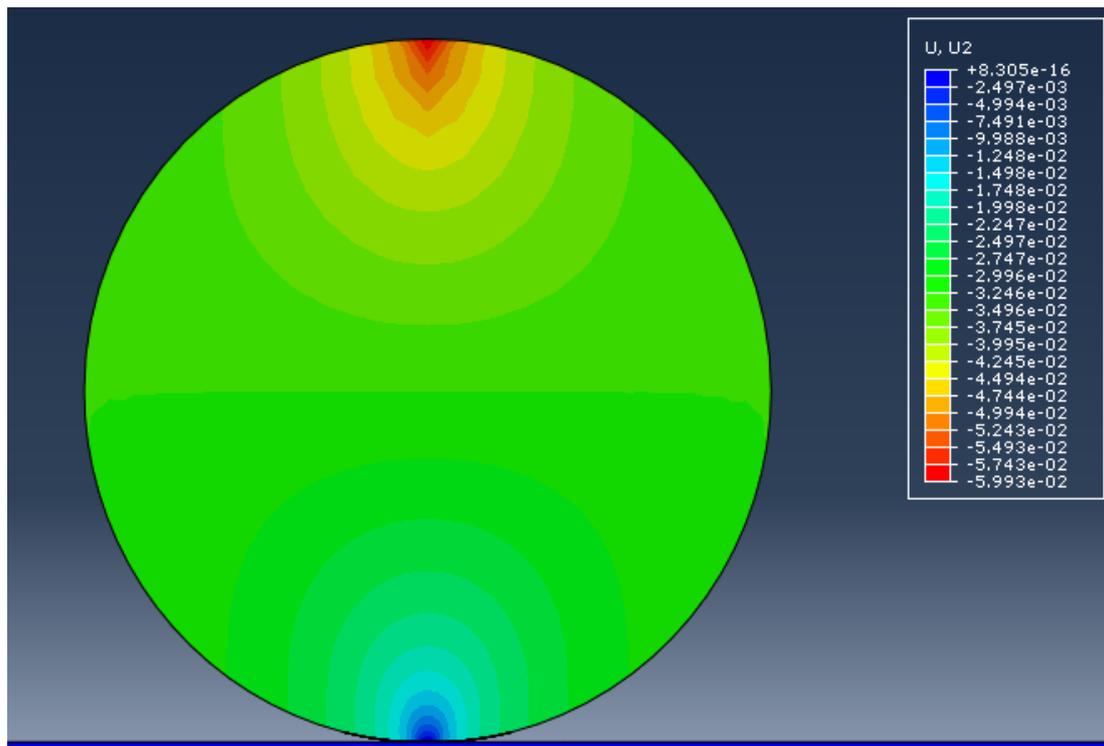


ANÁLISIS DE TENSIONES EN PIEZAS MECÁNICAS DE
GEOMETRÍA CILÍNDRICA UTILIZANDO EL MÉTODO
DE LOS ELEMENTOS FINITOS.



Tutores: *Juan Carlos Pérez Cerdán*

Alejando Reveriego Martín.

Autor: *Diego Sánchez-Capitán Cuadrado.*

Febrero de 2011.

ÍNDICE

-	1. INTRODUCCIÓN AL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS Y AL ENTORNO DE ABAQUS.....	7
○	1.1.Introducción.....	8
○	1.2.Descripción matemática del método	9
○	1.3.El MEF en la práctica	11
▪	1.3.1.Preproceso y generación de la malla	12
▪	1.3.2.Cálculo y resolución de sistema de ecuaciones.....	13
▪	1.3.3.Postproceso.....	14
○	1.4.Tipo de análisis en ingeniería	14
○	1.5.Resultados del MEF	15
○	1.6.Limitaciones	16
○	1.7.El entorno de Abaqus	16
-	2. ESFUERZOS EN CILINDROS	21
○	2.1.Introducción.....	22
○	2.2.Cilindros de presión. Caso general pared gruesa.....	23
○	2.3.Casos particulares. Cilindros de pared delgada.....	28
-	3. PROBLEMA 1: CILINDROS A PRESIÓN	31
○	3.1.Introducción.....	32
○	3.2.Modelado del problema con elementos finitos.....	33
▪	3.2.1.Preproceso	33
•	3.2.1.1.Geometría	33

• 3.2.1.2.Materiales	34
• 3.2.1.3.Condiciones de contorno	34
• 3.2.1.4.Mallado.....	35
▪ 3.2.2.Postproceso.....	37
• 3.2.2.1.Caso 1	37
• 3.2.2.2Caso 2	43
• 3.2.2.3.Caso 3	47
• 3.2.2.4.Caso 4	52
○ 3.3.Resumen y conclusiones.....	57
- 4. CONCENTRACIÓN DE TENSIONES	59
○ 4.1.Introducción.....	60
○ 4.2.Estado de tensiones bidimensional o plano	60
○ 4.3.Tensiones principales	61
○ 4.4.Estados de tensiones tridimensional.....	62
○ 4.5.Representación gráfica del estado de tensiones. Círculo de Mohr	63
○ 4.6.Tensiones normales producidas por esfuerzos axiales	64
○ 4.7.Concentración de tensiones	65
- 5. PROBLEMA 2: CONCENTRACIÓN DE TENSIONES EN ELEMENTOS CILÍNDRICOS.....	75
○ 5.1.Introducción.....	76
○ 5.2.Modelado del problema.....	78
▪ 5.2.1.Preproceso	78
• 5.2.1.1.Geometría	78
• 5.2.1.2.Materiales	80

- 5.2.1.3. Condiciones de contorno 80
- 5.2.1.4. Mallado 81
- 5.2.2. Postproceso 83
 - 5.2.2.1. Análisis de tensiones 83
 - 5.2.2.2. Factor de concentración de tensiones 109
- 5.3. Resumen y conclusiones 119
- **6. TENSIONES DE CONTACTO 120**
 - 6.1. Introducción 121
 - 6.2. Cilindros macizos 121
 - 6.3. Esfuerzos dinámicos de contacto 127
 - 6.3.1. Efecto sobre los esfuerzos de contacto de una componente deslizante 128
 - 6.4. Modelos de falla de fatiga superficial: contacto dinámico 134
- **7. PROBLEMA 3: TENSIONES DE CONTACTO EN UN CILINDRO SOBRE UN PLANO RÍGIDO 136**
 - *7.A. PROBLEMA ESTÁTICO (SIN ROZAMIENTO) 137*
 - 7.A.1. Introducción 137
 - 7.A.2. Modelado del problema con elementos finitos 138
 - 7.A.2.1. Preproceso 139
 - 7.A.2.1.1. Geometría 139
 - 7.A.2.1.2. Materiales 141
 - 7.A.2.1.3. Ensamblaje y paso 142

○ 7.A.2.1.4.Condiciones de contorno	142
○ 7.A.2.1.5.Contacto y cuerpo rígido	143
○ 7.A.2.1.6.Mallado	144
• 7.A.2.2.Proceso.....	146
• 7.A.2.3.Postproceso	146
○ 7.A.2.3.1.Análisis de las magnitudes más generales	146
○ 7.A.2.3.2.Tensiones en el eje de carga. RC1-LC2.....	160
○ 7.A.2.3.3.Tensiones fuera del eje de carga.....	162
▪ 7.A.3.Resumen y conclusiones.....	172
○ 7.B.PROBLEMA DINÁMICO (CON ROZAMIENTO).....	174
▪ 7.B.1.Introducción	174
▪ 7.B.2.Modelado del problema con elementos finitos	175
• 7.B.2.1.Preproceso.....	175
• 7.B.2.2.Postproceso	176
○ 7.B.2.2.1.Tensiones normales σ_x	176
○ 7.B.2.2.2.Tensiones normales σ_y	179
○ 7.B.2.2.3.Tensiones cortantes τ_{xy}	179
▪ 7.B.3.Resumen y conclusiones	181
- CONCLUSIONES	183
- BIBLIOGRAFÍA	185

1 INTRODUCCIÓN AL MÉTODO
DE LOS ELEMENTOS FINITOS Y
AL ENTORNO DE ABAQUS.

1. INTRODUCCIÓN AL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS Y AL ENTORNO DE ABAQUS.

1.1- INTRODUCCIÓN.

El método de los elementos finitos (MEF en castellano o FEM en inglés) es un método numérico general para la aproximación de soluciones de ecuaciones diferenciales parciales muy utilizado en diversos problemas de ingeniería y física.

El MEF está pensado para ser usado en computadoras y permite resolver ecuaciones diferenciales asociadas a un problema físico sobre geometrías complicadas. El MEF se usa en el diseño y mejora de productos y aplicaciones industriales, así como en la simulación de sistemas físicos y biológicos complejos. La variedad de problemas a los que puede aplicarse ha crecido enormemente, siendo el requisito básico que las ecuaciones constitutivas y ecuaciones de evolución temporal de problema a considerar sean conocidas de antemano.

El MEF permite obtener una solución numérica aproximada sobre un cuerpo, estructura o dominio (medio continuo) sobre el que están definidas ciertas ecuaciones diferenciales en forma débil o integral que caracterizan el comportamiento físico del problema, dividiéndolo en un número elevado de subdominios, no intersectantes entre sí, denominados “*elementos finitos*”. El conjunto de elementos finitos forma una partición del dominio también denominada discretización. Dentro de cada elemento se distinguen una serie de puntos representativos llamados “*nodos*”. Dos nodos son adyacentes si pertenecen al mismo elemento finito, además, un nodo sobre la frontera de un elemento finito puede pertenecer a varios elementos. El conjunto de nodos considerando sus relaciones de adyacencia se llama “*malla*”.

Los cálculos se realizan sobre una malla de puntos o nodos, que sirven a su vez de base para la discretización del dominio en elementos finitos. La generación de la malla se realiza usualmente con programas especiales llamados generadores de mallas,

en una etapa previa a los cálculos que se denomina pre-proceso. De acuerdo con estas relaciones de adyacencia o conectividad se relaciona el valor de un conjunto de variables incógnitas definidas en cada nodo y denominadas grados de libertad. El conjunto de relaciones entre el valor de una determinada variable entre los nodos se puede escribir en forma de sistema de ecuaciones lineales. La matriz de dicho sistema de ecuaciones se llama *matriz de rigidez del sistema*. El número de ecuaciones de dicho sistema es proporcional al número de nodos.

Típicamente, el método de los elementos finitos se programa computacionalmente para calcular el campo de desplazamientos y, posteriormente, a través de relaciones cinemáticas y constitutivas, las deformaciones y tensiones cuando se trata de un problema de mecánica de sólidos deformables o, más generalmente, un problema de mecánica de medios continuos. El método de los elementos finitos es muy usado debido a su generalidad y a la facilidad de introducir dominios de cálculo complejos (en dos o tres dimensiones). Además, el método es fácilmente adaptable a problemas de transmisión de calor, mecánica de fluidos -para calcular campos de velocidades y presiones- o de campo electromagnético. Dada la imposibilidad práctica de encontrar la solución analítica de estos problemas con frecuencia, en la práctica de la ingeniería, los métodos numéricos y, en particular, los elementos finitos, se convierten en la única alternativa práctica de cálculo.

Una importante propiedad del método es la convergencia; si se consideran particiones de elementos finitos sucesivamente más finas, la solución numérica calculada converge rápidamente hacia la solución exacta del sistema de ecuaciones.

1.2- DESCRIPCIÓN MATEMÁTICA DEL MÉTODO.

Esta parte puede llegar a ser muy compleja. En este proyecto, sin embargo, simplemente nos interesa conocer los fundamentos del método, para entender luego cómo trabaja con un programa comercial de cálculo por elementos finitos (en nuestro caso, Abaqus). Por ello, sólo se presentará una breve explicación.

El desarrollo de un algoritmo de elementos finitos para resolver un problema definido mediante ecuaciones diferenciales y condiciones de contorno requiere en general cuatro etapas:

- El problema debe reformularse en forma variacional.
- El dominio de variables independientes (usualmente un dominio espacial para problemas dependientes del tiempo) debe dividirse mediante una partición en subdominios o elementos finitos. Asociadas a la partición anterior se construye un espacio vectorial de dimensión finita, llamado espacio de elementos finitos. Siendo la solución numérica aproximada obtenida por elementos finitos una combinación lineal en dicho espacio vectorial.
- Se obtiene la proyección del problema variacional original sobre el espacio de elementos finitos obtenido de la partición. Esto da lugar a un sistema con un número de ecuaciones finito, aunque en general con un número elevado de ecuaciones incógnitas. El número de incógnitas será igual a la dimensión del espacio vectorial de elementos finitos obtenido y, en general, cuanto mayor será dicha dimensión tanto mejor será la aproximación numérica obtenida.
- El último paso es el cálculo numérico de la solución del sistema de ecuaciones.

Los pasos anteriores permiten sustituir un problema de cálculo diferencial por un problema de álgebra lineal (Fig.1.1). Dicho problema, en general, se plantea sobre un espacio vectorial de dimensión no finita, pero que puede resolverse aproximadamente encontrando una proyección sobre un subespacio de dimensión finita y, por tanto, con un número finito de ecuaciones (aunque en general el número de ecuaciones será elevado, típicamente de miles o incluso de centenares de miles). La discretización en elementos finitos ayuda a construir un algoritmo de proyección sencillo, logrando además que la solución por el método de elementos finitos sea generalmente exacta en un conjunto finito de puntos. Estos puntos coinciden usualmente con los vértices de los elementos finitos o puntos destacados de los mismos. Para la resolución concreta del enorme sistema de ecuaciones algebraicas, en general, pueden usarse los métodos convencionales de álgebra lineal en espacios de dimensión finita.

