



# VNiVERSiDAD D SALAMANCA

DEPARTAMENTO DE PSICOLOGÍA EVOLUTIVA  
Y DE LA EDUCACIÓN

## TESIS DOCTORAL

*“Representaciones mentales en la  
resolución de problemas aritméticos”*

J. DAVID MUÑEZ MENDEZ

Trabajo dirigido por:  
Javier Rosales Pardo y Josetxu Orrantia Rodriguez

**Salamanca, diciembre de 2011**



*A mis padres, herman@s y amig@s*

*Gracias por la confianza infinita en este mar sin orillas*



# AGRADECIMIENTOS

Generalmente, cuando alguien se empeña en parir una Tesis Doctoral, las cosas no siempre discurren como uno había imaginado en un principio. Así, a lo largo de los meses y años, aquello que se plantea como un sueño que merece todo nuestro esfuerzo pasa a ser un monstruo alimentado por nuestros propios miedos y dudas. Esta Tesis Doctoral no es un caso aparte, sin embargo, ese monstruo no era sino la inalcanzable orilla de un río que ansiábamos cruzar y en el que a veces hemos estado a punto de ahogarnos. Es por esto que pretendemos desde el inicio de este viaje no sólo marcar dónde está la otra orilla, qué esperamos encontrar allí y cómo hemos llegado hasta ese punto, sino agradecer la ayuda de aquellos a quienes hemos utilizado como salvavidas en estas aguas. Pero antes, permita el lector que comience este viaje con una licencia emocional que justifica el porqué de este viaje. Y es que esta necesidad de cruzar ese río es fruto de una voz interior:

*Clavo mi remo en el agua*

*Llevo tu remo en el mío*

*Creo que he visto una luz al otro lado del río*

*Oigo una voz que me llama casi un suspiro*

*Rema, rema, rema.*

*--Jorge Drexler--*

En este trabajo queda plasmado el agradecimiento a todos aquellos que nos han susurrado *rema, rema, rema*, que han soportado nuestro mal humor, las noches en vela, las divagaciones interminables, la falta de tacto y el ego desmedido. En estas líneas queremos agradecer el interés desinteresado, las palmadas en la espalda, las palabras de consuelo y el ánimo para llegar a buen puerto.

En primer lugar, nuestro más sincero agradecimiento a Santi, quien ha soportado no una sino diez mil preguntas sobre cómo dar forma a un trabajo de tal magnitud, además de su colaboración desinteresada en el desarrollo de las pruebas experimentales y de su aportación en la composición de los capítulos Segundo y Tercero. No ha sido menor el apoyo y ánimo de aquellos con quienes hemos compartido el gélido invierno y tórrido verano del seminario (Laura, Irene y José María Chamoso) o las horas de café, durante las cuales no hemos dejado de crear (Ricardo y Carmen).

No queremos olvidar lugares míticos donde se ha gestado este proyecto, como Centenera, donde hemos ahogado parte de nuestras penas en el devenir de estos años y han surgido ideas que ahora pueblan estas páginas. Esas mismas ideas no habrían tenido cabida en Tesis Doctoral alguna sin la puerta que un día abrió Javier Rosales, y que junto a Josetxu Orrantia, han convertido en la puerta de mi casa. A todos los mencionados en estas líneas y a otros tantos cuyo nombre no olvido, incluyo en el grupo de aquellos a quienes, como reza un par de páginas atrás, va dirigido este esfuerzo.

A todos vosotros

GRACIAS, con MAYÚSCULAS

# ÍNDICE DE CONTENIDOS

INDICE DE FIGURAS .....	III
INDICE DE TABLAS .....	IV
CONSIDERACIONES PREVIAS .....	1
<b>INTRODUCCIÓN</b> .....	5
INTRODUCCIÓN: ¿QUÉ ESTAMOS BUSCANDO? .....	7
<b>PRIMERA PARTE: MARCO TEÓRICO</b> .....	13
CAPÍTULO PRIMERO: REPRESENTACIONES MENTALES:	
EL MODELO MENTAL O MODELO DE LA SITUACIÓN .....	15
1.1. LA REPRESENTACIÓN MENTAL O	
REPRESENTACIÓN INTERNA .....	16
1.1.1. ¿Qué es un modelo mental? .....	16
1.1.2. El modelo mental como producto de un	
proceso llamado comprensión .....	20
1.2. LA NATURALEZA DE LA REPRESENTACIÓN	
MENTAL .....	23
1.2.1. Desde los modelos clásicos de comprensión:	
La naturaleza simbólica .....	23
1.2.2. Desde los modelos corpóreos:	
La naturaleza sensorio-motora .....	29
1.3. RESUMEN DEL CAPÍTULO Y ARGUMENTACIÓN .....	35
CAPÍTULO SEGUNDO: RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS .....	39
2.1. ¿QUÉ ES RESOLVER UN PROBLEMA? .....	40
2.2. LOS MODELOS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS .....	43
2.2.1. Los primeros modelos: una representación	
mental cuantitativa .....	44
2.2.2. Los modelos posteriores: una representación	
mental cuantitativa y cualitativa .....	46
2.3. RESUMEN DEL CAPÍTULO Y ARGUMENTACIÓN .....	50
CAPÍTULO TERCERO: RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y	
LA REPRESENTACIÓN EXTERNA .....	53
3.1. LA REPRESENTACIÓN EXTERNA .....	54
3.1.1. ¿Qué es una representación externa? .....	54
3.1.2. La imagen como representación externa	

<i>por excelencia</i> .....	56
3.2. LAS REPRESENTACIONES EXTERNAS EN EL APRENDIZAJE MULTIMEDIA.....	58
3.2.1. <i>La memoria de trabajo</i> .....	61
3.3. LOS TRABAJOS SOBRE REPRESENTACIONES EXTERNAS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.....	64
3.4. RESUMEN DEL CAPÍTULO Y ARGUMENTACIÓN.....	66
<b>SEGUNDA PARTE: RESEARCH SUMMARY, EMPIRICAL STUDIES, AND CONCLUSIONS</b> .....	69
CHAPTER FOUR: RESEARCH SUMMARY AND EMPIRICAL STUDIES.....	71
4.1. RESEARCH SUMMARY.....	72
4.2. STUDY ONE.....	78
4.2.1. <i>Method</i> .....	81
4.2.1.1. Participants.....	81
4.2.1.2. Materials.....	81
4.2.1.3. Procedure.....	82
4.2.2. <i>Results</i> .....	82
4.2.2.1. Discrimination Task.....	82
4.2.2.2. Problem solving Task.....	83
4.2.3. <i>Discussion</i> .....	84
4.3. STUDY TWO.....	88
4.3.1. <i>Method</i> .....	91
4.3.1.1. Participants.....	91
4.3.1.2. Materials.....	91
4.3.1.3. Learner-related factors.....	93
4.3.1.4. Procedure.....	94
4.3.2. <i>Results</i> .....	95
4.3.2.1. Effectiveness of external representations.....	95
4.3.2.2. WM moderating effects.....	97
4.3.3. <i>Discussion</i> .....	98
CHAPTER FIVE: CONCLUSIONS AND FUTURE WORK.....	103
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	107



ANEXOS.....	129
▪ ANEXO I: ITEMS EXPERIMENTALES.....	131

## ÍNDICE DE FIGURAS

<b>Fig. 1.1:</b> Ejemplo de sistema proposicional (adaptado de Kintsch, 1998) .....	27
<b>Fig. 2.1:</b> Ejemplo de utilización del <i>esquema más que</i> para resolver el problema (adaptado de Kintsch, 1998).....	47
<b>Fig. 3.1:</b> Ejemplo de material para aprendizaje multimedia con representaciones externas .....	57
<b>Fig. 3.2:</b> Esquema de subprocesadores de la memoria de trabajo según el modelo de Baddeley (2000) (Adaptado de Baddeley, 2000).....	63
<b>Fig. 4.1:</b> Example of mental representation based on magnitudes .....	73
<b>Fig. 4.2:</b> Example of experimental trial (discrimination-task and problem solving-task variables are shown).....	80
<b>Fig. 4.3:</b> Examples of the four types of external representations included in the study.....	93

## ÍNDICE DE TABLAS

<b>Tabla 1.1:</b> Ratings de los principales modelos de comprensión en relación al valor dado al modelo de la situación dentro del proceso de comprensión: (Adaptada de McNamara & Magliano, 2009).....	24
<b>Tabla 2.1:</b> Tipos de problemas de comparación (Adaptada de Heller & Greeno, 1978).....	41
<b>Tabla 2.2:</b> Esquemas de conjunto (adaptado de Kintsch & Greeno, 1985).....	46
<b>Table 4.1:</b> Mean error rate (and SD) and response time (and SD) in the problem solving task.....	83
<b>Table 4.2:</b> Mean (and standard deviation) error rates and RT by condition of presentation.....	95



## CONSIDERACIONES PREVIAS

Antes de introducir los objetivos de esta Tesis Doctoral, así como la estructura de cada capítulo, creemos conveniente hacer unas consideraciones previas respecto a las páginas que siguen. Aún sabiendo que una Tesis Doctoral es un gran compendio de toda la literatura al respecto al tema a tratar —una ingente y a veces indigesta cantidad de información—, hemos optado por limitar nuestro marco teórico a aquello que hemos considerado necesario para abordar nuestro objetivo. Por tanto, avisamos al lector que en ese intento, hemos preferido limitarnos a aquellos trabajos de referencia, dejando a un lado la más que abundante literatura que a partir de estos se ha desarrollado. No obstante, si el lector echase en falta alguna referencia, tenga por seguro que será bienvenida puesto que en nuestro afán por llevar a cabo este viaje, siempre hemos creído en la construcción conjunta de esta obra. Lo que hemos tratado de llevar a cabo, en este sentido, es una recolección de contenido imprescindible para dotar de forma al trabajo empírico que desarrollamos en la Segunda Parte de esta Tesis Doctoral.

Otra consideración que queremos hacer tiene que ver con el propio título de este trabajo. De forma premeditada, hemos creído conveniente utilizar de forma indistinta los términos representación mental, representación interna, modelo mental y modelo de la situación. Si bien diferentes términos hacen referencia al mismo concepto, por ejemplo, representación mental y representación interna, también es cierto que unos términos no están incluidos en los otros (una representación mental no siempre es un modelo mental, pero sí al contrario), y que diferentes términos hacen referencia al mismo concepto desde ópticas teóricas diferentes (modelo mental desde aquellos trabajos relacionados con el razonamiento humano vs. modelo de la situación desde los modelos relacionados con la comprensión como proceso cognitivo). Dado que los dos últimos se han venido utilizando en la literatura de forma conjunta, y que ambos son representaciones internas o mentales, a lo largo de las páginas que siguen todos ellos serán considerados como el PRODUCTO de un proceso llamado comprensión.

De la misma manera, con premeditación y alevosía (y en numerosas ocasiones, nocturnidad), hemos preferido apartarnos de una revisión profunda de las diferencias y semejanzas entre los distintos modelos que se han centrado en el estudio de la comprensión como proceso y producto (aún siendo este proceso el que inicia nuestra exposición) dado que no pretendemos explorar con detalle dicho proceso. En este sentido, hemos planteado los modelos clásicos de comprensión de textos como marco para interpretar los procesos que llevan de la comprensión del texto del problema a una determinada representación interna cuando se resuelve dicho problema.

En otras palabras, la inclusión de estos modelos como *un todo* ha venido condicionada por el hecho de que este grupo de modelos, por un lado, es el que ha sugerido que dado que un problema es un TEXTO, ese problema es procesado de forma similar a un TEXTO; y por otro lado, ha sugerido que el comprender un texto implica la construcción de una representación mental, denominada modelo de la situación o modelo mental (Johnson-Laird 1983; van Dijk & Kintsch 1983). De aquí que nuestra decisión de explorar el modelo mental creado a partir de la lectura de un problema, irremediablemente pase por hacer mención a ese grupo de modelos que ha analizado qué es comprender —como proceso—, y cuál es esa representación mental —como producto.

Igualmente, a la hora de explorar la naturaleza de esa representación mental hemos preferido tratar el grupo de aproximaciones más corpóreas, no como teorías divergentes a ese grupo de modelos arriba mencionado sino como una dimensión o conjunto de procesos que pueden afectar a la naturaleza de esa representación mental sugerida desde los robustos modelos de comprensión. Sin duda, esta decisión cierra una serie de puertas igualmente interesantes que no mencionaremos por miedo a abrir alguna de ellas y no encontrar el camino de vuelta. Con respecto a esta aproximación más sensorio-motora de la naturaleza del modelo mental, nos hemos atrevido a plantear las implicaciones del procesamiento numérico, o del sentido numérico, como extensiones de dicha aproximación corpórea. Si bien la literatura al respecto duda al decantarse por este planteamiento y el trabajo empírico discurre por caminos diferentes, esta Tesis Doctoral pretende ser un acercamiento de posturas como más adelante exponemos.

En la misma línea, queremos en este punto advertir al lector que en nuestra aproximación teórica al Tercer Capítulo, que versa sobre representaciones externas, deliberadamente hemos optado por no profundizar en los modelos teóricos aportados desde el aprendizaje multimedia. Esta decisión viene condicionada por la propia investigación sobre aprendizaje multimedia, la cual se ha concentrado mayoritariamente sobre aspectos que tienen que ver con la imagen y con las limitaciones de la memoria de trabajo, dejando a un lado la irrefutable realidad de que junto a la imagen convive un texto que se procesa de una manera determinada de acuerdo a potentes y contrastados modelos teóricos y computacionales. Así los distintos modelos sobre aprendizaje multimedia han entendido la integración de texto e imagen como un proceso global que tiene lugar en la memoria de trabajo, pero obviando que las representaciones que han de integrarse son procesadas simultáneamente y que la memoria de trabajo y sus subprocesadores son almacenes de información pero no procesadores dependientes del formato sensorial en el que las fuentes externas son presentadas. Como menciona Schnotz (2002), la mayoría de las perspectivas teóricas sobre procesamiento de información que han conducido a la investigación de esa integración de

texto con imagen han quedado desfasadas y han carecido de un interés por explorar la naturaleza del procesamiento multimedia y la integración de información desde procesos de alto nivel cognitivo. Será por tanto decisión del lector pasar por alto tal esbozo.

Hechas estas consideraciones, no queremos finalizar estas primeras líneas sin prevenir al lector acerca de lo que va a encontrar a continuación, y es que las palabras, oraciones, párrafos y capítulos que siguen demandan creer sin ver. En otras palabras, si bien podemos presentar desde una bacteria frente al microscopio hasta las lunas de Júpiter frente al telescopio, en el presente trabajo hemos de esforzarnos en creer aquello que nuestros ojos no ven y nuestras manos no palpan.





# **INTRODUCCIÓN**



# INTRODUCCIÓN

## QUÉ ESTAMOS BUSCANDO

Aquello sobre lo que versa esta Tesis Doctoral es un producto determinado, la representación mental construida durante la resolución de problemas aritméticos de estructura comparativa. Más concretamente, considerando que la resolución de un problema implica un proceso complejo en el que el sujeto construye distintos niveles de representación, tanto matemáticos como no matemáticos, el presente trabajo pretende acercarnos a esa representación mental menos matemática. Si bien este mismo concepto ha sido objeto de estudio en numerosos trabajos, esta Tesis Doctoral inicia un acercamiento a la naturaleza de ese producto que lleva consigo la exploración de algunos postulados próximos a una visión experiencial de la comprensión. En otras palabras, imaginemos por un instante qué ocurre cuando leo la frase “creo que he visto una luz al otro lado del río”. Posiblemente, la mayoría de los lectores opine que de acuerdo a los robustos modelos de comprensión de textos, el producto o significado de esa oración es un conjunto de proposiciones que están unidas de una manera determinada y a las que se añade información relativa a nuestra experiencia previa. Sin embargo, esos postulados “más experienciales” que mencionaremos después, sugieren que el comprender esa oración implicaría una activación de procesos visuales, auditivos o emocionales para representar el significado de dicha oración. Esta idea, no parece descabellada cuando hablamos de textos con un marcado componente “sensorial”, donde se mencionan imágenes o espacios, sin embargo, el modelo de la situación que deriva de un texto sin características viso-espaciales también puede tener propiedades perceptivas similares a las de una experiencia perceptiva, como ya sugirió Fincher-Kiefer (2001). Lo que puede resultar más difícil de entender es cómo la resolución de un problema aritmético de comparación, donde los individuos desencadenan procesos *quasi* automáticos para llegar a un resultado numérico, puede generar un modelo mental con propiedades perceptivas asociadas a experiencias previas.

Precisamente, nuestro esfuerzo en este trabajo persigue explorar si ese producto de la comprensión del problema, o modelo mental que se construye durante la resolución, tiene, además de un carácter proposicional demostrado por esos potentes modelos de comprensión de textos, una naturaleza más corpórea en cuanto que activa representaciones perceptuales asociadas a la magnitud. En este sentido, sabemos que el procesamiento numérico, o sentido numérico, activa una representación de la magnitud tanto a nivel neuronal (al activar zonas relacionadas con el procesamiento de la magnitud como dimensión física y cuantificable) como a nivel conductual (al permitir respuestas diferentes dependiendo del número que intentamos procesar). Lo

que desconocemos es si esa activación de la magnitud se produce durante tareas mucho más complejas como es la construcción del modelo mental a partir del texto de un problema que ha de resolverse. Así en el presente trabajo planteamos la hipótesis de que la representación mental más cualitativa que el lector crea durante la resolución del problema “*Juan tiene 5 canicas más que Pedro. Si Juan tiene 13 canicas, ¿cuántas canicas tiene Pedro?*” (en adelante, *el problema de Juan*), esté asociada a una representación perceptiva de la magnitud, cuyo origen puede estar en las experiencias previas del individuo con el ambiente que le rodea en sus inicios con la aritmética. En esa hipótesis se centra nuestro trabajo empírico. Mediante dos estudios, básico y aplicado, trataremos de explorar la naturaleza y automaticidad de esa representación mental creada durante la resolución de *el problema de Juan*.

Para ello, el marco teórico de esta Tesis Doctoral parte de dos ideas principales: la primera hace referencia a que la resolución de un problema lleva consigo la construcción de una representación mental de carácter cualitativo o modelo mental; la segunda idea se refiere a las evidencias empíricas acerca de la activación de áreas cerebrales que son comunes para el procesamiento de dimensiones cuantitativas y cualitativas. Hasta donde nosotros sabemos, ningún trabajo conductual ha logrado establecer cómo la representación mental se construye de forma automática durante la lectura del problema, y cómo esa implicación de dicha representación con la dimensión magnitud tiene lugar en un proceso complejo como es la resolución del problema. Si bien la posibilidad que planteamos marca una diferencia con los estudios previos sobre comprensión de textos o resolución de problemas, y amplía aquellos otros relacionados con el procesamiento numérico, no obstante, es nuestro deseo NO abrir la *caja de Pandora* al iniciar este viaje dadas las marcadas diferencias, que a todos los niveles, se establecen entre las distintas aproximaciones a la naturaleza de esa representación mental.

Para alcanzar el objetivo que hemos mencionado anteriormente, creemos necesario esbozar aquello que el lector encontrará en las dos Partes que componen esta Tesis Doctoral. La primera de ellas recoge los Capítulos I, II, y III y hace referencia al marco teórico sobre el que hemos planteado nuestra hipótesis. La Segunda Parte incluye los Capítulos IV y V recogiendo los estudios empíricos, el resumen y las conclusiones finales de este trabajo.

El Capítulo Primero está dedicado a una de las dos dimensiones que dan nombre a estas páginas: la representación mental. En este sentido, partiremos de qué es una representación mental o representación interna y cuál es el proceso cognitivo por el cual creamos ese tipo de representaciones mentales. Para acercarnos a ese proceso —llamado comprensión— hemos decidido ayudarnos de una de las aproximaciones teóricas que con mayor detalle ha explorado esas representaciones, los modelos clásicos de comprensión de textos. Este grupo de modelos teóricos ha pretendido a lo largo del tiempo desentrañar los secretos de un proceso que es la base de la cognición humana

a la vez que explorar el producto de dicho proceso –el modelo mental o modelo de la situación como representación interna o mental. Continuaremos, en este Primer Capítulo, analizando la naturaleza de dicho producto desde diferentes aproximaciones teóricas: por un lado, la aproximación propuesta por el grupo de modelos que hemos mencionado anteriormente, dado que son éstos los que mayores esfuerzos han vertido a la hora de explorar dicha representación; y por otro lado, aquella aproximación a la naturaleza del modelo mental que mantiene una dimensión corpórea en sus postulados. De esta última aproximación surge la hipótesis sobre la que vamos a trabajar y, a grandes rasgos, sugiere que durante la resolución de problemas aritméticos el sujeto construye una representación mental que está íntimamente ligada al funcionamiento del cuerpo humano. La idea de que la resolución de problemas implicaría la construcción de una representación interna que va más allá del mero ensamblaje de proposiciones nace de tres asunciones básicas: por un lado, la cada vez más aceptada propuesta de que la representación implícita de la numerosidad tiene una naturaleza analógica, o si se prefiere, un anclaje perceptivo o espacial (Dehaene, Dehaene-Lambertz & Cohen, 1998; Gallistel & Gelman, 1992); por otro lado, la evidencia empírica en torno a la estrecha relación existente entre ciertas dificultades de aprendizaje y la incapacidad para discriminar dimensiones físicas como la magnitud (Geary, Hoard, Nugent, & Byrd-Craven, 2008; Landerl, Bevan, & Butterworth, 2004; Rousselle & Noël, 2007; Simon, Bearden, McDonald-McGinn, & Zackai, 2005; Simon et al., 2008); y finalmente, los hallazgos neuropsicológicos que apuntan a un lugar común, el intra-parietal sulcus (IPS), para el procesamiento de información matemática y de dimensiones como la magnitud (Venkatraman, Ansari, & Chee, 2005; Dehaene, Molko, Cohen, & Wilson, 2004; Delazer et al., 2004; Dehaene, Piazza, Pinel, & Cohen, 2003; Delazer et al., 2003; Piazza, Mechelli, Price, & Butterworth, 2002; Gruber, Indefrey, Steinmetz, & Kleinschmidt, 2001; Pesenti, Thioux, Seron, & De Volder, 2000).

En el Capítulo Segundo de la Tesis repasaremos de manera sintética qué es resolver un problema y el tipo de representación interna propuesta por los modelos que han pretendido clarificar los procesos cognitivos implicados en esta tarea –la segunda dimensión presente en el título de estas páginas. Si en el Capítulo Primero repasamos qué es una representación interna y cuál es su naturaleza desde diferentes aproximaciones ligadas al estudio de la comprensión, en este capítulo exploraremos aquella representación interna propuesta desde los modelos que de forma explícita han explorado la resolución de problemas como un proceso. Así, veremos que a lo largo y ancho de la literatura existen una serie de modelos que han tratado, con mayor o menor éxito y esfuerzo, de describir qué procesos cognitivos tienen lugar cuando el sujeto resuelve un problema. Parte de esos modelos han considerado dos tipos de representaciones, dependiendo del carácter más o menos matemático, siendo aquella más cualitativa la que es objeto de estudio

en esta Tesis Doctoral. Esta forma de representación más cualitativa ha adquirido una consideración importante dentro de la literatura científica ya que está relacionada con un nivel de comprensión más profundo, en tanto que permite la integración de la información que proviene del problema con los conocimientos previos del sujeto, o en nuestro caso, con la experiencia previa del sujeto como veremos en el desarrollo del Capítulo Primero. No obstante, este tipo de representación interna no siempre ha estado considerada dentro del estudio de la resolución de problemas. Así, las primeras aproximaciones teóricas (e.g., Briars & Larkin, 1984; Riley, Greeno & Heller, 1983) establecían que resolver un problema implicaba una asignación más o menos directa de la información numérica del problema a un esquema previamente activado por la información semántica del problema. Posteriormente, fueron Kintsch y Greeno (1985) quienes comenzaron a utilizar el término *modelo de la situación* en el contexto de la resolución de problemas, para denominar a esa representación interna más cualitativa, y dieron paso a otro grupo de modelos que incluía una representación con un doble carácter –cuantitativo y cualitativo. Sin embargo, hasta la fecha, la naturaleza de dicha representación ha permanecido inexplorada por este grupo de modelos más centrados en la resolución de problemas. Sólo recientemente, Thevenot (2010) ha sugerido que dicha representación no tiene una naturaleza proposicional y ligada a esquemas preestablecidos en la mente del sujeto, como afirmaban Kintsch y Greeno (1985), sino que esa representación podría acercarse a aquella descrita por Johnson-Laird (1983) en su propuesta de modelos mentales. Como veremos a lo largo de este Capítulo Segundo, esta evidencia resolverá algunas de las dudas que dichos modelos plantean con respecto a *el problema de Juan* utilizado en nuestro primer estudio empírico.

Nuestra propuesta no sólo se limita a explorar la hipótesis mencionada desde un punto de vista básico, sino que pretendemos ir más allá y analizar esa posible representación mental basada en magnitudes desde un punto de vista aplicado, es decir, plantear la representación basada en magnitudes como una representación externa. No cabe duda que el proceso de resolución de problemas es una tarea compleja donde interactúan diferentes variables asociadas al lenguaje, a factores sociales, psicológicos, epistemológicos, cognitivos y afectivos. Sin embargo, cualquiera que sea la perspectiva de estudio, es evidente que durante la resolución el sujeto activa procedimientos y conceptos matemáticos a través de una variedad de representaciones externas e internas que pueden estar simbolizadas lingüísticamente, numéricamente y de forma algebraica, pero también de forma figurativa o gráfica. Son esas formas de representación externa y su repercusión en la resolución de problemas, sobre las que se centran este Tercer Capítulo y nuestro segundo estudio empírico. La idea que subyace es muy sencilla, si las representaciones externas pueden ser eficaces al ser referentes (o debieran serlo) del modelo mental que el sujeto crea cuando lee un texto (Glenberg & Langstone, 1992), y queremos explorar un potencial modelo mental basado en

magnitudes, entonces, ¿por qué no analizar la efectividad de una representación externa basada en magnitudes? A ello dedicamos nuestro Capítulo Tercero, el cual recoge algunos de los aspectos implicados en la resolución de problemas con representaciones externas. En este sentido, incluimos en primer lugar, la definición básica de imagen como representación externa prototípica. También esbozamos brevemente qué es la memoria de trabajo, dado que en este constructo cognitivo están basados también los efectos positivos de la aplicación de representaciones externas a la práctica educativa, y por tanto, esa efectividad de la representación externa podría deberse no sólo a que es un referente correcto del modelo mental sino a que alivia el procesamiento en la memoria de trabajo. Para concluir este Capítulo III, esbozamos el corpus teórico alrededor del aprendizaje con representaciones externas, y sintetizamos la escasa literatura en torno a las representaciones externas en la resolución de problemas.

La parte empírica de nuestro trabajo, que exponemos en el Capítulo Cuarto, incluye el diseño, los resultados y las conclusiones de los dos estudios experimentales que tienen por objeto explorar la hipótesis que ha guiado este trabajo. En el primero de ellos, hemos intentado desvelar la presencia de esas representaciones perceptivas de la magnitud durante el procesamiento de información a través de un paradigma de doble priming, que pretende evaluar cómo la comprensión del problema da lugar a una respuesta conductual concreta que a su vez condicionará la respuesta del sujeto a la cuestión planteada en dicho problema. Así el modelo mental estaría ligado a una activación perceptual donde esas cantidades están representadas como magnitudes, permaneciendo entre ellas la relación meramente cualitativa. Además hacemos hincapié en una de las características de esos modelos mentales —la iconicidad—entendida ésta no como un calco de la realidad. En otras palabras, independientemente de cómo esta representación mental se construye y cuál es su naturaleza, el sujeto construye un modelo mental que es icónico respecto a la información que representa y es procesada, pero no lo es respecto al referente. Nuestro segundo estudio empírico también explorará esa hipótesis, pero a través de un planteamiento más aplicado. Es decir, la utilización de representaciones externas, que explícitamente activen esa representación mental basada en la magnitud, durante la resolución de problemas. Para ello, hemos analizado si una representación externa tiene algún efecto cuando refleja aquella hipotética representación interna producto del procesamiento de la información textual de ese problema. Este diseño implicaría mantener la iconicidad con dicho producto o modelo mental pero no con el contenido superficial del texto.

Por último, en el Capítulo Quinto se sintetizan e interpretan los resultados para, finalmente, proponer una serie de conclusiones, de limitaciones en el planteamiento de nuestro trabajo y de las posibles aplicaciones y estudios

posteriores que nos ayudarían a ampliar los objetivos que nos hemos marcado en nuestro trabajo.

Ahora, ya sabemos qué buscamos en la otra orilla y cómo vamos a remar.



# **PRIMERA PARTE**

## **MARCO TEÓRICO**



# CAPÍTULO I

## REPRESENTACIONES MENTALES: EL MODELO MENTAL O MODELO DE LA SITUACIÓN

En la primera parte de este primer Capítulo, exploraremos qué es una representación mental. Para ello, partiremos de la propia definición de modelo mental como un producto creado por el sujeto para simular una situación y poder razonar sobre ella. Si la literatura en torno a los modelos mentales se centra en mayor medida en re-crear computacionalmente el razonamiento humano (Johnson-Laird, Byrne, & Tabossi, 1989; Schlieder & Berendt, 1998), no hemos de olvidar que aquello sobre lo que hemos de razonar es un texto. Por tanto, dado que en nuestro caso ese modelo mental deriva del proceso de comprensión de un problema presentado como un texto, repasaremos muy brevemente qué es ese proceso de comprensión desde la óptica de un conjunto de modelos que se han centrado en explorar dicho proceso cognitivo y cuál ha sido la representación mental generada.

En la segunda parte de este capítulo, abordaremos la naturaleza propuesta para esa representación mental o producto de la comprensión. Tendremos en cuenta dos aproximaciones diferentes. Por un lado aquella que se ha hecho desde los modelos de comprensión que hemos mencionado anteriormente, dado que son éstos los que en mayor medida han tratado de explorar ese producto. Este grupo de modelos, asociados a una concepción simbólica del significado, consideran la cognición como un grupo de símbolos donde la comprensión del lenguaje supone la activación y computación de dichos símbolos mentales (Fodor, 1983; Pylyshyn, 1981), y por tanto el producto de esa comprensión —la representación mental—estaría compuesto de símbolos arbitrarios. Por otro lado consideraremos la aproximación que se hace a la naturaleza de ese producto desde un grupo de propuestas teóricas que consideran la cognición como un proceso que implica una serie de activaciones neuronales que tienen que ver con las experiencias previas —sensoriales o motóricas—del sujeto, y por tanto, el producto de esa comprensión estaría asociado no a símbolos arbitrarios sino a dichas experiencias en cuanto que éstas vuelven a re-activarse.

## 1.1. LA REPRESENTACIÓN MENTAL O REPRESENTACIÓN INTERNA

Para acercarnos a este concepto, podríamos hacer un repaso por todas esas aproximaciones que se vienen haciendo desde finales del siglo XIX. No obstante y como mencionábamos al inicio de este trabajo, deliberadamente, hemos optado por iniciar nuestra aproximación al concepto de representación mental o interna tomando como base el término modelo mental que nace del trabajo de Johnson-Laird (1983), puesto que como veremos a continuación pone al descubierto varias características que son esenciales en el enfoque de nuestro trabajo empírico. Tampoco hemos de olvidar que la representación mental que tratamos de explorar hace referencia al problema que aparece bajo estas líneas, y que dicho problema es un texto que tiene que comprenderse.

*“Juan tiene 5 canicas más que Pedro. Si Juan tiene 13 canicas,  
¿cuántas canicas tiene Pedro?”*

### 1.1.1. ¿Qué es un modelo mental?

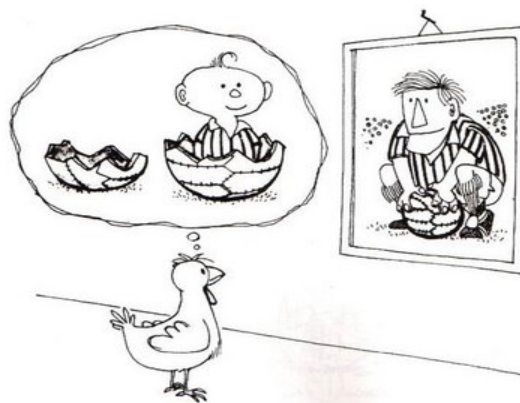
Son varias las definiciones de modelo mental que encontramos a lo largo de la literatura científica, sin embargo, hemos decidido acercarnos a aquella que incluye los dos términos principales presentes en el título de esta Tesis Doctoral –representación y resolución. Así, tal y como aparece en la viñeta, resolver un problema implicaría la creación de un modelo mental de los objetos y eventos así como operar con ese modelo mental (Johnson-Laird, 1983); en otras palabras, el modelo mental creado desde un problema es una representación a pequeña escala de la realidad denotada en el texto del problema. Decimos realidad, porque esa información con la cual se construye el modelo no implicaría sólo la explícita en el texto sino aquella otra que proviene de la interacción entre el texto y el conocimiento previo del sujeto. Una larga trayectoria experimental en Psicología Cognitiva sugiere que los humanos resolvemos problemas a través del uso de representaciones internas que pueden ser mentalmente inspeccionadas y procesadas, es decir, a través de simulaciones de eventos en forma de modelos mentales (Johnson-Laird, 2006). Ese modelo mental sería una representación psicológica de una situación hipotética. Como tal, incluiría el resultado del procesamiento de aquello que es: percibido, imaginado, previamente almacenado como conocimiento, y la situación que aparece explícita en el texto o en el discurso.



Diferentes versiones de teorías sobre modelos mentales han sugerido que los modelos mentales son representaciones proposicionales (van Dijk & Kintsch, 1983; Just & Carpenter, 1987), representaciones basadas en habilidades perceptivas (Franklin & Tversky, 1990), o un constructo que comprendería algo de todo eso (Johnson-Laird, 1983). Para nosotros, el modelo mental que pretendemos explorar en este trabajo tiene una serie de características entre las que queremos destacar dos: (1) el modelo mental es una representación isomórfica que tiene la misma estructura relacional que la de la situación denotada; y (2) el modelo mental es eminentemente cualitativo. Como veremos en el planteamiento empírico, estas dos características se convertirán en esenciales, dado que si el modelo mental está estructurado relacionamente y es cualitativo, no sería lógico plantear una naturaleza perceptiva que no guardase esa misma estructura para su posterior inspección dentro de la ejecución de la tarea. En este sentido, Knauff (2009) plantea la *Neuro-Cognitive three-stage-theory of Deductive Relational Reasoning with mental models and visual images* donde establece que esos modelos mentales que subyacen a todas las formas de razonamiento relacional son espacialmente organizados. Es decir, dado el caso de un modelo mental de carácter perceptivo basado en la magnitud, esta representación debería estar dispuesta de forma espacial y ser explorada y evaluada posteriormente para resolver el problema.

Comencemos por la primera de esas características mencionadas, ¿qué queremos decir cuando hablamos de representación isomórfica? Esto es, que el modelo mental es icónico en la medida de lo posible (Johnson-Laird, 1983, pp. 125, 136), representando sus partes y relaciones las de la situación hipotética planteada. Sin embargo, la propia definición puede llevarnos a pensar que dicha iconicidad se refiere a que la representación mental es un reflejo fiel de la realidad. A esta creencia podríamos llegar desde la propia definición de modelo mental que nos dice que tras leer un texto, por ejemplo, en el que se indica cómo apagar un fuego con un extintor, somos capaces de crear una simulación o modelo mental de esa situación del texto. Sin embargo, si nos remitimos a unas líneas más arriba, dicho modelo mental no es solamente un reflejo del texto que se hace explícito, sino que es el producto del procesamiento de ese texto, al que se le añaden una serie de elementos que no están en el texto. Por lo tanto, esa simulación es icónica a la situación mencionada en el texto en el sentido que: (i) contiene una pieza para cada uno de los referentes del discurso; (ii) cada pieza tiene unas propiedades que se corresponden con las del referente; (iii) las piezas están relacionadas entre sí de acuerdo a las relaciones especificadas entre los referentes. En otras palabras, esa representación mental es estructuralmente icónica, es decir, mantiene la relación entre las distintas piezas que la componen, pero no es un espejo o imagen mental que refleje el texto como tal. Por lo tanto, esa representación mental es el producto del procesamiento del texto junto a algo más que el sujeto aporta desde su experiencia y conocimientos previos, como vemos en la viñeta que sigue. De aquí que el modelo mental que los sujetos

crean del contacto con un texto difiera de unos individuos a otros, sin embargo, mantendría en común la estructura relacional entre las piezas de ese texto. Como veremos más adelante, esta estructura relacional del modelo mental marcará sobremanera nuestra aproximación a la naturaleza de dicha representación mental dado que cuando resolvemos *el problema de*



*Juan*, necesariamente ponemos en relación los distintos elementos del problema para poder resolverlo dado que la cantidad de uno depende directamente de la cantidad del otro.

