INFORME FINAL DEL PROYECTO DE INNOVACIÓN DOCENTE

(CONVOCATORIA 2010)

30 E-LECCIONES DE CÁLCULO PARA EL GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA

1. Datos identificativos del proyecto

Miembros del equipo investigador:

Tocino García, Ángel Andrés

Maldonado Cordero, Mercedes

Senosiaín Aramendía, Mª Jesús

Convocatoria: 2010

Plazo de ejecución: Septiembre-2010/Julio-2011

Ayuda concedida: 525 euros

2. Resumen del proyecto

La implantación en 2010-2011 del primer curso del Grado en Informática ha supuesto la sustitución de las asignaturas *Cálculo Diferencial* y *Cálculo Integral* (cada una de ellas semestral) por la denominada *Cálculo*, materia correspondiente al segundo semestre. La reducción de horas de clases magistrales conlleva, de modo evidente, la necesidad de seleccionar los contenidos que se consideran imprescindibles y sintetizar su presentación, sin perder claridad y eficacia.

En este proyecto se han diseñado 28 lecciones de Cálculo para ser explicadas en una hora de clase magistral cada una de ellas (exposición de los contenidos teóricos y su ilustración con ejemplos y aplicaciones). Los contenidos de dichas lecciones se han preparado en diferentes formatos, según su destino. Por una parte se han elaborado dispositivas, utilizadas durante la exposición magistral. Por otra se han convertido al formato pdf para ser utilizado como texto de lectura en papel, en la pantalla del ordenador o en un e-book.

3. Calendario de actuaciones

Actuaciones llevadas a cabo para la realización del proyecto:

- Septiembre-2010: Una reunión semanal para planificar el curso, seleccionar las lecciones y distribuirlas entre los miembros del equipo.
- Octubre-Noviembre-2010: Desarrollo individual del contenido de cada lección.
- Diciembre-2010: Puesta en común de los temas. Depuración de los contenidos. El texto (casi) definitivo queda detallado.
- Enero-2010: Escritura en La-TeX del texto. Elaboración de diapositivas (texto hiper-referenciado) con los contenidos de las lecciones. Conversión del texto a formato pdf utilizable como notas por los alumnos
- Febrero-Mayo-2010: Desarrollo de la docencia presencial durante 14 semanas. Desarrollo de la asignatura en el campus virtual, con acceso a los materiales docentes elaborados.
- Junio-Julio-2010: Conversión del texto a formato pdf adaptado a los e-book Papyre 6.1 disponibles en la Universidad de Salalamanca. Elaboración del informe final del proyecto

4. Recursos empleados

Con la ayuda recibida se compraron dos notebooks, utilizados en la exposición de las diapositivas en las lecciones magistrales. Para la elaboración de los contenidos de los temas se emplearon recursos bibliográficos propios y de la biblioteca Abraham Zacut. Para la elaboración del texto escrito se usó el software LateX y la realización de dibujos y figuras así como los códigos de programación se llevaron a cabo mediante el programa Mathematica, ambos disponibles en el Departamento de Matemáticas.

5. Desarrollo del trabajo

La planificación del curso y la selección de las lecciones que lo componen supuso el comienzo de este trabajo. Esta selección se fundamentó en los contenidos generales correspondientes a la asignatura "Cálculo" reflejados en la memoria del Grado en Informática. Para la elaboración del material se tuvo en cuenta que ésta es una materia básica y de primer curso, lo que requiere un periodo inicial de adaptación de los estudiantes, así como un ritmo más pausado al comienzo. Puesto que algunos de los contenidos han sido estudiados por parte de los alumnos antes de su ingreso en la universidad, los primeros temas se concibieron a modo de repaso y se reflejaron por escrito, aunque en algunos casos su exposición en las clases no sea tan detallada.

Por otra parte se tuvo en cuenta la disponibilidad temporal de docencia presencial. Puesto que se dispone de 14 semanas y dos horas de clase magistral por semana, se elaboraron exactamente 28 lecciones; cada una contiene el material para desarrollar en una clase. Se enumeran a continuación las lecciones:

Lección 1: Preliminares

Conjuntos. Los números naturales, enteros y racionales.

Lección 2: Los números reales y complejos.

Los números reales. Valor absoluto. Intervalos. Los números complejos.

Lección 3: Funciones

Funciones reales de variable real. Conceptos básicos.

Lección 4: Funciones elementales (I)

Polinómicas, exponenciales y logarítmicas.

