Facultad de Ciencias

Geometría Esférica y Teoría de Convexos

Trabajo de Fin de Grado en Matemáticas

Autor:
Rosendo Santervás Abad
Tutora:
María Teresa Sancho de Salas

Julio 2024

VNiVERSiDAD
D SALAMANCA

FACULTAD DE CIENCIAS

GEOMETRÍA ESFÉRICA Y TEORÍA DE CONVEXOS

Trabajo de Fin de Grado en Matemáticas

Autor:
Rosendo Santervás Abad
Tutora:
María Teresa Sancho de Salas

Julio 2024

Certificado de los tutores TFG Grado en Matemáticas

D. María Teresa Sancho De Salas, profesora del Departamento de Algebra de la Universidad de Salamanca,

HACEN CONSTAR:

Que el trabajo titulado "*Geometría Esférica y Teoría de Convexos*", que se presenta, ha sido realizado por D. Rosendo Santervás Abad, con DNI ****7917P y constituye la memoria del trabajo realizado para la superación de la asignatura Trabajo de Fin de Grado en Matemáticas en esta Universidad.

Salamanca, a fecha de firma electrónica.

SANCHO DE SALAS MARIA TERESA - 07840716Q

Firmado digitalmente por SANCHO DE SALAS MARIA TERESA - 07840716Q
Fecha: 2024.07.01 13:50:03 +02'00'

Fdo.: María Teresa Sancho de Salas

Indice general

Introducción

En los últimos tiempos se ha llevado a cabo el desarrollo de las distintas geometrías que hemos estudiado durante estos años en la universidad. En este trabajo aplicaremos la teoría de convexos a diferentes estructuras como espacios semilineales con su geometría lineal, la esfera con su geometría esférica y el espacio afín con la geometría afín.

Durante el primer capítulo, daremos una primera definición de la esfera sin una norma y después su estructura topológica, su estructura diferenciable y su estructura algebraica.

Durante el segundo capítulo, para desarrollar la teoría de convexos, vamos a sumergirnos en la geometría lineal para, desde la perspectiva lineal, construir los espacios semilineales. Aquí desarrollaremos las nociones básicas de los espacios semilineales, su estructura como espacio semilineal y la estructura de cara dentro de un espacio semilineal. También estudiaremos la dualidad entre espacios semilineales y la dualidad entre las caras.

A continuación, en el tercer capítulo, traduciremos el lenguaje lineal de los espacios semilineales a la geometría esférica. La traducción entre ambos la haremos mediante una correspodencia en la que un espacio semilineal corresponde con un convexo esférico:

$$\begin{array}{rcc} E_0 & \xrightarrow{\pi} & S(E) \\ e & \longmapsto & \langle e\rangle_+ = \pi(e) \\ S_0 & \longmapsto & \pi(S_0) \end{array}$$

donde $E_0 = E - \{0\}$ y $S(E)$ es lo que denominaremos como la esferificación de E.

Aquí tenemos una tabla de la correspondencia entre lenguaje lineal y lenguaje esférico:

Lenguaje lineal	**Lenguaje esférico**
Espacio vectorial de dimensión $n+1$	Esfera de dimensión n
Subespacio vectorial de dimensión k	Subvariedad esférica de dimensión $k-1$
Subespacio vectorial de dimensión 2	Circunferencia
Semirrecta	Un punto
Recta	Un punto y su opuesto
Espacio semilineal generado por 2 vectores lin ind	Arco que une dos puntos
Espacio lineal generado por 2 vectores lin ind	Circunferencia que une dos puntos
Semiespacio (cerrado)	Hemisferio (cerrado)

En este capítulo también desarrollaremos el estudio entre la esfera, su esfera dual y sus convexos esféricos mediante las nociones del espacio semilineal. Aquí tenemos una tabla de la correspondencia entre la esfera y su esfera dual:

Esfera $\mathbf{S(E)}$	**Esfera dual $\mathbf{S(E^*)}$**
Hemisferio cerrado de $S(E)$	Punto de $S(E^*)$
$K \subseteq S(E)$ convexo	$K^V = \{$hemisferios que pasan por $K\} \subseteq S(E^*)$ convexo
$K =$ Envolvente convexa de unos puntos	$K^V =$ Envolvente convexa de unos puntos
$K =$ Cono poliédrico de dimensión n	$K^V =$ Cono poliédrico de dimensión n
$K_1 \subseteq K_2$	$K_2^V \subseteq K_1^V$
Mínimo convexo que contiene a K_1 y K_2	$K_1^V \cap K_2^V$
$K_1 \cap K_2$	Mínimo convexo que contiene a K_1^V y K_2^V

Y por último, en el capítulo final traduciremos lo visto de la esfera al espacio afín. Siempre hemos visto el espacio afín como $(\mathbb{A}^n, E)$ un conjunto de puntos y sus vectores directores, pero para traducir las cosas de la esfera al espacio afín vamos a desarrollar la **compatificación canónica del espacio afín mediante esferas** que nos da otra forma de verlo como una esfera y un punto de la esfera dual $(S(\overline{E}), \omega_\infty \in S(\overline{E}^*))$.

Lenguaje esférico	**Lenguaje afín**
H_ω hemisferio asociado a ω	$\mathbb{A}_n$ espacio afín
Ker ω, nucleo de ω	E espacio director
$S_\infty = S(E) \subseteq S(\bar{E})$	Puntos del infinito
$[p,q]$ arco	$[p,q]$ segmento
Subvariedad esférica	Subvariedad afín

Aquí también desarrollaremos la dualidad entre los convexos del espacio afín y su convexo dual dentro del espacio afín dual.

También vamos a resaltar los dos teoremas más importantes de este estudio y sus traducciones.

Los teoremas en espacios semilineales dicen:
- Sea un espacio semilineal fuertemente convexo y cerrado, entonces está generado por sus aristas.
- Todo espacio semilineal cerrado es la intersección de los semiespacios que lo contienen.

Esto traducido a la esfera se corresponde con:
- Sea un convexo esférico fuertemente convexo y cerrado, entonces es la envolvente convexa de sus vértices.
- Todo convexo esférico cerrado es la intersección de los hemisferios que lo contienen.

Y por último, esto traducido al espacio afín se corresponde con:
- Sea un convexo afín fuertemente convexo y cerrado, entonces es la envolvente convexa de sus vértices y de sus aristas que son semirrectas.
- Todo convexo afín cerrado es la intersección de los semiespacios que lo contienen.

Capítulo 1

La Esfera

En este capítulo vamos a construir la esfera de forma intrínseca sin necesidad de ninguna norma. Y a continuación le daremos su estructura topológica, su estructura diferenciable y su estructura algebraica con la cual vamos a dar una primera noción de la estructura convexa de la esfera.

1.1. Definición intrínseca de la esfera

Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión $n+1$, es decir, $E \simeq \mathbb{R}^{n+1}$ como espacio vectorial.

Definición 1.1.1. Llamaremos semirrecta de E generada por $e \in E$ con $e \neq 0$ a $\langle e \rangle_+ = \{\lambda e / \lambda \geq 0\}$.

Definición 1.1.2. La esfera de dimensión n podemos definirla: {Conjunto de semirrectas que pasan por el origen de E}={$\langle e \rangle_+$ con $e \neq 0$}.

Para construir este conjunto al que llamaremos **Esferificación de E** usaremos una aplicación de paso al cociente de $E - \{0\}$ a $S_n(E)$:

$$\begin{aligned} \pi \colon E - \{0\} &\longrightarrow S_n(E) \\ e &\longmapsto \pi(e) = \langle e \rangle_+ \end{aligned}$$

donde $S_n(E) = E - \{0\}/\sim$ y teniendo la relación de equivalencia $e \sim e' \iff \exists \lambda > 0 / e' = \lambda e$

Observación 1.1.3. Si $0 \in Y \subseteq E$, entonces llamaremos $\pi(Y) = \pi(Y - \{0\})$

Definición 1.1.4. Si $P = \langle e \rangle_+ \in S_n(E)$, llamaremos opuesto de P a $-P = \langle -e \rangle_+$.

Definición 1.1.5. Llamaremos circunferencia a la esfera de dimensión 1 y llamaremos esfera de dimensión 0 a un punto y su opuesto.

1.2. Estructura topológica

A continuación vamos a ver su estructura topológica definiendo los abiertos y cerrados en la esfera y así darle una topología.

En $E - \{0\}$ usaremos la topología dada en $\mathbb{R}^{n+1}$ por una norma vectorial o topología identificándola con E mediante un isomorfismo lineal.
En $S_n(E)$ usaremos la topología cociente dada por π :

Definición 1.2.1. $Y \subseteq S_n(E)$ es cerrado (abierto) $\longleftrightarrow \pi^{-1}(Y)$ es cerrado (abierto).

A continuación vamos a ver que esta definición de esfera es homeomorfa a cualquier esfera dada por una norma.

Sea $(E, \|\|)$ un espacio normado.

Definición 1.2.2. Una norma vectorial $\|\|$ es una aplicación de $E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ que verifica:
1-. $\|e\| \geq 0$ y si $\|e\| = 0 \Leftrightarrow e = 0$
2-.$\|\lambda e\| = |\lambda|\|e\|$
3-.$\|e_1 + e_2\| \leq \|e_1\| + \|e_2\|$
$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall e, e_1, e_2 \in E$.

Definición 1.2.3. Dado un espacio normado $(E, \|\|)$ llamaremos esfera a
$S_n = \{e \in E / \|e\| = 1\}$.

Observación 1.2.4. Por ser S_n un subespacio cerrado y acotado de E, se tiene que S_n es un espacio topológico compacto y separado.

Teorema 1.2.5. La aplicación $\pi : S_n \to S_n(E)$ es un homeomorfismo y por tanto $S_n(E)$ es un espacio topológico compacto y separado.

Demostración. En primer lugar vamos a ver que es un isomorfismo.
Veamos si π es inyectiva:
Sean $e, e' \in S_n$ y tenemos que $\pi(e) = \pi(e')$ entonces veamos que $e = e'$. $\pi(e) = \langle e \rangle_+$ y $\pi(e') = \langle e' \rangle_+$, luego entonces $\langle e \rangle_+ = \langle e' \rangle_+$. Por tanto tenemos que $e' = \lambda e$ con $\lambda > 0$. Ahora si calculamos $\|e'\| = \|\lambda e\| = |\lambda|\|e\|$ como $e, e' \in S_n$, $\|e'\| = 1$ y $\|e\| = 1$ entonces nos queda que $\lambda = 1$, entonces $e' = e$.
Ahora para ver que es homeomorfismo tenemos que ver que π y π^{-1} son continuas. π^{-1} que la denotaremos f viene dada por $f(\langle e \rangle_+) = \frac{e}{\|e\|}$ y tenemos que es continua y π lo es por que en $S_n(E)$ hemos usado la topología cociente. También es fácil ver que $\pi \circ f = Id$ y $f \circ \pi = Id$, luego resulta que π es un homeomorfismo. $\square$

Las esferas de diferentes dimensiones tenemos que son si $n = 2$ tenemos la esfera usual $S_2(E)$, si $n = 1$ tenemos la circunferencia $S_1(E)$ y si $n = 0$ tenemos que se trata de dos puntos $S_0(E) = \{p, -p\}$ (uno el opuesto del otro).

1.3. Estructura diferenciable

Ahora vamos a desarrollar la estructura diferenciable de la esfera para poder ver que se puede corresponder con la esfera unidad de E con la métrica euclídea.

Sea $\omega \in E^*$ con $\omega \neq 0$, $\omega : E \to \mathbb{R}$ es una función continua y por tanto podemos definir $U_\omega = \{e \in E/\omega(e) > 0\}$ que es un abierto de E. Ahora llamaremos $V_\omega = \pi(U_\omega)$ que es un abierto de $S_n(E)$ ya que $\pi^{-1}(\pi(U_\omega)) = U_\omega$.
También denotaremos $W_\omega = \{e \in E/\omega(e) = 1\}$.

Definición 1.3.1. Llamaremos abierto afín asociado a ω a V_ω. Lo llamaremos así por que se identifica canónicamente al espacio afín W_ω que es un hiperplano de E.

Proposición 1.3.2. La aplicación continua $\pi = \pi_\omega : W_\omega \to V_\omega$ es un homeomorfismo.

Demostración. Primero veamos que la aplicación $f_\omega : V_\omega \to W_\omega$ dada por $f_\omega(\langle e \rangle_+) = \frac{e}{\omega(e)}$ es la inversa de π:
1)$f_\omega \circ \pi = Id : f_\omega \circ \pi(e) = f_\omega(\langle e \rangle_+) = \frac{e}{\omega(e)} = e$ porque $e \in W_\omega$.
2)$\pi \circ f_\omega = Id : \pi \circ f_\omega(\langle e \rangle_+) = \pi(\frac{e}{\omega(e)}) = \langle \frac{e}{\omega(e)} \rangle_+ = \langle e \rangle_+$ porque $\omega(e) > 0$. □

Los abiertos $\{V_\omega\}_{\omega \in E^*}$ forman un recubrimiento por abiertos afines de $S_n(E)$, por tanto tomando un sistema de coordenadas $(x_0, x_1, ..., x_n)$ en E, podemos tomar un número finito de dichos abiertos $S_n(E) = \bigcup_{i=0}^{n} (V_{x_i} \cup V_{-x_i})$.
Ahora veamos que las cartas $\{V_\omega, f_\omega\}_{\omega \in E^*}$ forman un atlas y por tanto dotan a $S_n(E)$ de una estructura diferenciable.
Tenemos que probar que dadas dos $\omega, \omega' \in E^*$ se tiene que
$f_{\omega'} \circ f_\omega^{-1} : f_\omega(V_\omega \cap V_{\omega'}) \to f_{\omega'}(V_\omega \cap V_{\omega'})$ tiene que ser diferenciable:
Sea $e \in f_\omega(V_\omega \cap V_{\omega'})$, es decir, $\omega(e) = 1$ y $\omega'(e) > 0$. Sabemos que $f_\omega^{-1} = \pi_\omega$. Luego
$f_{\omega'} \circ f_\omega^{-1}(e) = f_{\omega'}(\langle e \rangle_+) = \frac{e}{\omega'(e)}$ que es diferenciable porque ω' lo es.

Teorema 1.3.3. $S_n(E)$ es difeomorfa a la esfera unidad dada por una métrica euclídea en E.

Demostración. Solo hay que probar que si S_n es la esfera unidad dada por una métrica euclídea en E, entonces la aplicación $\pi : S_n \to S_n(E)$ es diferenciable.
Para verlo tenemos que la aplicación $f_\omega \circ \pi : U_\omega \to W_\omega \subseteq U_\omega$ es diferenciable pues es la aplicación $e \to \frac{e}{\omega(e)}$ y como f_ω es una función de una carta, entonces la aplicación π es diferenciable. □

1.4. Estructura algebraica y convexa

Ahora vamos a estudiar la estructura algebraica de la esfera y con ellos dar una primera intuición de la estructura convexa de la esfera que completaremos después de dar los espacios semilineales.

Dentro de la esfera tenemos una aplicación natural, $\sigma : S_n(E) \to S_n(E)$ que manda $p = \langle e \rangle_+ \mapsto -p = \langle -e \rangle_+$.

Definición 1.4.1. Llamaremos subvariedad esférica de $S_n(E)$ de dimensión k al cerrado $\pi(E') = S_k(E') \subseteq S_n(E)$ siendo E' un subespacio vectorial de E de dimensión $k+1$.

Llamaremos $S_0 = \{p, -p\}$, S_1 a la circunferencia que pasa por P_1 y $P_2 \neq -P_1$ a la mínima subvariedad esférica que pasa por P_1 y P_2, es decir, $S(\langle e_1, e_2 \rangle)$ siendo $P_1 = \langle e_1 \rangle_+$ y $P_2 = \langle e_2 \rangle_+$ y hiperesfera a las subvariedades esféricas de dimensión $n-1$ (S_{n-1}).

Teorema 1.4.2. $Y \subseteq S(E)$ es una subvariedad esférica $\Longleftrightarrow \forall\ P_1, P_2 \in Y$, la circunferencia que pasa por P_1 y P_2 está contenida en Y.

Demostración. Hay que probar que $\pi^{-1}(Y)$ es un subespacio vectorial:
Si $e_1, e_2 \in \pi^{-1}(Y)$, entonces $P_1 = \langle e_1 \rangle_+$, $P_2 = \langle e_2 \rangle_+ \in Y$. Luego la circunferencia que pasa por P_1 y P_2 es $\pi(\langle e_1, e_2 \rangle) \subseteq Y$. Luego $\langle e_1, e_2 \rangle \subseteq \pi^{-1}(Y)$. $\square$

Definición 1.4.3. Llamaremos arco que une $P = \langle e_1 \rangle_+$ y $Q = \langle e_2 \rangle_+$ a $[P, Q] = \pi(\langle e_1, e_2 \rangle_+)$ donde $\langle e_1, e_2 \rangle_+ = \{\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 / \lambda_1, \lambda_2 \geq 0\}$. En particular tenemos que $[P, -P] = \{P, -P\} = S_0$.

Definición 1.4.4. $K \subseteq S_n(E)$ es un convexo esférico si $\forall P_1, P_2 \in K$ se verifica que $[P_1, P_2] \subseteq K$. En particular, las subvariedades esféricas son convexos.

Definición 1.4.5. Llamaremos envolvente convexa de $p_0, ..., p_n \in S_n$ al mínimo convexo que los contiene. Lo denotaremos $[p_0, ..., p_n]$.

Coordenadas homogéneas de la esfera

Sea $e_0, e_1, ..., e_n$ una base de E entonces tenemos los puntos de la esfera dados por esos vectores $P_0 = \langle e_0 \rangle_+, P_1 = \langle e_1 \rangle_+, ..., P_n = \langle e_n \rangle_+$. El punto unidad U debe pertenecer a $[P_0, P_1, ..., P_n]$.

