GRADO EN MATEMÁTICAS

Trabajo fin de grado

INVERSAS GENERALIZADAS DE MATRICES Y APLICACIONES

(GENERALIZED INVERSES OF MATRICES AND APPLICATIONS)

Autor:
Julia Rodríguez Díaz

Tutor:
Fernando Pablos Romo

Salamanca, Septiembre de 2024

GRADO EN MATEMÁTICAS

Trabajo fin de grado

INVERSAS GENERALIZADAS DE MATRICES Y APLICACIONES

(GENERALIZED INVERSES OF MATRICES AND APPLICATIONS)

Autor:
Julia Rodríguez Díaz

Tutor:
Fernando Pablos Romo

Salamanca, septiembre de 2024

Firmado por RODRIGUEZ DIAZ JULIA - ***5813** el día 05/09/2024 con un certificado emitido por AC FNMT Usuarios

D. Fernando Pablos Romo, profesor del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Salamanca,

HACE CONSTAR:

Que el trabajo titulado "*Inversas Generalizadas de Matrices y Aplicaciones",* que se presenta, ha sido realizado por Dª Julia Rodríguez Díaz, con DNI ****8133P y constituye la memoria del trabajo realizado para la superación de la asignatura Trabajo de Fin de Grado en Matemáticas en esta Universidad.

Salamanca, a fecha de firma electrónica.

Firmado por PABLOS ROMO FERNANDO - ***7205** el día 05/09/2024 con un certificado emitido por AC FNMT Usuarios

Fdo.: Fernando Pablos Romo

Índice general

Capítulo 1

Introducción

El objetivo de este trabajo es realizar una revisión bibliográfica de las matrices inversas generalizadas. Concretamente se abordarán las matrices $1-inversas$, $2-inversas$ y las inversas reflexivas generalizadas como la inversa de Moore-Penrose, la inversa de Drazin y la inversa de Drazin-Moore-Penrose. Se determinarán sus propiedades para posteriormente mostrar algunas de sus aplicaciones junto con ejemplos prácticos.

Las investigaciones apuntan a que la primera vez que se mencionó el concepto de inversa generalizada sobre el papel fue por Fredholm en el año 1903 [1], donde definió una inversa generalizada de un operador integral. Posterior a esto, se definió también los inversos generalizados de operadores integrales. Ambos concepetos fueron previos a los inversos generalizados de matrices que Moore definió por primera vez en el año 1920 por escrito.

El concepto de matriz inversa está limitado a matrices cuadradas y no singulares. Esta limitación propició que diversos autores estudiaran otras formas de inversas de matrices. En un primer momento, E.H.Moore estudió los inversos generalizados de matrices definiendo un inverso único o lo que él llamó «recíproco general»[2]. Su primera publicación fue en el año 1920, pero debido a la engorrosa notación y la peculiaridad del tema tratado no generó demasiado interés. En el año 1951, A.Bjerhammar, redescubrió la inversa de Moore y también observó la relación de las inversas generalizadas con las soluciones de los sistemas de ecuacuiones lineales. Más tarde, en 1955, Penrose extendió el trabajo de Bjerhammar y demostró que la inversa de Moore de una matriz dada es la única matriz que satisface las 4 condiciones de Penrose. Estas condiciones serán mostradas en el Capítulo 3 como definición de la inversa de Moore-Penrose. Para más detalles: [1],[3].

En el año 1958, a partir de las inverstigaciones de Moore y Penrose, Drazin definió el inverso de Drazin en un anillo. En el Capítulo 4 se darán unas notas más extensas sobre este tema.

Actualmente se pueden encontrar más de 500 publicaciones relacionadas con este tema. Además, las inversas generalizadas siguen siendo objeto de interés para muchos investigadores.

Este trabajo se organiza en cuatro capítulos. En el Capítulo 2, posterior a la introducción, se sentarán las bases para el desarrollo del trabajo. En los dos capítulos siguientes, Capítulo 3 y Capítulo 4, se desarrollará la base teórica del trabajo. En el último capítulo, Capítulo 5, y a modo de conclusión, se mostrarán las aplicaciones de la teoría desarrollada previamente.

En el Capítulo 2, se definirá la notación que utilizaremos a lo largo del trabajo y se darán los conceptos básicos necesarios para lo siguiente. También se introducirá el concepto de inversa generalizada que, aunque no se utilizará en este trabajo, servirá para comprender de forma global este tipo de matrices. Abordaremos en este capítulo los conceptos de $1 - inversa$ y $2 - inversa$ junto con algún ejemplo numérico.[1]

En el Capítulo 3, dedicado a la inversa de Moore-Penrose, se definirá dicha matriz de tres formas diferentes: la definición proporcionada por Moore, la definición proporcionada por Penrose y la definición explícita que permite el cálculo. Se demostrará también la equivalencia de las tres definiciones. Posteriormente, se abordará el teorema de existencia y unicidad de dicha matriz junto con algunas consecuencias inmediatas. A continuación, se dará la expresión explícita de la inversa y se procederá al cálculo de la inversa de Moore-Penrose de una matriz dada de dos formas diferentes: a través de la definición y a través de la expresión explícita. Para finalizar el capítulo, señalaremos y demostraremos algunas de las propiedades interesantes que esta inversa cumple. Véase [1], [4], [5], [6], [7] y [8].

El Capítulo 4 estará destinado a la inversa de Drazin. Primero, se dará alguna nota histórica sobre los inicios y la evolución de la matriz y algunos autores implicados. Después, se pasará a dar la definición y el teorema de existencia y unicidad. Seguidamente, demostraremos la descomposición core-nilpotente de una matriz, resultado necesario para que a continuación veamos la expresión explícita de la inversa de Drazin a partir de la descomposición core-nilpotente. También se demostrará la condición necesaria y suficiente para que la inversa de Drazin sea $1 - inversa$. Veremos un ejemplo de cálculo numérico. Para terminar el capítulo, se mostrarán algunas propiedades de esta matriz y la condición necesaria para la coincidencia con la matriz de Moore-Penrose. Véase [9], [10], [11], [12], [13], [14] y [8].

Una vez desarrollada la teoría, pasaremos al Capítulo 5 donde podremos encontrar diferentes aplicaciones de estas matrices.

Como primera aplicación, tenemos la invera de Drazin-Moore-Penrose, una construcción a partir de la inversa de Drazin y la inversa de Moore-Penrose de una matriz dada. En primer lugar, en esta sección se mostrará la existencia y unicidad de la inversa de Drazin-Moore-Penrose como solución de un sistema de ecuaciones dado. Posteriormente, se definirá dicha matriz y demostraremos algunas propiedades que verifica. Para terminar la sección, se calculará la matriz de Drazin-Moore-Penrose de una matriz dada a partir de la inversa de Drazin y la inversa de Moore-Penrose. Véase [15],[16] y [17].

En la siguiente sección se abordará la inversa dual de Drazin-Moore-Penrose y el desarrollo de la sección será análogo al anterior: teorema de existencia y unicidad, definición, propiedades de la inversa y ejemplo numérico. Véase en [17].

En tercer lugar, aplicación de la matriz de Drazin a resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales. Primero se dará solución al caso más simple e inmediato en el que la ecuación es de la forma

$$x' + Ax = f,$$

donde $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ y x y f son vectores cuyos elementos son funciones diferenciales de variable t . A continuación, pasará a resolverse el caso en el que la ecuación es de la forma

$$Ax' + Bx = f$$

cuando A y B conmutan. Después, se abordará el caso general donde se proporcionarán las condiciones necesarias y suficientes para la unicidad de las soluciones y finalmente se hallará la solución general en el caso en el que la ecuación $Ax' + Bx = f$ tenga soluciones únicas. Para terminar se pondrá un ejemplo práctico numérico. Véase en [18].

Para finalizar las aplicaciones, se dará uso a la inversa de Moore-Penrose para aproximar soluciones de sistemas de ecuaciones no compatibles. Para aproximar soluciones se utilizará lo que se conoce como resolución por mínimos cuadrados. Si tenemos el sistema incompatible

$$Ax = b,$$

donde $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$ y $b \in \mathbb{C}^n$, la inversa de Moore-Penrose aproxima una solución del sistema, es decir, si consideramos la norma usual y llamamos residuo a

$$r = b - Ax,$$

la inversa de Moore-Penrose nos da la mínima distancia entre Ax y b, es decir, que el residuo r sea lo más próximo a 0. La inversa de Moore-Penrose de A nos proporciona la solución más cercana al sistema, sin embargo, no siempre es necesaria que la distancia entre b y Ax sea la mínima. Se mostrará un teorema en el que se obtienen soluciones por mínimos cuadrados del sistema en el que interviene también la inversa de Moore-Penrose. Finalmente, se mostrará un ejemplo práctico de esta aplicación. Véase [19], [20], [21] y [8].

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo se definirán los conceptos previos necesarios para el desarrollo del trabajo. También se introducirán las matrices inversas generalizadas de forma general y se proporcionarán notas históricas a cerca de ellas con algún ejemplo.

2.1. Notación y nociones básicas

Sea $\mathbb{C}$ el conjunto de los números complejos. $\mathbb{C}^n$ es el espacio vectorial formado por el conjunto de las n-tuplas sobre $\mathbb{C}$, es decir, vectores columna o matrices $n \times 1$. $\mathbb{C}^{m\times n}$ es el espacio vectorial de las matrices con coeficientes complejos de dimensión $m \times n$. En este trabajo, el producto interior considerado en $\mathbb{C}^n$ será el producto interior usual, es decir, si $x, x' \in \mathbb{C}^n$, entonces $< x, x' >= x^t(x')^*$, siendo $(x')^*$ el conjugado complejo de x' y x^t el traspuesto de x, lo que evidencia que el convenio a seguir será por columnas.

Sea $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m$ una aplicación lineal entre espacios vectoriales. Fijadas bases $B = \{e_1, ..., e_n\}$ de $\mathbb{C}^n$ y $B' = \{e'_1, ..., e'_{n'}\}$ de $\mathbb{C}^m$, se define la matriz asociada a la aplicación lineal f en las bases B y B' como la matriz A de dimensión $m \times n$ cuyas columnas son las coordenadas de los vectores de la base B en términos de B'.

Recíprocamente, la matriz $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ induce una aplicación lineal entre los espacios $\mathbb{C}^n$ y $\mathbb{C}^m$, $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m$ tal que $f(x) = Ax$, para todo $x \in \mathbb{C}^n$. $R(A)$ denota el espacio vectorial de las columnas de A. Además, $Rg(A)$ denotará la dimensión de $R(A)$. El núcleo de A, $N(A)$, será el núcleo de la aplicación f. En términos matriciales se define como $N(A) = \{x \in \mathbb{C}^n : Ax = 0\}$. Llamaremos índice de A, ind(A), al menor número entero no negativo que verifica

$$rg(A^{ind(A)}) = rg(A^{ind(A)+1}).$$

Sea f la aplicación lineal anterior definida. Se llama aplicación adjunta a la aplicación $f^* : \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^n$ a aquella que verifica

$$< f(x), y >=< x, f^*(y) >, \text{ para todo } x \in \mathbb{C}^n \text{ y para todo } y \in \mathbb{C}^m.$$

Si A' es la matriz asociada a la aplicación f^* en las bases B' y B y además ambas bases son ortonormales, entonces se verifica que $A' = A^*$, siendo A^* la matriz conjugada traspuesta de A. Las propiedades que se utilizarán con respecto a esta matriz son las siguientes:

1. $(A^*)^* = A$
2. $(AB)^* = B^*A^*$,

siendo $A, B \in \mathbb{C}^{n\times m}$ y $A^*, B^* \in \mathbb{C}^{m\times n}$ sus correspondientes matrices conjugadas traspuestas.

Sea $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Se define la matriz inversa de B, y se denota por B^{-1}, como la única matriz que safisface

$$BB^{-1} = B^{-1}B = I,$$

siendo I la matriz identidad. B tiene inversa si y solo si es no singular, es decir, su determinante es distinto de 0. En el caso en el que exista la inversa, se dice que B es invertible.

Sea $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Se dice que C es unitaria si verifica:

$$CC^* = C^*C = I,$$

siendo I la matriz identidad.

Sea $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Se dice que C es un proyector si verifica:

$$C^2 = C.$$

Sea M un subespacio de $\mathbb{C}^n$. Se define proyector ortogonal de $\mathbb{C}^n$ en M, y se denota por P_M, a la matriz definida por $P_M u = u$ si $u \in M$ y $P_M u = 0$ si $u \in M^\perp$. Nótese que $I - P_M = P_{M^\perp}$ y para cualquier proyector ortogonal P se tiene que $P = P_{R(P)}$.

2.2. Matrices inversas generalizadas

Desde 1955 se han escrito cientos de publicaciones relacionados con las inversas generalizadas y sus diferentes aplicaciones. Adi Ben-Israel y Thomas N.E.Greville en su libro «Generalized Inverses, Theory and Applications» [1], unificaron el concepto de inverso generalizado con una definición partiendo de las 4 condiciones de Penrose:

Definición 2.2.1. - Para cualquier $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, sea $A\{i, j, ...k\}$ el conjunto de matrices $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ que satisfacen las ecuaciones $(i), (j), ..., (k)$ de entre las 4 ecuaciones de Penrose. La matriz $X \in A\{i, j, ...k\}$ se llama $\{i, j, ..., k\} - inversa$ de A.

Simultáneo a estas investigaciones relacionadas con la actual matriz de Moore-Penrose, otros autores han explorado matrices que cumplen alguna de las condiciones de Penrose.

A continuación, se definirán brevemente las matrices $1 - inversas$ y $2 - inversas$. Veremos que a lo largo del trabajo se profundizará en este tipo de matrices.

2.2.1. Matrices 1-inversas

Definición 2.2.2. - Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y $B \in \mathbb{C}^{n\times m}$. Se dice que B es $1 - inversa$ o inversa interior de A si verifica:

$$ABA = A.$$

Ejemplo 2.2.1. - *Matriz cuadrada no singular.*

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ matriz cuadrada no singular y $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$ la matriz inversa de A.

La matriz inversa cumple la condición de $1-inversa$:

$$AA^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = A.$$

Observación 2.2.1. - Otro ejemplo de matriz $1-inversa$ es la inversa de Moore-Penrose. El siguiente capítulo está dedicado a esta matriz.

2.2.2. Matrices 2-inversas

Definición 2.2.3. - Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y $B \in \mathbb{C}^{n\times m}$. Se dice que B es $2-inversa$ de A si verifica:

$$BAB = B.$$

Observación 2.2.2. - La matriz inversa de A cumple la condición de $2-inversa$.

Ejemplo 2.2.2. - La inversa de Drazin y la inversa DMP son ejemplos matrices 2-inversas. En los siguientes capítulos se estudiarán ambas matrices.

Capítulo 3

Inversa de Moore-Penrose

En el año 1956, un estudiante de Moore demostró que la definiciones que publicaron Moore y Penrose sobre la inversa generalizada eran equivalentes [4]. Es por esta razón por la que a la inversa generalizada se le conoce como inversa de Moore-Penrose o también pseudoinversa de Moore-Penrose.

Este capítulo se centrará en el estudio de la inversa de Moore-Penrose. Primero se proporcionará la definición que dio Moore, aunque no se hará uso de esta hasta más adelante para algunas demostraciones en el Capítulo 5. Después se definirá lo que Penrose denominó como inversa generalizada [7] y que actualmente se conoce como inversa de Moore-Penrose. Como veremos unas lineas más abajo, ambas definiciones son equivalentes. Los resultados de este capítulo pueden verse en [1], [4], [5], [6], [7] y [8].

Definición de Moore:

Definición 3.0.1. - Si $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ entonces la inversa generalizada de A se define por ser la única matriz $A^\dagger$ tal que

1. $A^\dagger A = P_{R(A)}$.
2. $AA^\dagger = P_{R(A^\dagger)}$.

Definición de Penrose:

Definición 3.0.2. - Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Se llama matriz inversa de Moore-Penrose, y se denota por $A^\dagger \in \mathbb{C}^{n\times m}$, a la única matriz que satisface:

1. $AA^\dagger A = A$.
2. $A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger$.
3. $AA^\dagger = (AA^\dagger)^*$.
4. $A^\dagger A = (A^\dagger A)^*$.

Las condiciones de la definición 3.0.2 se conocen como las cuatro condiciones de Penrose.

Teorema 3.0.1. - *Las Definiciones 3.0.1 y 3.0.2 son equivalentes.*

Demostración: Supongamos primero que $A^\dagger$ es una matriz que verifica las cuatro condiciones de Penrose. Multiplicando la condición 2 por A por la izquierda, se obtiene que

$$AA^\dagger AA^\dagger = (AA^\dagger)^2 = AA^\dagger,$$

luego $AA^\dagger$ es proyector. Por la condición 3, se cumple $AA^\dagger = (AA^\dagger)^*$. Se tiene que además, $AA^\dagger$ es proyector ortogonal. Queda por ver que $R(A) = R(AA^\dagger)$. Como $AA^\dagger A = A$, entonces

$$R(A) = R(AA^\dagger A) \subseteq R(AA^\dagger) \subseteq R(A),$$

por tanto, $R(A) = R(AA^\dagger)$ y $AA^\dagger = P_{R(A)}$.

Para demostrar otra igualdad, $A^\dagger A = P_{R(A^\dagger)}$, se procede de manera similar.

Si $A^\dagger$ cumple las propiedades de la Definición 3.0.1, se observa que $AA^\dagger A = P_{R(A)}A = A$ y que $A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger P_{R(A^\dagger)} = A^\dagger$. Por tanto, $A^\dagger$ verifica las condiciones de Penrose.

$\square$

Observación 3.0.1. - Si A es cuadrada y no singular, entonces $A^{-1} = A^\dagger$.

A continuación se define la inversa de Moore-Pnerose para aplicaciones lineales.