Lección 5: Funciones elementales (II)
Las funciones trigonométricas.
Lección 6: Límites (I)
Límite de una función en un punto. Límites laterales.
Lección 7: Límites (II)
Límites infinitos. Límites en el infinito. Cálculo de límites.
Lección 8: Continuidad de funciones (I)
Continuidad en un punto y en un intervalo. Propiedades.
Lección 9: Continuidad de funciones (II)
Teoremas de Bolzano y Weierstrass. Aplicaciones.
Lección 10: Derivación de funciones (I)
Derivada de una función en un punto. Propiedades. Derivadas sucesivas.
Lección 11: Derivación de funciones (II)
Cálculo de derivadas. Regla de la cadena. Derivada de la función inversa.
Lección 12: Teoremas del valor medio
Teoremas de Rolle y del valor medio. Aplicaciones.
Lección 13: Aplicaciones de la derivada al estudio local de funciones
Crecimiento. Extremos relativos y absolutos.
Lección 14: Regla de L´Hôpital
Regla de L´Hôpital y aplicaciones.
Lección 15: Fórmula de Taylor
Polinomio de Taylor. Resto de Lagrange. Aproximación de funciones.
Lección 16: Introducción al cálculo diferencial en varias variables (I)
Funciones de varias variables. Derivadas parciales. Gradiente.
Lección 17: Introducción al cálculo diferencial en varias variables (II)
Puntos de silla y extremos de una función de dos variables.
Lección 18: Primitivas
Definición y propiedades. Primitivas elementales.
Lección 19: Métodos de cálculo de primitivas
Sustitución, cambio de variable e integración por partes.
Lección 20: La integral de Riemann
Particiones. Definición y propiedades de la integral de Riemann.
Lección 21: El teorema fundamental del cálculo
Teorema fundamental del cálculo integral. Regla de Barrow.
Lección 22: Aplicaciones del cálculo integral
Aplicaciones geométricas: áreas, longitudes y volúmenes. Aplicaciones físicas.
Lección 23: Introducción al cálculo integral en varias variables
Definiciones básicas. Teorema de Fubini.
Lección 24: Métodos numéricos de integración (I)
Polinomio interpolador. Métodos de los rectángulos y de los trapecios
Lección 25: Métodos numéricos de integración (II)
Regla de Simpson. Método de Montecarlo.
Lección 26: Ecuaciones diferenciales ordinarias
Definiciones. Noción de solución. Ejemplos clásicos.
Lección 27: Ecuaciones diferenciales de primer orden
Ecuaciones de variables separadas, lineales, exactas y homogéneas.
Lección 28: Ecuaciones diferenciales de orden superior
Ecuaciones lineales con coeficientes constantes. Ecuaciones de Euler.

Para cada una de las lecciones se desarrollaron los contenidos teóricos: conceptos, enunciado (sin demostración) de los principales resultados, ejemplos ilustrativos y aplicaciones. También se incluyeron ejercicios resueltos y, a continuación, una lista de ejercicios similares propuestos para que los alumnos comprobaran su aprendizaje.

A continuación se presentan algunas de las diapositivas del curso que ilustran el desarrollo mencionado.

Los temas comienzan fijando la notación y definiendo los conceptos básicos:

1. PRELIMINARES

Conjuntos

Es habitual denotar con letras mayúsculas, $A, B, C, \ldots$ los conjuntos y con minúsculas, $a, b, c, d, \ldots$ los elementos de un conjunto.

Si a es un elemento del conjunto A, se escribe $a \in A$ (se lee "a pertenece a A"). En caso contrario se escribe $a \notin A$.

Se conviene en llamar *conjunto vacío* a aquel que no contiene elementos; se denota por $\emptyset$.

Si todos los elementos de un conjunto A pertenecen también a un conjunto B se dice que A es un *subconjunto* de B o que A está incluido en B y se escribe $A \subseteq B$. Para indicar que A no está incluido en B se escribe $A \nsubseteq B$.

Dados dos conjuntos A y B , se define su *intersección* $A \cap B$ como el conjunto de los elementos que pertenecen a ambos y su *unión* $A \cup B$ como el conjunto de los elementos que pertenecen a A ó a B.

4

Los principales resultados se enuncian como teoremas:

El primer paso para acotar el error consiste en conseguir una expresión explícita del resto $R_n(x)$:

Teorema (Resto de Lagrange) Si f es $n+1$ veces derivable en un intervalo abierto que contiene al punto a entonces para cada x del intervalo existe un punto c_x entre x y a tal que

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1}(c_x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

donde $P_n(x)$ es el polinomio de Taylor de f de orden n en el punto a.

A la diferencia $f(x) - P_n(x)$ así obtenida se le denomina *resto de Lagrange* del desarrollo de Taylor de f de orden n en a, y consiste en "tomar un término más del polinomio de Taylor en un punto intermedio c_x".

La igualdad

$$f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n}(a)}{n!}(x-a)^n}_{\text{Polinomio de Taylor}} + \underbrace{\frac{f^{(n+1}(c_x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}_{\text{Resto de Lagrange}}$$

se denomina *fórmula de Taylor con resto de Lagrange*.