La segunda característica que hemos querido destacar es el carácter cualitativo de los modelos mentales. Es decir, el razonamiento con modelos mentales recae en las relaciones cualitativas más que en las cuantitativas y por tanto, el individuo puede razonar acerca de que una cantidad es mayor que la otra sin precisar el valor de esas cantidades. Nos detendremos brevemente en este aspecto que, como veremos después, resulta imprescindible para entender nuestro planteamiento empírico. A tenor del peso que las relaciones cualitativas tienen en los modelos mentales que el sujeto construye, y a los trabajos que pretendían determinar qué es aquello que representaban los modelos mentales (e.g., Hayes, 1985), Forbus (1984) desarrolla las bases de su *Qualitative Process Theory* con la intención de explorar cómo el conocimiento es representado de forma explícita en este tipo de representaciones mentales. Esta teoría, la cual se origina en el campo de la inteligencia artificial, pretende capturar las representaciones que subyacen al razonamiento humano con la intención de poder ser implementadas en entornos computacionales. La asunción principal es que dicho razonamiento y el modelo mental generado recaen en relaciones cualitativas de tipo ordinal, es decir, las cantidades se representan como más grande o más pequeña, pero no son representadas atendiendo a su cardinalidad o valor numérico. Es decir, si un objeto está a 30°C y otro a su lado está a 28°C, el primero está más caliente que el segundo independientemente de que ambas temperaturas se encuentren en el rango de lo que para los humanos puede considerarse caliente. Otra segunda característica es que en vez de usar ecuaciones exactas, propone que se utiliza una matemática cualitativa, por ejemplo, el sujeto crea una representación mental de que una fuerza  $X$  da lugar a una mayor aceleración sin representar el valor exacto numérico de la función (lineal, exponencial,...). Finalmente, el último aspecto que queremos destacar de esta teoría es que propone, que el conocimiento que los expertos tienen almacenado en forma de modelos mentales puede fragmentarse en diferentes subsistemas cualitativos. Como vemos, las implicaciones de las propuestas de Forbus hacen hincapié en esa

estructura relacional de los modelos mentales, pero además refuerzan esa característica cualitativa de dichas relaciones al sugerir que en el modelo mental creado se ha transformado la información explícita cuantitativa en información mental cualitativa. Esta propuesta hace que, a pesar de no haber explorado aún los tipos de representaciones mentales que se postula el sujeto crea cuando resuelve un problema, ya podemos avanzar que existe una posibilidad de que la representación mental, producto de la comprensión del texto del problema, sea icónica en cuanto a las relaciones entre las piezas y que dichas relaciones sean cualitativas. Es decir, hay un grupo de trabajos que sugieren que al leer el problema con el que iniciábamos esta Tesis Doctoral la representación mental o simulación que el individuo crea para resolver dicho problema: (i) incluye una serie de relaciones entre las piezas que son iguales a las explicitadas en el texto; (ii) es icónica en tanto que refleja esas relaciones y piezas, pero no tiene el carácter de una imagen mental que refleja dicho texto explícito ya que hay otros productos que se han procesado junto a esa información textual; (iii) las cantidades explícitas en el texto se han transformado en relaciones cualitativas donde las cifras no tienen ese carácter cardinal.

Si bien esa representación mental, hemos dicho que tiene dos características esenciales que describen lo que podemos llamar su *esqueleto*, y que han determinado nuestra propuesta y diseño empírico, la naturaleza de dicho modelo mental, es decir, cómo aparecen codificadas esas relaciones y estructuras en la mente del sujeto, aún sigue siendo motivo de controversia como ya hemos mencionado anteriormente. Por un lado, encontramos un grupo de aproximaciones que sugieren un sistema de representación proposicional como cuerpo para los inputs que acaban formando el modelo mental; y por otro lado, encontramos las posturas que sugerirían que ese modelo mental es más cercano a una imagen mental. En otras palabras, ¿cómo está codificada la información que da forma a ese esqueleto, en un lenguaje mental que tiene una estructura sintáctica predeterminada, o bien en la forma de una imagen mental simulada por el sujeto? A este respecto, el propio Johnson-Laird propone la existencia de tres tipos de representación mental que conviven cuando interpretamos o extraemos el significado de un texto: representaciones proposicionales, imágenes mentales icónicas, y modelos mentales que también son icónicos pero permiten la inclusión de elementos, como la negación, que son difíciles de visualizar en la imagen. Esta visión conciliadora no parece agrandar ni a unos ni a otros, sin embargo, dejaremos esa disquisición para la segunda parte de este Primer Capítulo. De lo que parece no haber duda es que ese modelo mental tiene un carácter relacional y cualitativo además de ser producto de un proceso llamado comprensión. Es decir, cuando el individuo comprende el texto, crea un modelo mental de la situación a la que se refiere (van Dijk & Kintsch, 1983).

### 1.1.2 *El modelo mental como producto de un proceso llamado comprensión*

Este epígrafe atiende a una perspectiva eminentemente cognitiva desde la cual trataremos de explicar qué procesos convierten ese texto en una realidad interna o en un constructo adecuado para ser manejado y almacenado convenientemente. De alguna manera, y sin entrar de lleno en este proceso cognitivo, la comprensión es no sólo un viaje desde el texto, sino una metamorfosis de todo aquello que nos rodea cuando somos conscientes, unido a otro tanto que está almacenado de una forma característica en nuestro cerebro. En las líneas que siguen, esbozaremos qué es ese viaje llamado comprensión desde esos modelos que han centrado su esfuerzo en el proceso de comprender un texto. Nos limitaremos a sintetizar a partir de qué inquietudes se han desarrollado los modelos y cómo se da ese proceso de comprensión que desemboca en una representación mental que incluye: información del texto, información que estaría relacionada con el texto, y aquellas inferencias que se generan durante el proceso. Si en la aproximación al modelo mental que hemos esbozado anteriormente hacíamos referencia a sus características o esqueleto, el modelo mental o modelo de la situación propuesto desde los modelos clásicos de comprensión de textos veremos que nos acerca a la representación mental como producto.

El término comprender resulta difícil de definir. No sería correcto decir que es algo abstracto, a pesar de no poder palpase, o decir que es simplemente un modelo o regla de operacionalización por parte del cerebro. Entonces, ¿qué es comprender? Para definirlo sólo hemos de responder a una pregunta ¿hemos entendido lo que acabamos de leer hasta ahora? Pues bien, en el caso de que la respuesta sea afirmativa habremos respondido involuntariamente a la pregunta que iniciaba este párrafo ya que comprender es extraer el significado de los datos que recibimos, siendo estos datos una palabra, imagen, concepto, relación, o aquello que percibimos a través de nuestros sentidos. El término comprender está asociado a la capacidad de *leer dentro* y por tanto comprender estaría asociado a esa lectura del interior de las cosas. En este sentido, comprender es un viaje extraordinario hacia el interior de nosotros mismos, donde se ponen en contacto la realidad externa y aquella realidad interna formada a partir de la primera. Y es que cuando decimos que hemos comprendido algo, hemos logrado adecuar u organizar aquello de lo que somos conscientes en esos momentos. En el caso que nos ocupa, la resolución de un problema aritmético, el proceso de comprensión está íntimamente ligado a una correcta ejecución de la tarea. No en vano, los sujetos que mejor y más efectividad tienen a la hora de resolver problemas, son aquellos que emplean considerablemente más tiempo comprendiendo el problema antes de ejecutar la operación correspondiente (Csikszentmihalyi & Getzels, 1971; Gick & Holyoak, 1983). Por ejemplo, cuando decimos que hemos comprendido el problema que hemos de resolver, queremos decir que finalmente hemos encajado las piezas de un puzzle. Ese puzzle es la



información que hemos estado recibiendo, procesando, transformando, reutilizando, y finalmente almacenando de una forma determinada. Desde un punto de vista más formal, podemos decir que comprender es el procesamiento de la información para extraer significado (McNamara & Magliano, 2009), siendo dicho significado la representación interna que centra este trabajo.

Durante el último siglo, diferentes modelos, centrados en el proceso de comprensión, han tratado de explicar con mayor o menor determinación y fortuna, cómo la lectura de un texto desata una serie de mecanismos cognitivos que están en relación con las características o propiedades de ese texto, con los requerimientos de la tarea donde está contextualizado dicho texto, y con el sujeto que lo percibe. Si bien este proceso de comprensión es imprescindible para entender cualquier tipo de información, ha sido la información presentada textualmente (escrita o narrada) sobre la que predominantemente se han centrado los modelos que han tratado de explorarlo. El desarrollo de esos modelos, y el producto sugerido, ha venido determinado por diferentes inquietudes. Por un lado, algunos se interesaron explícitamente por el recuerdo que los sujetos mantenían de los textos y de las características de éstos, para poder determinar así qué tipo de representaciones generaban los sujetos. Dentro de este grupo, la mayoría de modelos remarcaban la influencia de la memoria en el procesamiento top-down de los textos, centrándose en el rol de determinados elementos textuales dentro de la estructura general de los textos narrativos (“*story grammar*” de Mandler y Johnson, 1977; “*script theory*” de Stein y Glenn, 1979) y expositivos (“*estructuras jerárquicas*” de Meyer, 1975). Por otro lado, una segunda inquietud que guiaba el desarrollo de estas teorías eran los efectos de los elementos del texto en la formación de esas representaciones, esto es, en cómo determinadas partes de los textos influían en la coherencia de la representación generada. Éstos sostenían que el lector trata de construir representaciones mentales coherentes con la estructura referencial o causal (Kintsch & Van Dijk, 1978; Trabasso, Secco & van den Broek, 1984). Dentro de este último conjunto de modelos, fueron Zwann y Radvansky (1998) quienes señalaron un punto de inflexión que nos permite hacer una división de los modelos de comprensión en dos grandes grupos, y da pie al nacimiento de esa representación mental que queremos explorar. Este punto de inflexión es la aparición en 1983 de los trabajos de Johnson-Laird y de Van Dijk y Kintsch. Hasta ese momento todos los modelos se habían limitado a proponer que cuando el lector comprende un texto, construye una única representación del propio texto y no de la situación descrita por el mismo. Sin embargo, estos autores comenzaron a centrarse en el estudio de la representación mental de las situaciones descritas en el texto, o lo que es lo mismo, la generación de modelos mentales (Johnson-Laird, 1983) o modelos de la situación (Van Dijk y Kintsch, 1983). Sin abandonar la idea de que los sujetos creaban una representación del propio texto, estos autores proponían un nuevo nivel representacional. Así, el

lenguaje pasó a concebirse, no únicamente como información susceptible de ser analizada semántica y sintácticamente para ser posteriormente almacenada en la memoria, sino como un conjunto de instrucciones de procesamiento para construir una representación mental de la situación descrita (Zwaan y Radvansky, 1998).

En general, podríamos decir que las teorías sobre la comprensión se centran en la naturaleza del proceso que emerge cuando el sujeto se enfrenta a una oración, párrafo, capítulo, libro, o conversación. Ese proceso tiene por objeto entender las palabras, oraciones y relaciones entre dichas oraciones. La decodificación de las palabras y el análisis de las oraciones en sus partes, para descifrar su rol sintáctico, son los procesos que tienen lugar al inicio de la comprensión. Sin embargo, la comprensión del lenguaje va más allá de esos procesos iniciales e implica: la búsqueda del significado que subyace a las ideas; la activación inconsciente de conceptos relacionados; y la unión de ideas que son explicitadas en el texto (McNamara & Magliano, 2009). Así, durante el proceso de comprensión se da una activación paralela de información que proviene del propio texto, del significado subyacente de esa información textual, y del conocimiento previo del sujeto. Esa activación —común en todos los modelos de comprensión— es representada en forma de capas en una red de nodos y conectores, donde los nodos representan palabras, proposiciones, o conceptos, y los conectores representan las relaciones entre ellos (e.g., predicados, verbos, conectores causales). La activación de conceptos que permanecen en la memoria da lugar a una activación de conceptos relacionados dependiendo de la fuerza que tengan dentro de esa red de nodos, en otras palabras, dependiendo de la atención que hayan recibido durante el proceso. A lo largo del proceso, tienen lugar una serie de actividades inconscientes que relacionan el input lingüístico con el contexto previo dando lugar a una cohesión en la representación que se va formando. Cuando esta actividad falla, son necesarias inferencias que conectan diferentes constituyentes del discurso que se está procesando en el momento. Esta generación de inferencias permitiría conectar información *dentro* del texto, o bien, información del texto con información *fuera* o no explícita en dicho texto (e.g., conocimientos previos, información de la representación mental incipiente que se está construyendo, o conocimiento del mundo que nos rodea).

Si bien hemos pretendido simplemente esbozar el proceso de comprensión y la evolución de los modelos clásicos que han estudiado ese proceso, éste va más allá de las líneas que preceden. No obstante, ese esbozo sirve para localizar a la representación que emerge de tal proceso —el modelo de la situación— entendido como un producto creado a partir de la lectura de un texto. Esta idea del modelo mental como un producto, unida a las características mencionadas al inicio de esta primera parte del Capítulo

Primero —estructura relacional y cualitativa— servirán para contextualizar la siguiente aproximación a la naturaleza de esa representación mental.

## 1.2 LA NATURALEZA DE LA REPRESENTACIÓN MENTAL

Como ya hemos mencionado en la introducción a este Capítulo Primero, este segundo apartado pretende explorar las principales aproximaciones a la naturaleza de esa representación mental que el sujeto crea cuando comprende un texto. En particular, veremos cuál es la propuesta desde los robustos modelos de comprensión que ya hemos mencionado en el epígrafe anterior, y cuál es aquella propuesta de los modelos que defienden una concepción del significado arraigada a las experiencias perceptivas y motoras del individuo.

### 1.2.1. Desde los modelos clásicos de comprensión: La naturaleza simbólica

Creemos en este punto es conveniente recordar que a pesar de que diferentes modelos establecen diferentes tipos de representación interna, dependiendo en gran medida de la calidad de esa representación mental o de los niveles de comprensión —en términos del *modelo CI*—, cuando utilizamos el término representación interna o mental nos referimos a aquella que incluye todos los niveles de representación (texto superficial, texto base, modelo de la situación y niveles pragmáticos). Y dado que no todos los modelos reconocen esos niveles de representación, hemos preferido hablar de modelo de la situación o modelo mental (Johnson-Laird, 1983; van Dijk & Kintsch, 1988) como representaciones mentales finales, es decir, aquel tipo de representación más completa que incluye los personajes del problema, sus comportamientos, los objetos con los cuales los personajes interactúan y todas las inferencias que van más allá de los conceptos explícitamente mencionados en el texto.

Ese modelo de la situación resultante, no ha tenido la misma consideración como producto final en el desarrollo de cada uno de los modelos, como vemos en la Tabla 1.1. Los distintos modelos han definido diferentes tipos de representación interna que además equivaldrían a diferentes niveles de comprensión, o lo que es lo mismo, una mayor o menor dominancia del texto como tal en esa representación mental. En este sentido, la propia calidad de esa representación interna dependería también: de la descripción de las relaciones entre los distintos elementos de esa representación final, o lo que es lo mismo, el grado de coherencia local y global establecido por co-referencias o inferencias basadas en texto base, tal y como expresan McKoon y Ratcliff, (1992); y de la mayor o menor jerarquización de la estructura de la representación como sugieren otros autores. Además, para acentuar las diferencias, cada una de las teorías ha enfatizado diferentes procesos que apoyan la construcción del modelo de la situación. Por ejemplo, el *modelo CI* enfatiza el rol de las inferencias con el

conocimiento previo, mientras que los modelos *Event-Indexing* y *Causal Networks* remarcan el rol de aquellas inferencias con el texto base que reflejan continuidades situacionales (e.g., causal, espacial, o temporal). En otras palabras, mientras que el *modelo CI* establece que dicho modelo de la situación incluye una interacción entre la información del texto y el conocimiento previo activado, los otros dos modelos teóricos establecen que dicho modelo de la situación captura un evento subyacente y la secuencia causal que tiene lugar dentro de un espacio y tiempo determinados.

<b>Construction-Integration</b> (Kintsch, 1988, 1998)	<b>Structure-Building</b> (Gernsbacher, 1990; 1997)	<b>Resonance</b> (O'Brien, Myers and colleagues, 1993; 1994; 1995)	<b>Event-Indexing</b> (Zwaan, Langston, & Graesser, 1995)	<b>Landscape</b> (van den Broek and colleagues, 1999; 2004; 2005)	<b>Causal Network</b> (Trabasso and colleagues, 1985; 1988; 1989; 1993; 1999)	<b>Constructionist</b> (Graesser, Singer, & Trabasso, 1994)
<b>3</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>3</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>2</b>

**Tabla 1.1 (Adaptada de McNamara & Magliano, 2009): Ratings de los principales modelos de comprensión en relación al valor dado al modelo de la situación dentro del proceso de comprensión: crítico (3); importante (2); reconocido (1); ausente (0).**

Como vemos, si la representación mental final —como producto de la comprensión de un texto— es común a casi todos ellos, no es menos cierto que esas representaciones distan unas de otras. A la vista de las diferencias en la representación mental sugerida por los distintos modelos, Graesser y Clark (1985) ya avanzan que algunas de las diferencias entre las distintas aproximaciones se deben a que los modelos entienden que esos productos implican representaciones discretas, cuando lo correcto sería conceptualizarlos como diferentes aspectos de la representación mental de un texto. Así, se sugiere que el producto de la comprensión se refiera a la representación mental resultante del proceso de comprensión, la cual puede contener múltiples aspectos para reflejar en mayor medida la situación implícita denotada por el texto en vez del contenido explícito del texto. Esta idea que deriva de la variedad de representaciones mentales que se sugieren desde los modelos de comprensión, se convierte en esencial a la hora de entender el objetivo de nuestro esfuerzo, dado que como mencionábamos en la Introducción, nuestra propuesta pasa no por descartar una naturaleza proposicional sino por explorar la existencia de una naturaleza perceptiva que debería entenderse, en palabras de Graesser y Clark, como un aspecto más para reflejar la situación denotada en el texto.

Lo que no deja de resultar sorprendente, a pesar de las diferencias en esa representación mental que se sugiere, es que sólo el *modelo CI* de Kintsch establece que la naturaleza de la información de dicha representación mental es proposicional. El sistema proposicional, como forma utilizada para representar ese modelo mental o modelo de la situación que se genera, sirve no sólo para la representación mental del texto sino también para la del conocimiento previo del sujeto, los conceptos, el significado de las palabras, y para las experiencias personales (Kintsch, 1998). Pero antes de detenernos en dicho sistema proposicional, hemos de mencionar la existencia de otros sistemas de representación del significado que también podrían ser alternativas para la búsqueda de esa naturaleza del modelo mental, como son: los sistemas de características (Katz & Fodor, 1963), las redes asociativas (Meyer & Schvaneveldt, 1971), las redes semánticas (Collins & Quillian, 1969), y los esquemas, marcos y scripts. Si bien el sistema proposicional ha sido el que más peso tiene en los modelos de comprensión actuales, antes de abordarlo queremos explorar cómo los esquemas han servido tradicionalmente para construir el esqueleto de la representación mental, no en vano, el propio sistema proposicional, como veremos, es un esquema predicado-argumento.

El término *esquema* fue introducido en el campo de la Psicología por Bartlett (1932) en su estudio sobre la memoria. En palabras de Bartlett, un esquema es una estructura organizada de conocimiento sobre la cual pueden encajarse nuevo conocimiento y experiencias, es decir, una estructura de conocimiento que permite interrelacionar todo el conocimiento previo de un sujeto en torno a un tópico definido. Desde los primeros trabajos de Piaget (e.g., Piaget, 1952, 1953; Piaget & Inhelder, 1969), la definición de esquema se ha mantenido y ha sido corroborada a lo largo de numerosos trabajos (Davis & Tall, 2001; Lagrange, 2000). Tanto la información nueva, como la que está almacenada en el sujeto, se organizan en este tipo de estructuras de conocimiento, siendo los esquemas de conocimiento previo, los que median de forma significativa la forma y el contenido de la información novel que será almacenada. Anderson (1978) enfatiza la naturaleza dinámica de los esquemas y cómo éstos sirven para organizar la información nueva de tal manera que sin estos esquemas las nuevas experiencias serían casi incomprensibles.

En el contexto de la resolución de problemas, Paas (1992, p. 429) describe cómo un esquema “*puede ser conceptualizado como una estructura cognitiva que facilita a quien va a resolver un problema, el reconocimiento de la categoría particular a la que pertenece dicho problema y qué operaciones son necesarias para alcanzar una solución*”; mientras que Sweller (1992, p. 47) define un esquema como “*un constructo cognitivo que permite a quien va a resolver un problema, categorizar éste de acuerdo a las acciones requeridas para solucionarlo*”. Estos esquemas, que permiten la identificación del problema que va a resolverse, también están involucrados en la construcción de conocimiento matemático. Así, Dubinsky (1991), o Cottrill, Dubinsky, Nichols, Schwingendorf, Thomas, y Vidakovic (1996), describen

una cadena de eventos implicados en la construcción de ese conocimiento matemático: por un lado una serie de acciones repetidas que cuando se desarrollan sobre un objeto se internalizan como procesos, los cuales son encapsulados como objetos mentales; por otro lado, la sucesión de esta cadena de eventos da lugar a la formación de esquemas, los cuales van desarrollándose en torno a relaciones entre esos objetos mentales o nodos conceptuales. Esas relaciones pueden ser, por ejemplo: similitud-diferencia entre objetos, o procedimientos para resolver el mismo problema. A este respecto, Skemp (1979) ya consideraba vital la naturaleza cualitativa de esas relaciones entre nodos, las cuales podían ser de tipo conceptual o bien de tipo asociativo, de tal manera que la expansión y crecimiento de estas relaciones daba lugar a esquemas más ricos y de mayor calidad en cuanto que promovían la asimilación de nuevo conocimiento y consecuentemente la expansión del propio esquema. De acuerdo al concepto de esquema, la comprensión sería un proceso que combina los esquemas preestablecidos en el sujeto con la adjudicación de valores para esas variables por medio de procesos bottom-up y top-down. De esta manera, esos esquemas preexistentes promueven o restringen la asociación de nuevos conceptos, y por tanto, la calidad de lo que un individuo sabe, condiciona la habilidad para comprender correctamente (Skemp, 1979).

Este sistema de esquemas ha ido evolucionando a lo largo del desarrollo de las teorías cognitivas, pasando de ser considerados estructuras rígidas (Schank & Abelson, 1977) a contenedores que generan estructuras organizativas en el contexto particular de una tarea (Kintsch & Mannes, 1987). En este desarrollo, Kintsch (1998) describe el sistema proposicional como un esquema del tipo predicado-argumento, es decir, la información se transforma en unidades proposicionales que incluyen un predicado (verbo) y argumentos, además de posibles subproposiciones. En palabras de Pylyshyn (1981), esas proposiciones son expresiones sintácticamente estructuradas en un lenguaje mental. Si bien el sistema proposicional ha ido evolucionando desde las proposiciones atómicas (Kintsch, 1974) hasta las proposiciones complejas (van Dijk & Kintsch, 1983), en esencia se ha mantenido la idea de que toda la información, tanto explícita en el texto como no explícita que finalmente forma parte de la representación interna resultante de la comprensión, vendría codificada en una red de proposiciones. Por ejemplo, la frase *Ayer, María le devolvió el libro de ciencias a Alfredo en la biblioteca*, estaría representada como la proposición compleja que aparece en la Figura 1.1. La representación mental de un texto incluiría así una red de proposiciones complejas que estarían relacionadas entre sí de acuerdo a tres niveles posibles distinguidos por van Dijk y Kintsch (1983): coherencia indirecta, coherencia directa y subordinación.

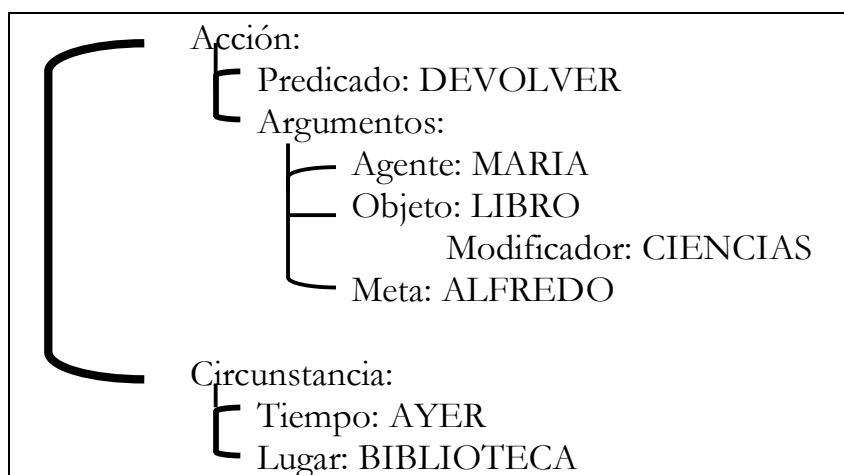


Fig. 1.1: Ejemplo de sistema proposicional (Adaptado de Kintsch, 1998).

En este punto, McNamara & Magliano (2009) establecen una clara diferencia entre la información que forma parte de esa representación mental y aquellas fuentes de información (e.g., el conocimiento episódico, el conocimiento del mundo, la oración que se está leyendo en el momento, o el texto base que representa a la oración que hemos leído previamente) que son un conjunto de conocimientos que contribuyen a la construcción del modelo de la situación y fluctúan en activación a medida de las características del discurso (Todaro, Magliano, Millis, McNamara, & Kurby, 2008). No obstante, como ya hemos mencionado anteriormente, esa naturaleza de la representación interna está también condicionada por la calidad, es decir, los niveles de representación, la estructura jerarquizada, o el grado de coherencia local y global que permite. No queremos finalizar este apartado sin recordar que esa representación interna, producto de la comprensión, existe para una simple oración, para un párrafo, o para este mismo volumen que el lector tiene en sus manos. Así, el texto base sería la representación proposicional creada desde la información explícita del texto, mientras que el modelo de la situación incluiría las proposiciones del texto base y aquellas otras que son codificadas desde el conocimiento almacenado en la memoria a largo plazo del sujeto. En resumen, podríamos decir que la representación mental que el sujeto crea —modelo de la situación (Kintsch, 1998)— incluye, el texto base y una cantidad variable de conocimiento previo, o bien elaborado a partir de éste, para interpretar el texto. Hemos obviado deliberadamente dos conceptos que hacen referencia a la estructura local y global del texto y que están presentes en el sistema proposicional —microestructura y macroestructura— dado que, a juicio de algunos autores, no tienen la consideración de relevantes en el modelo de la situación resultante. Igualmente hemos dejado a parte los vectores de representación, propuestos también como un formato de representación a nivel lingüístico, y las redes proposicionales como

representaciones de conocimiento, dada su escasa aplicación en las propuestas que veremos en el Capítulo II sobre resolución de problemas aritméticos.

Esta concepción de un sistema de representación proposicional para determinar la naturaleza del modelo mental creado choca con algunos planteamientos en el ámbito de los modelos de la situación (Fincher-Kiefer, 2001) y en el campo de la resolución de problemas (Thevenot, 2010), que argumentan la incongruencia de ese sistema para definir la naturaleza del modelo mental que se crea a partir del problema sobre el que versa este trabajo “*Juan tiene 5 canicas más que Pedro. Si Juan tiene 13 canicas, ¿cuántas canicas tiene Pedro?*”. En el caso de la resolución de problemas, Thevenot (2010) utiliza un paradigma propio de las representaciones espaciales para demostrar que esa representación interna resultante no contiene una red de proposiciones sino que más bien, dicha representación se basa sólo y exclusivamente en el componente relacional, es decir en el significado de la relación descrita en el texto en vez de en el texto como tal en sus formas superficial y proposicional. Esta última aproximación podría situarse en una línea cercana a los planteamientos cognitivos que veremos más adelante y que plantean que la última fase de la comprensión de un razonamiento sería la inspección del modelo mental, el cual podría tener una naturaleza más perceptiva que proposicional (e.g., Vosguerau, 2006). Sin embargo, los propios resultados de Thevenot demostrarían la construcción de un modelo mental de carácter relacional y cualitativo durante la resolución, pero dejan dudas sobre la naturaleza de dicho modelo mental ya que no excluyen la posibilidad de que, en último extremo, ese modelo mental relacional esté definido por un sistema proposicional, o lo que es lo mismo, que otro aspecto de ese modelo mental que el sujeto simula e inspecciona no tenga un carácter o sentido proposicional o simbólico. La tarea de recuerdo utilizada al efecto permite evaluar cómo el sujeto ha creado e inspeccionado el modelo mental, pero no si ese carácter relacional está codificado en símbolos amodales y abstractos, producto de un sistema preestablecido al efecto, o en símbolos modales.

La idea de representación abstracta o de representar el mundo de forma simbólica, habría evolucionado biológica y culturalmente de otras formas de representación más concretas (ver: Donald, 1991; Nelson, 1996) y se mostraría como óptima para codificar en un mismo código toda aquella información que pasa a formar parte de la representación que el sujeto crea. Si bien, la representación establecida por el sistema proposicional captura las relaciones semánticas más salientes a un nivel lingüístico durante la codificación, este sistema no rechaza la posibilidad de interpretar estas unidades de significado en términos modales (considerando una posible naturaleza perceptiva o espacial), aunque propone una traducción de estos últimos al sistema proposicional. En otras palabras, quienes defienden esta aproximación no ofrecen un rechazo frontal a la posibilidad de que el lenguaje evoque una activación perceptiva o motórica, pero creen en la necesidad de



que toda esa información generada sea codificada de nuevo en el mismo código para ser posteriormente mezclada o utilizada con aquella que viene de la codificación lingüística, por ejemplo. Si bien, desde los modelos de comprensión clásicos, estos aspectos –corporeidad e imágenes mentales—se han tratado como procesos implicados que pueden afectar a la representación mental creada, trataremos de profundizar más en ellos puesto que ofrecen una alternativa a la naturaleza de dicha representación. Partimos para ello, de una afirmación propia de un gran defensor del sistema proposicional como base del significado:

<<Todos los modelos de comprensión asumen que el lector crea imágenes icónicas durante la lectura<sup>1</sup> (Kintsch, 1998)>>

### 1.2.2 Desde los modelos corpóreos: La naturaleza sensorio-motora

Hasta este momento, hemos tratado de entender que el proceso de comprensión de un texto da lugar a un producto –una representación mental—creado por el sujeto. También hemos considerado que dicha representación se forma a partir de un tipo de información explícita y no explícita en el texto, y que la naturaleza de ese producto puede ser abstracta en el mismo sentido que lo es el sistema proposicional. Es a finales del siglo XIX, con los trabajos de Binet (1894) y Perky (1910), cuando surge otra aproximación diferente a la naturaleza de esa representación interna. Así se da inicio al planteamiento de la existencia conjunta de dos representaciones, una verbal y otra visual, que serían el producto de la comprensión de un texto (e.g., Bower, 1970; Paivio, 1971). Al desarrollo de esta posibilidad se unirían los avances en neurociencia cognitiva, y a ellos les seguiría el debate que aún hoy continúa acerca de la naturaleza de esa representación interna.

Lo que a continuación guía nuestro pasos es esa alternativa mencionada anteriormente, y que parte de las teorías simbólicas perceptivas (e.g., Barsalou, 1999; Glenberg, 1997) al asumir que los sistemas cerebrales asociados a la percepción y a la acción también están involucrados en la representación del conocimiento, en los procesos del lenguaje y en la comprensión. Esto es, la comprensión del lenguaje o la representación mental creada implicaría una “resonancia” o “re-activación” de áreas corticales que usualmente gobiernan la percepción, la acción e, incluso, la emoción. Tanto la *Perceptual Symbols theory* (Barsalou, 1999) como la *Embodiment theory* (Glenberg, 1997) postulan que ciertos símbolos perceptivos apoyan el proceso de comprensión a través de un mecanismo, en el cual esos símbolos son activados y mapeados en el contexto especificado en el texto mediante un proceso de simulación (Zwaan, 2004). El origen de estas posiciones tuvo lugar en el interés por el rol de las imágenes

---

<sup>1</sup> Obviamos que el propio autor (1994), propone que esas imágenes a la postre acaban traducéndose a un sistema proposicional partiendo de un nivel no pictórico planteado por Kosslyn (1980) en las imágenes mentales.

mentales (visualizar mentalmente una imagen sin referente externo), en el pensamiento, el razonamiento y la resolución de problemas (Perky, 1910), y en los trabajos de Paivio (1971, 1986). Después de un largo debate en los años 80 (para una revisión, ver; Tye, 1991), la ciencia cognitiva aceptó el argumento de que los procesos cognitivos pueden recaer en un número diferente de formatos representacionales. Desde entonces, un creciente corpus científico, apoyado en técnicas de neuroimagen, ha contribuido a dotar de forma a estos modelos (e.g., Kosslyn, 1994) y a establecer cómo se da ese proceso de comprensión: (1) creación de una imagen mental, (2) transformación de imagen a modelo mental, (3) y procesamiento o inspección de dicho modelo mental.

Existe un corpus empírico más que significativo en torno a las evidencias que unen los procesos del lenguaje, y el producto de la comprensión de éste, a la activación de símbolos perceptivos, o cognición corpórea, (e.g., Glenberg & Kaschak, 2002; Sadoski & Paivio, 1994; Stanfield & Zwaan, 2001; Zwaan, 2004; Zwaan, Madden, Yaxley, & Aveyard, 2004; Zwaan, Stanfield, & Yaxley, 2002). Sin embargo, dado que estas evidencias, de momento, no han explorado más allá del nivel de palabra u oración, y que la idea de símbolos perceptivos formando una red de nodos que pueden activarse de una manera conexionista –como postulan la mayoría de los modelos de comprensión—es aún remota, la posibilidad de una representación mental final de carácter corpóreo o puramente perceptiva dista aún de ser aceptada por la comunidad científica. No en vano, una de las cuestiones relacionadas con esta posibilidad es la que hace referencia a la interpretación del significado. Es en este punto donde nacen las divergencias entre quienes defienden un significado de carácter corpóreo (representación sensorio-motora), y quienes defienden por el contrario, la existencia de un significado simbólico (representación simbólica). Por un lado, la aproximación simbólica plantea que el significado no está definido por el mundo real sino que dicho mundo se interpreta a través de ese significado, es decir, el significado de los símbolos no puede reducirse a los dominios de la acción y la percepción. Por otro lado, la aproximación corpórea defiende que la experiencia perceptiva, sensorial o motora, supone la raíz de los significados de esas palabras u oraciones. A favor de esta última interpretación están los datos que se obtienen de la aplicación de distintas técnicas de neurociencia y que ponen de manifiesto la actividad en ciertas zonas cerebrales cuando el sujeto se expone a los textos/discursos. Aparece así una correspondencia entre las palabras y las zonas motoras y/o sensoriales-perceptivas a las que hacen referencia dichas palabras. Esta activación no se limita a las áreas de Broca y Wernicke, sino a otras zonas asociadas a dichas áreas, o que tienen relación con la palabra/oración en cuestión. Algunos de los datos que avalan esta aproximación son recogidos por De Vega (2005):

- Las palabras activan áreas cerebrales que se solapan con las áreas implicadas en la percepción y la acción.
- La comprensión de palabras concretas activa representaciones de la forma, el tamaño, la orientación, etc.
- La comprensión de textos que describen situaciones espaciales activan representaciones viso-espaciales del entorno descrito.
- Durante la comprensión de textos que describen acciones y movimientos, se activan representaciones motoras.
- La comprensión de textos con contenidos emocionales activa representaciones emocionales.

