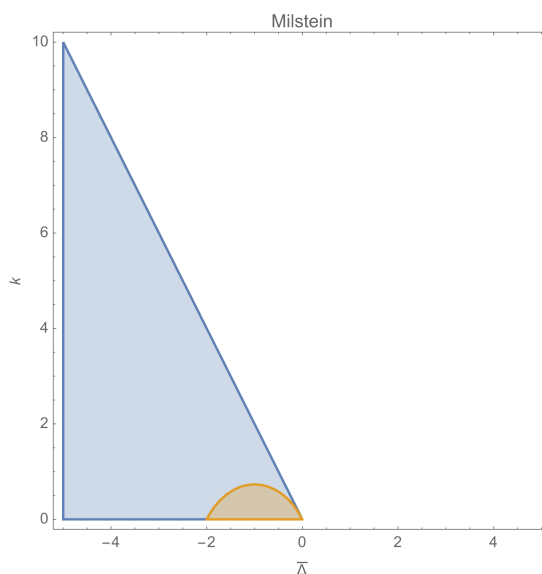


Figura 2.3: Región de MS -estabilidad del método de Milstein.

Dado que $R(h, k)$ es el obtenido para el método de Euler explícito añadiendo un término cuadrático en k era esperable que la región de estabilidad sea menor para el método de Milstein.

Taylor fuerte de orden 1.5

Siguiendo un razonamiento análogo obtenemos la función de estabilidad

$$R(h, k) = \left| 1 + h + \frac{1}{2} h^2 \right|^2 + |1 + h|^2 |k| + \frac{1}{2} |k|^2 + \frac{1}{6} |k|^3 \quad (2.64)$$

cuya región de estabilidad se muestra en 2.4a.

Taylor débil de orden 2

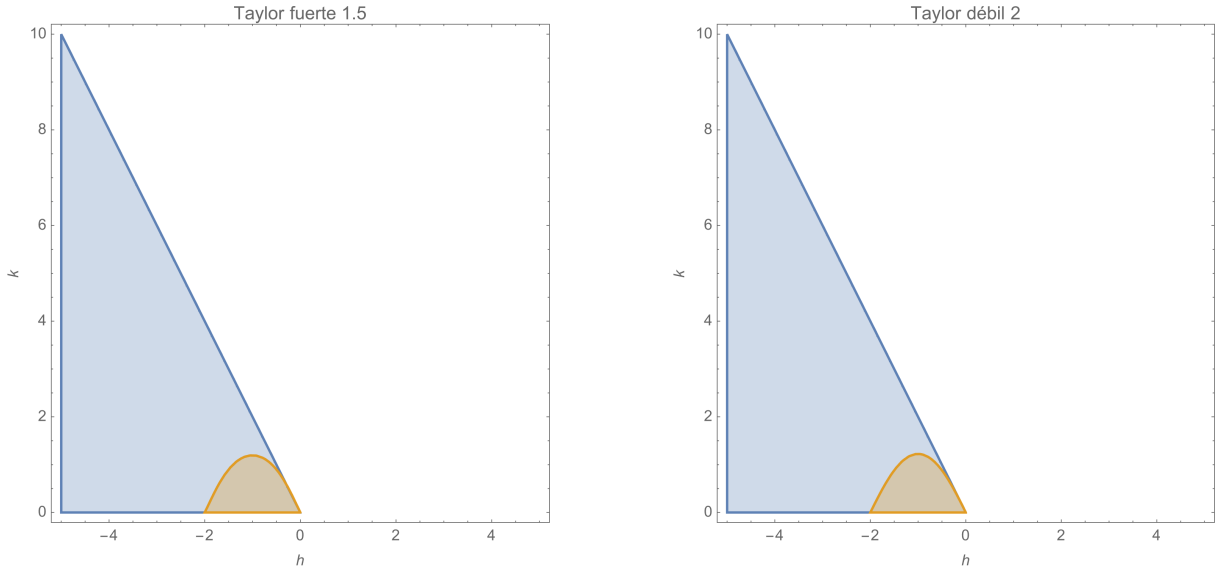
De igual forma, se pueden obtener las regiones de estabilidad para los métodos de Itô-Taylor de convergencia débil. En particular, para el método visto en (2.47) se tiene para $a(t, x) = \lambda x$ y $b(t, x) = \mu x$

$$Y_{n+1} = Y_n \mathbb{E} \left[\left(1 + \lambda \Delta + \mu \Delta W + \frac{1}{2} \mu^2 (\Delta W^2 - \Delta) + \lambda \mu \Delta Z + \frac{1}{2} \lambda^2 \Delta^2 + \lambda \mu (\Delta W \Delta - \Delta Z) \right)^2 \right]$$

y usando las propiedades de ΔW , la proposición 2.7 y las igualdades $\mathbb{E} [\Delta W^2 \Delta Z] = 0$, $\mathbb{E} [\Delta W^3 \Delta Z] = \frac{3}{2} \Delta^3$ finalmente tenemos

$$R(h, k) = \left| 1 + h + \frac{1}{2} h^2 \right|^2 + |1 + h|^2 |k| + \frac{1}{2} |k|^2 \quad (2.65)$$

y su región de estabilidad se muestra en la figura 2.4b.



(a) Método de Itô-Taylor con orden fuerte 1,5.

(b) Método de Itô-Taylor con orden débil 2.

Figura 2.4: Región de MS -estabilidad para otros métodos de Itô-Taylor explícitos.