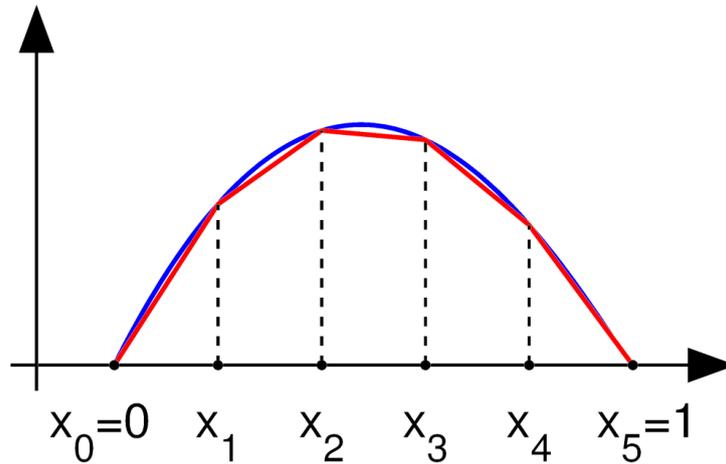


Fig.1.1: Aproximación de una función en tramos rectilíneos.

1.3- EL MEF EN LA PRÁCTICA.

Consideramos a continuación la práctica del método de los elementos finitos ya que, en este proyecto, se resolverán varios problemas haciendo uso del mismo y realizando los cálculos con un programa comercial avanzado (Abaqus).

El MEF es un método numérico de resolución de ecuaciones diferenciales. La solución obtenida por MEF es sólo aproximada, coincidiendo con la solución exacta sólo en un número finito de puntos llamados nodos. En el resto de puntos que no son nodos, la solución aproximada se obtiene interpolando a partir de los resultados obtenidos para los nodos, lo cual hace que la solución sea sólo aproximada debido a ese último paso.

El MEF convierte un problema definido en términos de ecuaciones diferenciales en un problema definido de forma matricial que proporciona el resultado correcto para un número finito de puntos e interpola posteriormente la solución al resto del dominio, resultando finalmente sólo una solución aproximada. El conjunto de puntos donde la solución es exacta se denomina conjunto de nodos. Dicho conjunto de nodos forma una red, denominada malla formada por retículos. Cada uno de los retículos contenidos en dicha malla es un “*elemento finito*”. El conjunto de nodos se obtiene dividiendo o discretizando la estructura con elementos de forma variada (pueden ser superficies, volúmenes y barras).

Desde el punto de vista de la programación algorítmica modular, las tareas necesarias para llevar a cabo un cálculo mediante un programa de MEF se dividen en:

- **Preproceso**, que consiste en la definición de geometría, generación de la malla, las condiciones de contorno y asignación de propiedades a los materiales y otras propiedades. En ocasiones existen operaciones cosméticas de regularización de la malla y precondicionamiento para garantizar una mejor aproximación o una mejor convergencia del cálculo.
- **Cálculo** (o **proceso**), el resultado del preproceso, en un problema simple no dependiente del tiempo, permite generar un conjunto de N ecuaciones y N incógnitas, que puede ser resuelto con cualquier algoritmo para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Cuando el problema a tratar es un problema no lineal o un problema dependiente del tiempo a veces el cálculo consiste en una sucesión finita de sistemas de N ecuaciones y N incógnitas que deben resolverse uno a continuación de otro, y cuya entrada depende del resultado del paso anterior.
- **Postproceso**, el cálculo proporciona valores de cierto conjunto de funciones en los nodos de la malla que define la discretización, en el postproceso se calculan magnitudes derivadas de los valores obtenidos para los nodos y, en ocasiones, se aplican operaciones de suavizado, interpolación e incluso determinación de errores de aproximación.

1.3.1.- Preproceso y generación de la malla.

La malla se genera y ésta en general consta de miles (e incluso de centenares de miles) de puntos. La información sobre las propiedades del material y otras características del problema se almacena junto con la información que describe la malla. Por otro lado, las fuerzas, los flujos térmicos o las temperaturas se reasignan a los puntos de la malla. A los nodos de la malla se les asigna una densidad por todo el material dependiendo del nivel de la tensión mecánica u otra propiedad. Las regiones que recibirán gran cantidad de tensión tienen normalmente una mayor densidad de nodos (densidad de malla) que aquellos que experimentan poco o ninguno. Puntos de interés consisten en: puntos de fractura previamente probados del material, entrantes, esquinas, detalles complejos, y áreas de elevada tensión. La malla actúa como la red de una araña en la que desde cada nodo se extiende un elemento de malla a cada nodo adyacente. Este tipo de red vectorial es la que lleva las propiedades del material al objeto, creando varios elementos.

Las tareas asignadas al preproceso son:

- El conjunto se divide, mediante líneas o superficies imaginarias en un número de elementos finitos. Esta parte del proceso se desarrolla habitualmente mediante algoritmos incorporados a programas informáticos de mallado durante la etapa de preproceso.
- Se supone que los elementos están conectados entre sí mediante un número discreto de puntos o “*nodos*”, situados en sus contornos. Los desplazamientos de estos nodos serán las incógnitas fundamentales del problema tal y como ocurre en el análisis simple de estructuras o elementos mecánicos por el método matricial.
- Se toma un conjunto de funciones que definan de manera única el campo de desplazamientos dentro de cada “*elemento finito*”, en función de los desplazamientos nodales de dicho elemento. Por ejemplo, el campo de desplazamientos dentro de un elemento lineal de dos nodos podría venir definido por: $u = N_1 u_1 + N_2 u_2$, siendo N_1 y N_2 las funciones comentadas (funciones de forma) y u_1 u u_2 los desplazamientos en el nodo 1 y en el nodo 2.
- Estas funciones de desplazamientos definirán entonces de manera única el estado de deformación del elemento en función de los desplazamientos nodales. Estas deformaciones, junto con las propiedades constitutivas del material, definirán a su vez el estado de tensiones en todo el elemento y, por consiguiente, en sus contornos.
- Se determina un sistema de fuerzas concentradas en los nodos, tal que equilibre las tensiones en el contorno y cualesquiera carga repartidas, resultando así una relación entre fuerzas F y desplazamientos u de la forma $F = k u$, que es similar a la del cálculo matricial.

1.3.2. Cálculo y resolución de sistema de ecuaciones.

En un problema mecánico lineal no dependiente del tiempo, como un problema de análisis estructural estático o un problema elástico, el cálculo generalmente se reduce a obtener los desplazamientos en los nodos y con ellos definir de manera aproximada el campo de desplazamientos en el elemento finito.

Cuando el problema es no lineal, en general, la aplicación de las fuerzas requiere la aplicación incremental de las mismas y considerar incrementos numéricos, y calcular en cada incremento algunas magnitudes referidas a los nodos. Algo similar sucede con los problemas dependientes del tiempo, para los que se considera una sucesión de instantes, en general bastante cercanos al tiempo, y se considera el equilibrio instantáneo en cada instante. En general estos dos últimos tipos de problemas requieren un tiempo de cálculo substancialmente más elevado que en un problema estacionario y lineal.

1.3.3.- Postproceso.

Actualmente, el MEF es usado para calcular problemas tan complejos que los ficheros de resultados que generan los programas de cálculo MEF tienen tal cantidad de datos que resulta conveniente procesarlos de alguna manera adicional para hacerlos más comprensibles e ilustrar diferentes aspectos del problema. En la etapa de postproceso los resultados obtenidos de la resolución del sistema son tratados para obtener representaciones gráficas y obtener magnitudes derivadas, que permiten extraer conclusiones del problema.

El postproceso del MEF generalmente requiere software adicional para organizar los datos de salida, de tal manera que sea más fácilmente comprensible el resultado y permita decidir si ciertas consecuencias del problema son o no aceptables. En el cálculo de estructuras por ejemplo, el postproceso puede incluir comprobaciones adicionales de si una estructura cumple los requisitos de las normas pertinentes, calculando si se sobrepasan tensiones admisibles o existe la posibilidad del pandeo en la estructura.

1.4- TIPOS DE ANÁLISIS EN INGENIERÍA.

El programador puede insertar numerosos algoritmos o funciones que pueden hacer al sistema comportarse de manera lineal o no lineal. Los sistemas lineales son menos complejos y normalmente no tienen en cuenta deformaciones plásticas. Los sistemas no lineales toman en cuenta las deformaciones plásticas y algunos, incluso, son capaces de verificar si se presentaría fractura en el material.

Algunos tipos de análisis en ingeniería comunes que usan el método de los elementos finitos son:

- **Análisis estático:** se emplea cuando la estructura está sometida a acciones estáticas, es decir, no dependientes del tiempo.
- **Análisis vibracional:** es usado para analizar una estructura sometida a vibraciones aleatorias, choques o impactos. Cada una de estas acciones puede actuar en la frecuencia natural de la estructura y causar resonancia y el consecuente fallo.
- **Análisis de fatiga:** ayuda a los diseñadores a predecir la vida del material o de la estructura, prediciendo el efecto de los ciclos de carga sobre el espécimen. Este análisis puede mostrar las áreas donde es más probable que se presente una grieta. El análisis por fatiga puede también predecir la tolerancia al fallo del material.
- **Análisis térmico:** Los modelos de análisis de transferencia de calor por conductividad o por dinámicas térmicas de flujo del material. El estado continuo de transferencia se refiere a las propiedades térmicas en el material que tiene una difusión lineal de calor.

1.5- RESULTADOS DEL MEF.

El MEF se ha vuelto una solución para la tarea de predecir los fallos debidos a tensiones desconocidas, mostrando la distribución de tensiones en el material y permitiendo así a los diseñadores ver todas las tensiones involucradas. Este método de diseño y prueba del producto es mejor que el ensayo y error, donde hay que añadir costos de manufactura asociados a la construcción de cada ejemplar o prototipo para las pruebas.

Las grandes ventajas del cálculo por ordenador se pueden resumir en:

- Hace posible el cálculo de estructuras que, bien por el gran número de operaciones que su resolución presenta (entramados de muchos pisos, por ejemplo) o por lo tedioso de las mismas (entramados espaciales, por ejemplo) eran, en la práctica, inabordables mediante el cálculo manual.
- En la mayoría de los casos reduce a límites despreciables el riesgo de errores operativos.

1.6- LIMITACIONES.

En general, el MEF tal como se usa actualmente tiene algunas limitaciones:

- El MEF calcula soluciones numéricas concretas y adaptadas a unos datos particulares de entrada, no puede hacerse un análisis de sensibilidad sencillo que permita conocer como variará la solución si alguno de los parámetros se altera ligeramente. Es decir, proporciona sólo respuestas numéricas cuantitativas concretas, no relaciones cualitativas generales.
- El MEF proporciona una solución aproximada cuyo margen de error en general es desconocido. Si bien algunos tipos de problemas permiten acotar el error de la solución, debido a los diversos tipos de aproximaciones que usa el método, los problemas no lineales o dependientes del tiempo en general no permiten conocer el error.
- En el MEF la mayoría de aplicaciones prácticas requieren mucho tiempo para ajustar detalles de la geometría, existiendo frecuentemente problemas de mal acondicionamiento de mallas, desigual grado de convergencia de la solución aproximada hacia la solución exacta en diferentes puntos, etc. En general, una simulación requiere el uso de numerosas pruebas y ensayos con geometrías simplificadas o casos menos generales que el que finalmente pretende simularse, antes de empezar a lograr resultados satisfactorios.

1.7- EL ENTORNO DE ABAQUS.

Para la resolución de los problemas que se plantean en este proyecto se ha utilizado el programa informático Abaqus, un programa de cálculo por elementos finitos de propósito general elaborado por la empresa *Hibbit, Karlsson & Sorensen, Inc.*

Abaqus permite resolver problemas de mecánica del sólido, lineales y no lineales, en los rangos estático y dinámico. Incluye modelos de material tipo elastoplástico y viscoplástico, entre otros. En cuanto se refiere a problemas de no linealidad geométrica incluye formulaciones para grandes deformaciones y problemas de contacto.

Abaqus incluye también formulaciones acopladas sólido-fluido de tipo 1 (fluido como medio independiente con una interfase de contacto con el medio sólido). Además tiene capacidad para resolver problemas de análisis piezoeléctrico, de transmisión de calor, de difusión de masa y de análisis de termoeléctrico acoplado.

A continuación, en la figura 1.2 se muestra la pantalla general de Abaqus:

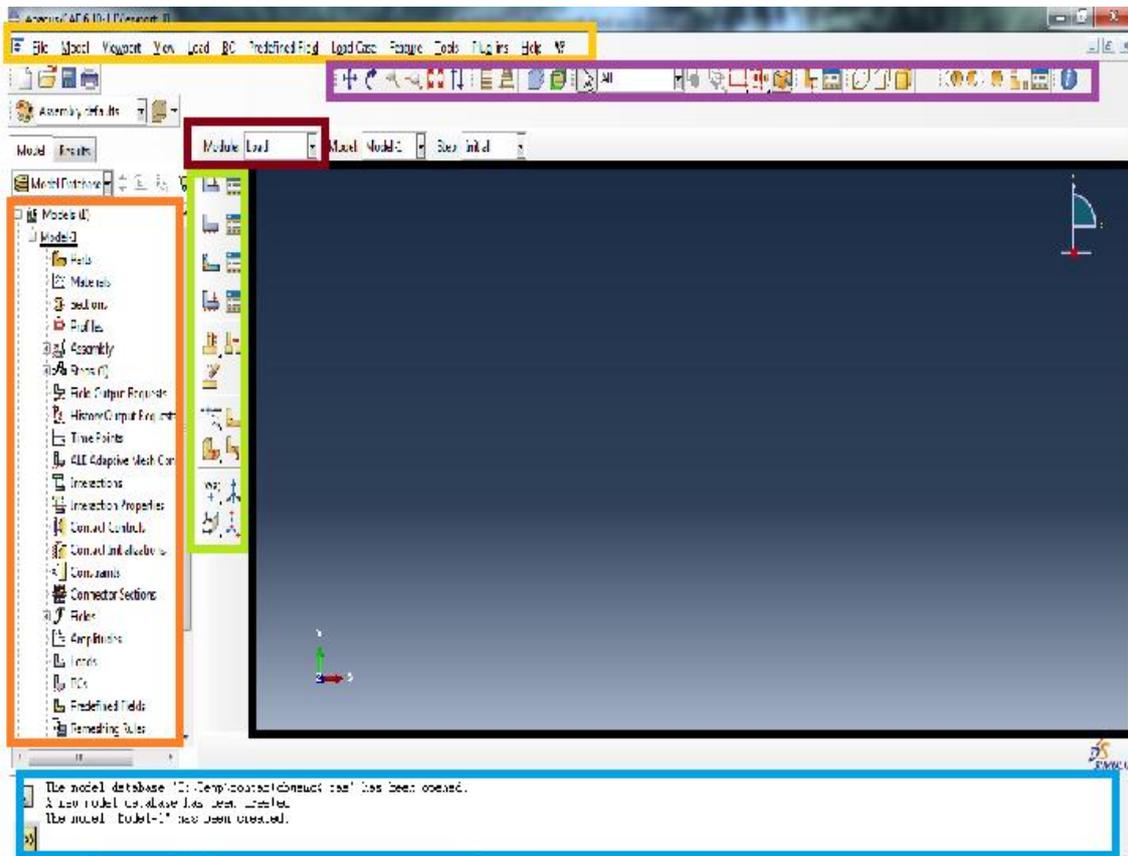


Fig.1.2 Pantalla principal de ABAQUS con las diferentes partes marcadas en colores.