Como ya hemos mencionado, son varias las teorías que defienden o justifican la realidad corpórea del significado y que defienden que la comprensión no es un proceso computacional sobre símbolos abstractos en un sistema modular, como mencionan los modelos que vimos en el apartado anterior. Algunas de ellas hacen referencia al propio sujeto (e.g., Zwaan, 2004), el cual construye representaciones corpóreas o experienciales cuando se expone a un texto narrativo. Otras hacen referencia a las propias palabras y oraciones en su papel de activadores de símbolos perceptivos (e.g., Barsalou, 1999). Y otras teorías destacan el papel de esas palabras como guías en la construcción de una simulación mental (e.g., Glenberg & Kaschack, 2000). Los estudios sobre modelos de situación desarrollados en la década de los 80 y 90 ya sugerían que, durante la comprensión del discurso, el individuo construye representaciones mentales que son análogas a la experiencia, incluyendo aspectos espaciales, temporales, emocionales o interpersonales de la situación. Los datos de la neurociencia cognitiva son convergentes con los datos de la psicología cognitiva en este aspecto. La neurociencia muestra un solapamiento neuronal entre comprensión y acción y la psicología indica un solapamiento funcional entre ambos. La múltiple funcionalidad de las neuronas espejo como procesadores de acción, como interpretadores de acción, y como simuladores de acción (véase la revisión de Gallese, Keysers & Rizzolatti, 2004), sugiere también un importante papel en la comprensión del significado lingüístico. En conjunto, todo este corpus sugeriría una naturaleza diferente al sistema proposicional para esa representación mental que el individuo crea cuando comprende un texto. En otras palabras, esa representación mental con una estructura relacional y cualitativa, podría tener una naturaleza no solamente simbólica (un sistema proposicional), sino que la propia comprensión desencadenaría una activación sensorial o motora como un aspecto adicional de ese modelo mental.

Sin embargo, cuando hablamos de resolución de problemas, la posibilidad de que al representar mentalmente el significado de un problema, para el cual

hemos de producir una respuesta numérica, se evoque ese tipo de representaciones sensoriales o motoras podría parecer un poco más remota. Lejos de esta posibilidad, y basándonos en los estudios sobre adquisición del lenguaje, los cuales indican que el aprendizaje del significado de las palabras y de las construcciones gramaticales está estrechamente vinculado a la percepción y a la acción, nos atreveríamos a proponer que esa representación mental creada a partir de la información del problema, da lugar a algún tipo de representación sensorial o motora. En otras palabras, ese modelo mental que el sujeto crea podría contener trazas de experiencias previas como sugiere De Vega (2005, pp. 158):

*“los niños aprenden los verbos de acción como “agarrar”, “tirar”, “poner”, “quitar”, etc., mientras realizan, ellos mismos o los adultos, las correspondientes acciones en el contexto de lo que Slobin (1987) llama la “escena manipulativa básica”. Lo mismo puede afirmarse de los nombres de objetos que el niño asocia a experiencias perceptivas inmediatas en su entorno. Las miradas y gestos deícticos de los adultos ayudan a establecer una firme asociación entre palabras y experiencia visual, auditiva, táctil o motora (Pettito, 1993)”. Esta estrecha asociación entre patrones de experiencia y lenguaje, no sólo permite aprender el significado de las palabras, sino que sin duda contribuye a establecer circuitos reverberantes en las áreas perceptivas y motoras que se re-activan al codificar el lenguaje.*

La pregunta que sigue a continuación sería ¿y cuáles son esas experiencias previas que dan lugar a una activación sensorial o motora durante la resolución de un problema? Para responder a esta cuestión nos hemos acercado de puntillas a esos modelos más evolutivos de resolución de problemas. En concreto a la propuesta de Resnick (1989), quien afirma que a través de la percepción repetida de determinadas situaciones, el niño ha ido desarrollando lo que esta autora denomina *esquemas protocuantitativos*. Estos esquemas son patrones de razonamiento que operan de manera meramente perceptual, sin que intervenga ningún tipo de medida, y que permiten al niño determinar a partir de su experiencia cotidiana, por ejemplo, cuál es el círculo más grande de dos que le presentamos, si tiene más galletas que antes de que su madre le diera una más o que si divide un pastel en varias partes y las vuelve a juntar, vuelve a tener el mismo pastel. De esta manera, y de acuerdo al problema que hemos presentado al inicio de esta Tesis Doctoral, el esquema protocuantitativo de comparación permitiría comparar rasgos no cuantitativos de los objetos. Esto es, los niños en esta etapa evolutiva no operan con numerosidades concretas, sino que aún son juicios cualitativos sujetos a condicionantes perceptivos (aunque tienen un carácter relacional). De hecho, durante el proceso de aprendizaje, cuando se comienzan a introducir los primeros conceptos aritméticos, las representaciones de la numerosidad están fuertemente asociadas a una representación física de la cantidad usando para ello objetos, o los dedos, para contar conjuntos o

manipularlos (comparar, añadir, combinar), o posteriormente para calcular. Así, desde la infancia se acumulan experiencias de este tipo en las que los símbolos numéricos son mapeados con esas experiencias, las cuales están en la frontera entre la percepción y la acción. Como vemos, la idea de relación cualitativa vuelve a aparecer al hablar de esas experiencias previas del niño con la aritmética. Esta posibilidad también ha condicionado nuestra aproximación al objetivo de este trabajo, dado que si dicha relación es la que también caracteriza a los modelos mentales, sería lógico valorar si esos modelos mentales creados durante la resolución de problemas aritméticos despiertan esas experiencias previas.

En este contexto, en el que tratamos de establecer la naturaleza de esa representación interna que el sujeto crea durante la resolución, podrían asaltarnos las dudas no sólo sobre dicha naturaleza sino sobre el mismo proceso de comprensión, o lo que es lo mismo, si ese proceso de construcción de significado a partir de modelos conexionistas también se da cuando esa red de nodos implica no símbolos amodales, como el sistema proposicional de Kintsch postula, sino símbolos modales o perceptivos asociados a experiencias previas. Planteamos esta duda para futuros proyectos dado que no es el objetivo de este trabajo establecer dicha conclusión. De lo que sí creemos ser capaces es de establecer si esa representación interna implica de alguna manera una asociación con representaciones sensoriales que durante el aprendizaje de la aritmética se han ido almacenando como conocimiento previo.

De acuerdo a lo que hemos expuesto en los párrafos anteriores, no parece descabellado pensar que el modelo mental que el sujeto crea cuando resuelve dicho problema lleve consigo una representación sensorial asociada a algún tipo de experiencia previa. La pregunta que surgiría a continuación es ¿qué tipo de representación sensorial? A este respecto, un gran número de estudios ha demostrado una fuerte asociación entre los números y distintas interacciones sensoriomotóricas con el ambiente. Concretamente, entre la magnitud numérica y la pinza digital (Lindermann, Abolafia, Girardi, & Bekkering, 2007; Moretto & di Pellegrino, 2008). Aunque estos estudios se han centrado en el dominio de la acción, parece indudable que también pudiese darse una representación perceptiva de la magnitud, la cual se reactivaría durante el procesamiento de la información numérica en el curso de la resolución de un problema dado que, según menciona Dehaene (2001, p. 17), *“el fundamento de la aritmética reposa en nuestra habilidad para representar y manipular mentalmente la numerosidad en una línea numérica mental –una representación analógica de los números–, la cual tiene una larga historia evolutiva y un sustrato neuronal específico<sup>2</sup>”*. A este respecto existe suficiente evidencia que sugiere que el

---

<sup>2</sup> Estudios de neuroimagen han demostrado que el procesamiento de información numérica y no numérica relacionada con la magnitud, activaría el surco intraparietal IPS (para una revisión ver Brannon, 2006 y Cohen Kadosh et al., 2008)

desarrollo en la habilidad para representar y procesar símbolos numéricos (el nombre de los números o los dígitos arábigos), está basado en representaciones preexistentes de la magnitud (para una revisión, ver Ansari, 2008). De hecho, es comúnmente asumido que se da una interacción entre la representación de los números y la magnitud (Dehaene, Bossini, & Giraux, 1993; Walsh, 2003), estando esta relación típicamente adscrita a la línea mental numérica (Dehaene, 1997). Esta interacción, que ya mencionaba Galton (1880), ha tenido su máximo exponente en los hallazgos del efecto SNARC (*Spatial-Numerical Association of Response Codes*; Dehaene et al, 1993), en los trabajos sobre Stroop numérico que han identificado una interferencia entre el procesamiento numérico y el procesamiento de la magnitud (e.g., Kaufmann et al., 2005; Schwarz & Ischebeck, 2003), y en aquellas evidencias que derivan de estudios neuropsicológicos en pacientes con afectación neurológica severa. En conjunto, este corpus sugeriría la existencia de esa asociación entre las representaciones de números y la magnitud como dimensión perceptiva. A este respecto, Chen y Verguts (2010) proponen un modelo computacional numérico-espacial que respondería a los vacíos que dejaban los hallazgos mencionados anteriormente y explicaría esa interacción que deriva de paradigmas como el de la comparación de números –que ha dado lugar a los efectos de distancia y tamaño (Moyer & Landauer, 1967). Este hecho estaría en la línea de los hallazgos de Lee, Lim, Yeong, Ng, Venkatraman, & Chee (2007) sobre una activación del IPS (Intra Parietal Sulcus), común a las magnitudes simbólicas (e.g., números) y no simbólicas (e.g., espacio físico). También existe consenso acerca de la influencia de las diferencias individuales en la capacidad para representar y procesar la magnitud numérica y cómo dicha habilidad está íntimamente ligada al rendimiento en matemáticas (Holloway & Ansari, 2009). No en vano, el procesamiento de la información numérica parece estar afectado en los sujetos que presentan dificultades en cálculo y matemáticas (Butterworth, 2005; Wilson & Dehaene, 2007), lo cual ha dado lugar a métodos de estimulación basados en tareas para reforzar la asociación entre las representaciones simbólicas y no simbólicas de la magnitud numérica (e.g., Butterworth & Laurillard, 2010; Wilson et al., 2006).

No obstante, no son pocas las críticas que nacen a la luz de esa supuesta interacción entre la representación de una dimensión tan abstracta como es el símbolo numérico, y la activación o asociación con otras dimensiones concretas como es la magnitud o el espacio (Chen & Verguts, 2010; Fias, Lammertyn, Reynvoet, Dupont & Orban, 2003), y que sugieren que dicha asociación no es tal neuroanatómicamente, sino que factores culturales podrían ser los desencadenantes de la interacción. Cualquiera que sea la posición adoptada al respecto, las preguntas que han surgido a lo largo de la exposición de este Capítulo Primero han tratado de guiarnos hacia el objetivo de esta Tesis Doctoral, en otras palabras, la naturaleza del producto de la comprensión de un problema, es decir, el modelo de la situación o modelo mental ¿puede llevar consigo una activación perceptiva de la magnitud?

### 1.3. RESUMEN DEL CAPÍTULO Y ARGUMENTACIÓN

Para responder a la cuestión con la concluíamos este Capítulo Primero, previamente hemos ido desgranando las características esenciales de un modelo mental, el proceso mediante el cual el sujeto crea ese modelo mental a partir de un texto, y las dos aproximaciones a la naturaleza del producto de dicho proceso: por un lado, la aproximación desde los modelos de comprensión clásicos, que establecen que dicho producto tiene una naturaleza abstracta a partir de un sistema conexionista de símbolos amodales; y por otro lado, aquella dimensión teórica que argumenta que la cognición es un proceso de creación de imágenes mentales y que dicho proceso podría dar lugar a una comprensión corpórea, donde el producto activa representaciones sensorio-motoras que componen el significado de aquello que hemos comprendido.

De esta forma, hemos visto que a parte de las documentadas evidencias a favor de un sistema proposicional para dar cuerpo a ese modelo de la situación o modelo mental, existen posibilidades de que las representaciones del significado de los símbolo numéricos del texto del problema den lugar a una activación neuronal coincidente con la de representaciones concretas de la magnitud o del espacio. En este sentido, distintos estudios de neuroimagen han aportado evidencias para una activación del cortex parietal durante el razonamiento basado en modelos mentales, y para una activación concurrente de áreas corticales relacionadas con la visión, lo cual se ha interpretado como una evidencia del rol de las imágenes mentales o de las representaciones perceptuales en el razonamiento (e.g., De Soto, London, & Handel, 1965; Kosslyn, 1994).

Esa hipótesis de que la representación mental, el modelo de la situación o modelo mental que se construye durante la resolución, tenga una naturaleza representacional de carácter perceptivo basado en la magnitud, es la que ha guiado el desarrollo de este Capítulo Primero. Para justificar nuestra propuesta, repasamos algunos puntos que hemos mencionado anteriormente:

- el modelo mental es isomórfico en cuanto a que las relaciones entre las piezas se conservan una vez procesada la información, por tanto una representación perceptiva podría mantener esa relación.
- ese modelo mental es de carácter cualitativo en cuanto que la relación entre esas piezas del modelo se establece de forma ordinal incluso cuando existe información cardinal, así la representación perceptiva podría reflejar esa información ordinal en forma de magnitudes.
- Además, de acuerdo a las aproximaciones que tratan un modelo computacional del razonamiento basado en modelos mentales (e.g., Johnson-Laird, Byrne, & Tabossi, 1989; Schlieder & Berendt, 1998)

y más concretamente en la *Neuro-Cognitive three-stage-theory of Deductive Relational Reasoning with mental models and visual images* de Knauff (2009), esos modelos mentales que subyacen a todas las formas de razonamiento relacional son espacialmente organizados, es decir, la representación perceptiva podría estar dispuesta de forma espacial y ser explorada y evaluada para resolver el problema.

- los modelos mentales no deben ser identificados con una imagen mental icónica ya que la información procesada incluye no sólo la explícita en el texto o discurso sino aquella que proviene del propio sujeto, por tanto una representación perceptiva no reflejaría a *Juan* y a *Pedro* con canicas sino que también sería el producto de información interna como aquella que deriva de las experiencias comparativas iniciales. En este sentido parte de la información que aporta el propio sujeto para la construcción del modelo mental podría ser de carácter experiencial (por ejemplo, la experiencia previa con las magnitudes durante sus inicios con la aritmética).
- y por último, pero no menos importante, el modelo mental es producto de la comprensión, y por tanto, la representación perceptiva es una activación de dicho modelo mental o parte de su significado. En este sentido, el modelo mental refleja aquello que el sujeto ha comprendido en un cierto momento, y puede ser actualizado con nuevos elementos a medida que nueva información es procesada.

En resumen, podríamos hipotetizar que esa representación perceptiva concreta es la que compone ese modelo mental (isomórfico y cualitativo), por un lado reflejando cierta analogía ligada a la disposición espacial de los elementos que forman parte de ella; por otro lado, traduciendo la información numérica del texto en información cualitativa en forma de magnitudes que pueden ser comparadas, ya que estarían dispuestas espacialmente en una relación comparativa.

Por tanto, en la resolución de nuestro problema *Juan tiene 5 canicas más que Pedro. Si Juan tiene 13 canicas, ¿cuántas tiene Pedro?*, no sería descartable un significado más corpóreo o asociado a una representación perceptiva de la magnitud. **En otras palabras, esa representación perceptiva no sería una imagen mental de la situación denotada en el texto explícito, sino una activación perceptiva que mantendría un carácter cualitativo, donde los símbolos numéricos se han sustituido por sus referentes asociados a la magnitud y mantienen un carácter espacial organizativo, esto es, el valor de uno depende de la relación dimensional con el otro.** Es esa relación y la activación de una representación de la magnitud numérica al procesar las cantidades, lo que podría dar cuerpo a esa naturaleza de la



representación mental que es el objeto de este trabajo y de otros en la línea de Vosgerau (2006), quien propone una naturaleza perceptiva de los modelos mentales.

Lo que parece incuestionable es que independientemente de cuál sea el proceso mediante el cual somos capaces de extraer un significado de las frases que estamos leyendo en estos momentos, es decir, cómo construimos el significado de este párrafo, y de la naturaleza, simbólica o no, del producto de dicho proceso, éste se distribuye en un número de centros corticales que incluyen no sólo las clásicas áreas corticales de Broca y Wernicke (las cuales estarían involucradas en un procesamiento más simbólico amodal), sino también áreas sensoriales y motoras (Just, 2006; Just, Newman, Keller, McEleney, & Carpenter, 2004). Estos hallazgos devuelven de nuevo a la arena el viejo debate, *imágenes mentales para representar el significado vs. un sistema proposicional amodal*, que fue temporalmente apartado del foco de atención tras la propuesta de Kosslyn (1994) de que los procesos que subyacen a la imágenes mentales daban lugar a una activación cerebral relacionada con la percepción y eran claramente diferenciables de los procesos verbales y simbólicos.



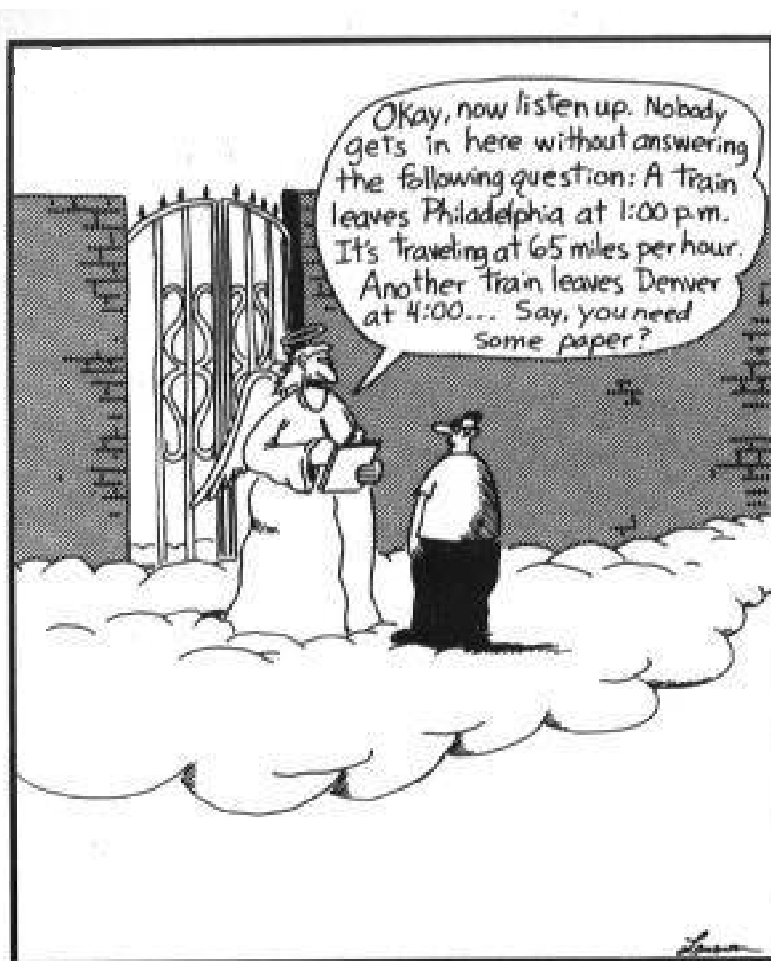
## CAPÍTULO II

### RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

En el capítulo anterior establecíamos la naturaleza que han propuesto para la representación interna, tanto los modelos clásicos de comprensión de textos como aquellas aproximaciones teóricas que han considerado la percepción y acción como base para esa naturaleza. Si bien justificábamos la inclusión de ambas aproximaciones por el hecho de que el problema se presentaba como un texto y como tal era procesado, no hemos de olvidar que el procesamiento de ese texto está contextualizado dentro de una tarea con requerimientos que van más allá del proceso cognitivo de comprensión, es decir, el problema ha de resolverse. En este capítulo vamos a explorar, primero, qué es resolver un problema y qué tipo de problema es *el problema de Juan*; y segundo, qué naturaleza han propuesto los modelos cognitivos de resolución de problemas para la representación mental creada durante esa tarea. Como veremos, estos tipos de representación interna no están planteados en torno a sistema proposicional vs./o sistema basado en experiencias previas, sino que simplemente establecen si esa representación mental creada a partir del texto del problema se decanta por lo cuantitativo o por la información cualitativa. Dado que nuestra hipótesis recae, sobre un modelo mental eminentemente cualitativo, será esa representación más cualitativa —definida por estos modelos como una red conceptual codificada en un sistema proposicional— sobre la que se centraría esa activación basada en magnitudes.

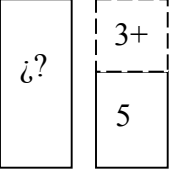
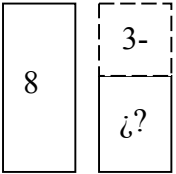
## 2.1. ¿QUÉ ES RESOLVER UN PROBLEMA?

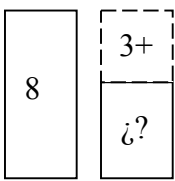
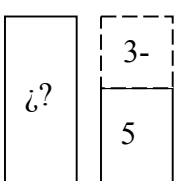
Antes de responder a esta pregunta hemos creído conveniente distinguir por qué es importante saber resolver problemas y de qué tipo de problema estamos hablando. En otras palabras, sabemos que el problema al que hacemos mención es *Juan tiene 5 canicas más que Pedro. Si Juan tiene 13 canicas, ¿cuántas tiene Pedro?*, pero desconocemos por qué es importante resolverlo y cuáles son su nombre y apellidos. La importancia de saber resolver problemas, creemos que subyace a la imagen que acompaña a estas líneas y no demanda de mayor explicación.



Para responder a qué tipo de problema es aquel que vamos a utilizar para validar nuestra hipótesis, utilizaremos la clasificación propuesta por Heller y Greeno (1978). De acuerdo a ésta, el problema que nos acompaña desde el inicio de esta Tesis Doctoral, es un problema de comparación en el que las cantidades no experimentan ninguna modificación, por lo que se considera una situación estática. En este tipo de problemas se compara un conjunto, denominado de referencia, con un segundo conjunto, que recibe el nombre de conjunto comparado, de manera que surge un tercer conjunto que

representa la diferencia entre ambos. La cantidad desconocida puede ser el conjunto referente, el conjunto comparado o la diferencia. En función de la relación comparativa “más que” o “menos que” Heller y Greeno diferencian seis tipos de problemas de comparación, sin embargo, para nuestro trabajo, sólo tendremos en cuenta aquellos que mostramos en la Tabla 2.1, y que podemos clasificar en dos grupos –consistentes e inconsistentes—de acuerdo a la relación existente entre la estructura superficial del problema y la operación necesaria para resolverlo (Lewis & Mayer, 1987). En otras palabras, fáciles y difíciles, ya que los problemas consistentes son más fáciles que los inconsistentes. En este sentido, según menciona Orrantia (2003), en los problemas consistentes la estructura superficial del problema, o lo que es lo mismo, la presencia de determinadas palabras clave como “ganar”, “perder”, “más que...” coincide con la operación aritmética con la que se resuelve el problema. En estos problemas esas palabras clave pueden ser utilizadas para deducir la operación necesaria para resolverlo sin ningún intento adicional por comprender el problema: cuando aparece, por ejemplo, el término “más”, el problema se resuelve con una suma. En los problemas inconsistentes, en cambio, estas palabras clave –esta estructura superficial—indica la operación contraria a la que, de hecho, hay que realizar para resolver el problema. Esto es, al contrario de lo que ocurriría con los problemas consistentes, en los problemas inconsistentes aparecen términos como “ganó” y sin embargo requieren de una resta para ser resueltos.

TIPO DE PROBLEMAS	ENUNCIADO TIPO Y EXPLICACIONES
<p>C M 3</p> 	<p>COMPARACIÓN 3.</p> <p>En este tipo de problemas se conoce el conjunto referencia y la diferencia respecto al conjunto comparado indicando cuántos más tiene, y se pregunta por éste conjunto comparado.</p> <p>Pedro tiene 5 canicas. Juan tiene 3 canicas más que Pedro ¿Cuántas canicas tiene Juan?</p>
<p>C M 4</p> 	<p>COMPARACIÓN 4.</p> <p>En los problemas de comparación 4 se conoce el conjunto de referencia y la diferencia respecto al conjunto comparado señalando el número de elementos menos que tiene, y se pregunta por el conjunto comparado.</p> <p>Juan tiene 8 canicas. Pedro tiene 3 canicas menos que Juan ¿Cuántas canicas tiene Pedro?</p>

TIPO DE PROBLEMAS	ENUNCIADO TIPO Y EXPLICACIONES
C M 5  	<b>COMPARACIÓN 5.</b> Los problemas de comparación 5 tienen como cantidades conocidas el conjunto comparado y el de diferencia apuntando cuantos elementos más tiene el de referencia, y pregunta por ese conjunto de referencia.  Juan tiene 8 canicas. Juan tiene 3 canicas más que Pedro. ¿Cuántas canicas tiene Pedro?
C M 6  	<b>COMPARACIÓN 6.</b> Este último tipo de problemas de comparación se caracteriza porque las cantidades conocidas son el conjunto comparado y la diferencia expresada en términos de cuántos menos tiene el conjunto comparado respecto al de referencia, habiendo que determinar ese conjunto de referencia.  Pedro tiene 5 canicas Pedro tiene 3 canicas menos que Juan. ¿Cuántas canicas tiene Juan?

**Tabla 2.1: Tipos de problemas de comparación (adaptada de Heller & Greeno, 1978)**

Ahora que ya sabemos el nombre y apellido del problema que vamos a resolver volvamos a la pregunta con la que iniciábamos este capítulo, es decir, ¿qué es resolver ese problema? Son varias las respuestas posibles para esa pregunta dependiendo de en qué contexto y a quién hagamos la pregunta. Por ejemplo, George Polya (1990) resume el resolver un problema como *“algo comparable a la búsqueda de un camino en un lugar donde ningún camino es conocido de antemano, o bien encontrar una salida o forma de rodear un obstáculo en una situación difícil”*. En un sentido similar, Newell y Simon (1972) establecen que la resolución de problemas es *“la búsqueda dentro del espacio de un problema, o lo que es lo mismo, encontrar el camino a la solución en un largo y complejo espacio lleno de caminos sin salida”*. Sin embargo, a la hora de describir lo que significa resolver un problema hemos preferido inclinarnos por una aproximación más ligada al proceso de comprensión, dado que el objetivo de este trabajo es explorar la naturaleza del producto de tal proceso. En palabras de Kintsch (1998, p. 371) resolver un problema sería *“una tarea de comprensión de un texto, usado para construir un modelo de la situación y un modelo del problema, que va precedido de un requerimiento –verbal o textual– que debe ser entendido en el contexto de una situación que guía el cálculo de una respuesta numérica”*. Si bien esa construcción obliga a tener un conocimiento adecuado –lingüístico y del mundo– para procesar la

información no estrictamente matemática, la cual puede condicionar incluso la solución correcta del problema –problemas realistas—(e.g., Boaler, 1994; Verschaffel & De Corte, 1997; Verschaffel, De Corte & Lasure, 1992; Verschaffel, De Corte & Vierstraete, 1999; Inoue, 2005), sí es necesario mencionar que la propia tarea o el entorno pueden también condicionar la utilización de esa información y la consecuente resolución del problema. Esta apreciación ha marcado el nacimiento y desarrollo de modelos de resolución actuales que tienen en cuenta un proceso de modelado, pero que dejamos fuera de los modelos clásicos de resolución de problemas.

La mayoría de las teorías encaminadas a entender cómo los sujetos resuelven problemas han partido de una premisa inicial, la resolución de problemas implica producir una respuesta numérica y para llegar a ella el sujeto debe hacer algo. Ese *algo* ha sido abordado con detalle por los modelos de resolución de problemas. Si bien, estos modelos han tratado de explicitar cómo cada input era procesado de una forma determinada, recordemos que el propósito de acercarnos a éstos modelos radica en los tipos de representación mental propuestos no en el proceso de resolución como tal. Dado que *el problema de Juan* sobre el que hemos formulado nuestra hipótesis es muy similar al utilizado en alguno de los modelos que sirvieron como transición entre aquellos que defendían una representación cuantitativa y los que defienden una doble representación, el repaso de estos modelos puede ser útil para descartar algunas dudas al respecto de la representación que nace de dicho problema.

## 2.2. LOS MODELOS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Hemos de comenzar diciendo que, a pesar de las diferencias existentes entre los diferentes modelos, la característica común a todos ellos es que se han desarrollado a partir de entornos computacionales, es decir, los modelos que a continuación aparecen han nacido en el contexto de la metáfora computacional según la cual el cerebro es análogo a un computador y las funciones cognitivas son análogas a programas informáticos (Fodor, 1983; Pylyshyn, 1981). Serían varias las posibilidades de clasificación de dichos modelos dependiendo del tipo de representación interna que se crea, de la información utilizada para esa construcción, de su relación con teorías previas, o simplemente, dependiendo del momento en el que aparecieron. Dado que el objetivo de esta Tesis Doctoral es explorar la naturaleza de ese modelo mental o modelo de la situación que se crea durante la resolución de problemas aritméticos, hemos optado por distinguir entre dos tipos diferentes de modelos: aquellos que no han distinguido la necesidad de crear una representación interna de la información no estrictamente matemática del problema, y proponen una representación interna cercana al esquema que se activa por pistas semánticas; y aquellos modelos que sí han

considerado que el sujeto construye una representación interna de esa información más cualitativa –un modelo de la situación—sin la mediación de esquemas pre-almacenados que se disparan por pistas semánticas. En otras palabras, aquellas aproximaciones que defienden que el sujeto *busca* la información numérica y las palabras que indican una operación aritmética, los desarrollados por Riley, Greeno y Heller (1983) y Briars y Larkin (1984); y aquellos otros modelos que postulan que durante la resolución del problema, el sujeto también utiliza el resto de la información *menos* matemática y crea una representación interna donde dicha información cualitativa está presente, los modelos de Kintsch y Greeno (1985)<sup>3</sup>, la aproximación propuesta en el estudio de Cummins, Kintsch, Reusser y Weimer (1988), el modelo SPS de Reusser (1985, 1988) y el modelo CI de Kintsch (1988).

### 2.2.1 *Los primeros modelos: una representación mental cuantitativa*

Como ya avanzamos en el párrafo anterior, este grupo de modelos inciden de manera exclusiva en el conocimiento matemático como aquel necesario para resolver un problema. No en vano, la implementación de estos modelos fue inicialmente llevada a cabo en entornos computacionales que requerían una interpretación precisa de expresiones semánticas con carácter matemático. De esta manera, el programa informático permitía ejecutar una acción basándose en una colección de términos matemáticos y de las relaciones semánticas entre ellos. Sin embargo, el resto de información quedaba fuera del análisis de contenido y el programa obviaba dicha información, que se ha demostrado no solamente imprescindible para la resolución de problemas, sino que además es procesada por el sujeto que lee el problema, según han establecido Orrantia y colaboradores a lo largo de numerosos trabajos.

La representación interna que sugiere este primer grupo de modelos está basada en esquemas matemáticos que se activan a medida que la información matemática del problema es procesada. En otras palabras, basan la resolución de problemas en una asignación más o menos directa de la información numérica del problema a un esquema pre-activado de dicho problema. De hecho, para estos modelos las palabras son simples indicios a seguir para, a través del conocimiento conceptual, deducir el esquema matemático subyacente y seguir buscando para completar ese esquema. Ese conocimiento conceptual sería aquel que permite comprender las relaciones existentes entre los conjuntos implicados en situaciones problemáticas de

---

<sup>3</sup> Si bien el modelo de Kintsch & Greeno (1985) puede ser considerado el primero en formular una doble representación durante la resolución de problemas, Staub & Reusser (1995; ver también Kintsch, 1998; Nathan, Kintsch, & Young, 1992; Reusser, 1990; Thevenot, Devidal, Barrouillet, & Fayol, 2007) mencionan que sus planteamientos sobre cómo resolver un problema están muy arraigados a los esquemas pre-existentes mencionados por el primer grupo de modelos.



cambio, comparación y combinación, e influiría de manera determinante por ejemplo en los procesos de elección de operación (Riley et al., 1983). Estos esquemas que hemos mencionado pueden ser considerados estructuras formales almacenadas en la memoria a largo plazo, y representan las relaciones semánticas básicas entre las cantidades principales del problema. Es decir, esos esquemas son patrones de información que posteriormente durante la resolución se comparan con los elementos activos en la memoria de trabajo que son resultado de la lectura del problema. Si la información activa en la memoria de trabajo en un momento dado satisface dicho esquema, entonces el sujeto asigna los valores numéricos a dicho esquema.

La representación interna propuesta en los modelos de Riley et al., (1983) y Briars y Larkin (1984) es una red semántica formada por los elementos del problema y las relaciones que se establecen entre ellos. Es decir, el texto del problema es trasladado a una representación en la que se recoge la secuencia temporal y causal, en términos lógico-matemáticos, de los conjuntos y de las acciones descritas en el problema. No obstante, esta representación dependería del conocimiento conceptual del sujeto, siendo la comprensión de las relaciones parte-todo, existentes entre los conjuntos implicados en el problema, esencial para dar lugar a una representación interna completa del problema y para la generación de inferencias acerca de qué acciones son necesarias para resolverlo (Riley et al., 1983). El conocimiento de las relaciones parte-todo forma parte del desarrollo evolutivo del sujeto a lo largo de su infancia cuando aún no se ha iniciado el conteo, y permite comprender que las cantidades pueden separarse y recomponerse de nuevo para dar de nuevo la cantidad inicial; también permitiría realizar juicios sobre las relaciones entre las partes y los todos, es decir, permite saber, por ejemplo, que un trozo de tarta siempre va a ser más pequeño que la tarta completa (Resnick, 1989).

Como podemos ver, este primer grupo de modelos postula que la resolución de un problema da lugar a una serie de procesos cognitivos que desencadenan la creación de una representación interna del problema. Esta representación sería el resultado de procesar casi en exclusividad la información matemática del problema. Si los dos modelos que acabamos de mencionar ligaban el conocimiento necesario para construir esa representación interna a la información de carácter o naturaleza más cuantitativa, Kintsch y Greeno (1985) introducen la comprensión del texto o conocimiento de la información más cualitativa como necesaria para resolver el problema. En otras palabras, dado que Kintsch y Greeno sientan las bases de una representación y comprensión textual del enunciado del problema, este punto de inflexión marca el inicio del problema como texto.

### 2.2.2 Los modelos posteriores: una representación mental cuantitativa y cualitativa

Este segundo grupo de modelos propone una representación interna donde conviven tanto información cuantitativa como información cualitativa. En otras palabras, la información no estrictamente matemática es procesada por el sujeto a medida que éste resuelve el problema, de manera que dicho procesamiento y la representación interna que se construye condicionan la correcta resolución.

El modelo de Kintsch y Greeno (1985) parte de la teoría general de comprensión de textos desarrollada por Kintsch y Van Dijk (1978) y Van Dijk y Kintsch (1983) para plantear que la representación interna del problema consta de dos componentes: por un lado, la transformación de inputs lingüísticos en representaciones conceptuales de sus significados en forma de proposiciones —calificadas como texto base— y por otro lado, el llamado modelo del problema, el cual refleja el conocimiento de la información necesaria para resolver el problema. Esta aproximación al proceso de resolución propone una representación interna del problema que es construida vía la transformación de inputs verbales en representaciones conceptuales de sus significados en la forma de una red de proposiciones (texto base). Junto a ese texto base, encontraríamos una segunda estructura denominada como modelo del problema. Sobre ese modelo del problema, de carácter cuantitativo y matemático, se ejecutarían posteriormente los procesos de resolución. En esta etapa el sujeto excluye información no necesaria para la resolución del problema e infiere información no explícita en el texto pero que es necesaria para alcanzar la solución. Esas inferencias están basadas en esquemas activados por las proposiciones que contiene el texto base, pero no por el texto en sí. Más exactamente, los vacíos que permite el esquema (ver Tabla 2.2) se ocupan por los argumentos tomados de las proposiciones, y las relaciones entre los diferentes conjuntos se convierten en críticas para decidir cómo resolver el problema.

Espacio	Valor
Objeto	<nombre>
Cantidad	<número>, ALGUNOS, CUÁNTOS
Especificación	<propietario>, <localización>, <tiempo>
Rol	<conjunto inicial, cambio, resultado; total, parte; conjunto mayor, conjunto menor, diferencia>

**Tabla 2.2: Esquemas de conjunto (adaptado de Kintsch & Greeno, 1985)**

El modelo incluye diferentes esquemas de alto orden que son usados para incluir esas relaciones en la representación del problema. De esta manera, la comprensión incluye las relaciones conceptuales entre las cantidades, que a su vez guían la elección de las operaciones a desarrollar. Si

bien este último modelo mejora sustancialmente los precursores, al incluir esquemas más completos que sirven para construir el modelo del problema y que han de rellenarse con diferentes tipos de información (objeto, cantidad, especificación, rol) como aparece en la Figura 2.1, esa doble representación interna que el sujeto crea no pierde su carácter de esquema basado en la estructura matemática del problema y activado por pistas semánticas que desencadenan uno u otro esquema.