Comparando (2.64) y (2.65) vemos que la región de estabilidad del método de Taylor con orden fuerte $\gamma = 1,5$ estará contenida en la región de estabilidad del método de Taylor con orden débil $\beta = 2$. En conclusión, se puede ver cómo la región de estabilidad está determinada en su mayor medida por el valor de θ , obteniendo las regiones de estabilidad más pequeñas para los métodos explícitos. En la figura 2.5 se muestra una comparativa entre regiones de estabilidad para distintos métodos.

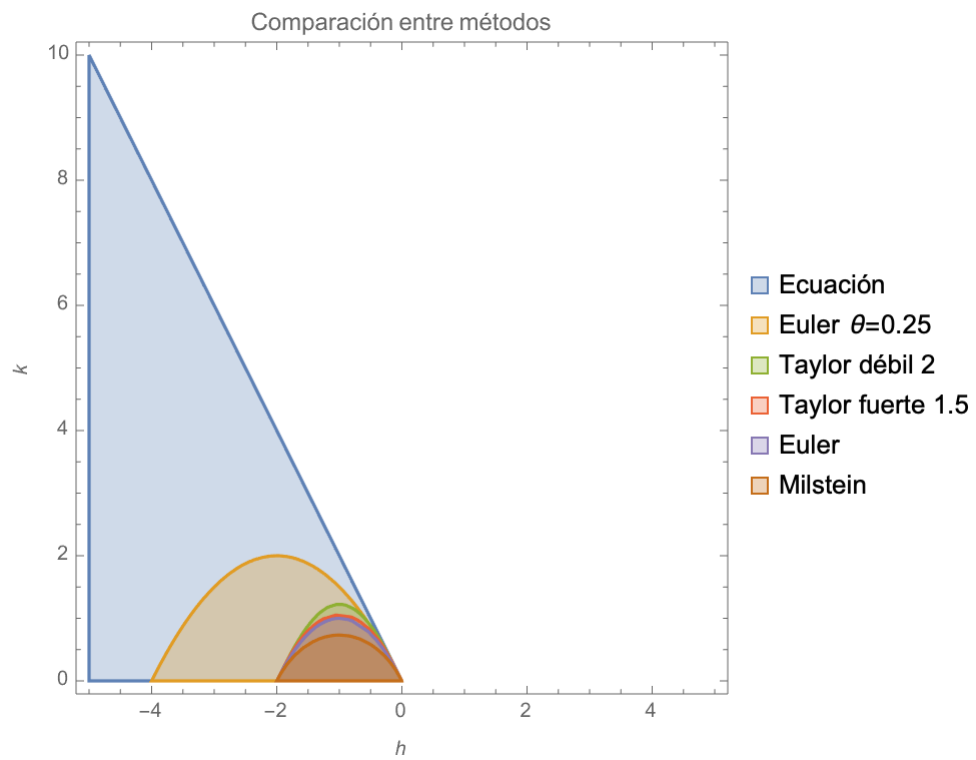


Figura 2.5: Comparación de la región de MS -estabilidad de diferentes métodos.

Capítulo 3

Simulaciones numéricas

3.1. Estabilidad de los θ -métodos de Euler-Maruyama

A lo largo de este capítulo simularemos numéricamente la estabilidad en media cuadrada y estimaremos el orden de convergencia fuerte y débil de diferentes métodos numéricos aplicados a la ecuación diferencial estocástica vista en (2.54). Así, podremos comparar los resultados numéricos obtenidos con las predicciones teóricas esperadas.

En particular, nos centraremos en estudiar la estabilidad en media cuadrática de la familia de θ -métodos de Euler-Maruyama vista en (2.37). Siguiendo con la figura 2.2 vemos que a medida que aumenta el valor de θ la región de estabilidad crece. Por tanto, fijaremos λ y k en la región de estabilidad de la solución exacta, es decir tales que $\lambda + \mu^2/2 < 0$, y simularemos tanto la media cuadrática de la solución exacta vista en el lema 2.27 como de las trayectorias obtenidas para distintos valores de θ .

Para cada θ simularemos 1000 trayectorias con dicho método, tomaremos el cuadrado de cada una de las trayectorias y haremos la media de dichos cuadrados en cada instante.

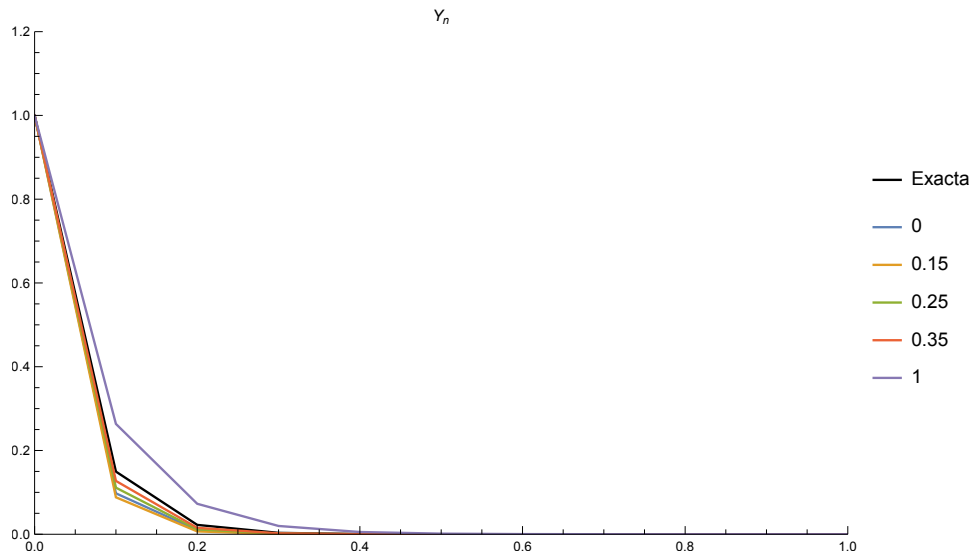


Figura 3.1: Estabilidad de los θ -métodos de Euler-Maruyama para diferentes valores de θ con $\lambda = -10$, $\mu = 1$ y $\Delta = 0,1$.