128

De cada concepto y propiedad se presentan ejemplos ilustrativos:

Propiedades de las funciones continuas

Si f y g son continuas en un intervalo abierto, también lo son $f+g$, $f-g$, λf, $f\,g$, f^n para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Si además g no se anula en ningún punto del intervalo, f/g también es continua.

La composición de funciones continuas es una función continua: Si $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : (c,d) \longrightarrow \mathbb{R}$ son continuas e $\operatorname{Im}(f) \subseteq (c,d)$ entonces $g \circ f$ es continua en (a,b).

EJEMPLO: La función $\operatorname{sen}(x) + 6x^2 - 12$ es continua en $\mathbb{R}$.

EJEMPLO: La función $f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)+6x^2-12}{\cos^2(x)+1}$ es continua en $\mathbb{R}$.

EJEMPLO: La función $\operatorname{sen}(e^x)$ es continua en $\mathbb{R}$ por ser composición de dos funciones continuas.

EJEMPLO: La función $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ es continua en $(-1,1)$.

EJEMPLO: La función $f(x) = \sqrt{x^2-1}$ es continua en $(-\infty,-1)$ y en $(1,+\infty)$.

82

También de los principales resultados se presentan ejemplos:

EJEMPLO: Mediante la regla de L'Hôpital es sencillo comprobar la equivalencia de algunos infinitésimos:

(a) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} \overset{\frac{0}{0}\ \mathrm{L'H}}{=} \lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{\cos(x)}{1} = 1.$ (b) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{e^x - 1}{x} \overset{\frac{0}{0}\ \mathrm{L'H}}{=} \lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{e^x}{1} = 1.$

EJEMPLO: A veces hay que aplicar la regla de L'Hôpital más de una vez:

$$\begin{aligned}\lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{\log(e^x-1)}{1/x} &\overset{\frac{-\infty}{+\infty}\ \mathrm{L'H}}{=} \lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{\frac{e^x}{e^x-1}}{-1/x^2} = -\lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{x^2\, e^x}{e^x-1} \overset{\frac{0}{0}\ \mathrm{L'H}}{=} -\lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{2x\, e^x + x^2\, e^x}{e^x} \\ &= -\lim_{x\longrightarrow 0^+} (2x + x^2) = 0.\end{aligned}$$

EJEMPLO: Y otras veces es mejor no aplicarla:

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^{100}(x)}{x^{99}\operatorname{tg}(x)} = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^{99}(x)}{x^{99}} \cos(x) = 1,$$

donde se ha usado la equivalencia $\operatorname{sen}(x) \sim x$ $(x \longrightarrow 0)$.

119

Al final de los ejemplos se proponen ejercicios similares:

CÁLCULO PRÁCTICO DE LOS EXTREMOS ABSOLUTOS: Si f es continua en $[a, b]$ entonces

$$\{\text{puntos de extremo absoluto de } f \text{ en } [a,b]\ \} \subset \{a,\ b, \text{ extremos relativos}\} \subset \{a,\ b, \text{ puntos críticos}\}.$$

Por lo tanto, para conocer el máximo absoluto de f en $[a, b]$ basta calcular $f(a)$, $f(b)$, el valor de f en cada punto crítico y elegir el mayor de los valores obtenidos. De modo similar se calcula el mínimo absoluto.

OBSERVACIÓN: Para calcular los extremos absolutos no es necesario estudiar si los puntos críticos son máximos o mínimos relativos; sólo interesa conocer el valor de f en dichos puntos.

EJEMPLO: Calcular los extremos absolutos de $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$ en el intervalo $[-2, 3]$.

La función alcanza sus extremos absolutos por ser continua en $[-2, 3]$. Por ser derivable en $(-2, 3)$ los únicos puntos críticos son los ceros de su derivada. La ecuación $3x^2 - 2x - 8$ tiene dos soluciones: $x = -\frac{4}{3}$, $x = 2$. Entonces los extremos absolutos se alcanzan en puntos del conjunto $\{-2, -\frac{4}{3}, 2, 3\}$. Puesto que $f(-2) = 5$, $f(-\frac{4}{3}) = \frac{203}{27}$, $f(2) = -11$ y $f(3) = -5$ resulta que el máximo buscado es $M = \frac{203}{27}$ (se alcanza en $x = -\frac{4}{3}$) y el mínimo $m = -11$ (se alcanza en $x = 2$).

EJERCICIO: Calcular los extremos absolutos de $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$ en el intervalo $[0, 3]$.

EJERCICIO: Calcular los extremos absolutos de $f(x) = |x| + x^3 - 3x + 1$ en $[-1, 1]$.