<p><i>Juan tiene 8 canicas. Él tiene 5 canicas más que Tomás ¿Cuántas canicas tiene Tomás?</i></p>	
S <sub>1</sub> :	<p>Objeto: canicas Cantidad: 8 Especificación: poseedor Juan Rol: desconocido</p>
S <sub>2</sub> :	<p>Objeto: canicas Cantidad: 5 Especificación: poseedor Juan Rol: conjunto diferencia</p>
<p>A S<sub>1</sub> se le asigna el rol de conjunto grande, por lo tanto se requiere la búsqueda del conjunto pequeño</p>	
S <sub>3</sub> :	<p>Objeto: canicas Cantidad: desconocida Especificación: poseedor Tomás Rol: conjunto pequeño</p>

**Figura 2.1: Ejemplo de utilización del esquema *más que* para resolver el problema (adaptado de Kintsch, 1998)**

Los esquemas de conjunto que dan coherencia al texto son esquemas que preparan la información de tal manera que encaje en la construcción del modelo matemático del problema. Esto quiere decir que toda la información proposicional del enunciado se proyecta en el modelo del problema, esto es, toda la información del texto se transforma en representaciones internas de conjuntos y de las relaciones entre esos conjuntos (Kintsch & Greeno, 1985). Así, dicha representación tendría la forma de una red semántica formada por los elementos del problema y las relaciones que se establecen entre ellos.

Aunque Kintsch y Greeno introducen la comprensión del resto de información textual, una de las limitaciones a su modelo es que los

problemas que utilizaron carecían de tal información cualitativa (Staub & Reusser, 1995). Esa representación mental tendría la forma de esquema prealmacenado por el individuo que se activa por determinadas pistas lingüísticas y que recoge la estructura matemática del problema y las relaciones entre los conjuntos. Por ejemplo, durante la resolución del problema *Juan tiene 5 canicas más que Pedro. Si Juan tiene 13 canicas, ¿cuántas tiene Pedro?* el sujeto crea una representación mental de la información matemática que es producto de la activación de un esquema de comparación donde uno de los conjuntos es el desconocido y la relación entre éste y el conocido se establece en los términos *5 más*. Esta limitación deriva en gran parte de la utilización de problemas aritméticos standard o simples para el desarrollo de dicho modelo y de la forma en la que Kintsch y Greeno operacionalizan el modelo a partir de dichos problemas. La posterior implementación del modelo por parte de Cummins et al., (1988, experimento 2) evidenciaba que dicho modelo sí consideraba la información cualitativa cuando ésta existía. Estos autores implementaron el modelo de Kintsch a un entorno computacional suministrando problemas más complejos, es decir, incluían una serie de escenarios donde los personajes de los problemas llevaban a cabo acciones. El objetivo inicial de Cummins fue hacer un análisis de los errores del programa ante factores no matemáticos erróneos incluidos de forma deliberada en dicho programa. Los resultados de dicho experimento atribuyeron las dificultades que entrañan determinados tipos de problemas a factores de comprensión ligados a la naturaleza del lenguaje que se utiliza en el enunciado del problema, es decir, el modelo propuesto por Kintsch sí servía para procesar aquella información más cualitativa, lo cual dió paso a una de las características diferenciales que marcó el desarrollo de este segundo grupo de modelos, la presencia de contextos situacionales mucho más ricos donde el sujeto tiene que crear una representación interna correcta de cada una de las acciones, objetos y personajes que se narran para resolver correctamente el problema.

En este punto, y dado que nuestra hipótesis tiene que ver con la naturaleza de esa representación más cualitativa creada a partir de un problema de comparación standard, podría asaltarnos la duda sobre cómo explorar la naturaleza de tal representación cualitativa (modelo mental o modelo de la situación) si el propio problema, de acuerdo a las críticas mencionadas anteriormente para el modelo de Kintsch y Greeno, sólo da lugar a una representación cuantitativa. En este sentido, Catherine Thevenot (2010) aporta alguna de las claves que ya hemos mencionado a lo largo de esta Tesis Doctoral. Utilizando un paradigma inicialmente desarrollado por Mani y Johnson-Laird (1982), Thevenot trata de explorar si la representación mental creada por el sujeto sobre los problemas de comparación standard (como los utilizados en el modelo de Kintsch y Greeno y los usados en este trabajo para formular nuestra hipótesis) responde a un sistema proposicional

como el defendido por Walter Kintsch, o bien responde a la estructura de un modelo mental como el propuesto por Johnson-Laird. Aunque, como ya hemos mencionado en el Capítulo Primero, el objetivo de Thevenot no es evaluar si se forma una representación cualitativa de este tipo de problemas sino analizar la naturaleza de esa representación, los hallazgos de ese trabajo sugieren que el sujeto crea representaciones cualitativas incluso a partir de problemas standard. En otras palabras, ese modelo mental nos permite asegurar su carácter cualitativo y relacional, lo cual validaría la idea de que la resolución de problemas como el utilizado por Kintsch y Greeno da lugar a una representación cualitativa, sobre la que nuestra hipótesis está planteada.

Si bien el modelo de Kintsch y Greeno marcaba el inicio del desarrollo de un segundo grupo de modelos, los dos modelos principales que abanderan este segundo grupo han sido, por un lado, el modelo SPS de Reusser (1985, 1988, 1990) o *Situation Problem Solver*, y por otro lado, el *modelo Construcción-Integración* (CI) de Kintsch (1988, 1998). Si bien podemos encontrar diferencias entre uno y otro, la marca que define a ambos es el papel otorgado a esa información que, bien presente en el propio texto o bien inferida a partir de los conocimientos previos del sujeto, acompaña a la información cuantitativa. Mientras que Reusser establece que dicha información da lugar a una capa intermedia entre el texto base y el modelo del problema, Kintsch adjudica a esa información el papel de moderador necesario en la creación del texto base. A pesar de que el planteamiento teórico del *modelo CI* propuesto por Kintsch dista del *modelo SPS*, el primero centrado en describir cómo el sujeto procesa y el segundo centrado en describir el resultado de dicho proceso, podríamos decir que los dos establecen una representación interna que incluye no sólo la información cuantitativa sino también la cualitativa.

Dado que el modelo de Reusser, como ya hemos mencionado, se centra preferentemente en el producto en vez de en el proceso, y dado que nuestro interés está puesto sobre ese producto, esbozaremos algunas de las líneas de esa representación interna propuesta en el *modelo SPS*. Reusser establece que para resolver un problema es necesario aplicar tres tipos de conocimiento diferentes: conocimiento matemático, conocimiento lingüístico, y finalmente, conocimiento del mundo o del contenido específico al que alude el enunciado del problema. La característica de esa capa, que media entre el texto base y el modelo del problema, es que da lugar a una representación mental cualitativa de la situación descrita en el enunciado del problema y que representa la estructura temporal y causal de esa situación. La representación resultante especifica los agentes, las acciones y las relaciones entre los eventos que evoca el problema.

Para generar esa representación, de manera similar a cualquier otro tipo de texto, el modelo utiliza la información contenida en el texto base, y en el caso de que sea necesario, determinadas inferencias a partir de sus

conocimientos previos en relación con el campo de conocimiento de referencia (Van Dijk y Kintsch, 1983). En resumen, podríamos decir que esa representación interna es una representación semántica del problema en formato proposicional. Además, entre esa representación proposicional del texto y la representación en términos lógico-matemáticos, el sujeto crea una representación cualitativa de la situación en la que se halla inmerso el problema, siendo ésta la que creemos puede estar mediada por el conocimiento o experiencias sensorio-motoras previas tal y como hemos mencionado en el Capítulo Primero. Es este punto el que justifica nuestra breve aproximación a los modelos de resolución de problemas. Si el primer grupo de modelos dejaba al descubierto una representación interna eminentemente matemática, este segundo grupo nos presenta, y permite sondear, esa representación más cualitativa que media entre la representación semántica del problema en formato proposicional y la representación lógico-matemática.

### 2.3. RESUMEN DEL CAPÍTULO Y ARGUMENTACIÓN

A modo de resumen, podríamos decir que la evolución de los distintos modelos computacionales que han tratado de explorar, bien los procesos cognitivos subyacentes a la tarea, bien el producto al que dan lugar esos procesos, nos ha permitido establecer una doble naturaleza del problema sobre el que trabajaremos en la parte empírica. Esta naturaleza dual implica información cuantitativa e información cualitativa que el sujeto procesa de una manera más o menos automática para obtener una representación mental del problema en la que convive esa dualidad. Si bien, como decíamos en el Capítulo Primero, esa parte más cualitativa está representada por el modelo mental o modelo de la situación del problema, el marco teórico actual no nos permite establecer si ese constructo mental es una red conceptual codificada en un sistema proposicional, como sería la representación semántica del texto propuesta como capa en el *modelo SPS*, o si además el sujeto activa una representación más perceptiva como se hipotetiza en este trabajo.

Dada la información presente en el problema sobre el que se asienta nuestra hipótesis, este capítulo también ha desvelado algunas dudas respecto a la posibilidad de que dicho problema standard no permitiese la generación de una representación más cualitativa. En este sentido, las evidencias a favor de la creación de un modelo mental en este tipo de problemas (Thevenot, 2010) son las que habilitan que la lectura de la oración *Juan tiene más canicas que Pedro* pueda dar lugar a una simulación de la situación denotada o representación de carácter cualitativo y, consecuentemente, pueda darse la activación de carácter perceptivo que proponemos. Una aproximación diferente, que la oración recoge casi en exclusividad información matemática y consecuentemente la representación que se crea sería eminentemente

cuantitativa sería incongruente con los resultados del trabajo de Thevenot (2010) que evidencian la formación de un modelo mental, el cual alberga características cualitativas como hemos mencionado en el Capítulo Primero. En nuestra parte empírica, desarrollada en el Capítulo IV, comprobaremos efectivamente si el sujeto es reactivo a una representación perceptiva de la magnitud cuando dicha representación es cualitativa. Esa representación cualitativa basada en magnitudes va más allá de la información matemática al incluir no sólo la magnitud, expresada numéricamente en el texto, sino la simulación de la información del texto al poner en relación los elementos entre sí junto con el conocimiento o experiencia previa asociada a tal magnitud. En otras palabras, dicha relación iría más allá de la información semántica presentada puesto que la simulación creada es una representación analógica de la relación entre las partes, o lo que es lo mismo —en palabras de Johnson-Laird—un modelo mental.





## CAPÍTULO III

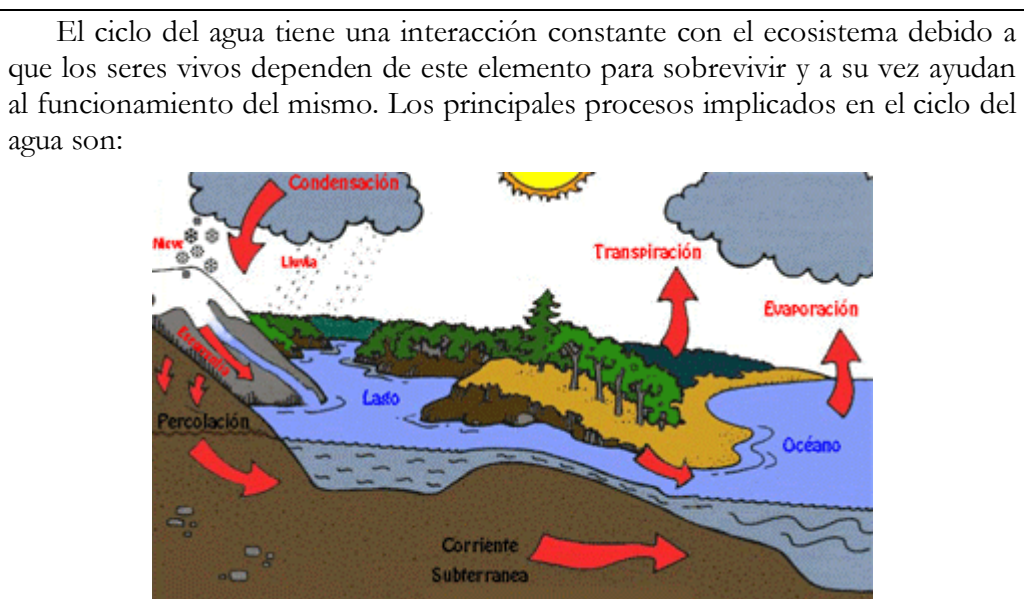
### RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y LA REPRESENTACIÓN EXTERNA

Como ya avanzamos en la Introducción a esta Tesis Doctoral, la hipótesis de partida de este trabajo se centra en ese modelo mental creado durante la resolución de problemas. Si bien en los capítulos precedentes hemos tratado de esbozar cuál y de qué tipo puede ser la representación interna creada a partir de la lectura de un problema, en este Capítulo Tercero abordaremos la posibilidad de validar ese modelo mental basado en magnitudes desde una perspectiva diferente. Es decir, partiremos de las aportaciones que sugieren que la efectividad de las representaciones externas reside en la capacidad para ayudar a generar la representación interna que el sujeto crea a partir del texto al que (Glenberg & Langstone, 1992). Así, repasaremos qué es una representación externa y qué es una imagen, como prototipo de representación externa. Continuaremos, haciendo un esbozo de los modelos teóricos que han establecido cómo los sujetos aprenden con imágenes así como una aproximación a otro constructo cognitivo implicado en esa efectividad de las representaciones externas –la memoria de trabajo. Para concluir este capítulo, repasaremos la escasa literatura que ha presentado, en un contexto no instruccional, la resolución de problemas aritméticos con representaciones externas. Finalmente, propondremos el porqué de la inconsistencia de esos resultados, basándonos en la idea que guía este Capítulo Tercero—la efectividad de las representaciones externas reside en la capacidad para ayudar a generar el modelo mental creado por los sujetos desde el texto.

### 3.1. LA REPRESENTACIÓN EXTERNA

#### 3.1.1. ¿Qué es una representación externa?

Dado que el objetivo de este trabajo es abordar la naturaleza de algo que el sujeto crea y que hemos denominado representación mental o representación interna, podemos definir representación externa como aquella *re-presentación* que no es creada por la mente o el sujeto sino que se oferta a los ojos del individuo al igual que se hace con un texto escrito. Pero, ¿qué es una *re-presentación*? Si bien el concepto *representación* está cercano a lo que entendemos como semejanza, apariencia de algo, o poner en lugar de ese algo, *re-presentar* quiere decir volver a presentar de nuevo. Este matiz marcará el rumbo del segundo trabajo empírico que planteamos en esta Tesis Doctoral puesto que entendemos la representación externa que acompaña a un texto (por ejemplo, un dibujo) no como un calco o imagen que tiene que asemejarse al texto al que acompaña, sino que dicha representación externa debería actuar como un vector de información que nos pone en relación con el hipotético modelo mental creado por el sujeto a partir del texto, es decir, volver a presentar dicho modelo mental. Por supuesto, si ese modelo mental depende del conocimiento y experiencia previa de cada sujeto, resultaría imposible crear representaciones externas que mimetizen el modelo mental que cada uno de los individuos crea. Sin embargo, sí que es posible dotar a la representación externa de algunas de las características que decíamos tenían los modelos mentales, por ejemplo, su carácter relacional. Si leemos el texto que incluimos bajo estas líneas, la representación externa que más se aproximaría a ese carácter relacional, no sería una fotografía de un paisaje sino algo parecido a lo que planteamos en la figura que lo acompaña, donde los distintos elementos o piezas del discurso están relacionados y dispuestos espacialmente.



- 1° Evaporación: El agua se evapora en la superficie oceánica, sobre la superficie terrestre y también por los organismos.
- 2° Condensación: El agua en forma de vapor sube y se condensa formando las nubes, constituidas por agua en pequeñas gotas.
- 3° Precipitación: Se produce cuando las gotas de agua que forman las nubes se enfrían acelerándose la condensación y uniéndose las gotitas de agua para formar gotas mayores que terminan por precipitarse a la superficie terrestre en razón a su mayor peso. La precipitación puede ser sólida (nieve o granizo) o líquida (lluvia).
- 4° Escorrentía: Este término se refiere a los diversos medios por los que el agua líquida se desliza cuesta abajo por la superficie del terreno.
- 5° Circulación subterránea: Se produce a favor de la gravedad, como la escorrentía superficial, de la que se puede considerar una versión. Se presenta en dos modalidades:
- 6° Solidificación: Al disminuir la temperatura en el interior de una nube por debajo de 0° C, el vapor de agua o el agua misma se congelan, precipitándose en forma de nieve o granizo.

**Figura 3.1: Ejemplo de material para aprendizaje multimedia con representaciones externas.**

En el mismo sentido, cuando un niño está aprendiendo el razonamiento que subyace a *el problema de Juan*, la presencia de una imagen “fotográfica” de dos amigos no ayudaría mucho. Y es que cuando pensamos en la representación externa que tradicionalmente aparece en los materiales escolares, lo primero que visualizamos es un calco de la realidad, sin embargo, y para continuar hacia delante con nuestra tarea, creemos necesario cambiar esa percepción desde el primer momento para entender que cualquiera que sea la representación externa que pueda acompañar a un texto, su valor no dependerá de su mayor grado de similitud con la realidad sino de su grado de vinculación con el referente, el cual es el modelo mental que el sujeto crea a partir del texto que se ofrece junto a esa representación externa. Por ejemplo, las líneas isobaras de un mapa meteorológico distan de la presión atmosférica entendida como el peso de una columna de aire, pero vinculan dicha presión atmosférica y sus variaciones a la relación que unas líneas tienen con otras. De la misma manera, como ya hemos mencionado, la representación interna que deriva de la información de un problema como *el problema de Juan* podría escapar de una iconicidad entendida como analógica o imagen mental, y por tanto, una representación externa icónica a la situación denotada en el texto explícito (e.g., una imagen de dos amigos en un patio de colegio) podría no ser un vector de información adecuado al diferir de la hipotética representación interna propuesta a lo largo de este trabajo. En este sentido, más adelante haremos un repaso de aquellos

trabajos que han planteado la presentación conjunta de representaciones externas y texto en el contexto de la resolución de problemas con la intención de evaluar qué tipos de representaciones externas se han ofrecido para ayudar a la resolución de este tipo de problemas aritméticos, si éstas han sido efectivas, y cuáles han sido las posibles causas de esa efectividad. Si bien una gran parte de esos estudios pueden ser considerados instruccionales, en tanto que enseñan a cómo utilizar esa representación externa o cómo entender la estructura comparativa de un problema utilizando instrucción basada en representaciones esquemáticas (para una revisión, ver; Kalyuga, 2006), nos limitaremos a exponer sólo aquellos trabajos planteados dentro de un contexto no instruccional. No queremos seguir adelante sin recordar la idea que subyace a todo este Capítulo Tercero, a nuestro segundo estudio empírico, y a esa controvertida efectividad de las representaciones externas que acompañan a un problema: *“una imagen que representa la situación del texto, ayudaría a la construcción de un modelo mental”* (Glenberg & Langston, 1992).

### 3.1.2. *La imagen como representación externa por excelencia*

Aunque el término representación externa está íntimamente ligado al de imagen, no podemos obviar que el propio texto, como conjunto de signos arbitrarios que tienen un referente, también podría ser considerado una representación externa. Sin embargo, en las líneas que siguen nos referiremos a la imagen como representación externa por excelencia, abordando su definición y funciones propuestas por la literatura al respecto.

Comenzaremos por denominar la imagen como un signo, esto es, un objeto que por naturaleza o convención representa a otro ([www.rae.es](http://www.rae.es)). Partiendo de aquí, Peirce (1902) distingue tres tipos de signo: icono, cuando mantiene una relación de similitud con lo que representa (un retrato); index, si existe una relación de continuidad física con lo que representa (una huella); y finalmente, símbolo, cuando la relación entre lo que representa es arbitraria y está asociada por el uso (como puede serlo para la Iglesia Católica que un pez represente a Cristo). Por lo tanto, un icono, un index, y un símbolo han de considerarse imágenes, independientemente de las diferencias perceptivas y funcionales entre uno y otro. De hecho, los tres cumplen con esa característica esencial que hemos mencionado tiene una imagen, es decir, representar. Así, podemos decir que una imagen como representación externa puede combinarse con otra representación externa, por ejemplo, el texto, dando lugar a un conjunto de signos de los cuales el sujeto extrae un significado diferente al creado a partir de un sólo tipo de signos. Obsérvese que decimos “diferente” y no “mejor” o “peor”, ya que el procesamiento, toma de conciencia, o comprensión de la representación externa que acompaña a un texto puede atender, según Mayer (2005), a

criterios técnicos (a través de qué dispositivos se implementa), semióticos (formato representacional que adoptan los signos que componen el multimedia) y sensoriales (a través de qué sentido se perciben los signos), lo cual puede influir sobre esa representación interna que el sujeto crea. En este sentido, se han descrito una serie de funciones que las imágenes pueden tener cuando se ofrecen conjuntamente con el texto. De hecho, las imágenes pueden clasificarse atendiendo a diferentes criterios, por ejemplo, según su naturaleza representacional (Postigo y Pozo, 1999; Tversky, Morrison y Betrancourt, 2002) o según su carácter estático o dinámico (Tergan, 1997), sin embargo, sólo citaremos la clasificación propuesta por Carney y Levin (2002) que atiende a la función que la imagen cumple respecto al objetivo de la tarea y al texto que acompaña. Utilizando este criterio, los autores propusieron 5 funciones diferentes que pueden cumplir las imágenes:

- Decoración, cuando la imagen no contribuye al desempeño de la tarea sino que su cometido es únicamente enriquecer estéticamente el texto al que acompaña.
- Representación, cuando la imagen supone una fuente de información alternativa al texto, presentando visualmente algún concepto.
- Transformación, cuando la imagen modifica una información difícil de mantener en la memoria de tal manera que su recuerdo se hace más fácil, por ejemplo, a través de una mnemotecnia.
- Organización, cuando la imagen permite visualizar claramente la estructura subyacente a la información del texto
- Interpretación, la más profunda de las funciones que puede desempeñar una imagen, y que afecta no tanto al recuerdo como a la comprensión del contenido del texto. Las representaciones que cumplen esta función presentan al sujeto una imagen visual de contenidos que de otra manera sería mucho más difícil de representarse.

Las funciones que pueden desempeñar las imágenes respecto a los textos subyacen también a una categorización alternativa propuesta por Ainsworth (1999), que divide las imágenes en tres tipos: imágenes que complementan a los textos, proponiendo una fuente alternativa de contenido; imágenes que proporcionan restricciones a los textos, que permiten comprenderlos mejor y prevenir errores de comprensión; e imágenes que permiten comprender más profundamente los textos, generando comprensiones más completas. De la misma manera que el beneficio en el proceso de comprensión se incrementa en cada uno de esas funciones respecto al anterior, también se incrementa el coste cognitivo que supone tanto la “traslación” de la

información de la imagen a la propuesta por el texto como la integración de ambos tipos de información en una única representación mental coherente.

Es este proceso de integración el que debiera centrar los esfuerzos por entender cómo se comprende una representación externa que acompaña a un texto. Sin embargo, son escasos los intentos por establecer cómo se da la comprensión conjunta de texto e imágenes, dado que los modelos cognitivos de aprendizaje multimedia se han centrado casi exclusivamente en justificar la eficacia de la presentación conjunta de texto e imágenes operacionalizando, como veremos después, el hipotético comportamiento de la memoria de trabajo. Así, estos modelos teóricos podrían enmarcarse en el grupo de estudios que justifican el uso de las imágenes por su efecto en el recuerdo a corto y largo plazo, mientras que nuestra aproximación a las representaciones externas estaría más próxima a su efecto sobre la comprensión, y concretamente a su efectividad para ayudar a construir modelos mentales (Glenberg & Langstone, 1992). Si bien esta idea es compartida por la comunidad científica, como ya mencionábamos al inicio de esta Tesis Doctoral, no abundan las aproximaciones al respecto. En este sentido, no hemos de olvidar que el texto y la imagen, como representaciones externas, están basados en diferentes sistemas de signos dentro de la distinción propuesta por Peirce (1902): las palabras y las oraciones pueden considerarse símbolos ya que la relación entre lo que representan es arbitraria y está asociada por el uso; mientras que las imágenes tienen una naturaleza básicamente icónica. Es decir, tanto el texto como la imagen son representaciones externas, pero el proceso de creación de un modelo mental a partir de una y otra (integración) puede ir más allá de una mera operacionalización de la memoria de trabajo.

### 3.2. LAS REPRESENTACIONES EXTERNAS EN EL APRENDIZAJE MULTIMEDIA

Si bien los modelos teóricos en torno al aprendizaje multimedia se han centrado en las aplicaciones instruccionales del uso de representaciones externas y no en explicar cómo se comprende un texto acompañado de imágenes, en el siguiente epígrafe pasaremos de puntillas por ellos ya que de alguna manera el desarrollo de dichos modelos sí ha servido para desarrollar una ingente cantidad de literatura al respecto de las representaciones externas.

La representación externa que percibimos depende en gran parte de cómo vamos a usarla. No en vano, cuando percibimos un objeto, podemos formar distintas representaciones, cada una especializada para un propósito diferente, con lo cual habremos seleccionado diferentes propiedades o rasgos del objeto que han sido codificadas con distinto nivel de detalle (Treisman & Gelade, 1980). Esta propuesta, producto de los trabajos sobre

percepción, es la que da pie a numerosos estudios sobre aprendizaje con imágenes. Concretamente, el enfoque tradicional en los trabajos sobre instrucción basada en representaciones esquemáticas sugiere que los alumnos aprendan a utilizar las representaciones externas de acuerdo a la tarea o tipo de problema al que se enfrentan. En otras palabras, que el sujeto aprenda a seleccionar esas propiedades o rasgos de la imagen que son determinantes para la tarea. Como veremos más adelante, nuestra aproximación en el segundo de los trabajos empíricos que proponemos se aparta de esa corriente más instruccional al evaluar qué uso hace el sujeto de representaciones externas que no sabe utilizar y que acompañan a una tarea concreta. Este propósito implica que la efectividad de tal representación externa esté condicionada a cómo dicha representación se pone en contacto con la representación interna que el sujeto crea a partir del texto que se presenta conjuntamente. De esta manera, si una representación externa puede ser efectiva en tanto que pone en contacto al sujeto con el modelo mental creado a partir del texto al que acompaña, entonces la facilitación, en el caso de representaciones externas basadas en magnitudes y de acuerdo a nuestra hipótesis, podría explicarse por un vinculación correcta con una representación interna o modelo mental basado en magnitudes. No obstante, queremos esbozar esos modelos de aprendizaje multimedia, que partiendo de programas instruccionales, han contribuido a determinar que una imagen vale más que mil palabras.

El detonante de la utilización de las imágenes en el aprendizaje, y que ha dominado parte de la fundamentación teórica de los modelos al respecto, fue el planteamiento de que la imagen tiene un efecto determinante sobre la memoria (e.g., Fleming & Levin, 1978) ya que dicha imagen es intrínsecamente más duradera en la memoria que las proposiciones verbales. Esta última afirmación está basada en los trabajos de Paivio (1971), de donde se desprende que la información es almacenada en la memoria a largo plazo en forma de proposiciones verbales e imágenes mentales. De esta manera, una imagen externa puede ayudar a generar un grupo de palabras asociadas, además de evocar una imagen mental del referente, con lo cual la combinación de palabras generadas e imagen evocada implicaría una mayor pregnancia de la imagen en la memoria a largo plazo.

Si la comprensión de un texto, como decíamos en el Capítulo Primero, implicaba una serie de procesos que daban lugar a una representación mental determinada, la comprensión de un texto acompañando a una imagen está aún por determinar si implica procesos similares. En otras palabras, solamente el modelo de comprensión *Structure-Building* permite asumir sus postulados independiente de la modalidad de la fuente de información (textual o visual). Sin embargo, ninguno de los modelos entra en detalle acerca de diferencias entre modalidades o cómo se produce esa integración de representaciones externas múltiples. Una posibilidad, según

sugieren Gernsbacher y Faust (1991), sería generalizar esos procesos inherentes a la comprensión de textos al procesamiento de todo tipo de materiales multimedia. No en vano, y como ya hemos mencionado, esta ausencia de esfuerzos y trabajo ha condicionado sobremanera el devenir de unos modelos de aprendizaje multimedia que parecen obviar que la imagen se procesa de forma conjunta con un texto, sobre el cual se dan una serie de procesos cognitivos de alto orden que posiblemente interfieran con el procesamiento y la integración de dicha imagen con ese texto.

Sólamente Schnotz (2002) esboza un modelo que explicaría cómo se produce ese proceso de comprensión multimedia desde una perspectiva más ligada a las teorías multinivel de comprensión de textos (van Dijk & Kintsch, 1983; Gernsbacher, 1990; Graesser, Millis, & Zwaan, 1997; Graesser, Singer, & Trabasso, 1994; Johnson-Laird, 1983; Kintsch, 1998; Zwaan, Langston, & Graesser, 1995) y sugiere que al final de tal proceso de comprensión se genera un sólo modelo mental que, en la línea de Johnson-Laird (1983, 1996), difiere de una imagen “fotográfica” en que:

- el modelo mental no está adscrito a una modalidad sensorial determinada.
- no todos los elementos gráficos o pictóricos de la imagen que acompaña al texto son incluidos en ese modelo mental.
- el modelo mental es enriquecido por información no presente en el texto ni en la imagen.

Así, podríamos decir que el producto de esa comprensión multimedia propuesta por Schnotz, implicaría un modelo mental que integra proposiciones del texto base, elementos pictóricos de la imagen que acompaña al texto, y conocimientos previos del sujeto. Esa representación sería una estructura coherente que refleja aquello a lo que imagen y texto se refieren conjuntamente, produciéndose la integración de los diferentes formatos de representación desde los niveles cognitivos más bajos, al contrario de lo que sugieren el resto de las teorías ligadas al aprendizaje multimedia, que postulan una integración de dos modelos mentales (uno a partir del texto y otro a partir de la imagen) que provienen del procesamiento de ambas representaciones por separado.

A pesar de nuestra negativa a entrar a fondo en los modelos teóricos que han tratado de explicar qué es el aprendizaje con imágenes, queremos dejar constancia de la existencia de este corpus teórico que evoluciona de una afirmación que ya es considerada universal “*People can learn more deeply from words and pictures than from words alone*” (Mayer, 2005 pág. 1). Según señala el propio Mayer, se necesitan tres procesos básicos para que ese aprendizaje multimedia sea efectivo: seleccionar, organizar, e integrar la información. De estos tres procesos deriva el primer grupo de modelos, los cuales buscan modos de reducir la carga cognitiva a la que los dispositivos multimedia



someten a la memoria de trabajo de los sujetos para mejorar así la comprensión. Por ende, tratan de facilitar esos tres procesos mencionados anteriormente, y que son causantes del aumento de carga cognitiva cuando el sujeto tiene que enfrentarse a un material multimedia. De esta manera, esos modelos son en parte responsables de la mayoría de los principios instruccionales que se han empleado en el diseño de los materiales multimedia educativos, y que han estado ligados a facilitar esos tres procesos básicos y necesarios del aprendizaje multimedia. Sin embargo y como señala Goldman (2003), este primer grupo de modelos ligados al aprendizaje multimedia ha venido acarreado una dolencia crónica que ya ha quedado patente en otros estudios ligados a fomentar la comprensión de textos, es decir, el conocimiento previo por parte de los sujetos sobre cómo seleccionar, organizar e integrar la información. Vemos por tanto que aquello que puede ser considerado una ayuda en el proceso del aprendizaje se convierte, si no hay una experiencia previa, en un lastre que dificulta dicho aprendizaje. A la vista de este hándicap, los trabajos relacionados con el desarrollo de este primer conjunto de modelos han hecho énfasis en la reducción de la carga cognitiva que impone cada una de esas fases, estableciendo premisas que ayuden a seleccionar, organizar e integrar las diferentes fuentes de información presentes en un material multimedia.

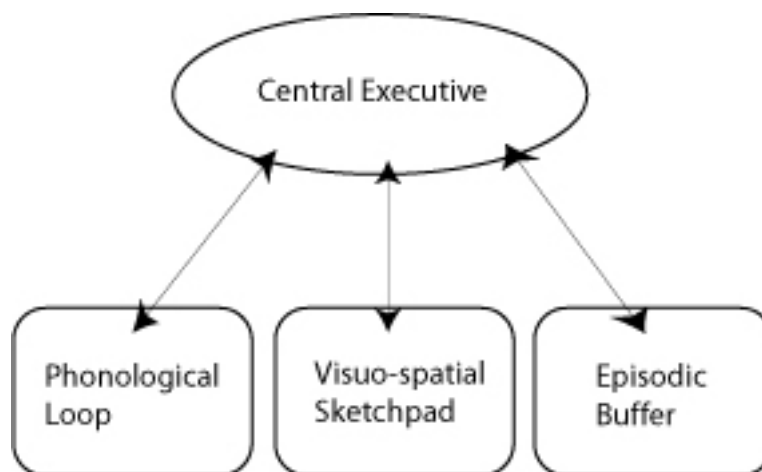
El segundo grupo de modelos profundiza en el análisis de los procesos cognitivos implicados en la comprensión de imágenes y cómo estos procesos se relacionan con el procesamiento del texto que acompaña a dicha imagen. Este conjunto de modelos ha venido centrando sus esfuerzos en la búsqueda de maneras más eficientes de procesar los dispositivos multimedia, tratando de responder más concretamente a cuestiones como, por ejemplo, si una misma imagen puede ser útil o no en función de la tarea a la que se enfrente el sujeto. Así, si el primer grupo de modelos se centraba en la efectividad de los materiales multimedia basados en un aumento del rendimiento del sujeto en tareas de aprendizaje; el segundo grupo de modelos se centra en la tarea concreta y las demandas cognitivas que ésta implica, para diseñar después elementos multimedia que sean funcionales de acuerdo a esa tarea. Las diferencias entre uno y otro grupo estriban en la atención preferente que se le da a la comprensión de la imagen por parte del segundo grupo, y al rendimiento de la memoria de trabajo por parte del primer grupo. A este último concepto dedicaremos unas líneas dada su relevancia en dichos modelos de aprendizaje multimedia.

### *3.2.3. La memoria de trabajo*

Comenzaremos este apartado repitiendo el motivo por el cual la memoria de trabajo aparece con tanta frecuencia en la literatura relativa al aprendizaje con imágenes: la memoria de trabajo, su arquitectura cognitiva y funcionalidad, han permitido estructurar las principales teorías en torno al

aprendizaje multimedia. En este sentido, el trabajo de Gyselinck, Cornoldi, Dubois, De Beni, y Ehrlich (2002) refleja claramente cómo se interpreta la comprensión multimedia desde la perspectiva de la memoria de trabajo. Esta aproximación empírica parte de dos premisas: (1) si la comprensión de un texto implicaba construir una representación referencial del significado, no del texto en sí, y dicha construcción daba como resultado un modelo mental del cual destacaba su homomorfismo con aquello que representaba, entonces una imagen que representa dicha situación del texto, ayudaría a la construcción de ese modelo mental (Glenberg & Langston, 1992); (2) si además esas imágenes son procesadas en un subprocesador de la memoria de trabajo diferente al utilizado para el texto (Krulley, Sciana & Glenberg, 1994), entonces presentando información a través de dos canales sensoriales diferentes aliviarían la siempre tan limitada capacidad de la memoria de trabajo. De esta manera se justificaría la utilización de múltiples representaciones externas para suministrar información. En otras palabras, la comprensión multimedia tendría sentido dentro de una concepción teórica donde la memoria de trabajo es un procesador con deficiencias significativas en cuanto a capacidad, pero ¿cuál es la estructura y función de ese procesador limitado?