Definición 1.4.6. Llamaremos sistema de referencia de $S_n(E)$ a $\{P_0, ..., P_n; U\}$ que son $n+2$ puntos de modo que $n+1$ de ellos no están en una esfera de dimensión $n-1$ y $U \in [P_0, ..., P_n]$.

Definición 1.4.7. Sea $(P_0, P_1, ..., P_n; U)$ un sistema de referencia. Diremos que $e_0, e_1, ..., e_n$ es una base normalizada respecto de este sistema si $P_0 = \langle e_0 \rangle_+, ..., P_n = \langle e_n \rangle_+$ y $U = \langle e_0 + ... + e_n \rangle_+$.

Lema 1.4.8. Sea $\bar{e}_0, ..., \bar{e}_n$ otra base normalizada respecto al mismo sistema de referencia, entonces $\bar{e}_i = \lambda e_i$ con $i = 0, ..., n$ y para algún $\lambda > 0$.

Demostración. Tenemos que $P_i = \langle e_i \rangle_+ = \langle \bar{e}_i \rangle_+$, se tiene que $\bar{e}_i = \lambda_i e_i$ para algún $\lambda_i > 0$. Además $U = \langle e_0 + ... + e_n \rangle_+ = \langle \bar{e}_0 + ... + \bar{e}_n \rangle_+$. Luego existe $\mu > 0$ tal que $e_0 + ... + e_n = \mu(\bar{e}_0 + ... + \bar{e}_n) = \mu\lambda_0 e_0 + ... + \mu\lambda_n e_n$, es decir, $\lambda_i = \frac{1}{\mu}$. □

Definición 1.4.9. Diremos que $P \in S_n(E)$ tiene coordenadas homogéneas $\lambda(x_0, ..., x_n)$ $(\lambda > 0)$ respecto del sistema de referencia $P_0, P_1, ..., U$ si $P = \langle x_0 e_0 + ... + x_n e_n \rangle_+$ siendo $e_0, ..., e_n$ una base normalizada.

1.5. Esfera dual

Ahora vamos a dar la noción de esfera dual y la teoría de dualidad que también desarrollaremos una vez visto los espacio semilineales.

Definición 1.5.1. Si $S(E)$ es una esfera, llamaremos esfera dual a $S(E^*)$

Teniendo ω una forma lineal, denotaremos $S(\text{Ker } \omega)$ a la esferificación de su núcleo. $S(\text{Ker } \omega)$ se trata de una hiperesfera y divide a la esfera en dos partes.

Definición 1.5.2. Llamaremos hemisferio asociado a ω al subconjunto $H_\omega = \{\langle e \rangle_+ \in S(E) / \omega(e) \geq 0\}$ que se trata de una de las dos partes que separa $S(\text{Ker } \omega)$.

Definición 1.5.3. Llamaremos hemisferio opuesto asociado a ω a $H_{-\omega} = \{\langle e \rangle_+ \in S(E) / \omega(e) \leq 0\}$.

Teorema 1.5.4. Hay una correspondencia biunívoca entre los puntos de $S(E^*)$ y los hemisferios de $S(E)$, es decir, dado $\langle \omega \rangle_+ \in S(E^*)$ le hacemos corresponder el hemisferio $H_\omega = \{\langle e \rangle_+ \in S(E) / \omega(e) \geq 0\}$.

Corolario 1.5.5. Como $E \simeq (E^*)^*$ se tiene que los puntos de $S(E)$ se corresponden biunívocamente con los hemisferios de $S(E^*)$.

Capítulo 2

Espacios Semilineales

En este capítulo vamos a definir los espacios semilineales y todas sus partes y propiedades. Veremos también la estructura de caras de un espacio semilineal y la dualidad entre espacios semilineales y entre las caras.

2.1. Espacio semilineal

Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n.

Definición 2.1.1. Diremos que $S \subseteq E$ es un espacio semilineal si es cerrado por combinaciones lineales positivas, es decir, si $\forall\ \lambda, \mu \geq 0$ y $e_1, e_2 \in S$ se tiene que $\lambda e_1 + \mu e_2 \in S$.

Definición 2.1.2. Llamaremos dimensión del espacio semilineal S a la dimensión del subespacio vectorial $S - S = \{s_1 - s_2 / s_1, s_2 \in S\}$.

En general, tomaremos espacios semilineales cerrados salvo que se indique lo contrario.

Definición 2.1.3. Dados dos espacios semilineales $S, S' \subseteq E$, llamaremos suma de S y S' a $S + S' = \{s + s' / s \in S, s' \in S'\}$ y opuesto de S a $-S = \{-s / s \in S\}$.

Proposición 2.1.4. Sean $S_1, S_2 \subseteq E$ dos espacios semilineales. Entonces $S_1 + S_2$,$-S_1$ y $S_1 \cap S_2$ son espacios semilineales.

$S_1 + S_2$ es el mínimo subespacio semilineal que contiene a S_1 y a S_2.
$S_1 \cap S_2$ es el máximo subespacio semilineal contenido en S_1 y S_2.

$S_1 + S_2$ puede no ser cerrado. Por ejemplo, si tomamos $S_1 =$ cono y $S_2 =$ recta que pasa por una generatriz del cono.

2.2. Sistema de generadores de un espacio semilineal

Definición 2.2.1. Sea $X \subseteq E$ un subconjunto de E. Llamaremos espacio semilineal generado por X al mínimo espacio semilineal que contiene a X, es decir,
$\langle X \rangle_+ = \{\lambda_1 e_1 + ... + \lambda_k e_k / \lambda_1, ..., \lambda_k \geq 0, e_1, ..., e_k \in X\}$.

Definición 2.2.2. Diremos que X es un sistema de generadores de S si $\langle X\rangle_+ = S$. Diremos que el sistema es mínimo cuando para todo subconjunto $Y \subsetneq X$ se tiene que $\langle Y\rangle_+ \neq S$. Si $X = \{e_1, ..., e_n\}$ es finito, entonces $\langle X\rangle_+ = \langle e_1, ..., e_n\rangle_+$.

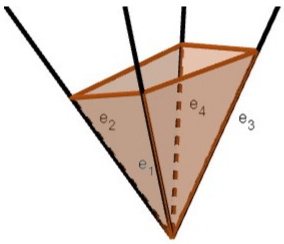
Definición 2.2.3. Diremos que $Y \subseteq E$ son semilinealmente independientes si Y siendo un sistema mínimo de generadores de $\langle Y\rangle_+$ se verifica que si $\lambda_1 e_1 + ... + \lambda_k e_k = 0$ para $\lambda \geq 0$ y $e_i \in Y$, entonces $\lambda_1 = ... = \lambda_k = 0$. En particular, $e_1, ..., e_n$ son semilinealmente independientes si se verifica que $e_i \notin \langle e_1, ..., \overset{\wedge}{e_i}, ..., e_n\rangle_+ \ \forall i$.

Definición 2.2.4. Diremos que un espacio semilineal es finito generado cuando tiene un número finito de generadores, es decir, $S = \langle e_1, ..., e_n\rangle_+$.

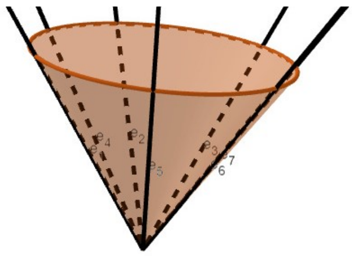
Observación 2.2.5. Sea $E' \subseteq E$ un subespacio vectorial. Podemos considerarlo un espacio semilineal finito generado de esta manera $E' = \langle e_1, ..., e_k, -e_1, ..., -e_k\rangle_+$ donde $e_1, ..., e_k$ es una base de E.

Ejemplos de sistemas de generadores

1) El espacio semilineal generado por n vectores forma un cono poliédrico con vértice el origen y de base un polígono de n lados. Por ejemplo si $n = 4$ tenemos $S = \langle e_1, e_2, e_3, e_4\rangle_+$, tendría forma de un cono poliédrico con vértice el origen y base un cuadrilátero.



2) El espacio semilineal generado por infinitos vectores, $S = \{\text{puntos de la circunferencia}\}$, tendría forma de cono con vértice el origen y de base un círculo.



2.3. Conceptos básicos de un espacio semilineal

Sea S un espacio semilineal del espacio vectorial E.

Definición 2.3.1. Llamaremos vértice de S a $V_S = S \cap -S = \{s \in S / -s \in S\}$ que es el máximo subespacio vectorial contenido en S.

Definición 2.3.2. Llamaremos espacio vectorial asociado a S a
$E_S = S + (-S) = \{v_1 - v_2 / v_1, v_2 \in S\}$ que es el mínimo subespacio vectorial que contiene a S.

Definición 2.3.3. Llamaremos dimensión de S a (s,k) con $\dim V_S = s$ y $\dim E_S = k$. También pondremos que $\dim S = \dim E_S$. Tenemos que esta definición y la del comienzo del capítulo son equivalentes.

Lema 2.3.4. Un espacio semilineal S de dimensión (s,k) es un espacio vectorial $\Longleftrightarrow s = k$.

Demostración. $\Rightarrow$) Si S es un espacio vectorial entonces el mínimo espacio vectorial que lo contiene es él mismo, luego $S = E_S$. Por otro lado, el máximo contenido en S también sería él mismo, luego $V_S = S$. Por tanto,$\dim V_S = s = k = \dim E_S$.
$\Leftarrow$) Si $s = k$ tenemos que $V_S = E_S$, entonces $V_S = E_S = S$, luego es un espacio vectorial. $\square$

Definición 2.3.5. Toda forma lineal $\omega : E \longrightarrow \mathbb{R}$ define un espacio semilineal cerrado,
$H_\omega = \{e \in E / \omega(e) \geq 0\}$ que llamaremos semiespacio asociado a ω.

Definición 2.3.6. Diremos que un espacio semilineal S es fuertemente convexo si $V_S = 0$, es decir, no contiene rectas.

Definición 2.3.7. Un cono poliédrico es un espacio semilineal que es fuertemente convexo y finito generado.

Definición 2.3.8. Sea S y S' dos espacios semilineales. Diremos que una aplicación
$T : S \longrightarrow S'$ es una aplicación semilineal si $T(\lambda e + \mu e') = \lambda T(e) + \mu T(e')$ $\forall \lambda, \mu \geq 0$ y $e, e' \in S$. Si T es además biyectiva diremos que es un isomorfismo.

Por ejemplo, tenemos que si $T : E_1 \longrightarrow E_2$ es lineal, entonces, en particular, es semilineal ya que si tenemos $e, e' \in S_1$ y tenemos que se verifica que $T(\lambda e + \mu e') = \lambda T(e) + \mu T(e')$ $\forall \lambda, \mu$, en particular se verifica para $\lambda, \mu \geq 0$.
De modo análogo a como se prueba para subespacios vectoriales se tiene que:

Proposición 2.3.9. Sea $T : E \longrightarrow E'$ una aplicación lineal:
1) Si $S \subseteq E$ es un espacio semilineal, entonces $T(S)$ es un espacio semilineal.
2) Si $S' \subseteq E'$ es un espacio semilineal, entonces $T^{-1}(S')$ es un espacio semilineal.
3) Si $S \subseteq E$ es un espacio semilineal finito generado, entonces $T(S)$ es finito generado.

Demostración. 1) Para ver que $T(S)$ es un espacio semilineal vamos a calcular $T(\lambda e_1 + \mu e_2)$ con $\lambda, \mu \geq 0$ y $e_1, e_2 \in S$. Tenemos que por ser T lineal, $T(\lambda e_1 + \mu e_2) = \lambda T(e_1) + \mu T(e_2)$ y esto pertenece a $T(S)$ luego en particular tenemos una combinación lineal de parámetros positivos

que pertenece a $T(S)$, luego $T(S)$ es cerrado por combinaciones lineales positivas $\Rightarrow T(S)$ es un espacio semilineal.
2) Ahora queremos demostrar que $T^{-1}(S')$ es un espacio semilineal. Sean $e_1, e_2 \in T^{-1}(S')$ entonces esto significa que $T(e_1), T(e_2) \in S'$. Como tenemos que T es lineal se verifica que $\lambda T(e_1) + \mu T(e_2) = T(\lambda e_1 + \mu e_2) \in S'$ y esto nos dice que $\lambda e_1 + \mu e_2 \in T^{-1}(S')$ y por tanto, $T^{-1}(S')$ es un espacio semilineal.
3) Tenemos que S es finito generado, por tanto, $S = \langle e_1, ..., e_n \rangle_+$. Ahora como T es lineal, tenemos que $T(S) = \langle T(e_1), ..., T(e_n) \rangle_+$ por eso $T(S)$ es finito generado. $\square$

Proposición 2.3.10. Todo espacio semilineal S descompone de modo único salvo isomorfismos en suma directa de un subespacio vectorial y un espacio semilineal fuertemente convexo: $S = V_S \oplus S'$ donde $V_{S'} = 0$.

Demostración. Sea $S \subseteq E_S$ y L un suplementario de V_S en E_S, es decir, $E_S = V_S \oplus L$. Se tiene que $S' = L \cap S$, verifica que $V_{S'} = V_S \cap L = 0$ y $S = V_S \oplus S'$ pues si $s \in S$, entonces $s = v + s'$ donde $v \in V_S$ y $s' \in L$. Como $s' = s - v$, también esta en S.
Si $S = V \oplus S''$ es otra descomposición, entonces es fácil ver que $V_{(V \oplus S')} = V$ y la aplicación lineal $p : S'' \longrightarrow S'$ dada por $p(s'') = s' \in S'$ si $s'' = v + s$ para algún $v \in V_S = V$ es un isomorfismo. $\square$

Corolario 2.3.11. Si S es finito generado entonces $S = V_S \oplus S'$ donde S' es un cono poliédrico.

2.4. Espacios semilineales de dimensión 1 y 2

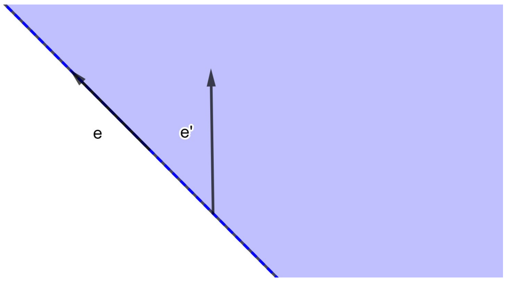
A continuación vamos a estudiar los espacios semilineales de dimensión 1 y 2. Como son finitos podemos enumerarlos uno a uno para ver su estructura.

Espacios semilineales de dimensión 1

Sea dim E=1 y $S \subseteq E$ un espacio semilineal de dimensión (s, k) donde $0 \leq s < k \leq 1$. Luego la única posibilidad es que $s = 0$ y $k = 1$ entonces para algún $e \in E$ se tiene que $S = \langle e \rangle_+$.

Espacios semilineales de dimensión 2

Sea dim E=2 y $S \subseteq E$ un espacio semilineal de dimensión (s,k) donde $0 \leq s < k \leq 2$. Tenemos 3 casos:
-Si $k=1$, S está contenido en un espacio lineal de dimensión 1 luego estamos en el caso de dimensión 1.
- Si $s=1$ y $e \in S$ con $e \neq 0$ tenemos que si $S = V_S \oplus S'$ entonces tenemos que dim V_S=1 con $V_S = \langle e \rangle$. Por otro lado, la dim S'=1 y S' no tiene contenido ningún espacio vectorial, luego $S' = \langle e' \rangle_+$. Por tanto tenemos que en este caso $S = \langle e \rangle + \langle e' \rangle_+$ es un semiplano.

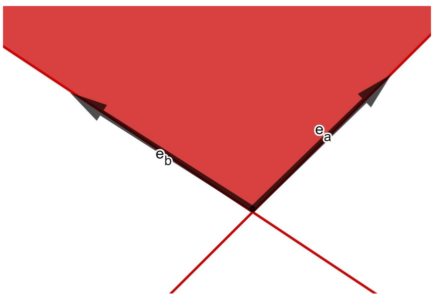


-Ahora tenemos el caso en el que $V_S = \{0\}$ y $E_S = E$. Sean $e_1, e_2 \in S$ linealmente independientes. Consideremos la circunferencia $S^1 = \{e_t = cos(t)e_1 + sen(t)e_2 \ / \ 0 \leq t \leq 2\pi\}$. Se verifica que si $e_t, e_{t'} \in S$ y $0 \leq t < u < t' \leq \pi$, entonces $e_u \in S$. Lo mismo para el caso en el que $\pi \leq t < u < t' \leq 2\pi$.
Entonces solo tenemos que probar que si $e_u = \lambda e_t + \mu e_{t'}$, entonces $\lambda, \mu \geq 0$. Vamos a calcular los valores de λ, μ:

$$\lambda = \frac{\begin{vmatrix} cos(u) & cos(t') \\ sen(u) & sen(t') \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} cos(t) & cos(t') \\ sen(t) & sen(t') \end{vmatrix}} = \frac{cos(u) \cdot sen(t') - sen(u) \cdot cos(t')}{cos(t') \cdot sen(t) - cos(t') \cdot sen(t)} = \frac{sen(t'-u)}{sen(t'-t)} \geq 0$$

$$\mu = \frac{\begin{vmatrix} cos(t) & cos(u) \\ sen(t) & sen(u) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} cos(t) & cos(t') \\ sen(t) & sen(t') \end{vmatrix}} = \frac{cos(t) \cdot sen(u) - sen(t) \cdot cos(u)}{cos(t') \cdot sen(t) - cos(t') \cdot sen(t)} = \frac{sen(u-t')}{sen(t'-t)} \geq 0$$

Sea $a = sup_{e_t \in S, t \in [0,\pi]}\{t\}$ y $b = inf_{e_t \in S, t \in [\pi, 2\pi]}\{t\}$ y $\omega_a, \omega_b \in E^*$ la base dual de e_a, e_b, luego tenemos que $S = \{e_t\}_{a \leq t \leq b} = \langle e_a, e_b \rangle_+ = H_{\omega_a} \cap H_{\omega_b}$ donde $H_{\omega_a} = \{e \in E / \omega_a(e) \geq 0\}$ y $H_{\omega_b} = \{e \in E / \omega_b(e) \geq 0\}$.