Definición 3.0.3. - Sea $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m$ una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales. Se llama inversa de Moore-Penrose de f a la única aplicación lineal $f^\dagger : \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^n$ que verifica:

1. $f^\dagger$ es $1-inversa$.
2. $f^\dagger$ es $2-inversa$.
3. $f^\dagger \circ f$ es autoadjunta , es decir,

$$< [f^\dagger \circ f](x), x' >=< x, [f^\dagger \circ f](x') >$$

   para todo $x, x' \in \mathbb{C}^n$.
4. $f \circ f^\dagger$ es autoadjunta , es decir,

$$< [f \circ f^\dagger](y), y' >=< y, [f \circ f^\dagger](y') >$$

   para todo $y, y' \in \mathbb{C}^m$.

Teorema 3.0.2. - *Las Definiciones 3.0.2 y 3.0.3 son equivalentes.*

Demostración: Sean $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y $A^\dagger \in \mathbb{C}^{n\times n}$ verificando las 4 condiciones de Penrose. La matriz A induce una aplicación lineal $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m$ tal que $f(x) = Ax$, con $x \in \mathbb{C}^n$. De la misma forma, $A^\dagger$ induce una aplicación lineal $f^\dagger : \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^n$ tal que $f^\dagger(y) = A^\dagger y$, con $y \in \mathbb{C}$. Las aplicaciones f y $f^\dagger$ verifican las condiciones 1, 2, 3 y 4 de la definición 3.0.3:

1. $f^\dagger$ es $1-inversa$. Veamos que $f \circ f^\dagger \circ f = f$.

   Para todo $x \in \mathbb{C}^n$,

   $$(f \circ f^\dagger \circ f)(x) = (f \circ f^\dagger)f(x) = f(f^\dagger(Ax)) = f(A^\dagger Ax) = AA^\dagger Ax = Ax = f(x)$$

2. $f^\dagger$ es $2-inversa$. Veamos que $f^\dagger \circ f \circ f^\dagger = f^\dagger$.

   Para todo $y \in \mathbb{C}^m$,

   $$(f^\dagger\circ f\circ f^\dagger)(y) = (f^\dagger\circ f)f^\dagger(y) = (f^\dagger\circ f)(A^\dagger y) = f^\dagger(AA^\dagger y) = A^\dagger AA^\dagger y = A^\dagger y = f^\dagger(y)$$

3. $f^\dagger \circ f$ es autoadjunta.

   Para todo $x, x' \in \mathbb{C}^n$, $< [f^\dagger \circ f](x), x' > \overset{?}{=} < x, [f^\dagger \circ f](x') >$.

   En efecto,

   $$\begin{array}{c} < [f^\dagger \circ f](x), x' >=< f^\dagger(f(x)), x' >=< f^\dagger(Ax), x' >=< A^\dagger Ax, x' >= \\ < x, A^\dagger Ax' >=< x, A^\dagger f(x') >=< x, f^\dagger(f(x')) >=< x, [f^\dagger \circ f](x') > \end{array}$$

4. $f \circ f^\dagger$ es autoadjunta.

   Para todo $y, y' \in \mathbb{C}^m$, $< [f \circ f^\dagger](y), y' > \overset{?}{=} < y, [f \circ f^\dagger](y') >$.

   En efecto,

   $$\begin{array}{c} < [f \circ f^\dagger](y), y' >=< f(f^\dagger(y)), y' >=< f(A^\dagger y), y' >=< AA^\dagger y, y' >= \\ < y, AA^\dagger y' >=< y, Af^\dagger(y') >=< y, f(f^\dagger(y')) >=< y, [f \circ f^\dagger](y') > . \end{array}$$

Para demostrar el recíproco, sean $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m$ y $f^\dagger : \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^n$ dos aplicaciones lineales que verifican las 4 condiciones de la Definición 3.0.3. Fijando bases en los espacios $\mathbb{C}^n$ y $\mathbb{C}^m$, B y B' respectivamente, se tiene que A es la matriz asociada a f en las bases B y B', y $A^\dagger$ es la matriz asociada a $f^\dagger$ en las bases B' y B. Se verifica que para todo $x \in \mathbb{C}^n$, $f(x) = Ax$, y para todo $y \in \mathbb{C}^m$, $f^\dagger(y) = A^\dagger y$. Veamos que matrices A y $A^\dagger$ cumplen las 4 propiedades de Penrose:

1. $AA^\dagger A \overset{?}{=} A$

   Como $f \circ f^\dagger \circ f = f$, para todo $x \in \mathbb{C}^n$ se tiene que

   $$(f \circ f^\dagger \circ f)(x) = (f \circ f^\dagger)f(x) = (f \circ f^\dagger)(Ax) = f(f^\dagger(Ax)) = f(A^\dagger Ax) = AA^\dagger Ax,$$

   luego $f(x) = Ax$.

2. $A^\dagger A A^\dagger \stackrel{?}{=} A^\dagger$

   Como $f^\dagger \circ f \circ f^\dagger = f^\dagger$, para todo $y \in \mathbb{C}^m$ se verifica que

   $$(f^\dagger \circ f \circ f^\dagger)(y) = (f^\dagger \circ f)(f^\dagger(y)) = (f^\dagger \circ f)(A^\dagger y) = (f^\dagger)(AA^\dagger y) = A^\dagger A A^\dagger y.$$

   Por tanto, $f^\dagger y = A^\dagger y$.

3. $AA^\dagger \stackrel{?}{=} (AA^\dagger)^*$

   Como $f \circ f^\dagger$ es autoadjunta, se verifica que para todo $y, y' \in \mathbb{C}^m$

   $$< [f \circ f^\dagger](y), y' > = < y, [f \circ f^\dagger](y') > .$$

   Por un lado,

   $$\begin{aligned} < [f \circ f^\dagger](y), y' > = < [f \circ f^\dagger](y), y' > = \\ < f(f^\dagger(y)), y' > = < f(A^\dagger y), y' > = < AA^\dagger y, y' > . \end{aligned}$$

   Por otro lado,

   $$< y, [f \circ f^\dagger](y') > = < y, f(f^\dagger(y')) > = < y, Af^\dagger(y') > = < y, AA^\dagger y' > .$$

   Por tanto, $< AA^\dagger y, y' > = < y, AA^\dagger y' >$, lo que significa que $AA^\dagger$ es autoadjunta, es decir $AA^\dagger = (AA^\dagger)^*$.

4. $A^\dagger A \stackrel{?}{=} (A^\dagger A)^*$

   Como $f^\dagger \circ f$ es autoadjunta, para todo $x, x' \in \mathbb{C}^n$

   $$< [f^\dagger \circ f](x), x' > = < x, [f^\dagger \circ f](x') > .$$

   Entonces

   $$< [f^\dagger \circ f](x), x' > = < f^\dagger(f(x)), x' > = < f^\dagger(Ax), x' > = < A^\dagger Ax, x' >$$

   y

   $$< x, [f^\dagger \circ f](x') > = < x, f^\dagger(f(x')) > = < x, A^\dagger f(x') > = < x, A^\dagger Ax' > .$$

   Luego $< A^\dagger Ax, x' > = < x, A^\dagger Ax' >$, por lo que $A^\dagger A$ es autoadjunta y $A^\dagger A = (A^\dagger A)^*$.

□

Corolario 3.0.2.1. - *Las Definiciones 3.0.1 y 3.1.1 son equivalentes.*

Una vez definida la inversa de Moore-Penrose y demostrada su equivalencia con otras definiciones, veamos que esta matriz existe y es única con el siguiente teorema.

Teorema 3.0.3. *(de existencia y unicidad de la matriz inversa de Moore-Penrose).- Sea* $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m$ *una aplicación lineal entre espacios vectoriales. Entonces la inversa de Moore-Penrose de* f *existe y es única.*

Demostración: Como los espacios son de dimensión finita, se tiene que si $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m$ es lineal entonces cada espacio descompone en suma directa de dos subespacios vectoriales: $\mathbb{C}^n = kerf \oplus [kerf]^\perp$ y $\mathbb{C}^m = Imf \oplus [Imf]^\perp$. Si se toma la restricción de f a $[kerf]^\perp$, la aplicación $f_{|[kerf]^\perp} : [kerf]^\perp \longrightarrow Imf$ es un isomorfismo y, por tanto, existe una aplicación lineal safisfaciendo que

$$f^\dagger(y) = \begin{cases} (f_{|[kerf]^\perp})^{-1}(y) \text{ si } y \in Imf \\ \qquad\qquad 0 \text{ si } y \in [Imf]^\perp \end{cases}$$

En este caso, $f^\dagger$ es la inversa de Moore-Penrose y es única.

Para demostrar la existencia, se comprueba que la aplicación lineal $f^\dagger$ previamente definida verifica las 4 propiedades de la Definición 3.0.3, es decir:

1. $f^\dagger$ es $1 - inversa.$
2. $f^\dagger$ es $2 - inversa.$
3. $f \circ f^\dagger$ es autoadjunta.
4. $f^\dagger \circ f$ es autoadjunta.

En primer lugar, se tiene que

$$[f \circ f^\dagger](y) = \begin{cases} y \text{ si } y \in Imf \\ 0 \text{ si } y \in [Imf]^\perp \end{cases}$$

y que $(f^\dagger \circ f)(x) = x_1$, con $x = x_1 + x_2$ ($x_1 \in [kerf]^\perp$ y $x_2 \in kerf$). Entonces

1. $(f \circ f^\dagger \circ f)(x) = f((f^\dagger \circ f)(x)) = f(x_1) = f(x - x_2) = f(x) - f(x_2) = f(x)$
2. $(f^\dagger \circ f \circ f^\dagger)(y) = f^\dagger((f \circ f^\dagger)(y)) \overset{a)}{=} (f_{|[kerf]^\perp})^{-1}(f(f^\dagger(y)) \overset{b)}{=} f^\dagger(y)$

   a) $f^\dagger(y) \in \mathbb{C}^n$, luego $f(f^\dagger(y)) \in Imf$ y, por tanto, se aplica la definición de $f^\dagger$ en ese caso.

   b) $f(f^\dagger(y)) \in Imf$ y por el isomorfismo $f_{|}[kerf]^\perp$ se tiene la igualdad.

Por tanto, $f^\dagger$ satisface las condiciones 1 y 2 de la Definición 3.0.3.

Además,

$$< [f \circ f^\dagger](y), y' >= \begin{cases} y \cdot y' \text{ si } y, y' \in Imf \\ \quad 0 \text{ si } y \in [Imf]^\perp \\ \quad 0 \text{ si } y' \in [Imf]^\perp \end{cases}$$

y

$$< y, [f \circ f^{\dagger}](y') >= \begin{cases} 0 \text{ si } y \in [Imf]^{\perp} \\ 0 \text{ si } y' \in [Imf]^{\perp} \end{cases}$$

Luego $< [f \circ f^{\dagger}](y), y' >=< y, [f \circ f^{\dagger}](y') >$.

Se tiene también que si $x, x' \in \mathbb{C}^n$ con $x = x_1 + x_2$, $x' = x'_1 + x'_2$ donde $x_1, x'_1 \in [kerf]^{\perp}$ y $x_2, x'_2 \in kerf$ entonces

$< [f^{\dagger} \circ f](x)), x' >=< x_1, x' >=< x_1, (x'_1 + x'_2) >=< x_1, x'_1 > + < x_1, x'_2 >=< x_1, x'_1 >=< x, [f^{\dagger} \circ f](x') >$.

y $f^{\dagger}$ satisface las condiciones 3 y 4 de la Definición 3.0.3.

Para demostrár la unicidad de $f^{\dagger}$, tómese otra aplicación $\tilde{f} : \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^n$ verificando:

1. $\tilde{f}$ es $1 - inversa$.
2. $\tilde{f}$ es $2 - inversa$.
3. $f \circ \tilde{f}$ es autoadjunta.
4. $\tilde{f} \circ f$ es autoadjunta.

Que $\tilde{f}$ cumpla las condiciones 1 y 2 implica que $(f \circ \tilde{f} \circ f)(x) = f(x)$, para todo $x \in \mathbb{C}^n$, y que $(\tilde{f} \circ f \circ \tilde{f})(y) = \tilde{f}(y)$, para todo $y \in \mathbb{C}^m$.

Con ello,

$$(\tilde{f} \circ f)^2 = \tilde{f} \circ f \circ \tilde{f} \circ f = \tilde{f} \circ f,$$

es decir, $\tilde{f} \circ f$ es una proyección.

Como

$$Imf = Im(f \circ \tilde{f} \circ f) \subseteq Im(f \circ \tilde{f}) \subseteq Imf$$

entonces $Im(f \circ \tilde{f}) = Imf$. Luego, dado $y \in Imf$, existe $\tilde{y} \in \mathbb{C}^m$ tal que y se puede expresar como $y = (f \circ \tilde{f})(y)$ y

$$(f \circ \tilde{f})(y) = (f \circ \tilde{f})(f \circ \tilde{f})(\tilde{y}) = (f \circ \tilde{f})^2(\tilde{y}) = (f \circ \tilde{f})(\tilde{y}) = y$$

Además, si $y' \in [Imf]^{\perp}$, se tiene que

$$0 = ([f \circ \tilde{f}]^2(y')) \cdot y' = ([f \circ \tilde{f}])(y') \cdot ([f \circ \tilde{f}])(y')$$

y como el producto escalar es definido positivo entonces $(f \circ \tilde{f})(y') = 0$

Por tanto,

$$(f \circ \tilde{f})(y) = \begin{cases} y \text{ si } y \in Imf \\ 0 \text{ si } y \in [Imf]^{\perp} \end{cases}.$$

En particular, $\tilde{f}(y') = 0$ cuando $y' \in [Imf]^{\perp}$.

De la misma forma se tiene que $(f \circ \tilde{f})^2 = f \circ \tilde{f}$ y que $Im(\tilde{f} \circ f) = Imf$.

Luego si $x \in Im\tilde{f}$, $x = [\tilde{f} \circ f](\tilde{x})$ (con $\tilde{x} \in \mathbb{C}^n$) y $x' \in kerf$ entonces por ser $(\tilde{f} \circ f)$ autoadjunta,

$$< x, x' >=< [\tilde{f} \circ f](\tilde{x}), x' >=< \tilde{x}, [\tilde{f} \circ f](x') >=< \tilde{x}, (\tilde{f}(f(x')) =< \tilde{x}, \tilde{f}(0) >=< \tilde{x}, 0 >= 0.$$

Se deduce que $Im\tilde{f} \subseteq [kerf]^{\perp}$.

Finalmente, como $f_{|[kerf]^{\perp}} : [kerf]^{\perp} \xrightarrow{\sim} Imf$ y $(f \circ \tilde{f})_{|Imf} = Id_{|Imf}$, entonces

$$\tilde{f}|_{Imf} = (f|_{[kerf]^{\perp}})^{-1}$$

y, por tanto, $\tilde{f} = f^{\dagger}$. □

Corolario 3.0.3.1. - *Si $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ es un isomorfismo entonces $f^{\dagger} = f^{-1}$, siendo f^{-1} la aplicación inversa de f.*

Demostración: Como la aplicación inversa verifica que $f^{-1}f = ff^{-1} = Id$, siendo Id la aplicación identidad, se comprueba fácilmente que f^{-1} cumple las 4 condiciones de la Definición 3.0.3.

Observación 3.0.2. - Equivalent al Corolario 3.0.3.1, si $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ y A^{-1} es su matriz inversa, A^{-1} es la inversa de Moore-Penrose de A.

Corolario 3.0.3.2. - *Si $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m$ es una aplicación lineal y $f^{\dagger} : \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^n$ es su inversa de Moore-Penrose, entonces se verifica que $(f^{\dagger})^{\dagger} = f$.*

Demostración: Para demostrar el teorema se comprueba que f es la inversa de Moore-Penrose de $f^{\dagger}$, es decir, que verifica las 4 condiciones de la Definición 3.0.3:

1. f es $1 - inversa$ de $f^{\dagger}$.
2. f es $2 - inversa$ de $f^{\dagger}$.
3. $f \circ f\dagger$ es autoadjunta.
4. $f^{\dagger} \circ f$ es autoadjunta.

Todas se cumplen ya que $f^{\dagger}$ es la inversa de Moore-Penrose de f.

3.1. Expresión explícita de la matriz de Moore-Penrose

En esta sección se proporcionará una fórmula explícita para el cálculo de la "pseudo-inversa". Para ello se tendrá en cuenta la definición dada en el teorema de existencia y unicidad de $f^\dagger$, que expresada en términos matriciales es la siguiente:

Definición 3.1.1. - Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. La matriz A define la aplicación lineal $f^\dagger : \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^n$ tal que $f^\dagger(y) = 0$ si $y \in R(A)^\perp$ y $f^\dagger(y) = (f|_{R(A^*)})^{-1}y$ si $y \in R(A)$. Se llama inversa de Moore-Penrose de A a la matriz $A^\dagger$ asociada a la aplicación lineal $f^\dagger$.

Observación 3.1.1. - En el Teorema 3.0.3 donde se demuestra la existencia y unicidad de la inversa de Moore-Penrose, se comprueba que la Definición 3.1.1 cumple las condiciones de la Definición 3.0.3, luego la Definición 3.1.1 también es equivalente a las Definiciones 3.0.1 y 3.0.2.