La figura aparece la pantalla que Abaqus muestra cuando iniciamos el programa, en ella se han recuadrado con colores las partes que interesa conocer en un primer momento, cuando se inicia del manejo del programa. A continuación se detallan esas partes:

- **Color azul:** es la parte donde aparecen todas las operaciones que se van realizando, por ejemplo, aunque en la figura no se aprecia, al abrir el programa te indica que un nuevo modelo ha sido creado. También, aunque en este proyecto no se ha utilizado, permite la programación manual, es decir, introducir los comandos escribiéndolos directamente en dicha barra.

- **Color negro:** es el cuadro donde aparecen los cuerpos que se van creando, es decir, el área de representación del modelo, según añadamos geometría, condiciones de contorno, mallado, etc. Todas ellas se muestran de manera visual y gráfica. Una vez lanzado el cálculo y resuelto el problema, en este área se presenta la pieza analizada con las distribuciones de las diferentes tensiones, desplazamientos, etc. También se pueden representar gráficas que muestran la variación de alguna variable respecto a otra o respecto de un parámetro fijo.
- **Color amarillo:** es la barra de comandos, en ella se encuentran las diferentes opciones y herramientas que se pueden utilizar para ir construyendo el problema y diseñando el modelo. Dependiendo del módulo en el que se trabaje, esas opciones cambiarán.
- **Color morado:** es una barra donde aparecen extraídos algunos de los iconos más importantes de visualización. Permiten girar el modelo por el área de representación, moverlo en el plano, modificar su tamaño aparente, presentar la pieza con mallado o sin él,...
- **Color rojo:** este cuadro es uno de los más importantes, debe, por tanto, entenderse y saber aplicar. Es en él en el que se puede cambiar de módulo, cada módulo permite crear una parte del modelo, casi todos son indispensables en todo tipo de problemas. Para que nos entendamos, de nada sirve modelar dos cuerpos y dibujarlos juntos pues, entre ellos no hay interacción, si en otro módulo distinto no se crea un contacto entre sus superficies, por ejemplo.

Hay los siguientes módulos:

- **PART:** en él se crean las partes se define la geometría del problema, se elige la escala de dibujo, y se modela el cuerpo que deseemos, tanto en 3D como en dos dimensiones.
- **PROPERTY:** esta es la parte donde se elige el material, hay opciones múltiples para dotarle de multitud de características: densidad, coeficiente de Poisson, módulo de elasticidad, etc. Se asignan los materiales a los cuerpos creados en el anterior paso y así su comportamiento viene definido por las propiedades asignadas.

- ASSEMBLY: en él se define la independencia o dependencia de una parte con otra a la hora de mallar. Se puede crear un modelo con varias partes pero, a la hora de mallar, puede efectuarse parte por parte, o se puede mallar el conjunto a la vez. También permite mover una parte respecto a la otra, por ejemplo si se quiere que dos puntos determinados estén en contacto. Este tipo de contacto es meramente geométrico, no define ningún tipo de interacción entre las partes.
- STEP: este es el paso donde se define el tipo de cálculo que queremos que siga el programa, bien estático, dinámico, viscoso, etc. Se puede elegir el número máximo de incrementos, así como su tamaño máximo y mínimo, para aproximar el cálculo por tramos lineales como se vio en la figura 1.1.
También se puede incluir la opción de considerar efectos no lineales.
- INTERACTION: es el módulo dedicado a crear interacciones entre los distintas partes. Siguiendo con el ejemplo del contacto, aquí es donde se introducen las propiedades de dicho contacto y se definen los cuerpos que entrarán en contacto.
- LOAD: en esta parte se definen las condiciones de contorno que se aplican al modelo y se indica donde se aplican. Las restricciones pueden ser de cualquier tipo: apoyos simples, empotramientos, ...
- MESH: aquí se define la malla del modelo: tipo de elemento, número de elementos, etc. La exactitud de los cálculos depende mucho de la buena elección de la malla.
- JOB: en él se crea un trabajo a partir del cual el programa comienza a calcular con la información introducida en él. Esta es una parte donde se muestran opciones de carácter informático, como el tamaño de memoria que se requiere y otras cuestiones de la misma índole. Una vez efectuado el cálculo, presenta una pantalla donde da la opción de ver los resultados o, en el caso de que haya habido error, mostrar el curso del trabajo y dónde y por qué ha parado.
- VISUALIZATION: muestra los resultados. Muestra el modelo analizado con los desplazamientos o con las distribuciones de las distintas de tensiones. Como opción muy interesante, es capaz de crear una tabla

numérica, que se guardará en una carpeta externa, con el valor de cualquier variable elegida en los nodos o elementos.

- SKETCH: permite introducir en la pantalla cuadriculada las herramientas de dibujo (también se abre en el primer módulo cuando se crea una parte).

- **Color verde:** esta parte de la pantalla proporciona algunos iconos con las funciones más importantes de cada módulo, es decir, según en el módulo con el que se esté trabajando, estos iconos cambiarán. Todos ellos son opciones que se encuentran en la barra de comandos, marcada con amarillo, simplemente es una manera en la que el programa nos facilita ahorrar tiempo.

- **Color naranja:** esta parte izquierda de la pantalla muestra el historial de lo que se va haciendo con aquellas condiciones y propiedades que se van introduciendo en el modelo creado. En esta barra se puede también seleccionar, editar, borrar,...cualquier geometría, propiedad, etc. Es una especie de resumen, de mucha ayuda en el trabajo porque muestra todo lo que se ha creado en un determinado momento de la programación.

2 ESFUERZOS EN CILINDROS.

2. ESFUERZOS EN CILINDROS

2.1- INTRODUCCIÓN

Con frecuencia se utilizan recipientes a presión o tubos que pueden ser sujetos a presiones internas y/o externas. Algunas aplicaciones comunes son cilindros de aire o hidráulicos, depósitos de almacenamiento de fluidos y tuberías, así como cañones para armas. Algunos de estos dispositivos tienen uno o los dos extremos abiertos y algunos están cerrados. Si tienen un extremo abierto, aparecerá un estado de **esfuerzos radiales** σ_r y **tangenciales** σ_t (de anillo). Si están cerrados, también estará presente un esfuerzo en la tercera dimensión llamado **longitudinal o axial** σ_z . Estos tres esfuerzos aplicados son mutuamente ortogonales y son principales, ya que no hay cortante debido a la presión uniformemente distribuida.

Se pueden estudiar cilindros de pared gruesa, cuyas ecuaciones son exactas y válidas para cualquier caso, y hay una teoría más específica para cilindros de pared delgada, en la que se usan ecuaciones aproximadas y simplificadas, válidas a partir de un determinado espesor.

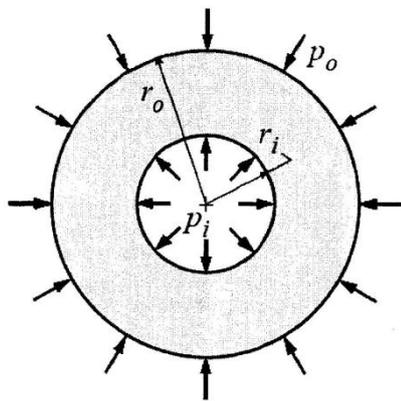
Tendremos en cuenta para todo el desarrollo de la teoría la siguiente hipótesis: la deformación longitudinal es constante en cada sección, por lo que las secciones transversales planas del cilindro permanecen planas $\rightarrow \epsilon_z = \text{CTE}$.

Para terminar esta pequeña introducción, hay que mencionar también la posibilidad de que la presión a la que esté sometido el cilindro pueda ser interior, exterior o ambas a la vez. En la teoría que se expone a continuación, se deducirán las ecuaciones para el caso más general posible, con ambas presiones y, a partir de ellas, se particularizará para los distintos casos posibles, obteniendo las ecuaciones correspondientes.

2.2- CILINDROS DE PRESIÓN. CASO GENERAL PARED GRUESA.

A continuación se obtendrán las ecuaciones más generales para los cilindros sometidos a presión. A partir de ese resultado general, la solución se simplificará dependiendo las distintas hipótesis, como puede ser el caso de los cilindros de pared delgada.

En la figura 2.1 se muestra un esquema de una sección transversal de un cilindro sometido a presión interna y externa.



$r_i \rightarrow$ radio interior del cilindro

$r_o \rightarrow$ radio exterior del cilindro

$p_i \rightarrow$ presión interna

$p_o \rightarrow$ presión externa

Fig.2.1: esquema general de un cilindro con presión interna y externa.

Aplicando la ley de Hook tenemos la siguiente ecuación para la deformación a lo largo del cilindro (ϵ_z), que, como dijimos en la introducción, consideraremos constante, por lo que tenemos:

$$\epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_r + \sigma_t) \quad \rightarrow \quad \sigma_r + \sigma_t = CTE = 2c_1$$

$$\text{Como: } \epsilon_z = CTE \quad \rightarrow \quad \sigma_z = 0$$

A continuación, se estudia un elemento diferencial (Fig.2.3) del cilindro (Fig.2.2) y, a partir del equilibrio del mismo, se determinan las diferentes tensiones a las que está sometido (Fig.2.4). Se inicia así el desarrollo de la demostración hasta llegar a las **ecuaciones de Lamé**.

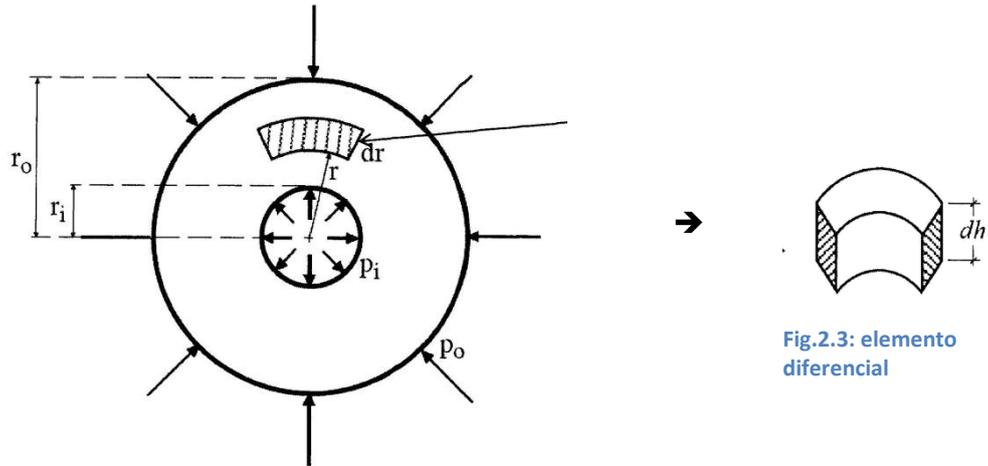


Fig.2.2: elemento diferencial dentro del cilindro.

Fig.2.3: elemento diferencial

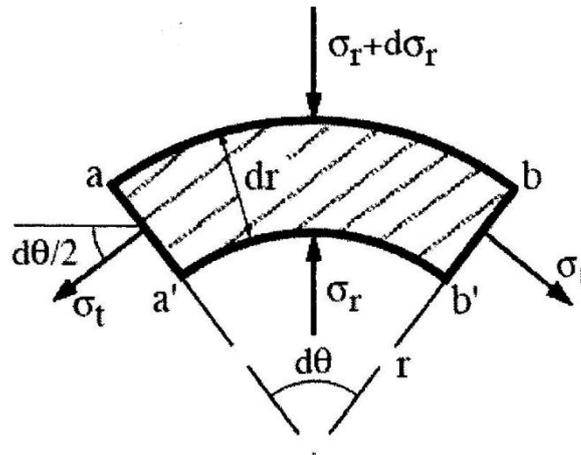


Fig.2.4: detalle de las tensiones en el elemento diferencial.

El elemento diferencial tendrá un volumen infinitesimal que viene dado por la siguiente expresión diferencial:

$$dV = r d\theta dr dh$$

$$a'b' \Rightarrow \sigma_r r d\theta dh$$

Aparecerán las siguientes fuerzas: $\rightarrow ab \Rightarrow (\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr)d\theta dh$

$$aa' \text{ y } bb' \Rightarrow \sigma_t dr dh$$

Como el sumatorio de fuerzas tiene que ser cero (elemento en equilibrio) se tiene lo siguiente:

$$\sum F_r = 0 \rightarrow (\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr)d\theta dh = \sigma_r r d\theta dh + 2\sigma_t dr dh \operatorname{sen}\left(\frac{d\theta}{2}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \sigma_t = \sigma_r + r \frac{d\sigma_r}{dr} \rightarrow \sigma_t = 2c_1 - \sigma_r = \sigma_r + r \frac{d\sigma_r}{dr} \rightarrow \frac{d\sigma_r}{\sigma_r - c_1} = -2 \frac{dr}{r}$$

Integrando la última ecuación obtenemos:

$$\ln(\sigma_r - c_1) = -2 \ln(r) + C \rightarrow \text{sustituyendo } C = \ln c_2$$

$$\ln(\sigma_r - c_1) = \ln c_2 - \ln(r^2) = \ln\left(\frac{c_2}{r^2}\right) \rightarrow \sigma_r = c_1 + \frac{c_2}{r^2} \rightarrow \sigma_t = 2c_1 - \sigma_r$$

$$\text{de donde } \sigma_t = c_1 - \frac{c_2}{r^2}$$

A continuación, se introducen las condiciones de contorno y se determinan los valores de c_1 y c_2 :

$$\left\{ \begin{array}{l} r = r_i \rightarrow \sigma_r = -p_i \rightarrow c_1 + \frac{c_2}{r_i^2} = -p_i \\ r = r_0 \rightarrow \sigma_r = -p_0 \rightarrow c_1 + \frac{c_2}{r_0^2} = -p_0 \end{array} \right.$$

De donde:

$$\boxed{c_1 = \frac{p_i r_i^2 - p_0 r_0^2}{r_0^2 - r_i^2} \quad c_2 = \frac{(p_0 - p_i) r_0^2 r_i^2}{r_0^2 - r_i^2}}$$

Conociendo estos dos valores podemos deducir expresiones para los esfuerzos tangenciales y radiales en función de los radios y las presiones (interna y externa)

para el caso más general posible, a estas ecuaciones se las conoce como **ecuaciones de Lamé**:

$$\sigma_t = \frac{p_i r_i^2 - p_o r_o^2 - r_i^2 r_o^2 (p_o - p_i) / r^2}{r_o^2 - r_i^2} \quad \sigma_r = \frac{p_i r_i^2 - p_o r_o^2 + r_i^2 r_o^2 (p_o - p_i) / r^2}{r_o^2 - r_i^2}$$

Con estas dos ecuaciones se pueden obtener ambas tensiones en cualquier cilindro, independientemente de las presiones y del espesor, son válidas para cualquier caso, A partir de aquí analizaremos los casos más particulares suponiendo varias hipótesis.