Es importante recalcar que en el caso de que la dimensión de S sea 1 o 2, todo espacio semilineal cerrado es finito generado.

2.5. Caras de un espacio semilineal

Definición 2.5.1. Diremos que un espacio semilineal $C \subseteq S$ es una cara de S si verifica $v_1, v_2 \in S$ y $v_1 + v_2 \in C \Rightarrow v_1$ y $v_2 \in C$.

Llamaremos aristas a las caras de dimensión 1 de S e hipercaras a las caras de dimensión dim S -1.

Lo que diferencia a los espacios semilineales de los espacios lineales es la posesión de caras. En el caso de los espacios lineales la condición de cara la cumplen solo en el caso de considerar todo el espacio pero en el caso de los espacios semilineales tienen caras dentro de ellos sin considerar el total.

Proposición 2.5.2. Sea S un espacio semilineal y V_S su vértice, entonces:
1) Si C_1 es una cara de S y C_2 es una cara de C_1 entonces C_2 es una cara de S.
2) Si V_S es el vértice de S entonces es una cara de S. Además toda cara de S contiene a V_S y por tanto es la mínima de S.
3) Si $T : E \to E'$ es una aplicación lineal y C es una cara del espacio semilineal S de E', entonces $T^{-1}(C)$ es una cara de $T^{-1}(S)$.

Demostración. 1) Cogemos $a, b \in S$ que verifiquen que $a + b \in C_2$ entonces como C_2 es cara de C_1 se verifica que $a, b \in C_1$ pero en particular tenemos que $a, b \in S$, por tanto tenemos que $a, b \in C_2$ por tanto C_2 es cara de S.
2) Tenemos que ver que V_S es cara de S, entonces sean $s, s' \in S$ tal que $s + s' \in V_S$ entonces se tiene que demostrar que $s, s' \in V_S$. Como $s + s' \in V_S$ entonces $-(s + s') \in S$. Por tanto, tenemos que $-s = -(s + s') + s' \in S$ ya que $-(s + s'), s' \in S$ entonces de aquí obtenemos que $s \in V_S$. Y para s' podemos argumentar de forma similar que $-s' = -(s + s') + s \in S$ ya que $-(s + s'), s \in S$ entonces de aquí obtenemos que $s' \in V_S$.
Para demostrar que V_S es la mínima cara de S cojamos un $s \in V_S$ que verifica que $-s \in S$, entonces $s + (-s) = 0 \in C$ luego $s \in C$ y por tanto, V_S es cara del resto de caras de S.
3) En primer lugar , por el teorema 3.3.9 $T^{-1}(S)$ es un espacio semilineal, y queremos ver que $T^{-1}(C)$ es una cara de $T^{-1}(S)$. Sean $s, s' \in T^{-1}(S)$ que verifican que $s + s' \in T^{-1}(C)$ y entonces vamos a probar que $s, s' \in T^{-1}(C)$. Como $s + s' \in T^{-1}(C)$ tenemos que $T(s + s') \in C$. Ahora como T es lineal, $T(s + s') = T(s) + T(s') \in C$ y como C es cara de S tenemos que $T(s), T(s') \in C$ y por tanto, $s, s' \in T^{-1}(C)$. □

Proposición 2.5.3. Sea S un espacio semilineal que es fuertemente convexo, y $Y \subseteq S$ es un sistema mínimo de generadores de S.
$\langle e \rangle_+$ es una arista de $S \iff \lambda e \in Y$ para algún $\lambda > 0$.

Demostración. $\Leftarrow$) Vamos a ver que si Y es un sistema mínimo de generadores y $e_i \in Y$, entonces $\langle e_i \rangle_+$ es una arista de S.
Sea $e, e' \in S$ tal que $e + e' \in \langle e_i \rangle_+$ y veamos si $e, e' \in \langle e_i \rangle_+$. Se tiene que $e = \sum_j \lambda_j e_j$ y $e' = \sum_j \mu_j e_j$ donde $e_j \in Y$ y $\lambda_j, \mu_j \geq 0$.
$e + e' = \sum_j (\lambda_j + \mu_j) e_j = \rho e_i$ donde $\rho \geq 0$.

Si $\lambda_i + \mu_i < \rho$, entonces $e_i = \sum_{j \neq i} \frac{\lambda_j + \mu_j}{\rho - \lambda_i - \mu_i} e_j$ y $Y - \{e_i\}$ generaría S.
Si $\lambda_i + \mu_i \geq \rho$, entonces $\sum_{i \neq j} (\lambda_j + \mu_j) e_j + (\lambda_i + \mu_i - \rho) e_i = 0$.
Por ser $V_S = \{0\}$, se tiene que $\lambda_j + \mu_j = 0$ y $\lambda_i + \mu_i - \rho = 0$. De aquí que $\lambda_j = \mu_j = 0$ y $e = \lambda_i e_i$ y $e' = \mu_i e_i$, por tanto $e, e' \in \langle e_i \rangle_+$.
$\Rightarrow$) Si $C = \langle e \rangle_+$ es una arista, $e = \sum_{e_i \in Y} \lambda_i e_i$. Luego $\lambda_i e_i \in C$ entonces $\langle e_i \rangle_+ = \langle e \rangle_+$. $\square$

Teorema 2.5.4. Sea S fuertemente convexo y cerrado. Entonces S está generado por sus aristas.

Teorema 2.5.5. Sea S un espacio semilineal.
a) $S = \sum_i C_i$ donde C_i son las caras de dimensión dim V_S $+1$.
b) Si S es un espacio semilineal finito generado de dimensión (s, k) entonces tiene un número finito de caras y está generado por los caras de dimensión $k + 1$.

2.6. Dualidad de los espacios semilineales

Sea $S \subseteq E$ un espacio semilineal y sea $E^* = \{\omega : E \to \mathbb{R} \,/ \omega \text{ es lineal}\}$ el espacio dual de E. Cada $\omega \in E^*$ define un semiespacio cerrado en E como $H_\omega = \{e \in E / \omega(e) \geq 0\}$ que se le llama semiespacio asociado a ω.

Definición 2.6.1. Llamaremos convexo dual de S a
$S^V = \{\omega \in E^* / \omega(S) \geq 0\} = \{\omega \in E^* / S \subseteq H_\omega\} \subseteq E^*$.

En el caso en el que S sea un espacio vectorial, entonces $S^V = S^\circ$ incidente a S porque si $e, -e \in S$ y $\omega \in S^V$ entonces $\omega(e) \geq 0$ y $-\omega(e) = \omega(-e) \geq 0$. Luego $\omega(e) = 0$.

Sabemos que E se identifica con el dual de E^*, es decir, para cada $e \in E$ y $\omega \in E^*$, $e(\omega) = \omega(e)$. Luego si W es un espacio semilineal de E^*, llamaremos dual de W a $W^V = \{e \in E / \omega(e) \geq 0 \ \forall \ \omega \in W\}$.

Lema 2.6.2. Sea $p : E \to \overline{E}$ una aplicación lineal. Si $S \subset E$ es un espacio semilineal cerrado tal que Ker $p \cap S = 0$, entonces $p(S)$ es un cerrado de $\overline{E}$.

Demostración. Sea $\pi : E_0 \to S(E)$, $\pi : \overline{E_0} \to S(\overline{E})$ las proyecciones definidas en el Capítulo 2. Para probar que $p(S)$ es cerrado, basta probar que $\pi(p(S))$ es un cerrado de $S(\overline{E})$. Por hipótesis $U = E-$ Ker p es un abierto que contiene a S_0. Como S es cerrado, $\pi(S_0)$ es un cerrado de $S(E)$ contenido en el abierto $V = S(E) - S(E') = \pi(U)$ y por tanto compacto. El morfismo natural $\overline{p} : V \to S(\overline{E})$ dado por $\overline{p}(\langle e \rangle_+) = \langle p(e) \rangle_+$ es continua y verifica que $\overline{p} \circ \pi = \pi \circ p$. Luego $\pi(p(S_0)) = \overline{p}(\pi(S_0))$ es compacto por ser la imagen de un compacto. $\square$

Corolario 2.6.3. Si S es un espacio semilineal finito generado de E, entonces es cerrado.

Demostración. Sabemos que $S \simeq V_S \oplus S'$ donde S' es un cono poliédrico. Como V_S es un subespacio vectorial, V_S es cerrado y por tanto, podemos suponer que S es un cono poliédrico. Si $e_1, ..., e_k$ un sistema mínimo de generadores de S. La aplicación $p : \mathbb{R}^k \to E$ dado por

$p(\lambda_1, ..., \lambda_k) = \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_k e_k$ es lineal. El semiespacio $S' = \mathbb{R}^k_{\geq 0}$ es un cerrado de $\mathbb{R}^k$ tal que $p(S') = S$ y Ker $p \cap S' = 0$ por ser $e_1, ..., e_k$ semilinealmente independientes y aplicando el lema anterior concluimos. □

Proposición 2.6.4. Si $S \neq E$ es un espacio semilineal cerrado y $e \notin S$, entonces existe $\omega \in S^V$ tal que $\omega(e) < 0$.

Demostración. Lo haremos por inducción sobre $n = \dim E$.
Para $n = 1, 2$ ya lo sabemos. Ahora supongamos $n > 2$.
Sea $p : E \to \overline{E}$ una aplicación lineal epiyectiva tal que $p(e) \notin p(S)$ y $p(S)$ es cerrado. Aplicando inducción sobre $\overline{E}$, existe $\overline{\omega} : \overline{E} \to \mathbb{R}$ tal que $\overline{\omega}(p(S)) \geq 0$ y $\overline{\omega}(p(e)) < 0$. Por tanto, $\omega = \overline{\omega} \circ p$ es la forma lineal buscada. Luego solo tenemos que encontrar p en estas condiciones.
Podemos suponer que $V_S = 0$ pues sino basta tomar $p : E \to \overline{E} = E/V_S$ la proyección canónica ya que $e \notin p^{-1}(p(S)) = S$ y $p(S)$ es un cerrado. Veamos esto último: $E = V_S \oplus L$ y $S = V_S \oplus S'$ donde $S' = S \cap L$ es un cerrado de L. Como $p : L \to E/V_S$ es isomorfismo y $S' \to p(S)$ también se concluye.
Sea $s \in S$ tal que $s \notin \langle e \rangle$, $E_2 = \langle e, s \rangle$ y $S' = S \cap E_2$. Por lo que sabemos de los espacios semilineales de dimensión 2, existe $\omega : E_2 \to \mathbb{R}$ una aplicación lineal tal que $\omega(S'_0) > 0$ y $\omega(e) < 0$. Veamos la proyección canónica $p : E \to E/\text{Ker } \omega$ verifica las condiciones buscadas:
- $p(S)$ es cerrado por el lema ya que $S\cap$ Ker $\omega = S' \cap$ Ker $\omega = 0$.
- $p(s) \notin p(S)$: Si $p(e) = p(s')$ para algún $s' \in S$, entonces $e = s' + v$ para algún $v \in$ Ker ω y por tanto, $s' \in S'$. Luego $0 < \omega(e) = \omega(s') + \omega(v) = \omega(s') > 0$ llegando a contradicción. □

Teorema 2.6.5. Todo espacio vectorial semilineal cerrado es la intersección de los semiespacios que lo contienen, es decir, $S^{VV} = S$.

Demostración. Por un lado, sabemos que $S \subseteq S^{VV}$. Para ver que $S^{VV} \subseteq S$ basta ver que si $e \notin S$, entonces $e \notin S^{VV}$. Por la proposición anterior existe $\omega \in S^V$ tal que $\omega(e) < 0$. Luego $e \notin S^{VV}$. □

Teorema 2.6.6. Sea E de dimensión n. La correspondencia $S \to S^V$ da una correspondencia biunívoca entre los espacios semilineales cerrados de dimensión (s, k) de E y los de dimensión $(n - s, n - k)$ de E^* de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccc} \{\textit{Espacios semilineales de } E\} & \Longleftrightarrow & \{\textit{Espacios semilineales de } E^*\} \\ S & \xrightarrow{F} & S^V \\ W^V & \xleftarrow{G} & W \end{array}$$

donde tenemos que $F \circ G = Id$ y $G \circ F = Id$ y además se verifica que:
a) Si $S_1 \subseteq S_2$, entonces $S_2^V \subseteq S_1^V$.
b)$(S_1 + S_2)^V = S_1^V \cap S_2^V$.
c)$(S_1 \cap S_2)^V = \overline{S_1^V + S_2^V}$.

Demostración. Por el teorema anterior tenemos que $S^{VV} = \underset{\omega(S) \geq 0}{\cap} H_\omega = S$, luego la correspondencia es biunívoca.

Veamos cuál es la dimensión. Tenemos que $V_S \subseteq S \subseteq E_S$ con V_S el máximo subespacio vectorial contenido en S y con E_S el mínimo subespacio vectorial que contiene a S, entonces $E_S^V = \overset{\circ}{E}_S \subseteq S^V \subseteq V_S^V = \overset{\circ}{V}_S$ y tendremos que $E_S^V = \overset{\circ}{E}_S$ será el máximo espacio vectorial contenido en S^V y $V_S^V = \overset{\circ}{V}_S$ es el mínimo espacio vectorial que contiene a S^V. Luego si la dimensión de S es (s, k), entonces la dimensión de S^V es $(n-k, n-s)$. Ahora vamos a demostrar los apartados a),b) y c).
a) y b) son comprobaciones
c) $\overline{S_1^V + S_2^V} = (S_1^V + S_2^V)^{VV} \overset{b)}{=} (S_1^{VV} \cap S_2^{VV})^V = (S_1 \cap S_2)^V$. □

Corolario 2.6.7. Hay una correspondencia biunívoca entre los subespacios semilineales fuertemente convexos cerrados de dimensión n de E y los subespacios semilineales fuertemente convexo de dimensión n de E^*.

Observación 2.6.8. La suma de espacios semilineales cerrados no tiene por que ser cerrada, por eso se toma el cierre.
$(S_1 \cap S_2)^V = \overline{S_1^V + S_2^V}$

2.7. Dualidad de las caras de un espacio semilineal

En esta sección supondremos que todos los espacios semilineales S son cerrados en el espacio vectorial E de dimensión n.

Definición 2.7.1. Sea $C \subseteq S$ una cara de S. Llamaremos incidente de C a $\mathring{C} = \{\omega \in S^V / \omega(C) = 0\}$.

Es fácil comprobar que $\mathring{C}$ es una cara de S^V.

Proposición 2.7.2. Sea S un espacio semilineal de E y $\omega \in E^*$.
Ker $\omega \cap S$ es una cara de $S \iff \omega(S) \geq 0$ o $\omega(S) \leq 0$.

Demostración. $\Rightarrow$) Si $s_1, s_2 \in S$ verifican que $\omega(s_1) > 0$ y $\omega(s_2) < 0$ entonces $\omega(s_1)s_2 - \omega(s_2)s_1 \in$ Ker $\omega \cap S$. Como es una cara de S, se tiene que $s_1, s_2 \in$ Ker ω donde llegamos a contradicción.
$\Leftarrow$) Tomando $-\omega$ en vez de ω, podemos suponer que $\omega(S) \geq 0$. Si $s_1 + s_2 \in$ Ker $\omega \cap S$ donde $s_1 + s_2 \in S$, entonces $\omega(s_1 + s_2) = \omega(s_1) + \omega(s_2) = 0$. Como $\omega(s_i) \geq 0$, se concluye que $\omega(s_1) = \omega(s_2) = 0$ y $s_1, s_2 \in$ Ker ω. □

Definición 2.7.3. Diremos que una cara $C \subseteq S$ es una cara expuesta si $C =$ Ker $\omega \cap S$ para algún $\omega \in E^*$.

Lema 2.7.4. Sea C una cara de S y $E_C \subseteq E_S$ el mínimo espacio vectorial que contiene a C.
1) $E_C \cap S = C$.
2) $\mathring{C} = (E_C + S)^V$.

Demostración. 1) Si $c_1 - c_2 = s \in S$ donde $c_1, c_2 \in C$, entonces $c_1 = c_2 + s \in C$. Luego $s \in C$.
2) $\mathring{C} = \mathring{E}_C \cap S^V = E_C^V \cap S^V = (E_C + S)^V$ por el teorema 3.6.6. □

Proposición 2.7.5. Sea C una cara del espacio semilineal S en E:
1) El máximo espacio vectorial contenido en $E_C + S$ es E_C y el mínimo espacio vectorial que contiene a $E_C + S$ es E_S.
2) $\mathring{C}$ es una cara expuesta de S^V de dimensión $\leq n-$dim C.

Demostración. 1) Sea $e \in E_C + S$ tal que $-e \in E_C + S$. Se tiene que $e = c_1 - c_2 + s$ y $-e = c_1' - c_2' + s'$ donde $c_1, c_2, c_1', c_2' \in C$ y $s, s' \in S$. De aquí despejando c_2, c_2' se deduce que $c_2 + c_2' = c_1 + c_1' + s + s' \in C$ y por tanto $s \in C$, luego $e \in E_C$.
2) Como E_C está generado por C, puedo tomar una base de E_C; $c_1, c_2, ..., c_s$ cuyos elementos están en C y por tanto en S. Luego si $\omega \in S^V$, entonces $\omega(c_i) = 0$ para todo i si y solo si $\omega(c_1 + c_2 + ... + c_s) = \omega(c_1) + \omega(c_2) + ... + \omega(c_s) = 0$. Luego si $c = c_1 + ... + c_s$, $\mathring{C} = \mathring{E}_C \cap S^V =$Ker $c \cap S^V$. Si V es el vértice de $\overline{E_C + S}$, se tiene que $E_C \subseteq V$. Luego dim $\mathring{C}$ =dim $(\overline{E_C + S})^V =$ dim $\mathring{V} = n-$dim $V \leq n-$dim $E_C = n-$ dim C. □

Corolario 2.7.6. Si dim $S = (k, n)$ y C es una cara de S de dimensión r tal que $E_C + S$ es cerrado, entonces la dimensión de $\mathring{C}$ es $(n - k, n - r)$.