Teorema 3.1.1. - *Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ de rango r. Si $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ es una base de $R(A^*)$ y $\{w_1, w_2, ..., w_{n-r}\}$ es una base de $N(A^*)$ entonces*

$$A^\dagger = [v_1|v_2|...|v_r|0|...|0][Av_1|Av_2|...|Av_r|w_1|w_2|...|w_{n-r}]^{-1}$$

Demostración: Como $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ es base de $R(A^*)$, $\{Av_1, Av_2, ..., Av_r\}$ es base de $R(A)$. Por la Definición 3.1.1, $A^\dagger Av_1 = (A_{|R(A^*)})^{-1}Av_1 = v_1$

Por otro lado, como $\{w_1, w_2, ..., w_{n-r}\} \in N(A^*) = R(A)^\perp$, se tiene que

$$A^\dagger w_1 = A^\dagger w_2 = ... = A^\dagger w_{n-r} = 0.$$

Por tanto,

$$[A^\dagger Av_1|...|A^\dagger Av_r|A^\dagger w_1|...|A^\dagger w_{n-r}] = [v_1|...|v_r|0|...|0]$$

Además, $\{Av_1, ..., AV_r\}$ es base de $R(A)$, luego los vectores son linealmente independientes y como $\{w_1, ..., w_{n-r}\}$ es base de $N(A^*) = R(A)^\perp$, también son linealmente independientes. Entonces la matriz $[Av_1|...|Av_r|w_1|...|w_{n-r}]$ tiene dimensión $n \times n$ y es no singular, por lo que finalmente:

$$A^\dagger = [v_1|...|v_r|0|...|0][Av_1|Av_2|...|Av_r|w_1|w_2|...|w_{n-r}]^{-1}$$

□

A continuación se mostrarán dos ejemplos de cálculo de la inversa de Moore-Penrose, uno utilizando el Teorema 3.1.1 y otro utilizando la Definición 3.1.1.

Ejemplo 3.1.1. - Cálculo de la inversa de Moore-Penrose de una matriz dada utilizando la expresión del Teorema 3.1.1.

Consideremos la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Como $rg(A) = 2$, $n = 3$ y $r = 2$. Además,

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Primero se calcula una base de $R(A^*)$. Como A tiene rango 2, entonces A^* tiene rango 2 y un subconjunto que forma base es $\{v_1 = (1, 0, 0, 1), v_2 = (0, 1, 1, 1)\}$ (la tercera columna de la matriz es combinación lineal de las otras 2).

Después se calcula $Av_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $Av_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

A continuación, se calcula una base del espacio $N(A^*)$. Para ello se resuelve el sistema $A^*x = 0$ con $x = (x_1, x_2, x_3)$ donde $x_i \in \mathbb{C}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De ahí se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Despejando despejando se tiene que $x_1 = -x_3, x_2 = -x_3$ y $x_3 = x_3$. Por tanto,
$x = x_3(-1, -1, 1)$ y $N(A^*) = (-1, -1, 1)$.

Finalmente y aplicando el Teorema 3.1.1 obtenemos la inversa de Moore-Penrose de A:

$$A^\dagger = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{15} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{15} \\ \frac{-4}{15} & \frac{1}{3} & \frac{1}{15} \\ \frac{-4}{15} & \frac{1}{3} & \frac{1}{15} \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 3.1.2. - Cálculo de la inversa de Moore-Penrose de una matriz dada a partir de la Definición 3.1.1.

Sea $f : \mathbb{C}^4 \longrightarrow \mathbb{C}^3$ la aplicación lineal entre espacios cuya matriz asociada en las bases usuales es

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Por el Teorema 3.0.3 , se define la aplicación de Moore-Penrose como la aplicación lineal $f^\dagger : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^4$:

$$f^\dagger(y) = \begin{cases} (f_{|[kerf]^\perp})^{-1}(y) \text{ si } y \in Imf \\ \qquad\qquad 0 \text{ si } y \in [Imf]^\perp \end{cases}$$

Para calcular la matriz asociada, primeramente se calcula la matriz de la aplicación restringida, es decir, la matriz de la aplicación $f_{|[kerf]^\perp}$.

Como $rg(A) = 2$, la dimensión de la imagen es 2 y se tiene que $Imf = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$. Calculando una base de $[Imf]^\perp$ a partir de la definición

$$[Imf]^\perp = \{y' \in \mathbb{C}^3 \text{ tales que } < y, y' >= 0 \textit{ para todo } y \in Imf\},$$

se obtiene que $[Imf]^\perp =< (-1, -1, 1) >$.

Como el núcleo está definido como $kerf = \{x \in \mathbb{C}^n : Ax = 0\}$, con $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $x_i \in \mathbb{C}$, se obtiene el sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que en forma de ecuaciones es

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 + x_4 & = & 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 & = & 0 \end{array}\right\}$$

Resolviendo el sistema se obtiene que $x_1 = \lambda$, $x_2 = \lambda - \mu$, $x_3 = \mu$ y $x_4 = -\lambda$, por lo que

$$x = (\lambda, \lambda, 0, -\lambda) + (0, -\mu, \mu, 0) = \lambda(1, 1, 0, -1) + \mu(0, -1, 1, 0)$$

. Por tanto, se tiene que una base del nucleo es

$$kerf = \{(1, 1, 0, -1), (0, -1, 1, 0)\}.$$

Como $\mathbb{C}^4 = kerf \circ [kerf]^\perp$ y $kerf$ tiene dimensión 2, entonces $[kerf]^\perp$ tiene dimensión 2. Para calcular una base,

$$[kerf]^\perp = \{x' = (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) \in \mathbb{C}^4 :< x', x >= 0, x_i \in \mathbb{C}, \text{para todo } x \in kerf\}.$$

Utilizando los vectores de la base de $kerf$ calculados previamente se tiene el sistema:

$$< (x_1', x_2', x_3', x_4'), (1, 1, 0, -1) >= 0$$
$$< (x_1', x_2', x_3', x_4'), (0, -1, 1, 0) >= 0$$

de donde se obtiene el sistema, considerando el producto usual en $\mathbb{C}^4$:

$$\begin{aligned} x_1' + x_2' - x_4' &= 0 \\ -x_2' + x_3' &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema se obtiene que $x_1' = \lambda$, $x_2' = \mu$, $x_3' = \mu$ y $x_4' = \lambda + \mu$, por lo que

$$x' = (\lambda, 0, 0, \lambda) + (0, \mu, \mu, \mu) = \lambda(1, 0, 0, 1) + \mu(0, 1, 1, 1)$$

y, por tanto, una base de $[kerf]^{\perp}$ es

$$[kerf]^{\perp} = \{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 1)\}.$$

Sea $f_{|[kerf]^{\perp}} : [kerf]^{\perp} \longrightarrow Imf$ la aplicación f restringida a $[kerf]^{\perp}$. Calculamos la matriz asociada a esta aplicación. Para ello determinaremos las imágenes de los vectores de la base de $[kerf]^{\perp}$ en términos de la base de la imagen. Para el vector $(1, 0, 0, 1)$ se tiene que

$$A(1, 0, 0, 1)^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Para el vector $(0, 1, 1, 1)$ se tiene que

$$A(1, 0, 0, 1)^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Entonces

- $f(1, 0, 0, 1) = (2, 1, 3) = 2(1, 0, 1) + 1(0, 1, 1)$.
- $f(0, 1, 1, 1) = (1, 3, 4) = 1(1, 0, 1) + 3(0, 1, 1)$.

Si llamamos B la matriz de la aplicación $f_{|[kerf]^{\perp}}$, B es

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

La matriz inversa de B es
$$B = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{-1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}.$$

Por definición de $f^\dagger$, se tiene que la matriz asociada a $f^\dagger$ en las bases $\{(1,0,1),(0,1,1),(-1,-1,1)\}$ de $\mathbb{C}^3$ y $\{(1,0,0,1),(0,1,1,1),(1,1,0,-1),(0,-1,1,0)\}$ de $\mathbb{C}^4$ es
$$\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-1}{5} & 0 & 0 \\ \frac{-1}{5} & \frac{2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Luego, como
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$
entonces aplicando la fórmula de cambio de base

$$A^\dagger = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-1}{5} & 0 & 0 \\ \frac{-1}{5} & \frac{2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{15} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{15} \\ \frac{-4}{15} & \frac{1}{3} & \frac{1}{15} \\ \frac{-4}{15} & \frac{1}{3} & \frac{1}{15} \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

Se observa que la matriz obtenida $A^\dagger$ por ambos métodos coinciden. Esto evidencia la unicidad de la matriz.

3.2. Propiedades de la matriz de Moore-Penrose

Como uno de sus nombres indica, la pseudoinversa de Moore-Penrose no es exactamente la inversa y, por tanto, no cumple las mismas propiedades que ella. En esta sección se reflejaran algunas de las propiedades que sí cumple junto con su demostración.

Teorema 3.2.1. - *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$. Entonces*

1. $(A^\dagger)^\dagger = A$.
2. $(A^\dagger)^* = (A^*)^\dagger$.
3. *Si* $\lambda \in \mathbb{C}$, $(\lambda A)^\dagger = \lambda^\dagger A^\dagger$, *donde* $\lambda^\dagger = \frac{1}{\lambda}$ *si* $\lambda \neq 0$ *y* $\lambda^\dagger = 0$ *si* $\lambda = 0$.
4. $A^* = A^* A A^\dagger = A^\dagger A A^*$.
5. $(A^* A)^\dagger = A^\dagger A^{*\dagger}$.

6. $A^\dagger = (A^*A)^\dagger A^* = A^*(AA^*)^\dagger$.

7. $(UAV)^\dagger = V^*A^\dagger U^*$ *donde* U, V *son matrices unitarias.*

Demostración: Para demostrar las propiedades se utilizará la definición de Penrose de la matriz inversa generalizada.

1. Para demostrar que $(A^\dagger)^\dagger = A$, se puede apreciar que la matriz A es la inversa de Moore-Penrose de $A^\dagger$, es decir, que se verifican las 4 condiciones de la Definición 3.0.2.

   a) $A^\dagger A A^\dagger = A^\dagger$
   b) $AA^\dagger A = A$
   c) $(A^\dagger A) = A^\dagger A$
   d) $(AA^\dagger)^* = AA^\dagger$

   Se cumplen de forma automática, por lo que se verifica la igualdad.

2. Para la segunda igualdad, se demuestra que $(A^\dagger)^*$ es la inversa de Moore-Penrose de la matriz A^*. De la misma forma que en el punto anterior, se comprueba que se cumplen las 4 condiciones de Penrose. También utilizando las propiedades de la matriz conjugada transpuesta:

   a) $A^*(A^\dagger)A^* \stackrel{?}{=} A^*$
   $A^*(A^\dagger)A^* = (A^\dagger A)^*A^* = (AA^\dagger A)^* = A^*$.
   b) $(A^\dagger)^*A^*(A^\dagger)^* \stackrel{?}{=} (A^\dagger)^*$
   $(A^\dagger)^*A^*(A^\dagger)^* = (AA^\dagger)^* = (A^\dagger AA^\dagger)^* = (A^\dagger)^*$.
   c) $(A^*(A^\dagger)^*)^* \stackrel{?}{=} A^*(A^\dagger)^*$
   $(A^*(A^\dagger)^*)^* = ((A^\dagger A)^*)^* = (A^\dagger A)^* = A^*(A^\dagger)^*$.
   d) $((A^\dagger)^*A^*)^* \stackrel{?}{=} (A^\dagger)^*A^*$
   $((A^\dagger)^*A^*)^* = ((AA^\dagger)^*)^* = (AA^\dagger)^* = (A^\dagger)^*A^*$.

3. Para $\lambda = 0$ entonces $\lambda^\dagger = 0$ y

   Para $\lambda \neq 0$, véase que $\lambda^\dagger A^\dagger$ es la inversa de Moore-Penrose de λA teniendo en cuenta que el producto de escalar por matriz es conmutativo:

   a) $\lambda A \lambda^\dagger A^\dagger \lambda A \stackrel{?}{=} \lambda A$
   $\lambda A \lambda^\dagger A^\dagger \lambda A = \lambda\lambda^\dagger\lambda(AA^\dagger A) = \lambda\frac{1}{\lambda}\lambda(AA^\dagger A) = \lambda(AA^\dagger A) = \lambda A$.
   b) $\lambda^\dagger A^\dagger \lambda A \lambda^\dagger A^\dagger \stackrel{?}{=} \lambda^\dagger A^\dagger$
   $\lambda^\dagger A^\dagger \lambda A \lambda^\dagger A^\dagger = \lambda^\dagger\lambda\lambda^\dagger(A^\dagger AA^\dagger) = \frac{1}{\lambda}\lambda\frac{1}{\lambda}(A^\dagger AA^\dagger) = \frac{1}{\lambda}(A^\dagger AA^\dagger) = \lambda^\dagger(A^\dagger AA^\dagger) = \lambda^\dagger A^\dagger$.
   c) $(\lambda A\lambda^\dagger A^\dagger)^* \stackrel{?}{=} \lambda A\lambda^\dagger A^\dagger$
   $(\lambda A\lambda^\dagger A^\dagger)^* = (\lambda\lambda^\dagger AA^\dagger)^* = (\lambda\frac{1}{\lambda}AA^\dagger)^* = (AA^\dagger)^* = AA^\dagger$.

d) $(\lambda^{\dagger}A^{\dagger}\lambda A)^{*} \stackrel{?}{=} \lambda^{\dagger}A^{\dagger}\lambda A$
$(\lambda^{\dagger}A^{\dagger}\lambda A)^{*} = (\lambda^{\dagger}\lambda A^{\dagger}A)^{*} = (\frac{1}{\lambda}\lambda A^{\dagger}A)^{*} = (A^{\dagger}A)^{*} = A^{\dagger}A.$

4. $A^{*} \stackrel{1)}{=} A^{*}AA^{\dagger} \stackrel{2)}{=} A^{\dagger}AA^{*}$

   A partir de la igualdad $A = AA^{\dagger}A$ y tomando la adjunta, se tiene que:

   1) $A^{*} = ((AA^{\dagger})A)^{*} = A^{*}(AA^{\dagger})^{*} = A^{*}AA^{\dagger}$

   2) $A^{*} = (A(A^{\dagger}A)^{*} = (A^{\dagger}A)^{*}A^{*} = A^{\dagger}AA^{*}$

5. Para demostrar la propiedad 5, se comprueba que $A^{\dagger}A^{*^{\dagger}}$ es la inversa de $A^{*}A$ demostrando de nuevo que cumple las 4 condiciones de Penrose:

   a) $A^{*}AA^{\dagger}A^{*^{\dagger}}A^{*}A \stackrel{?}{=} A^{*}A$
   $A^{*}AA^{\dagger}A^{*^{\dagger}}A^{*}A = A^{*}AA^{\dagger}(AA^{\dagger})^{*}A = A^{*}AA^{\dagger}(AA^{\dagger}A) = A^{*}(AA^{\dagger}A) = A^{*}A.$

   b) $A^{\dagger}A^{*^{\dagger}}A^{*}AA^{\dagger}A^{*^{\dagger}} \stackrel{?}{=} A^{\dagger}A^{*^{\dagger}}$
   $A^{\dagger}A^{*^{\dagger}}A^{*}AA^{\dagger}A^{*^{\dagger}} = A^{\dagger}(AA^{\dagger})^{*}AA^{\dagger}A^{*^{\dagger}} = A^{\dagger}A(A^{\dagger}AA^{\dagger})A^{*^{\dagger}} = A^{\dagger}AA^{\dagger}A^{*^{\dagger}}$
   $= A^{\dagger}A^{*^{\dagger}}.$

   c) $(A^{*}AA^{\dagger}A^{*^{\dagger}})^{*} \stackrel{?}{=} A^{*}AA^{\dagger}A^{*^{\dagger}}$
   Por un lado,

   $$(A^{*}AA^{\dagger}A^{*^{\dagger}})^{*} = A^{*^{\dagger^{*}}}(A^{*}AA^{\dagger})^{*} = A^{\dagger}(AA^{\dagger})^{*}A^{*^{*}} = A^{\dagger}AA^{\dagger}A = A^{\dagger}A.$$

   Por otro lado,

   $$A^{*}AA^{\dagger}A^{*^{\dagger}} = A^{*}(AA^{\dagger})^{*}A^{*\dagger} = A^{*}(A^{*^{\dagger}}A^{*}A^{*^{\dagger}}) = A^{*}A^{*^{\dagger}} = (A^{\dagger}A)^{*} = A^{\dagger}A.$$

   d) $(A^{\dagger}A^{*^{\dagger}}A^{*}A)^{*} \stackrel{?}{=} A^{\dagger}A^{*^{\dagger}}A^{*}A$
   Por un lado,

   $$(A^{\dagger}A^{*^{\dagger}}A^{*}A)^{*} = (A^{\dagger}(AA^{\dagger})^{*}A)^{*} = (A^{\dagger}AA^{\dagger}A)^{*} = (A^{\dagger}A)^{*} = A^{\dagger}A.$$

   Por otro lado,

   $$A^{\dagger}A^{*^{\dagger}}A^{*}A = A^{\dagger}(AA^{\dagger})^{*}A = A^{\dagger}AA^{\dagger}A = A^{\dagger}A.$$

6. $A^{\dagger} \stackrel{1)}{=} (A^{*}A)^{\dagger}A^{*} \stackrel{2)}{=} A^{*}(AA^{*})^{\dagger}$

   1) Utilizando la propiedad anterior,

   $$(A^{*}A)^{\dagger}A^{*} = A^{\dagger}A^{*^{\dagger}}A^{*} = A^{\dagger}(A^{\dagger^{*}}A^{*}) = A^{\dagger}(AA^{\dagger})^{*} = A^{\dagger}AA^{\dagger} = A^{\dagger}.$$

   2) $A^{*}(AA^{*})^{\dagger} = A^{\dagger}$ o $A^{*}(AA^{*})^{\dagger} = A^{*}(AA^{*})^{\dagger}.$

7. Que U y V sean matrices unitarias implica que $UU^{*} = Id$ y $VV^{*} = Id$. Se demuestra que $V^{*}A^{\dagger}U^{*}$ es la inversa generalizada de UAV comprobando que verifica las condiciones de Penrose:

a) $UAV(V^*A^\dagger U^*)UAV = UAA^\dagger AV = UAV$.

b) $V^*A^\dagger U^*(UAV)V^*A^\dagger U^* = V^*A^\dagger AA^\dagger U^* = V^*A^\dagger U^*$.

c) $(UAVV^*A^\dagger U^*)^* \stackrel{?}{=} UAVV^*A^\dagger U^*$
$(UAVV^*A^\dagger U^*)^* = (UAA^\dagger U^*)^* = (U(AA^\dagger)^*U^*)^* = (U(UAA^\dagger)^*)^* = UAA^\dagger U^* = UAVV^*A^\dagger U^*$.

d) $(V^*A^\dagger U^*UAV)^* \stackrel{?}{=} V^*A^\dagger U^*UAV$
$V^*A^\dagger U^*UAV)^* = (V^*A^\dagger V)^* = (V^*(A^\dagger A)^*V)^* = ((A^\dagger AV)^*V)^* = V^*A^\dagger AV = V^*A^\dagger U^*UAV$.