Antes hay que señalar que estas tensiones son **principales (Fig.2.5)**. La distribución de ambas se muestra en la figura 2.6 cuando no hay presión externa.:

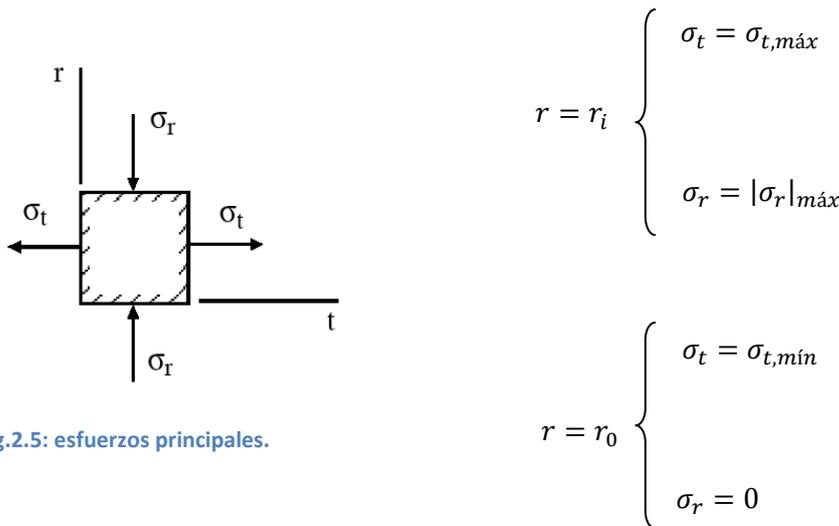


Fig.2.5: esfuerzos principales.

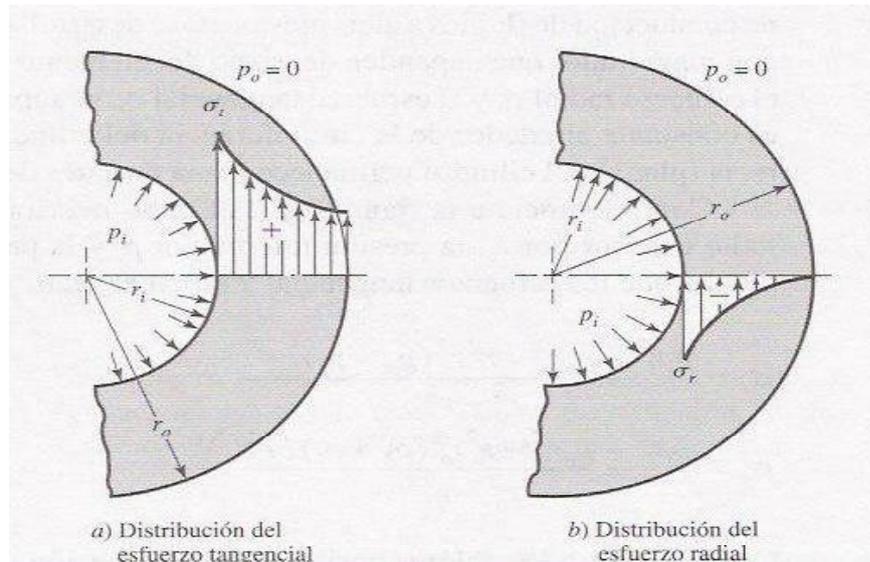


Fig.2.6: distribuciones de las tensiones tangenciales y radiales.

Por otro lado, tenemos que hablar de los esfuerzos longitudinales (eje Z) cuando el cilindro está cerrado en sus extremos y $p_o=0$. Son constantes (Fig.2.7), y vienen dados por la siguiente expresión:

$$\sum F_z = 0 \rightarrow \sigma_z \pi (r_o^2 - r_i^2) = p_i \pi r_i^2$$

$$\sigma_z = \frac{p_i r_i^2}{r_o^2 - r_i^2} = CTE$$

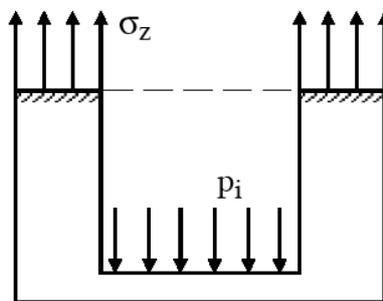


Fig.2.7: esfuerzos longitudinales

2.3- CASOS PARTICULARES. CILINDROS DE PARED DELGADA.

En caso de que los extremos del cilindro estén cerrados, el esfuerzo axial sobre los mismos es:

$$\sigma_z = \frac{p_i r_i^2 - p_o r_o^2}{r_o^2 - r_i^2}$$

Se puede observar en esta ecuación la ausencia de r , ya que el esfuerzo axial es uniforme en todo el espesor de la pared de cierre.

Si la presión externa es nula, $p_o = 0$, entonces las ecuaciones se reducen a:

$$\sigma_t = \frac{r_i^2 p_i}{r_o^2 - r_i^2} \left(1 + \frac{r_o^2}{r^2} \right) \quad \sigma_r = \frac{r_i^2 p_i}{r_o^2 - r_i^2} \left(1 - \frac{r_o^2}{r^2} \right)$$

Y si están cerrado en sus extremos:

$$\sigma_z = \frac{p_i r_i^2}{r_o^2 - r_i^2}$$

Otro caso que se puede suponer, es un cilíndrico macizo sometido a una presión p_o sobre su superficie lateral y a una presión q sobre sus bases, con esta hipótesis aparece un estado de esfuerzos uniforme en el que sobre su superficie lateral o cualquier superficie paralela de radio r actuarán los esfuerzos $\sigma = -p_o$, y sobre las superficies paralelas a las bases los esfuerzos $\sigma = -q$.

Haciendo en las ecuaciones de Lamé:

Cilindro macizo: $r_i = 0$ sin presión interna: $p_i = 0$

resulta $\rightarrow \sigma_t = -p_o \quad \sigma_r = -p_o$

y, además, del equilibrio sobre cualquier sección paralela a las bases:

$\sigma_z \pi r_o^2 = -q \pi r_o^2 \rightarrow \sigma_z = -q$ (son esfuerzos de tracción \rightarrow signo negativo)

Se considera que un cilindro es de pared delgada cuando tiene un espesor “ t ” pequeño tal que:

$$t \leq \frac{1}{10} r_i$$

El esfuerzo radial producido por la presión del contenido del cilindro es muy pequeño en comparación con el esfuerzo tangencial.

$$r_0 = r_i + t \xrightarrow{\text{aproximamos}} r_0^2 = r_i^2 + 2r_it + t^2 \cong r_i^2 + 2r_it$$

Suponemos $p_0 = 0$ (no hay presión exterior):

$$r = r_i \left\{ \begin{array}{l} \sigma_r = \frac{p_i r_i^2}{2r_it} \left[1 - \left(\frac{r_i+t}{r_i} \right)^2 \right] \cong \frac{p_i r_i}{2t} \left[1 - \left(1 + \frac{2t}{r_i} \right) \right] = -p_i \\ \sigma_t = \frac{p_i r_i^2}{2r_it} \left[1 + \left(\frac{r_i+t}{r_i} \right)^2 \right] \cong \frac{p_i r_i}{2t} \left[1 + \left(1 + \frac{2t}{r_i} \right) \right] = \frac{p_i r_i}{t} + p_i \end{array} \right.$$

$$r = r_0 \left\{ \begin{array}{l} \sigma_r = \frac{p_i r_i^2}{2r_it} [1 - 1] = 0 \\ \sigma_t = \frac{p_i r_i^2}{2r_it} [1 + 1] = \frac{p_i r_i}{t} \end{array} \right.$$

Valor medio:

$$\sigma_{t,med.} = \frac{p_i r_i}{t} + \frac{1}{2} p_i = \frac{p_i (2r_i + t)}{2t} = \frac{p_i (d_i + t)}{2t}$$

$$d_i + t = d_m \rightarrow \text{diámetro medio} \quad r_i + \frac{t}{2} = r_m \rightarrow \text{radio medio}$$

$$\sigma_{t,med.} = \frac{p_i r_m}{t}$$

$$\text{Pared delgada} \rightarrow t \ll d_i \rightarrow \sigma_{t,med.} \cong p_i \frac{d_i}{2t} \gg p_i = -\sigma_{r,máx.} \rightarrow \sigma_r \ll \sigma_t \rightarrow$$

→ **Esfuerzo radial despreciable en comparación con el esfuerzo tangencial.**

Después de todas estas consideraciones se trabaja, cuando el cilindro es de pared delgada, con las siguientes ecuaciones:

$$- \text{ En todo el espesor: } \left\{ \begin{array}{l} \sigma_r = 0 \\ \sigma_t = p_i \frac{r_m}{t} \cong p_i \frac{d_i}{2t} \end{array} \right.$$

$$- \text{ Cilindro cerrado en los extremos: } \sigma_z \cong p_i \frac{r_i^2}{2r_i t} = p_i \frac{d_i}{4t}$$

- Deformaciones:

$$\varepsilon_t = \frac{\sigma_t}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_r + \sigma_z)$$

$$\sigma_r = 0 \quad \sigma_z = 0 \text{ (por ejemplo, anillos)} \rightarrow \varepsilon_t = \frac{\sigma_t}{E} \rightarrow$$

$$\rightarrow \varepsilon_t = \frac{\Delta(2\pi r_i)}{2\pi r_i} = \frac{\Delta r_i}{r_i} = \frac{p_i d_i}{2tE} .$$

Todas estas ecuaciones son válidas únicamente en ubicaciones lejos de cualquier concentración local de esfuerzos o de cambio de sección.

Los recipientes a presión llegan a resultar en extremo peligrosos, incluso a presiones relativamente bajas si el volumen almacenado es grande y el medio a presión es compresible. De ocurrir alguna falla, se llegan a liberar grandes cantidades de energía de manera súbita, con las consiguientes lesiones a los operarios.

3 PROBLEMA 1: CILINDROS A PRESIÓN.

3. Problema 1: CILINDROS A PRESIÓN.

3.1- INTRODUCCIÓN.

Este es el primer problema de este proyecto, en él se va a utilizar el programa **Abaqus 6.8**. Se resolverá por el método de los elementos finitos (MEF) problemas sobre los cilindros a presión (es el caso, por ejemplo de depósitos o recipientes) (Fig.3.1).

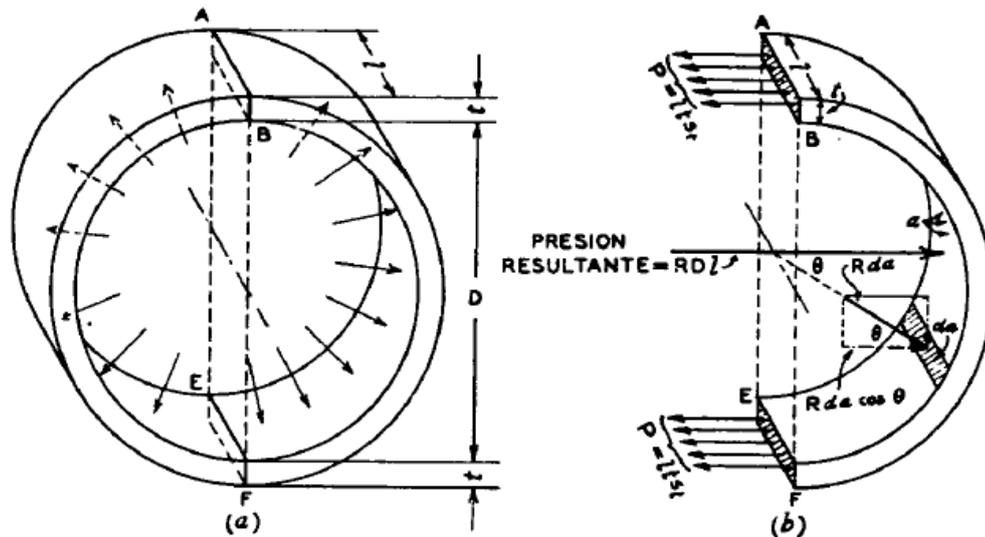


Fig.3.1: esquema general de un cilindro a presión.

En este problema se plantean varias cuestiones. Se trata de mostrar, por ejemplo, como los resultados de la teoría aproximada de cilindros de pared delgada se va ajustando a los resultados de los cálculos MEF según se va reduciendo el espesor de la pared del cilindro. Calcularemos los errores que se producen entre la teoría exacta, la aproximación de pared delgada y los resultados obtenidos con el programa de cálculo MEF. También se mostrará la distribución de tensiones para cilindros estudiados (cuatro) en la sección central de todos ellos, y como varía según nos movemos en dirección radial por la pared de cada cilindro.