Demostración. $\mathring{C} = (E_C + S)^V$ y por dualidad de espacios semilineales y la proposición anterior se concluye. □

Corolario 2.7.7. Si S es fuertemente convexo de dimensión $n =$ dim E y C es una cara de S de dimensión r tal que $E_C + S$ es cerrado, entonces $\mathring{C}$ es fuertemente convexo y de dimensión $n - r$.

Corolario 2.7.8. Si S es finito generado, toda cara de S es expuesta.

Demostración. Sea C una cara de S. Entonces $E_C + S$ es finito generado y por tanto un cerrado. Sabemos que E_C es el vértice de $E_C + S$. Luego $\mathring{\mathring{C}} = \mathring{\mathring{E}}_C \cap S^{VV} = E_C \cap S = C$. Como C es el incidente de una cara, C es expuesta. □

Teorema 2.7.9. Si C es una cara expuesta de S, entonces $\mathring{\mathring{C}} = C$.

Demostración. Si $C =$ Ker $\omega \cap S$ donde $\omega \in S^V$, se tiene que $\omega \in \mathring{C} = (\overline{E_C + S})^V$. Luego si V es el vértice de $\overline{E_C + S}$, se tiene que $\omega(V) = 0$. El espacio vectorial asociado a $(\overline{E_C + S})^V$ es $\mathring{V}$. Luego $\mathring{\mathring{C}} = \mathring{\mathring{V}} \cap S^{VV} = V \cap S$. $C = E_C \cap S \subseteq V \cap S \subseteq$ Ker $\omega \cap S = C$ y se concluye. □

Corolario 2.7.10. Si S es finito generado y C es una cara de S de dimensión (k, r), entonces $\mathring{C}$ es una cara de S^V de dimensión $(n-$dim $S, n-$dim $C)$.

Teorema 2.7.11. (Teorema de dualidad para las caras)
Sea S un espacio semilineal de dimensión (s, k) en un espacio vectorial de dimensión n. La correspondencia $C \longrightarrow \mathring{C}$ da una correspondencia biunívoca entre caras expuestas de S y las caras expuestas de S^V de modo que:

1) La dimensión de $\mathring{C}$ es $\leq n-$dim C.

2) Si $C_1 \subseteq C_2$, entonces $\mathring{C_2} \subseteq \mathring{C_1}$.
Sea S un espacio semilineal finito generado de dimensión (s,k) en un espacio vectorial de dimensión n. La correspondencia $C \longrightarrow \mathring{C}$ da una correspondencia biunívoca entre caras de S y las caras de S^V de modo que:
1) La dimensión de $\mathring{C} = n-$dim C.

2) Si $C_1 \subseteq C_2$, entonces $\mathring{C_2} \subseteq \mathring{C_1}$.

Estructura de caras de un cono poliédrico

Sea $S \subseteq E$ finito generado donde $V_S = 0$, es decir, S es un cono poliédrico. Sea $S = \langle e_1, e_2, ..., e_n \rangle_+$ con $e_1, e_2, ..., e_n$ sistema mínimo de generadores. Sabemos que lo generado por cada uno de ellos ($\langle e_i \rangle_+$) son las aristas de S.

Teorema 2.7.12. a) Toda cara C de S está generada por un número finito de aristas de S y por tanto, hay un número finito de caras.
b) Toda cara C de S es la intersección de las hipercaras de S que contienen a la C.

Demostración. a) Sea C una cara de S, $C \subseteq S = \langle e_1, e_2, ..., e_n \rangle_+$. Ahora sea $c \in C$, entonces $c = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_k e_k$ con $\lambda_i \geq 0$. Por ser C cara, se tiene que $\lambda_i e_i \in C$ cuando $\lambda_i \geq 0$ $\Longrightarrow e_i = \frac{\lambda}{\lambda_i} \lambda c \in C$. Por tanto C está generada por los e_i tales que $e_i \in C$.
b) Sea $H \subseteq S \subseteq E_S$ con $E_H = \{\omega = 0\}$ para algún $\omega \in E_S^*$ con dim $S =$ dim E_S y dim $E_H =$ dim E_S - 1. Tenemos que $E_S \cap S = H$ entonces $\omega(S) \geq 0$ o $\omega(S) \leq 0$ (esto se debe a que si hubiera $\omega(s_1) > 0$ y $\omega(s_2) < 0$ con s_1, s_2 no podría ser porque deja la figura a un lado).
Entonces tomamos $\omega(s_1) \cdot s_2 - \omega(s_2) \cdot s_1 \in S$ donde ambos son positivos y tenemos que $\omega(s_1) \cdot s_2 - \omega(s_2) \cdot s_1 \in$ Ker $\omega \cap S$. Por tanto $s_1, s_2 \in H$ y $\omega \in S^V$.
Toda hipercara se construye intersecando con un hiperplano y dejando la figura a un lado.
Aplicaremos inducción sobre $m =$ dim S - dim C.
$m = 1 \Longrightarrow C$ es una hipercara, es la intersección de las hipercaras (osea ella misma).
Supongamos cierto hasta $m - 1$:
Si $C = \{0\}$ vemos que $0 = H_1 \cap H_2 \cap ... \cap H_s$, $H_i \subseteq S$ hipercara. Sean $A_1 \subseteq S$ y $A_2 \subseteq S$ dos aristas tal que $A_1 \neq A_2$. Entonces tenemos que dim$S-$dim$A_1 < m$.
Por hipótesis de inducción, $A_1 = H_1 \cap H_2 \cap ... \cap H_s$ y $A_2 = H'_1 \cap H'_2 \cap ... \cap H'_l$ con H_i, H'_j hipercaras. Por tanto, $A_1 \cap A_2 = \{0\} = H_1 \cap H_2 \cap ... \cap H_s \cap H'_1 \cap H'_2 \cap ... \cap H'_l$.
Entonces tenemos que $\langle e_1 \rangle_+ \cap \langle e_2 \rangle_+ = \{0\}$.
Si dim $C > 0$, $C \subseteq E_C$ y sea

$$\begin{array}{cccc} p\colon & E & \longrightarrow & E/E_C \\ & \cup & & \cup \\ & S & \longmapsto & p(S) \\ & p(C) & \longmapsto & 0 \end{array}$$

la proyección canónica.
Tenemos que ver que $p(S)$ es un cono poliédrico y así le aplicamos el caso de $C = \{0\}$.

El vértice de $p(S)$ es 0. Veamos si existe un $p(s) \in p(S)$ tal que $-p(s) \in p(S)$, llamaremos $-p(s) = p(s')$, entonces tenemos que $p(s) + p(s') = p(s + s') = 0$, por tanto $s + s' \in$ Ker $p = E_C \cap S = C \Longrightarrow s \in C \Longrightarrow p(s) = 0$.
$0 \subseteq p(S)$ con $0 = H_1 \cap H_2 \cap ... \cap H_s$ con H_i hipercaras de S.

$$\begin{array}{rccc} p: & S & \xrightarrow{p} & p(S) \\ & \cup & & \cup \\ & p^{-1}(H_i) & \longmapsto & H_i \end{array}$$

La antiimagen de una cara es una cara por ser un morfismo lineal, luego la antiimagen de 0, $p^{-1}(0) =$Ker $p \cap S = C$ entonces $C = p^{-1}(0) = p^{-1}(H_1) \cap p^{-1}(H_2) \cap ... \cap p^{-1}(H_s) \Rightarrow$
$E_{p^{-1}(H_i)} \xrightarrow{p} E_{H_i}$
dim $E_{p^{-1}(H_i)} =$ dim$E_{H_i}+$ dim Ker $p =$ dim $E_{H_i}+$ dim $E_C =$ dim $E/E_C - 1 +$ dim $C =$ dim $E-$ dim $E_C - 1 +$ dim $C =$ dim $E - 1 \Longrightarrow E_{p^{-1}(H_i)}$ es un hiperplano. □

Teorema 2.7.13. Sea S un cono poliédrico de dimensión n.
a) S^V está generado por $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_s$ siendo Ker $\omega_i \cap S$ las hipercaras de S.
b) Además es un sistema mínimo de generadores, por tanto S^V es un cono poliédrico de dimensión n.

Demostración. Sean $H_i \subseteq S$ las hipercaras de S, $H_i =$ Ker $\omega_i \cap S$ con $\omega_i(S) \geq 0$. Entonces por la dualidad de caras entre S y S^V, sabemos que $\mathring{H}_i \subseteq S_V$ es una arista $\mathring{H}_i = \langle\omega_i\rangle_+$. Sean $H_1, H_2, ..., H_s$ hipercaras de S entonces veamos ya que $\mathring{H}_i = \langle\omega_i\rangle_+$ si $\langle\omega_1, ..., \omega_s\rangle_+ \stackrel{?}{=} S^V$.
$0 = H_1 \cap H_2 \cap ... \cap H_s \longrightarrow \mathring{0} = S^V = \overset{\circ}{\overline{H_1 \cap ... \cap H_s}} = \overline{\mathring{H}_1 \cap ... \cap \mathring{H}_s} = \langle\omega_1, ..., \omega_s\rangle_+$. □

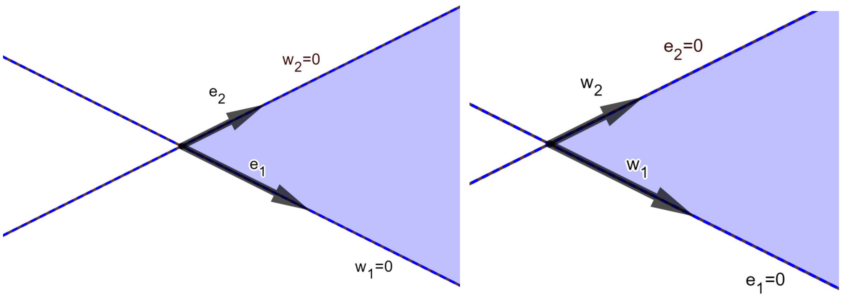
Con esto concluimos que si S es un cono poliédrico de dimensión n entonces S^V es un cono poliédrico de dimensión n. Y por tanto tenemos una correspondencia biunívoca entre las caras de S de dimensión i y las caras de S^V de dimensión $n - i$:

$$C \subseteq S \iff \mathring{C} \subseteq S^V$$

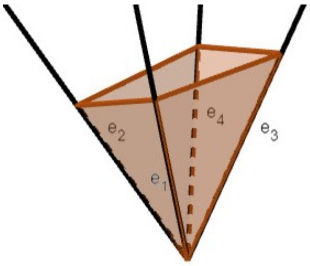
siendo C de dimensión i y $\mathring{C}$ de dimesión $n - i$. De aquí sacamos que el número de caras de dimensión i de C y el número de caras de dimensión $n - i$ de $\mathring{C}$ es el mismo.

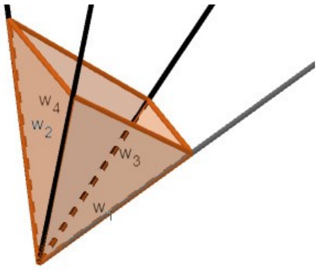
Ejemplos de espacios semilineales duales finito generados

1) dim $E = 2$. Sea $S = \langle e_1, e_2\rangle_+$. Cogemos $\omega_1 \in E^*$ tal que $\omega_1(e_1) = 0$ y $\omega_1(e_2) \geq 0$. Realizamos lo mismo con w_2. Entonces ahora tenemos que $S^V = \langle\omega_1, \omega_2\rangle_+$.



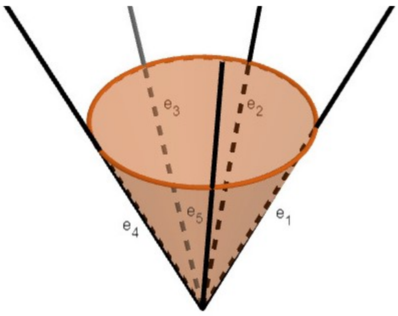
2) dim $E = 3$. Sea $S = \langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle_+$.Tiene forma de pirámide cuadrangular. El subespacio vectorial generado por cada 2 vectores $\langle e_i, e_j \rangle$ con $i \neq j$ será un plano de la forma $\{\omega = 0\}$ luego vamos a denominar cada uno de ellos: $\{\omega_1 = 0\} = \langle e_1, e_2 \rangle$, $\{\omega_2 = 0\} = \langle e_1, e_3 \rangle$, $\{\omega_3 = 0\} = \langle e_2, e_4 \rangle$ y $\{\omega_4 = 0\} = \langle e_3, e_4 \rangle$. Y ahora tenemos que $S^V = \langle \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4 \rangle_+$ que también tendrá forma de pirámide cuadrangular.

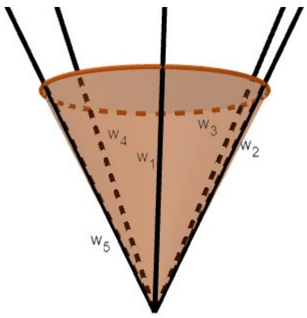




Ejemplos de espacios semilineales duales no finito generados

3) dim $E = 3$. Sea $S = \langle e_1, e_2, e_3, e_4, ... \rangle_+$ con e_i pertenecientes a una circunferencia. En este caso tenemos que las caras máximas serían cada una de sus aristas y su dual sería el plano que deja a una lado la figura, es decir, el plano tangente a la figura que pasa por cada arista. El dual del cono tenemos que también es un cono.





Observamos que en estos ejemplos toda arista es una cara expuesta, pues es la intersección del cono con el plano tangente a la arista.

Capítulo 3

Estructura convexa de la esfera

En este capítulo vamos a demostrar la correspondencia entre un espacio semilineal y un convexo esférico. Una vez visto eso vamos a traducir a la esfera todo lo demostrado para espacios semilineales, es decir, los conceptos de espacio semilineal, las caras y la dualidad.

3.1. Convexos esféricos

Sea E un espacio vectorial de dimensión $n+1$. Denotaremos $E_0 = E - \{0\}$. Tenemos la esferificación de E que es $S(E) = \{\langle e\rangle_+ / 0 \neq e \in E\}$ la esfera de dimensión n. Sea $S \subseteq E$ un subespacio semilineal y $S_0 = S - \{0\}$.

$$\begin{array}{rcc} E_0 & \xrightarrow{\pi} & S(E) \\ e & \longmapsto & \pi(e) = \langle e\rangle_+ = P \\ S_0 & \longmapsto & \pi(S_0) \end{array}$$

Recordemos que siendo $p = \langle e_1\rangle_+$, $q = \langle e_2\rangle_+ \in S(E)$ llamaremos arco que une a p, q a $[p,q] = \pi(\langle e_1, e_2\rangle_+)$.
También para simplificar la notación llamaremos $H_\omega = \pi(H_\omega)$, es decir, que siendo H_ω semiespacio asociado de ω denotaremos a $\pi(H_\omega)$ que es el hemisferio generado por ω como H_ω para abreviar notación.

Definición 3.1.1. $K \subseteq S_n(E)$ es convexo esférico si $\forall P_1, P_2 \in K$ se verifica que $[P_1, P_2] \subseteq K$. En particular, un convexo de dimensión 0 es $\{p, -p\}$, es decir, un punto y su opuesto.

Proposición 3.1.2. $K \subseteq S(E)$ es un convexo esférico $\Longleftrightarrow K = \pi(S)$ con S un espacio semilineal.

Demostración. $\Rightarrow$) Si K es un convexo esférico, tenemos que se verifica que si $P_1, P_2 \in K$ entonces $[P_1, P_2] \subseteq K$. Por la correspondencia $\pi : E_0 \to S(E)$, tenemos que $P_1 = \pi(\langle e_1\rangle_+)$, $P_2 = \pi(\langle e_2\rangle_+)$ con $\langle e_1\rangle_+, \langle e_2\rangle_+$ las semirrectas generadas por e_1, e_2 y $e_1, e_2 \in E_0$. Y por otro lado el arco $[P_1, P_2]$ se corresponde con $\pi(\langle e_1, e_2\rangle_+)$ con $\langle e_1, e_2\rangle_+$ el espacio semilineal generado por las semirrectas $\langle e_1\rangle_+, \langle e_2\rangle_+$ que es el espacio semilineal generado por e_1, e_2. Entonces si se

verifica que si para todos los puntos del convexo, el arco que los une está contenido en K, entonces podemos afirmar que K es de la forma $K = \pi(\langle e_1, ...\rangle_+)$ con los e_i los vectores contenidos en $\langle e_1, ...\rangle_+$ y tenemos que $\langle e_i\rangle_+$ es un espacio semilineal por ser la combinación lineal positiva de vectores.
$\Leftarrow$) Ahora sea $K = \pi(S)$ con S un espacio semilneal y queremos demostrar que K es un convexo esférico. Tenemos que $S = \langle e_1, ...\rangle_+$ luego $K = \pi(\langle e_1, ...\rangle_+)$ y también tenemos que cada $P_i = \pi(\langle e_i\rangle_+) \in K$ si $e_i \in S$. Cada una de las semirrectas generadas por los vectores que están en S está contenida en S y por tanto su esferificación está contenida en K. Ahora si pensamos el espacio semilineal generado por dos vectores $\langle e_1, e_2\rangle_+$ este está contenido en S y por tanto su esferificación $\pi(\langle e_1, e_2\rangle_+) \subseteq K$, por tanto tenemos dos puntos $P_1 = \langle e_1\rangle_+, P_2 = \langle e_2\rangle_+ \in K$ y $\pi(\langle e_1, e_2\rangle_+) \subseteq K$ que se corresponde con el arco que une P_1, P_2 luego K es un convexo esférico. $\square$

Definición 3.1.3. Sea $Y = \{\langle e_1\rangle_+, ..., \langle e_n\rangle_+, ...\}$ un conjunto de puntos de $S(E)$, entonces llamaremos envolvente convexa de Y al mínimo convexo esférico que contiene a Y. Podemos ver que se corresponde con $X = \pi(S)$ siendo S el espacio semilineal generado por $\langle e_1, ..., e_n, ...\rangle_+$.