Capítulo 4

Inversa de Drazin

El objetivo de este capítulo es estudiar la inversa de Drazin de una matriz. Los resultados obtenidos pueden consultarse en [9], [10], [11], [12], [13], [14] y [8].

4.1. Introducción

Las matrices $\{i, j, .., k\} - inversas$ o, en particular, la inversa de Moore-Penrose estudiada en el capítulo anterior, son útiles para resolver ecuaciones. Sin embargo, hay otras propiedades que no cumplen y que serían convenientes para la resolución de otro tipo de problemas.

Las investigaciones de Drazin expuestas en la revista «The American Mathematical Monthly» [13] en el año 1958 partieron de que Moore y Penrose habían definido un inverso que podía extenderse a elementos de cualquier álgebra finito-dimensional sobre los complejos, sin embargo, la definición no podía extenderse a anillos. Tanto es así que Drazin proporcionó la siguiente definición:

Definición 4.1.1. - Sea R un anillo y $x \in R$ un elemento. Se dice que $c \in R$ es pseudo-invertible si satisface lo siguiente:

1. $cx = xc$.
2. $x^m = x^{m+1}c$ para algún entero positivo m.
3. $c = c^2x$

Estas 3 condiciones determinan que en el caso en el que c exista, es único. La existencia de c se sigue de la hipótesis aparentemente mucho más débil de que existen elementos $a, b \in R$ tales que

$$x^p = x^{p+1}, \; x^q = bx^{q+1}$$

para algunos enteros positivos p y q.

En 1979 S. L. Campbell y C. D. Meyer estudian la inversa de Drazin para matrices cuadradas complejas.[9]

En el año 1980, Randall E. Cline y T.N.E. Greville extendieron la definición a una más amplia que abarcaba matrices rectangulares [11]. Para ello, demostraron que para cualesquiera $M \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y $N \in \mathbb{C}^{n\times m}$ existe una única matriz X tal que

1. $(MN)^k = (MN)^{k+1}$, para algún entero positivo k.
2. $XNMNX = X$.
3. $MNX = XNM$.

Posteriormente se ha seguido extendiendo e investigando este concepto que se inició con Drazin en otras estructuras matemáticas.

Este capítulo se centra en proporcionar en la definición para matrices cuadradas complejas junto con sus propiedades más relevantes.

4.2. Definición y Teorema de existencia

En esta sección se definirá la matriz de Drazin y se demostrará el teorema de existencia, el cual será útil para el cálculo numérico de la matriz de Drazin.

Definición 4.2.1. - Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz cuadrada con índice k. Se llama matriz inversa de Drazin de A a la única matriz $A^D \in \mathbb{C}^{n\times n}$ que verifica:

1. $A^D A A^D = A^D$.
2. $AA^D = A^D A$.
3. $A^{k+1}A^D = A^k$.

Lema 4.2.1. - *Si la inversa de Drazin de una matriz existe, se tiene que AA^D y $Id - AA^D$ son proyecciones, para $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y A^D la inversa de Drazin de A.*

Demostración.- Veamos que ambas expresiones cumplen la condición de proyección, es decir, que si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es una matriz cuadrada entonces $A^2 = A$.

En efecto, $(AA^D)^2 = AA^D AA^D = AA^D$.

Y también $(Id - AA^D)^2 = (Id - AA^D)(Id - AA^D) = Id - AA^D - AA^D + AA^D AA^D = Id - AA^D - AA^D + AA^D = Id - AA^D$.

□

Teorema 4.2.2. - *Si la inversa de Drazin de A, A^D, existe, entonces la única matriz que verifica:*

1. $A^D A A^D = A^D$.

2. $AA^D = A^D A$.

3. $A - A^2 A^D$ *es nilpotente de índice* k.

Demostración: Las dos primeras condiciones se verifican trivialmente. Veamos que la matriz inversa de Drazin verifica que $A - A^2A^D$ es nilpotente de índice k, es decir, que $(A - A^2A^D)^k = A - A^2A^D$:

Utilizando del lema anterior que $(Id - AA^D)$ una proyección, se tiene que

$(A - A^2A^D)^k = A^k(Id - AA^D)^k = A^k(Id - AA^D)^2(Id - AA^D)^{k-2} =$

$A^k(Id - AA^D)(Id - AA^D)^{k-2} = ... = A^k(Id - AA^D)(Id - AA^D) =$

$A^k(Id - AA^D)^2 = A^k(Id - AA^D) = A^k - A^{k+1}A^D = A^k - A^k = 0.$

□

Para demostrar la existencia y unicidad de la inversa de Drazin se necesita previamente el siguiente lema:

Lema 4.2.3. - *Sea* $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ *una aplicación lineal. Existe un número entero no negativo* k *tal que* $\mathbb{C}^n = kerf^k \oplus Imf^k$.

Demostración: Veamos primero que la intersección de ambos espacios es 0. Para ello, sea k el entero no negativo más pequeño tal que

$$Imf^0 \supset Imf \supset Imf^2 \supset ... \supset Imf^{k-1} \supset Imf^k = Imf^{k+1} = ...$$

o equivalentemente,

$$kerf^0 \subset kerf \subset ... \subset kerf^{k-1} \subset kerf^k = kerf^{k+1} = ...,$$

siendo $f^0 = Id$.

En efecto, si $x \in Imf^l$ con $l \leq k$, entonces $f^l(x) = f^{l-1}(f(x)) \in Imf^{l-1}$ y, por tanto, $Imf^l \subset Imf^{l-1}$. De la misma forma, si $x \in kerf^l$, entonces $f^l x = 0$. Como $f^{l+1}x = f(f^l(x)) = f(0) = 0$, entonces $x \in kerf^{l+1}$ y, por tanto, $kerf^l \subset kerf^{l+1}$.

Supongamos que $x \in kerf^k \cap Imf^k$. Entonces existe $z \in \mathbb{C}^n$ tal que $f^k z = x$. Luego, $f^{2k}z = f^k x = 0$ lo que implica que $z \in kerf^{2k} = kerf$ y, por tanto, $x = 0$. Como resultado, ambos espacios son suplementarios.

□

Teorema 4.2.4. - *Sea* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. *Si* $i(A) = k \geq 0$ *y* $rg(A^k) = r$, *entonces existe una matriz invertible* $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *tal que*

$$A = P \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} P^{-1} \tag{4.1}$$

siendo $C \in \mathbb{C}^{r\times r}$ la parte invertible y $N \in \mathbb{C}^{(n-r)\times(n-r)}$ la parte nilpotente con índice de nilpotencia k.

Demostración: Sea $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ la aplicación lineal inducida por A. Por el lema anterior,

$$\mathbb{C}^n = kerf^k \oplus Imf^k.$$

Como $rg(A^k) = r$, entonces dim $Imf^k = r$ y dim $kerf^k = n - r$. Sea $\{v_1, ..., v_r\}$ una base de Imf^k y $\{v_{r+1}, ..., v_n\}$ una base de $kerf^k$, entonces $\{v_1, ..., v_r, v_{r+1}, ..., v_n\}$ es base de $\mathbb{C}^n$.

Veamos que Imf^k es invariante por f. En efecto, sea $x \in Imf^k$, entonces existe $z \in Imf^k$ tal que $f^k(x) = z$. Luego $f^k(f(x) = f(f^k(x)) = f(z) \in Imf$, y, por la sucesión de inclusiones de imágenes del lema anterior, se concluye que $f(x) \in Imf^k$.

Veamos que $Kerf^k$ es invariante por f. Si $x \in kerf^k$, entonces $f^k(f(x)) = f(f^k(x)) = f(0) = 0$, luego $f(x) \in kerf^k$.

Como los subespacios Imf^k y $kerf^k$ son invariantes por f y $f^k(kerf^k) = \{0\}$ se tiene el bloque para A si $P = [v_1, ..., v_n]$.

$\square$

Teorema 4.2.5. - *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $A = P \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} P^{-1}$, con $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ invertible, $C \in \mathbb{C}^{r\times r}$ invertible y $N \in \mathbb{C}^{(n-r)\times(n-r)}$ nilpotente con índice de nilpotencia k. Entonces la inversa de Drazin de A, A^D, es única y se expresa como:*

$$A^D = P \begin{bmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}. \tag{4.2}$$

Demostración: Para demostrar la existencia veamos que la expresión expuesta en el enunciado verifica las propiedades de la Definición 4.2.1:

1. $A^DAA^D \stackrel{?}{=} A^D$

$$\begin{aligned} A^DAA^D &= P \begin{bmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}P \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} P^{-1}P \begin{bmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{bmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{bmatrix} Id & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{bmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} \\ &= A^D \end{aligned}$$

.

2. $AA^D \stackrel{?}{=} A^D A$

   Por un lado,

$$AA^D = P \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} P^{-1} P \begin{bmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} = P \begin{bmatrix} Id & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}.$$

   Por otro lado,

$$A^D A = P \begin{bmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} P \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} P^{-1} = P \begin{bmatrix} Id & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}.$$

   Ambas expresiones coindicen y, por tanto, se verifica la igualdad.

3. $A^{k+1}A^D \stackrel{?}{=} A^k$

$$\begin{aligned} A^{k+1}A^D = A^k A A^D &= P \begin{bmatrix} C^k & 0 \\ 0 & N^k \end{bmatrix} P^{-1} P \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} P^{-1} P \begin{bmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{bmatrix} C^k & 0 \\ 0 & N^k \end{bmatrix} P^{-1} P \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{bmatrix} C^k & 0 \\ 0 & N^k \end{bmatrix} P^{-1} P \begin{bmatrix} Id & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{bmatrix} C^k & 0 \\ 0 & N^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Id & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{bmatrix} C^k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Id & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{bmatrix} C^k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} \\ &= A^k \end{aligned}$$

Para ver la unicidad, supongamos que B es inversa de Drazin de A, es decir, que verifica las propiedades:

1. $BAB = B$.
2. $AB = BA$.
3. $A^{k+1}B = A^k$.

Se tiene que $B = B^{k+1}A^k$ y $A^D = (A^D)^{k+1}A^k$. Entonces:

$$\begin{aligned} B &= B^{k+1}A^k = B^{k+1}A^{k+1}A^D = B^{k+1}A^{k+1}(A^D)^{k+1}A^k \\ &= (B^{k+1}A^k)A^{k+1}(A^D)^{k+1} = (BA^{k+1})(A^D)^{k+1} = A^k(A^D)^{k+1} = A^D \end{aligned}$$

Por tanto, la inversa de Drazin es única.

□

Observación 4.2.1. - Si A es no singular, entonces, observando las expresiones de A y A^D, se tiene que la parte nilpotente de A, N, es vacía y, por tanto, $A^D = A^{-1}$.

Observación 4.2.2. - Si A es nilpotente, entonces observando las expresiones, la parte invertible, C, es vacía y, por tanto, $A^D = 0$.

Corolario 4.2.5.1. - *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ de índice $k \geq 0$. Entonces $ind(A^D) \leq 1$.*

Demostración: Si $k = 0$, entonces A es invertible y $A^D = A^{-1}$, lo que implica que A^D es invertible y, entonces $ind(A^D) = 0$.

Si $k > 0$, por el teorema anterior

$$A = P \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} P^{-1} \text{ y } A^D = P \begin{bmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Como el índice es el menor natural tal que la parte nilpotente es 0 y la parte nilpotente de A^D es 0, entonces $ind(A^D) = 1$.

Por tanto, $ind(A^D) \leq 1$.

□

Teorema 4.2.6. - *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Entonces*

$$AA^DA = A \textit{ si y solo si } ind(A) \leq 1.$$

Demostración: Si $ind(A) = 0$, entonces $A^D = A^{-1}$ y se verifica que $AA^DA = A$. Supongamos que $ind(A) = 1$. Entonces

$$A = P \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} \text{ y } A^D = P \begin{bmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} AA^DA &= P \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}P \begin{bmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{bmatrix} Id & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}P \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} = P \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} = A \end{aligned}$$

.

Recíprocamente, supongamos que $AA^DA = A$. Entonces,

$$\begin{aligned} AA^DA &= P \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} P^{-1}P \begin{bmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{bmatrix} Id & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}P \begin{bmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} = P \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}, \end{aligned}$$

luego para que se verifique la igualdad $AA^DA = A$, o bien N es vacío o bien es 0. Si N es vacío, $i(A) = 0$ y si N es 0, $i(A) = 1$. Por lo tanto, si $AA^DA = A$ entonces $ind(A) \leq 1$.

$\square$

Observación 4.2.3. - La descomposición dada por el Teorema 4.2.4 puede construirse a partir de una base de Jordan de $\mathbb{C}^n$ para A, donde C está definida por las raíces no nulas del polinomio anulador y N por la raíz nula contada con su multiplicidad.

En el siguiente ejemplo se muestra el cálculo de la inversa de Drazin de una matriz dada a partir de las expresiones 4.1 y 4.2.

Ejemplo 2.2.2: Cálculo de la matriz inversa de Drazin. Sea $T : \mathbb{C}^4 \longrightarrow \mathbb{C}^4$ el endomorfismo definido por la siguiente matriz:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

.

Primero calculemos la descomposición de A del Teorema 4.2.4. Para ello, calculemos los valores propios asociados a la matriz, con los que obtendremos la matriz de Jordan de A, y la base de Jordan correspondiente para obtener la expresión de la matriz A.

El polinomio característico de A es $m_T(x) = |xId - A| = x^2(x+1)(x-3)$. Luego los valores propios de la matriz son 0, -1 y 3.

Como $dim(ker\ T) = 1 \neq 2$, por el criterio de diagonalización, A no diagonaliza. De las dos posibilidades de polinomio anulador, $m_{1_T}(x) = x(x+1)(x-3)$ o $m_{2_T}(x) = x^2(x+1)(x-3)$, queda descartada la primera pues el polinomio anulador no puede descomponer en factores lineales ya que la matriz no diagonaliza. Así, el polinomio anulador del endomorfismo asociado a la matriz A es $m_T(x) = m_{2_T}(x) = x^2(x+1)(x-3)$.

Por el primer teorema de descomposición:

$$\mathbb{C}^4 \approx k[x]/x^2 \oplus k[x]/x-3 \oplus k[x]/x+1$$

luego se tiene que la matriz de Jordan de A es:

$$J_A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

y la base de Jordan, B_J, es $B_J = \{v, w, e, A * e\}$, donde $e \in ker(A^2)$, $e \notin ker(A)$, $v \in ker(A - 3Id)$ y $w \in ker(A + 1Id)$. Calculando las bases de los espacios se obtienen los vectores de la base de Jordan y , por tanto, la matriz de cambio de base P:

$$P = \begin{bmatrix} 20 & 0 & -1 & 1 \\ 17 & 1 & 0 & 1 \\ 9 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Además,

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{18} & -\frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{4}{9} & \frac{11}{9} & -\frac{11}{9} & -\frac{2}{9} \end{bmatrix}$$

Por tanto, se tiene que la expresión de A es :

$$A = PJP^{-1} = \begin{bmatrix} 20 & 0 & -1 & 1 \\ 17 & 1 & 0 & 1 \\ 9 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{18} & -\frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{4}{9} & \frac{11}{9} & -\frac{11}{9} & -\frac{2}{9} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 60 & 0 & 1 & 0 \\ 51 & -1 & 1 & 0 \\ 27 & -1 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{18} & -\frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{4}{9} & \frac{11}{9} & -\frac{11}{9} & -\frac{2}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A partir de la matriz J se obtiene que $C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Como J es de la forma $J = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}$, con C invertible y N nilpotente, se tiene que $C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Por el Teorema 4.2.5 obtenemos J^D:

$$J^D = \begin{bmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente,

$$A^D = PJ^DP^{-1} = \begin{bmatrix} 20 & 0 & -1 & 1 \\ 17 & 1 & 0 & 1 \\ 9 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{18} & -\frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{4}{9} & \frac{11}{9} & -\frac{11}{9} & -\frac{2}{9} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{20}{3} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{17}{3} & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{18} & -\frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{4}{9} & \frac{11}{9} & -\frac{11}{9} & -\frac{2}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{27} & \frac{13}{27} & -\frac{13}{27} & \frac{14}{27} \\ \frac{13}{27} & \frac{7}{27} & -\frac{34}{27} & \frac{20}{27} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{11}{27} & -\frac{19}{23} & -\frac{19}{27} & -\frac{8}{27} \end{bmatrix}.$$

4.3. Propiedades

Teorema 4.3.1. - *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ con $ind(A) = k$ y $A^D \in \mathbb{C}^{n\times n}$ su inversa de Drazin. Se verifican las siguientes propiedades:*

1. $(A^*)^D = (A^D)^*$.
2. $(A^l)^D = (A^D)^l$ *para* $l = 1, 2, 3....$
3. $(A^D)^D = A$ *si y solo si* A *tiene índice 1.*
4. $((A^D)^D)^D = A^D$.
5. $R(A^D) = R(AA^D) = R(A^k)$.
6. $N(A^D) = N(AA^D) = N(A^k)$.
7. $A^{p+1}A^D = A^p$, *para todo* $p \geq k$.
8. *Si* $B = QAQ^{-1}$ *para cualesquiera matrices* $B, Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *y* Q *invertible, entonces* $B^D = QA^DQ^{-1}$, *siendo* B^D *la inversa de Drazin de* B.