Si $\lambda = -10$, $\mu = 1$ y $\Delta = 0,1$, de las figuras 2.1 y 2.2 vemos que el punto escogido $h = -1$ y $k = 0,1$ está en la región de estabilidad de la solución exacta, ver la figura 3.1, así como de los métodos numéricos para cualquier $\theta \in [0, 1]$. Por tanto, en la simulación se observa claramente la convergencia en media cuadrática de la solución exacta y de los métodos para cualquier valor de θ . En la figura 3.2 se muestra un ejemplo en el que algunos métodos ya no son estables.

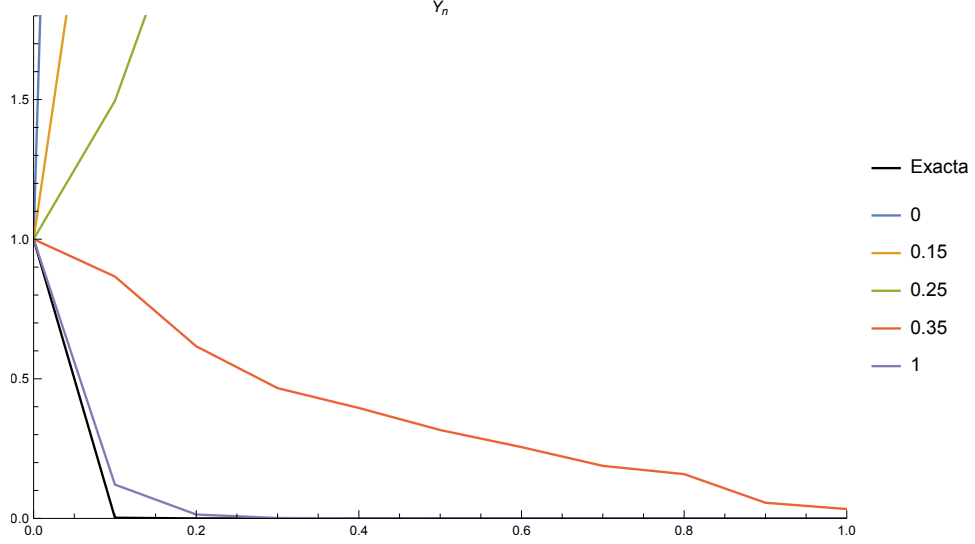


Figura 3.2: Estabilidad de los θ -métodos de Euler-Maruyama para diferentes valores de θ con $\lambda = -40$, $\mu = \sqrt{20}$ y $\Delta = 0,1$.

Vemos como si $\lambda = -40$, $\mu = \sqrt{20}$ y $\Delta = 0,1$ el punto $(h, k) = (-4, 2)$ es un punto de la región de estabilidad de la solución exacta Y_t pero no lo es por ejemplo para $\theta \in \{0, 0.15, 0.25\}$, con lo que para dichos valores de θ no habrá estabilidad en media cuadrática.

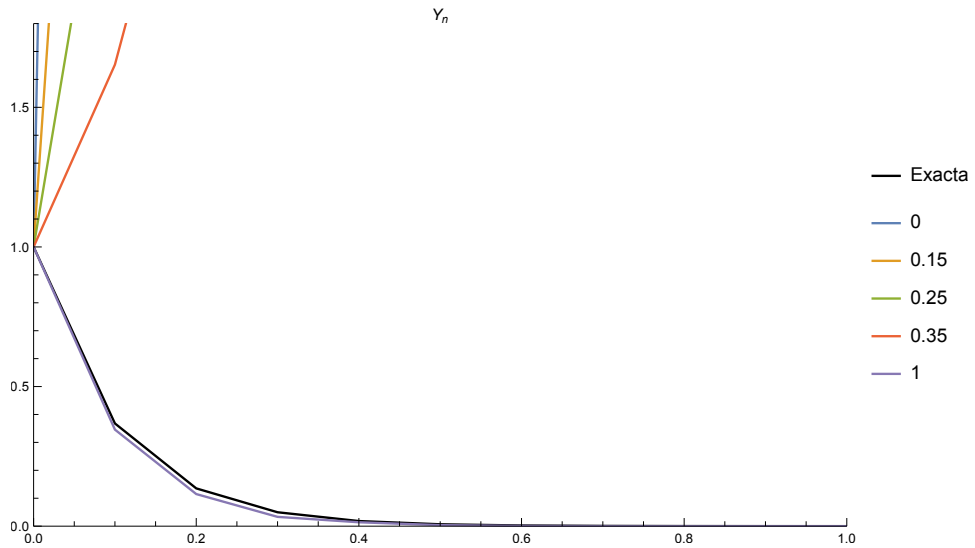


Figura 3.3: Estabilidad de los θ -métodos de Euler-Maruyama para diferentes valores de θ con $\lambda = -40$, $\mu = \sqrt{70}$ y $\Delta = 0,1$.

En la figura 3.3 tomando $\lambda = -40$, $\mu = \sqrt{70}$ y $\Delta = 0,1$ se tiene un valor de $h = -7$ y $k = 4$ de tal forma que únicamente el método puramente implícito es estable (de los que se han simulado). Estudiando la región de estabilidad en 2.2 vemos que para cualquier par (h, k) de forma que la solución exacta sea estable el método implícito también lo será. Sin embargo, hay ciertas regiones para las cuales el método implícito es estable sin que lo sea la solución exacta, como se muestra en la figura 3.4.