Se ha considerado que la presión externa es cero ($p_0 = 0$) en todos los casos, lo que reduce las ecuaciones para las tensiones tangenciales y radiales de la teoría exacta a las siguientes expresiones:

$$\sigma_t = \frac{r_i^2 p_i}{r_0^2 - r_i^2} \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) \quad \sigma_r = \frac{r_i^2 p_i}{r_0^2 - r_i^2} \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right)$$

Donde p_i es la presión interior y r_0 y r_i el radio exterior e interior del cilindro.

Las fórmulas equivalentes según la teoría aproximada para cilindros de pared delgada son:

$$\sigma_t = \frac{pr}{t} \quad \sigma_r = 0$$

Donde p es la presión, r el radio medio y t el espesor.

3.2- MODELADO DEL PROBLEMA CON ELEMENTOS FINITOS.

A continuación, se pasa a describir el método utilizado para modelar el problema con el programa de cálculos avanzados por elementos finitos ABAQUS 6.8. Se describirán las operaciones a realizar así como los comandos necesarios para llevar a cabo el modelado. Todo cálculo con elementos finitos se puede dividir en tres operaciones un **preproceso**, **proceso** y **postproceso**. El proceso consiste fundamentalmente en los cálculos internos que efectúa el programa utilizado, por lo que aquí se explicarán las otras dos partes.

3.2.1.- Preproceso.

3.2.1.1. Geometría.

En este problema que se ha decidido trabajar en milímetros y milímetros cuadrados, se ha creído que son unidades más convenientes para analizar de mejor manera la variación de todos los factores que son estudio de este problema.

Lo primero es definir la geometría del modelo a estudiar. Aunque el problema real sea en 3 dimensiones, se puede estudiar una sección longitudinal del cilindro reduciendo el problema a uno bidimensional. Dada la simetría cilíndrica, se ha optado por trabajar en coordenadas cilíndricas siendo el eje radial el horizontal, el tangencial el perpendicular a la pantalla y el eje Z el del sentido longitudinal del cilindro (Vertical en este caso). Bastará con trazar un único rectángulo con la altura del cilindro y el ancho

correspondiente al espesor (sección longitudinal). Se creará con la opción de axisimetría para que así nuestro rectángulo se interprete como una superficie que tiene que girar alrededor de un eje para formar un cilindro.

La longitud l de los cuatro cilindros considerados será de 120 mm.

Geometrías estudiadas:

El **caso 1** tiene las siguientes dimensiones: un diámetro interior d_i de 236 mm y un diámetro exterior d_o de 240 mm, por lo que tiene un espesor t de 2 mm.

El **caso 2** tiene las siguientes: un diámetro interior d_i de 232 mm y un diámetro exterior d_o de 240 mm, por lo que tiene un espesor t de 4 mm.

El **caso 3** tiene las siguientes: un diámetro interior d_i de 216 mm y un diámetro exterior d_o de 240 mm, por lo que tiene un espesor t de 12 mm.

El **caso 4** tiene las siguientes: un diámetro interior d_i de 160 mm y un diámetro exterior d_o de 240 mm, por lo que tiene un espesor t de 40 mm.

3.2.1.2. Materiales.

En cuanto a sus dimensiones, ya están todos los cilindros definidos. A continuación se describirá el material. Será común a todos, lo que es lógico, ya que se desea comparar la variación que sufren las tensiones y deformaciones simplemente modificando el espesor. Se trabajará con cilindros de acero estándar con las siguientes características:

- Módulo de elasticidad E : 210000 N/mm²
- Coeficiente de Poisson μ : 0.3.

Siempre se trabajará en la zona elástica del material, no se considerará ningún efecto plástico. Tampoco interviene en ninguna parte del problema otro tipo de efectos como dilataciones térmicas.

3.2.1.3. Condiciones de contorno.

Otra propiedad común para los cuatro casos antes expuestos es que todos ellos son cilindros sin tapas, es decir, toda la presión la soportará la pared del cilindro.

Hay que introducir también las condiciones de contorno y las cargas a las que esté sometido el cilindro. Aplicaremos una carga distribuida a lo largo de la línea interior del rectángulo que representa el cilindro, el programa la reinterpreta como una carga distribuida o presión aplicada a toda la superficie interior del cilindro. En nuestro ejercicio se ha empleado una **presión de 2.4 MPa** o, lo que es lo mismo, 2.4 N/mm^2 , igual para los cuatro casos. Por último, en esta parte hay que restringir los grados de libertad o los desplazamientos y rotaciones necesarias de los puntos adecuados. En este caso hemos impedido el desplazamiento vertical ($U_2 = 0$) de todos los nodos de la sección central transversal del cilindro (Fig.3.2).

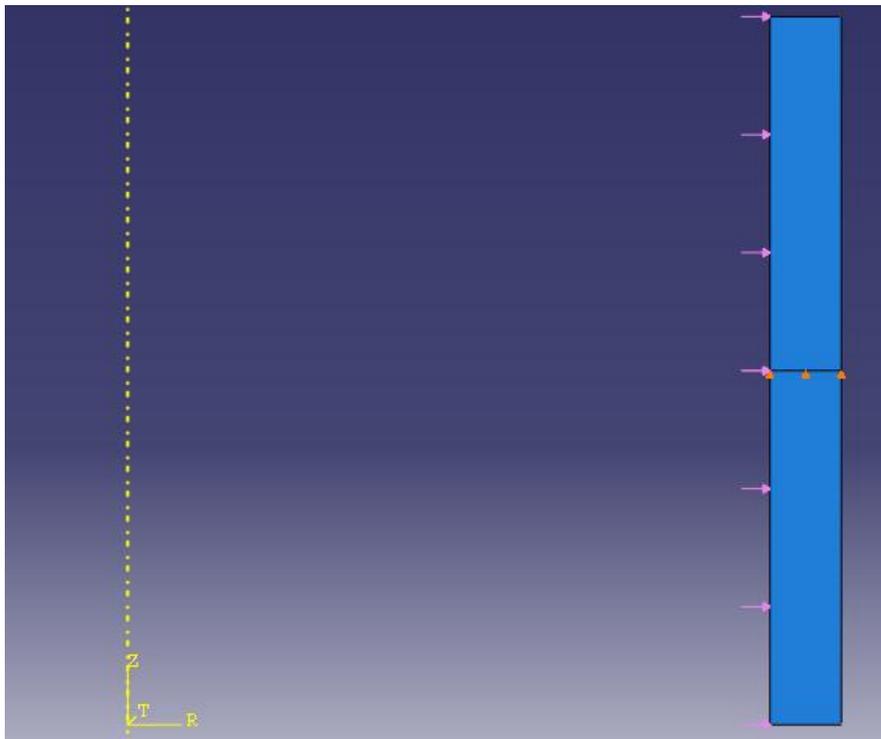


Fig.3.2: esquema de condiciones de contorno.

3.2.1.4. Mallado.

En esta parte es donde se define el tipo de elemento con el que se va a mallar y el número de elementos y de nodos con los que se va a discretizar el sólido. Gracias al grado de finura de esta discretización, el programa, en principio, puede obtener resultados tan exactos como se desee, esta es la base del procedimiento de cálculo por elementos finitos.

En este caso hemos utilizado elementos rectangulares y de tipo estructural, definido como CAX4R. Aunque el tipo de elemento del mallado es igual en los cuatro cilindros, no es igual el número de elementos y, por lo tanto, el número de nodos de cada caso, debido a la geometría. Incluso no es el mismo número de nodos en la sección central pues varía según el espesor. A continuación, se indican los datos concretos de cada caso:

- Caso 1: tiene 828 nodos y 618 elementos. La sección central contiene 4 nodos.
- Caso 2: tiene 966 nodos y 800 elementos. La sección central contiene 6 nodos. (Fig.3.3).
- Caso 3: tiene 870 nodos y 774 elementos. La sección central contiene 10 nodos.
- Caso 4: tiene 833 nodos y 768 elementos. La sección central contiene 17 nodos.

Hay que destacar que la versión del programa disponible está restringida a 1000 nodos.

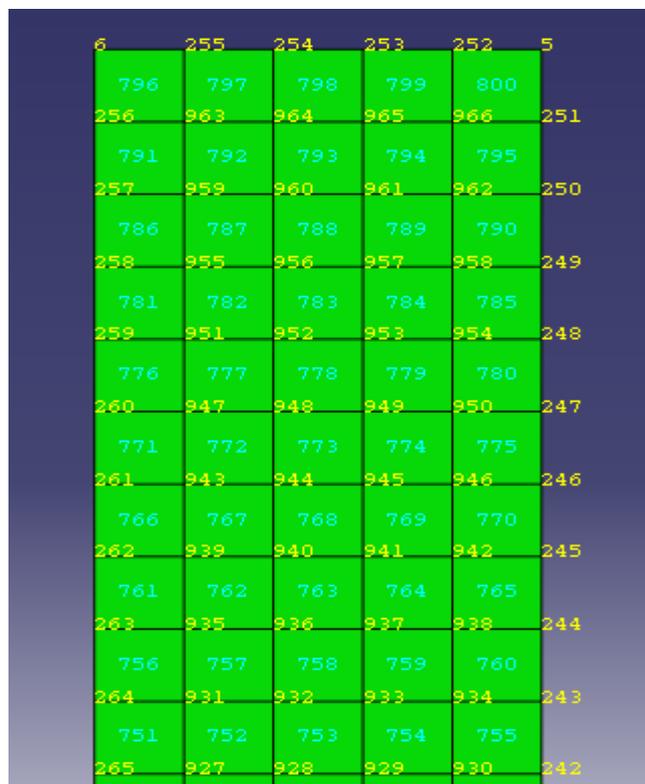


Fig.3.3: Detalle del mallado del caso 2.

Después de introducir toda esta información en el programa, se lanza el cálculo (proceso) y se obtienen los resultados.

3.2.2. Postproceso.

En esta parte se interpretan los resultados del cálculo del programa, ya que simplemente nos proporciona la solución numérica del problema pero, en todo caso, cómo interpretarlos y cómo utilizarlos es tarea del ingeniero.

A partir de aquí se analizan los resultados obtenidos y si utilizando MEF, hemos llegado a lo que la teoría predice.

Se van a estudiar y comparar los resultados obtenidos en cada uno de los 4 casos. Sólo se va a considerar la sección transversal central del cilindro, ya que las tensiones son independientes de la variable longitudinal Z.

3.2.2.1. Caso 1.

Este caso, como se dijo en la introducción, corresponde al cilindro de menor espesor de todos (2 mm.) y con 4 nodos en la sección central. Con los datos de la presión interior y la geometría del cilindro, también conocida, se calculan las tensiones por la teoría de cilindros a presión y según la aproximación para pared delgada. Por otro lado, Abaqus aporta resultados para estas tensiones una vez llevadas a cabo todas las operaciones señaladas en el apartado del preproceso. En la tabla 3.1 se pueden ver todos los resultados conjuntamente:

TABLA 3.1:

CILINDRO DE PARED MUY DELGADA SIN TAPAS								
COORDENADAS			CÁLCULO TEÓRICO PARED GRUESA		CÁLCULO TEÓRICO PARED DELGADA		CÁLCULO PRÁCTICO CON ABAQUS	
NODOS CENTRALES	EJE RADIAL	EJE Z	TENSIONES TANGENCIALES (N/mm ²)	TENSIONES RADIALES (N/mm ²)	TENSIONES TANGENCIALES (N/mm ²)	TENSIONES RADIALES (N/mm ²)	TENSIONES TANGENCIALES (N/mm ²)	TENSIONES RADIALES (N/mm ²)
2	118	60	142,810084	-2,4	142,8	0	142,402	-1,992
8	118,666 664	60	141,9965918	-1,586507774	142,8	0	141,999	-1,589
7	119,333 336	60	141,1966858	-0,786601805	142,8	0	141,199	-0,789
1	120	60	140,410084	0	142,8	0	140,802	-0,392

Aquí vemos las tensiones tangenciales y radiales para los nodos centrales obtenidas por los tres métodos: la teoría exacta, la aproximada y por MEF. A primera vista se pueden extraer dos conclusiones, primera, que la teoría aproximada de paredes delgadas es bastante exacta, y, segunda, que los teóricos se parecen mucho a los resultados MEF obtenidos vía Abaqus. Para verificar todo esto, a continuación se calculan los errores relativos entre las tensiones calculadas de diferente forma.

El error relativo depende del valor de r donde se calcula según:

$$\varepsilon(r) = \frac{\sigma_{t,teórico}(r) - \sigma_{t,MEF}(r)}{\sigma_{t,teórico}(r)} \cdot 100$$

Tangenciales:

- Errores entre teoría exacta y teoría aproximada para pared delgada.

- 1^{er} punto $\rightarrow \frac{142.810084 - 142.8}{142.810084} \cdot 100 = 0.0071\%$

- Último punto $\rightarrow \frac{140.410084 - 142.8}{140.410084} \cdot 100 = -1.702\%$

- Valor promedio $\rightarrow \frac{141.6033614 - 142.8}{141.6033614} \cdot 100 = -0.845\%$

- Errores entre teoría exacta y MEF.

- 1^{er} punto $\rightarrow \frac{142.810084 - 142.402}{142.810084} \cdot 100 = 0.286\%$

- Último punto $\rightarrow \frac{140.410084 - 140.802}{140.410084} \cdot 100 = -0.279\%$

- Valor promedio $\rightarrow \frac{141.6033614 - 141.6005}{141.6033614} \cdot 100 = 0.002\%$

- Errores entre teoría aproximada para pared delgada y MEF.