Demostración: Para la demostración se hará uso de las propiedades de la matriz conjugada transpuesta y de la definición de la matriz de Drazin.

1. Para demostrar la igualdad se demuestra que la inversa de Drazin de A^* es $(A^D)^*$, es decir, que verifica las 3 condiciones de la Definición 4.2.1:

   a) $(A^D)^*A^*(A^D)^* \stackrel{?}{=} (A^D)^*$.

   $$(A^D)^*A^*(A^D)^* = (AA^D)^*(A^D)^* = (A^DAA^D)^* = (A^D)^*.$$

   b) $A^*(A^D)^* \stackrel{?}{=} (A^D)^*A^*$.

   $$A^*(A^D)^* = (A^DA)^* = (AA^D)^* = (A^D)^*A^*.$$

c) $(A^*)^{k+1}(A^D)^* \overset{?}{=} (A^*)^k$.

$$\begin{aligned}(A^*)^{k+1}(A^D)^* &= (A^D A^{k+1})^* = (A^D A\overset{k+1}{\cdots}A)^* \\ &= (AA^D A\overset{k}{\cdots}A)^* = ... = (A\overset{k+1}{\cdots}A A A^D)^* \\ &= (A^{k+1}A^D)^* = (A^k)^* = (A^*)^k.\end{aligned}$$

2. De la misma forma que el apartado anterior, para la demostración se comprueba que $(A^D)^l$ es la inversa de Drazin de A^l viendo que satisface las condiciones de la Definición 4.2.1:

a) $(A^D)^l A^l (A^D)^l \overset{?}{=} (A^D)^l$.

$$\begin{aligned}(A^D)^l A^l (A^D)^l &= A^D\overset{l}{\cdots}A^D A\overset{l}{\cdots}A A^D\overset{l}{\cdots}A^D \\ &= A^D\overset{l}{\cdots}A^D A A^D A\overset{l-1}{\cdots}A A^D\overset{l-1}{\cdots}A^D \\ &= A^D\overset{l}{\cdots}A^D A\overset{l-1}{\cdots}A A^D\overset{l-1}{\cdots}A^D \\ &= ... = A^D\overset{l}{\cdots}A^D A A^D \\ &= A^D\overset{l}{\cdots}A^D \\ &= (A^D)^l.\end{aligned}$$

b) $A^l (A^D)^l \overset{?}{=} (A^D)^l A^l$.

$$\begin{aligned}A\overset{l}{\cdots}A A^D\overset{l}{\cdots}A^D &= A\overset{l-1}{\cdots}A A^D\overset{l}{\cdots}A^D A \\ &= A\overset{l-2}{\cdots}A A^D\overset{l}{\cdots}A^D A^2 \\ &= ... = A^D\overset{l}{\cdots}A^D A^l = (A^D)^l A^l.\end{aligned}$$

c) $(A^l)^{k+1}(A^D)^l \overset{?}{=} (A^l)^k$.

$$\begin{aligned}A\overset{l(k+1)}{\cdots}A A A^D\overset{l}{\cdots}A^D &= A\overset{l(k+1)-1}{\cdots}A A A^D A A^D\overset{l-1}{\cdots}A^D \\ &= A\overset{l(k+1)-1}{\cdots}A A A^D\overset{l-1}{\cdots}A^D = ... = A\overset{lk}{\cdots}A = (A^l)^k.\end{aligned}$$

3. $(A^D)^D = A$ si y solo si $ind(A) = 1$.

Supongamos que $(A^D)^D = A$, es decir, A es la inversa de Drazin de A^D. Utilizando las expresiones 4.1 y 4.2, se tiene que

$$(A^D)^D = P\begin{bmatrix}(C^{-1})^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}P^{-1} = P\begin{bmatrix}C & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}P^{-1} = A.$$

Entonces la parte nilpotente de A, N, es nula, por lo que el menor $k \leq 0$ tal que $N^k = 0$ es 1 y, por tanto, $ind(A) = 1$.

Para el recíproco, supongamos que $ind(A) = 1$. Veamos que A es la inversa de Drazin de A^D comprobando que verifica las condiciones de la Definición 4.2.1:

a) $AA^DA \stackrel{?}{=} A$.
Como $ind(A) = 1$, la expresión de A es

$$A = P \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} AA^DA &= P \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} P \begin{bmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} P \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{bmatrix} Id & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} P \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} = P \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} = A. \end{aligned}$$

b) $A^DA \stackrel{?}{=} AA^D$.
Se cumple automáticamente por la condición 2 de la Definición 4.2.1.

c) Como $k = 1$, $AAA^D \stackrel{?}{=} A$.
Utilizando las expresiones correspondientes a cada matriz, se tiene:

$$\begin{aligned} AAA^D &= P \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} P \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} P \begin{bmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} P \begin{bmatrix} CC^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} P \begin{bmatrix} Id & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} \\ &= A. \end{aligned}$$

4. $((A^D)^D)^D \stackrel{?}{=} A^D$
Utilizando la fórmula explícita de A y A^D, se tiene:

$$(A^D)^D = P \begin{bmatrix} (C^{-1})^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} = P \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1},$$

luego

$$((A^D)^D)^D = P \begin{bmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} = A^D.$$

5. Sea $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow C^n$ una aplicación lineal tal que f equivale a A en la base natural. Si $\mathbb{C}^n = kerf^k \oplus Imf^k$, entonces por construcción es inmediato que

$$R(A^D) = R(AA^D) = R(A^k) = Imf^k.$$

6. De forma análoga a la propiedad anterior, se verifica que
$$N(A^D) = N(AA^D) = N(A^k) = kerf^k$$

7. Si $p = k$ se tiene la propiedad 3 de la Definición 4.2.1.
Si $p > k$, entonces
$$A^{p+1}A^D = A^{p-k}A^{k+1}A^D = A^{p-k}A^k = A^{p-k+k} = A^p.$$

8. Como
$$B = QAQ^{-1} = QP \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} P^{-1}Q^{-1} = QP \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} (PQ)^{-1}$$
donde PQ invertible pues es producto de invertibles, se tiene que
$$B^D = QP \begin{bmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (PQ)^{-1} = QP \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} P^{-1}Q^{-1} = QA^DQ^{-1}.$$

□

En general, la inversa de Drazin no verifica es la regla del orden inverso, es decir, si $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y A^D y B^D sus respectivas inversas de Drazin entonces, $(AB)^D \neq B^DA^D$. El siguiente teorema muestra cuál es la inversa de Drazin del producto de dos matrices.

Teorema 4.3.2. - *Sean $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Entonces se verifica*
$$(AB)^D = A((BA)^2)^DB$$

Demostración: Para demostrar esta propiedad, veamos que $A((BA)^2)^DB$ es la inversa de Drazin de AB comprobando que verifica las condiciones de la Definición 4.2.1:

1. $(A((BA)^2)^DB)AB(A((BA)^2)^DB) \stackrel{?}{=} A((BA)^2)^DB$
En efecto,
$$\begin{aligned}
&(A((BA)^2)^DB)AB(A((BA)^2)^DB) = (A((BA)^D)^2B)AB(A((BA)^2)^DB) \\
&= (A(BA)^D(BA)^DB)AB(A((BA)^2)^DB) = A(BA)^DAB(BA)^DB(A((BA)^2)^DB) \\
&= A(BA)^DB(A((BA)^2)^DB) = A(BA)^DB(A((BA)^D)^2B) \\
&= A(BA)^DB(A(BA)^D(BA)^DB) = A(BA)^DBA(BA)^D(BA)^DB \\
&= A(BA)^D(BA)^DBA(BA)^DB = A(BA)^DB.
\end{aligned}$$

2. $AB(A((BA)^2)^DB) \stackrel{?}{=} (A((BA)^2)^DB)AB$
Por un lado,
$$\begin{aligned}
AB(A((BA)^2)^DB) &= AB(A((BA)^D)^2B) = AB(A(BA)^D(BA)^DB) \\
&= ABA(BA)^D(BA)^DB = A(BA)^DBA(BA)^DB = A(BA)^DB.
\end{aligned}$$
Por otro lado,
$$\begin{aligned}
(A((BA)^2)^DB)AB &= (A((BA)^D)^2B)AB \\
&= (A(BA)^D(BA)^DB)AB = A(BA)^DBA(BA)^DB = A(BA)^DB.
\end{aligned}$$

3. Sea $k = \text{máx}\{ind(AB), ind(BA)\}$. Veamos que

$$(AB)^{k+2}(A((BA)^2)^D B) = (AB)^{k+1}.$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
(AB)^{k+2}(A((BA)^2)^D B) &= (AB)^{k+2}(A((BA)^D)^2 B) \\
&= (AB)^{k+2}(A(BA)^D (BA)^D B) \\
&= (AB)^{k+1} ABA(BA)^D (BA)^D B \\
&= (AB)^{k+1} A(BA)^D BA(BA)^D B \\
&= (AB)^{k+1} A(BA)^D B \\
&= A(BA)^{k+1}(BA)^D B = A(BA)^k B = (AB)^{k+1}.
\end{aligned}$$

□

Para finalizar el capítulo y enlazando con el capítulo anterior en el que se ha indagado acerca de la matriz de Moore-Penrose, la pregunta que surge de manera natural es: ¿qué relación existe entre la matriz de Drazin y la matriz de Moore-Penrose? O, siendo más ambiciosos, ¿bajo qué condiciones estas dos matrices coinciden? Antes de anunciar el teorema que demuestra este hecho se necesita la siguiente definición:

Definición 4.3.1. - Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y sea $A^\dagger$ la matriz de Moore-Penrose de A. Se dice que A es matriz EP si se verifica que $AA^\dagger = A^\dagger A$.

Teorema 4.3.3. - *Sean $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $A^\dagger$ la matriz de Moore-Penrose de A y A^D la matriz de Drazin de A. Entonces $A^\dagger = A^D$ si y solo si A es una matriz EP.*

Demostración: Supogamos que $A^\dagger = A^D$ y veamos que A es una matriz EP, es decir que se verifica que $AA^\dagger = A^\dagger A$. En efecto,

$$AA^\dagger = AA^D = A^D A = A^\dagger A.$$

Recíprocamente supongamos que se verifica $AA^\dagger = A^\dagger A$ y veamos que $A^\dagger = A^D$. Para ello veamos que $A^\dagger$ es la matriz de Drazin de A comprobando que verifica las propiedades de la Definición 4.2.1:

1. $A^\dagger AA^\dagger \stackrel{?}{=} A^\dagger$. Se verifica pues $A^\dagger$ es la matriz de Moore-Penrose de A.

2. $AA^\dagger \stackrel{?}{=} A^\dagger A$. Se verifica pues es lo que se está suponiendo.

3. $A^{k+1}A^\dagger \stackrel{?}{=} A^k$.

$$A^{k+1}A^\dagger = (A\overset{k}{\cdots}AA)A^\dagger = (A\overset{k-1}{\cdots}AA)A^\dagger A = (A\overset{k-1}{\cdots}A)A = A^k.$$

Por tanto, cuando A es EP, $A^\dagger$ es también matriz de Drazin de A, es decir, $A^D = A^\dagger$.

□

Capítulo 5

Aplicaciones

Una vez desarrollada la teoría de la inversa de Moore-Penrose y la inversa de Drazin, vamos a ver algunas de las aplicaciones que pueden tener estas matrices.

5.1. Construcción de nuevas matrices: Inversa de DMP

Recientemente, S.B.Malik y N. Thome en [15] introdujeron una nueva inversa generalizada y la denominaron inversa de DMP. Su nombre proviene de que esta nueva inversa hace uso de la inversa de Drazin y la inversa de Moore-Penrose como ya veremos en su definición. En esta sección se definirá dicha matriz y se demostrará el teorema de existencia y unicidad. Posteriormente se enunciaran sus propiedades junto con la demostración. Para finalizar se mostrará un ejemplo de cálculo numérico de la matriz. Los resultados obtenidos pueden revisarse en [15], [16] y [17].

5.1.1. Definición y teorema de existencia y unicidad

Definición 5.1.1. - Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ con $ind(A) = k$. Se llama matriz inversa de DMP, y se denota por $A^{d,\dagger}$, a la matriz

$$A^{d,\dagger} = A^D A A^\dagger.$$

Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ con $ind(A) = k$, $A^\dagger$ la matriz de Moore-Penrose de A y A^D la matriz de Drazin de A. Considérese el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} XAX &= X \\ XA &= A^D A \\ A^k X &= A^k A^\dagger \end{aligned} \tag{5.1}$$

Teorema 5.1.1. - *Si el sistema de ecuaciones (5.1) tiene solución, entonces es única.*

Demostración: Supongamos que X_1 y X_2 satisfacen el sistema (5.1), es decir,

$$\begin{aligned} X_1AX_1 &= X_1 \\ X_1A &= A^DA \\ A^kX_1 &= A^kA^\dagger \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} X_2AX_2 &= X_2 \\ X_2A &= A^DA \\ A^kX_2 &= A^kA^\dagger \end{aligned}$$

Entonces, utilizando que A^DA es un proyector y $AA^D = A^DA$ se tiene que

$X_1 = X_1AX_1 = A^DAX_1 = (A^DA)^kX_1 = (A^D)^kA^kX_1 = (A^D)^kA^kA^\dagger = (A^D)^kA^kX_2 = (A^DA)^kX_2 = A^DAX_2 = X_2AX_2 = X_2$.

□

Teorema 5.1.2. - *El sistema de ecuaciones (5.1) es consistente y tiene una única solución* $X = A^DAA^\dagger = A^{d,\dagger}$.

Demostración: Veamos que $A^DAA^\dagger$ satisface el sistema de ecuaciónes (5.1). En efecto,

- $XAX = X$
  $A^DAA^\dagger AA^DAA^\dagger \stackrel{?}{=} A^DAA^\dagger$
  $A^DAA^\dagger AA^DAA^\dagger = A^DAA^DAA^\dagger = A^DAA^DAA^\dagger = A^DAA^\dagger$.
- $XA = A^DA$
  $A^DAA^\dagger A = A^DA$, pues $AA^\dagger A = A$.
- $A^kX = A^kA^\dagger$
  $A^kA^DAA^\dagger \stackrel{?}{=} A^kA^\dagger$
  $A^kA^DAA^\dagger = A^kAA^DA^\dagger = A^{k+1}A^DA^\dagger = A^kA^\dagger$.

El Teorema 5.1.1 demuestra la unicidad de la solución.

□

Para una matriz dada $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, la inversa de DMP de A, $A^{d,\dagger} = A^DAA^\dagger$, es la única matriz que satisface el sistema de ecuaciones (5.1).

5.1.2. Propiedades

En lo siguiente se expondrán propiedades que cumple la matriz $A^{d,\dagger}$.

Teorema 5.1.3. - *Sea* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. *Entonces:*

1. $A^{d,\dagger} = A^DP_{R(A)}$.
2. *Si* $ind(A) \leq 1$, *entonces* $A^{d,\dagger}$ *es* $1-inversa$.

3. $A^{d,\dagger}$ *es* $2-inversa$.

4. $(A^{d,\dagger})^n = \begin{cases} (A^DA^\dagger)^{\frac{n}{2}} & si\ n\ es\ par \\ A(A^DA^\dagger)^{\frac{n+1}{2}} & si\ n\ es\ impar \end{cases}$.

5. $(A^{d,\dagger})^\dagger = ((AP_{R(A)})^D)^\dagger$.

6. $ind(A^{d,\dagger}) \leq 1$.

7. $((A^{d,\dagger})^D)^D = A^{d,\dagger}$.

8. $AA^{d,\dagger} = A^{d,\dagger}A$ *si y solo si* $N(A^\dagger) \subseteq N(A^D)$.

9. $A^{d,\dagger} = 0$ *si y solo si* A *es nilpotente o* $A = 0$.

Demostración: Para demostrar las propiedades se utilizarán las definiciones de la matriz de Drazin y la matriz de Moore-Penrose:

1. Utilizando la Definición 3.0.1 de la inversa de Moore-Penrose, se tiene que $A^{d,\dagger} = A^DAA^\dagger = A^DP_R(A)$.

2. Si $ind(A) \leq 1$, por el Teorema 4.2 se cumple que $AA^DA = A$, entonces

$$AA^{d,\dagger}A = AA^DAA^\dagger A = AA^\dagger A = A$$

y, por tanto, $A^{d,\dagger}$ es $1-inversa$.