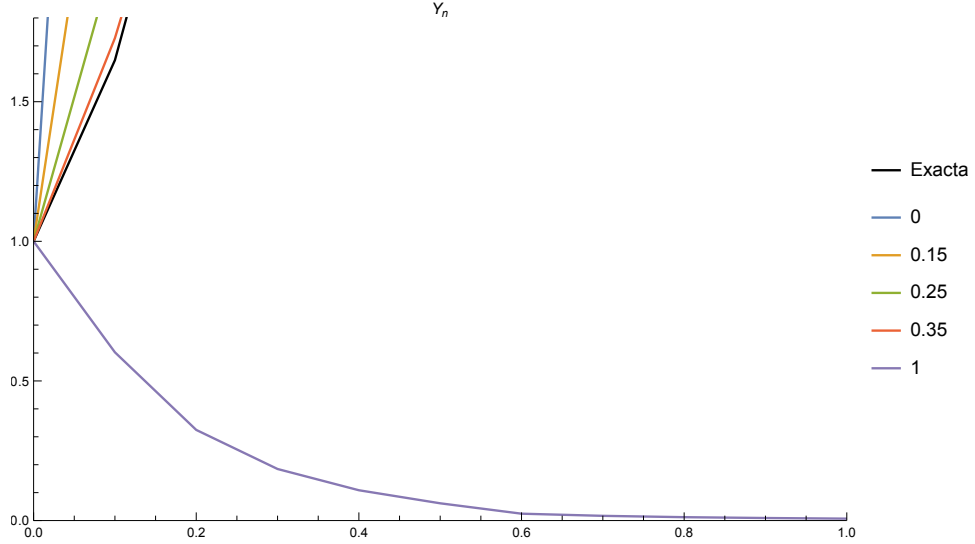


Figura 3.4: Estabilidad de los θ -métodos de Euler-Maruyama para diferentes valores de θ con $\lambda = -20$, $\mu = \sqrt{45}$ y $\Delta = 0,1$.

3.2. Simulación del error fuerte y débil

En esta sección obtendremos de forma numérica los resultados expuestos en las secciones 2.2 y 2.3. Para ello simularemos 1000 trayectorias de la solución exacta (2.55) y de cada método numérico estudiado.

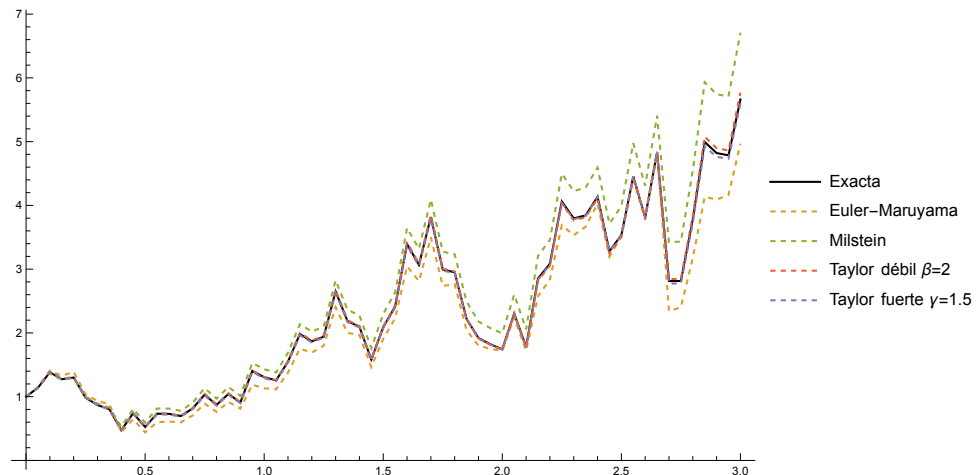


Figura 3.5: Simulación de una trayectoria para los diferentes métodos con $\lambda = 1,5$ y $\mu = 1$.

En la figura 3.5 se muestra como ejemplo la simulación de una trayectoria tanto a partir de la solución exacta como aplicando todos los métodos numéricos estudiados en el capítulo anterior.

Para estudiar el error fuerte, sobre cada trayectoria simulada se tomara el valor absoluto de la diferencia con la trayectoria obtenida para la solución exacta. Así, finalmente se tomará la media de las 1000 simulaciones con la intención de estimar la esperanza teórica. Es decir,

$$e_f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |X_T^i - Y_T^i|$$

con N el número de simulaciones e i la simulación i -ésima.