- 1^{er} punto $\rightarrow \frac{142.8 - 142.402}{142.8} \cdot 100 = 0.279\%$

- Último punto $\rightarrow \frac{142.8-140.802}{142.8} \cdot 100 = 1.399\%$
- Valor promedio $\rightarrow \frac{142.8-141.6005}{142.8} \cdot 100 = 0.84\%$

Radiales:

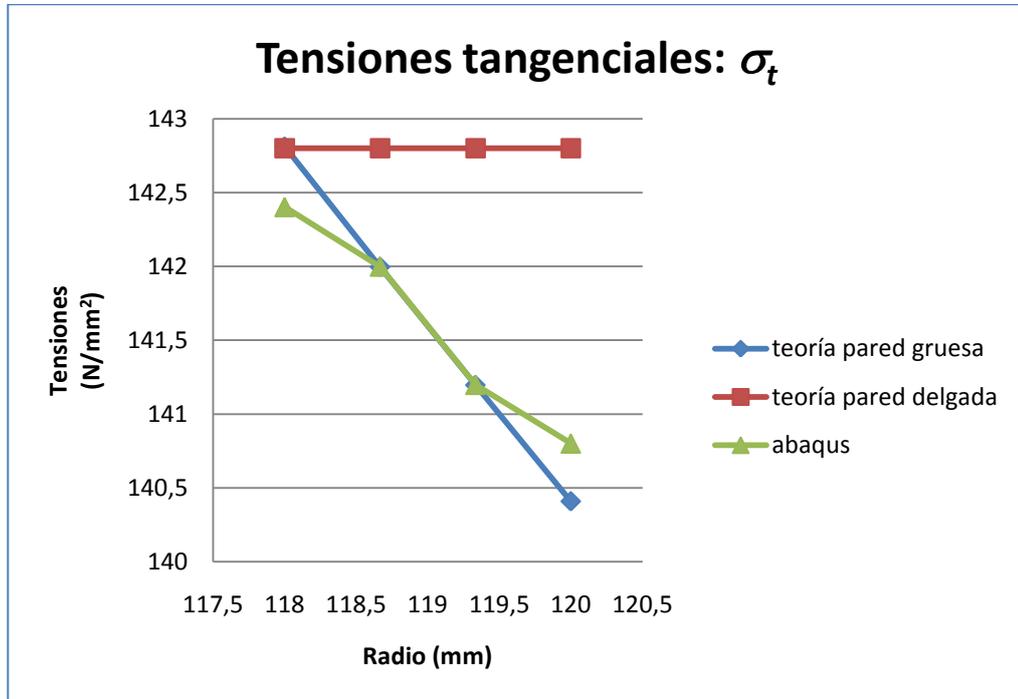
Las tensiones radiales en la teoría aproximada para cilindros de pared delgada tienen un valor de cero. En la tabla 3.1 se puede ver que las tensiones radiales en las columnas pared gruesa y cálculo MEF son despreciables frente a las tangenciales, como predice la teoría cilindros de pared delgada. Todo esto quedará a continuación perfectamente claro en los gráficos comparativos de los tres procedimientos de cálculo. En este apartado, para las tensiones radiales solamente se muestran los errores relativos entre la teoría exacta y MEF.

- Errores entre teoría exacta y MEF.

- 1^{er} punto $\rightarrow \frac{2.4-1.992}{2.4} \cdot 100 = 17\%$
- Último punto $\rightarrow \frac{0.786601805-0.789}{0.786601805} \cdot 100 = -0.305\%$
- Valor promedio $\rightarrow \frac{1.193277395-1.1905}{1.193277395} \cdot 100 = 0.233\%$.

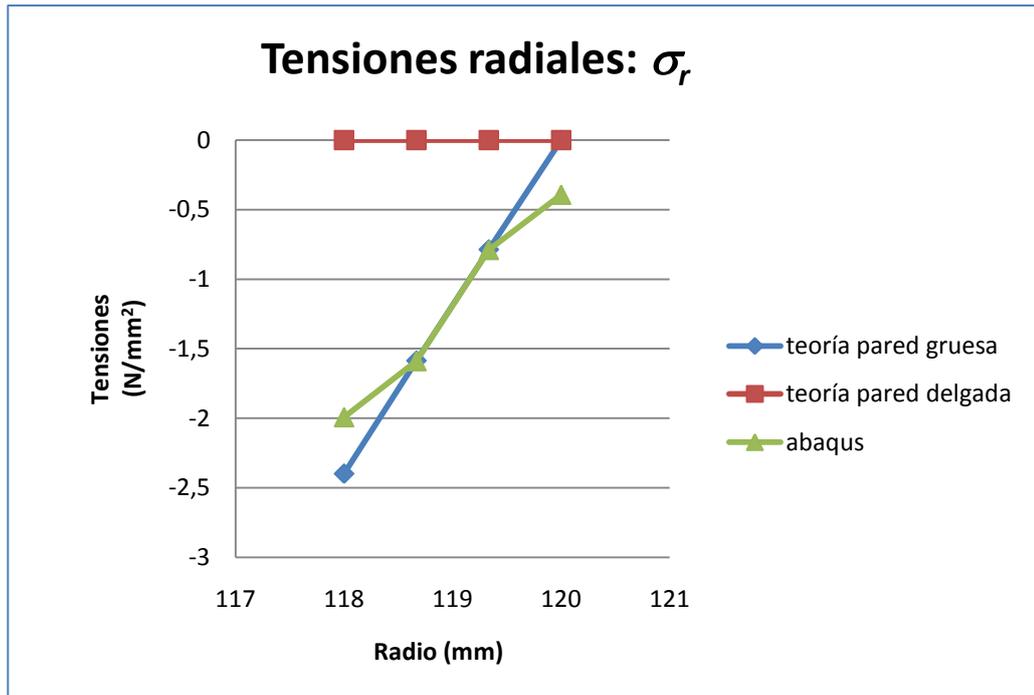
Como puede observarse, los resultados obtenidos por el método de elementos finitos con el programa Abaqus son bastante fieles a la teoría exacta. Por otro lado, vemos como al ser un cilindro de pequeño espesor, puede aplicarse la teoría aproximada para cilindros de pared delgada sin cometer un error apreciable. En la gráfica 3.1 se puede apreciar la distribución de tensiones tangenciales σ_r dibujadas según los tres métodos de cálculo en función del radio. Se puede observar el gran acuerdo entre la teoría exacta y el MEF siendo coincidentes en los valores de r interiores al cilindro y difiriendo muy poco en los puntos de las paredes (esto se puede deber al tipo de mallado). Por otro lado, se aprecia la línea de tensión constante que se obtiene con la

teoría aproximada de pared delgada. La diferencia entre una y otras es más bien aparente, pues la máxima diferencia está en torno a 3 N/mm^2 (en $r = r_0$) que, frente a valores de la tensión en torno a 140 N/mm^2 , resulta ser irrelevante.



Gráfica 3.1: Distribución de tensiones tangenciales para el caso 1 ($t = 2\text{mm}$).

En la gráfica 3.2 se ha dibujado la distribución de tensiones radiales para el mismo caso. Al igual que en la gráfica anterior, vienen representadas las tensiones calculadas según los tres métodos utilizados en el problema, y vienen dadas en función del radio r . Aquí destaca, en un primer lugar, el pequeño valor absoluto (son tensiones negativas de compresión) que toman las tensiones en comparación con las tensiones tangenciales, lo que indica cuáles van a ser las tensiones más importantes a la hora del cálculo y diseño de piezas de este tipo. Por otro lado, se aprecia también la gran coincidencia entre la teoría exacta y MEF, excepto una pequeña distorsión en los nodos sobre las paredes del cilindro. La teoría aproximada considera que la tensión radial es de valor nulo y, frente a este, el valor máximo en valor absoluto de σ_r , según los otros dos procedimientos de cálculo, no sobrepasa los 2.5 N/mm^2 , casi despreciable. Por ello, σ_r puede aproximarse por el valor nulo que proporciona la teoría de cilindros de pared delgada.



Gráfica 3.2: Distribución de tensiones radiales para el caso 1 ($t = 2\text{ mm}$)

Otra consideración a tener en cuenta que se puede apreciar en las gráficas anteriores, es la variación de las tensiones en función del radio. Como vemos, en la gráfica 1 (tensiones σ_r) la tensión es mayor en el interior del cilindro y según nos movemos hacia la parte exterior, es decir, conforme r crece, va disminuyendo. (Fig.3.4). Si nos fijamos en la gráfica de las tensiones radiales podemos ver que según nos acercamos al exterior desde el interior del cilindro, σ_r tiende a cero (Fig.3.5). En realidad, las tensiones radiales crecen con r al ser negativas aunque, obviamente, disminuyen si se considera la variación de su valor absoluto.

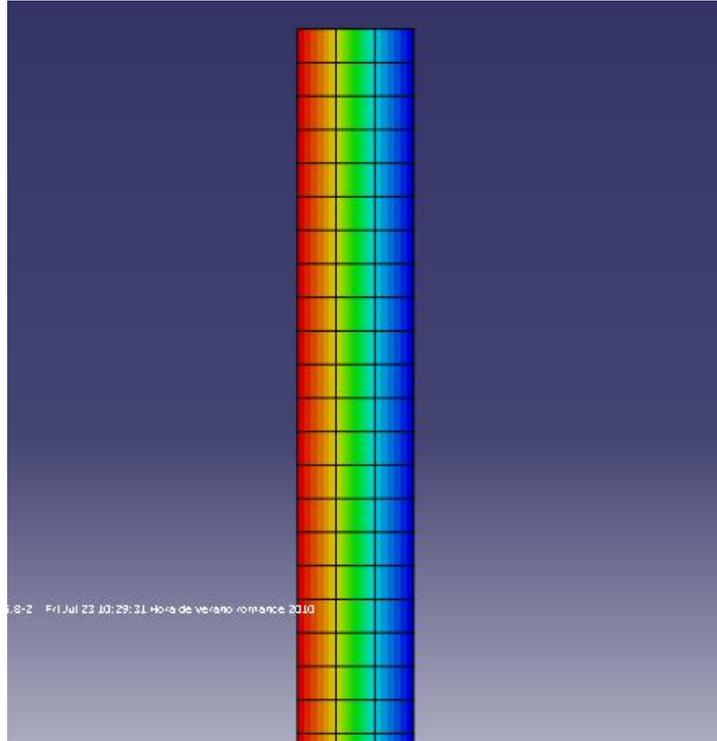


Fig.3.4: detalle de la distribución de las tensiones tangenciales en el caso 1.

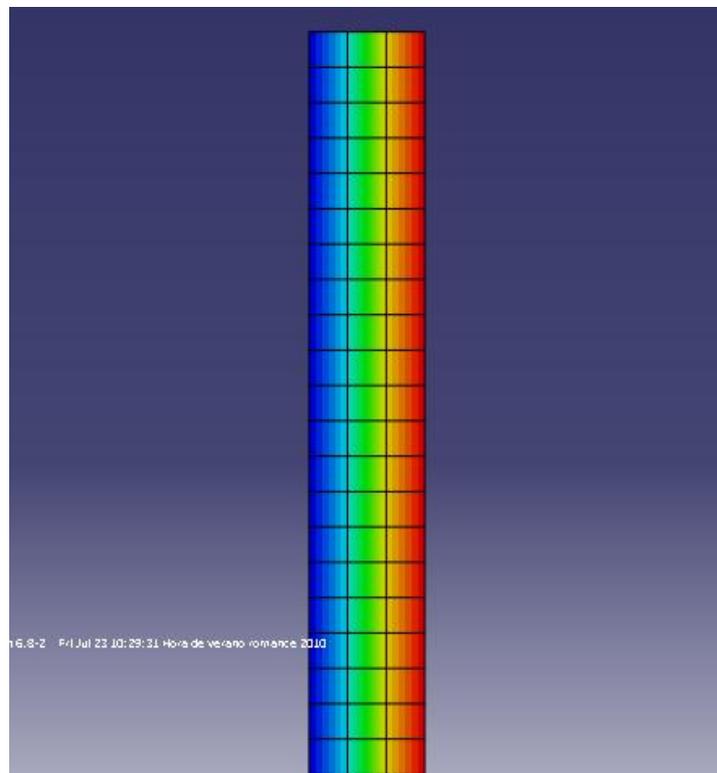


Fig.3.5: detalle de la distribución de las tensiones radiales en el caso 1

En estas dos imágenes, 3.4 y 3.5, se puede observar la variación cromática de ambas tensiones en el espesor según los resultados obtenidos con Abaqus. Estas imágenes permiten visualizar gráficamente los valores numéricos de las distribuciones de tensiones y, así, saber cuál es la zona más esforzada del cilindro.

3.2.2.2. Caso 2.

Este caso, como se explicó al principio de este ejercicio, corresponde a un espesor mayor en relación con el anterior (caso 1). Ahora tenemos un espesor de 4 mm. con 6 nodos en la sección central. Se muestra la tabla 3.2 con los resultados de las tensiones según los tres métodos de cálculo: teoría exacta, teoría aproximada y MEF. En muchos aspectos los resultados son parecidos al caso 1.

TABLA 3.2:

CILINDRO DE PARED DELGADA SIN TAPAS								
COORDENADAS			CÁLCULO TEÓRICO PARED GRUESA		CÁLCULO TEÓRICO PARED DELGADA		CÁLCULO PRÁCTICO CON ABAQUS	
NODOS CENTRALES	EJE RADIAL	EJE Z	TENSIONES TANGENCIALES (N/mm ²)	TENSIONES RADIALES (N/mm ²)	TENSIONES TANGENCIALES (N/mm ²)	TENSIONES RADIALES (N/mm ²)	TENSIONES TANGENCIALES (N/mm ²)	TENSIONES RADIALES (N/mm ²)
2	116	60	70,82033898	-2,4	70,8	0	70,5696	-2,1492
10	116,80003	60	70,32054545	-1,900206471	70,8	0	70,3222	-1,9019
9	117,59998	60	69,83092194	-1,410582961	70,8	0	69,8326	-1,4122
8	118,40002	60	69,35118426	-0,93084528	70,8	0	69,3528	-0,932
7	119,19997	60	68,88107856	-0,46073958	70,8	0	68,8826	-0,462
1	120	60	68,42033898	0	70,8	0	68,6499	-0,2296

A primera vista se puede observar que los resultados son bastante parecidos en los tres casos. Se han calculado los errores relativos para ver el grado de acuerdo entre los tres métodos de cálculo.

Tangenciales.

- Errores entre teoría exacta y teoría pared delgada.

- 1^{er} punto $\rightarrow \frac{70.82033898-70.8}{70.82033898} \cdot 100 = 0.029\%$

- Último punto $\rightarrow \frac{68.42033898-70.8}{68.4203389} \cdot 100 = -3.48\%$

- Valor promedio $\rightarrow \frac{69.60406803-70.8}{69.60406803} \cdot 100 = -1.72\%$

- Errores entre teoría exacta y MEF.