3. $A^{d,\dagger}$ es $2-inversa$:

$$A^{d,\dagger}AA^{d,\dagger} = A^DAA^\dagger AA^DAA^\dagger = A^DAA^DAA^\dagger = A^DAA^\dagger = A^{d,\dagger}.$$

4. Para $n = 1$, se tiene que

$$A^{d,\dagger} = A^DAA^\dagger = AA^DA^\dagger.$$

Para $n = 3$, se tiene que

$$\begin{aligned}(A^{d,\dagger})^3 &= A^DAA^\dagger A^DAA^\dagger A^DAA^\dagger = AA^DA^\dagger A^DAA^\dagger A^DAA^\dagger \\ &= AA^DA^\dagger A^DAA^\dagger AA^DA^\dagger = AA^DA^\dagger A^DAA^DA^\dagger \\ &= AA^DA^\dagger A^DA^\dagger = A(A^DA^\dagger)^2.\end{aligned}$$

Reiterando n un número impar de veces, se obtiene la expresión

$$(A^{d,\dagger})^n = A(A^DA^\dagger)^{\frac{n+1}{2}}.$$

Para $n = 2$, se tiene que

$$(A^{d,\dagger})^2 = A^DAA^\dagger A^DAA^\dagger = A^DAA^\dagger AA^DA^\dagger = A^DAA^DA^\dagger = A^DA^\dagger.$$

Para $n = 4$, se tiene que

$$\begin{aligned}(A^{d,\dagger})^4 &= A^D AA^\dagger A^D AA^\dagger A^D AA^\dagger A^D AA^\dagger = A^D AA^\dagger AA^D A^\dagger A^D AA^\dagger AA^D A^\dagger \\ &= A^D AA^D A^\dagger A^D AA^D A^\dagger = A^D A^\dagger A^D A^\dagger = (A^D A^\dagger)^2\end{aligned}$$

Reiterando n un número par de veces, se obtiene la expresión

$$(A^{d,\dagger})^n = (A^D A^\dagger)^{\frac{n}{2}}.$$

5. Por la Definición 3.0.1, sabemos que $AA^\dagger = P_{R(A)}$. Entonces

$$((AP_{R(A)})^D)^\dagger = ((AAA^\dagger)^D)^\dagger$$

Por el Teorema 4.3.2, si $B, C \in \mathbb{C}^{n\times n}$, entonces se verifica que $(BC)^D = B((CB)^2)^D C$. Aplicando el teorema a este caso donde $B = A$ y $C = AA^\dagger$ y desarrollando obtenemos

$$\begin{aligned}(AP_{R(A)})^D)^\dagger &= ((AAA^\dagger)^D)^\dagger = (A((AA^\dagger A)^2)^D AA^\dagger)^\dagger \\ &= (A(A^2)^D AA^\dagger)^\dagger = (A(A^D)^2 AA^\dagger)^\dagger \\ &= (AA^D A^D AA^\dagger)^\dagger = (A^D AA^D AA^\dagger)^\dagger \\ &= (A^D AA^\dagger)^\dagger = (A^{d,\dagger})^\dagger.\end{aligned}$$

6. Como $A^D A = AA^D$, entonces

$$A^{d,\dagger} = A^D AA^\dagger = AA^D A^\dagger.$$

Por otro lado, $(A^{d,\dagger})^2 = A^D AA^\dagger A^D AA^\dagger = A^D AA^\dagger AA^D A^\dagger = A^D AA^D A^\dagger = A^D A^\dagger$. Ambas igualdades implican que $N((A^{d,\dagger})^2) \subseteq N(A^{d,\dagger})$ y como $N(A^{d,\dagger}) \subseteq N((A^{d,\dagger})^2)$, se tiene que $N(A^{d,\dagger}) = N((A^{d,\dagger})^2)$. Por tanto, $ind(A^{d,\dagger}) \leq 1$.

7. Por la propiedad anterior, $ind(A^{d,\dagger}) \leq 1$. Por la propiedad 3 de la matriz de Drazin se verifica que si una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es tal que $ind(A) = 1$, entonces $(A^D)^D = A$. Luego si $ind(A^{d,\dagger}) = 1$, entonces

$$((A^{d,\dagger})^D)^D = A^{d,\dagger}.$$

Si $ind(A^{d,\dagger}) = 0$, $A^{d,\dagger}$ es invertible y $(A^{d,\dagger})^D = (A^{d,\dagger})^{-1}$, que también es invertible. Luego

$$((A^{d,\dagger})^D)^D = ((A^{d,\dagger})^{-1})^D = ((A^{d,\dagger})^{-1})^{-1} = A^{d,\dagger}.$$

Por tanto, si $ind(A^{d,\dagger}) \leq 1$, entonces $((A^{d,\dagger})^D)^D = A^{d,\dagger}$.

8. Como $Id - AA^\dagger$ y $A^D A$ son proyectores, se tiene que

$$\begin{aligned}AA^{d,\dagger} = A^{d,\dagger}A &\Longleftrightarrow AA^D AA^\dagger = A^D A \Longleftrightarrow AA^D(Id - AA^\dagger) = 0 \\ &\Longleftrightarrow R(Id - AA^\dagger) \subseteq N(A^D A) \Longleftrightarrow N(A^\dagger) \subseteq N(A^D).\end{aligned}$$

9. Supongamos que $A^{d,\dagger} = 0$. Como $R(A^k) \subseteq R(A)$, se tiene que $(P_{R(A)})_{|R(A^k)} = Id_{|R(A^k)}$. Por la propiedad 1, $A^{d,\dagger} = A^D \circ P_{R(A)}$, entonces $R(A^{d,\dagger}) = R(A^D) = R(A^k)$. Como $R(A^{d,\dagger}) = 0$, entonces $R(A^k) = 0$. Luego $N(A^k) = \mathbb{C}^n$ y, por tanto, $A = 0$ o A es nilpotente.

   Recíprocamente, si A es nilpotente, $A^D = 0$ y $A^{\dagger,d} = 0$. Si $A = 0$, entonces $A^{\dagger,d} = A^\dagger A A^D = 0$.

Corolario 5.1.3.1. - *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Si $N(A^\dagger) = N(A^D)$, entonces $A^{d,\dagger} = AA^\dagger A^D$.*

Demostración: Si $N(A^\dagger) = N(A^D)$, es claro que

$$N(A^{d,\dagger}) = 0 = N(AA^\dagger A^D).$$

Como $N(A^\dagger) = N(A^D)$, entonces, por la propiedad 8, se tiene que $AA^{d,\dagger} = A^{d,\dagger}A$ y se sigue que

$$A^{d,\dagger}A^2 = A = (AA^\dagger A^D)A^2,$$

de donde se deduce el enunciado.

□

Lema 5.1.4. - *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz tal que $ind(A) = k$ con $k \geq 0$, $A^\dagger$ su inversa de Moore-Penrose y A^D su inversa de Drazin. Si $A^{d,\dagger} = A$, entonces $A^\dagger = A^D$.*

Demostración: Si $A^{d,\dagger} = A$, por la propiedad 6, $ind(A) \leq 1$, luego $\mathbb{C}^n = R(A) \oplus N(A)$. Además, $A^{d,\dagger}A = AA^{d,\dagger}$, por lo que $N(A^\dagger) \subseteq N(A^D)$ y $R(A)^\perp \subseteq N(A^D) = N(A)$. Como $\mathbb{C}^n = R(A) \oplus N(A)$, entonces $R(A)^\perp = N(A^D) = N(A^\dagger)$. Así mismo,

$$R(A^D) = R(A) = (R(A)^\perp)^\perp = N(A)^\perp = R(A^\dagger).$$

Por tanto, $A^\dagger = A^D$.

□

Teorema 5.1.5. - *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $A^\dagger$ su inversa de Moore-Penrose y A^D su inversa de Drazin. $A^{d,\dagger} = A$ si y solo si A es EP y tripotente.*

Demostración: Supongamos que $A^{d,\dagger} = A$. Se tiene que

$$A^{d,\dagger} = AA^{d,\dagger}A = AAA = A^3 = A,$$

luego A es tripotente.

Por el lema anterior, $A^\dagger = A^D$ y por el Teorema 4.3.3 se verifica que A es EP.

Recíprocamente, si A es tripotente y EP, veamos que $A^{d,\dagger} = A^D$.

Como A es EP, por el Teorema 4.3.3 se tiene que $A^\dagger = A^D$, y utilizando que A es tripotente, es decir, $A^3 = A$, obtenemos:

$$A^{d,\dagger} = A^D AA^\dagger = A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger A^3 A^\dagger = AA^\dagger A^2 A^\dagger = AA^\dagger AAA^\dagger = AAA^\dagger = AA^\dagger A = A.$$

Por tanto, si A es EP y tripotente, entonces $A^{d,\dagger} = A$.

$\square$

En el siguiente ejemplo se muestra el cálculo numérico de la matriz DMP.

Ejemplo 5.1.1. - Cálculo de la inversa de DMP a partir de la inversa de Moore-Penrose y la inversa de Drazin.

Para el cálculo de la inversa DMP se hará uso de su definición: $A^{d,\dagger} = A^D A A^\dagger$.

Para este ejemplo se utilizará la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ del capítulo anterior, cuya inversa de Drazin, también obtenida en el capítulo previo, es

$$A^D = \begin{bmatrix} \frac{1}{27} & \frac{13}{27} & -\frac{13}{27} & \frac{14}{27} \\ \frac{13}{27} & \frac{7}{27} & -\frac{34}{27} & \frac{20}{27} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{11}{27} & -\frac{19}{23} & -\frac{19}{27} & -\frac{8}{27} \end{bmatrix}.$$

Realizando cálculos análogos mostrados en el capítulo de la Matriz de Moore-Penrose, se obtiene que la matriz de Moore-Penrose de A es

$$A^\dagger = \begin{bmatrix} \frac{-1}{15} & \frac{2}{15} & \frac{1}{5} & \frac{1}{15} \\ \frac{8}{15} & \frac{-1}{15} & \frac{-3}{5} & \frac{-8}{15} \\ \frac{7}{10} & \frac{-2}{15} & \frac{-3}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{7}{15} & \frac{1}{15} & \frac{-2}{5} & \frac{-7}{15} \end{bmatrix}.$$

Finalmente se obtinene la inversa DMP:

$$\begin{aligned} A^{d,\dagger} = A^D A A^\dagger &= \begin{bmatrix} \frac{1}{27} & \frac{13}{27} & \frac{-13}{27} & \frac{14}{27} \\ \frac{13}{27} & \frac{7}{27} & \frac{-34}{27} & \frac{20}{27} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{11}{27} & \frac{-19}{23} & \frac{-19}{27} & \frac{-8}{27} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{15} & \frac{2}{15} & \frac{1}{5} & \frac{1}{15} \\ \frac{8}{15} & \frac{-1}{15} & \frac{-3}{5} & \frac{-8}{15} \\ \frac{7}{10} & \frac{-2}{15} & \frac{-3}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{7}{15} & \frac{1}{15} & \frac{-2}{5} & \frac{-7}{15} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{10}{9} & \frac{-5}{9} & \frac{5}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{-2}{9} & \frac{11}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{9} & \frac{-1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{15} & \frac{2}{15} & \frac{1}{5} & \frac{1}{15} \\ \frac{8}{15} & \frac{-1}{15} & \frac{-3}{5} & \frac{-8}{15} \\ \frac{7}{10} & \frac{-2}{15} & \frac{-3}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{7}{15} & \frac{1}{15} & \frac{-2}{5} & \frac{-7}{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{18} & 0 & 0 & \frac{5}{18} \\ \frac{73}{90} & \frac{-2}{5} & \frac{-3}{5} & \frac{37}{90} \\ \frac{7}{10} & \frac{-2}{5} & \frac{-3}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{18} & 0 & 0 & \frac{1}{18} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

5.2. Construcción de nuevas matrices: Inversa Dual de DMP

En esta sección podremos encontrar la definición de inversa dual de DMP y el teorema de existencia y unicidad junto su demostración. Además se enunciarán algunas propiedades junto con un ejemplo de cálculo numérico. Los resultados de esta sección pueden encontrarse en [17].

Teorema 5.2.1. *(De existencia y unicidad) - Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $ind(A) = k$. Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:*

$$\begin{aligned} XAX &= X \\ AX &= AA^D \\ XA^k &= A^\dagger A^k \end{aligned} \tag{5.2}$$

Entonces la matriz $X = A^\dagger AA^D$ es solución única del sistema de ecuaciones.

Demostración: Veamos primero que la solución es única. Supongamos que X_1 y X_2 satisfacen el sistema (5.2), es decir,

$$\begin{aligned} X_1AX_1 &= X_1 \qquad & X_2AX_2 &= X_2 \\ AX_1 &= AA^D & AX_2 &= AA^D \\ X_1A^k &= A^\dagger A^k & X_2A^k &= A^\dagger A^k \end{aligned}$$

Como AA^D es un proyector y $AA^D = A^DA$, se tiene que

$$\begin{aligned} X_1 &= X_1AX_1 = X_1AA^D = X_1A^DA = X_1(A^DA)^k = X_1A^k(A^D)^k \\ &= A^\dagger A^k(A^D)^k = X_2A^k(A^D)^k = X_2(A^DA)^k = X_2A^DA = X_2AA^D = X_2AX_2 = X_2. \end{aligned}$$

Por tanto, $X_1 = X_2$. Luego si el sistema tiene solución, entonces es única.

Para demostrar la existencia de la solución, se comprueba que la solución aportada en el enunciado verifica las ecuaciones:

- $XAX = X$.
  $A^\dagger AA^DAA^\dagger AA^D \stackrel{?}{=} A^\dagger AA^D$
  $A^\dagger AA^DAA^\dagger AA^D = A^\dagger AA^DAA^D = A^\dagger AA^D$.
- $AX = AA^D$.
  $A^\dagger AA^DA = AA^D$, pues $AA^\dagger A = A$.
- $XA^k = A^\dagger A^k$.
  $A^\dagger AA^DA^k \stackrel{?}{=} A^\dagger A^k$
  $A^\dagger AA^DA^k = A^\dagger AA^kA^D = A^\dagger A^{k+1}A^D = A^\dagger A^k$.

Luego $X = A^\dagger A A^D$ es la única solución del sistema (5.2).

$\square$

Definición 5.2.1. - Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Se llama matriz inversa DMP dual, y se denota por $A^{\dagger,d}$, a la matriz

$$A^{\dagger,d} = A^\dagger A A^D.$$

5.2.1. Propiedades

Las propiedades de la matriz inversa DMP dual y sus demostraciones son análogas a las propiedades de la inversa DMP.

Teorema 5.2.2. - *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $ind(A) = k$ y $A^{\dagger,d}$ su inversa DMP dual. Se tienen las siguientes propiedades:*

1. $A^{\dagger,d} = P_{R(A^*)} A^D$.
2. $ind(A) \leq 1$ *si y solo si* $A^{d,\dagger}$ *es* $1 - inversa$.
3. $A^{\dagger,d}$ *es* $2 - inversa$.
4. $(A^{\dagger,d})^n = \begin{cases} (A^\dagger A^D)^{\frac{n}{2}} \text{ si } n \text{ es par} \\ (A^\dagger A^D)^{\frac{n+1}{2}} A \text{ si } n \text{ es impar} \end{cases}$
5. $(A^{\dagger,d})^\dagger = ((P_{R(A*)}A)^D)^\dagger$.
6. $ind(A^{\dagger,d}) \leq 1$.
7. $((A^{\dagger,d})^D)^D = A^{\dagger,d}$.
8. $AA^{\dagger,d} = A^{\dagger,d}A$ *si y solo si* $R(C) \subseteq R(A^*)$.
9. $A^{\dagger,d} = 0$ *si y solo si* A *es nilpotente o* $A = 0$.
10. $AA^{\dagger,d}A = C$, *siendo* C *la parte invertible de la descomposición de* A *del Teorema 4.1.*

Lema 5.2.3. - *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz tal que $ind(A) = k$ con $k \geq 0$, $A^\dagger$ su inversa de Moore-Penrose y A^D su inversa de Drazin. Si $A^{\dagger,d} = A$, entonces $A^\dagger = A^D$.*

Teorema 5.2.4. - *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz, $A^\dagger$ su inversa de Moore-Penrose y A^D su inversa de Drazin. $A^{\dagger,d} = A$ si y solo si A es EP y tripotente.*

En lo siguiente se muestra un ejemplo numérico del cálculo de la inversa dual de DMP a partir de la definición.

Ejemplo 5.2.1. - Cálculo de la inversa de DMP dual.

Sea $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Por definición de la matriz de DMP dual, se tiene que $A^{\dagger,d} = A^{\dagger}AA^{D}$.

Previamente se han calculado las matrices $A^{\dagger}$ y A^{D}. Entonces,

$$A^{\dagger,d} = A^{\dagger}AA^{D} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{15} & \frac{2}{15} & \frac{1}{5} & \frac{1}{15} \\ \frac{8}{15} & \frac{-1}{15} & \frac{-3}{5} & \frac{-8}{15} \\ \frac{7}{10} & \frac{-2}{15} & \frac{-3}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{7}{15} & \frac{1}{15} & \frac{-2}{5} & \frac{-7}{15} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{27} & \frac{13}{27} & \frac{-13}{27} & \frac{14}{27} \\ \frac{13}{27} & \frac{7}{27} & \frac{-34}{27} & \frac{20}{27} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{11}{27} & \frac{-19}{23} & \frac{-19}{27} & \frac{-8}{27} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{27} & \frac{13}{27} & \frac{-13}{27} & \frac{14}{27} \\ \frac{13}{27} & \frac{7}{27} & \frac{-34}{27} & \frac{20}{27} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{11}{27} & \frac{-19}{23} & \frac{-19}{27} & \frac{-8}{27} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{4}{9} & \frac{-2}{9} & \frac{-4}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{4}{9} & \frac{-2}{9} & \frac{-1}{9} & \frac{2}{9} \end{bmatrix}.$$

5.3. Resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales a partir de la inversa de Drazin

En esta sección vamos a aplicar la teoría de la inversa de Drazin al estudio de sistemas de ecuaciones diferenciales. Pueden encontrarse más detalles en [18].

Sean $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ dos matrices cuadradas. Se verifica que si $AB = BA$, entonces $AB^D = B^D A$, $A^D B = BA^D$ y $A^D B^D = B^D A^D$.

En esta sección se utilizarán las matrices A, B y G como matrices $n \times n$ con coeficientes en $\mathbb{C}$, q y b como vectores constantes y x, y y f como vectores cuyos elementos son funciones diferenciales de variable t. I se utilizará para la matriz identidad.

Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Por el Teorema 4.2.4, entonces existe una matriz invertible $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $A = P \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} P^{-1}$, siendo C invertible y N nilpotente con índice de nilpotencia k. Luego toda matriz A se puede expresar como $A = \tilde{C} + \tilde{N}$ por un cambio de base, donde $\tilde{C} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $\tilde{N} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}$.