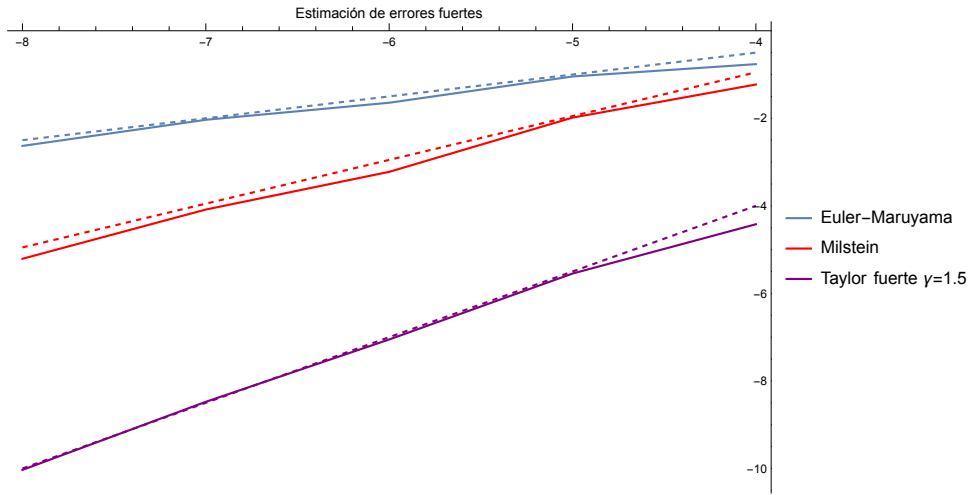


Figura 3.6: $\log_2(e_f)$ como función de $\log_2 \Delta$ para $\Delta = 2^{-4}, 2^{-5}, 2^{-6}, 2^{-7}, 2^{-8}$. En línea discontinua se representan rectas con pendiente igual al orden de convergencia teórico de cada método.

En la figura 3.6 se ha simulado el $\log_2 e_f$ en función de $\log_2 \Delta$ obteniendo una tendencia lineal de pendiente γ . Así,

$$e_f = C\Delta^\gamma$$

con lo que vemos cómo todos los métodos muestran un comportamiento lineal con orden (pendiente) que se corresponde con los órdenes teóricos fuertes que hemos expuesto anteriormente en 2.2.

Por otro lado, en el caso del error débil calcularemos el valor absoluto de las esperanzas la solución exacta y la estimación de la esperanza de cada método, es decir hemos tomado $g(x) = x$,

$$e_d = \left| \mathbb{E}[X_T] - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_T^i \right| = \left| e^{\lambda T} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_T^i \right|$$

Una vez simulado dicho error para diferentes valores del tamaño de paso Δ obtenemos la siguiente figura

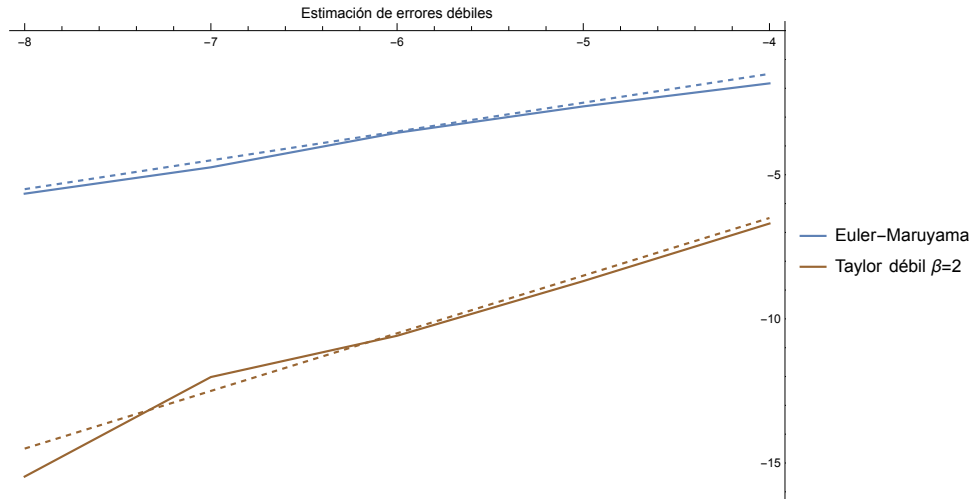


Figura 3.7: $\log_2(e_d)$ como función de $\log_2 \Delta$ para $\Delta = 2^{-4}, 2^{-5}, 2^{-6}, 2^{-7}, 2^{-8}$. En línea discontinua se representan rectas con pendiente igual al orden de convergencia teórico de cada método.

De la figura 3.7 vemos que los métodos numéricos tienen el orden débil que corresponde según la teoría vista en 2.3 ya que

$$e_d = C\Delta^\beta$$

Bibliografía

- [1] L. Arnold. *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications*. John Wiley & Sons, 1974.
- [2] V. P. Belavkin. «Quantum stochastic calculus and quantum nonlinear filtering». *Journal of Multivariate Analysis* 42.2 (1992), págs. 171-201.
- [3] A. Guilabert. *Ecuaciones diferenciales estocásticas y aplicaciones en física*. Trabajo de fin de grado. Universidad de Alicante. 2023. URL: <http://rua.ua.es/dspace/handle/10045/135344>.
- [4] D. J. Higham. «A-Stability and Stochastic Mean-Square Stability». *BIT Numerical Mathematics* 40 (2000), págs. 404-409.
- [5] D. J. Higham. «Mean-Square and Asymptotic Stability of the Stochastic Theta Method». *SIAM Journal on Numerical Analysis* 38.3 (2000), págs. 753-769.
- [6] K. Itô. «Stochastic Integral». *Proceedings of the Imperial Academy* 20.8 (1944), págs. 519-524.
- [7] P. E. Kloeden y E. Platen. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Springer, 1992.
- [8] J. A. Lázaro-Camí y J. P. Ortega. «Stochastic hamiltonian dynamical systems». *Reports on Mathematical Physics* 61.1 (2008), págs. 65-122.
- [9] Y. Saito y T. Mitsui. «Stability Analysis of Numerical Schemes for Stochastic Differential Equations». *SIAM Journal on Numerical Analysis* Vol. 33.6 (1996), págs. 2254-2267.