La memoria de trabajo es un constructo cognitivo implicado en una gran variedad de habilidades de alto orden cognitivo, que ha evolucionado a lo largo de varias décadas. No en vano, la propia memoria de trabajo puede ser considerada una habilidad para mantener y manipular de forma activa la información que se procesa al servicio de la cognición (Chein & Fiez, 2010). Esas décadas de estudio que hemos mencionado antes, han dado lugar a la especificación de sus funciones, los factores que limitan tales funciones, e incluso el sustrato neural que correlaciona con esa habilidad. Se han propuesto diferentes modelos de WM, sobre todo en cuanto a la relación de este constructo con la memoria a largo plazo, el lenguaje, o bien la atención (e.g., Baddeley, 1986; Jones, Beaman, & Macken, 1996; Nairne, 1990; Cowan 1995), siendo el modelo de múltiples componentes propuesto por Baddeley y Hitch (1974; Baddeley, 1986, 2000) el que mayor repercusión ha tenido (ver Fig. 3.2). Este modelo distingue cuatro subcomponentes: bucle fonológico, agenda visoespacial, núcleo ejecutivo central, y buffer episódico; siendo los tres primeros, sobre los que han recaído la mayoría de los esfuerzos de los trabajos al respecto de la memoria de trabajo.



**Figura 3.2: Esquema de subprocesadores de la memoria de trabajo según el modelo de Baddeley (2000) (Adaptado de Baddeley, 2000)**

Esos trabajos han considerado principalmente la utilización de tareas de interferencia selectiva para explorar el procesamiento en uno u otro subcomponente y establecer una serie de funciones para cada uno de ellos. Si bien los dos primeros subcomponentes están asociados principalmente a funciones de almacenamiento, es el tercero de ellos el que, hasta el momento, está involucrado en un mayor número de tareas. El componente fonológico de la memoria de trabajo (para una revisión, ver: Gathercole & Baddeley, 1993) está involucrado generalmente en el procesamiento de la información verbal presentada de forma audible (e.g., Baddeley, Lewis, & Vallar, 1984; De Beni, Pazzaglia, Gyselinck, & Meneghetti, 2005; Longoni, Richardson, & Aiello, 1993), visual (e.g., Brunyé, Taylor, Rapp, & Spiro 2006; Farmer, Berman & Fletcher, 1986), e incluso táctil (e.g., Millar, 1990). El componente visoespacial (para una revisión, ver: Logie, 1995) aparece involucrado en el procesamiento de características visuales de aquella información no textual (diagramas, mapas, imágenes...) presentada de forma visual (e.g., Brunyé et al., 2006; Garden, Cornoldi, & Logie, 2001; Gyselinck et al., 2002; Kruley et al., 1994; Logie, 1995), o bien en el procesamiento de localizaciones y movimientos en el espacio (e.g., De Beni et al., 2005), y en visualizaciones mentales bien sean espaciales o no (e.g., Farmer et al., 1986; Miyake, Friedman, Rettinger, Shah, & Hegarty, 2001). Por último y como ya hemos mencionado, el núcleo ejecutivo central (Baddeley, 1996) está involucrado en múltiples tareas como son: la supervisión de los otros subsistemas (e.g., Baddeley, Emslie, Kolodny, & Duncan, 1998), la coordinación de dos tareas simultáneas (Duff, 2000; Duff & Logie, 2001), la generación de secuencias aleatorias (e.g., Baddeley et al., 1998), el razonamiento inferencial y analítico (Morrison, 2004), o la inhibición de una tareas o información (e.g., Baddeley, 2002). Pero más allá de las funciones de estos subprocesadores, es su propia arquitectura la que

ha condicionado la importancia de este constructo en las teorías sobre aprendizaje multimedia, al depender el procesamiento e integración de la información de las capacidades de esa memoria, e igualmente, al ser esas limitaciones las que incitan a presentar la información a través de formatos multimedia. Desde un punto de vista más próximo a la comprensión, la capacidad de la memoria de trabajo delimitaría hasta qué punto el modelo mental creado por la integración de información de texto e imagen puede ser actualizado por procesos en los que una proposición particular o elemento pictórico puede ser asociado a otro elemento o proposición (Dutke & Rinck, 2006).

Si bien este constructo cognitivo ha centrado las aproximaciones teóricas y empíricas relacionadas con la presentación conjunta de imágenes y textos, los procesos cognitivos que subyacen al rendimiento académico con representaciones externas han sido también el objeto de estudio de otro grupo de trabajos que ha pretendido identificar cómo y por qué los sujetos pueden beneficiarse de la presencia de representaciones externas. A este respecto dedicaremos el siguiente epígrafe.

### 3.3. LOS TRABAJOS SOBRE REPRESENTACIONES EXTERNAS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Como ya mencionábamos al inicio de este capítulo, el motivo que nos ha llevado a repasar los trabajos que han utilizado representaciones externas en la resolución de problemas aritméticos radica en la necesidad de abordar las razones que subyacen a los controvertidos resultados que ofrecen estos trabajos. La utilización de representaciones externas para fomentar el aprendizaje está ampliamente extendida. La enseñanza de las matemáticas es una de las áreas donde más impulso se ha logrado (Ainsworth, Bibby, & Wood, 1997; Blöte, Van der Burg, & Klein, 2001; Davis & Bamford, 1995; Elia, Gagatsis, & Demetriou, 2007; Schnotz, 2002; Verschaffel, De Corte, & Lasure, 1994; Vicente, Orrantia & Verschaffel, 2008). Este hecho se debe sin duda a que las representaciones externas pueden conducir a una comprensión conceptual más profunda y a una mayor flexibilidad en tareas como la resolución de problemas. No en vano, la mayor parte de estos estudios relacionados con matemáticas han estado ligados a programas de instrucción (*Schema-Based Instruction*; Fuchs, Fuchs, Finelli, Courey, &

Hamlett, 2004; Jitendra et al., 2009) que han partido del concepto de representación cognitiva Bruner (1960, 1965). Estos programas han perseguido una correcta interpretación y aprendizaje de ciertos tipos de representaciones externas que se correspondían con la información matemática del problema. Sin embargo, dado que no es el objeto de esta Tesis perseguir mejoras en la interpretación de conceptos matemáticos, dejaremos a un lado estos estudios para centrarnos en aquellos que no han

utilizado la representación externa como herramienta de aprendizaje sino como dispositivo multimedia acompañando a un problema que el sujeto ya sabe resolver. Mientras que las representaciones externas tienen el potencial de fomentar el aprendizaje, el procesamiento de esas representaciones durante una tarea no instruccional puede llevar consigo una serie de demandas específicas sobre los sujetos, tal como la necesidad de procesar e interrelacionar diferentes representaciones en una representación mental coherente. Este requerimiento hace que las representaciones externas puedan tener un efecto no beneficioso (Chandler & Sweller, 1992; Van Someren, Reimann, Boshuizen, & de Jong, 1998), especialmente, durante la ejecución de una tarea compleja como la resolución de problemas, que lleva consigo comprender el problema, construir una representación de esa información, planear la ejecución y supervisar las distintas fases de resolución.

Lo que convierte en esencial la revisión de los trabajos sobre resolución de problemas con representaciones externas, no es sólo la escasez de trabajos en el área de resolución de problemas sino la contundencia de los resultados negativos de algunos trabajos. En este sentido, Berends y van Lieshout (2009) y Elia et al., (2007) encontraron un efecto perjudicial de las ilustraciones sobre la resolución de problemas aritméticos. McNeil, Uttal, Jarvin y Sternberg (2009) también demostraron que la atención de los niños no se concentraba en el algoritmo asociado a la tarea cuando ésta iba acompañada de representaciones externas realistas, lo cual imita los resultados negativos que algunos estudios han encontrado para símbolos muy ricos perceptualmente (Goldstone & Sakamoto, 2003; Sloutsky, Kaminski, & Heckler, 2005; Sweller, 1994; Uttal, Liu & DeLoache, 1999). Booth y Thomas (2000) también encontraron diferencias en la habilidad que tenían los niños para resolver problemas cuando éstos eran presentados de forma conjunta con un diagrama o con una ilustración realista. Una posible explicación para estos resultados podría estar relacionada con el efecto distractor del contexto visual tal y como han sugerido Berends y van Lieshout (2009): “mientras que las representaciones realistas pueden activar inicialmente el conocimiento del mundo real y ayudar al sujeto a construir una interpretación relevante del problema, a la vez podrían distraer al sujeto de procesar la información matemática”. Otra posible interpretación es la expuesta por Postigo y Pozo (2004), la cual hace referencia a que diferentes formas de representar la información (gráficos, mapas, dibujos realistas...) llevan consigo su propia sintaxis y convecciones que no siempre el sujeto podría interpretar correctamente. Esta mala interpretación estaría en relación con una falta de conocimiento previo o bien con una capacidad limitada de la memoria de trabajo. Sin embargo, existe otra explicación adicional que tiene en cuenta la propia información incrustada en la representación externa. Para entender esta última aproximación sería

conveniente mencionar, y recordar a partir de este punto, la idea expuesta por Gentner (1983; Gentner & Markman, 1997) y Schnotz y Bannert (1999) acerca de cómo tiene lugar la comprensión multimedia: a través de un proceso continuo de mapeado de estructuras o formación de coherencia mental. Esta idea condicionaría el resultado de la resolución de problemas a una correcta correspondencia entre la información incrustada en la imagen y la información presente en el texto. Si como hemos hipotetizado anteriormente, el modelo mental creado a partir del texto puede incluir información basada en magnitudes (referente a la relación entre los elementos del problema), entonces, ¿por qué no hacer corresponder la información incrustada en la imagen con aquella que el sujeto extrae del texto?

### 3.4. RESUMEN DEL CAPÍTULO Y ARGUMENTACIÓN

Este Capítulo Tercero ha pretendido acercarnos a la representación externa utilizada en el segundo estudio empírico de esta Tesis Doctoral. La idea de explorar la naturaleza de esa representación mental más cualitativa que crea el sujeto a partir del texto de un problema, por medio de representaciones externas, está basada como hemos visto en aquellos estudios que han aplicado representaciones externas con la intención de ayudar a crear el modelo mental. En este sentido, hemos partido de qué es una representación externa como vector de información que pone en relación al sujeto con aquel modelo mental que tiene que crear. Si bien los modelos de aprendizaje multimedia no esclarecen cómo se da ese proceso de comprensión de texto e imagen, sí que han aportado evidencias para un efecto de las representaciones externas sobre el aprendizaje. Como hemos visto, este efecto puede ser debido a la conexión creada por la representación externa con el modelo mental como referente, o bien al alivio computacional que pueden producir en la memoria de trabajo al permitir información a través de dos subprocesadores diferentes, aprovechando así la arquitectura de la memoria de trabajo. En el repaso de aquellos trabajos que concretamente, han pretendido establecer cómo una representación externa afecta al proceso de resolución de problemas, hemos visto resultados divergentes y a veces contradictorios que podrían haberse debido a una mala conexión entre la información que aporta la representación externa y el modelo mental que se crea del problema.

Si tenemos en cuenta todo lo expuesto en el Capítulo Primero de esta Tesis Doctoral, podríamos decir que la contundencia de los resultados negativos en la aplicación de representaciones externas a la tarea de resolver problemas aritméticos, puede deberse a que el modelo mental que se construye con la información del problema no se corresponde con la información que transmite la representación externa, inhibiendo así ese

proceso de mapping propuesto por Schnotz y Bannert (1999). Como una propuesta para validar la hipótesis que ha guiado esta Tesis Doctoral, hemos planteado que si las representaciones externas pueden influir en la construcción del modelo mental (Glenberg & Langston, 1992; Glenberg & McDaniel, 1992; Kruley et al., 1994), entonces, una representación externa (en términos de magnitudes) que fuese efectiva, confirmaría esa hipotética naturaleza del modelo mental en tanto que lo activa durante la resolución del problema ayudando a una mejor ejecución. Dado que los modelos mentales son representaciones de una situación decrita en un texto, más que del texto en sí mismo, y que las representaciones externas son típicamente representaciones de la situación, entonces, este efecto facilitador de una representación externa se debería a que asisten en la construcción del modelo mental puesto que la estructura de esa representación externa (la relación entre las partes) es con frecuencia idéntica a la estructura requerida por dicho modelo mental. Si bien la memoria de trabajo puede condicionar esa interpretación que proponemos, en el segundo estudio empírico trataremos de controlar la implicación de este constructo mental en el diseño experimental.





**SEGUNDA PARTE**

**RESEARCH SUMMARY**

**EMPIRICAL STUDIES**

**&**

**CONCLUSIONS**



## CHAPTER IV

### RESEARCH SUMMARY AND EMPIRICAL STUDIES

Many reading researchers have explored the processes used in situation model construction (e.g., Kintsch & Welsch, 1991; Myers & O'Brien, 1998; Zwaan et al., 1995), but there has been less investigation into the exact nature of mental models. This thesis dissertation has explored the nature of the mental representation individuals construct from the wording of a standard arithmetic word problems involving a comparative structure. This representation is related to comprehension of the situation described in the problem, the so-called situation model (van Dijk & Kintsch, 1983) or mental model (Johnson-Laird, 1983), that corresponds to a level of representation associated closely with “deep” understanding, which serves to integrate the information stated in a word problem with information supplied by the solver’s world knowledge.

Regarding the nature of this mental representation, two different theoretical approaches have been considered. The traditional theoretical position has been that situation models are sets of propositions and therefore “amodal” symbolic systems (Kintsch, 1998; van Dijk & Kintsch, 1983). Recently, theorists have suggested that situation model construction may involve “modal” symbol systems—that is, perceptual symbols that represent knowledge (Barsalou, 1999; Glenberg, 1997; Glenberg & Robertson, 1999; Mac-Whinney, 1999; Zwaan, 1999). The hypothesis made on the basis of these evidences, as a starting point for two empirical studies is: “Mental models created during arithmetic word problem solving involve a perceptual representation based on magnitude”. Nonetheless, the aim of this thesis dissertation is not to establish whether a propositional system vs. a perceptual representation underlies the mental model individuals construct. As Zwaan (1999) argues, amodal and modal systems may not be mutually exclusive, and, in this sense, the design of our empirical studies does not allow to get rid of a propositional system but to demonstrate that mental model construction during arithmetic word problem solving involves a representation that is grounded in magnitude processing.

In this chapter, firstly, we summarize our research and briefly describe some issues mentioned in the theoretical framework; and secondly, we report our two empirical studies. These experiments examined the hypothesis that mental model construction involves magnitude processing. Experiment 1 showed that participants were faster in a figure discrimination task when the sequence of figures matched, in terms of magnitude, the relation stated in the problem. In addition, differences in performance between compare problems

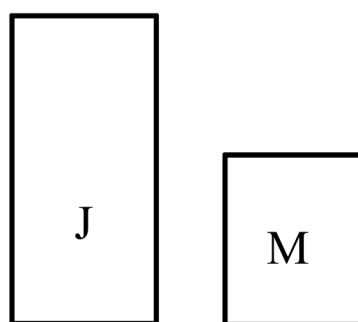
with consistent and inconsistent language were smaller when the figure discrimination task matched the relation underlying the mental model constructed from the relational sentence. In Experiment 2, participants were faster and less error prone when arithmetic word problems were presented with external representations that represented, in terms of magnitude, the relation between the elements of the problem.

#### 4.1. RESEARCH SUMMARY

In CHAPTER ONE, we introduced the definitions of *mental model* and *comprehension*, and suggested the potential nature of the mental model constructed from the wording of a text. A situation model, or mental model, was defined as a mental representation of the people, setting, actions and events that are mentioned in explicit clauses or that are filled in inferentially by world knowledge (Glenberg, Meyer, & Lindem, 1987; Johnson-Laird, 1983; van Dijk & Kintsch, 1983). Overall, the chapter was developed to explore two different theoretical approaches that concern our hypothesis. The first one relates to the models that have explored the comprehension process and have suggested a propositional system, and the second approach relates to a group of theories that have suggested that the mental representation an individual constructs might be grounded in perception and action, that is, the comprehension process entails establishing an analogue relationship between the text and the reader's background knowledge. Based on this last theoretical approach, two close assumptions were explored; Barsalou's (1999) claim that knowledge may take the form of perceptual symbols, which are derived directly from perceptual experiences; and, Glenberg and Robertson's (1999) proposal that the use of these perceptual symbols in reading facilitates the construction of a situation model. Our approach to word problem solving as mental model construction is consistent with these assumptions according to which, understanding a text does not just consist in the construction of its propositional structure, but it is only fully understood if a reader has constructed a mental representation grounded in previous experiences. In this sense, we found considerable experimental support providing evidence that readers mentally represent motion, orientation, or shape information during reading (for an overview, see Zwaan, 2004), which suggests that language comprehension strongly depends on the reader's experience with, and knowledge of, the world. According to this experiential view of language comprehension, the mental representation we try to explore might take the form of perceptual symbols, which are derived directly from perceptual experiences (Barsalou, 1999; Glenberg & Robertson, 1999; Zwaan, 1999).

In this context, in Chapter One we suggested that if a mental model is constructed during word problem solving, the resulting mental representation would depend on the solver's experience with the processing of magnitude information for quantities since several lines of evidence lend credence to the

hypothesis that a rough representation of magnitude provides a foundation for formal mathematics (e.g., Dehaene, Dupoux, & Mehler, 1990; Dehaene, Spelke, Pinel, Stanescu, & Tsivkin, 1999). In this sense, many studies have demonstrated that number processing involves a mental representation of numerical magnitude. A widely replicated effect in this regard is the “numerical distance effect” (Moyer & Landauer, 1967), which indicates it is more time-consuming to compare two numbers when the numerical distance between them is small (e.g. 7 vs. 9) than large (e.g., 3 vs. 8). This effect has also been reported in other non-numerical magnitude dimensions, such as line length or geometrical shapes (for a review see Cohen Kadosh et al., 2008), indicating that the magnitude representation of numbers is shared with other non-numerical magnitude dimensions (Walsh, 2003). In addition to behavioural research, we found a number of neuroimaging studies that have demonstrated that the intraparietal sulcus (IPS) is involved in processing both numerical and non-numerical magnitude (see Brannon, 2006, and Cohen Kadosh et al., 2008, for a review). Although most studies on quantity processing have focused on simple tasks (e.g., magnitude comparison), we think it would be expected that in higher cognitive tasks, such as word problem solving, solvers would activate a mental representation of magnitude for the situation described. Thus, in a problem such as “*John has 5 marbles more than Mary; if John has 8 marbles, how many marbles does Mary have?*” the first sentence could lead to a mental representation similar to the one presented in Figure 4.1 since solvers are likely engaged in magnitude comparison to help verify which protagonist possesses more target objects.



**Figure 4.1: Example of mental representation based on magnitudes**

This mental representation would be feasible since there is converging evidence, as stated earlier, for a shared magnitude representation underlying different quantity dimensions. In this sense, Lee and colleagues found common activation of the IPS associated with symbolic and non-symbolic

representations during reading a word problem (Lee et al., 2007). Specifically, participants were asked to transform information from a word problem (e.g., James has 50 fewer watches than Mike) to either a symbolic equation (e.g.,  $J = M - 50$ ) or a non-symbolic representation based on a diagram made up of rectangles to represent relationships in the word problem (e.g., a rectangle representing Mike, and another shorter one representing James). The authors found activation in the IPS for both the symbolic and non-symbolic conditions, which would suggest that there is a common mechanism for magnitudes even in the context of word problem solving. Chapter One summarizes that:

- The mental representation stated in the title of this thesis dissertation, namely, mental model or situation model, is developed from a cognitive process known as comprehension.
- There are different theoretical approaches and empirical evidence to support two different natures for the product created from text comprehension:

An arbitrary system based on propositions

A simulation or representation grounded on previous experiences.

- The mental model is spatially distributed, is relational, and it is qualitative.
- Magnitudes may be spatially distributed and may be qualitative.

In CHAPTER TWO, we presented definitions of word problem solving and explored the type of mental representation suggested from different cognitive models on word problem solving. We described arithmetic word problem solving as a complex activity in which solvers create different levels of representation, both mathematical and non-mathematical. Several simulation models about arithmetic word problem solving were reviewed. These models have tried to analyze the knowledge structures and processes necessary for problem solving. We found that most of these models have not considered the importance of the construction of an adequate representation of the specific situation described in the text of a word problem (e.g., Briars & Larkin, 1984; Riley et al., 1983). According to these models, problem solving involves a more or less direct assignment of the problem's numerical information to an activated problem schema. These schemata would be considered formal structures stored in long-term memory that represent basic semantic relationships between the main quantities in the problem.

We described Kintsch and Greeno's (1985) theoretical approach as being the first model introducing the concept "situation model" in the context of word problem solving. In this sense, Kintsch and Greeno theorized that a

dual representation is constructed while reading a word problem. This dual representation would include a propositional representation termed *text base*, to capture the local meaning of the passage, and a representation of the situation and actions in the text, termed *situation model* or *problem model*, which is inferred from the text base and the reader's knowledge in the domain of arithmetic problems. This situation model would be the starting point for the selection of an arithmetic operation to identify the unknown in the problem (representation). We reported some limitations of the Kintsch and Greeno model, for example, Staub and Reusser (1995; see also Kintsch, 1998; Nathan et al., 1992; Reusser, 1990; Thevenot et al., 2007) suggested that the model relied excessively on the schema theory, jumping directly from the propositional text base to a problem schema that is activated by specific textual clues. In this sense, and similar to the above-mentioned by Briars and Larkin (1984) and Riley et al. (1983), the Kintsch and Greeno's model still shows no real attempt to explicitly understand the situation described in the text of the problem in the initial stage of the problem-solving process.

In addition to Kintsch and Greeno's (1985) model, we described Reusser's (1985, 1990) studies about his simulation model of understanding and solving arithmetic word problems, called "*Situation Problem Solver*". This model involves the generation of an episodic situation model, implying the "*application of comprehension strategies to the text base, which generates an analysis of the temporal and functional structure of the situation and actions depicted in the problem texts*" (Staub & Reusser, 1995, p. 293). The goal of this stage would be to construct an overall representation of the events and actions depicted by the text of the problem in terms of everyday concepts. This non-mathematical representation would be the bridging element between the text base and the problem model as described by Kintsch and Greeno (1985).

In a different line of research, we reviewed one study (Thevenot, 2010) that has directly considered whether a propositional representation is constructed in the domain of arithmetic word problem solving. Thevenot (2010) evaluated to what extent the mental model framework versus the schema framework best accounts for word problem solving. The results were consistent with the mental model theory. According to the mental model theory, word problems would be solved by representing the relationship between the different elements of the situation described, and the structure of the representation constructed would be analogous to the structure of the object it represents. This idea underlies the empirical studies presented in this thesis dissertation. However, we do not attempt to explore whether word problems are solved via the mobilization of schemata stored in long-term memory triggered by propositions, or not. In this sense, we just developed our hypothesis on the qualitative relationship that underlies the mental model individuals construct from the wording of the problem. Chapter Two summarizes that:

- Different representations are constructed during word problem solving (qualitative and quantitative)
- Arithmetic word problem solving involves mental model construction
- Mental models are related to the qualitative representation

CHAPTER THREE was also devoted to evaluate the same hypothesis that was formulated at the beginning of this Chapter Four. However, in order to assess the possible nature of the mental model constructed during word problem solving, this chapter relates to the assumption suggested by Glenberg and Langstone (1992): *illustrations help to build mental models*. The rationale behind this Chapter is quite simple: if an effective external representation means that it helps individuals to generate the mental model from the wording of a text, then magnitude-based mental models might be supported by external representations involving magnitudes' comparison.

Chapter Three explored the theoretical framework behind the effectiveness of external representations and how they may foster word problem solving by mental model activation. In this sense, it is commonly assumed that illustrations enhance text comprehension by facilitating the understanding of the situation described in the text (e.g., Glenberg & Langston, 1992; Gyselinck & Tardieu, 1999; McCrudden, Schraw, & Lehman, 2009; Pike, Barnes, & Barron, 2010). As suggested by Gyselinck, Jamet, and Dubois (2008), this facilitator effect of illustrations has been interpreted within the mental model theory proposed by Johnson-Laird (1983), which is based on the assumption that a mental model is a representation whose structure is analogous to the structure of the object that it represents. In other words, a mental model depicts the world described by the text and thus resembles a mental image of this world. Since illustrations can also be considered analogical representations, they may act as facilitators in the construction of the mental model. Therefore, given that problem solving requires keeping many factors of a situation in mind (e.g., the mental model created from the wording of the problem) while analyzing them (i.e. scanning the mental model) for a solution, then, an external representation would provide assistance for both kinds of process.

We started Chapter Three from a specificity in Johnson-Laird's theory of mental models, namely, the notion of homomorphism to the world: a mental model has a structure analogical to that of the situation it represents, and its content corresponds to the objects and events of the world. In this sense, an illustration is also an analogical representation, although an external one. It closely mirrors the situation described in the text and can be viewed as one possible expression of a mental model. Hence, presenting external



representations that depict the content of the text they accompany would facilitate the construction of a mental model (Glenberg and Langston, 1992). In other words, since mental models are representations of situations described by a text, rather than representations of the text itself, and external representations are also typically representations of situations, then, external representations can assist in the construction of mental models because their structure (for example, the relations between two magnitudes) is often identical to the required structure of the mental model.

We also provided definitions of external representation and multimedia learning. In this sense, we explored the cognitive processes that underlie performance on multimedia learning, which has been the focus of extensive experimental research over the past decades (cf. Carney & Levin, 2002; Mayer, 2005). The goals of this research have been to identify why and how learners can benefit from multiple external representations. Two different but not separate, qualitative and quantitative approaches are mentioned. Whereas the focus of the quantitative approach has been on the architecture of the working memory and assumes that more information may be processed if presented on different sensory channels (e.g., Mayer, 2005; Sweller, van Merriënboer & Paas, 1998), the focus of the qualitative approach has been on how mutually complementing information promotes different cognitive functions such as enabling knowledge construction (Graesser, Chipman, & King, 2008; Schnotz, 2002; Schnotz & Bannert, 1999). In addition, we found that most of the available research on multimedia learning concentrates on text comprehension, whereas other higher-level cognitive tasks such as word problem solving, have received much less attention and have reported contradictory results. In particular, we revised the studies about illustrations' influence on arithmetical word problem solving. These studies showed that illustrations could have a detrimental effect on performance. We suggested possible explanations for these contradictory findings, such as a potential hindering effect of visual contexts.

We introduced the role of working memory capacity as possible moderator to manage the processes that underlie arithmetical word problem solving with external representations. For example, based on Baddeley's (1986) working memory model, several dual-task studies have supported the specialization of two subsystems of the working memory (i.e., phonological loop and visuo-spatial sketchpad)<sup>4</sup> in processing multimedia materials (e.g., Gyselinck, Cornoldi, Dubois, De Beni & Ehrlich, 2002). In this sense, to a large extent, visuo-spatial ability has been reported to moderate the effectiveness of

---

<sup>4</sup> Nevertheless, in a newer version of his model, Baddeley (2000) introduced the episodic buffer as responsible for integrating information from the various systems of working memory (e.g. phonological loop, visuo-spatial sketchpad) and from long-term memory. However, the lack of any clearly agreed methodologies for assessing its function has focused the role of working memory in multimedia learning on the processes involved and how these processes relate to the phonological loop and visuo-spatial sketchpad.

external representations in text comprehension. A positive effect was found in high spatial span subjects (e.g., Hegarty, Kriz & Cate, 2003; Mayer & Sims, 1994), which was also confirmed by Gyselinck et al., (2002) using a dual-task paradigm. In this line of research, verbal working memory has not been found to influence picture comprehension (Gyselinck et al., 2002) but it is especially important in multimedia learning given the documented moderating effect on text comprehension (e.g., Daneman & Carpenter, 1980). These findings would indicate that individual differences in working memory capacity might define the extent to which the two subsystems of working memory are involved and how they influence on the effectiveness of external representations (e.g., Friedman & Miyake, 2000; Klein, Piacente-Cimini & Williams, 2007).

In addition, word problem solving would also rely on the phonological loop for temporary storage of partial solutions, and the central executive to co-ordinate and monitor simultaneous demands of storage, processing and execution of computational algorithms (Logie, Gilhooly & Wynn, 1994). Visuo-spatial working memory is also closely related to attainment in mathematics (Brown & Wheatley, 1989; Arcavi, 2003; Jarvis & Gathercole, 2003), which would be in line with the studies that support a close relation between this task and the visuo-spatial representation of numerical information (Geary, 1993). For example, preschool children's performance on nonverbal problems depends on visuo-spatial working memory (Huttenlocher, Jordan, & Levine, 1994). Some studies have demonstrated a unique contribution of verbal working memory to mathematical word problem solving (e.g., DeStefano & LeFevre, 2004; Swanson & Beebe-Frankenberger, 2004). In Chapter Three we explored:

- How external representations may be effective by reflecting the mental model individuals construct from the text.
- The potential causes that underlie the lack of effectiveness of word problems solving with external representations
- How different learning-related factors may affect the effectiveness of external representations.

## 4.2. STUDY ONE

In the present experiment, we extended the logic behind theories of mental models –as representations grounded in perception and action—and theories of arithmetical word problem solving. The purpose of this study was to assess whether mental models are routinely activated when arithmetic word problems are solved, and whether these mental representations are based on magnitudes. Participants were required to solve compare word problems (see Riley et al., 1983) and to perform an intermediate discrimination task not related to the solving process. On each trial, participants read the first sentence of the problem which expressed the relationship between two

variables, then judged whether two sequentially presented figures were perceptually the same or different, and finally read the remainder of information of the problem in order to solve it (see Fig. 4.2). The sequences of figures either matched or mismatched the possible mental model constructed from the relational sentence of the problem<sup>5</sup>. Importantly, by using a same-different task instead of a magnitude comparison task (i.e., to decide whether the second figure is larger or smaller than the first one) any explicit cue related to magnitude would be eliminated and, therefore, the task would reflect the construction of an automatic mental representation from the target sentence (Orrantia, Rodríguez, & Vicente, 2010; Tzelgov & Ganor-Stern, 2005) since the figures' discrimination would not be part of the task requirements (i.e., problem solving). In addition, the compare problems were either consistent (CL) or inconsistent language (IL) problems (Lewis & Mayer, 1987). In a CL problem the unknown variable (i.e., John), is the grammatical subject of the relational sentence, and the relational term (i.e., more than) is consistent with the required arithmetic operation (i.e., addition). In an IL problem the unknown variable (i.e., Mary), is the object of the relational sentence, and the relational term (i.e., more than) is in conflict with the required arithmetic operation (i.e., subtraction). A number of empirical studies have shown that IL problems are considerably more difficult than CL problems (e.g., Hegarty, Mayer, & Monk, 1995; Stern, 1993; Verschaffel, 1994; Verschaffel, De Corte, & Pauwels, 1992), possibly because IL problems require more processing in constructing a mental representation of the problem (Hegarty, Mayer, & Green, 1992). In this sense, Lewis and Mayer (1987) suggested (but there is also direct empirical evidence for it, see Verschaffel, De Corte & Pauwels, 1992) that when given an IL problem, individuals are assumed to solve it by rearranging the relational sentence mentally by reversing the subject and object of the relational sentence, as well as the arithmetic operation suggested by its relational term.

---

<sup>5</sup> It could be argued that both non-identical matching and non-identical mismatching conditions reflect the mental model of the problem since only the relation between the quantities should be kept in the mental representation. However, the cultural bias for a left-to-right preference (Hörnig, Oberauer, & Weidenfeld, 2006) has been demonstrated to influence mental model construction (Jahn, Knauff, & Johnson-Laird, 2007). In the same line, Dijck and Fias (2011) showed that information stored in working memory gets spatially coded in function of its ordinal position in the sequence.

---



constructed from the relational sentence. In this sense, a basic assumption suggested by Lewis and Mayer (1985) is that reversal errors on IL compare problems are due to difficulties in understanding and representing the relational information in the problem statement. Thus, IL problem solving should be faster and less error-prone in the matching condition than in the mismatching conditions since the matching condition would help individuals to shift the elements and the relation between them while they still maintain activated the situation mentioned in the wording of the problem. This interaction effect is not predicted for CL problems since this type of problems does not require mentally simulate the mental model of the problem in order to succeed in the rearrangement procedure.

#### *4.2.1.-Method*

##### 4.2.1.1.- Participants

Twenty-five psychology and educational science undergraduate students took part in this study.

##### 4.2.1.2.- Materials

All participants were presented with Seventy-two experimental arithmetic word problems. The problems belonged to Compare 3 through 6 according to the classification scheme of Riley et al. (1983) and they differed in situation, names of the protagonists and nature of the objects. The first sentence of each problem held the relational term that activates the mental model of the situation described in the problem. The sentence contained the relational statement expressing the value of the first variable in relation to the second (e.g., John has 5 marbles more than Peter). Half of the problems contained the relational term “more than” and the other half the relational term “less than”. Following this sentence was the figure discrimination task. Three types of sequences of figures were presented: identical mismatching mental model, non-identical matching mental model, and non-identical mismatching mental model. As figures we used 10 monochromatic grey rectangles, which were 820 pixels wide. Height increased for each rectangle by intervals of 100 pixels, ranging from 480 to 1480 pixels. To avoid differences in visual scanning speed, the figures’ lower edges were set on screen at the same level ( $y = -150$ ), and non-identical pairs differed by 300 pixels in height. In order to prevent participants from using an encoding strategy, each sequence consisted of one pair of figures selected from 22 possible pairings (10 identical and 12 non-identical excluding the two pairs that presented the smallest and largest figure in the first place). After the discrimination task, the remainder of information of the problem appeared in a line that involved the characters and the data. We used this format because in a standard format (e.g., How many marbles does John have more than Mary if...?) the self-presentation time for the question contains the resolution time in addition to the reading time; even

the question could be inferred, so that its reading time would be much faster. All this would result in a distortion of the response times. In order to reduce additional delay between the relational sentence and the answer, the order of presentation of the characters in this segment of the problem was the same as in the relational sentence. Since the unknown variable could be the grammatical subject or the object of the relational sentence, half of the problems were CL and the other half IL problems.

The operands used in the word problems consisted of pairs of numbers selected from the 2s through 9s matrices. Ties (e.g.,  $3 + 3$ ) were excluded and the problem size effect on response times (Ashcraft, 1992) was controlled. Forty-eight filler word problems were included to vary the form of the problems and to equalize the number of same-different responses in the discrimination task. These filler word problems belonged to the Combine 2 category of Riley et al.'s (1983) classification scheme (e.g., "Joe and Tom have 8 marbles altogether").

#### 4.2.1.3.- Procedure

The stimuli were presented using SuperLab software, which ran on computers with 15-inch monitors. On each trial (see Fig. 4.2), the relational sentence (Geneva 36-point font) was presented in the middle of the screen. Pressing the space bar caused the relational sentence to be erased and the discrimination task to be presented. Following a blank screen (100 ms) and a fixation cross (150 ms), a sequence of two monochromatic grey rectangles was shown. The first rectangle was shown for 600 ms in the middle of the screen. After a blank screen (100 ms) and a fixation cross (150), the second rectangle was presented in the same place as the first. Participants indicated via key presses whether the two figures were the same or different. Then, the remaining information of the problem appeared in the middle of the screen. The participants were told to solve the word problem correctly as quickly as possible. A microphone connected to a voice-activated relay and interfaced with the computer registered the latency of the responses. After an informative screen ("press the space bar to continue") and a blank screen (2500 ms), the next trial started. To familiarize participants with the procedure, there were ten practice trials. Experimental ( $n = 72$ ) and filler trials ( $n = 48$ ) were counterbalanced within and between subjects.

### 4.2.2.-Results

#### 4.2.2.1 Discrimination task

There were 2% of incorrect responses (evenly distributed among the experimental conditions) that were removed from the discrimination task analysis and did not allow for the error rate analysis.

- Response time

One point five per cent of the data were excluded as outliers deviating more than 2.5 standard deviations from a participant's cell means per condition. A repeated measures ANOVA with non-identical matching vs. non-identical mismatching vs. identical mismatching figures as the only independent variable showed a significant effect [ $F(2, 48) = 4.84$ ,  $MSE = 7966$ ,  $p = .012$ ,  $partial \eta^2 = .17$ ]. Comparisons using the Bonferroni adjustment with  $p < .05$  indicated that participants discriminated faster in the matching condition (615 ms) than in the mismatching condition (645 ms,  $p = .0001$ ) and identical figures condition (646 ms,  $p = .007$ ), whereas no significant differences were found between the non-identical mismatching and identical mismatching figures condition.