5.3.1. Caso particular: x' + Ax = f

La solución general de la ecuación

$$x' + Ax = f \tag{5.3}$$

es, como en el caso escalar,

$$x = e^{-At}\left(\int e^{At} f(t)\, dt\right).$$

Si A es invertible entonces

$$\int e^{At}\, dt = A^{-1}e^{At} + G,$$

siendo $G \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrix arbitraria. Si A es no singular, el problema se complica.

Teorema 5.3.1. - *Si A tiene índice k, entonces*

$$\int e^{At}\, dt = A^D e^{At} + (I - AA^D)t\left[I + \frac{A}{2}t + \frac{A^2}{3!}t^2 + ... + \frac{A^{k-1}}{k!}t^{k-1}\right] + G. \qquad (5.4)$$

Demostración: Derivando la parte derecha de la ecuación (5.4) y utilizando la expresión en serie de e^{At} se obtiene el resultado.

□

Si f es un vector constante, entonces (5.3) tiene como solución particular un polinomio en la variable t. Utilizando el Teorema 5.3.1 y la serie de potencias de e^{-At}, se obtiene una forma explícita para una solución polinómica de (5.3) cuando f es la constante b. La solución es

$$x = \left[A^D + (I - AA^D)t\left(I - \frac{At}{2!} + \frac{A^2t^2}{3!} - ...(-1)^{k-1}\frac{A^{k-1}t^{k-1}}{k!}\right)\right] b,$$

como se puede comprobar directamente.

5.3.2. Solución de Ax'+Bx = f cuando AB=BA.

Primero estudiaremos la ecuación

$$Ax' + Bx = f. \qquad (5.5)$$

Si A es no singular, entonces la ecuación (5.5) puede escribirse como (5.3).

Se tiene la ecuación homogénea asociada a la ecuación (5.5)

$$Ax' + Bx = 0 \qquad (5.6)$$

Se asumirá que A y B conmutan. En una sección más adelante se mostrará que si las condiciones iniciales determinan de forma única las soluciones, entonces (5.5) se puede reducir al caso en el que A y B conmutan.

Sea $x_1 = A^D A x$ y $x_2 = (I - A^D A)x$. Entonces la ecuación (5.5) se puede escribir como

$$(\tilde{C} + \tilde{N})(x_1' + x_2') + B(x_1 + x_2) = f.$$

Multiplicando primero por $\tilde{C}^D\tilde{C}$ y después por $(I - \tilde{C}^D\tilde{C})$ se obtiene que la ecuación (5.6) es equivalente a

$$\tilde{C}x_1' + Bx_1 = f_1, \tag{5.7}$$

y

$$\tilde{N}x_2' + Bx_2 = f_2, \tag{5.8}$$

donde $f_1 = \tilde{C}^D\tilde{C}f$ y $f_2 = (I - \tilde{C}^D\tilde{C})f$. La ecuación (5.7) se puede escribir como

$$x_1' + \tilde{C}^D B x_1 = \tilde{C}^D f, \tag{5.9}$$

la cual está en la forma de (5.3). Por tanto, (5.9) tiene una única solución para todas las condiciones iniciales en $R(A^D A)$. Sin embargo, la ecuación (5.8) podría tener o no soluciones no triviales. Las soluciones, si existen, no tienen por qué estar determinadas exclusivamente por las condiciones iniciales. El siguiente teorema recoge las conclusiones extraídas de la ecuación (5.9).

Teorema 5.3.2. - *Si A y B conmutan, entonces $y = e^{-A^D Bt}AA^D q$ es una solución de la ecuación $Ax' + Bx = 0$ para cada vector columna q.*

Demostración: Sea $y = e^{-A^D Bt}AA^D q$. Entonces

$$Ay' = -AA^D B e^{-A^D Bt} A^D A q = -Be^{-A^D Bt}A^D A q = -By.$$

□

Corolario 5.3.2.1. - *Si A y B conmutan y $A^D A f = f$, entonces $y = e^{-A^D Bt}\int e^{A^D Bt} f(t)\, dt$ es una solución particular de la ecuación $Ax' + Bx = f$.*

Veamos ahora un ejemplo de un caso particular de la ecuación homogénea (5.6). Como normalmente la parte nilpotente es la que genera problemas, elijamos A y B nilpotentes.

Ejemplo 5.3.1. .- Sea

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de modo que (5.6) es

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

o $x_1' + x_2 + x_3 = 0$. En este caso se observa que x_1 y x_3 son arbitrarios incluso cuando se fijan condiciones iniciales. Nótese que $AB = BA$.

Antes de pasar a demostrar la solución general del la ecuación (5.6), necesitamos el siguiente lema:

Lema 5.3.3. - *Si $AB = BA$ y $N(A) \cap N(B) = \{0\}$. Entonces*

$$(I - AA^D)BB^D = (I - AA^D).$$

Demostración: Supongamos que $AB = BA$ y $N(A) \cap N(B) = \{0\}$. Se tiene la descomposición de A:

$$A = P \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} P^{-1},$$

con P y C invertibles y N nilpotente con índice de nilpotencia k. Sea

$$B = P \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Si $AB = BA$ entonces

$$B_1C = CB_1,\ NB_4 = B_4N,\ CB_2 = B_2N \text{ y } NB_3 = B_3C. \tag{5.10}$$

Consecuentemente, $C^kB_2 = B_2N^k = 0$. Entonces, $B_2 = 0$ ya que C^k es invertible. De manera similar se tiene que $B_3 = 0$. Por tanto,

$$BB^D = P \begin{bmatrix} B_1B_1^D & 0 \\ 0 & B_4B_4^D \end{bmatrix} P^{-1} \text{ y } (I - AA^D) = P \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Veamos ahora que B_4 es invertible. Si $N = 0$, la hipótesis $N(A) \cap N(B) = \{0\}$ implica que $N(B_4) = \{0\}$ y habríamos terminado. Si $N \neq 0$, supongamos que existe un vector $v \neq 0$ tal que $v \in N(B_4)$. Luego

$$N^pv \in N(B_4) \text{ para todo entero } p \geq 0$$

puesto que $NB_4 = B_4N$. Como N es nilpotente, existe un entero no negativo l tal que $N^lv \neq 0$, pero $N^{l+1}v = 0$. Esto implica que

$$0 \neq N^lv \in N(B_4) \cap N(N)$$

y, por tanto, $N(A) \cap N(B) \neq \{0\}$, que entra en contradicción con la hipótesis del enunciado. Entonces $N(B_4) = \{0\}$, luego B_4 es invertible y se tiene la igualdad del enunciado.

□

Teorema 5.3.4. - *Si A y B conmutan y $N(A) \cap N(B) = \{0\}$, entonces la solución general de la ecuación $Ax' + Bx = 0$ es*

$$x = e^{-A^DBt}AA^Dq, \tag{5.11}$$

con $q \in \mathbb{C}^n$.

Demostración: Por el Teorema 5.3.2, $e^{-A^D Bt}$ es solución para cada q. Para probar que $x = e^{-A^D Bt} AA^D q$ es solución general, veamos que para cada solución x existe un vector q tal que (5.11) se cumple. Si x es solución, entonces se cumplen las ecuaciones (5.8) y (5.9) para $f = 0$. Como $N(A) \cap N(B) = \{0\}$, se tiene que por el lema anterior, B está en correspondencia con $R(N)$. Si $k = ind(A)$, entonces

$$0 = N^k x_2' + BN^{k-1} x_2 = BN^{k-1} x_2.$$

Por tanto, $N^{k-1} x_2 = 0$. Derivando la expresión, se obtiene

$$0 = N^k x_2' = -BN^{k-2} x_2.$$

Procediendo de este modo, resulta que $Bx_2 = 0$, $Nx_2 = 0$ y $(I - AA^D)x_2 = x_2$. Por lo tanto, $x_2 = 0$ y $x = x_1$. De la ecuación (5.9) se obtiene que

$$x_1 = e^{-C^D Bt} q = e^{-A^D Bt} q \text{ para algún } q.$$

Entonces

$$x = x_1 = AA^D x_1 = e^{-A^D Bt} AA^D q \text{ para algún } q.$$

□

La derivada de (5.11) utiliza muchas de las propiedades de la inversa de Drazin. En general, no puede usarse otro inverso en su lugar.

Ejemplo 5.3.2. Consideremos el sistema $Ax' + Bx = 0$ donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como $A^D = 0$ y $N(A) \cap N(B) = 0$, por el Teorema 5.3.4 sabemos que solo tiene la solución trivial. Sea

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Entonces E es inversa reflexiva generalizada de A, pero $e^{-EBt} EAq = e^{-Et} EAq$ no es idénticamente cero para todo q, entonces no es una solución para $Ax' + Bx = 0$.

En lo siguiente se dará una solución particular de la ecuación diferencial $Ax' + Bx = f$ cuando A y B conmutan y $N(A) \cap N(B) = \{0\}$.

Se utilizará que $f^{(n)} = d^n f / dt^n$.

Teorema 5.3.5. *-Sean $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tal que $AB = BA$ y $N(A) \cap N(B) = \{0\}$. Sea $k = ind(A)$. Si f es una función tal que es k veces continuamente diferenciable, entonces la ecuación $Ax' + Bx = f$ es consistente y una solución particular viene dada por*

$$x = A^D e^{-A^D Bt} \int_a^t e^{A^D Bs} f(s)\, ds + (I - AA^D) \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n (AB^D)^n B^D f^{(n)},$$

donde a es arbitraria.

Demostración: Supongamos que $AB = BA$ y $N(A) \cap N(B) = \{0\}$. Sea

$$x_1 = A^D e^{-A^D Bt} \int_a^t e^{A^D Bs} f(s)\, ds$$

y

$$x_2 = (I - AA^D) \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n (AB^D)^n B^D f^{(n)}.$$

Veamos que

$$Ax_1' + Bx_1 = (AA^D)f \tag{5.12}$$

y

$$Ax_2' + Bx_2 = (I - AA^D)f, \tag{5.13}$$

de modo que $x = x_1 + x_2$ es solución de (5.3). Comprobemos primero que se verifica la ecuación (5.12):

$$\begin{aligned} Ax_1 &= A[-A^D Bx_1 + A^D e^{-A^D Bt} e^{A^D Bt} f(t)] \\ &= -AA^D Bx_1 + AA^D f \\ &= -Bx_1 + AA^D f. \end{aligned}$$

Veamos ahora que se verifica la ecuación (5.13). En efecto,

$$\begin{aligned} Ax_2' &= A(I - AA^D) \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n (AB^D)^n B^D f^{(n+1)} = (I - AA^D) \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n (AB^D)^{n+1} f^{(n+1)} \\ &= (I - AA^D) \sum_{n=0}^{k-2} (-1)^n (AB^D)^{n+1} f^{(n+1)} = -(I - AA^D) \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n (AB^D)^n f^{(n+1)} \\ &= -(I - AA^D) B \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n (AB^D)^n B^D f^{(n)} = -(I - AA^D) B(x_2 - B^D f) \\ &= -(I - AA^D) Bx_2 + (I - AA^D) f = -Bx_2 + (I - AA^D) f. \end{aligned}$$

□

Combinando los Teoremas 5.3.4 y 5.3.5 se obtiene el siguiente teorema:

Teorema 5.3.6. - *Sean A y B tal que $AB = BA$ y $N(A) \cap N(B) = \{0\}$ y sea $k = ind(A)$. Entonces la solución general de $Ax' + Bx = f$ viene dada por*

$$\begin{aligned} x = &e^{-A^D Bt} AA^D q + A^D e^{-A^D Bt} \int_a^t e^{A^D Bs} f(s)\, ds \\ &+ (I - AA^D) \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n (AB^D)^n B^D f^{(n)}, \end{aligned} \tag{5.14}$$

donde q es un vector arbitrario constante y a es arbitrario.

Como corolario inmediato del Teorema 5.3.6 obtenemos una caracterización de las condiciones iniciales cuando $AB = BA$ y $N(A) \cap N(B) = \{0\}$.

Corolario 5.3.6.1. - *Si $AB = BA$ y $N(A) \cap N(B) = \{0\}$, entonces existe una solución de $Ax' + Bx = f$, $x(0) = x_0$, si y solo si x_0 es de la forma*

$$x_0 = A^D Aq + (I - AA^D) \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n (AB^D)^n B^D f^{(n)}(0)$$

para algún vector q. Además, la solución es única.

En particular, si f es identicamente nula, entonces $A^D Ax_0 = x_0$ caracteriza las condiciones iniciales. El Corolario 5.3.6.1 puede utilizarse para condiciones iniciales con valores de t distintos de 0 realizando un cambio de variable. Nótese que si B es invertible en (5.3), entonces el Teorema 5.3.6 se puede aplicar a $B^{-1}Ax' + x = B^{-1}f$ y las técnicas desarrolladas en la siguiente subsección no serían necesarias.

5.3.3. Caso general: Ax' + Bx = f

En esta subsección se establecerán las condiciones necesarias y suficientes para la unicidad de las soluciones. Posteriormente se hará uso del Teorema 5.3.6 para hallar la solución general cuando la ecuación tenga soluciones únicas. El siguiente lema será fundamental en lo que sigue.

Lema 5.3.7. - *Si c es tal que $(cA+B)$ es invertible, entonces $(cA+B)^{-1}A$ y $(cA+B)^{-1}B$ conmutan.*

Demostración: Supongamos que existe c tal que $(cA + B)$ es invertible. Entonces $c[(cA + B)^{-1}A] + [(cA + B)^{-1}B] = I$.

□

Teorema 5.3.8. - *La ecuación $Ax' + Bx = 0$ tiene soluciones únicas para condiciones iniciales si y solo si existe un número c tal que $(cA + B)$ es invertible.*

Demostración: Supongamos que $(cA+B)$ es invertible. Entonces $N(A) \cap N(B) = \{0\}$. Pero

$$N(A) = N((cA + B)^{-1}A) \qquad \text{y} \qquad N((cA + B)^{-1}B) = N(B).$$

Así,

$$(cA + B)^{-1}Ax' + (cA + B)^{-1}Bx = 0 \tag{5.15}$$

tiene soluciones únicas por el Teorema 5.3.4.(5.15) es equivalente a la ecuación (5.6).

Recíprocamente, seupongamos que $(cA + B)$ no es invertible para cada c. Entonces para cada c existe un vector no nulo ϕ_c tal que $(cA + B)\phi_c = 0$. Pero entonces $x_c = e^{tc}\phi_c$ es una solución de (5.6) para

$$Ax_c' = ce^{tc}A\phi_c = -e^{tc}B\phi_c = -Bx_c.$$

Como no más de n de los ϕ_c pueden ser linealmente independientes, tomemos un subconjunto finito $\{\phi_c\}_{i=1}^{l}$, $c_i \neq 0$ tal que es linealmente independiente. Si

$$\sum_{i=1}^{l} \alpha_i \phi_{c_i} = 0,$$

sea

$$x = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i e^{tc_i} \phi_{c_i}.$$

Entonces x y 0 satisfacen $Ax' + Bx = 0$, $x(0) = 0$. Pero x no es identicamente nula. Entonces la ecuación $Ax' + Bx = 0$ no tiene soluciones únicas para condiciones iniciales.

□

Es importante señalar que si A, B son matrices $n \times n$, entonces $det(\lambda A + B)$ es un polinomio como mucho de grado n. Por tanto, o bien $(cA + B)$ es invertible para todos menos para un número finito de c o bien nunca es invertible. Para encontrar un c tal que $(cA + B)$ sea invertible, hay que encontrar un número que no sea raíz de un polinomio determinado; es considerablemente más sencillo que encontrar una raíz.

Para simplificar las fórmulas de lo siguiente, se utilizará la siguiente notación. Sea

$$\tilde{A}_c = (cA + B)^{-1}A,\ \tilde{B}_c = (cA + B)^{-1}B,\ \tilde{f}_c = (cA + B)^{-1}f, \tag{5.16}$$

donde A, B son matrices $n \times n$, f es una función y c es tal que $(cA + B)$ es invertible. Si $\tilde{A}_c$, $\tilde{B}_c$, $\tilde{f}_c$ son utilizados en una fórmula que es independiente de la elección de c, entonces se omitirá el subíndice.

A partir de los Teoremas 5.3.4, 5.3.5, 5.3.6, 5.3.8 y el Lema 5.3.7 se obtiene el siguiente teorema como resolución.

Teorema 5.3.9. - *Supongamos que $Ax' + Bx = 0$ tiene solución única para unas condiciones iniciales. Sea c un número tal que $(cA + B)$ es invertible. Se definen $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ y $\tilde{f}$ como (5.16). Sea $k = Ind(\tilde{A})$. Entonces $Ax' + Bx = f$, $x(0) = x_0$, tiene una solución si y solo si x_0 es de la forma*

$$x_0 = \tilde{A}\tilde{A}^D q + (I - \tilde{A}\tilde{A}^D)\sum_{n=0}^{k-1}(-1)^n(\tilde{A}\tilde{B}^D)^n\tilde{B}^D\tilde{f}^{(n)}(0), \tag{5.17}$$

para algún vector q. Una solución particular de $Ax' + Bx = f$ es

$$x = \tilde{A}^D e^{-\tilde{A}^D\tilde{B}t}\int_a^t e^{\tilde{A}^D\tilde{B}s}\tilde{f}(s)\,ds + (I - \tilde{A}\tilde{A}^D)\sum_{n=0}^{k-1}(-1)^n(\tilde{A}\tilde{B}^D)^n\tilde{B}^D\tilde{f}^{(n)}, \tag{5.18}$$

donde a es arbitraria. La solución general de la ecuación $Ax' + Bx = f$ es

$$\begin{aligned} x =& e^{-\tilde{A}^D\tilde{B}t}\tilde{A}\tilde{A}^D q + \tilde{A}^D e^{-\tilde{A}^D\tilde{B}t}\int_a^t e^{\tilde{A}^D\tilde{B}s}\tilde{f}(s)\,ds \\ &+ (I - \tilde{A}\tilde{A}^D)\sum_{n=0}^{k-1}(-1)^n(\tilde{A}\tilde{B}^D)^n\tilde{B}^D\tilde{f}^{(n)}, \quad q \in \mathbb{C}^n. \end{aligned} \tag{5.19}$$

La solución que satisface $x(0) = x_0$ se encuentra sustituyendo $q = x_0$ y $a = 0$ en (5.19).