- 1^{er} punto $\rightarrow \frac{70.82033898-70.5696}{70.82033898} \cdot 100 = 0.354\%$

- Último punto $\rightarrow \frac{68.42033898-68.6499}{68.42033898} \cdot 100 = -0.336\%$

- Valor promedio $\rightarrow \frac{69.60406803-69.60161667}{69.60406803} \cdot 100 = 0.0035\%$

- Errores entre teoría pared delgada y MEF.

- 1^{er} punto $\rightarrow \frac{70.8-70.5696}{70.8} \cdot 100 = 0.325\%$

- Último punto $\rightarrow \frac{70.8-68.6499}{70.8} \cdot 100 = 3.037\%$

- Valor promedio $\rightarrow \frac{70.8-69.60161667}{70.8} \cdot 100 = 1.69\%$

Radiales:

- Errores entre teoría exacta y MEF.

- 1^{er} punto $\rightarrow \frac{2.4-2.1492}{2.4} \cdot 100 = 10.45\%$

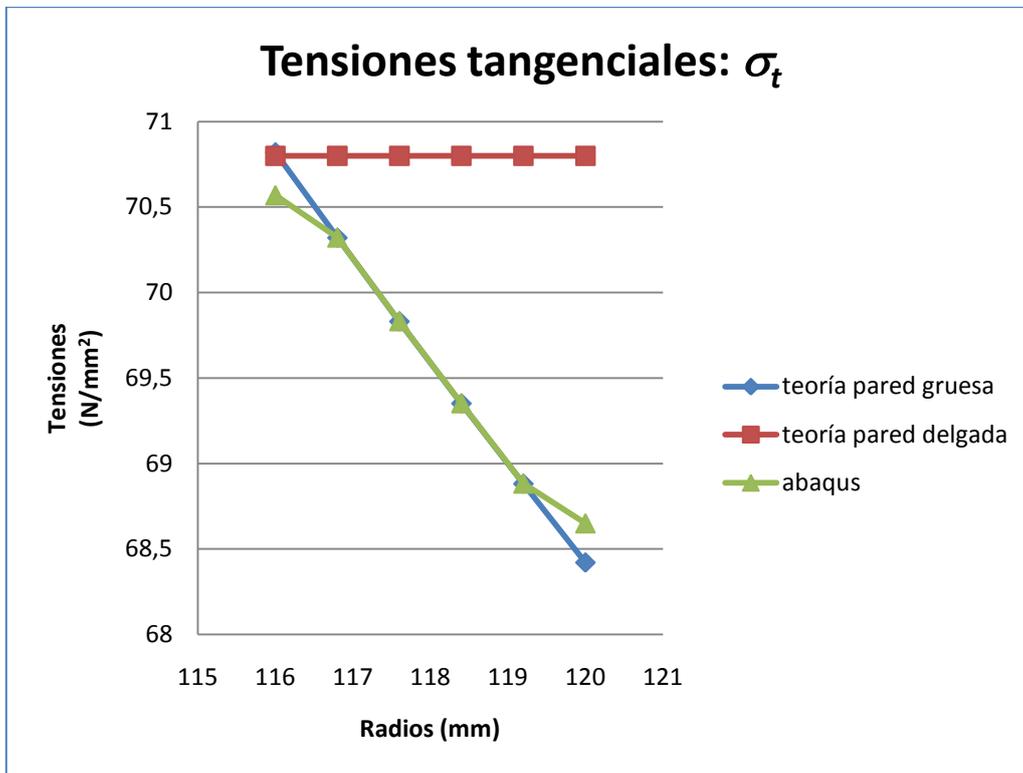
- Último punto $\rightarrow \frac{0.46073958-0.462}{0.46073958} \cdot 100 = -0.273\%$

- Valor promedio $\rightarrow \frac{1.183729049-1.18115}{1.183729049} \cdot 100 = 0.218\%$.

En este caso se puede observar como, al aumentar el espesor de la pared, el error relativo entre la teoría exacta y la aproximación para cilindros de pared delgada también lo ha hecho, aunque todavía hay un gran acuerdo entre ellas al ser todavía el espesor

relativamente pequeño. Por otro lado, los resultados obtenidos con Abaqus son casi coincidentes con los calculados por la teoría de cilindros a presión.

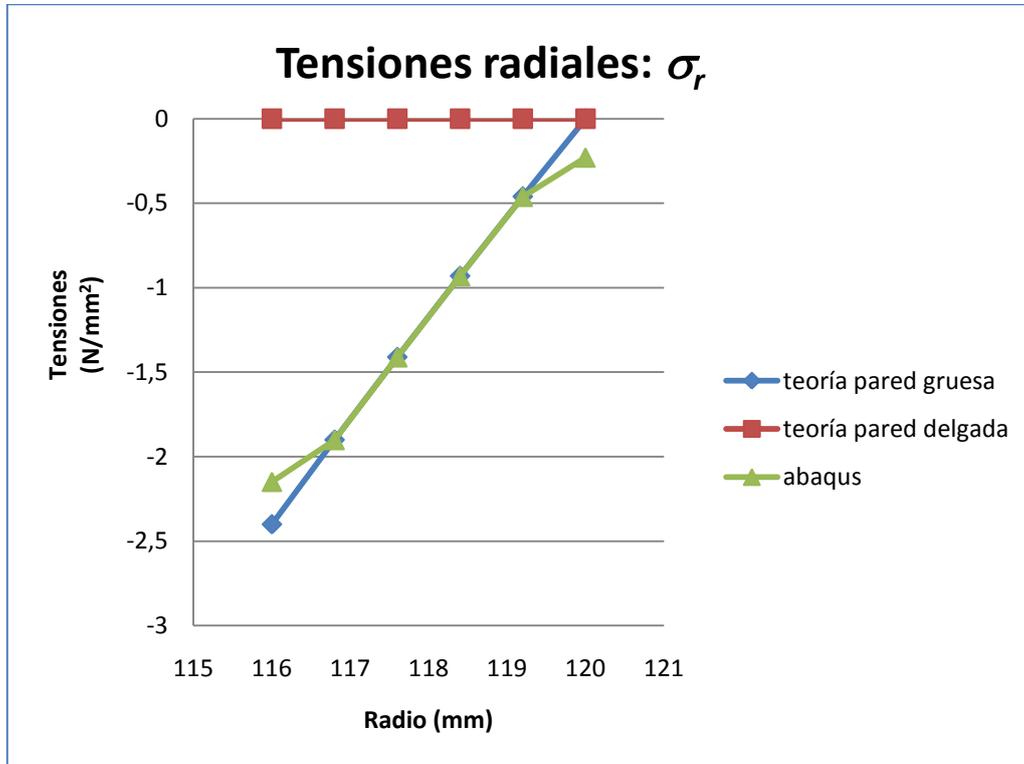
A continuación, se muestra la gráfica 3.3, donde se ha dibujado la distribución de tensiones tangenciales σ_t para este caso en función del radio. Volvemos a apreciar el gran acuerdo entre la teoría exacta y MEF con la pequeña discrepancia en el primer y último nodo (nodos en $r = r_i$ y $r = r_o$). En cuanto a la teoría aproximada, volvemos a ver como hay una diferencia máxima de aproximadamente 2.5 N/mm^2 con respecto a los otros resultados (igual que ocurría en el caso 1). Sin embargo, dado que un aumento del espesor reduce el valor de las tensiones, han pasado del orden 140 N/mm^2 (caso 1) a estar en torno a 70 N/mm^2 , una misma diferencia conduce un mayor error relativo.



Gráfica 3.3: Distribución de tensiones tangenciales para el caso 2 ($t = 4\text{mm}$).

La gráfica 3.4 es muy similar y muestra unos valores muy parecidos a los de la gráfica 3.2. Los valores máximos de las tensiones σ_r calculadas vía MEF o con la teoría exacta son muy pequeños (no llegan, en valor absoluto a 2.5N/mm^2). Aunque también en este caso podrían aproximarse por el valor nulo que predice la teoría de cilindros de

pared delgada, frente a las tensiones tangenciales se han hecho más relevantes al reducirse significativamente el valor máximo de éstas como se comentado anteriormente.



Gráfica 3.4: Distribución de tensiones radiales para el caso 2 (t = 4mm).

Por último, se muestra las distribuciones de tensiones cromáticas que nos proporciona Abaqus. En primer lugar se muestra la distribución de tensiones tangenciales (Fig.3.6) y luego las radiales (Fig.3.7). Las figuras son similares a las del caso 1.

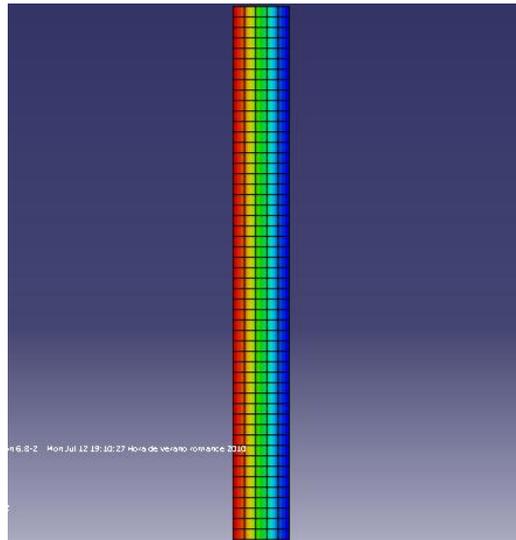


Fig.3.6: detalle de la distribución de las tensiones tangenciales para el caso 2.

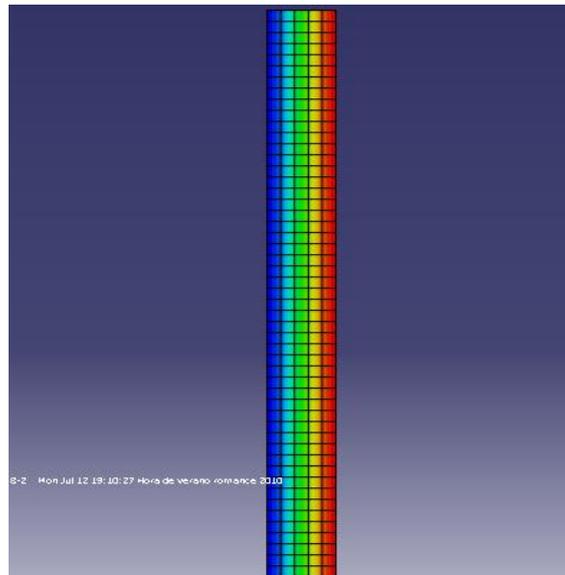


Fig.3.7: detalle de la distribución de las tensiones radiales para el caso 2.

3.2.2.3. Caso 3.

El siguiente caso tiene un espesor de cilindro de 12 mm, lo que corresponde justamente a 1/10 del radio exterior del cilindro (120 mm.). Según la bibliografía esta es la razón considerada como límite para poder aplicar la teoría aproximada de cilindros de pared delgada. En cuanto a la sección central, en este caso, contiene 10 nodos. En la tabla 3.3 se muestran todos los valores de las tensiones obtenidos según los tres métodos de cálculo.

TABLA 3.3:

CILINDRO DE PARED GRUESA SIN TAPAS								
COORDENADAS			CÁLCULO TEÓRICO PARED GRUESA		CÁLCULO TEÓRICO PARED DELGADA		CÁLCULO PRÁCTICO CON ABAQUS	
NODOS CENTRALES	EJE RADIAL	EJE Z	TENSIONES TANGENCIALES (N/mm ²)	TENSIONES RADIALES (N/mm ²)	TENSIONES TANGENCIALES (N/mm ²)	TENSIONES RADIALES (N/mm ²)	TENSIONES TANGENCIALES (N/mm ²)	TENSIONES RADIALES (N/mm ²)
2	108	60	22,86315789	-2,4	22,8	0	22,7091	-2,246
14	109,333336	60	22,55694858	-2,093790688	22,8	0	22,5588	-2,096
13	110,666664	60	22,26174203	-1,798584134	22,8	0	22,2635	-1,8
12	112	60	21,97701396	-1,513856069	22,8	0	21,9787	-1,515
11	113,333336	60	21,70227591	-1,239118018	22,8	0	21,7039	-1,241
10	114,666664	60	21,4370675	-0,973909604	22,8	0	21,4386	-0,975
9	116	60	21,18095	-0,717792102	22,8	0	21,1824	-0,719
8	117,333334	60	20,93351445	-0,470356555	22,8	0	20,9349	-0,472
7	118,666664	60	20,69437319	-0,231215296	22,8	0	20,6957	-0,233
1	120	60	20,46315789	0	22,8	0	20,5781	-0,115

Al observar la tabla 3.3 vemos, como siempre, que los valores calculados con Abaqus y la teoría de cilindros a presión son muy coincidentes. Al aumentar otra vez el espesor, los valores máximos de las tensiones tangenciales han disminuido de nuevo significativamente (ahora alcanzan algo más de 22 N/mm²).

Esto significa que, aunque el error absoluto de las tensiones σ_r calculadas con la teoría de pared delgada sea ahora apreciablemente menor (por ejemplo, 2 N/mm² sobre 20 N/mm²), no tiene por qué serlo en igual medida el error relativo.

Por otro lado, como se ha señalado, cabe destacar la reducción de los valores de las tensiones σ_r al aumentar el espesor del cilindro. Esto se debe a que las paredes del recipiente soportarán un mayor esfuerzo cuanto mayor sea su espesor, siempre para un mismo material.

Los errores relativos para este caso son los siguientes:

Tangenciales.

- Errores entre teoría exacta y teoría pared delgada.

$$- \text{1}^{\text{er}} \text{ punto} \rightarrow \frac{22.86315789 - 22.8}{22.86315789} \cdot 100 = 0.276\%$$

- Último punto $\rightarrow \frac{20.46315789-22.8}{20.46315789} \cdot 100 = -11.42\%$

- Valor promedio $\rightarrow \frac{21.60702014-22.8}{21.60702014} \cdot 100 = -5.52\%$

- Errores entre teoría exacta y MEF.