Definición 3.1.4. Diremos que $p_1, p_2, ..., p_s \in S(E)$ son convexamente independientes si $p_i \notin [p_1, ..., \overset{\wedge}{p_i}, ..., p_s] =$ envolvente convexa.

Definición 3.1.5. Llamaremos poliedro a la envolvente convexa de un número finito de puntos convexamente independientes.

Definición 3.1.6. Llamaremos vértice de K a la máxima subvariedad esférica contenida en K. Llamaremos subvariedad esférica asociada a K a la mínima subvariedad esférica que contiene a K.

Definición 3.1.7. Llamaremos dimensión de K a la dimensión de la subvariedad esférica asociada a K. Y tendremos el par de dimensiones de K (s, k) con s la dimensión del vértice de K y k la dimensión de la subvariedad esférica asociada a K.

Definición 3.1.8. Teniendo el morfismo $\pi : E \longrightarrow S(E)$ tenemos que siendo S_1, S_2 subespacios semilineales y ahora siendo $K_1 = \pi(S_1), K_2 = \pi(S_2)$:
-Llamaremos $K_1 + K_2 = \{$envolvente convexa de $K_1 \cup K_2\}$, es decir, el mínimo convexo que contiene a K_1 y K_2. Denotaremos $K_1 \oplus K_2$ si además $K_1 \cap K_2 = \phi$.
-También $K_1 \cap K_2$ es el máximo convexo contenido en K_1 y K_2.
-Y por último, llamaremos el convexo esférico opuesto de K_1 a $\sigma(K) = -K$ siendo σ la aplicación que manda un punto de la esfera a su opuesto $\sigma(p) = -p$.

Definición 3.1.9. Un convexo esférico es fuertemente convexo cuando $K \cap (-K) = \phi$, es decir, $p \in K \Longleftrightarrow -p \notin K$.

Ahora vista esta correspondencia tenemos una correspondencia entre un espacios semilineal y un convexo esférico:

-Un *espacio vectorial de dimensión* $n+1$ se corresponde con una *esfera de dimensión* n. Por tanto si E es un espacio vectorial de dimensión $n+1$ tenemos que $\pi(E) = S(E)$ es una esfera de dimensión n.

-Los *subespacios vectoriales de dimensión* k se corresponden con *subvariedades esféricas de dimensión* $k-1$. En particular mencionar que una *recta* se corresponde con *un punto y su opuesto* y un *plano* se corresponde con una *circunferencia que une dos puntos.*

-La noción de *espacio semilineal finito generado* se corresponde con un convexo esférico que es la *envolvente convexa de un número finito de puntos.*

-La noción de *vectores semilinealmente independientes* se transforma en *puntos convexamente independientes.*

-Si S es un *cono poliédrico* tenemos que se traduce como $\pi(S) = K$ que es un *poliedro.*

-Sea Y un conjunto de vectores semilinealmente independientes, entonces tenemos que el *espacio semilineal generado por* Y se corresponde con la *envolvente esférica de* $\pi(Y)$. Y si en particular Y es finito, entonces el *espacio semilineal finito generado por* Y se corresponde con la *envolvente convexa de un número finito de puntos.*

-Por tanto, un *espacio semilineal cerrado de dimensión* m se corresponde con un *convexo esférico cerrado de dimensión* $m-1$. En particular, tenemos que una *semirrecta* pasa a ser un *punto* de la esfera, un *espacio semilineal generado por dos vectores semilinealmente independientes* se corresponde con un *arco que une dos puntos* y un *semiespacio* pasa a ser un *hemisferio* de la esfera.

-Lo que en espacios semilineales son *las aristas, las caras y las hipercaras* en la esfera se corresponden con *los vértices, caras e hipercaras de un convexo* respectivamente.

-Además las dimensiones de los espacios semilineales llevados a la esfera son una menos. Entonces la arista que tenia dimensión 1 pasa a ser un vértice de dimensión 0 y las hipercaras que teníán dimensión $n-1$ pasa a ser una hipercara de la esfera de dimensión $n-2$.

-El *subespacio vértice de un espacio semilineal* se corresponde con la *subvariedad esférica vertice del convexo esférico.*

-El *espacio vectorial asociado a un espacio semilineal* se corresponde con la *subvariedad esférica asociada al convexo esférico.*

-La dimensión de K viene dada por la dimensión de la subvariedad esférica asociada a K. Por tanto, si la dimensión de la subvariedad esférica asociada a K es n, la dimensión del convexo es n. Por tanto, tenemos que la *dimensión del convexo* es una menos que la *dimensión del espacio semilineal del que proviene*, dim K = dim S-1.

- Tenemos que la *suma de espacios semilineales* $S_1 + S_2$ se corresponde con *envolvente convexa de dos convexos esféricos* $K_1 + K_2$.

-La *intersección de espacios semilineales* $S_1 \cap S_2$ se corresponde con la *intersección de convexos esféricos* $K_1 \cap K_2$.

-El concepto de *espacio semilineal fuertemente convexo* se traduce con que K un *convexo esférico es fuertemente convexo.*

Traducción de teoremas sobre espacios semilineales

Ahora vamos interpretar los teoremas que hemos visto en espacios semilineales para aplicarlos en la esfera.

-El teorema que nos dice "Todo espacio semilineal cerrado de vértice $\{0\}$ está generado por sus aristas" lo podemos traducir al lenguaje esférico como "Todo convexo cerrado y fuertemente convexo es la envolvente convexa de sus vértices".

-El teorema que nos dice "Todo espacio semilineal cerrado es la intersección de los semiespacios cerrados que lo contienen" lo podemos traducir al lenguaje esférico como "Todo convexo esférico cerrado es la intersección de los hemisferios que lo contienen".

-El teorema que nos dice "Si S es fuertemente convexo entonces no contiene espacios vectoriales" lo podemos traducir al lenguaje esférico como "Si K es fuertemente convexo entonces no contiene subvariedades esféricas".

-El teorema que nos dice "Todo espacio semilineal S descompone de modo único salvo isomorfismos en la suma directa de un subespacio vectorial y de un espacio semilineal fuertemente convexo, es decir, $S = V_S \oplus S'$ " lo podemos traducir al lenguaje esférico como "Todo convexo esférico $K = \pi(S)$ descompone de modo único salvo isomorfismos en la suma directa de una subvariedad esférica y de un convexo esférico fuertemente convexo, es decir, $K = V_K \oplus K'$ con K' un cono poliédrico".
Este teorema tiene un corolario que nos dice "Si S es finito generado entonces $S = V_S \oplus S'$ con S' un cono poliédrico", entonces lo podemos traducir como "Si K es la envolvente convexa de un número finito de puntos entonces $K = V_K \oplus K'$ con K' un poliedro".

3.2. Caras de un convexo esférico

Definición 3.2.1. Llamaremos cara de un convexo esférico a $C \subseteq K$ si C es convexo y verifica que si $p, q \in K$ y $p, q \notin C \Longrightarrow [p, q] \cap C = \phi$.

Proposición 3.2.2. $C = \pi(S') \subseteq K = \pi(S)$ es una cara de $K \Longleftrightarrow S' \subseteq S$ es una cara de S.

Demostración. $\Rightarrow$) Tenemos que $C = \pi(S')$ es una cara de $K = \pi(S)$ y queremos ver que S' es una cara de S. Tenemos que ver que si $s, s' \in S$ y $s + s' \in S'$, entonces $s, s' \in S'$.
Sean $p = \langle s \rangle_+$, $q = \langle s' \rangle_+ \in K$ y $p, q \neq \langle s + s' \rangle_+ \in [p, q] \cap C \neq \phi$. Como $[p, q] \cap C$ es una cara de $[p, q]$, entonces $[p, q] \cap C$ es p, q o $[p, q]$. Luego $p, q \in C$ y por tanto, $s, s' \in S'$.
$\Leftarrow$) Tenemos que S' es una cara de S y queremos ver que $C = \pi(S')$ es una cara de $K = \pi(S)$. Por hipótesis, tenemos que la condición de cara del espacio semilineal nos dice que si $e, e' \in S$ y $e + e' \in S'$ entonces $e, e' \in S'$. Si $p = \langle e \rangle_+$ y $q = \langle e' \rangle_+ \in K$ y $r = \langle \lambda e + \mu e' \rangle_+ \in [p, q] \cap C$, entonces $\lambda e + \mu e' \in S'$ y por tanto $\lambda e, \mu e' \in S'$. Luego $p \in C$ y $q \in C$. $\square$

Traducción de teoremas sobre caras de espacios semilineales

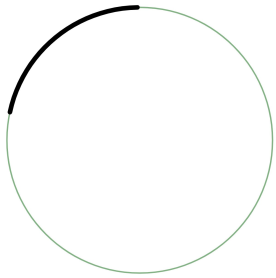
-El teorema que nos dice "Sea S un espacio semilineal fuertemente convexo, sea $Y \subseteq S$ un sistema mínimo de generadores, entonces $\langle e \rangle_+$ es una arista si y solo si $\lambda e \in Y$ para algún $\lambda > 0$" lo podemos traducir al lenguaje esférico como "Sea K un convexo esférico fuertemente convexo, sea $W \subseteq K$ un conjuntos de puntos convexamente independientes finito, entonces K es la envolvente convexa de W".

Este teorema tiene un corolario que dice "Sea S fuertemente convexo y tiene sistema mínimo de generadores, entonces S está generado por sus aristas" lo podemos traducir como "Sea K fuertemente convexo y cerrado, entonces K está generado por sus vértices".

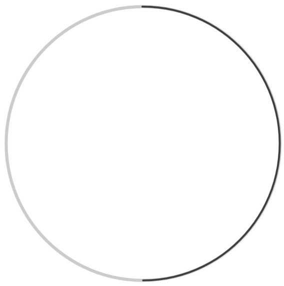
3.3. Ejemplos de convexos esféricos

A continuación, vamos a ver unos ejemplos de convexos esféricos. Dos en la circunferencia usual S_1 y el resto en la esfera usual S_2.

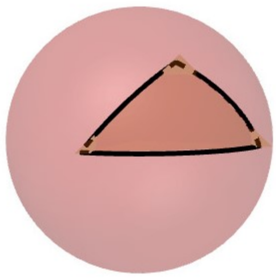
-Sea $\langle e_1\rangle_+, \langle e_2\rangle_+$ dos puntos en la esfera S_1 entonces $K = \pi(S)$ con $S = \langle e_1, e_2\rangle_+$ que se corresponde con un arco de circunferencia.



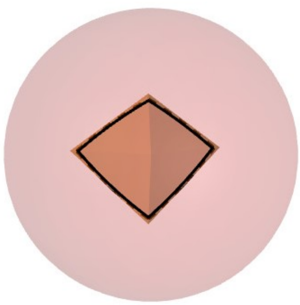
Tenemos que la semicircunferencia se corresponde con el hemisferio en dimensión 1:



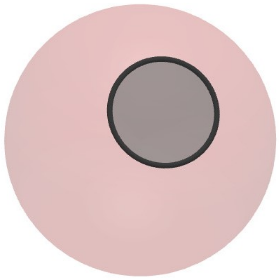
-Sea $\langle e_1\rangle_+, \langle e_2\rangle_+, ...$ los n puntos en la esfera S_2 que cogemos, entonces $K = \pi(S)$ con $S = \langle e_1, e_2\rangle_+, ...$. Si por ejemplo, tomamos 3 puntos nos sale el convexo de la imagen.



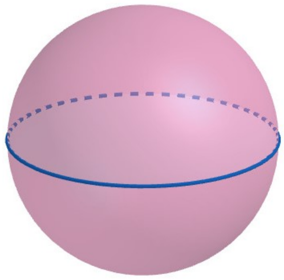
Análogamente, si tomamos 4 puntos nos sale el convexo de la imagen.



También si tomamos S como un cono, entonces $K = \pi(S)$ resulta el convexo de la imagen.



-En este caso, tenemos una esfera contenida en una esfera de dimensión mayor y se obtiene con la esferificación de un subespacio vectorial B de E entonces $K = \pi(B)$.



- Y por ultimo, tenemos el caso de un hemisferio de la esfera que se obtiene al esferificar un semiespacio de E entonces nuestro convexo tendrá la forma de $K = \pi(S)$ con S un semiespacio.

3.4. Dualidad para la esfera

Definición 3.4.1. Llamaremos convexo esférico dual de $K \subset S(E)$ a $K^V = \{$ hemisferios de $S(E)/K \subset H_\omega\}$.

El teorema de dualidad para espacios semilineales traducido a la esfera $S(E)$ y su esfera dual $S(E^*)$ nos dice:
"Sea E espacio vectorial de dimensión $n+1$ y su esferificación $S(E)$ de dimensión n. La correspondencia $S \to S^V$"(siendo cerrados) nos genera una correspondencia entre $K \to K^V$ que nos da una correspondencia biunívoca entre un convexo esférico y su dual de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccc} \{\text{ Convexos esféricos de } S(E)\} & \Longleftrightarrow & \{\text{Convexos esféricos de } S(E^*)\} \\ K & \xrightarrow{F} & K^V \\ W^V & \xleftarrow{G} & W \end{array}$$

donde tenemos que $F \circ G = Id$ y $G \circ F = Id$ y además se verifica que:
a) Si $K_1 \subseteq K_2$, entonces $K_2^V \subseteq K_1^V$.
b)$(K_1 + K_2)^V = K_1^V \cap K_2^V$.
c)$(K_1 \cap K_2)^V = \overline{K_1^V + K_2^V}$.

Por esto podemos obtener las siguientes traducciones:

-Tenemos que un *hemisferio cerrado de* $S(E)$ se corresponde con un *punto de* $S(E^*)$.

-Tenemos que un *convexo* K se corresponde con su *convexo dual* $K^V = \{$*hemisferios que pasan por* $K\}$. Y si las dimensiones de K son (s, k), las dimensiones de su convexo dual K^V son $(n - s, n - k)$.

-En particular, dentro de un convexo y su dual, tenemos que si K es la *envolvente convexa de un número finito de puntos* entonces K^V es también la *envolvente convexa de un número finito de puntos.* Y si K es la *esferificación de un cono poliédrico* entonces K^V es también la *esferificación de un cono poliédrico.*

-Tenemos K_1, K_2 dos convexos de $S(E)$ entonces tenemos que si $K_1 \subseteq K_2$ entonces $K_2^V \subseteq K_1^V$.

-Tenemos que el convexo dual del *mínimo convexo que contiene a* K_1 *y a* K_2 se corresponde con $K_1^V \cap K_2^V$ y al revés también se verifica que el convexo dual de $K_1 \cap K_2$ se corresponde con el *mínimo convexo que contiene a* K_1^V *y* K_2^V.

Traducción de teoremas sobre dualidad entre la esfera y la esfera dual

Ahora vamos a traducir los teoremas sobre dualidad entre un convexo esférico y su dual.

-El teorema que nos dice "El dual de un espacio semilineal finito generado es finito generado" lo podemos traducir al lenguaje esférico como "El dual de la envolvente convexa de un número finito de puntos es la envolvente convexa de un número finito de puntos".

-El teorema que nos dice "El dual de un cono poliédrico es un cono poliédrico"
lo podemos traducir al lenguaje esférico como "El dual de un poliedro es un poliedro".

3.5. Dualidad para las caras de un convexo esférico

Definición 3.5.1. Llamaremos cara incidente de C, que la denotaremos $\mathring{C}$, a
$\mathring{C} = \{H_\omega / K \subseteq H_\omega \text{ y } C \subseteq S(\text{Ker}\omega)\} \subseteq K^V$.

Para estudiar la dualidad entre las caras tenemos que traducir la definición de cara expuesta y sus propiedades. Para ello recordar que dada una forma lineal ω tenemos la esferificación de su núcleo $S(\text{Ker } \omega)$.

Definición 3.5.2. Diremos que $C \subseteq K$ es una cara expuesta si $C = S(\text{Ker } \omega) \cap K$ con $\langle \omega \rangle_+ \in S(E^*)$.

Traducción de teoremas sobre dualidad entre las caras

Para estudiar la dualidad entre las caras de un convexo esférico primero tenemos que traducir los teoremas relacionados con caras expuestas y ya podremos traducir el teorema de dualidad entre las caras.

-El teorema que nos dice:
"Sea C una cara de S en E:
1) El máximo espacio vectorial contenido en $E_C + S$ es E_C y el mínimo espacio vectorial que contiene a $E_C + S$ es E_S
2) $\mathring{C}$ es una cara expuesta de S^V de dimensión $\leq n-$ dim C."
lo podemos traducir al lenguaje esférico como:

"Sea $C' = \pi(C)$ una cara de $K = \pi(S)$ en E:
1) La máxima subvariedad esférica contenida en $S(E_C) + K$ es $S(E_C)$ y el mínimo espacio vectorial que contiene a $S(E_C) + K$ es $S(E_S)$
2) $\mathring{C}'$ es una cara expuesta de K^V de dimensión $\leq n-$ dim C' =dim $C - 1$".

Este teorema tiene varios corolarios:

El que dice "Si S es fuertemente convexo de dimensión $n =$ dim E y C es una cara de S de dimensión r tal que $E_C + S$ es cerrado, entonces $\mathring{C}$ es fuertemente convexo y de dimensión $n - r$" lo podemos traducir al lenguaje esférico como "Si K es fuertemente convexo de dimensión $n - 1 =$ dim $S(E)$ y C' es una cara de K de dimensión $r - 1$ tal que la envolvente convexa de la subvariedad esférica asociada a C' y K es un cerrado, entonces $\mathring{C}'$ es fuertemente convexo y de dimensión $n - r - 1$".

El que dice "Si S es finito generado toda cara de S es expuesta" lo podemos traducir al lenguaje esférico como "Si K es la envolvente convexa de un número finito de puntos entonces toda cara de K es expuesta".