Nótese que se obtiene que (5.3) tiene soluciones únicas para condiciones iniciales si y solo si tiene soluciones analíticas únicas para condiciones iniciales.

Es importante indicar que (5.17), (5.18) y (5.19) son independientes de c con el siguiente teorema:

Teorema 5.3.10. - *Sean A y B matrices $n \times n$ tal que $(cA + B)^{-1}$ existe para algún c. Entonces $\tilde{A}_c^D \tilde{A}_c$, $\tilde{A}_c^D \tilde{B}_c$, $\tilde{A}_c^D (cA + B)^{-1}$, $\tilde{B}_c^D (cA + B)^{-1}$, $\tilde{A}_c \tilde{B}_c^D$ e $Ind(\tilde{A}_c)$ no dependen de c.*

Demostración: Como $\tilde{A}_c \tilde{B}_c = \tilde{B}_c \tilde{A}_c$, por (5.16) es claro que basta demostrar que $\tilde{A}_c^D (cA + B)^{-1}$, $\tilde{B}_c^D (cA + B)^{-1}$ e $Ind(\tilde{A}_c)$ no dependen de c. Supongamos que λ y c son tales que $(\lambda A + B)$ y $(cA + B)$ son invertibles. Entonces

$$\begin{aligned} A_\lambda^D (\lambda A + B)^{-1} &= [(\lambda A + B)^{-1}(cA + B)(cA + B)^{-1} A]^D (\lambda A + B)^{-1} \\ &= [(\lambda \tilde{A}_c + \tilde{B}_c)^{-1} \tilde{A}_c]^D (\lambda A + B)^{-1} \\ &= \tilde{A}_c^D (\lambda \tilde{A}_c + \tilde{B}_c)(\lambda A + B)^{-1} \\ &= \tilde{A}_c^D [\lambda (cA + B)^{-1} A + (cA + B)^{-1} B](\lambda A + B)^{-1} \\ &= \tilde{A}_c^D (cA + B)^{-1}. \end{aligned}$$

Luego, $\tilde{A}_c^D (cA + B)^{-1}$ no depende de c. Se demuestra de modo similar que $\tilde{B}_c^D (cA + B)^{-1}$ no depende de c. Finalmente, nótese que para cualquier entero k,

$$\begin{aligned} rank(\tilde{A}_\lambda^k) &= rank[(\lambda \tilde{A}_c + \tilde{B}_c)^{-1} \tilde{A}_c]^k \\ &= rank[(\lambda \tilde{A}_c + \tilde{B}_c)^{-k} \tilde{A}_c^k] = rank(\tilde{A}_c^k). \end{aligned}$$

Por tanto, $\tilde{A}_c$ no depende de c.

□

Nótese que $N(A) \cap N(B) = \{0\}$ no es suficiente para garantizar que $(cA + B)$ es invertible para algún c. Esto se muestra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 5.3.3. .- Sea

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se cumple que $N(A) \cap N(B) = \{0\}$, pero $det(cA + B) = 0$ para todo c.

Para finalizar, veamos un ejemplo numérico de lo anterior.

5.3.4. Ejemplo numérico

Consideremos la ecuación diferencial homogénea

$$Ax' + Bx = 0, \tag{5.20}$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -27 & -22 & -17 \\ 18 & 14 & 10 \end{bmatrix}. \tag{5.21}$$

Nótese que tanto A como B son singulares y no conmutan. Como $A+B$ es invertible, tomemos $c = 1$ y multiplicando por $(A+B)^{-1}$ por la izquierda la ecuación (5.20), se obtiene

$$\tilde{A}x' + \tilde{B}x = 0, \tag{5.22}$$

donde

$$\tilde{A} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -3 & -5 & -4 \\ 6 & 5 & -2 \\ -3 & 2 & 10 \end{bmatrix} \text{ y } \tilde{B} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 6 & 5 & 4 \\ -6 & -2 & 2 \\ 3 & -2 & 7 \end{bmatrix}. \tag{5.23}$$

Existirá una solución única si y solo si el vector inicial $x(0)$ satisface

$$(I - \tilde{A}\tilde{A}^D)x(0) = 0. \tag{5.24}$$

Calculando la inversa de Drazin de $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$ se obtiene

$$\tilde{A}^D = \frac{1}{27}\begin{bmatrix} -27 & -41 & -28 \\ 54 & 77 & -46 \\ -27 & 34 & 14 \end{bmatrix} \text{ y } \tilde{B}^D = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 24 & 19 & 14 \\ -24 & -16 & -8 \\ 12 & -5 & -2 \end{bmatrix}. \tag{5.25}$$

La ecuación (5.24) puede ahora calcularse como

$$9x_1(0) + 7x_2(0) + 5x_3(0) = 0 \tag{5.26}$$

Como los valores propios de $-\tilde{A}^D\tilde{B}$ son 0, 0 y $\dfrac{2}{3}$ es fácil calcular la exponencial. El resultado final obtenido es

$$x(t) = e^{\tilde{A}^D\tilde{B}t}x(0) = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 18 & 1 - e^{\frac{2}{3}t} & 2(1 - e^{\frac{2}{3}t}) \\ 0 & 26 - 8e^{\frac{2}{3}t} & 16(1 - e^{\frac{2}{3}t}) \\ 0 & 13(e^{\frac{2}{3}t} - 1) & 26(e^{\frac{2}{3}t} - 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix}, \tag{5.27}$$

donde $x_1(0)$, $x_2(0)$ y $x_3(0)$ satisfacen (5.26).

Ahora consideremos la ecuación no homogenea

$$Ax' + Bx = b, \tag{5.28}$$

donde A y B vienen dadas por (5.23) y b es el vector constante $b = [1, 2, 0]^T$. De nuevo, multiplicamos la ecuación (5.28) por la izquierda por $(A+B)^{-1}$ para obtener $\tilde{A}x' + \tilde{B}x = \tilde{b}$, donde A y B vienen dadas por (5.25) y

$$\tilde{b} = (A + B)^{-1}b = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -11 \\ 20 \\ -10 \end{bmatrix}. \tag{5.29}$$

Si el vector inicial satisface la condición de unicidad (o equivalentemente de existencia) de soluciones, entonces la solución viene dada por el Teorema 5.3.9. En este caso, $\tilde{A}$ tiene índice 1, así que se tiene

$$x(t) = e^{-\tilde{A}^D\tilde{B}t}\tilde{A}\tilde{A}^D q + \tilde{A}^D e^{-\tilde{A}^D\tilde{B}t}\int_0^t e^{\tilde{A}^D\tilde{B}s}\tilde{b}\,ds + (I - \tilde{A}\tilde{A}^D)\tilde{B}^D\tilde{b}. \tag{5.30}$$

Fijando $t = 0$ se obtiene

$$(I - \tilde{A}\tilde{A}^D)(x(0) - \tilde{B}\tilde{b}) = 0 \tag{5.31}$$

como condición necesaria y suficiente para la existencia de una solución con valor inicial x(0).

Calculando (5.31) se obtiene

$$9x_1(0) + 7x_2(0) + 5x_3(0) + 1 = 0. \tag{5.32}$$

Como $\tilde{b}$ es una constante, calculamos la integral de (5.30) utilizando la fórmula (5.4). Como $\tilde{A}^D\tilde{B}$, $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$ tienen índice 1, la fórmula (5.4) se simplifica a

$$\int_0^t e^{\tilde{A}^D\tilde{B}s}\,dt = [\tilde{A}\tilde{B}^D(e^{\tilde{A}^D}Bt - I) + (I - \tilde{A}\tilde{A}^D\tilde{B}\tilde{B}^D)t]\tilde{b}. \tag{5.33}$$

Sustituyendo (5.33) en (5.30) y simplificando, se obtiene la solución

$$x(t) = e^{-\tilde{A}^D\tilde{B}t}(x(0) - \tilde{B^D}\tilde{b}) + \tilde{B}^D\tilde{b} + \tilde{A}^D(I - \tilde{B}^D\tilde{B})t\tilde{b}. \tag{5.34}$$

Evaluando (5.34) se obtiene

$$\begin{aligned} x_1(t) &= -\frac{1}{18}e^{\frac{2}{3}t}(x_2(0) + 2x_3(0)) - \frac{13}{18}x_2(0) - \frac{4}{9}x_3(0) - \frac{2}{9} - t, \\ x_2(t) &= -\frac{4}{9}e^{\frac{2}{3}t}(x_2(0) + 2x_3(0)) - \frac{13}{9}x_2(0) - \frac{8}{9}x_3(0) - \frac{2}{9} + 2t, \\ x_3(t) &= \frac{13}{18}e^{\frac{2}{3}t}(x_2(0) + 2x_3(0)) - \frac{13}{18}x_2(0) - \frac{4}{3}x_3(0) - \frac{10}{9} - t. \end{aligned}$$

donde $x_1(0)$ se ha eliminado utilizando (5.32).

5.4. Aproximación de soluciones de sistemas de ecuaciones no compatibles

En esta sección se abordará la aproximación de soluciones de sistemas de ecuaciones lineales no compatibles a partir de la inversa de Moore-Penrose previamente estudiada.

Sea $x = [x_1, ..., x_n] \in \mathbb{C}^n$. Se llama norma Euclídea de x, y se denota por $\|x\|$, a

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2},$$

donde $|x_i|$ es el módulo de x_i. Si $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$ y $b \in \mathbb{C}^m$, consideremos el sistema de ecuaciones lineales

$$Ax = b \tag{5.35}$$

donde $x \in \mathbb{C}^n$ es la incógnita. Se dice que el sistema (5.35) es consistente, es decir, que existe solución para x, si y solo si existe un vector $u \in \mathbb{C}^m$ tal que $Au = b$. Equivalentemente, el sistema 5.35 es consistente si y solo si $b \in R(A)$.

En el caso más sencillo en el que $m = n$ y A fuera invertible, la solución al sistema sería

$$x = A^{-1}b.$$

En otro caso, el sistema podría no tener solución o, si la tiene, no ser única.

Si el sistema (5.35) es incompatible y llamamos

$$r = b - Ax,$$

podría considerarse el problema de encontrar x tal que la norma de r, $\|r\| = \|b - Ax\|$ se acerque lo máximo posible a 0. La siguiente definición pone nombre a esto.

Definición 5.4.1. - Sean $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$ y $b \in \mathbb{C}^m$. Se dice que $u \in \mathbb{C}^n$ es solución por mínimos cuadrados del sistema $Ax = b$ si

$$\|Au - b\| \leq \|Av - b\|$$

para todo $v \in \mathbb{C}^n$.

Definición 5.4.2. - Si $Ax = b$ es un sistema de ecuaciones donde $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$ y $b \in \mathbb{C}^m$, una vector u se llama solución mínima por mínimos cuadrados de $Ax = b$ si u es solución por mínimos cuadrados de $Ax = b$ y $\|u\| < \|w\|$ para todo w solución por mínimos cuadrados.

El siguiente teorema muestra cómo influye la inversa de Moore-Penrose en la búsqueda de una solución aproximada del sistema.

Teorema 5.4.1. - *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$ y $b \in \mathbb{C}^m$. Entonces $A^\dagger b$ es la mínima solución por mínimos cuadrados de $Ax = b$.*

Demostración: Como
$$\|Ax-b\|^2 = \left\|(Ax - AA^\dagger b) \oplus (I - AA^\dagger)b\right\|^2 = \left\|Ax - AA^\dagger b\right\|^2 + \left\|(I - AA^\dagger)\right\|b,$$
entonces x es solución por mínimos cuadrados si y solo si x es solución del sistema $Ax = AA^\dagger b$. Pero las soluciones del sistema $Ax = AA^\dagger b$ son de la forma
$$x = A^\dagger(AA^\dagger b) \oplus (I - A^\dagger A)h = A^\dagger b \oplus (I - AA^\dagger)h.$$
Como $\|x\|^2 = \left\|A^\dagger b\right\|^2$, existe una mínima solución por mínimos cuadrados $x = A^\dagger b$.

□

El siguiente teorema puede ser útil en el caso en el que el problema no requiera que la solución por mínimos cuadrados sea la mínima:

Teorema 5.4.2. - *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$ y $b \in \mathbb{C}^m$. Los siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *u es solución por mínimos cuadrados de $Ax = b$.*
2. *u es solución de $Ax = AA^\dagger b$.*
3. *u es solución de $A^*Ax = A^*b$.*
4. *u es de la forma $A^\dagger b + h$ donde $h \in N(A)$.*

Demostración: Por el Teorema 5.4.1, se tiene que 1, 2 y 4 son equivalentes.

Supongamos que se cumple 1, es decir, $Au = b$. Multiplicando la expresión anterior por A^* por la izquierza se obtiene que $A^*Au = A^*b$ y, por tanto, 3 se cumple.

Por otro lado, supongamos que se verifica 3, es decir, $A^*Au = A^*b$. Multiplicando la expresión por $A^{*^\dagger}$ por la izquierza, se obtiene $Au = AA^\dagger b$ y se deduce que 3 implica 2.

□

El siguiente ejemplo muestra numéricamente el cálculo de la mínima solución por mínimos cuadrados de un sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$.

Ejemplo 5.4.1. Sea
$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ y } b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como $b \notin R(A)$, el sistema es incompatible. Vamos a calcular x tal que $\|b - Ax\|$ sea lo más cercano a 0, es decir la solución mínima por mínimos cuadrados. Por el Teorema 5.4.1, la mínima solución por mínimos cuadrados es $x = A^\dagger b$. Utilizando $A^\dagger$ calculada en el Capítulo 3 se obtiene que
$$x = A^\dagger b = \begin{bmatrix} \frac{7}{15} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{15} \\ \frac{-4}{15} & \frac{1}{3} & \frac{1}{15} \\ \frac{-4}{15} & \frac{1}{3} & \frac{1}{15} \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/15 \\ 1/15 \\ 1/15 \\ 1/5 \end{bmatrix}.$$

Bibliografía

[1] A. Ben-Israel and T.N.E.Greville. *Generalized Inverses: Theory and Applications.* Springer, 2003.

[2] A. Dresden. The fourteenth western meeting of The American Mathematical Society. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 26(9):385 – 396, 1920.

[3] L. E. Sjöberg. Arne Bjerhammar- A personal summary of his academic deeds. *Journal of Geodetic Science*, 11(1):1–6, 2021.

[4] A. Bjerhammar. *Theory of Errors and Generalized Matrix Inverses.* Elsevier Scientist Publisher Company, 1973.

[5] V. Cabezas Sánchez and F. Pablos Romo. Moore-Penrose inverse of some linear maps on infinite-dimensional vector spaces. *International Linear Algebra Society*, 36:570–586, 2022.

[6] S.L. Campbell and C.D. Meyer. *Generalized Inverses of Linear Transformations.* Society for Industrial and Applied Mathematics, 2009.

[7] R. Penrose. A generalized inverse for matrices. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 51(3):406–413, 1955.

[8] G. Wang, Y. Wei, and S. Qiao. *Generalized Inverses: Theory and Computation.* Springer, 2018.

[9] S.L. Campbell and C.D. Meyer, Jr. Continuity Properties of the Drazin Pseudoinverse. *Linear Algebra and its Applications*, 10(1):77–83, 1975.

[10] H. Chen and M. Sheibani. Generalized Drazin Inverses in a Ring. *Filomat*, 32:5289–5295, 2018.

[11] R. E. Cline and T.N.E. Greville. A Drazin Inverse for Rectangular Matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 29:53–62, 1980. Special Volume Dedicated to Alson S. Householder.

[12] J. Clotet Juan and M.D. M. Planas. Familias Diferenciables de Inversas de Drazin. *http://hdl.handle.net/2117/149*, 2005.

[13] M. P. Drazin. Pseudo-Inverses in Associative Rings and Semigroups. *The American Mathematical Monthly*, 65(7):506–514, 1958.

[14] J.Y. Vélez Cerrada. *Análisis de la perturbación de la inversa de Drazin de matrices, elementos en anillos y operadores acotados en espacios de Banach.* PhD thesis, Facultad de Informática(UPM), 2007.

[15] S.B. Malik and N.Thome. On a new generalized inverse for matrices of an arbitrary index. *Applied Mathematics and Computation*, 226:575–580, 2014.

[16] L. Meng. The DMP Inverse for Rectangular Matrices. *Filomat*, 31(19):6015–6019, 2017.

[17] F. Pablos Romo. On Drazin-Moore-Penrose Inverses of Finite Potent Endomorphisms. *Linear and Multilinear Algebra*, 69(4):627–647, 2021.

[18] S.L. Campbell, C.D. Meyer, Jr., and N.J. Rose. Applications of the Drazin Inverse to Linear Systems of Differential Equations with Singular Constant Coefficients. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 31(3):411–425, 1976.

[19] J.G. Areji. Moore-Penrose Pseudoinverse and Applications. African Uniersity of Science and Technology (AUST), 1972.

[20] J.C.A. Barata and M. Saleh Hussein. The Moore-Penrose Pseudoinverse: A Tutorial Review of the Theory. *Brazilian Journal of Physics*, 2012.

[21] C.R Rao and S. K. Mitra. Generalized inverse of a matrix and its applications. Proc. 6th Berkeley Sympos. math. Statist. Probab., Univ. Calif. 1970, 1, 601–620 (1972)., 1972.