#### 4.2.2.2 Problem solving task

There were 5.2 % of incorrect responses (evenly distributed among the experimental conditions) that were removed from the problem solving task analysis. The proportion of error and response time data were analysed in a 3 (figures: non-identical matching vs. non-identical mismatching vs. identical mismatching) by 2 (consistency: consistent language CL vs. inconsistent language IL) repeated measures ANOVA. Results are reported in Table 4.1.

	Errors (%)		Response time (ms)	
	Consistent problems	Inconsistent problems	Consistent problems	Inconsistent problems
Non-identical matching	.03 (.04)	.05 (.06)	2644 (1142)	2874 (1096)
Non-identical mismatching	.01 (.03)	.10 (.07)	2634 (963)	3302 (1380)
Identical mismatching	.03 (.04)	.09 (.10)	2564 (880)	3372 (1436)

**Table 4.1. Mean error rate (and SD) and response time (and SD) in the problem solving task**

- Error rate

With regard to the error rate, the analysis indicated a main effect of consistency [ $F(1, 24) = 21.34$ ,  $MSE = .006$ ,  $p = .0001$ ,  $partial \eta^2 = .47$ ]. Participants made more errors on IL problems than on CL problems (.08 vs. .02, respectively). Although the main effect of figures did not reach significance [ $F = 3.01$ ,  $MSE = .003$ ,  $p = .059$ ,  $partial \eta^2 = .11$ ], there was a significant interaction between figures and consistency [ $F(2, 48) = 5.32$ ,  $MSE = .003$ ,  $p = .008$ ,  $partial \eta^2 = .18$ ]. Comparisons using the Bonferroni

adjustment with  $p < .05$  showed that, whereas no significant differences were found between CL and IL problems in the non-identical matching condition, participants made significantly more errors on IL problems than on CL problems in the non-identical mismatching ( $p = .0001$ ) and identical mismatching figures conditions ( $p = .018$ ). In addition IL problems were less error prone in the non-identical matching condition than in the non-identical mismatching ( $p = .006$ ) and identical mismatching ( $p = .016$ ) conditions, whereas error rate data for CL problems did not show differences between figures` conditions.

- Response time

Five per cent of the data were excluded as outliers deviating more than 2.5 standard deviations from the mean, or due to voice key errors, with no significant differences between conditions. The corresponding analysis of response time data presented a similar pattern as that in the error rates analysis. Participants solved CL problems (2614 ms) more quickly than IL problems (3183 ms) [ $F(1, 24) = 34.29$ ,  $MSE = 353244$ ,  $p = .0001$ ,  $partial \eta^2 = .60$ ]. There was a main effect of figures [ $F(2, 48) = 15.33$ ,  $MSE = 47316$ ,  $p = .0001$ ,  $partial \eta^2 = .20$ ]. Participants solved problems in the non-identical matching condition more quickly (2759 ms) than problems in the non-identical mismatching and identical mismatching conditions (2968 ms and 2978 ms, respectively). But more important in the context of the present study, this effect was qualified by a significant interaction between figures and consistency [ $F(2, 48) = 6.18$ ,  $MSE = 183660$ ,  $p = .004$ ,  $partial \eta^2 = .24$ ]. Pairwise comparisons using the Bonferroni adjustment indicated that although IL problems were solved more slowly than CL problems in the three figure conditions, the differences between CL and IL problems did not reach significance in the non-identical matching condition, whereas, similarly to previous studies on the consistency hypothesis, the differences were statistically significant in the non-identical mismatching ( $p = .0001$ ) and identical mismatching ( $p = .0001$ ) conditions. In addition, IL problems were solved faster in the non-identical matching condition than in the non-identical mismatching ( $p = .001$ ) and identical mismatching ( $p = .003$ ) conditions, whereas response time data for CL problems did not show differences between figures` conditions.

#### 4.2.3. Discussion

The present study was conducted to investigate whether, during arithmetic word problem solving, people use mental models that are based upon representations of magnitude. Participants solved word problems and performed a figure discrimination task. After reading a sentence that described the comparison between the quantities of two protagonists' objects, participants were faster to discriminate as different two figures if the



relationship between them, in terms of magnitude, matched the relationship between the quantities implied in the sentence.

These findings would support the hypothesis that solvers construct a mental model, which is based on the relation between the elements and represents the situation described in the text of the problem (Thevenot, 2010). It could be argued that Thevenot's (2010) study seems to be more focused on relatively long-term representations, with participants performing recognition tasks/quizzes as the primary dependent measure, whereas the present study focuses on characterizing relatively immediate, short-term representations that might prove to take on a form qualitatively dissimilar to a long-term representation. In this sense, a considerable amount of research has examined which information remains available during regular reading, and has proposed that mental models are created and constantly updated by the continual integration of incoming information within the evolving discourse representation in memory. The present experiment did not aim at addressing the nature of long-term representations but the nature and automaticity of mental models, which are generated and updated even from the sentence "*the spoon is to the left of the fork*" (e.g., Mani & Johnson-Laird, 1982). Thus, the present findings support the evidence that the evolving representation created from the relational sentence may also be considered a mental model (whether it may be updated with additional information, or not) since it simulates, in terms of two related magnitudes, the situation denoted in the sentence (as stated in the theoretical framework, this magnitude-based representation has the same characteristics that the one proposed by Johnson-Laird in his mental models' theory). In line with this argument, an arising question is whether mental representations of magnitude are coded at relatively low or high levels of analysis (i.e., the text base, propositional level, situation model level) since the results imply coding of the order of terms as they are presented in the text in a relatively simplistic and directionally-specific way (i.e., John > Mary, but not Mary < John). In this sense, if magnitudes were coded at a situation model or mental model level, then it would be expected that solvers were able to activate the relational structure as suggested by Thevenot's (2010) findings, in which paraphrastic questions (i.e., "*how many marbles does Mary have less than John?*") were more often recognized than inconsistent questions containing the wording of the problem (i.e., "*How many marbles does Mary have more than John?*"), even when they were inconsistent with the situation stated in the original question (i.e., "*How many marbles does John have more than Mary?*"). Based on a task of problem recognition after a resolution task, Thevenot's (2010) study found evidence that the mental model individuals generated was based on the relationship but not on the wording (Mary < John\_paraphrastic-Q and John > Mary\_original-Q, were both correct responses). Despite the fact that the present experiment does not allow examining the possibility that individuals may evaluate the long term mental representation and form judgments by a process of logic about the relationship between the terms (i.e.,

if John has more than Mary, then Mary has less than John), unexpectedly, our results mimic Thevenot's findings. Her results also confirmed that the long term mental representation, or mental model, constructed from the reading "*how many marbles does John have more than Mary?*" was  $\text{John} > \text{Mary}$  but not  $\text{Mary} < \text{John}$  (paraphrastic items were not so frequently recognized as original items were). Our results on the figure discrimination task would suggest that solvers' initial mental representation from the relational sentence is quite similar to the long term mental representation suggested by Thevenot. In other words, individuals activated the relational structure that underlies any mental model, as suggested by Thevenot's results. In contrast, filler trials (combine problems) did not interact with the relational structure evoked by the figure discrimination conditions (an analysis of response times on these trials showed no significant differences between figures' condition).

The present findings indicate that the construction of the mental representation is based on magnitudes, and occurs during online problem comprehension, possibly through an automatic activation process. It could be argued that activation of mental representation occurs under some level of strategic control, since each sentence describing a comparison between quantities was followed by a discrimination task. Thus, participants could have anticipated the sequence of figures during relational sentence reading. Nevertheless, this explanation is unlikely, since the use of same-different task ensured that figure discrimination was irrelevant to performance of the problem-solving task. In fact, participants reported that there was no relation between the two tasks<sup>6</sup>.

These results fit nicely with those studies that suggest that the representation of numerical magnitude may rely on a format also shared by other non-numerical magnitude dimensions (Cohen Kadosh et al., 2008; Walsh, 2003). According to this purpose, individuals possess one unified magnitude representation system serving diverse quantifiable dimensions. For instance, a typical property of numerical processing, such as the distance effect, has been reported in other non-numerical magnitude dimensions (see Cohen Kadosh et al., 2008). It has also been demonstrated that numerical and non-numerical magnitudes interact with each other. In the numerical Stroop task, participants take more time to judge either numerical size or physical size when the number magnitude and the physical size of a digit are incongruent (Schwarz & Ischebeck, 2003; see also Gebuis, Cohen Kadosh, Haan, & Henick, 2008, for a non-symbolic size congruity task). Thus, the incompatible magnitude of one task-irrelevant dimension would interfere with the judgment on the other magnitude dimension. Following the notion of a shared magnitude code underlying different quantity dimensions, the results on the discrimination task in the present study could be interpreted in terms of a

---

<sup>6</sup> Nevertheless, following a procedure proposed by Stanfield and Zwaan (2001), a post-hoc analysis showed similar match-mismatch effects in the first and in the second half of the experiment.

“within-magnitude priming” (Walsh, 2003, p. 487), that is, a cross-domain compatibility effect between the numerical task (i.e., numerical dimension) and the discrimination task (i.e., non-numerical dimension) due to the magnitude code shared by the two tasks. In other words, the processing of the relational sentence of the problem would activate a magnitude-based representation that would elicit priming effects on the discrimination task. The experimental design does not permit analyses of whether the effects were due to facilitation in the matching condition, interference in the mismatching condition, or both, given that there was no neutral control condition. Nevertheless, results obtained from studies on the numerical Stroop effect would suggest that interference effects would be more likely than facilitation effects. Since filler trials could be considered as a neutral-like condition, because they would not activate a representation based on magnitude comparison (e.g., *“Joe and Tom have 8 marbles altogether”*). An analysis of response times on these trials showed a mean of 620 ms for different figures (no significant differences between figures ‘condition). Considering that in the experimental trials the response times for matching and mismatching conditions were 615 ms and 645 ms, respectively, these results together with those obtained from studies on the numerical Stroop effect would suggest that interference effects would be more likely than facilitation effects.

Our study also adds to previous findings by demonstrating that the construction of a mental model during processing of the word problem serves as an aid to carry out the solution process.

Performance differences between CL and IL problems in the solving task were reduced when figures matched as compared to when they mismatched the mental model constructed from the relational sentence. Since problem solvers typically display a higher error rate (Hegarty et al., 1992; Hegarty et al., 1995; Lewis & Mayer, 1987; Verschaffel, 1994; Verschaffel et al., 1992) and longer response times (Hegarty et al., 1992; Verschaffel, 1994; Verschaffel et al., 1992) on IL than CL word problems, the findings of the present study suggests that facilitation effects from the provision of the matching sequence of figures might be more likely than interference effects from the provision of mismatching sequences of figures since the differences between CL and IL problems were reduced (they did not even reach significance) when figures matched the mental model constructed from the relational sentence. This result would be explained by the fact that solvers need to keep a representation of the relationship between the two variables included in the relational sentence active in their working memory, in order to perform conveniently the rearrangement procedure involved in IL problem solving. Thus, when the remainder of information of the problem is read, the solver must tie the known and unknown quantities, and plan his or her solution on such representation. In this way, an active mental representation of magnitude would aid in this process, allowing the solver to quickly tie information being

processed to the information held in the working memory. Note that this process is even more necessary for IL than CL problems, given that the former require more processing for solvers. For instance, Hegarty et al. (1992; see also Verschaffel et al., 1992) collected response-time and eye-movement data on adults solving compare problems. Their results showed more time and more re-readings for IL than for CL problems. According to Hegarty et al. (1992), this additional time would be spent on re-reading information relevant to constructing a mental representation of the situation described in the problem, possibly because the relational term primes a relation that is the opposite of the relation between the quantities in the described situation. The results of the present experiment are in accordance with those of Hegarty et al. (1992), since IL problems were solved more slowly than CL problems. However, and more important in the context of the present study, the finding that IL problems were less error prone and solved faster in the matching condition than in the mismatching conditions would suggest that a mental representation, based on magnitudes, of the relations in the problem would reduce the working memory's demands motivated by the additional processing involved in IL problem solving, therefore, enabling information integration in a coherent mental model.

Nevertheless, this study is not the first to demonstrate that a mental model based on magnitudes helps individuals to solve IL problems. Lewis (1989) found that training less successful college students to construct a representation of the relations in the problem improved performance on IL problems. In this case, the mental model was characterized as magnitudes on a number line. That is, the position of the elements of the situation described in the problem on a number line represented its magnitude. Results from Lewis' (1989) study emphasize the relevance of constructing mental models that represent the situation described in the problems. Our study provides further support for this view by showing that such mental models are routinely activated during problem solving, at least for successful problem solvers who translate the problem statement into a qualitative mental model that might be based on magnitudes.

### 4.3 STUDY TWO

This study was also designed to test the hypothesis stated in this Thesis Dissertation, namely, whether mental models constructed during word problem solving involve some kind of perceptual representation based on magnitude. However, in contrast to Study One we used an indirect approach based on the idea that the effectiveness of external representations accompanying a text depend on the way they support the mental model individuals construct from such text. In this sense, we designed the experiment to explore how magnitude-based external representations may

enable arithmetical word problem solving by depicting the structure of the problem, which is essential in the mental model constructed by individuals. In addition, since the effectiveness of external representations is closely tied to, firstly, the cognitive demands imposed by the information conveyed by the external representation; and secondly, individuals' working memory capacity in dealing with the cognitive load imposed by the condition of presentation, then, working memory moderating effects will be explored.

Surprisingly, most of the available research on multimedia learning concentrates on text comprehension, whereas other higher-level cognitive tasks have received much less attention. In this context, most literature on word problem solving with external representations has found contradictory results when presenting external representations. For example, the studies of Berends and van Lieshout (2009), and Elia, Gagatsis, and Demetriou (2007) about illustrations' influence on arithmetical word problem solving showed that illustrations could have a detrimental effect on performance. These findings are in line with several studies that found negative effects of perceptually rich symbols (e.g., Goldstone & Sakamoto, 2003; Sloutsky, Kaminski, & Heckler, 2005; Sweller, 1994; Uttal, Liu & DeLoache, 1999). But they also call attention on the fact that, despite the effectiveness of instructional programs based on schematic representations, which emphasize the underlying mathematical structure of the problem, the bulk of non-instructional studies related to arithmetic word problem solving with external representations have been based on non-schematic representations (i.e., pictures or illustrations embedded in more or less life-like contexts). These non-schematic external representations have tried to "picture" the story denoted in the text of the problem. In other words, despite how much they resemble the reality, they have tried to depict the story told in the problem in a more or less picture-like (e.g., illustration) fashion. For example (see Berends and Van Lieshout, 2010), given a certain problem "*There were 18 people on the bus. Four people got out. How many people are now on the bus?*", depictions usually represent a more or less realistic-detailed bus.

In the present study, we used standard arithmetic word problems involving a comparative structure (c.f., Riley et al., 1983) that would lead solvers to construct mental models based on the comparative relation between the elements. Therefore the first goal of the current study was to determine whether a schematic external representation that preserves explicitly this relation, would enhance arithmetic word problem solving under different conditions of presentation. Textually and verbally presented arithmetic word problems accompanied by simple schematic representations of the relation between the quantities of the characters (i.e., an abstract graphic depicting the difference between two magnitudes) should produce the best performance outcomes. This external representation would enable mental model construction, which becomes essential in the task, by representing the

comparative relation (i.e., two different magnitudes). Hence, the process of structure mapping between depictions and wording is facilitated, firstly, because the main information conveyed by the external representation relates to a comparative structure which is subsequently constructed during problem solving; and secondly, because no additional depicted information requires an extra processing intended to extract meaning. This effect is expected to be larger for inconsistent language problems that are considerably more difficult than consistent language problems (e.g., Hegarty et al., 1995; Verschaffel, 1994; Verschaffel et al., 1992). IL problem solving should be faster and less error-prone in the conditions associated with graphic presentation than in the conditions with no graphic presentation since the external representations conditions would help individuals to shift the elements and the relation between them while they still maintain activated the situation mentioned in the wording of the problem (for a similar argument, see; Discussion Section\_Study One on p. 89).

Since adding external representations to the problem places specific demands on working memory resources for, firstly, extracting meaning from such representations (i.e., searching for relevant elements and identifying the relevant relations between the elements within the depiction), and secondly, how the different sources of information are presented (i.e., working memory has to deal with different sources of information by switching attention between two different physical sources and integrating such sources), the second goal of the present study was to evaluate potential working memory moderating effects on the effectiveness of this type of external representation. In this sense, the influential *Cognitive Load theory* (Sweller et al., 1998; Van Merriënboer & Sweller, 2005) has served as a theoretical frame to overcome individual working memory limitations by instructional manipulations. The main objective has been to manage effective cognitive load (i.e., intrinsic load imposed by the task and both, extrinsic and germane load, imposed by the manner in which the information is presented). According to that, the working memory capacity can effectively be expanded, for example, if to be-learned graphical information (e.g. a diagram) is presented visually, and is subsequently processed in the visual cache, and the associated textual information is presented auditorily, and is subsequently processed in the phonological loop). In other words, external representations might require instructional manipulations that reduce the cognitive load and allow allocating cognitive resources to map the highly interactive information between sources of information. Therefore, working memory moderating effects were expected since solvers with low working memory span should profit to a larger extent from conditions associated with low cognitive load, whereas learners with high span should be better able to deal with cognitively demanding formats. We also expected this effect to be larger for inconsistent language problem.

### 4.3.1.-Method

#### 4.3.1.1.- Participants

Participants were fifty students from a public secondary school in a middle-class suburb. One student diagnosed with language/learning problems was excluded from the analyses. The average age of the remaining forty-nine students (17 women and 32 male) was 15.7 years (SD = 7.8 months).

#### 4.3.1.2.- Materials

- Arithmetic word problems

All participants were presented with 48 arithmetic word problems including four different conditions of presentation: text only, text + graphic, narration only, and narration + graphic. Problems across conditions were equivalent problems (i.e., conceptually identical except for some differences in wording such as characters' names, quantities, situations, and actions) in order to avoid, firstly, arithmetic-related differences between conditions; and secondly, subjects' awareness about solving identical problems across different conditions. These problems correspond to Compare 3, 4, 5 and 6 in Riley, et al.'s (1983) classification. All the problems began with one sentence that introduced the relational statement, for example, "*Mary has 5 candies more than Tom*", where the subject is Mary and the referent is Tom. The next sentence presented the known variable. One of two known variable was presented: consistent version or inconsistent version. The consistent version presented the referent of the first sentence (i.e., "*If Tom has 4 candies*") as the known variable, therefore, the relational term (i.e., more than) was consistent with the necessary operation to solve the problem (i.e., addition). The inconsistent version presented the subject of the first sentence (i.e., "*If Mary has 7 candies*") as known variable, and therefore, the required operation (i.e., subtraction) was the reverse operation primed by the key word of the relational statement (i.e., "more than"). Following the second sentence was the question of the problem. One of two questions was presented: simple or complex. The simple question involved one operation to solve the problem and was related to the unknown variable (e.g., *How many candies does Tom/Mary has?*). The complex question involved two operations to solve the problem and was related to the characters' total amount (e.g., *How many candies do they have altogether?*).

In order to eliminate individual differences regarding calculus a verification task of the equation that solved correctly the problem was used. Since most problem solvers have more difficulty constructing a useful problem representation, the verification task allows evaluating such process leaving apart the computational procedures. In each condition of presentation, half of the problems required addition, the other half required subtraction to produce the correct answer. Both the addition and subtraction problems involved large addends/minuends (e.g.,  $27 + 15$ ;  $48 - 26$ ). Half of the problems involved one operation; the other half involved two operations to produce the correct

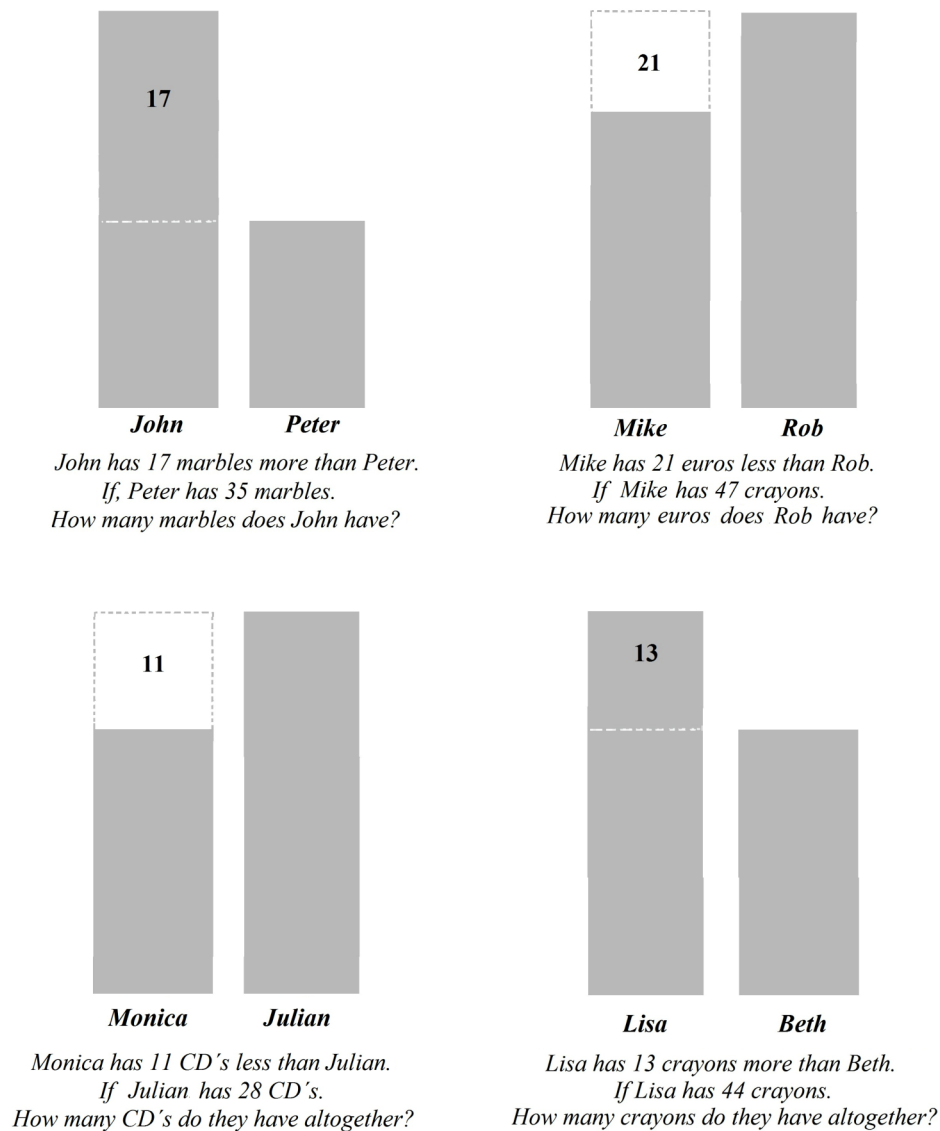
answer. Half of the problems were consistent language problems, the other half were inconsistent language problems where the required operation was the reverse operation primed by the key word (Lewis & Mayer, 1987). Thus, in each condition of presentation four different types of problems were generated (i.e., consistent problem/one operation; consistent problem/two operations; inconsistent problem/one operation; and, inconsistent problem/two operations). The order of the problems was randomized in every condition. Half of the problems required a Yes answer. The other half required a No answer. False answers were associated to the reverse operation required to solve correctly the problem (e.g., *John has 17 marbles more than Peter. If, Peter has 35 marbles. How many marbles does John have?* [ $17 + 35$ , true;  $17 - 35$ , false]; or, *Lisa has 13 crayons more than Beth. If Lisa has 44 crayons. How many crayons do they have altogether?* [ $(44 - 13) + 44$ , true;  $(44 + 13) + 44$ , false]).

To accomplish a balanced design, four different computer-based applications were made. Thus the set of problems presented as text only in presentation no. 1, was presented as text + graphic in presentation no. 2; narration + graphic in presentation no. 3; and as narration only in presentation no. 4. Condition order was randomized within and across participants every time the computer-based application was presented.

- External representations

Depictions used in conditions text + graphic and narration + graphic were two grey bars (420 pixels wide) that differed in height to support the relation between the elements of the problem. They were presented together with their corresponding text or simultaneously with their corresponding narration. The information conveyed by the representation included just the name of the characters and the digit expressing the difference between them. No additional graphical or lexical information to the text/narration was presented in the external representation (see Fig. 4.3). External representations were displayed immediately above the sentence and remained on screen during the first two sentences. It should be noted that the external representations proposed in the current study did not display per se the correct solving procedure. Previous mapping of the information presented textually or verbally was required to initialize any solving procedure.





**Figure 4.3: Examples of the four types of external representations included in the study**

#### 4.3.1.3 Learner-related factors

- WM measures

We assessed verbal working memory span via the Digit Span task. The task is an adaptation of the WISC-IV digit span subtest (Wechsler, 2003). In the first part of this task (Forward), students listened to 14 sequences of digits with a minimum of 4 digits and a maximum of 10. After hearing a sequence, participants were asked to write down the digits in the correct order. Two sequences were presented for each span size. The first span size employed was four; the next was five and so on, up to 10 digits. In the second part of the task (Backward), students listened to 14 sequences of digits with a minimum

of 4 digits and a maximum of 10. After hearing a sequence, participants were asked to write down the digits, but this time in reversed order. The total number of completely and perfectly repeated sequences was used as measure of each digit span task. We used the sum score of both parts as a measure of verbal working memory capacity.

Visual working memory was measured using the visual matrix span task that tapped ability to co-ordinate simultaneous storage and processing of visual information (cf., Swanson, 1992). Participants were presented a number of dots in a matrix. The task was to remember the location of the dots in the matrix. Thirty-two matrices were presented. One matrix at a time was displayed on a computer screen for 5 seconds. Two different matrices were presented for each span size. Complexity increased for each new span either by increasing the size of the matrix or increasing the number of dots. The first span size employed included two dots in a 2 x 3 squares matrix. The same scoring procedure as in the digit span task was used.

We also assessed arithmetical fluency via performance on two subscales of standard achievement tests: Thurstone's Differential Aptitude Test (numerical reasoning "NR"), and Thurstone's Primary Mental Abilities (intelligence factor "N"). Both tests were paper-and-pencil tests. The first one involved a multiple aptitude battery designed to measure student's ability to learn or to succeed in mathematics. Speed and accuracy in making school-related mathematics' task was required. The second one consisted of written multi-digit addition problems (e.g.,  $48 + 59 + 17 + 16 = 150$ ). Speed and accuracy in making arithmetic computations was required. The sum score of both tests was used as a measure of arithmetic fluency. Data regarding arithmetic fluency was not included in the final analysis. They were just used to validate that each subject's mean arithmetic fluency was no more/less than two standard deviations of the sample's mean.

#### 4.3.1.4.- Procedure

The computer-based application played the narration or displayed the sentences one at a time in black on a white background on a 15-inch-screen laptop running with Superlab software. A sequential procedure of presentation was used in order to avoid participants to re-read previously presented sentences, thus, making narration and text conditions similar. Participants pressed the space bar once they had read/heard the sentence and wanted to display/hear the next one. In order to minimize differences in time allowed to read and process every sentence, the narration only and narration + graphic conditions allowed limitless "play the sentence again" by pressing one key. After reading/hearing the second sentence, participants pressed the space bar and the question of the problem was displayed on screen for all conditions of presentation. By pressing again, a yes/no screen for all conditions displayed the equation to solve the problem. Then, participants

had to decide whether or not the equation solved the problem by pressing the key assigned to Yes or No. RT's data was measured from the onset of the question to the participant's key press. The computer-based application was run in group sessions with up to 6 participants. In addition, they were encouraged to respond as quickly and as accurately as possible. Explanatory instructions were set before starting the computer-based application. Headsets were required while in-session. Two practice items preceded each condition and required a correct answer by displaying a "correct/repeat again" feedback, before presenting the next problem. Participants were allowed a self-timed break before starting each new condition.

Each test regarding learner-related factors was administered in a separate session; four group test sessions and an individual test session. The following tasks were administered in group test sessions: Thurstone's DAT, Thurstone's PMA, forward digit span task and the visual matrix span task. The tasks in the group sessions were administered in groups of 15-17 students. The individual test session included the backward digit span task. All instructions regarding the tasks were presented orally.

#### 4.3.2 Results

There were 30.5 % of incorrect responses. Regarding response time (RT) analysis, from the remaining correctly answered data, 1.27% were excluded as outliers deviating more than 2.5 standard deviations from a participant's cell means per condition, with no significant differences between conditions.

##### 4.3.2.1 Effectiveness of External Representations

To test this effect, a completely within subjects design 4 (condition of presentation: text only, text + graphic, narration only, narration + graphic) by 2 (language consistency: consistent, inconsistent) by 2 (complexity: one operation, two operations) repeated measures ANOVA was completed for error rate and RT data. Means and standard deviations are reported in Table 4.2.

	Errors %				Response time ms.			
	Consistent language		Inconsistent language		Consistent language		Inconsistent language	
	1-op	2-op	1-op	2-op	1-op	2-op	1-op	2-op
Text-only	.14 (.19)	.50 (.33)	.31 (.31)	.54 (.30)	4688 (557)	5773 (990)	5653 (1206)	6854 (1360)
Text+graphic	.04 (.14)	.29 (.34)	.19 (.24)	.34 (.28)	4619 (713)	5453 (752)	5237 (778)	6135 (824)
Narration-only	.17 (.25)	.50 (.31)	.39 (.24)	.55 (.30)	5266 (745)	6318 (1345)	6017 (849)	7247 (1089)
Narration+graphic	.11 (.19)	.28 (.29)	.14 (.20)	.33 (.28)	4778 (847)	5768 (995)	5381 (775)	6290 (1026)

**Table 4.2: Mean (and standard deviation) error rates and RT by condition of presentation.**

- Errors

All main effects were significant in this analysis. Participants made more errors on word problems presented in inconsistent language than on word problems presented in consistent language (.35 vs. .25, respectively) [ $F(1, 48) = 18.37$ ,  $MSE = .102$ ,  $p = .0001$ , partial  $\eta^2 = .27$ ]. Error rate also varied with complexity (one operation .19 vs. two operations .42) [ $F(1, 48) = 63.76$ ,  $MSE = .163$ ,  $p = .0001$ , partial  $\eta^2 = .57$ ]. But more important in the context of the present study, external representations had a facilitative effect on arithmetic word problem solving whether presented with text or narration (text only .37; vs. text + graphic .21; vs. narration only .40; and vs. narration + graphic .21), [ $F(3, 144) = 40.76$ ,  $MSE = .048$ ,  $p = .0001$ , partial  $\eta^2 = .45$ ]. Comparisons using the Bonferroni adjustment with  $p < .05$  showed that participants performed significantly better when text and narration were presented together with external representation. However, no statistical differences were found between them. Thus, the facilitative effect was not due to any reduction in cognitive load by presenting information in different sensory modalities. No additional effects were found.

- Response time

The corresponding analysis of RT presented a similar pattern as that in the error rates analysis. All main effects were significant. Participants solved word problems presented in inconsistent language more slowly than word problems presented in consistent language (5333 ms vs. 6102 ms, respectively) [ $F(1, 48) = 205.9$ ,  $MSE = 562851$ ,  $p = .0001$ , partial  $\eta^2 = .81$ ]. RT also varied with complexity (one operation 5205 ms vs. two operations 6230 ms) [ $F(1, 48) = 290.8$ ,  $MSE = 707881$ ,  $p = .0001$ , partial  $\eta^2 = .85$ ]. Again, RT data confirmed our first prediction. External representations had a facilitative effect allowing faster answers (text only 5742 ms; vs. text + graphic 5361 ms; vs. narration only 6212 ms; and vs. narration + graphic 5554 ms), [ $F(3, 144) = 27.9$ ,  $MSE = 930623$ ,  $p = .0001$ , partial  $\eta^2 = .36$ ]. Comparisons using the Bonferroni adjustment with  $p < .05$  showed no differences between the conditions that presented external representations.

There was a significant interaction between condition of presentation and language consistency [ $F(3, 144) = 3.91$ ,  $MSE = 528052$ ,  $p < .02$ , partial  $\eta^2 = .07$ ]. Comparisons using the Bonferroni adjustment with  $p < .05$  indicated that the differences between consistent and inconsistent problems were significant for all conditions of presentation; however, the differences between consistent and inconsistent problems were smaller in conditions that included external representations [text only 1023 ms ( $\eta_p^2 = .55$ ); vs. text + graphic 650 ms ( $\eta_p^2 = .23$ ); vs. narration only 840 ms ( $\eta_p^2 = .55$ ); and vs. narration + graphic 562

ms ( $\eta_p^2 = .22$ ). This result would suggest that the facilitative effect of external representations is magnified in inconsistent language problems, which require clarifying the relation between the terms of the problem in order to avoid semantic/arithmetic misinterpretations

#### 4.3.2.2 WM Moderating Effect

To examine the relevance of verbal working memory (VWM) and visual working memory (ViWM) on the effectiveness of this type of representation, we conducted separate repeated measures ANCOVA with performance on each working memory span task (verbal and visual) as a covariate, on error rates and RT. For each ANCOVA the design was a 4 (condition of presentation: text only, text + graphic, narration only, narration + graphic) by 2 (language consistency: consistent, inconsistent) by 2 (complexity: one operation, two operations).

- Errors

After entering VWM span, language consistency was not significant anymore [ $F(1, 47) = 1.82$ , ns.]. The main effects of complexity [ $F(1, 47) = 27.79$ ,  $MSE = .131$ ,  $p = .0001$ , partial  $\eta^2 = .37$ ] and condition of presentation [ $F(3, 141) = 4.85$ ,  $MSE = .047$ ,  $p = .003$ , partial  $\eta^2 = .09$ ] remained significant. Regarding ViWM, the ANCOVA revealed that all main effects remained significant, language consistency [ $F(1, 47) = 5.59$ ,  $MSE = .101$ ,  $p = .02$ , partial  $\eta^2 = .11$ ], complexity [ $F(1, 47) = 26.52$ ,  $MSE = .143$ ,  $p = .0001$ , partial  $\eta^2 = .36$ ], and condition of presentation [ $F(3, 141) = 6.09$ ,  $MSE = .048$ ,  $p = .001$ , partial  $\eta^2 = .11$ ]. Thus, external representations had a facilitative effect on arithmetic word problem solving after removing any variability that might be accounted for by differences in working memory.

- Response time

Regarding VWM, the ANCOVA revealed that the main effects of language consistency [ $F(1, 47) = 46.09$ ,  $MSE = 445492$ ,  $p = .0001$ , partial  $\eta^2 = .50$ ] and complexity [ $F(1, 47) = 11.09$ ,  $MSE = 722938$ ,  $p = .002$ , partial  $\eta^2 = .19$ ] remained significant.

Although the main effect of condition of presentation did not achieve the standard levels of significance, the interaction between condition of presentation and language consistency remained significant [ $F(3, 141) = 4.22$ ,  $MSE = 507691$ ,  $p = .007$ , partial  $\eta^2 = .08$ ]. After entering ViWM the main effect of language consistency [ $F(1, 47) = 58.61$ ,  $MSE = 472198$ ,  $p = .0001$ , partial  $\eta^2 = .55$ ] and complexity [ $F(1, 47) = 15.43$ ,  $MSE = 703291$ ,  $p = .0001$ , partial  $\eta^2 = .24$ ] remained significant, whereas condition of presentation [ $F(3, 141) = 2.33$ ,  $MSE = 944413$ ,  $p = .07$ , partial  $\eta^2 = .04$ ] and the interaction between condition of presentation and language consistency [ $F(3, 141) = 2.19$ ,  $MSE = 528595$ ,  $p = .07$ , partial  $\eta^2 = .04$ ] remained marginally significant.

### 4.3.3 Discussion

This study investigated the role of external representations on arithmetical word problem solving as an indirect approach to test the hypothesis that states that mental model construction during arithmetic word problem solving is based on magnitude.

The main findings from the study are that (i) external representations that depict the relation between the quantities of the characters had a facilitative effect on a cognitive demanding task; and (ii) unexpectedly, working memory was not predictor of the effectiveness of this type of external representations under different conditions of presentation.

Since external representations are effective by helping individuals to construct mental models, the findings of the present experiment support the idea that mental models might be based on magnitude.