-El teorema que nos dice "Si C es una cara expuesta de S, entonces $\overset{\circ\circ}{C} = C$" lo podemos traducir al lenguaje esférico como "Si C es una cara expuesta de K, entonces $\overset{\circ\circ}{C} = C$".

Ahora vamos a traducir el teorema de dualidad entre las caras de un convexo esférico K y su dual K^V:

Teorema de dualidad para las caras de un convexo esférico
Sea K un convexo esférico de dimensión $k-1$ en una esfera de dimensión $n-1$. La correspondencia $C \longrightarrow \overset{\circ}{C}$ da una correspondencia biunívoca entre caras expuestas de K y las caras expuestas de K^V de modo que:
1) La dimensión de $\overset{\circ}{C}$ es $\leq n-\dim C - 1$.
2) Si $C_1 \subseteq C_2$, entonces $\overset{\circ}{C_2} \subseteq \overset{\circ}{C_1}$.
Sea K un poliedro de dimensión $k-1$ en una esfera de dimensión $n-1$. La correspondencia $C \longrightarrow \overset{\circ}{C}$ da una correspondencia biunívoca entre caras de K y las caras de K^V de modo que:
1) La dimensión de $\overset{\circ}{C} = n-\dim C - 1$.
2) Si $C_1 \subseteq C_2$, entonces $\overset{\circ}{C_2} \subseteq \overset{\circ}{C_1}$.

Estructura de caras de un poliedro

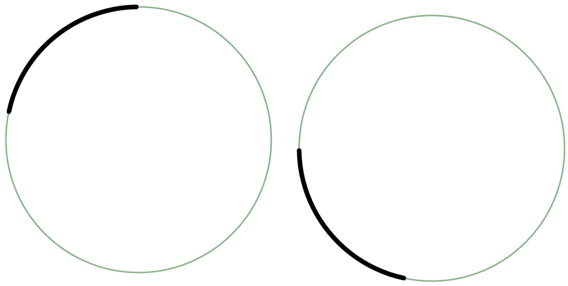
Llamábamos poliedro a la envolvente convexa de un número finito de puntos convexamente independientes y vemos que se corresponde con la esferificación de un cono poliédrico. Ahora vamos a ver la estructura de caras de un poliedro.
-El teorema que nos dice:
"a) Toda cara C de S está generada por un número finito de aristas de S y por tanto hay un número finito de caras.
b) Toda cara C de S es la intersección de las hipercaras de S que contienen a la C"
lo podemos traducir al lenguaje esférico como:
"a) Toda cara C de K es la envolvente convexa de un número finito de vértices de K y por tanto hay un número finito de caras.
b) Toda cara C de K es la intersección de las hipercaras de K que contienen a la C".

-El teorema que nos dice:
"Sea S un cono poliédrico de dimensión n.
a) S^V esta generado por $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_s$ siendo Ker $\omega_i \cap S$ las hipercaras de S.
b) Además es un sistema mínimo de generadores, por tanto S^V es cono poliédrico de dimensión n"
lo podemos traducir al lenguaje esférico como:
"Sea K un poliedro de dimensión $n-1$.
a) K^V es la envolvente convexa de $\langle\omega_1\rangle_+, \langle\omega_2\rangle_+, ..., \langle\omega_s\rangle_+$ siendo $S(\text{Ker } \omega_i) \cap K$ las hipercaras de K.
b) Además es la envolvente convexa de un número finito de puntos, por tanto, K^V es poliedro de dimensión $n-1$".

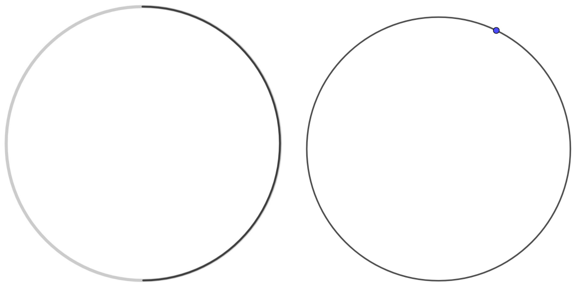
3.6. Ejemplos de convexos esféricos y sus duales

Ahora estudiamos unos ejemplos de convexos duales:

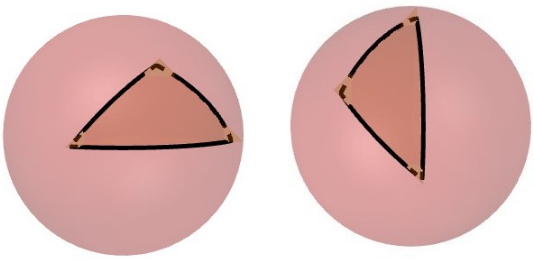
- Considerando la esfera de dimensión 1, $S_1(E)$, y su dual $S_1(E^*)$ tenemos que el dual de un arco es un arco en la esfera dual:

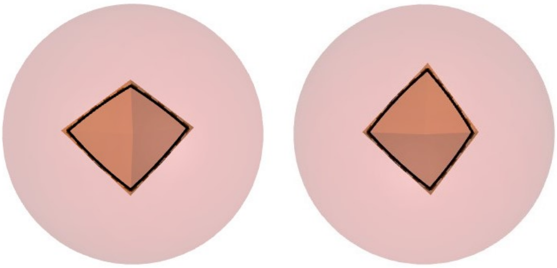


- Considerando $S_1(E)$ y su dual como antes, tenemos que el dual de una semicircunferencia es un punto en la esfera dual:

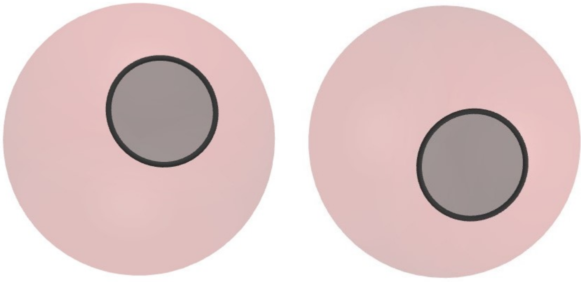


- Considerando la esfera de dimensión 2, $S_2(E)$, y su dual $S_2(E^*)$ tenemos que el dual de un poliedro se corresponde con un poliedro de la misma forma en la esfera dual:

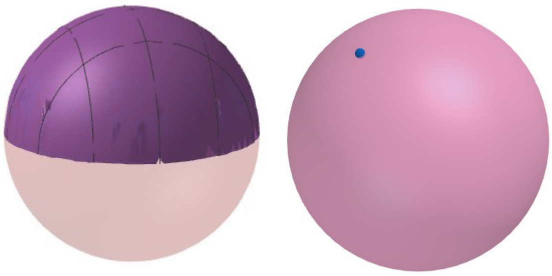




- Considerando también la esfera $S_2(E)$ y su dual $S_2(E^*)$ tenemos que el dual del convexo esférico de la imagen se corresponde con un convexo esférico de la misma forma en la esfera dual:



- Considerando también la esfera $S_2(E)$ y su dual $S_2(E^*)$ tenemos que el dual de un hemisferio es un punto en la esfera dual:



Capítulo 4

Estructura convexa del espacio afín

En este capítulo primero vamos a estudiar la estructura baricéntrica y convexa del espacio afín. También veremos la compactificación canónica del espacio afín para ver la correspondencia entre la esfera y el espacio afín. Luego vamos a traducir la características entre un convexo esférico y un convexo afín y vamos a traducir todas las propiedades a los convexos afines, a sus caras y la dualidad. También vamos a ver la construcción de los convexos afines y los convexos duales.

Definición 4.0.1. Llamaremos espacio afín real de dimensión n a dar un conjunto y un espacio vectorial de dimensión n $(\mathbb{A}^n, E)$ y una aplicación $\mathbb{A}^n \times E \longrightarrow \mathbb{A}^n$ que manda $(p, e) \mapsto p + e \in \mathbb{A}^n$ y verifica:

a)$(p + e) + e' = p + (e + e')$

b)Para todo $p, q \in \mathbb{A}^n$ existe un único $e \in E$ que verifica que $q = p + e$.

A los elementos de $\mathbb{A}^n$ los llamaremos puntos del espacio afín y a los elementos de E los llamaremos vectores directores del espacio afín.

Dados $p, q \in \mathbb{A}^n$, denotaremos por $q - p = e$ al único vector que verifica que $q = p + e$.

Ejemplos de Espacios Afines

a) Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con la suma de vectores es un espacio afín de espacio director E.

$$\begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & E \\ (e, e') & \mapsto & e + e' \end{array} \tag{4.1}$$

Fijado un punto $p_0 \in \mathbb{A}$, podemos identificar $\mathbb{A}$ con E mediante la aplicación $E \longrightarrow \mathbb{A}$ dada por $e \mapsto p_0 + e$.

b) Sea $V = \{p + E'/E' \subseteq E\} \subseteq E$ una subvariedad lineal, entonces toda subvariedad lineal de E es un espacio afín con espacio director E'.

c) Sea $\omega \in E^*$ y sea el abierto $V_\omega = \{\langle e\rangle_+ \in S(E)/\omega(e) > 0\}$ es un espacio afín con espacio director $Ker\ \omega$ donde tenemos que $p + v = \langle \frac{e}{\omega(e)} + v\rangle_+$ para cada $p = \langle e\rangle_+ \in V_\omega$ y $v \in Ker\ \omega$.

Definición 4.0.2. Llamaremos subvariedad afín al conjunto $Y = p_0 + E' = \{p_0 + e/e \in E'\}$ con $p_0 \in \mathbb{A}$ y $E' \subseteq E$ un subespacio de E. Llamaremos recta a la subvariedad afín de dimensión 1 y llamaremos hiperplano a la subvariedad afín de dimensión $n-1$. También tenemos que el espacio de vectores directores de una subvariedad afín es $E' = \{p - q/p, q \in Y\} \subseteq E$.

Definición 4.0.3. Sean $(\mathbb{A}, E)$ y $(\mathbb{A}', E')$ dos espacios afines. Dar una afinidad $T : (\mathbb{A}, E) \longrightarrow (\mathbb{A}', E')$ es dar una aplicación $T : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}'$ y $\bar{T} : E \longrightarrow E'$ una aplicación lineal de modo que $T(p + e) = T(p) + \bar{T}(e)$ $\forall p \in \mathbb{A}$ y $e \in E$.

4.1. Estructura baricéntrica del espacio afín

Ahora vamos a ver la estructura baricéntrica del espacio afín.

Definición 4.1.1. Sea $(\mathbb{A}, E)$ un espacio afín. Fijamos un punto $p_0 \in \mathbb{A}$. Para cada $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ tales que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ y cada $p_1, ..., p_k \in \mathbb{A}$, llamaremos $\lambda_1 p_1 + ... + \lambda_k p_k := p_0 + \lambda_1(p_1 - p_0) + ... + \lambda_k(p_k - p_0)$.

Lema 4.1.2. $\lambda_1 p_1 + ... + \lambda_k p_k$ no depende del punto p_0 elegido para definirlo.

Demostración. Sea $p'_0 \in \mathbb{A}$ otro punto y $e = p_0 - p'_0$.
Aquí vamos a ver que si sustituimos p_0 por $p'_0 + e$ y veremos que no depende de la expresión del p_0 elegido.
$p_0 + \lambda_1(p_1 - p_0) + ... + \lambda_k(p_k - p_0) = p'_0 + e + \lambda_1(p_1 - (p'_0 + e)) + ... + \lambda_k(p_k - (p'_0 + e)) =$
$p'_0 + e + \lambda_1((p_1 - p'_0) - e) + ... + \lambda_k((p_k - p'_0) - e) = p'_0 + e + \lambda_1(p_1 - p'_0) - \lambda_1 e + ... + \lambda_k(p_k - p'_0) - \lambda_k e =$
$p'_0 + e + \lambda_1(p_1 - p'_0) + ... + \lambda_k(p_k - p'_0) - (\lambda_1 + ... + \lambda_k)e = p'_0 + \lambda_1(p_1 - p'_0) + ... + \lambda_k(p_k - p'_0)$ □

Proposición 4.1.3. $Y \subseteq \mathbb{A}$ es una subvariedad afín $\Longleftrightarrow$ $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$ y $p, q \in Y$, se verifica que $\lambda p + (1 - \lambda)q \in Y$.

Demostración. $\Rightarrow$) $Y = p_0 + E'$. Luego $p = p_0 + e_1, q = p_0 + e_2$ que pertenecen a Y si $e_1, e_2 \in E'$. Luego si ponemos p, q como combinación de λ y $1 - \lambda$ tenemos que:

$$\lambda p + (1 - \lambda)q = p_0 + \lambda(p - p_0) + (1 - \lambda)(q - p_0) = p_0 + \lambda e_1 + (1 - \lambda)e_2 \in Y$$

$\Leftarrow$) Sea $p_0 \in Y$ y $E' = \{p - p_0/p \in Y\}$. Podemos ver que $Y = p_0 + E'$. Ahora solo falta probar que E' es un subespacio. Y tenemos que $\lambda(p - p_0) + \mu(q - p_0) + p_0 = \lambda p + \mu q + (1 - \lambda - \mu)p_0$ y con esto vemos que es un subespacio. □

Proposición 4.1.4. $T : (\mathbb{A}, E) \longrightarrow (\mathbb{A}', E')$ es una afinidad $\Longleftrightarrow$ $T : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}'$ verifica que $T(\lambda p + (1 - \lambda)q) = \lambda T(p) + (1 - \lambda)T(q)$.

Utilizaremos la estructura baricéntrica más adelante cuando estudiemos los convexos duales.

4.2. Estructura convexa del espacio afín

Definición 4.2.1. Definimos al segmento que une $p, q \in \mathbb{A}^n$ como
$[p, q] = \{\lambda p + (1-\lambda)q/0 \leq \lambda \leq 1\}$.

Definición 4.2.2. Diremos que K es un convexo de $\mathbb{A}^n$ si verifica que si $p, q \in K$ entonces $[p, q] \subseteq K$.

Toda afinidad $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ define un hiperplano $h_f = \{p \in \mathbb{A}/f(p) = 0\}$. Tenemos que todos los hiperplanos de un espacio afín son de esta forma.

Definición 4.2.3. Llamaremos semiespacio definido por la afinidad f a la parte del espacio afín que verifica que $f(p) \geq 0$. Lo denotaremos H_f. A la intersección de un número finito de semiespacios le llamaremos **poliedro**.

Definición 4.2.4. Llamaremos envolvente convexa de $Y \subseteq \mathbb{A}$ al mínimo convexo que contiene a Y, lo denotaremos $[Y]$. La envolvente convexa de $p_1, ..., p_n \in \mathbb{A}$ la denotaremos
$[p_1, ..., p_n] \subseteq \mathbb{A}^n$.

Definición 4.2.5. Sean $p_1, ..., p_n \in \mathbb{A}$ son convexamente independientes si
$p_i \notin [p_1, ..., \overset{\wedge}{p_i}, ..., p_n] =$ envolvente convexa. A la envolvente convexa de un número finito de puntos convexamente independientes le llamaremos **politopo**.

Aunque en la esfera no hay distinción entre poliedro y politopo, en el espacio afín se diferencian en si tienen puntos en la parte del infinito E. Si alguno de los puntos está en E se trata de un poliedro y si están todos en $\mathbb{A}^n$ entonces se trata de un politopo.

Definición 4.2.6. Llamaremos semirrecta de un espacio afín de origen $p \in \mathbb{A}^n$ y de vector director $e \in E$ al convexo $p + \langle e \rangle_+$.

Definición 4.2.7. Diremos que $e \in E$ es un vector director de un convexo K a los vectores directores de las semirrectas contenidas en K, es decir, $K + e \subseteq K$.

Definición 4.2.8. Denotaremos al espacio director de K como S_K y tenemos que $S_K \subseteq E$ es un espacio semilineal.

Definición 4.2.9. Sea $C \subseteq K$ es una cara de K si es un convexo y verifica que $p, q \in K$ y $p, q \notin C$ entonces $[p, q] \cap C = \phi$.

Definición 4.2.10. Llamaremos subvariedad afín asociada a K a la mínima subvariedad afín que contiene a K. También llamaremos dimensión de K a la dimensión de su subvariedad afín asociada.

Definición 4.2.11. Diremos que K es fuertemente convexo si no contiene rectas, es decir, subvariedades afines.

Definición 4.2.12. Siendo K_1, K_2 dos convexos afines:
-Llamaremos $K_1 + K_2 = \{$envolvente convexa de $K_1 \cup K_2\}$, es decir, el mínimo convexo que contiene a K_1 y K_2. Denotaremos $K_1 \oplus K_2$ si además $K_1 \cap K_2 = \phi$.
-También $K_1 \cap K_2$ es el máximo convexo contenido en K_1 y K_2.

4.3. Compactificación canónica del espacio afín

Para construir esta parte nos vamos a basar en el ejemplo c) de un espacio afín.
Sea $(\mathbb{A}^n, E)$ es espacio afín. Una función $f : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ diremos que es una función afín si es una afinidad, es decir, $f(\lambda p + (1-\lambda)q) = \lambda f(p) + (1-\lambda)f(q)$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ y $p, q \in \mathbb{A}^n$.

Llamaremos $Af(\mathbb{A}^n) = \{f : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{R} \text{ Afinidades}\}$ al espacio vectorial con la suma y el producto por escalares de las funciones reales que son afinidades y $\overline{E} = (Af(\mathbb{A}^n))^*$ a su espacio dual.

Observación 4.3.1. Tenemos que se trata de un espacio vectorial con la suma habitual de funciones y el producto por escalares.

Un ejemplo de función afín son las funciones constantes son aquellas tales que $f_\lambda(p) = \lambda$ $\forall p \in \mathbb{A}^n$. Por ejemplo, tenemos la función constante 1, f_1.
Dentro de $Af(\mathbb{A}^n)$ también se encuentran las funciones constantes las cuales podemos identificar con $\mathbb{R}$.
También por el teorema de reflexividad tenemos que $\overline{E}^*$ se identifica con $Af(\mathbb{A}^n)$, entonces si $f \in Af(\mathbb{A}^n)$ tenemos que $\langle f \rangle_+ \in S(\overline{E}^*)$.