117

Utilizar distinto tipo de letra permite distinguir el texto normal del correspondiente a un código de programación:

Puede programarse en Mathematica la regla del punto medio para el ejemplo anterior como sigue:

```
(* METODO DE LOS RECTANGULOS PARA f(x)=exp(-x^2) en [0,1] *)
a=0; b=1;                            (*Extremos del intervalo*)
n=10;                                 (*Subdivisiones del intervalo*)
h=(b-a)/n;                           (*Longitud de cada subintervalo*)
f[x_]=Exp[-x^2];                     (*Funcion*)
x[i_]=a+(i*h);                       (*Puntos de la particion (nodos)*)
m[i_]=(x[i-1]+x[i])/2;               (*Puntos medios de los subintervalos*)
aprox=0;
Do[aprox=aprox+f[m[i]],{i,1,n}]      (*Metodo de los rectangulos*)
final=N[aprox/n]
cotaerror=1/(12n^2)
Out=0.747131
Out=1/1200=0.000833333
```

Puede abreviarse el programa así:

```
rectangulos[f_,{a_,b_},n_]:=N[Sum[f[(2a+(2i-1)(b-a)/n)/2],{i,1,n}]/n];
rectangulos[Exp[-#^2]&,{0,1},10]
Out=0.747131
```

96

Mediante el programa Mathematica se realizaron dibujos en dos dimensiones para ser incluidos en las diapositivas:

Se llama *suma inferior* de Riemann de la función f en $[a,b]$ respecto a la partición P_n a

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) = (b-a)\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} m_k.$$

Para una función no negativa como la de la figura 1, el valor de la suma inferior de Riemann equivale a la suma de las áreas de los rectángulos de base cada subintervalo de la partición y altura el mínimo de f en dicho subintervalo.

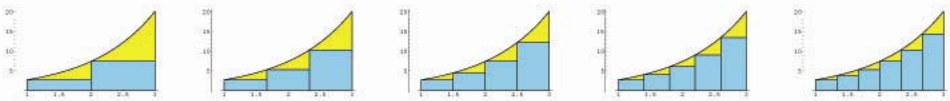


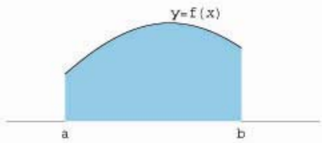
Figura 1: Rectángulos correspondientes a la suma inferior s_2 (izquierda), $s_3, \ldots, s_6$ (derecha)

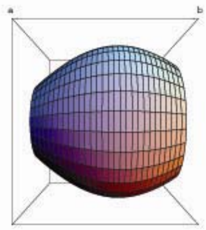
172

También en tres dimensiones:

Volúmenes y áreas laterales de revolución

Sea f continua con $f \geq 0$ en $[a, b]$. Considérese el sólido de revolución obtenido al girar alrededor del eje OX la región limitada por la gráfica de f y el propio eje entre las abcisas $x = a$ y $x = b$.





El volumen de este sólido se calcula por

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx.$$

Si f es derivable con derivada continua en $[a, b]$ su área lateral se calcula por

$$A_L = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx.$$

184

Además de las diapositivas, que se utilizaron como soporte en las lecciones magistrales, el texto se convirtió a formato pdf para ser utilizado como notas por los alumnos, bien mediante su impresión en papel, bien como texto hiper-referenciado en la pantalla del ordenador. Es fácil convertir este pdf a un formato adaptado a los e-book Papyre 6.1 disponibles en la Universidad de Salalamanca.

Al comenzar el curso (segundo semestre) se desarrolló la asignatura en el campus virtual, facilitando el acceso a los estudiantes a los materiales docentes antes mencionados. Por otra parte se añadieron recursos actualizables como prácticas, tareas y exámenes.

6. Resultados (beneficios) observados sobre la docencia

- Mejora de la planificación docente.

  Al disponer de un texto fijado para cada lección magistral así como de la distribución de los contenidos por horas y semanas, el grado de cumplimiento de la planificación docente ha sido completo.
- Optimización del tiempo en las clases magistrales.

  El tiempo limitado de cada clase obliga a ser sintético, evitando cuestiones de relativa importancia que pueden tratarse en los seminarios.
- Disponibilidad de apuntes durante las clases magistrales.

  Disponer del texto de las diapositivas libera al alumno de copiar continuamente durante la explicación, lo que hace que mejore su atención y aumente el grado de comprensión en clase.
- Disponibilidad de apuntes adaptados a los contenidos de la asignatura.

  Los alumnos pueden utilizar las diapositivas/apuntes como texto de la asignatura, libre de lagunas y errores, para una mejor asimilación de los contenidos y una mayor facilidad durante la preparación de los exámenes.
- Incremento de la motivación del alumno por el trabajo diario.

Facilitar el seguimiento de la teoría, así como presentar ejercicios previamente resueltos durante los seminarios evita que el alumno se desligue de la marcha del curso y abandone prematuramente la asignatura.