Apéndice A

Código

Estabilidad lineal

En primer lugar mostraremos el código utilizado para simular la estabilidad en media cuadrática tanto de la solución exacta (2.55) como de la familia de θ -métodos (2.37). Una vez fijamos los valores de h y k podemos obtener de su definición los parámetros λ y μ . Así como definiremos también los parámetros de la simulación y los valores de θ que queremos simular.

```
1 ClearAll["Global'"]
2
3 t0 = 0;
4 T = 1;
5 x0 = 1;
6
7 pasos = 100;
8 Delta = (T - t0)/pasos;
9 DeltaS = -1;
10 kS = 0.1;
11 lambda = DeltaS/Delta;
12 mu = Sqrt[kS/Delta];
13 a[t_, x_] := lambda*x;
14 b[t_, x_] := mu*x;
15
16 NSim = 1000;
17 theta = {0, 0.15, 0.25, 0.35, 1};
```

A continuación definimos una función que simule una trayectoria para el θ -método.

```
1 similarTrayectoria [x0_, a_, b_, theta_] :=
2 Module[{X, t, n}, X = ConstantArray[0, pasos + 1];
3 X[[1]] = x0;
4 For[n = 1, n <= pasos, n++, t = t0 + (n - 1)*Delta;
5 dis = NormalDistribution[0, 1];
6 incremWiener = Sqrt[Delta]*RandomVariate[dis];
7 tnm1 = (n - 1)*Delta;
8 nextEuler =
9 Solve[s ==
10 X[[n]] + (theta*a[n*Delta, s] + (1 - theta)*a[tnm1, X[[n]]) *
11 Delta + b[tnm1, X[[n]]]*incremWiener, s];
12 X[[n + 1]] = s /. nextEuler [[1]]];
```

13 X]

Simulamos 1000 trayectorias de cada método, calculamos su cuadrado y posteriormente la media en cada instante. Además, simulamos también la esperanza teórica de la solución.

```
1 MSEExpectation = {};
2 Do[
3   itSim = Table[simularTrayectoria[x0, a, b, theta[[i]]], {NSim}];
4   itMSEExp = Mean[(itSim^2)];
5   MSEExpectation = Append[MSEExpectation, itMSEExp]
6
7   , {i, 1, Length[theta]}]
8
9
10 y = {{t0, x0}};
11 itY = x0;
12 Do[
13   itY = itY*Exp[(2*lambda + mu^2)*Delta];
14   y = Append[y, {n*Delta, itY}]
15   , {n, 1, pasos}]
```

Por último, representamos las soluciones obtenidas.

```
1 analyticYt =
2   ListLinePlot[y, PlotStyle -> Black,
3   PlotRange -> {{0., 0.1}, {0., 1.8}}, PlotLegends -> {"Exacta"}];
4 figMethods =
5   ListLinePlot[
6     Table[Transpose[{Range[t0, T, Delta], MSEExpectation[[i]]}], {i, 1,
7     Length[theta]}],
8     PlotLegends -> Table[Text[theta[[i]], {i, 1, Length[theta]}],
9     PlotRange -> {{0., 0.1}, {0., 1.8}}];
10 fig = Show[analyticYt, figMethods, ImageSize -> Large,
11   PlotLabel -> "\!\[(*SubscriptBox[(Y),-(n)])\]",
12   PlotRange -> {{0., 0.1}, {0., 1.8}}]
```

Trayectorias

A continuación se muestra el código empleado para el cálculo de las trayectorias de la figura 3.5. En primer lugar definimos la ecuación diferencial estocástica (2.54) así como las derivadas de los coeficientes que serán necesarias en algunos métodos numéricos.

```
1 lambda = 1.5;
2 mu = 1;
3 a[t_, X_] = lambda*X;
4 b[t_, X_] = mu*X;
5 ax[t_, X_] = D[a[t, X], X];
6 bx[t_, X_] = D[b[t, X], X];
7 axx[t_, X_] = D[ax[t, X], X];
8 bxx[t_, X_] = D[bx[t, X], X];
```

Fijamos los parámetros de la simulación, las distribuciones de probabilidad utilizadas y las listas donde guardaremos las trayectorias obtenidas con cada método

```
1 t0 = 0;
```

```

2 T = 3;
3 x0 = 1;
4 Delta = 1/20;
5 pasos = (T - t0)/Delta;
6 dis1 = NormalDistribution[0, 1];
7 dis2 = NormalDistribution[0, 1];
8
9 x = x0;
10 xEuler = x0;
11 xMilstein = x0;
12 xT2w = x0;
13 xT1p5f = x0;
14
15 sol = {{t0, x0}};
16 solEuler = {{t0, x0}};
17 solMilstein = {{t0, x0}};
18 solT2w = {{t0, x0}};
19 solT1p5f = {{t0, x0}};

```

Inicializamos el bucle donde calculamos una trayectoria de la solución analítica vista en (2.55) y con los métodos numéricos dados en (2.25), (2.33), (2.35) y (2.47).

```

1 Do[
2   U1 = Random[dis1];
3   U2 = Random[dis2];
4   incremWiener = Sqrt[Delta]*U1;
5   incremZ = 1/2*Delta^(3/2)*(U1 + U2/Sqrt[3]);
6
7   x = x*E^((lambda - 1/2 mu^2) Delta + mu *incremWiener);
8   sol = Append[sol, {n*Delta, x}];
9   tnm1 = (n - 1) Delta;
10
11  xEuler =
12    xEuler + a[tnm1, xEuler]*Delta + b[tnm1, xEuler]*incremWiener;
13  solEuler = Append[solEuler, {n*Delta, xEuler}];
14
15  xMilstein =
16    xMilstein + a[tnm1, xMilstein]*Delta +
17    b[tnm1, xMilstein]*incremWiener +
18    1/2*bx[tnm1, xMilstein]*b[tnm1, xMilstein]*(incremWiener^2 - Delta);
19  solMilstein = Append[solMilstein, {n*Delta, xMilstein}];
20
21  xT2w = xT2w + a[tnm1, xT2w]*Delta +
22    b[tnm1, xT2w]*incremWiener + (1/2)*b[tnm1, xT2w]*
23    bx[tnm1, xT2w]*(incremWiener^2 - Delta) +
24    ax[tnm1, xT2w]*b[tnm1, xT2w]*
25    incremZ + (1/
26      2)*(a[tnm1, xT2w]*ax[tnm1, xT2w] + (1/2)*b[tnm1, xT2w]^2*
27      axx[tnm1, xT2w])*
28    Delta^2 + (a[tnm1, xT2w]*bx[tnm1, xT2w] + (1/2)*b[tnm1, xT2w]^2*
29    bxx[tnm1, xT2w])*(incremWiener*Delta - incremZ);
30  solT2w = Append[solT2w, {n*Delta, xT2w}];
31
32  xT1p5f =
33    xT1p5f + a[tnm1, xT1p5f]*Delta +
34    b[tnm1, xT1p5f]*incremWiener + (1/2)*b[tnm1, xT1p5f]*