Ahora vamos a definir:

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \mathbb{A}^n & \longrightarrow & V_{f_1} \subseteq S(\overline{E}) \\ & p & \mapsto & \phi(p) \end{array}$$

donde $V_{f_1} = \{\langle \omega \rangle_+ \in S(\overline{E}) / \omega(f_1) > 0\}$ y $\phi(p) = \langle \omega_p \rangle_+$ tal que $\omega_p(f) = f(p)$.

Teorema 4.3.2. La aplicación ϕ es una afinidad biyectiva, es decir, un isomorfismo de espacios afines.

Demostración. Sabemos que V_{f_1} es isomorfo como espacio afín al hiperplano de $\overline{E}$ dado por $H = \{\omega \in Af(\mathbb{A}^n)^* / \omega(f_1) = 1\}$. Teniendo en cuenta esta identificación solo hay que probar que $\overline{\phi} : \mathbb{A}^n \longrightarrow H$ dada por $\overline{\phi}(p) = \omega_p$ (definida antes) sea isomorfismo.

Veamos que es una afinidad:
$\overline{\phi}(\lambda p + (1-\lambda)q) = \omega_{\lambda p + (1-\lambda)q} = \lambda\omega_p + (1-\lambda)\omega_q = \lambda\overline{\Phi}(p) + (1-\lambda)\overline{\Phi}(q)$.

Y ahora veamos que es inyectiva:
Veamos que si $p \neq q$, entonces $\overline{\phi}(p) = \omega_p \neq \overline{\phi}(q) = \omega_q$. Sea $H' = \{f = 0\}$ un hiperplano de $\mathbb{A}^n$ que pasa por p y no por q. Luego $\omega_p(f) = f(p) = 0 \neq f(q) = \omega_q(f)$. $\square$

Con este teorema hemos probado que dar un espacio afín de dimensión n es equivalente a dar una esfera de dimensión n y un punto de su esfera dual $(S(\overline{E}), \omega_\infty = \langle \omega \rangle_+ \in S(\overline{E}^*))$.
Con esto los puntos del espacio afín son $\mathbb{A}^n = \{\langle e \rangle_+ \in S(\overline{E}) / \omega(e) > 0\}$, los vectores directores del espacio afín son $E = \operatorname{Ker} \omega$ y la suma de puntos con vectores es $\langle e \rangle_+ + e' = \langle \frac{e}{\omega(e)} + e' \rangle_+$, es decir, $p + e' = \langle \overline{e} + e' \rangle_+$ donde $\overline{e} \in p$ tal que $\omega(\overline{e}) = 1$.

El cierre del espacio afín dentro de la esfera es el hemisferio cerrado
$H_\omega = \{\langle e\rangle_+ \in S(\overline{E})/\omega(e) \geq 0\}$ que es un espacio compacto y por otro lado los puntos del infinito son $H_\omega - \mathbb{A}^n = S(E)$ que denotaremos $S(E) = S_\infty$. Llamaremos puntos del infinito de $\mathbb{A}^n$ a S_∞.

4.4. Convexos del espacio afín

Con lo que hemos visto hasta ahora, tenemos que dar un convexo K en el espacio afín $(S(\overline{E}), \omega_\infty)$ es lo mismo que dar un convexo $\overline{K}$ de $S(\overline{E})$ y $\omega_\infty \in \overline{K}^V$.

Sea $\overline{K} \not\subseteq S_\infty$ un convexo de $S(\overline{E})$ y sea $K = \overline{K} \cap \mathbb{A}^n \subseteq \mathbb{A}^n$ su convexo en el espacio afín. Tenemos que $\overline{K} = K \sqcup (H_\omega \cap S_\infty)$. También denotaremos $\overline{K}_\infty = S_\infty \cap \overline{K}$ y lo llamaremos los puntos del infinito de K.

El conjunto de vectores directores de K forman S_K que es un espacio semilineal contenido en E, tal que $\pi(S_K) = \overline{K_\infty}$.

Proposición 4.4.1. $K \subseteq \mathbb{A}^n$ es un compacto $\iff S_K = \{0\}$.

Sea $K \subseteq \mathbb{A}^n$ entonces tenemos que $\overline{K} = \pi(\overline{S_K})$ y $\overline{K_\infty} = \pi(S_K)$ con $\overline{K_\infty} \subseteq \overline{K}$ como S_K es el espacio de vectores directores de K tenemos como espacio afín $(K \subseteq \mathbb{A}^n, S_K \subseteq E)$.

$$\begin{array}{rll} & \overline{S_K} \subseteq \overline{E}, & \omega \in \overline{S_K}^V \\ & \ \cup & \\ \overline{S_K} \cap E & = S_K \subseteq E & = \{\omega = 0\} \end{array}$$

Tenemos que S_K es una cara de $\overline{S_K}$.
Tenemos otro convexo $(\overline{K}, \overline{K} \cap S_\infty = \overline{K_\infty})$. Cuando $\overline{K_\infty}$ es el vacío, K es un compacto en el espacio afín (acotado).
También podemos ver que como espacio semilineal $\overline{S_K}$ descompone como $\overline{S_K} = V_S \oplus S'$ con $V_S \subseteq \text{Ker } \omega \cap \overline{S_K}$ espacio vectorial.

Como vimos en el capítulo de espacios semilineales, $\overline{S_K} = V_S \oplus S'$, esto traducido al espacio afín nos queda como $K = K' + V_S \subseteq (\mathbb{A}^n, E)$ con $\{p + e/p \in K, e \in V_S\}$ con K' que no contiene rectas.
Entonces podemos centrarnos en estudiar los convexos que no contienen rectas.
Sea ahora $K \subseteq \mathbb{A}^n$ que no contiene rectas y $\overline{K} = \pi(\overline{S_K})$ con $\overline{S_K}$ fuertemente convexo.
También tenemos que si $C \subseteq K$ es cara entonces $\overline{C} \subseteq \overline{K}$ también es cara.
Ahora tenemos que $\overline{S_K}$ es fuertemente convexo y está generado por sus aristas. Y $\overline{K} = \pi(\overline{S_K})$ es la envolvente convexa de sus vértices. en $\overline{K}$ están los vértices de K y los del infinito (si los hay).
Podemos descomponer $\overline{S_K} = S' + S_K$ con S' puntos del espacio afín y $S_K \subseteq E$ vectores de E y esto en el convexo se descompone como $\overline{K} = [p_i] + \langle e_i\rangle_+$ con $p_i = \{$ vértices $\}$ y e_i los vectores directores de las semirrectas de K que son caras, por tanto $p_i + \langle e_i\rangle_+$ son las semirrectas de K.

Traducción de la geometría esférico a la geometría afín

Sea $(S(\overline{E}), \omega_\infty = \langle \omega \rangle_+ \in S(\overline{E}^*))$ un espacio afín como antes. A continuación vamos a traducir las cuestiones de la esfera en el espacio afín.

-En primer lugar, como vimos en la parte de la compatificación tenemos que el *hemisferio* H_ω *abierto* se corresponde con el propio *espacio afín* $\mathbb{A}^n$, el $Ker\ \omega$ se corresponde con *los vectores directores* de $\mathbb{A}^n$, es decir, E y *los puntos del infinito* de $\mathbb{A}^n$ son $S(E)=S_\infty$.
También tenemos que todo subespacio cerrado Y del espacio afín al hacer su cierre en la esfera $\overline{Y}$ es un compacto y $\overline{Y} - Y$ es un cerrado de S_∞. Y recíprocamente todo cerrado $\overline{Y}$ de $S(\overline{E})$ no contenido en el infinito da un cerrado $Y = \overline{Y} \cap \mathbb{A}^n$ del espacio afín.

-Una *subvariedad afín* $V \subseteq \mathbb{A}^n$ *de espacio director* E' se corresponde en la esfera con una *subvariedad esférica* $\overline{V} \subseteq S(\overline{E})$ *tal que* $S_\infty \cap \overline{V} = S(E')$.
Por ejemplo, si tomamos la subvariedad afín $p + E'$ donde $p = \langle e \rangle_+$ es la intersección de la subvariedad esférica $S(\langle e \rangle + E')$ con el espacio afín. Y recíprocamente la subvariedad esférica $S(\overline{E}')$ no contenida en el infinito al cortar con el espacio afín produce la subvariedad afín $p + (\overline{E}' \cap E)$ donde $p = \langle e \rangle_+$ y $e \in \overline{E}'$ tal que $e \notin E$.

-Tenemos que la *recta que une p y q* se corresponde con la *circunferencia que une p y q.*
Si $p = \langle e_1 \rangle_+$ y $q = \langle e_2 \rangle_+$ donde $\omega(e_1) = 1 = \omega(e_2)$, entonces para todo $\lambda \in \mathbb{R}$,
$\lambda p + (1-\lambda)q = \langle \lambda e_1 + (1-\lambda)e_2 \rangle_+ \in \langle e_1, e_2 \rangle_+$. Recíprocamente, para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\langle \lambda e_1 + \mu e_2 \rangle_+ = \langle \tfrac{\lambda e_1 + \mu e_2}{\omega(\lambda e_1 + \mu e_2)} \rangle_+ = \langle \tfrac{\lambda e_1 + \mu e_2}{\lambda + \mu} \rangle_+ \overset{\rho = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}}{=} \rho p + (1-\rho)q.$$

-Tenemos que el *segmento que une p y q* se corresponde con el *arco que une p y q.*
Por un lado para todo $0 \leq \lambda \leq 1$, $\lambda p + (1-\lambda)q = \langle \lambda e_1 + (1-\lambda)e_2 \rangle_+ \in \langle e_1, e_2 \rangle_+$. Y recíprocamente, para todo $\lambda, \mu \geq 0$

$$\langle \lambda e_1 + \mu e_2 \rangle_+ = \langle \tfrac{\lambda e_1 + \mu e_2}{\omega(\lambda e_1 + \mu e_2)} \rangle_+ = \langle \tfrac{\lambda e_1 + \mu e_2}{\lambda + \mu} \rangle_+ \overset{\rho = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}}{=} \rho p + (1-\rho)q \in [p, q] \text{ donde } 0 \geq \rho \geq 1.$$

-También tenemos que la *semirrecta de origen* $p = \langle e_1 \rangle_+$ *y subespacio director* $\langle e \rangle_+$ se corresponde con el *arco que une* p *con* $\langle e \rangle_+ \in S_\infty$.
Tenemos que $p + \langle e \rangle_+ = \{\langle e_1 + \mu e \rangle_+ / \mu \geq 0\} = \langle e_1, e \rangle_+ \cap V_{f_1}$, por tanto los puntos del infinito se pueden identificar con los subespacios directores de las semirrectas del espacio afín.

-En general, si K es un convexo de $\mathbb{A}^n$, su cierre $\overline{K}$ es un convexo de $S(\overline{E})$.

-Tenemos que los *semiespacios del espacio afín* se corresponden con los *hemisferios de la esfera.*
Cada semiespacio afín está definido por $\langle f \rangle_+$ donde f es una afinidad del espacio afín, es decir, un elemento de $S(\overline{E}^*)$ que define un hemisferio de $S(\overline{E})$. Luego $S(\overline{E}^*)$ se identifica con el conjunto de los semiespacios cerrados de $\mathbb{A}^n$ incluyendo el total y el vacío que se corresponde si tomamos $f = \omega_\infty$ o $f = -\omega_\infty$.

-La noción de *puntos convexamente independientes* se corresponde con la de *puntos convexamente independientes.*

-La *subvariedad esférica de un convexo esférico* se corresponde con la *subvariedad afín de un convexo afín.*

-La dimensión del convexo esférico va a ser la misma que la del convexo afín ya que ambas se corresponden con las subvariedades esférica ya fín asociadas.

-Los *vértices, caras e hipercaras* de un convexo esférico se corresponden con los *vértices, caras e hipercaras* del convexo afín.

-Tenemos que $\overline{K_1} + \overline{K_2}$ se corresponde con $K_1 + K_2$ y $\overline{K_1} \cap \overline{K_2}$ se corresponde con $K_1 \cap K_2$.

-Un convexo esférico *fuertemente convexo* se corresponde con un convexo afín *fuertemente convexo.*

-Un *poliedro* en la esfera puede corresponderse a un *poliedro* del espacio afín o con un *politopo* del espacio afín dependiendo de si algún punto está en el infinito (poliedro) o si todos son puntos de $\mathbb{A}^n$ (politopo).

Traducción de los teoremas al espacio afín

Ahora vamos interpretar los teoremas que hemos visto en la esfera para aplicarlos en el espacio afín.

-El teorema que nos dice "Todo convexo esférico cerrado y fuertemente convexo es la envolvente convexa de sus vértices" lo podemos traducir al lenguaje esférico como "Todo convexo afín cerrado y compacto es la envolvente convexa de sus vértices".

-El teorema que nos dice "Todo convexo esférico cerrado es la intersección de los hemisferios que lo contienen" lo podemos traducir al lenguaje esférico como "Todo convexo esférico cerrado es la intersección de los semiespacios que lo contienen".

-El teorema que nos dice "Si $\overline{K}$ es fuertemente convexo entonces no contiene subvariedades esféricas" lo podemos traducir al lenguaje esférico como "Si K es fuertemente convexo entonces no contiene subvariedades afines".

-El teorema que nos dice "Todo convexo esférico $\overline{K} = \pi(S)$ descompone de modo único salvo isomorfismos en la suma directa de una subvariedad esférica y de un convexo esférico fuertemente convexo, es decir, $\overline{K} = V_{\overline{K}} \oplus \overline{K'}$ con $\overline{K'}$ fuertemente convexo" lo podemos traducir al lenguaje esférico como "Todo convexo afín K descompone de modo único salvo isomorfismos

en la suma directa de una espacio vectorial y de un convexo afín fuertemente convexo, es decir, $K = M \oplus K'$ con K' fuertemente convexo y M un espacio vectorial".
Este teorema tiene un corolario que nos dice "Si $\overline{K}$ es la envolvente convexa de un número finito de puntos entonces $\overline{K} = V_{\overline{K}} \oplus \overline{K'}$ con $\overline{K'}$ un poliedro", entonces lo podemos traducir como "Si K es la envolvente convexa de un número finito de puntos entonces $K = M \oplus K'$ con K' un poliedro y M un espacio vectorial".

4.5. Caras de un convexo afín

Como hemos definido antes, tenemos que $C \subseteq K$ es una cara de K si es un convexo y verifica que $p, q \in K$ y $p, q \notin C$ entonces $[p, q] \cap C = \phi$.

También tenemos si se verifica que si para todos los $\langle e \rangle_+ \in \overline{K}$ ninguno está en S_∞ entonces K no tiene ningún punto en el infinito y por tanto $C \subseteq K$ es la cara que se corresponde con $\overline{C} \subset \overline{K}$.

Traducción de la geometría esférico a la geometría afín

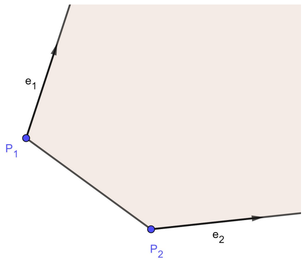
Ahora vamos interpretar los teoremas sobre las caras que hemos visto en la esfera para aplicarlos en el espacio afín.

-El teorema que nos dice "Sea $\overline{K}$ un convexo esférico fuertemente convexo y sea $W \subseteq \overline{K}$ un conjunto de puntos convexamente independientes finito, entonces P es un vértice si y solo si $P \in W$" lo podemos traducir como "Sea K un convexo afín fuertemente convexo y sea $W \subseteq K$ un conjunto de puntos convexamente independientes finito, entonces K es la envolvente convexa de W".
Su corolario nos dice "Todo convexo fuertemente convexo de $S(E)$ es la envolvente convexa de sus vértices" lo podemos traducir al lenguaje afín como "Todo convexo afín que no contiene rectas es la envolvente convexa de sus vértices y sus aristas que son semirrectas".

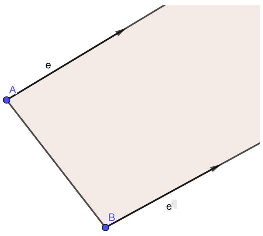
4.6. Ejemplos de convexos en el plano afín

Sea $K \subseteq \mathbb{A}^2$. Entonces como ejemplos de convexos tenemos los siguientes:

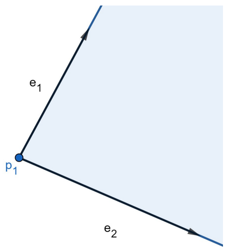
1) Sean p_1, p_2 dos vértices y e_1, e_2 dos vectores directores. Entonces el convexo es de la forma $K = [p_1, p_2] + \langle e_1, e_2 \rangle_+$.



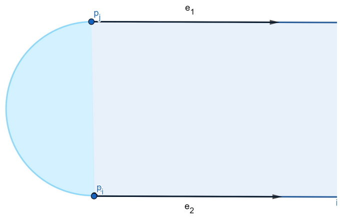
También en este caso podemos tomar dos vértices p_1, p_2 y un vector director e. Entonces el convexo es de la forma $K = [p_1, p_2] + \langle e \rangle_+$.



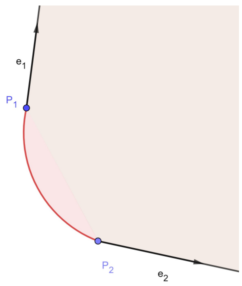
2) Sea p_1 un vértice y e_1, e_2 dos vectores directores. Entonces el convexo es de la forma $K = [p_1] + \langle e_1, e_2 \rangle_+$.



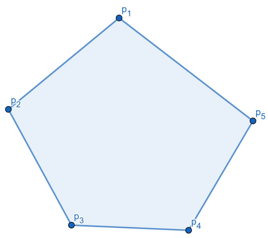
3) Sean $\{p_i\}_{i\in I}$ con p_i los puntos pertenecientes a la semicircunferencia $\{p_i\}_{i\in I}$ y e_1 un vector director. Entonces el convexo es de la forma $K = [p_i]_{i\in I} + \langle e_1 \rangle_+$.