#### 4.3.3.1 Effectiveness of External Representations in Arithmetical Word Problem Solving

The first goal was to determine the effectiveness of magnitude-based external representations on arithmetical word problem solving. Although there is a sizeable body of research literature concerned with the effectiveness of external representations in learning, there are some concerns regarding whether this effect is helpful in arithmetical word problem solving (e.g., Berends & Van Lieshout, 2009). The cognitive requirements of problem solving with external representations (i.e., solvers have to detect relevant information within representations while they try to relate external representations both between them and the corresponding mental model) might overburden solvers' cognitive capacities resulting in inadequate problem solving. In the current work, students were more accurate and faster when the problems were presented together with external representations that preserved explicitly the information related to the relations between the quantities of the characters.

This finding suggests that the representational notation fosters problem solving since it matches the relevant relations between the elements within the problem (i.e., the mental model individuals construct from such problem). Thus, activating such comparative relation would cue mental model construction, and consequently, it would facilitate the subsequent encoding and integration of the information in such mental representation. Therefore, it might facilitate students to process the mathematical information more easily by enabling them to inspect the most central elements depicted in the external representation.

It has been demonstrated in previous research that inconsistent language problems (i.e., the required operation is the reverse operation primed by the semantic relational term) lead children to make more errors (e.g., Lewis &

Mayer, 1987; Morales, Shute & Pellegrino, 1985; Riley et al., 1983; Verschaffel, 1994). Our results showed that the facilitative effect of external representations was magnified when solving inconsistent problems. One possible explanation might be that placing external representations that depict the comparative structure of the problem, would activate the necessary relation between the elements before the activation of addition or subtraction procedures based on the semantic term of the first sentence of the problem (e.g., *“John has 17 marbles more than Peter. If John has 45 marbles. How many marbles, do they have altogether?”*). Thus, this activation might prevent students, for example, to subtract when the semantic term is more than, because the depiction explicitly shows the relation between the elements which is the backbone of the mental model individuals construct during the task. Similarly, Thevenot, Devidal, Barrouillet and Fayol (2007) found that placing the question before the text of a problem was even more facilitating for more difficult problems (i.e., compare problems) since solvers are directly informed of the relation between the two quantities, and, in the case of difficult problems, individuals no longer engaged erroneously in the construction of a representation. This evidence was assumed as a facilitatory effect of the question in order to construct the mental model.

#### 4.3.3.2 WM Moderating Effect

The second goal was to examine the relationship between working memory and the facilitative effect of this type of external representations. Different studies have documented this relation since the effectiveness of external representations depends also on working memory capacity to deal with different sources of information and also with the information conveyed by the external representation. Surprisingly, the present results indicate that working memory capacity has no moderating effect on the effectiveness of magnitude-based external representations that depict the structure of the problem. Both, visual and verbal span variables showed similar patterns, and error rates and response times confirmed this assumption. This finding can be explained in terms of computational offloading (i.e., the extent to which different external representations reduce the amount of cognitive effort required to solve equivalent problems; Ainsworth, 2006). The external representation would facilitate the process of structure mapping by depicting relevant information to construct the mental representation. In other words, the process of structure mapping easily matches corresponding features (e.g., the relation between magnitudes) and structures (e.g., the mental model solvers construct from the wording of the problem). Hence, subjects may allocate more cognitive resources to process information related to the characters once the relation between them has been enabled. In this sense, the limited cognitive resources may be allocated at the solving process instead of being allocated to an extra processing related to map additional depicted information. In other words, the type of external representation proposed in

this study enhances the salience of the corresponding mental model constructed from the text of the problem resulting in less information to process. Given the computational offloading, performance would be exclusively related to arithmetic abilities, which are moderated by working memory capacity (DeStefano & LeFevre, 2004).

This type of external representation would not demand additional processing to detect and process information further from the necessary information to depict the relation between the quantities. In this sense, referring to abstract schematic figures (i.e., diagrams) in expository texts, Levin and Mayer (1993) argued that perceptual clarity and conciseness of the visual representation of the text reduces the cognitive requirements, thereby facilitating higher order reasoning. Therefore, external representations could facilitate arithmetic word problem solving by enabling mental model construction, which is cognitive demanding for both, high and low, span subjects.

Whereas working memory was not predictor of the effectiveness of external representations, it was predictor of information management. In other words, the findings on error rate indicate that the ability to solve correctly inconsistent problems would depend on verbal working memory capacity. This result is in line with different studies that suggest an influence of working memory capacity on the ability to manage high interactive materials (Sweller, 2010). Moreover, it is in line with Lewis and Mayer (1987) who assumed that solvers prefer problems presented in a consistent format and, therefore, re-arrange inconsistent problems in their preferred format (for empirical support, see also Verschaffel et al., 1992). This further step would involve a higher cognitive processing that would overburden low span subjects. Nevertheless, the lack of working memory moderating effect on the interaction between condition of presentation and language consistency reinforces the role of this type of external representation, since the cognitive effort imposed by re-arranging inconsistent problems would be smaller. Hence, low working memory span subjects would not experience such cognitive overload.

The present finding also confirmed that decreasing the cognitive load working memory has to deal with (by presenting information in two different sensory channels) was unnecessary. Integrating different sources of information did not lead to overburden the limited working memory capacity. In other words, if the central element (i.e., the relation between the terms) is made explicit by the external representation, then holding the current problem state, the goal state, any sub-goal states, and the relations between these states in working memory would not require expanding working memory capacity through different sensory modalities. Some concerns may arise about this finding since there is no reason to observe facilitating effects due to cognitive load reduction (i.e., modality effect) if the task and condition of presentation



do not overload WM capacity (similarly, the limited capacity of the episodic buffer might play a greater role under circumstances that do not overload the phonological and visuo-spatial stores). However, since increasing the amount of information a problem solver has to hold and process in memory is equivalent to increasing the cognitive load requirements, we might assume individuals' working memory to be filled up when they tried to solve the hardest problems (i.e., inconsistent language problems with two operations) in conditions of presentation that also involve a higher cognitive load (text + graphic). Data showed that this type of problems increased subjects' error rates in the text + graphic condition (from .04 in consistent language problems with one operation, up to .34). The present results did not show significant differences between text + graphic and narration + graphic conditions at this level, which confirmed that the type of information conveyed by the external representations might be another valuable option to reduce the cognitive load.

Although the present study has yielded remarkable findings, some caveats need to be noted since the effects found in the present study might depend on the problems we used. The limited information included in the text of the problems might influence the extent to which working memory capacity moderates the effectiveness of additional depicted information. In this sense, complex word problems including authentic or realistic story contexts might rely on working memory capacity to update the mental model created from the incoming information. Consequently, working memory capacity might determine whether external representations accompanying such problems are correctly mapped according to the updated mental model. An arising question would relate to the final mental model individuals construct and update from this type of authentic or realistic problems. Do individuals construct a complex mental model including different temporal and causal dimensions or a simple one that includes just the relation between the elements? Therefore, should external representations reflect the different dimensions or just the relation? Since there is no a straightforward answer to this question, additional research should be carried out to explore whether the effect described in the present study would hold for other more complex authentic or realistic problems.



# CHAPTER V

## CONCLUSIONS AND FUTURE WORK

Researchers have claimed that situation models may not be propositional as are their complementary representations –the surface structure and the textbase—but instead may be image-like or have perceptual components (Ericsson & Kintsch, 1995; Glenberg et al., 1987; Johnson-Laird, 1983). Recently, the argument has been made that comprehension entails indexing words to objects that are represented as perceptual symbols stored in memory. These perceptual representations determine a way for the reader to envision the interaction of these objects that the text is describing (Barsalou, 1999; Glenberg & Robertson, 1999). In this context, this Thesis Dissertation has presented a theoretical framework that supports the design, and development of two empirical studies in order to demonstrate how magnitude-based mental models are routinely activated during standard arithmetic word problems involving a comparative structure. This hypothesis and the experimental design do not rule out the possibility that mental models are ultimately propositional in nature.

Recent studies in human neuroimaging, primate neurophysiology, and developmental neuropsychology indicate that the human ability for arithmetic has a tangible cerebral substrate. Pathologies of this area, lead to acalculia in adults or to developmental dyscalculia in children. The same cerebral substrate is involved in magnitude processing. Different empirical studies suggest that mental model construction during arithmetic word problem solving would depend on the experience with the processing of magnitude information for quantities. In this line, the present findings do suggest that visuospatial processes are engaged during mental model construction, and these data do not indicate that mental models are image-like. In this sense, many situation model researchers have argued that it is unrealistic to believe that readers construct “lifelike” mental representations (McKoon & Ratcliff, 1992; Zwaan & Radvansky, 1998). Generating a detailed mental image of a situation described by a text would require much time and effort, and this would be inefficient for a level of representation that needs to be fluid in order to execute algorithms on this mental representation. However, creating a representation that uses magnitude-based perceptual symbols to represent certain protagonists’ amounts, or relations between different amounts is consistent with the nature of mental models.

The results of both studies provide converging evidence for the assumption that, during problem solving, solvers construct a mental

representation whose structure is analogous to the relational structure of the situation described in the problem (Thevenot, 2010; Thevenot & Oakhill, 2005, 2006). Although the mental representation constructed may have different formats such as continuous quantities, number line, or even discrete quantities (e.g., Butterworth, 2010), we assume that its nature is based on magnitudes. That is, solvers mentally represent (or simulate) not only the magnitude involved in number processing but also the relationship between the variables described in the situation evoked in the problem.

The present findings also indicate that once solvers read the relational sentence of the problem, mental models are generated automatically. Although mental models are continuously updated until the end of the reading task, it seems feasible that the initial magnitude-based representation could be arrayed automatically in a similar way to that of the finally updated mental model.

From a theoretical perspective, the findings add to a growing body of literature that emphasize the experiential view of language comprehension, according to which comprehension entails establishing an analogue relationship between the text and the reader's perceptual experiences. There is converging evidence that perceptual information such as shape, orientation, or colour is activated while people process words, sentences, or texts (see Zwaan, 2004, for an overview). This activation reflects a mental simulation associated with experiential traces of the referential situation that an individual has encountered in the past. Much like colour or shape, numerical magnitude is a basic feature of the environment to which individuals appear to attend (Piazza, 2010) and emerges early in human development (Xu & Spelke, 2000). This awareness of numerical magnitude is thought to serve as a foundation on which symbolic numerical thinking is built. There is evidence to suggest that the development of the ability to represent and process numerical symbols (such as number words and Arabic numerals) is grounded on these pre-existing magnitude representations (see Ansari, 2008, for a review). In the course of learning, when children are first being introduced to formal arithmetic, mental representations of numerosity are strongly related to physical quantity representations. Children construct external representations using objects or fingers to count sets, to manipulate these sets (combining, adding, comparing...), or to calculate. Thus, children can accumulate a lot of experiences with these external representations on which the numerical symbols are mapped, so that these experiences, which closely bound to perception and action, might leave experiential traces that could be reactivated during numerical processing. Several recent studies have shed light on this association between numbers and sensorimotor interactions with environment, reporting influence of finger counting habits on processing of Arabic numbers (Domahs, Moeller, Huber, Willmes, & Nuerk, 2010) or effects of numerical magnitude on grasping movements (Lindermann et al.,

2007; Moretto & di Pellegrino, 2008). Although these studies have focused on action/motor domain, there is no reason to suspect that, as in language comprehension, perceptual representations, in this case based on magnitudes, would not be reactivated during numerical information processing in the context of word problem solving, since magnitude representation of numbers is shared with other non-numerical magnitude dimensions and it is a characteristic dimension of information that a word problem refers to. The additional finding that the discrimination task influences on computations (Study One) has the interesting implication that magnitude representations may be commensurable on some level. Regarding this possibility, Barth, Kanwisher, and Spelke (2003) provided strong evidence that abstract numerical quantity representations are computationally functional and may provide a foundation for formal mathematics. Nevertheless, this approach in terms of perceptual simulation that may be commensurable when processing and solving word problems is a tentative hypothesis that would need further investigation.

From an applied perspective, the results of both experiments could offer useful educational implications. There seems to be a growing consensus that individual differences in the capacity to represent and process numerical magnitude are an important predictor of achievement in mathematics (Holloway & Ansari, 2009). In addition, processing of numerical magnitude is affected in children who present difficulties in learning about numbers and arithmetic (Butterworth, 2005; Wilson & Dehaene, 2007). These findings have provided empirical support for the use of new remediation methods based on intensive training on tasks such as numerical comparison, and tasks to reinforce links between non-symbolic and symbolic representations of numerical magnitude (e.g., Butterworth & Laurillard, 2010; Wilson et al., 2006). The finding that solvers create mental models based on magnitudes give us clues on how to improve the format in which word problems are presented, especially considering that word problems are often accompanied by illustrations that have little or nothing to do with problem solving. Thus, if successful problem solvers construct mental models based on magnitudes to solve arithmetic word problems, then one should be careful with presenting unrelated visual representations. In this sense, the findings in Study Two indicate that presenting the problems accompanied by external representations reflecting the situation described in the problems, in terms of magnitudes, might help children to integrate the information in a coherent mental model. Interestingly, these external representations could be generalized to a broader range of problems. For instance, in a problem involving a change from an initial to a final state through the application of a transformation (the so-called Change problems, see Riley et al., 1983; e.g., “John has lost 5 marbles in a game; if now John has 8 marbles, how many marbles did John have before the game?”) the situation could be reflected by an external representation in which the magnitude of the initial state (the

unknown variable) would be greater than the magnitude of the final state (see Vicente et al., 2008).

In addition, whereas realistic representations may have a negative effect on word problem solving by imposing additional cognitive processing (i.e., subjects have to inspect and update the relevant information to construct the mental model of the problem while suppressing irrelevant information), any representation supporting explicitly the mental model of the problem may help to reduce the cognitive processing (i.e., subjects do not have to suppress irrelevant information but to map the relation between the terms). This approach would help students to integrate the information conveyed by the problem into a coherent mental model. Furthermore, the lack of modality effect reported in Study Two might be due to an effective external representation. Nevertheless, this approach would need further investigation in which alternative external representations should be explored under different cognitive load conditions. The lack of WM moderating effects also suggests additional multimedia learning research according not to the wide explored phonological and visuo-spatial capacities, but to certain working memory functions such as updating-inhibiting-shifting, which have been suggested as necessary to solve more complex problems that involve larger texts.

These results call attention to the need to broaden the goals of instructional designers of external representations. The design should be guided by the goal of presenting information that is relevant for mental model construction which can lead to depictions where working memory is less likely to become overloaded. This fact is relevant when children are first being introduced to formal arithmetic since the cognitive effort is high and they used to construct external representations using objects or fingers to count sets, to manipulate these sets (combining, adding, comparing...), or to calculate. In this sense, this type of external representations might be successfully adapted to teach introductory arithmetic since they might support constructing the required mental representations and their inter-relations

We have taken the first step in growing this idea.

**REFERENCIAS**

**BIBLIOGRÁFICAS**





- Ainsworth, S. (1999). The functions of multiple representations. *Computers and Education*, 33(2-3), 131-152. doi:10.1016/S0360-1315(99)00029-9
- Ainsworth, S. (2006). DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and Instruction* 16, 183-198. doi:10.1016/j.learninstruc.2006.03.001
- Ainsworth, S., Bibby, P., & Wood, D. Evaluating principles for multirepresentational learning environments. Paper presented at the 7th European Conference for Research on Learning and Instruction, August 1997, Athens.
- Anderson, J. R. (1978). Arguments concerning representations for mental imagery. *Psychological Review*, 85, 249-77.
- Ansari, D. (2008). Effects of development and enculturation on number representation in the brain. *Nature Reviews Neuroscience*, 9, 278-291.
- Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 215-241. doi:10.1023/A:1024312321077
- Baddeley, A. D. (1986). *Working memory*. New York, NY: Clarendon Press/Oxford University Press.
- Baddeley, A. D. (2000). The phonological loop and irrelevant speech effect: Some comments on Neath (2000). *Psychonomic Bulletin & Review*, 7, 544-549.
- Baddeley, A. D. (2002). Is working memory still working? *European Psychologist*, 7, 85-97.
- Baddeley, A. D., Emslie, H., Kolodny, J., & Duncan, J. (1998). Random generation and the executive control of working memory. *Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 51A, 818-852.
- Baddeley, A. D., & Hitch, G. (1974). Working memory. In G. H. Bower (Ed.), *The psychology of learning and motivation* (Vol. 8, pp. 47-89). New York, NY: Academic Press.
- Baddeley, A. D., Lewis, V., & Vallar, G. (1984). Exploring the articulatory loop. *Quarterly Journal of Experimental Psychology: Human Experimental Psychology*, 36A, 233-252.
- Barsalou, L. W. (1999). Perceptual symbol systems. *Behavioral & Brain Sciences*, 22, 577-660.
- Barth H, Kanwisher N, Spelke E. (2003). The construction of large number representations in adults. *Cognition*, 86: 201-221.
- Bartlett, F. C. (1932). *Remembering: A study in experimental and social psychology*. New York: Macmillan.
-

- Berends, I. E., & van Lieshout, E. C. D. M. (2009). The effect of illustrations in arithmetical problem-solving: effects of increased cognitive load. *Learning & Instruction, 19*(4), 345-353. doi:10.1016/j.learninstruc.2008.06.012
- Binet, Alfred, J. Philippe, and V. Henri. (1894). *Introduction à la psychologie expérimentale*. Paris: Alcan.
- Blöte, A. W., Van der Burg, E., & Klein, A. S. (2001). Students' flexibility in solving two-digit addition and subtraction problems: instruction effects. *Journal of Educational Psychology, 93*, 627-638.
- Boaler, J. (1994). When Do Girls Prefer Football to Fashion? An Analysis of Female Underachievement in Relation to "Realistic" Mathematics Contexts. *British Educational Research Journal, 20*(5), 551-664.
- Booth, R., & Thomas, M. (2000). Visualization in Mathematics Learning: Arithmetic Problem-solving and Student Difficulties. *Journal of Mathematical Behavior, 18* (2), 169-190. doi:10.1016/S0732-3123(99)000279
- Bower, G. H. (1970). Imagery as a relational organizer in associative learning. *Journal of Verbal Learning and Verbal Behavior, 9*, 529-533.
- Brannon, E.M., 2006. The representation of numerical magnitude. *Curr. Opin. Neurobiol.* 16, 222–229.
- Briars, D. J., & Larkin, J. H. (1984). An integrated model of skill in solving elementary word problems. *Cognition and Instruction, 1*, 245-296.
- Brown, D.& Wheatley, G. (1989). Relationship between spatial ability and mathematical knowledge. In C.A. Maher, G.A. Goldin , and R.B. Davis, *Proceedings of the Eleventh Annual Meeting of PME: NA*, New Brunswick, NJ, Rutgers Uni., Centre for Mathematics, Science and Computer Educ., 143-148.
- Bruner, J. S. (1965/1960). *The process of education*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Brunyé, T. T., Taylor, H. A., Rapp, D. N., & Spiro, A. B. (2006). Learning procedures: The role of working memory in multimedia learning experiences. *Applied Cognitive Psychology, 20*, 917–940
- Butterworth, B. (2005). The development of arithmetical abilities. *Journal of Child Psychology and Psychiatry, 46*, 3–18.
- Butterworth, B. (2010). Foundational numerical capacities and the origins of dyscalculia. *Trends in Cognitive Sciences, 14*, 534-541.
- Butterworth, B., & Laurillard, D. (2010). Low numeracy and dyscalculia: identification and intervention. *ZDM Mathematics Education, 42*, 527-539.
- Carney, R. N., & Levin, J. R. (2002). Pictorial illustrations still improve students' learning from text. *Educational Psychology Review, 14*, 5–26.
-

- Chandler, P., & Sweller, J. (1992). The split-attention effect as a factor in the design of instruction. *British Journal of Educational Psychology*, 62, 233–246.
- Chein & Fiez (2010). Evaluating models of working memory: FMRI and behavioral evidence on the effects of concurrent irrelevant information. *Journal of Experimental Psychology: General*, 139(1):117-37
- Chen, Q., & Verguts, T. (2010). Beyond the mental number line: A neural network model of number-space interactions. *Cognitive Psychology*, 60, 218-240.
- Cohen Kadosh R, Lammertyn J, and Izard V. (2008). Are numbers special? An overview of chronometric, neuroimaging, developmental and comparative studies of magnitude representation. *Progress in Neurobiology*, 84, 132-147.
- Collins, A. M., & Quillian, M. R. (1969). Retrieval from semantic memory. *Journal of Verbal Learning and Verbal Behavior*, 8, 240—7.
- Coquin – Viennot, D., & Moreau, S. (2007). Arithmetic problems at school: When there is an apparent contradiction between the situation model and the problem model. *British Journal of Educational Psychology*, 77, 69 – 80.
- Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K. & Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process scheme, *Journal of Mathematical Behavior*, 15, 167-192.
- Cowan, N. (1995). *Attention and memory: An integrated framework*. New York, NY: Oxford University Press.
- Cummins, D. D., Kintsch, W., Reusser, K. & Weimer, R. (1988). The role of understanding in solving word problems. *Cognitive Psychology*, 20, 405-438.
- Csikszentmihalyi, M., & Getzels, J. W. (1971). Discovery-oriented behavior and the originality of creative products: A study with artists. *Journal of Personality and Social Psychology*, 19, 47–52.
- Daneman, M., y Carpenter, P. A. (1980). Individual differences in working memory and reading. *Journal of Verbal Learning and Verbal Behavior*, 19 (4) 450-466. doi:10.1016/S0022-5371(80)90312-6
- Davis, A., & Bamford, G. (1995). The effect of imagery on young children's ability to solve simple arithmetic. *Education Section Review*, 19, 61e68.
- Davis, G. E., & Tall, D. O. (2002). What is a scheme? In D. O. Tall, & M. O. J. Thomas (Eds.) *Intelligence, learning and understanding in mathematics. A tribute to Richard Skemp* (pp. 131-150). Flaxton, Queensland, Australia: Post Pressed.

- De Beni, R., Pazzaglia, F., Gyselinck, V., & Meneghetti, C. (2005). Visuospatial working memory and mental representation of spatial descriptions. *European Journal of Cognitive Psychology*, 17, 77–95.
- Dehaene, S. (1997). *The number sense: How the mind creates mathematics*. New York: Oxford University Press.
- Dehaene, E. (2001). *Précis of the number sense*. *Mind & Language*, 16, 16-36.
- Dehaene, S., Bossini, S., & Giraux, P. (1993). The mental representation of parity and magnitude. *Journal of Experimental Psychology: General*, 122, 371–396.
- Dehaene, S., Dehaene-Lambertz, G. & Cohen, L. (1998). *Abstract representations of numbers in the animal and human brain*. *Trends Neurosci* 1998, 21:355-361.
- Dehaene, S., Dupoux, E., & Mehler, J. (1990). Is numerical comparison digital? Analogical and symbolic effects in two-digit number comparison. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, 16, 626–641.
- Dehaene, S., Molko, N., Cohen, L., & Wilson, A. J. (2004). *Arithmetic and the brain*. *Current Opinion in Neurobiology*, 14, 218–224.
- Dehaene, S., Spelke, E., Pinel, P., Stanescu, R., & Tsivkin, S. (1999). Sources of mathematical thinking: Behavioral and brain-imaging evidence. *Science*, 284, 970–974.
- Dehaene, S., Piazza, M., Pinel, P., & Cohen, L. (2003). *Three parietal circuits for number processing*. *Cognitive Neuropsychology*, 20, 487–506.
- Delazer, M., Domahs, F., Bartha, L., Brenneis, C., Lochy, A., Trieb, T., et al. (2003). *Learning complex arithmetic—An fMRI study*. *Brain Research, Cognitive Brain Research*, 18, 76–88.
- Delazer, M., Domahs, F., Lochy, A., Bartha, L., Brenneis, C., & Trieb, T. (2004). *The acquisition of arithmetic knowledge—An fMRI study*. *Cortex*, 40, 166–167.
- De Soto, L. B., London, M., & Handel, M. S. (1965). Social reasoning and spatial paralogic. *Journal of Personality and Social Psychology*, 2, 513–521.
- DeStefano, D. & LeFevre, A. (2004). The role of working memory in mental arithmetic. *European Journal of Cognitive Psychology* 16 (3), pp. 353–386. doi:10.1080/09541440244000328
- De Vega M. (2005). Lenguaje, corporeidad y cerebro: Una revisión crítica. *Rev. signos, Valparaíso*, v. 38, n. 58.
- Domahs, F., Moeller, K., Huber, S., Willmes, K., & Nuerk, H-C. (2010). Embodied numerosity: Implicit hand-based representations influence symbolic number processing across cultures. *Cognition*, 116, 251-266.
-

- Donald, M. (1991) *Origins of the modern mind: Three stages in the evolution of culture and cognition*. Harvard University Press.
- Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking, In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95–123). Dordrecht: Kluwer Academia Publishers.
- Duff, S. C. (2000). What's working in working memory: A role for the central executive. *Scandinavian Journal of Psychology*, 41, 9–16.
- Duff, S. C., & Logie, R. H. (2001). Processing and Storage in working memory span. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 54, 31–48.
- Dutke, S., and Rinck, M., (2006), Multimedia learning: Working memory and the learning of word and picture diagrams, *Learning and Instruction*, **16**, 6, 526-537.
- Elia, I., Gagatsis, A., & Demetriou, A. (2007). The effects of different modes of representation on the solution of one-step additive problems. *Learning and Instruction*, 17, 658-672. doi:10.1016/j.learninstruc.2007.09.011
- Ericsson, K. A., & Kintsch, W. (1995). Long-term working memory. *Psychological Review*, **102**, 211-245.
- Farmer, E. W., Berman, J. V., & Fletcher, Y. L. (1986). Evidence for a visuo-spatial scratchpad in working memory. *Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 38, 675–688.
- Fias, W., Lammertyn, J., Reynvoet, B., Dupont, P., & Orban, G. A. (2003). Parietal representation of symbolic and nonsymbolic magnitude. *Journal of Cognitive Neuroscience*, 15(1), 47–56
- Fincher-Kiefer, R. (2001). *Perceptual components of situation models*. *Memory & Cognition*, 29, 336–343.
- Fodor, J. (1983). *The modularity of mind: An essay on faculty psychology*. Cambridge: MIT Press.
- Forbus, N. D. (1984). Qualitative process theory. *Journal of Artificial Intelligence* 2A: 85-168
- Franklin, N., & Tversky, B. (1990). *Searching imagined environments*. *Journal of Experimental Psychology: General*, 119, 63–76.
- Friedman, N.P., & Miyake, A. (2000). Differential roles for spatial and verbal working memory in the comprehension of spatial descriptions. *Journal of Experimental Psychology: General*, 129, 61–83. doi:10.1037//0096-3445.129.1.61
- Fuchs, L. S., Fuchs, D., Finelli, R., Courey, S. J., & Hamlett, C. L. (2004). Expanding schema-based transfer instruction to help third graders solve real-life mathematical problems. *American Educational Research Journal*, 41(2), 419e445. doi:10.3102/00028312041002419.
-

- Gallese V, Keysers C, Rizzolatti G. (2004). A unifying view of the basis of social cognition. *Trends Cogn. Sci.* 8:396–403
- Gallistel, C. R., & Gelman, R. (1992). *Preverbal and verbal counting and computation.* *Cognition*, 44, 43–74.
- Galton, F. (1880). Visualised numerals. *Nature*, 21, 252–256.
- Garden, S., Cornoldi, C., & Logie, R. H. (2001). Visuo-spatial working memory in navigation. *Applied Cognitive Psychology*, 16, 35–50.
- Gathercole SE, Baddeley AD. 1993. *Working Memory and Language.* Erlbaum: Hove.
- Geary, D. C. (1993). Mathematical disabilities: Cognitive, neuropsychological, and genetic components. *Psychological Bulletin*, 114, 345–362. doi:10.1037//0033-2909.114.2.345
- Geary, D. C., Hoard, M. K., Nugent, L., & Byrd-Craven, J. (2008). *Development of number line representations in children with mathematical learning disability.* *Developmental Neuropsychology*, 33, 277–299.
- Gebuis, T., Cohen Kadosh, R., De Haan, E., & Henik, A. (2009). Automatic quantity processing in 5-year olds and adults. *Cognitive Processing*, 10, 133–142.
- Gentner, D. (1983). Structure-mapping: a theoretical framework for analogy. *Cognitive Science*, 7, 155–170. doi:10.1016/S0364-0213(83)80009-3
- Gentner, D., & Markmann, A. B. (1997). Structure mapping in analogy and similarity. *American Psychologist*, 25, 45–56. doi:10.1037//0003-066X.52.1.45
- Gernsbacher, M. A. (1990). *Language comprehension as structure building.* Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Gernsbacher, M. A., & Faust, M. (1990). Fine tuning the activation of lexical representations during comprehension. In G. B. Simpson (Ed.), *Comprehending word and sentence.* Amsterdam: North- Holland.
- Gick, M. L., & Holyoak, K. J. (1983). Schema induction and analogical transfer. *Cognitive Psychology*, 15, 1–38.
- Glenberg, A. M. (1997). What memory is for. *Behavioral and Brain Sciences*, 20, 1–55.
- Glenberg, A. M., & Kaschak, M. P. (2002). Grounding language in action. *Psychonomic Bulletin & Review*, 9, 558–565.
- Glenberg, A. M. & Langston, W. E. (1992). Comprehension of illustrated text: Pictures help to build mental models. *Journal of Memory and Language*, 31, 129–151. doi:10.1016/0749-596X(92)90008-L
-

- Glenberg, A. M., & McDaniel, M. A. (1992). Mental models, pictures, and text: Integration of spatial and verbal information. *Memory & Cognition*, **20**, 458–460.
- Glenberg, A. M., Meyer, M., & Lindem, K. (1987). Mental models contribute to foregrounding during text comprehension. *Journal of Memory & Language*, **26**, 69-83.
- Glenberg, A. M., & Robertson, D. A. (1999). Indexical understanding of instructions. *Discourse Processes*, **28**, 1-26.
- Goldman, S. (2003). Learning in complex domains: when and why do multiple representations help? *Learning and Instruction*, *13*, 239-244.
- Goldstone, R. L., & Sakamoto, Y. (2003). The transfer of abstract principles governing complex adaptive systems. *Cognitive Psychology*, *46*, 414-466. doi:10.1016/S0010-0285(02)00519-4
- Graesser, A. C., Chipman, P., & King, B. G. (2008). *Computer-mediated technologies*. In J. M. Spector, M. D. Merrill, J. J. G. van Merriënboer, & M. P. Driscoll (Eds.), *Handbook of research on educational communications and technology* (3rd ed). London: Taylor & Francis.
- Graesser, A. C., & Clark, L. F. (1985). Structures and procedures of implicit knowledge. Norwood, NJ: Ablex.
- Graesser, A. C., Millis, K. K., & Zwaan, R. A. (1997). Discourse comprehension. In J. T. Spence, J. M. Darley & D. J. Foss (Eds.), *Annual review of psychology*. Palo Alto, CA: Annual Reviews.
- Graesser, A. C., Singer, M., & Trabasso, T. (1994). Constructing inferences during narrative text comprehension. *Psychological Review*, *101*, 371–395.
- Gruber, O., Indefrey, P., Steinmetz, H., & Kleinschmidt, A. (2001). *Dissociating neural correlates of cognitive components in mental calculation*. *Cerebral Cortex*, *11*, 350–359.
- Gyselinck, V., Cornoldi, C., Dubois, V., De Beni, R. and Ehrlich, M.F. (2002), Visuospatial memory and phonological loop in learning from multimedia. *Applied Cognitive Psychology*, *16*: 665–685. doi:10.1002/acp.823
- Gyselinck, V., Jamet, E., & Dubois, V. (2008). The role of working memory components in multimedia comprehension. *Applied Cognitive Psychology*, *22*, 353-374.
- Gyselinck, V., & Tardieu, H. (1999). The role of illustrations in text comprehension: What, when, for whom, and why? In H. Van Oostendorp & S. R. Goldman (Eds.), *The construction of mental representations during reading* (pp. 195–218). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

- Hayes, P. J. (1985). Naive physics I: Ontology for liquids. In: Hobbs J R, Moore R C (eds.) *Formal Theories of the Commonsense World*. Ablex Publishing Corporation, Norwood, NJ
- Hegarty, M., Kriz, S. & Cate, C. (2003). The roles of mental animations and external animations in understanding mechanical systems. *Cognition & Instruction, 21*, 325-360. doi:10.1207/s1532690xci2104\_1
- Hegarty, M., Mayer, R. E., & Green, C. E. (1992). Comprehension of arithmetic word problems: Evidence from students' eye fixations. *Journal of Educational Psychology, 84*, 76-84.
- Hegarty, M., Mayer, R. E., & Monk, C. A. (1995). Comprehension of arithmetic word problems: A comparison of successful and unsuccessful problem solvers. *Journal of Educational Psychology, 87*, 18-32.
- Heller, J. I. and Greeno, J. G.: 1978, *Semantic Processing of Arithmetic Word Problems*. Paper presented at the Annual Meeting of the Midwestern Psychological Association, Chicago.
- Holloway, I. D., & Ansari, D. (2009). Mapping numerical magnitudes onto symbols: The numerical distance effect and individual differences in children's mathematics achievement. *Journal of Experimental Child Psychology, 103*, 17–29.
- Hörning, R., Oberauer, K. & Weidenfeld, A. (2005). Two principles of premise integration spatial reasoning. *Memory & Cognition, 33* (8), 131-139.
- Huttenlocher, J., Jordan, N., & Levine, S. (1994). A mental model for early arithmetic. *Journal of Experimental Psychology: General, 123* (3), 284-296. doi:10.1037//0096-3445.123.3.284
- Inoue, N. (2005), "The realistic reasons behind unrealistic solutions: the role of interpretive activity in word problem solving", *Learning and Instruction, 15*, pp. 69-83.
- Jahn, G., Knauff, M. & Johnson-Laird, P. N. (2007). Preferred mental models in reasoning about spatial relations. *Memory & Cognition, 35* (8), 2075-2087
- Jarvis, H.L. & Gathercole, S.E. (2003). Verbal and non-verbal working memory and achievements on national curriculum tests at 11 and 14 years of age. *Educational and Child Psychology, 20*, 123–140.
- Jitendra, A. K., Star, J., Starosta, K., Leh, J., Sood, S., Caskie, G., et al. (2009). Improving students' learning of ratio and proportion problem solving: the role of schema-based instruction. *Contemporary Educational Psychology, 34*, 250e264. doi:10.1016/j.cedpsych.2009.06.001.
-



- Johnson-Laird, P. N. (1983). *Mental models. Towards a cognitive science of language, inference, and consciousness*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Johnson-Laird, P.N. (2006) *How We Reason*. Oxford: Oxford University Press.
- Johnson-Laird, P. N., Byrne, R., & Tabossi, P. (1989). *Reasoning by model: The case of multiple quantifiers*. *Psychological Review*, 96, 658–673.
- Jones, D., Beaman, C. P., & Macken, W. J. (1996). The object-oriented episodic record model. In S. Gathercole (Ed.), *Models of short-term memory* (pp. 209–238). London, England: Erlbaum.
- Just, M. A., & Carpenter, P. A. (1987). The psychology of reading and language comprehension. Boston: Allyn and Bacon.
- Just, M. A., & Carpenter, P. A. (1992). *A capacity theory of comprehension: Individual differences in working memory*. *Psychological Review*, 99, 122–149.
- Just, M. A., Newman, S. D., Keller, T. A., McEleney, A., & Carpenter, P. A. (2004). Imagery in sentence comprehension: An fMRI study. *NeuroImage*, 21, 112-124.
- Kalyuga, S. (2006). Rapid cognitive assessment of learners' knowledge structures. *Learning and Instruction*, 16, 1-11. doi:10.1016/j.learninstruc.2005.12.002.
- Katz, J. J., & Fodor, J. A. (1963). The structure of semantic theory. *Language*, 39, 170-210.
- Kintsch, W. (1974). *The representation of meaning in memory*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Kintsch, W. (1998). *Comprehension: a paradigm for cognition*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Kintsch, W., & Greeno, J. (1985). Understanding and solving word arithmetic problem. *Psychological Review*, 92, 109–129.
- Kintsch, W., & Mannes, S. M. (1987). Generating scripts from memory. In E. van der Meer & J. Hoffmann (Eds.), *Knowledge-aided information processing* (pp. 61-80). Amsterdam: Elsevier Science Publishers.
- Kintsch, W., & van Dijk, T. A. (1978). Toward a model of text comprehension and production. *Psychological Review*, 85, 363–394.
- Kintsch, W., & Welsch, D. M. (1991). The construction-integration model: A framework for studying memory for text. In W. E. Hockley & S. Lewandowsky (Eds.), *Relating theory and data: Essays in human memory in honor of Bennett B. Murdock* (pp. 367-385). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Klein, P. D., Piacente-Cimini, S., & Williams, L. A. (2007). The role of writing in learning from analogies. *Learning and Instruction*, 17, 595-611. doi:10.1016/j.learninstruc.2007.09.006