```

```

35     bx[tnm1, xT1p5f]*(incrmWiener^2 - Delta) +
36     ax[tnm1, xT1p5f]*b[tnm1, xT1p5f]*
37     incremZ + (1/
38     2)*(a[tnm1, xT1p5f]*ax[tnm1, xT1p5f] + (1/2)*b[tnm1, xT1p5f]^2*
39     axx[tnm1, xT1p5f])*
40     Delta^2 + (a[tnm1, xT1p5f]*bx[tnm1, xT1p5f] + (1/2)*
41     b[tnm1, xT1p5f]^2*bx[tnm1, xT1p5f])*(incrmWiener*Delta -
42     incremZ) + (1/2)*(b[tnm1, xT1p5f]^2*bx[tnm1, xT1p5f] +
43     b[tnm1, xT1p5f]*(bx[tnm1, xT1p5f]^2)*((1/3)*incrmWiener^3 -
44     incremWiener*Delta);
45 solT1p5f = Append[solT1p5f, {n*Delta, xT1p5f}]
46 ,
47 {n, 1, pasos}]

```

Finalmente graficamos cada una de las trayectorias dejando la trayectoria de la solución exacta con línea continua y el resto con línea discontinua.

```

1 fig = ListLinePlot[{sol, solEuler, solMilstein, solT2w, solT1p5f},
2   PlotStyle -> {{Line, Black}, Dashed, Dashed, Dashed, Dashed},
3   PlotRange -> Automatic,
4   PlotLegends -> {"Exacta", "Euler-Maruyama", "Milstein",
5     "Taylor_débil \[Beta]=2", "Taylor_fuerte \[Gamma]=1.5"},
6   ImageSize -> Large]

```

Error fuerte y débil

En primer lugar obtendremos los órdenes fuertes que se muestran en la figura 3.6 siguiendo un esquema similar al visto en el código de la simulación para las trayectorias. Simularemos 1000 trayectorias con los métodos fuertes presentados (2.25), (2.33) y (2.35) para posteriormente tomar la media.

```

1 lambda = 1.5;
2 mu = 1;
3 a[t_, X_] = lambda*X;
4 b[t_, X_] = mu*X;
5 ax[t_, X_] = D[a[t, X], X];
6 bx[t_, X_] = D[b[t, X], X];
7 axx[t_, X_] = D[ax[t, X], X];
8 bxx[t_, X_] = D[bx[t, X], X];
9
10 t0 = 0;
11 T = 1;
12 x0 = 1;
13
14 DeltaList = {2^-4, 2^-5, 2^-6, 2^-7, 2^-8};
15 NSim = 1000;
16
17 ErrFuerteEuler = {};
18 ErrFuerteMilstein = {};
19 ErrFuerteT1p5f = {};
20
21 Do[
22   Delta = DeltaList[[k]];
23   pasos = (T - t0)/Delta;

```

```

24 errorEuler = 0;
25 errorMilstein = 0;
26 errorT1p5f = 0;
27 Do[
28   dis1 = NormalDistribution[0, 1];
29   dis2 = NormalDistribution[0, 1];
30   x = x0;
31   xEuler = x0;
32   xMilstein = x0;
33   xT1p5f = x0;
34   Do[
35     U1 = Random[dis1];
36     U2 = Random[dis2];
37     incremWiener = Sqrt[Delta]*U1;
38     incremZ = 1/2*Delta^(3/2)*(U1 + U2/Sqrt[3]);
39     tnm1 = (n - 1)*Delta;
40
41     x = x*E^((lambda - 1/2 mu^2) Delta + mu *incremWiener);
42
43     xEuler =
44       xEuler + a[tnm1, xEuler]*Delta + b[tnm1, xEuler]*incremWiener;
45
46     xMilstein =
47       xMilstein + a[tnm1, xMilstein]*Delta +
48       b[tnm1, xMilstein]*incremWiener +
49       1/2*bx[tnm1, xMilstein]*
50       b[tnm1, xMilstein]*(incremWiener^2 - Delta);
51
52
53     xT1p5f =
54       xT1p5f + a[tnm1, xT1p5f]*Delta +
55       b[tnm1, xT1p5f]*incremWiener + (1/2)*b[tnm1, xT1p5f]*
56       bx[tnm1, xT1p5f]*(incremWiener^2 - Delta) +
57       ax[tnm1, xT1p5f]*b[tnm1, xT1p5f]*
58       incremZ + (1/
59         2)*(a[tnm1, xT1p5f]*ax[tnm1, xT1p5f] + (1/2)*
60         b[tnm1, xT1p5f]^2*axx[tnm1, xT1p5f])*
61         Delta^2 + (a[tnm1, xT1p5f]*bx[tnm1, xT1p5f] + (1/2)*
62         b[tnm1, xT1p5f]^2*bxx[tnm1, xT1p5f])*(incremWiener*Delta -
63         incremZ) + (1/2)*(b[tnm1, xT1p5f]^2*bxx[tnm1, xT1p5f] +
64         b[tnm1, xT1p5f]*(bx[tnm1, xT1p5f])^2)*((1/3)*incremWiener^3 -
65         incremWiener*Delta),
66     {n, 1, pasos}];
67
68     errorEuler = errorEuler + Abs[x - xEuler];
69     errorMilstein = errorMilstein + Abs[x - xMilstein];
70     errorT1p5f = errorT1p5f + Abs[x - xT1p5f],
71     {j, 1, NSim}];
72
73 ErrFuerteEuler = Append[ErrFuerteEuler, {Delta, errorEuler/NSim}];
74 ErrFuerteMilstein =
75   Append[ErrFuerteMilstein, {Delta, errorMilstein/NSim}];
76 ErrFuerteT1p5f = Append[ErrFuerteT1p5f, {Delta, errorT1p5f/NSim}]
77 , {k, 1, Length[DeltaList]}]
78 ErroresFuentes = {ErrFuerteEuler, ErrFuerteMilstein, ErrFuerteT1p5f};