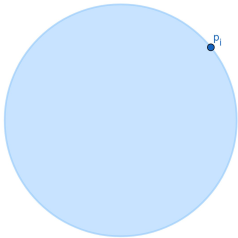
En este caso podemos considerar también un arco de circunferencia y los vectores que hacen que siga siendo convexo. Entonces los vértices serían $\{p_i\}_{i\in I}$ con I un arco de la circunferencia y de vectores directores e_1, e_2. Entonces el convexo sería de la forma $K = [p_i]_{i\in I} + \langle e_1, e_2 \rangle_+$.



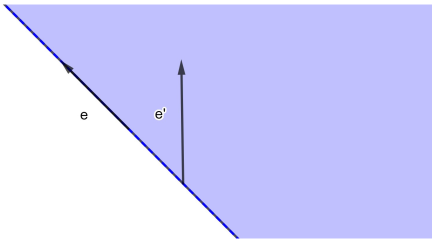
4) Sean $\{p_1, p_2, ..., p_n\}$ un número finito de puntos. La envolvente convexa de $p_1, ..., p_n$ $K = [p_1, ..., p_n]$. (Para el dibujo vamos a tomar $n = 5$.).



5) Sean $\{p_i\}$ con $p_i \in S^1$ con S^1 la circunferencia. Entonces el convexo es $K = [p_i]_{p_i \in S^1}$.



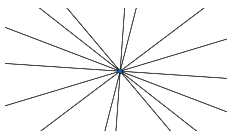
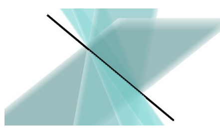
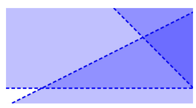
6)Semiespacios



En conclusión , tenemos que un convexo está determinado por sus vértices y sus aristas que son semirrectas.

4.7. Convexos duales del espacio afín

Para comenzar esta sección recordamos que toda subvariedad lineal es intersección de los hiperplanos que pasan por él. Por ejemplo:
a)Un punto es la intersección de todas las rectas que pasan por él.
b)La recta es la intersección de todos los planos que pasan por ella.
c)Pues por otro lado, tenemos que un triángulo (y otros polígonos) es la intersección de los semiespacios que pasan por él.

a)  b)  c) 

Como hemos visto antes, $\overline{E}^*$ es el espacio vectorial de las afinidades del espacio afín $\mathbb{A}^n = (S(\overline{E}), \omega_\infty = \langle \omega \rangle_+)$ y los puntos de $S(\overline{E}^*)$ se identifican con los semiespacios del espacio afín $\mathbb{A}^n$ incluyendo el vacío y el total.

Sea K un convexo del espacio afín $\mathbb{A}^n$, equivalentemente tenemos un convexo esférico $\overline{K}$ en la esfera $S(\overline{E})$ con $E \subseteq \overline{E}$ y sea un punto de la esfera dual $\omega_\infty = \langle \omega \rangle_+ \in S(\overline{E^*})$.

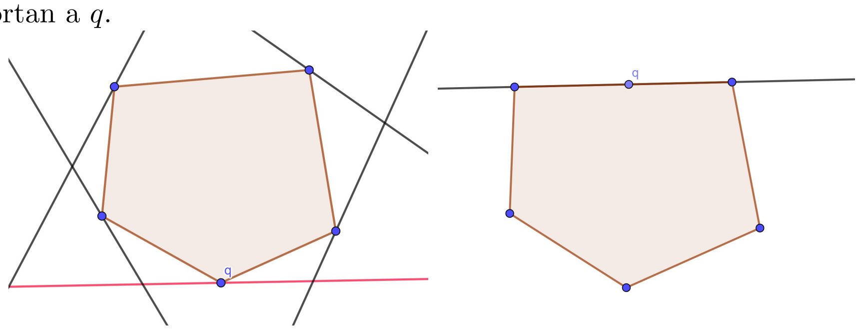
Como hemos visto en el capítulo 3, el dual de $\overline{K}$ es $\overline{K}^V$ y como puntos de la esfera dual se corresponden con los semiespacios H_f del espacio afín que contienen a K incluyendo el total. Y por el teorema de dualidad ($\overline{K} = \overline{K}^{VV}$) obtenemos que:

Teorema 4.7.1. Todo convexo afín es la intersección de los semiespacios que lo contienen.

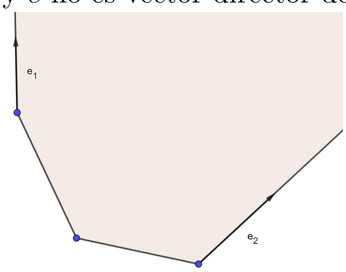
Para obtener un convexo afín en la esfera dual hay que fijar un punto $q \in \overline{K}^{VV} = K$.

Definición 4.7.2. Llamaremos convexo afín dual de K asociado a $q \in K$ a $(\overline{K}^V, q)$. Si $q = \langle \overline{e} \rangle_+ \in S(\overline{E})$, la parte afín es $K_q^V = \{\langle \overline{\omega} \rangle_+ \in \overline{K}^V / \overline{\omega}(e) > 0\}$. Los puntos de K_q^V se identifican con los semiespacios H_f del espacio afín que contienen a K y tales que $f(q) \neq 0$.

Ahora veremos que sucede cuando el q elegido se toma en el interior del convexo o que esté en una cara del convexo. Si q se encuentra en el interior aunque sean diferentes los convexos duales son isomorfos y en el caso en el que cojamos puntos que pertenecen a la misma cara en ese caso son isomorfos entre ellos. Sea C la mínima cara de K que pasa por q y $q' \in C$ entonces $K_q^V \simeq K_{q'}^V$. Por tanto podemos definir $K_q^V = \{$Semiespacios de $\mathbb{A}^n$ que contienen a K y $q \notin$ hiperplano que define el semiespacio$\}$, es decir, todos los hiperplanos que dejan a un lado la figura y no cortan a q.



Por ejemplo, en los dibujos para definir K_q^V no podemos coger las rectas que pasan por q. Ahora vemos un punto del infinito $q \in \overline{K} \cap S(E)$. Tenemos que $q = \langle e \rangle_+$ vector director de K. En vez de que $f(q) \neq 0$, buscamos que e no sea vector director del hiperplano $\{f = 0\}$. Definimos $K_e^V = \{\langle f \rangle_+ / f(K) \geq 0$ y e no es vector director del hiperplano $\{f = 0\}\}$.



Según el dibujo tendríamos que $K_{e_1}^V = \{$ hiperplanos tales que no dividen en dos la figura y e_1 no es un vector director ($\langle e_1 \rangle$ no es paralela al hiperplano)$\}$.

Y ahora vamos a ver la correspondencia en las caras. Sean K_q un convexo con el punto fijado y K_q^V su dual. Entonces sea C una cara de K_q luego su cara dual
$\overset{\circ}{C} = \{\langle f \rangle_+ / f(K) \geq 0, f(q) \neq 0, f(C) = 0\}$. De aquí tenemos la equivalencia {Caras de K_q que no pasan por q} $\equiv$ {Caras de K_q^V}.

Definición 4.7.3. Llamaremos cara expuesta de K a C si $C = h_f \cap K$ con f una afinidad y $h_f = \{f = 0\}$ el hiperplano que genera.

Proposición 4.7.4. Sea $q \in K$. Llamaremos C_q a la mínima cara expuesta que pasa por q. Si $q, q' \in K$ verifican que $C_q = C_{q'}$, entonces $K_q^V = K_{q'}^V$.

Demostración. Si H_f es un semiespacio que contiene a K y $f(q) \neq 0$, entonces $f(q') \neq 0$ pues $\{f = 0\} \cap K$ es una cara expuesta de K que si no pasa por q, tampoco pasa por q'.
Recíprocamente, si H_f es un semiespacio que contiene a K y $f(q') \neq 0$, entonces $f(q) \neq 0$ pues $\{f = 0\} \cap K$ es una cara expuesta de K que si no pasa por q', tampoco pasa por q. □

Corolario 4.7.5. Hay tantos convexos duales de K como caras expuestas de K.

Observación 4.7.6. También se podría haber tomado $q \in \overline{K} \cap S_\infty$; es decir, un vector director e de K. El convexo afín dual correspondiente es K_e^V cuyos puntos son los semiespacios H_f que contienen a K y e no es un vector director del hiperplano $\{f = 0\}$. Por lo tanto, hay tantos convexos afines duales de K como caras expuestas de $\overline{K}$.

Para dar un teorema de dualidad para convexos afines nos fijaremos en los convexos K compactos de dimensión n. En este caso, $K = \overline{K}$. Para que K_q^V también sea compacto, tomaremos $q \in K$ que no está en ninguna cara, es decir, q es un punto del interior de K. Por eso a partir de ahora llamaremos convexo dual de K al convexo dual de K asociado a un punto del interior y lo denotaremos K^V. Podemos observar que los puntos de K^V se corresponden con los semiespacios del espacio afín que contienen a K (incluido el espacio total).

Observación 4.7.7. En el caso de que K sea la envolvente convexa de los puntos convexamente independientes $p_1, ..., p_r$ se puede tomar $q = \frac{p_1 + ... + p_r}{r}$.

Traducción de los teoremas de dualidad en la geometría afín

Ahora vamos a traducir los teoremas sobre dualidad entre un convexo afín y su dual con un punto del interior.

-El teorema que nos dice "El dual de la envolvente convexa de un número finito de puntos es la envolvente convexa de un número finito de puntos" lo podemos traducir al lenguaje afín como "El dual de la envolvente convexa de un número finito de puntos es la envolvente convexa de un número finito de puntos".

-El teorema que nos dice "El dual de un poliedro es un poliedro" equivale en lenguaje afín como "El dual de un politopo es un politopo".

4.8. Dualidad para las caras de los convexos afines

Como hemos visto antes llamaremos cara indiciente a C al subconjunto $\mathring{C}$ de K_q^V formado por los semiespacios H_f tales que $f(C) = 0$ con $q \in K$. También tenemos que una cara es expuesta cuando es la intersección de un hiperplano y el convexo.

Traducción de los teoremas de dualidad en las caras

Ahora vamos a traducir el teorema de dualidad entre las caras de un convexo esférico K y su dual K_q^V asociado a q un punto de K.

Teorema 4.8.1. Sea K un convexo afín compacto de dimensión n en un espacio afín de dimensión n. La correspondencia $C \to \mathring{C}$ da una correspondencia biunívoca entre las caras expuesta de K y las caras expuestas de K_q^V de modo que:
-dim $\mathring{C} \leq n$ - dim C - 1.
- Si $C_1 \subseteq C_2$, entonces $\mathring{C}_2 \subseteq \mathring{C}_1$.

Teorema 4.8.2. Sea K un politopo en un espacio afín de dimensión n. La correspondencia $C \to \mathring{C}$ da una correspondencia biunívoca entre las caras de K y las caras de K_q^V de modo que:
- dim $\mathring{C}$ = n - dim C - 1. Así los vértices de K se corresponden con las hipercaras de K_q^V y las hipercaras de K se corresponden con los vértices de K_q^V.
- Si $C_1 \subseteq C_2$, entonces $\mathring{C}_2 \subseteq \mathring{C}_1$.

Estructura de caras de un politopo afín

Ahora vamos a ver la estructura de caras de un politopo en el espacio afín:

-El teorema que nos dice:
"a) Toda cara $\overline{C}$ de $\overline{K}$ es la envolvente convexa de un número finito de vértices de $\overline{K}$ y por tanto hay un número finito de caras.
b) Toda cara $\overline{C}$ de $\overline{K}$ es la intersección de las hipercaras de $\overline{K}$ que contienen a la $\overline{C}$"
lo podemos traducir al lenguaje esférico como:
"a) Toda cara C de K es la envolvente convexa de un número finito de vértices de K y por tanto hay un número finito de caras.
b) Toda cara C de K es la intersección de las hipercaras de K que contienen a la C".

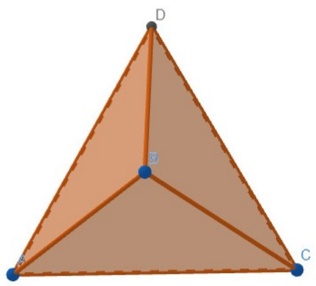
-El teorema que nos dice:
"Sea $\overline{K}$ un poliedro de dimensión n.
a) $\overline{K}^V$ esta generado por $\langle\omega_1\rangle_+, \langle\omega_2\rangle_+, ..., \langle\omega_s\rangle_+$ siendo $S(\text{Ker } \omega_i) \cap \overline{K}$ las hipercaras de $\overline{K}$.
b) Además es la envolvente convexa de un número finito de puntos, por tanto $\overline{K}^V$ es poliedro de dimensión n"
lo podemos traducir al lenguaje esférico como:

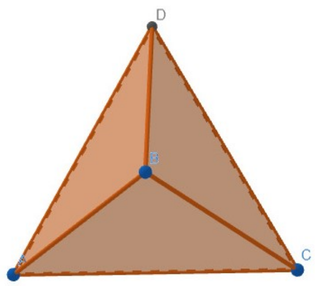
“Sea K un politopo de dimensión n.
a) K^V esta generado por $\langle\omega_1\rangle_+, \langle\omega_2\rangle_+, ..., \langle\omega_s\rangle_+$ siendo $S(\text{Ker } \omega_i) \cap K$ las hipercaras de K.
b) Además es la envolvente convexa de un número finito de puntos, por tanto K^V es poliedro de dimensión n”.

4.9. Ejemplos de convexos afines y sus duales

1) Tenemos que el dual de un politopo es un politopo:
1a) En este caso nuestro convexo es un tetraedro y su dual tambiń es un tetraedro.

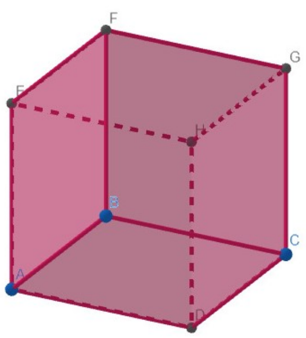
$$\begin{array}{r} \text{Vértices} = 4 = \text{Aristas de dimensión } 1 \\ \text{Aristas} = 6 = \text{Caras de dimensión } 2 \\ \text{Caras} = 4 = \text{Hipercaras de dimensión } 3 \end{array} \iff \begin{array}{c} \text{Caras} = 4 = \text{Hipercaras de dimensión } 3 \\ \text{Aristas} = 6 = \text{Caras de dimensión } 2 \\ \text{Vértices} = 4 = \text{Aristas de dimensión } 1 \end{array}$$

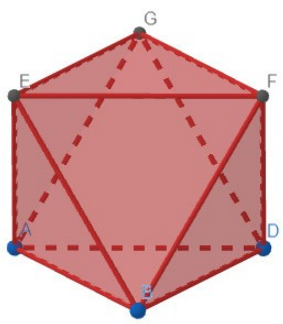




1b) En este caso tenemos el cubo y su dual es un octaedro.

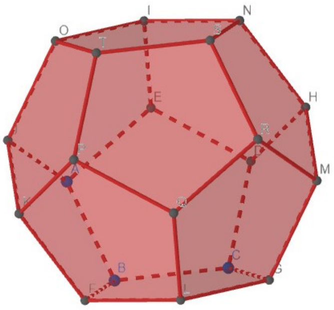
$$\begin{array}{r} \text{Vértices} = 8 = \text{Aristas de dimensión } 1 \\ \text{Aristas} = 12 = \text{Caras de dimensión } 2 \\ \text{Caras} = 6 = \text{Hipercaras de dimensión } 3 \end{array} \iff \begin{array}{c} \text{Caras} = 8 = \text{Hipercaras de dimensión } 3 \\ \text{Aristas} = 12 = \text{Caras de dimensión } 2 \\ \text{Vértices} = 6 = \text{Aristas de dimensión } 1 \end{array}$$

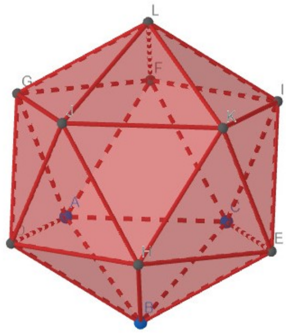




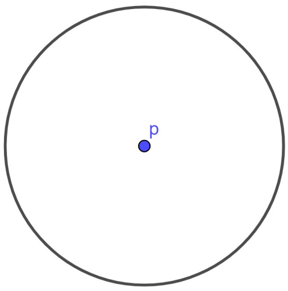
1c) En este caso tenemos el dodecaedro y su dual es un icosaedro.

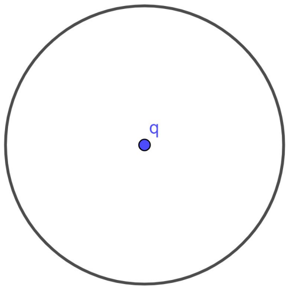
$$\begin{array}{r} \text{Vértices} = 20 = \text{Aristas de dimensión } 1 \\ \text{Aristas} = 30 = \text{Caras de dimensión } 2 \\ \text{Caras} = 12 = \text{Hipercaras de dimensión } 3 \end{array} \iff \begin{array}{c} \text{Caras} = 20 = \text{Hipercaras de dimensión } 3 \\ \text{Aristas} = 30 = \text{Caras de dimensión } 2 \\ \text{Vértices} = 12 = \text{Aristas de dimensión } 1 \end{array}$$





2) El dual de un disco cerrado es un disco cerrado.





Bibliografía

[1] BRONDSTED, A. *An Introduction to Convex Polytopes*. 1983. ISBN 0-387-90722-X, Ed Springer

[2] GRUNBAUM, J. *Convex Polytopes*. Pure and applied mathematics (Interscience Publishers) 16, 1967. Ed Springer

[3] LAURITZEN, N. *Lectures on convex sets*, 2009.

[4] HERNANDEZ RUIPEREZ, D. *Algebra lineal*, 1985. ISBN 8474816033, Universidad de Salamanca