- Knauff, M. (2009). *A Neuro-Cognitive Theory of Deductive Relational Reasoning with Mental Models and Visual Images*. *Spatial Cognition & Computation*, 9:2, 109 — 137
- Kosslyn, S. M. (1980). *Image and mind*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Kosslyn, S. M. (1994). *Image and brain*. Cambridge, MA: MIT Press.
- Krulley, P., Sciamia, S. C. & Glenberg, A. M. (1994). On-line processing of textual illustrations in the visuospatial sketchpad: Evidence from dual-task studies. *Memory & Cognition*, 22, 262-272. doi:10.3758/BF03200853
- Lagrange, J.-B. (2000). L'Intégration d'instruments informatiques dans l'enseignement: Une approche par les techniques [The integration of calculators into teaching: An approach using techniques]. *Educational Studies in Mathematics*, 43(1), 1-30.
- Landerl, K., Bevan, A., & Butterworth, B. (2004). Developmental dyscalculia and basic numerical capacities: a study of 8-9-year-old students. *Cognition*, 93:99-125.
- Lee, K., Lim, Z. Y., Yeong, S. H. M., Ng, S. F., Venkatraman, V., & Chee, M. W. L. (2007). Strategic differences in algebraic problem solving: Neuroanatomical correlates. *Brain Research*, 1155, 163–171.
- Levin, J.R., & Mayer, R.E. (1993). Understanding illustrations in text. In B.K. Britton, A. Woodward, & M. Binkley (Eds.). *Learning from textbooks: Theory and practice* (pp. 95-114). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Lewis, A. B. (1989). Training students to represent arithmetic word problems. *Journal of Educational Psychology*, 81, 521-531.
- Lewis, A. B., & Mayer, R. E. (1987). Students' miscomprehension of relational statements in arithmetic word problems. *Journal of Educational Psychology*, 79, 363-371. doi:10.1037//0022-0663.79.4.363
- Lindemann, O., Abolafia, J. M., Girardi, G., & Bekkering, H. (2007). Getting a grip on numbers: Numerical magnitude priming in object grasping. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, 33, 1400–1409.
- Logie, R. H. (1995). *Visuo-spatial working memory*. Hove, UK: Lawrence Erlbaum Associates, Ltd.
- Logie, R. H., Gilhooly, K. J., & Wynn, V. (1994). Counting on working memory in mental arithmetic. *Memory and Cognition*, 22, 395–410. doi:10.3758/BF03200866
- Longoni, A. M., Richardson, J. T., & Aiello, A. (1993). Articulating rehearsal and phonological storage in working memory. *Memory & Cognition*, 21, 11–22.
-

- Mandler, J.M, & Johnson, N. S. (1977). Remembrance of things parsed: Story structure and recall. *Cognitive Psychology*, 9, 111–151.
- Mani, K., & Johnson-Laird, P. N. (1982). The mental representation of spatial description. *Memory & Cognition*, 10, 181–187.
- Mayer, R. E. & Sims, V. K. (1994). For whom is a picture worth a thousand words? Extensions of a dual-coding theory of multimedia learning. *Journal of Educational Psychology*, 86, 389-401. doi:10.1037//0022-0663.86.3.389
- Mayer, R. E. (Ed). (2005). *Cambridge handbook of multimedia learning*. New York: Cambridge University Press.
- McCrudden, M. T., Schraw, G., & Lehman, S. (2009). The use of adjunct displays to facilitate comprehension of causal relationships in expository text. *Instructional Science*, 37, 65–86.
- McKoon, G., & Ratcliff, R. (1992). Inference during reading. *Psychological Review*, 99, 440–466.
- McNamara, D. S. & Magliano, J. (2009). Toward a Comprehensive Model of Comprensión In Brian Ross (eds): *The Psychology of Learning and Motivation*, Vol. 51, Burlington: Academic Press, pp. 297-384.
- McNeil, N.M., Uttal, D.H., Jarvin, L., & Sternberg, R.J. (2009). Should you show me the money? Concrete objects both hurt and help performance on mathematics problems, *Learning and Instruction* 19 (2), 171–184. doi:10.1016/j.learninstruc.2008.03.005
- MacWhinney, B. (1999). The emergence of language from embodiment. In B.MacWhinney (Ed.), *The emergence of language* (pp. 213- 256). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Meyer, B. J. F. (1975). *The organization of prose and its effect on memory*. Amsterdam: North Holland.
- Meyer, D. E., & Schvaneveldt, R. W. (1971). Facilitation in recognizing pairs of words: Evidence of a dependence between retrieval operations. *Journal of Experimental Psychology*, 90, 227-34.
- Millar, S. (1990). Articulatory coding in prose reading: Evidence from braille on changes with skill. *British Journal of Psychology*, 81, 205–219.
- Miyake, A., Friedman, N. P., Rettinger, D. A., Shah, P., & Hegarty, M. (2001). Visuospatial working memory, central executive functioning, and psychometric visuospatial abilities: How are they related? *Journal of Experimental Psychology: General*, 130, 621–640.
- Morales, R. V., Shute, V. J., & Pellegrino, J. W. (1985). Developmental differences in understanding and solving simple word problems. *Cognition and Instruction*, 2, 41-57. doi:10.1207/s1532690xci0201\_2
-

- Moretto, G., & di Pellegrino, G. (2008) Grasping numbers. *Experimental Brain Research, 188*, 505–515.
- Morrison, R. G. (2004). Thinking in working memory. In K. J. Holyoak & R. G. Morrison (Eds.). *The Cambridge handbook of thinking and reasoning* (Vol. 14, pp. 457–473). New York, NY: Cambridge University Press.
- Moyer, R.S., Landauer, T.K., 1967. Time required for judgment of numerical inequality. *Nature, 215*, 1519–1520.
- Myers, J. L., & O'Brien, E. J. (1998). Accessing the discourse representation during reading. *Discourse Processes, 26*, 131-157.
- Nairne, J. S. (1990). A feature model of immediate memory. *Memory & Cognition, 18*, 251–269.
- Nathan M. J., Kintch, W., & Young, E. (1992). A theory of algebra–word–problem comprehension and its implications for the design of learning environments. *Cognition and instruction, 9*, 329 – 389.
- Nelson, K. (1996) *Language in cognitive development: Emergence of the mediated mind*. Cambridge University Press.
- Newell, Allen, & Simon, Herbert A. (1972). *Human problem solving*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- Orrantia, J. (2003). El rol del conocimiento conceptual en la resolución de problemas aritméticos con estructura aditiva. *Infancia y Aprendizaje, 26*(4), 451-468
- Orrantia, J., Rodriguez, L., & Vicente, S. (2010). Automatic activation of addition facts in arithmetic word problems. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology, 63*, 310-319.
- Paas, F. G. W. C. (1992). The training strategies for attaining transfer of problem-solving skill in statistics: A cognitive approach, *Journal of Educational Psychology, 84*(4), 429-434.
- Paivio, A. (1971). *Imagery and verbal processes*. New York: Holt, Rinehart, and Winston. Reprinted (1979). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Paivio, A. (1986). *Mental representations: A dual coding approach*. New York: Oxford University Press.
- Peirce, C. S. (1902). *Application for support for his logic*. Available from <http://members.door.net/arisbe/menu/library/bycsp/bycsp.htm>.
- Perky, C. W. (1910). An experimental study of imagination. *Journal of Psychology, 21*, 422–452.
- Pettito, L. (1993). Modularity and constraints in early lexical acquisition: Evidence from children's early language and gesture. En P. Bloom (Ed.),
-

- Language acquisition: Core readings* (pp. 95–126). New York: Harvester Wheatsheat.
- Pesenti, M., Thioux, M., Seron, X., & De Volder, A. (2000). *Neuroanatomical substrates of arabic number processing, numerical comparison, and simple addition: A PET study*. *Journal of Cognitive Neuroscience*, 12, 461–479.
- Piaget J. (1952). *The child's conception of number*, Routledge and Kegan Paul, London
- Piaget J. (1953). *The origin of intelligence in the child*, Routledge and Kegan Paul, London.
- Piaget, J. & Inhelder, B. (1969). *The psychology of the child*, Routledge and Kegan Paul, London.
- Piazza, M. (2010). Neurocognitive start-up tools for symbolic number representations. *Trends in Cognitive Sciences*, 14, 542-551.
- Piazza, M., Mechelli, A., Price, C., & Butterworth, B. (2002). *Are subitizing and counting implemented as separate or functionally overlapping processes?* *Neuroimage*, 15, 435–446.
- Pike, M. M., Barnes, M. A., & Barron, R. W. (2010). The role of illustrations in children's inferential comprehension. *Journal of Experimental Child Psychology*, 105, 243-255.
- Pólya, G. *Mathematics and Plausible Reasoning, Vol. 2: Patterns of Plausible Inference*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1990.
- Postigo, Y., & Pozo, J. (2004). On the road to graphicacy: The learning of graphical representation systems, *Educational Psychology*, 24(5), 623-644. doi:10.1080/0144341042000262944
- Pylyshyn, Zenon W. (1973), "What the Mind's Eye Tells the Mind's Brain" *Psychological Bulletin* 80(1): 1-24
- Pylyshyn, Z. W. (1981). The imagery debate: Analogue media versus tacit knowledge. *Psychological Review*, 88, 16—45.
- Pylyshyn, Z.W. (1986). *Computational cognition: Toward a foundation for cognitive science*. Cambridge, MA: MIT Press.
- Resnick, L. B. (1989). Developing mathematical knowledge. *American Psychologist*, 44, 162-169.
- Reusser, K. (1985). *From situation to equation. On formulation, understanding and solving situation problems*. Boulder, Colorado: Institute of Cognitive Science, Technical Report No. 143.
- Reusser, K. (1988), Problem Solving Beyond the Logic of Things: Contextual Effects on Understanding and Solving Word Problems, *Instructional Science*, 17, 309–338.
-

- Reusser, K. (1990). From text to situation to equation: Cognitive simulation of understanding and solving mathematical word problems. In H. Mandl, E. De Corte, N. Bennett, & H. F. Friedrich (Eds.), *Learning and Instruction* (Vol. 2, pp. 477-498). Oxford: Pergamon.
- Riley, N. S., Greeno, J., & Heller, J. I. (1983). Development of children's problem solving ability in arithmetic. In H. P. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking* (pp. 153-196). New York: Academic Press.
- Rousselle L, Noël M-P (2008) *The development of automatic numerosity processing in preschoolers: Evidence for numerosity-perceptual interference*. Dev Psychol, 44:544-560.
- Sadoski, M., & Paivio, A. (1994). A dual coding view of imagery and verbal processes in reading comprehension. In R. B. Ruddell, M. R. Ruddell, & H. Singer (Eds.), *Theoretical models and processes of reading* (4th ed., pp. 582–601). Newark, DE: International Reading Association.
- Simon, T.J., Bearden, C.E., McDonald-McGinn, D.M., & Zackai, E.H. (2005). Visuospatial and numerical cognitive deficits in chromosome 22q11.2 deletion syndrome. *Cortex*, **41**, 131–141.
- Simon, T.J., Takarae, Y., DeBoer, T.L., McDonald-McGinn, D.M., Zackai, E.H., Ross, J.L. (2008) Overlapping Numerical Cognition Impairments In Children With Chromosome 22q11.2 Deletion Or Turner Syndromes. *Neuropsychologia*, 46, 82-94
- Schank, R. C., & Abelson, R. (1977). *Scripts, plans, goals, and understanding*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Schlieder, C., & Berendt, B. (1998). *Mental model construction in spatial reasoning: A comparison of two computational theories*. In U. Schmid, J. F. Krems, & F. Wysotzki (Eds.), *Mind modelling: A cognitive science approach to reasoning, learning, and discovery* (pp. 133–162). Lengerich: Pabst Science Publishers
- Schnotz, W. (2002). Towards an integrated view of learning from text and visual displays. *Educational Psychology Review*, *14*, 101-120. doi:10.1023/A:1013136727916
- Schnotz, W., & Bannert, M. (1999). Influence of the type of visualization on the construction of mental models during picture and text comprehension. *Zeitschrift für Experimentelle Psychologie*, *46*(3), 217–236. doi:10.1026//0949-3964.46.3.217
- Schwarz, W., & Ischebeck, A. (2003). On the relative speed account of the number-size interference in comparative judgment of numerals. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, *29*, 507-522.
-

- Skemp, R. R. (1979). *Intelligence, Learning and action: A foundation for theory and practice in education*, Chichester, UK: Wiley.
- Sloutsky, V.M., Kaminski, J.A. & Heckler, A.F. (2005). The advantages of simple symbols for learning and transfer. *Psychonomic Bulletin & Review*, 12 (3), 508-513. doi:10.3758/BF03193796
- Slobin, D. (1987). Thinking for speaking. En J. Aske, N. Beery, L. Michaelis & H. Filip (Eds.), *Berkeley Linguistics Society: Proceedings of the Thirteenth Annual Meeting* (pp. 435–444). Berkeley, CA: BLS.
- Stanfield, R. A., & Zwaan, R. A. (2001). The effect of implied orientation derived from verbal context on picture recognition. *Psychological Science*, 12, 153–156.
- Staub, F. C., & Reusser, K. (1995). The role of presentational structures in understanding and solving mathematical word problems. In C.A. Weaver III, S. Mannes, & C.R. Fletcher (Eds.), *Discourse Comprehension: Essays in honor of Walter Kintsch* (pp. 285-305). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Stein, N., & Glenn, C. (1979). An analysis of story comprehension in elementary school children. In R. D. Freedle (Ed.), *Advances in discourse processes: New directions in discourse processing* (pp. 53–119). Norwood, NJ: Albex.
- Stern, E. (1993). What make certain arithmetic word problems involving the comparison of sets so difficult for children. *Journal of Educational Psychology*, 85, 7-23.
- Swanson, H. L. (1992). Generality and modifiability of working memory among skilled and less skilled readers. *Journal of Educational Psychology*, 84, 473–488. doi:10.1037//0022-0663.84.4.473
- Swanson, H. L., & Beebe-Frankenberger, M. (2004). The relationship between working memory and mathematical problem solving in children at risk and not at risk for serious math difficulties. *Journal of Educational Psychology*, 96, 471–491. doi:10.1037/0022-0663.96.3.471
- Swanson, H. L., Cooney J. B., & Brock, S. (1993). The influence of working memory and classification ability on children's word problem solution. *Journal of Experimental Child Psychology*, 55 pp. 374–395. doi:10.1006/jecp.1993.1021
- Sweller, J. (1992). Cognitive theories and their implications to mathematics instruction. In G. Leder (Ed.), *Assessment and Learning of Mathematics*, Victoria: The Australian Council of Educational Research.
- Sweller, J. (1994). Cognitive load theory, learning difficulty, and instructional design. *Learning and Instruction*, 4(4), 295-312 . doi:10.1016/0959-4752(94)90003-5

- Sweller, J. (2010). Element interactivity and Intrinsic, Extraneous, and Germane Cognitive Load. *Educational Psychology Review*, 22, 123-138. doi:10.1007/s10648-010-9128-5
- Sweller, J., van Merriënboer, Jeroen J. G., & Paas, F. G. W. C. (1998). Cognitive architecture and instructional design. *Educational Psychology Review*, 10(3), 251-296. doi:10.1023/A:1022193728205
- Tergan, S. (1997). Misleading theoretical assumptions in hypertext/hypermedia research. *Journal of Educational Multimedia and Hypermedia*, 6, 257-283.
- Thevenot, C. (2010). Arithmetic word problem solving: Evidence for the construction of a mental model. *Acta Psychologica*, 133, 90-95. doi:10.1016/j.actpsy.2009.10.004
- Thevenot, C., & Oakhill, J. (2005). The strategic use of alternative representations in arithmetic word problem solving. *Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 58, 1311-1323. doi:10.1080/02724980443000593
- Thevenot, C., & Oakhill, J. (2006). Representations and strategies for solving dynamic and static arithmetic word problems: The role of working memory capacities. *European Journal of Cognitive Psychology*, 18, 756-775. doi:10.1080/09541440500412270
- Thevenot, C.; Devidal, M.; Barrouillet, P. & Fayol, M. (2007). Why does placing the question before an arithmetic word problem improve performance? A situation. *Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 60, 43-56. doi:10.1080/17470210600587927
- Todaro, S., Magliano, J. P., Millis, K., McNamara, D. S., & Kurby, C. (2008). Assessing the structure of verbal protocols. In V. Sloutsky, B. Love, & K. McRae (Eds.), *Proceedings of the 30th annual conference of the cognitive science society* (pp. 607–612). Washington, DC: Cognitive Science Society.
- Trabasso, T., Secco, T., & van den Broek, P. W. (1984): Causal cohesion and story coherence. In T. Trabasso & N. L. Stein (Eds.), *Learning and comprehension of text* (pp. 83-111). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Treisman, A. M., & Gelade, G. (1980). A feature integration theory of attention. *Cognitive Psychology*, 12, 97–136.
- Tversky, B., Morrison, J. B., & Bétrancourt, M. (2002). Animation: Can it facilitate? *International Journal of Human Computer Studies*, 57, 247–262.
- Tye, M. (1991). *The imagery debate*. Cambridge, MA: MIT Press.
-



- Tzelgov J and Ganor-Stern D. (2005). Automaticity in processing ordinal information. In Campbell JID (Ed), *Handbook of Mathematical Cognition* (pp. 55–67). New York: Psychology Press.
- Uttal, D. H., Liu, L. L., & DeLoache, J. S. (1999). Taking a hard look at concreteness: Do concrete objects help young children learn symbolic relations? In L. Balter & C. Tamis-LeMonda (Eds.), *Child psychology: A handbook of contemporary issues* (pp. 177-192). Philadelphia: Psychology Press.
- van Dijck, J.P., & Fias, W. (2011). A working memory account for spatial numerical associations. *Cognition*, 119 (2011), pp. 114–119
- van Dijk, T. A., & Kintsch, W. (1983). *Strategies of discourse comprehension*. New York: Academic Press.
- Van Someren, M. W., Reimann, P., Boshuizen, H. P. A., & de Jong, T. (Eds.). (1998). *Learning with multiple representations*. Amsterdam: Pergamon.
- Venkatraman, V., Ansari, D., & Chee, M. W. (2005). Neural correlates of symbolic and non-symbolic arithmetic. *Neuropsychologia*, 43, 744–753.
- Verschaffel, L. (1994). Using retelling data to study elementary school children's representations and solutions of compare problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25, 141-165. doi:10.2307/749506
- Verschaffel, L., & De Corte, E. (1997). Word Problems: A Vehicle for Promoting Authentic Mathematical Understanding and Problem Solving in the Primary School?. In T. Nunes & P. Bryant (Eds.), *Learning and Teaching Mathematics: An International Perspective* (pp. 69-97). Hove: Psychology Press.
- Verschaffel, L., De Corte, E. & Lasure, S. (1994). Realistic Considerations in Mathematical Modeling of School Arithmetic Word Problems. *Learning and Instruction*, 4(4), 273-294.
- Verschaffel, L., De Corte, E., ve Viersraete H. (1999), “Upper Elementary School Pupils’ Difficulties In Modeling And Solving Nonstandard Additive Word Problems Involving Numbers”, *Journal for Research in Mathematics Education*, c. 3, S. 30, ss. 265-285
- Verschaffel, L., De Corte, E., & Pauwels, A. (1992). Solving compare problems: An eye movement test of Lewis and Mayer’s consistency hypothesis. *Journal of Educational Psychology*, 84, 85-94.
- Vicente, S. (2006). Conocimiento matemático y situacional y su influencia en la resolución de situaciones problemáticas de estructura aditiva. Tesis Doctoral no publicada.

- Vicente, S., Orrantia, J. & Verschaffel, L. (2007). Influence of situational and conceptual rewording on word problem solving. *British Journal of Educational Psychology*, 77 (4), 829-840. doi:10.1348/000709907X178200
- Vicente, S., Orrantia, J. & Verschaffel, L. (2008). Influencia del conocimiento matemático y situacional en la resolución de problemas aritméticos verbales: ayudas textuales y gráficas. *Infancia y Aprendizaje*, 31(4), 463-483. doi:10.1174/021037008786140959
- Vosgerau, G. (2006). The Perceptual Nature of Mental Models. In Carsten Held, Markus Knauff & Gottfried Vosgerau (eds.), *Mental Models and the Mind: Current Developments in Cognitive Psychology, Neuroscience, and Philosophy of Mind*. Elsevier.
- Walsh, V., (2003). A theory of magnitude: common cortical metrics of time, space and quantity. *Trends in Cognitive Science*, 7, 483–488.
- Wechsler, D. (2003). *Wechsler intelligence scale for children—4th Edition (WISC-IV®)*. San Antonio, TX: Harcourt Assessment.
- Wilson, A. & Dehaene, S. (2007). Number Sense and Developmental Dyscalculia. In D. Coch, G. Dawson, & K. Fischer (Eds.), *Human Behaviour, Learning, and the Developing Brain: Atypical Development* (pp. 212-238). New York: Guilford Press.
- Wilson, A. J., Dehaene, S., Pinel, P., Revkin, S. K., Cohen, L., & Cohen, D. (2006). Principles underlying the design of “The Number Race,” an adaptive computer game for remediation of dyscalculia. *Behavioral and Brain Functions*, 2, 19.
- Xu, F. & Spelke, E.S. (2000) Large number discrimination in 6-month-old infants. *Cognition* 74, 1–11.
- Zwaan, R. A. (1999). Embodied cognition, perceptual symbols, and situation models. *Discourse Processes*, 28, 81-88.
- Zwaan, R. A. (2004). The immersed experiencer: Toward an embodied theory of language comprehension. In B. H. Ross (Ed.), *The psychology of learning and motivation* (Vol. 44, pp. 35-62). San Diego: Academic Press.
- Zwaan, R. A., Langston, M. C., & Graesser, A. C. (1995a). The constructio of situatio models in narrative comprehension: An event-indexing model *Psychological Science*, 6, 292–297.
- Zwaan, R. A., Madden, C. J., Yaxley, R. H., & Aveyard, M. E. (2004). Moving words: Dynamic mental representations in language comprehension. *Cognitive Science*, 28, 611–619.
- Zwaan, R. A., & Radvansky, G. A. (1998). Situation models in language comprehension and memory. *Psychological Bulletin*, 123, 162–185.
-

Zwaan, R. A., Stanfield, R. A., & Yaxley, R. H. (2002). Do language comprehenders routinely represent the shapes of objects? *Psychological Science*, 13, 168–171.



# **ANEXOS**



# ANEXO 1

## PROBLEMAS EXPERIMENTALES DE LOS ESTUDIOS EMPÍRICOS

### ESTUDIO 1

David tenía 9 tazos menos que Raúl	David: 8    Raúl: ?
Alberto tenía 7 juguetes más que Vicente	Alberto: ?    Vicente: 3
Celia tenía 3 gatos menos que Olga	Celia: ?    Olga: 12
Tito tenía 8 latas mas que Yago	Tito: 10    Yago: ?
Victoria tenía 7 muñecas menos que Soledad	Victoria: 5    Soledad: ?
Clara tenía 8 fresas más que Lola	Clara: ?    Lola: 2
Luisa tenía 9 rosas menos que Eva	Luisa: ?    Eva: 17
Violeta tenía 6 vestidos más que Lucía	Violeta: 15    Lucía: ?
Jaime tenía 5 setas menos que Héctor	Jaime: 3    Héctor: ?
Tomás tenía 7 peras más que Manuel	Tomás: ?    Manuel: 9
Valentín tenía 6 manzanas menos que Emilio	Valentín: ?    Emilio: 10
Julia tenía 7 tiestos más que Rosa	Julia: 10    Rosa: ?
Roque tenía 6 pulpos menos que Mabel	Roque: 2    Mabel: ?
Irene tenía 7 botellas más que Yolanda	Irene: ?    Yolanda: 6
Charo tenía 9 discos menos que Andrés	Charo: ?    Andrés: 16
Ramón tenía 6 vasos más que Miguel	Ramón: 9    Miguel: ?
Arancha tenía 9 macetas menos que Alejandra	Arancha: 5    Alejandra: ?
Saul tenía 5 flautas más que Román	Saul: ?    Román: 2
Pedro tenía 4 cromos menos que David	Pedro: ?    David: 10
Elvira tenía 9 naranjas más que Salvador	Elvira: 15    Salvador: ?
Raúl tenía 6 perros menos que Raquel	Raúl: 4    Raquel: ?
Tania tenía 8 faldas más que Vera	Tania: ?    Vera: 5
Cristina tenía 2 pájaros menos que Mirella	Cristina: ?    Mirella: 5
Pilar tenía 4 llaves más que Sonia	Pilar:12    Sonia: ?
Lucas tenía 5 cartas menos que Ana	Lucas: 4    Ana: ?
Valeria tenía 9 cuadernos más que Paola	Valeria: ?    Paola: 7
Jorge tenía 2 cestos menos que Hugo	Jorge: ?    Hugo: 10
Silvia tenía 9 sillas más que Iván	Silvia: 14    Iván: ?
Ricardo tenía 4 billetes menos que Ángela	Ricardo: 3    Ángela: ?
Rita tenía 9 uvas más que Pepa	Rita: ?    Pepa: 4
Quique tenía 2 ostras menos que Marcos	Quique: ?    Marcos: 6
Guadalupe tenía 3 vajillas más que Josefa	Guadalupe: 5    Josefa: ?
Andrés tenía 9 sobres menos que Ángel	Andrés: 6    Ángel: ?
Paco tenía 2 globos más que Santi	Paco: ?    Santi: 8
Soraya tenía 5 regalos menos que Daniel	Soraya: ?    Daniel: 12

Sixto tenía 7 piñas más que Nuria	Sixto: 12    Nuria: ?
Luisa tenía 8 dados menos que Julia	Luisa: 6    Julia: ?
Benito tenía 2 sandías más que David	Benito: ?    David: 3
Belén tenía 4 pósters menos que Nieves	Belén: ?    Nieves: 6
Víctor tenía 6 guantes más que Inés	Víctor: 14    Inés: ?
Manuela tenía 2 periquitos menos que Rosa	Manuela: 5    Rosa: ?
Mario tenía 8 cables más que Diego	Mario: ?    Diego: 7
Rubén tenía 9 libros menos que Sara	Rubén: ?    Sara: 13
Noemí tenía 5 pasteles más que Tamara	Noemí: 7    Tamara: ?
Sonia tenía 9 ramos menos que Sandra	Sonia: 3    Sandra: ?
Javier tenía 3 mesas más que José	Javier: ?    José: 4
Lidia tenía 6 floreros menos que María	Lidia: ?    María: 13
Pablo tenía 2 vacas más que Berta	Pablo: 7    Berta: ?
Oscar tenía 8 sellos menos que Nuria	Oscar: 9    Nuria: ?
Rosalía tenía 2 rotuladores más que Esteban	Rosalía: ?    Esteban: 6
Paula tenía 5 hojas menos que Maite	Paula: ?    Maite: 14
Daniel tenía 2 platos más que Esther	Daniel: 8    Esther: ?
Cecilia tenía 6 lapiceros menos que Azucena	Cecilia: 8    Azucena: ?
Miriam tenía 3 chicles más que Pedro	Miriam: ?    Pedro: 5
Ana tenía 9 manzanas menos que Lucía	Ana: ?    Lucía: 12
Andrés tenía 7 chicles más que Emilio	Andrés: 13    Emilio: ?
Raquel tenía 3 libros menos que Pilar	Raquel: 7    Pilar: ?
Lucía tenía 7 platos más que Elisa	Lucía: ?    Elisa: 8
Esther tenía 7 tazas menos que María	Esther: ?    María: 9
Irene tenía 2 camisetas más que Belén	Irene: 9    Belén: ?
Berta tenía 4 tenedores menos que Lidia	Berta: 6    Lidia: ?
Sara tenía 5 cerezas más que Andrea	Sara: ?    Andrea: 9
Diego tenía 8 tazas menos que Sonia	Diego: ?    Sonia: 13
Laura tenía 3 pañuelos más que Mónica	Laura: 9    Mónica: ?
Esteban tenía 6 zapatos menos que Luis	Esteban: 9    Luis: ?
Ricardo tenía 2 piñas más que Susana	Ricardo: ?    Susana: 7
Rosa tenía 3 sandías menos que Andrés	Rosa: ?    Andrés: 7
María tenía 7 platos más que Begoña	María: 16    Begoña: ?
Inés tenía 7 pinturas menos que Rubén	Inés: 2    Rubén: ?
Elisa tenía 4 rosales más que Julia	Elisa: ?    Julia: 9
Raúl tenía 4 balones menos que Esteban	Raúl: ?    Esteban: 9
Roberto tenía 8 carpetas más que Luis	Roberto: 12    Luis: ?



**ESTUDIO 2**

David ganó 9 tazos menos que Raúl en el colegio.  
Sí Raúl ganó 13 tazos,  
¿cuántos ganó David?

Daniel consiguió 4 medallas más que Ángel en el campeonato.  
Sí Daniel consiguió 10 medallas,  
¿cuántas consiguieron entre los dos?

Santiago tenía 5 gominolas menos que Bernardo.  
Sí Bernardo tenía 14 gominolas,  
¿cuántas tenía Santiago?

Celia tenía 4 puntos más que Clara en el concurso.  
Sí Clara tenía 9 puntos,  
¿cuántos tenían entre las dos?

Rubén vendió 3 discos menos que Sara en la feria.  
Sí Rubén vendió 11 discos,  
¿cuántos vendió Sara?

Jacinto tenía 13 chicles más que Jesús.  
Sí Jesús tenía 4 chicles,  
¿cuántos tenía Jacinto?

Luisa tenía 6 cromos más que Eva.  
Sí Luisa tenía 15 cromos,  
¿cuántos tenía Eva?

Javier plantó 8 árboles menos que José en el jardín.  
Sí Javier plantó 3 árboles,  
¿cuántos plantaron entre los dos?

Cristina tenía 6 cigarros menos que Rubén.  
Sí Rubén tenía 11 cigarros,  
¿cuántos tenían entre los dos?

Pablo tenía 2 fresas menos que Hugo.  
Sí Pablo tenía 9 fresas,  
¿cuántas tenían entre los dos?

Víctor ganó 6 euros más que Inés en el bingo.  
Sí Víctor ganó 13 euros,  
¿cuántos ganó Inés?

Mónica compró 11 piruletas más que Soraya en el kiosco.  
Sí Soraya compró 5 piruletas,  
¿cuántas compraron entre las dos?

Pilar cogió 4 cartas menos que Sonia en la partida.  
Sí Sonia cogió 13 cartas,  
¿cuántas cogió Pilar?

Ramón hizo 3 pasteles más que Miguel en la pastelería.  
Sí Ramón hizo 10 pasteles,  
¿cuántos hicieron entre los dos?

Esteban sacó 3 euros menos que Fernando de la hucha.  
Sí Fernando sacó 17 euros,  
¿cuántos sacó Esteban?

Sofía rompió 3 botellas más que Pilar en la bodega.  
Sí Pilar rompió 8 botellas,  
¿cuántos rompieron entre las dos?

Daniel tenía 8 frascos menos que Esther.  
Sí Daniel tenía 5 frascos,  
¿cuántos tenía Esther?

Juana tenía 16 libros más que Rosa.  
Sí Rosa tenía 7 libros,  
¿cuántos tenía Juana?

Pedro tenía 2 patatas más que Ana.  
Sí Pedro tenía 15 patatas,  
¿cuántas tenía Ana?

Tomás sembró 6 rosales menos que Manuel en el jardín.  
Sí Tomás sembró 11 rosales,  
¿cuántos sembraron entre los dos?

Eva cogió 5 peces menos que Rita en el río.  
Sí Rita cogió 13 peces,  
¿cuántos cogieron entre las dos?

Iván tenía 9 pájaros menos que Silvia  
Sí Iván tenía 6 pájaros  
¿cuántos tenían entre los dos?

Oscar hizo 2 tartas más que Nuria en la cocina.  
Sí Oscar hizo 14 tartas,  
¿cuántas hizo Nuria?

María tenía 18 pinturas más que Susana.  
Sí Susana tenía 4 pinturas,  
¿cuántas tenían entre las dos?

Julia plantó 3 violetas menos que María en el jardín.  
Sí María plantó 13 violetas,  
¿cuántas plantó Julia?

Belén compró 4 peras más que Natalia en el mercado.  
Sí Belén compró 11 peras,  
¿cuántas compraron entre las dos?

Joaquín ganó 4 pinturas menos que Fermín en el colegio  
Sí Fermín ganó 15 pinturas,  
¿cuántas ganó Joaquín?

Sonia vendió 4 quesos más que Sandra en el mercado.  
Sí Sandra vendió 9 quesos,  
¿cuántos vendieron entre las dos?

Diego regaló 6 caramelos menos que Manuel en el bautizo.  
Sí Diego regaló 7 caramelos,  
¿cuántos regaló Manuel?

Santiago tenía 13 cuadernos más que David.  
Sí David tenía 5 cuadernos,  
¿cuántos tenía Santiago?

Paula tenía 6 años más que Maite  
Sí Paula tenía 13 años,  
¿cuántos tenía Maite?

Andrés ganó 2 canicas menos que Pablo en el colegio.  
Sí Andrés ganó 9 canicas,  
¿cuántas ganaron entre los dos?

Elisa consiguió 7 manzanas menos que Teresa en el mercado.  
Sí Teresa consiguió 12 manzanas,  
¿cuántas consiguieron entre las dos?

Lidia tenía 6 caballos menos que Julia.  
Sí Lidia tenía 4 caballos,  
¿cuántos tenían entre las dos?

Jaime gastó 6 euros más que Carmen en la tienda.  
Sí Jaime gastó 14 euros,  
¿cuántos gastó Cármen?

Mirella tenía 7 macetas más que Juana.  
Sí Juana tenía 10 macetas,  
¿cuántas tenían entre las dos?

Mario sembró 6 cerezos menos que Alex en el campo.

Sí Alex sembró 18 cerezos,  
¿cuántos sembró Mario?

Carlos cogió 3 ciruelas más que Pepe en su trabajo.  
Sí Carlos cogió 8 ciruelas,  
¿cuántas cogieron entre los dos?

África gastó 8 hojas menos que Yolanda en la oficina.  
Sí Yolanda gastó 15 hojas,  
¿cuántas gastó África?

Rafael rompió 3 envases más que Antonio en la fábrica.  
Sí Antonio rompió 7 envases,  
¿cuántos rompieron entre los dos?

Miriam sacó 4 puntos menos que Noemí en la partida.  
Sí Miriam sacó 9 puntos,  
¿cuántos sacó Noemí?

Enrique tenía 12 refrescos más que Vicente.  
Sí Vicente tenía 5 refrescos,  
¿cuántos tenía Enrique?

Marta tenía 2 discos más que Irene.  
Sí Marta tenía 13 discos,  
¿cuántos tenía Irene?

Elena obtuvo 10 regalos menos que Diana en el cumpleaños.  
Sí Elena obtuvo 6 regalos,  
¿cuántos obtuvieron entre las dos?

Claudia hizo 5 empanadas menos que Roberto en el concurso.  
Sí Roberto hizo 14 empanadas,  
¿cuántas hicieron entre los dos?

Jorge tenía 6 bolígrafos menos que Blanca.  
Sí Jorge tenía 8 bolígrafos,  
¿cuántos tenían entre los dos?

Santi rompió 2 platos más que Javier en el restaurante.  
Sí Santi rompió 13 platos,  
¿cuántos rompió Javier?

Maruja tenía 10 vasijas más que Anabel.  
Sí Anabel tenía 4 vasijas,  
¿cuántas tenían entre las dos?



# VNiVERSiDAD D SALAMANCA

Este trabajo ha sido posible gracias a la financiación concedida a José David Múñez Méndez por la Junta de Castilla y León y el Fondo Social Europeo en el marco de la Estrategia Regional de Investigación Científica, Desarrollo Tecnológico e Innovación 2007-2013



UNION EUROPEA  
Fondo Social Europeo