```

Representamos el logaritmo en base 2 del error en función del logaritmo en base 2 del tamaño de paso Δ , añadiendo rectas con los respectivos órdenes teóricos (en línea discontinua) para comparar los resultados.

```

1 g7 = ListLinePlot[Log[2, ErroresFuentes],
2   PlotStyle -> {Line, Red, Purple},
3   PlotLegends -> {"Euler-Maruyama", "Milstein",
4     "Taylor_fuerte\[Gamma]=1.5"}];
5 g8 = Plot[1.5 x + 2, {x, -8, -4}, PlotStyle -> {Dashed, Purple}];
6 g9 = Plot[1 x + 3.05, {x, -8, -4}, PlotStyle -> {Dashed, Red}];
7 g10 = Plot[0.5 x + 1.5, {x, -8, -4}, PlotStyle -> Dashed];
8 figExport =
9   Show[g7, g8, g9, g10, ImageSize -> Large,
10  PlotLabel -> "Estimacion_de_errores_fuertes"]

```

Por último, los órdenes débiles mostrados en la figura 3.7 se simulan de forma análoga al caso anterior.

```

1 ErrDebilEuler = {};
2 ErrDebilT2w = {};
3 Do[
4   Delta = DeltaList[[k]];
5   pasos = (T - t0)/Delta;
6   LastEuler = 0;
7   LastT2w = 0;
8   LastSol = 0;
9   Do[
10    dis1 = NormalDistribution[0, 1];
11    dis2 = NormalDistribution[0, 1];
12    x = x0;
13    xEuler = x0;
14    xT2w = x0;
15    Do[
16      U1 = Random[dis1];
17      U2 = Random[dis2];
18      incremWiener = Sqrt[Delta]*U1;
19      incremZ = 1/2*Delta^(3/2)*(U1 + U2/Sqrt[3]);
20      tnm1 = (n - 1)*Delta;
21
22      x = x*E^((lambda - 1/2 mu^2) Delta + mu *incremWiener);
23
24      xEuler =
25        xEuler + a[tnm1, xEuler]*Delta + b[tnm1, xEuler]*incremWiener;
26
27      xT2w =
28        xT2w + a[tnm1, xT2w]*Delta +
29        b[tnm1, xT2w]*incremWiener + (1/2)*b[tnm1, xT2w]*
30        bx[tnm1, xT2w]*(incremWiener^2 - Delta) +
31        ax[tnm1, xT2w]*b[tnm1, xT2w]*
32        incremZ + (1/
33          2)*(a[tnm1, xT2w]*ax[tnm1, xT2w] + (1/2)*b[tnm1, xT2w]^2*
34          axx[tnm1, xT2w])*
35          Delta^2 + (a[tnm1, xT2w]*bx[tnm1, xT2w] + (1/2)*b[tnm1, xT2w]^2*
36          bxx[tnm1, xT2w])*(incremWiener*Delta - incremZ);
37    , {n, 1, pasos}];

```

```

38
39 LastSol = LastSol + x;
40 LastEuler = LastEuler + xEuler;
41 LastT2w = LastT2w + xT2w;
42 , {j, 1, NSim}];
43 ErrDebilEuler =
44   Append[ErrDebilEuler, {Delta, Abs[LastSol/NSim - LastEuler/NSim]}];
45 ErrDebilT2w =
46   Append[ErrDebilT2w, {Delta, Abs[LastSol/NSim - LastT2w/NSim]}]
47   , {k, 1, Length[DeltaList]}]
48 ErroresDebiles = {ErrDebilEuler, ErrDebilT2w};
49
50 g11 = ListLinePlot[Log[2, ErroresDebiles], PlotStyle -> {Line, Brown},
51   PlotLegends -> {"Euler-Maruyama", "Taylor_debil_\[Beta]=2"}];
52 g12 = Plot[x + 2.5, {x, -8, -4}, PlotStyle -> Dashed];
53 g13 = Plot[2 x + 1.5, {x, -8, -4}, PlotStyle -> {Dashed, Brown}];
54 figExportDebiles =
55   Show[g11, g12, g13, PlotLabel -> "Estimacion_de_errores_debiles",
56     ImageSize -> Large]

```