- 1^{er} punto $\rightarrow \frac{22.86315789-22.7091}{22.86315789} \cdot 100 = 0.674\%$

- Último punto $\rightarrow \frac{20.46315789-20.5781}{20.46315789} \cdot 100 = -0.562\%$

- Valor promedio $\rightarrow \frac{21.60702014-21.60437}{21.60702014} \cdot 100 = 0.0123\%$

- Errores entre teoría pared delgada y MEF.

- 1^{er} punto $\rightarrow \frac{22.8-22.7091}{22.8} \cdot 100 = 0.399\%$

- Último punto $\rightarrow \frac{22.8-20.5781}{22.8} \cdot 100 = 9.745\%$

- Valor promedio $\rightarrow \frac{22.8-21.60437}{22.8} \cdot 100 = 5.244\%$

Radiales:

- Errores entre teoría exacta y MEF.

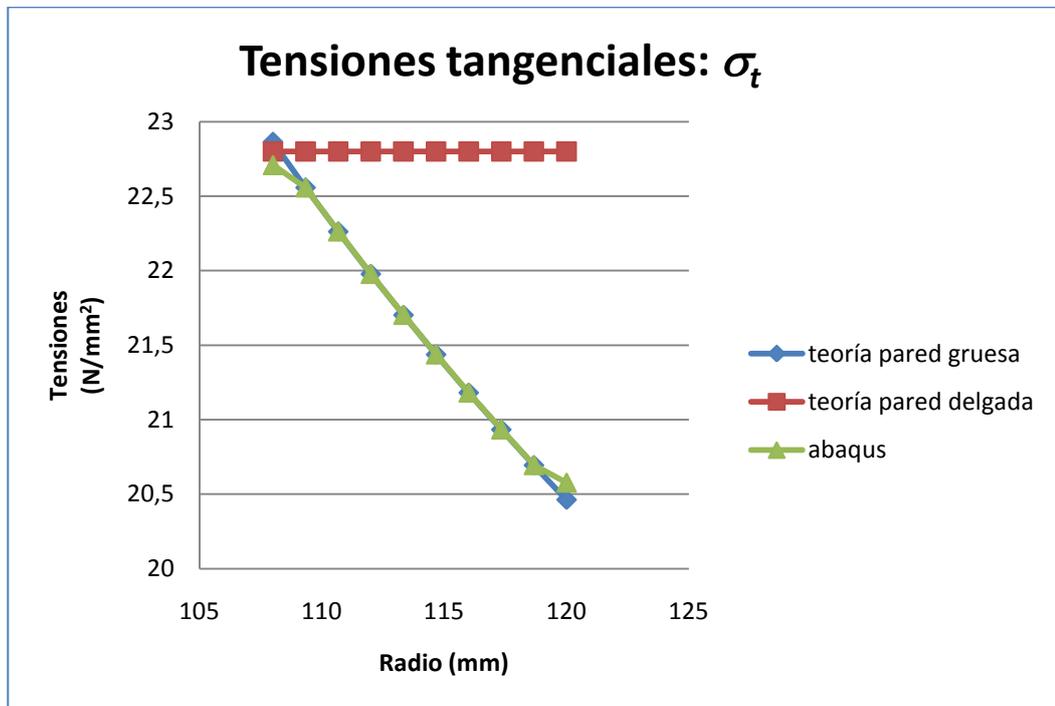
- 1^{er} punto $\rightarrow \frac{2.4-2.246}{2.4} \cdot 100 = 6.42\%$

- Último punto $\rightarrow \frac{0.231215296-0.233}{0.231215296} \cdot 100 = -0.772\%$

- Valor promedio $\rightarrow \frac{1.143862247-1.1412}{1.143862247} \cdot 100 = 0.233\%$.

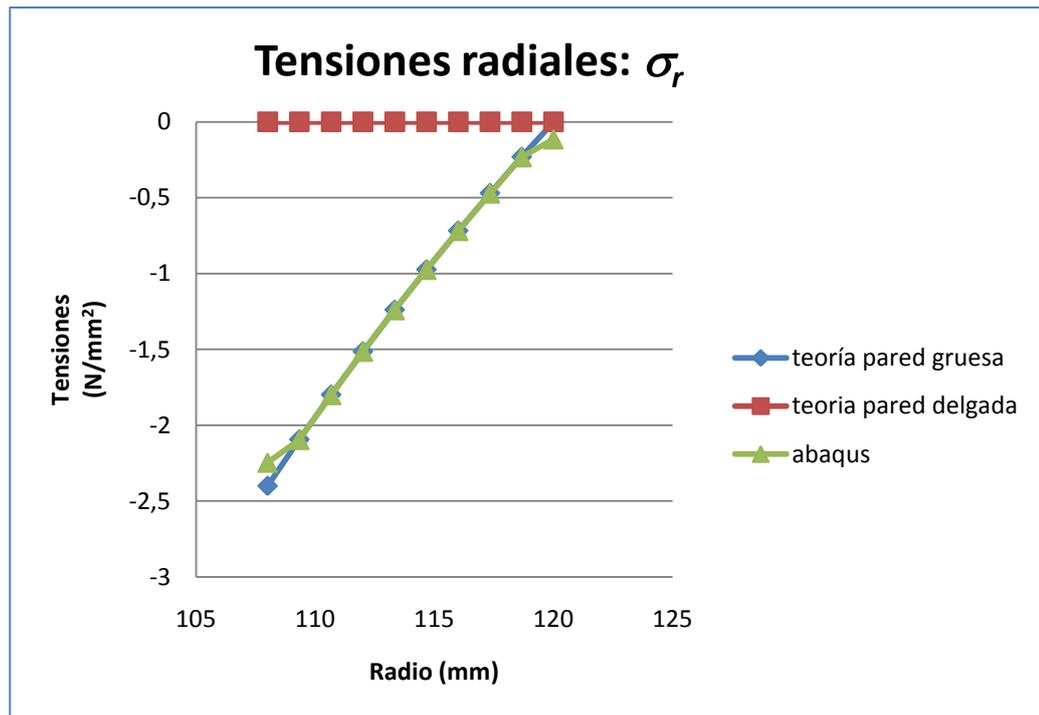
Los errores relativos entre la teoría exacta de pared gruesa y la aproximación de pared delgada han crecido según se ha ido aumentando el espesor.

La gráfica 3.5 vuelve a mostrar la distribución de tensiones tangenciales σ_t en función del radio para este nuevo caso. En ella se debe apreciar el gran acuerdo, de nuevo, entre la teoría exacta y MEF. Esta vez hay más nodos repartidos en el espesor y los resultados coinciden casi exactamente en todos los nodos intermedios y vuelve a aparecer una pequeña diferencia en los dos nodos sobre las superficies. Por otro lado, se vuelve a producir una diferencia máxima aproximada de 2.5 N/mm^2 entre la teoría aproximada y MEF o la teoría exacta. Sin embargo, ahora con valores de tensiones máximas de 22.5 N/mm^2 aproximadamente, una diferencia de 2.5 N/mm^2 tiene una importancia significativa, como se pudo comprobar al calcular los errores:



Gráfica 3.5: Distribución de tensiones tangenciales en el caso 3 ($t = 12\text{mm}$).

En la gráfica 3.6 se muestra la distribución de tensiones radiales en función del radio para este caso. Es muy parecida a las de casos anteriores y, por tanto, son válidas las mismas conclusiones.



Gráfica 3.6: Distribución de tensiones radiales para el caso 3 ($t = 12\text{mm}$).

Hay que señalar, llegado este momento, que las funciones representadas en estas gráficas, aunque lo parezca, no se corresponden con una línea recta. En realidad, siguen la variación dada por ecuaciones que representan la teoría exacta. Aparenta una línea recta porque estamos trabajando con muy poco espesor.

Las Fig.3.8 y Fig.3.9 muestran los gráficos cromáticos de las distribuciones de tensiones que proporciona Abaqus.

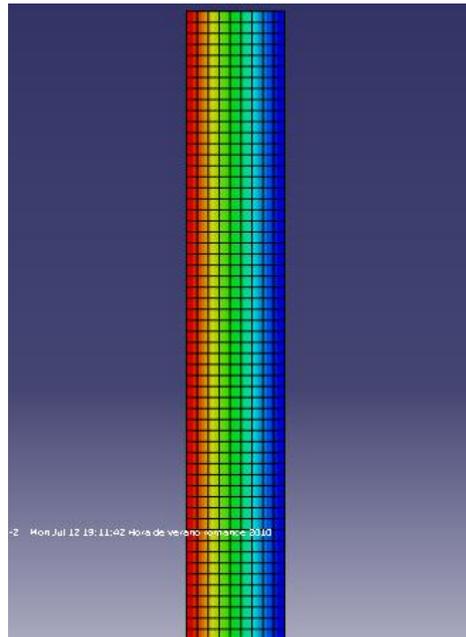


Fig.3.8: detalle de la distribución de las tensiones tangenciales en el caso 3.

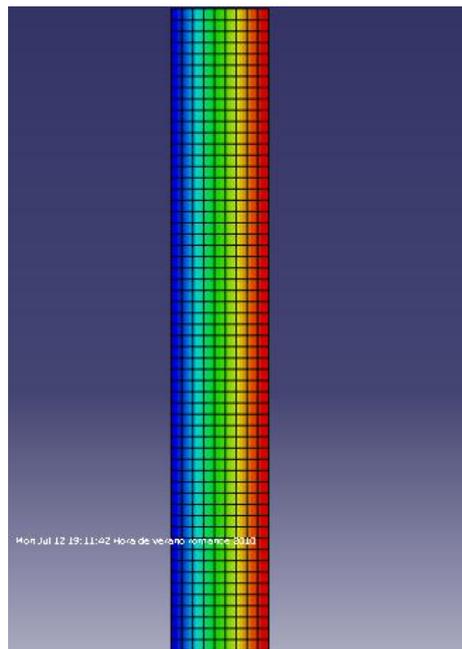


Fig.3.9: detalle de la distribución de las tensiones radiales en el caso 3.

3.2.2.4 Caso 4.

Este es el último caso, se ha optado por aumentar mucho el espesor de modo que ya no sea claramente aplicable la teoría aproximada para cilindros de pared delgada. Para ello se ha considerado un cilindro de 40 mm de espesor y con una sección central

mallada de 17 nodos. Como vemos, se ha reducido la relación espesor/radio a 1/3 (recordemos que la bibliografía utilizada pone como relación límite para el correcto uso de la teoría aproximada 1/10). La tabla 3.4 muestra los resultados obtenidos después de hacer los cálculos de acuerdo con los tres métodos utilizados:

TABLA 3.4:

CILINDRO DE PARED MUY GRUESA SIN TAPAS								
COORDENADAS			CÁLCULO TEÓRICO PARED GRUESA		CÁLCULO TEÓRICO PARED DELGADA		CÁLCULO PRÁCTICO CON ABAQUS	
NODOS CENTRALES	EJE RADIAL	EJE Z	TENSIONES TANGENCIALES (N/mm ²)	TENSIONES RADIALES (N/mm ²)	TENSIONES TANGENCIALES (N/mm ²)	TENSIONES RADIALES (N/mm ²)	TENSIONES TANGENCIALES (N/mm ²)	TENSIONES RADIALES (N/mm ²)
2	80	60	6,24	-2,4	6	0	6,109	-2,269
21	82,5	60	5,98214876	-2,14214876	6	0	5,986	-2,146
20	85	60	5,746712803	-1,906712803	6	0	5,75	-1,91
19	87,5	60	5,531167347	-1,691167347	6	0	5,534	-1,694
18	90	60	5,333333333	-1,493333333	6	0	5,336	-1,496
17	92,5	60	5,151322133	-1,311322133	6	0	5,154	-1,314
16	95	60	4,983490305	-1,143490305	6	0	4,986	-1,146
15	97,5	60	4,828402367	-0,988402367	6	0	4,83	-0,99
14	100	60	4,6848	-0,8448	6	0	4,687	-0,847
13	102,5	60	4,551576443	-0,711576443	6	0	4,553	-0,713
12	105	60	4,427755102	-0,587755102	6	0	4,429	-0,589
11	107,5	60	4,312471606	-0,472471606	6	0	4,314	-0,474
10	110	60	4,204958678	-0,364958678	6	0	4,206	-0,366
9	112,5	60	4,104533333	-0,264533333	6	0	4,106	-0,266
8	115	60	4,010586011	-0,170586011	6	0	4,012	-0,171
7	117,5	60	3,922571299	-0,082571299	6	0	3,923	-0,083
1	120	60	3,84	0	6	0	3,881	-0,041

Como vemos, se han vuelto a reducir los valores de las tensiones que soporta la pared del cilindro considerablemente. Los resultados obtenidos con Abaqus son muy coincidentes con la teoría exacta. Por el contrario, la teoría de pared delgada en $r = r_o$ (pared exterior) discrepa en σ_r de la teoría exacta, en términos absolutos, en casi un 50 % (6 N/mm² frente 3.84 N/mm²). A continuación se dan los errores relativos.

Tangenciales.

- Errores entre teoría exacta y teoría pared delgada.

- 1^{er} punto $\rightarrow \frac{6.24-6}{6.24} \cdot 100 = 3.85\%$
- Último punto $\rightarrow \frac{3.84-6}{3.84} \cdot 100 = -56.25\%$
- Valor promedio $\rightarrow \frac{4.815048795-6}{4.815048795} \cdot 100 = -24.61\%$

- Errores entre teoría exacta y MEF.

- 1^{er} punto $\rightarrow \frac{6.24-6.109}{6.24} \cdot 100 = 2.1\%$
- Último punto $\rightarrow \frac{3.84-3.881}{3.84} \cdot 100 = -1.068\%$
- Valor promedio $\rightarrow \frac{4.815048795-4.811529412}{4.815048795} \cdot 100 = 0.073\%$

- Errores entre teoría pared delgada y MEF.

- 1^{er} punto $\rightarrow \frac{6-6.109}{6} \cdot 100 = -1.817\%$
- Último punto $\rightarrow \frac{6-3.881}{6} \cdot 100 = 35.32\%$
- Valor promedio $\rightarrow \frac{6-4.811529412}{6} \cdot 100 = 19.808\%$

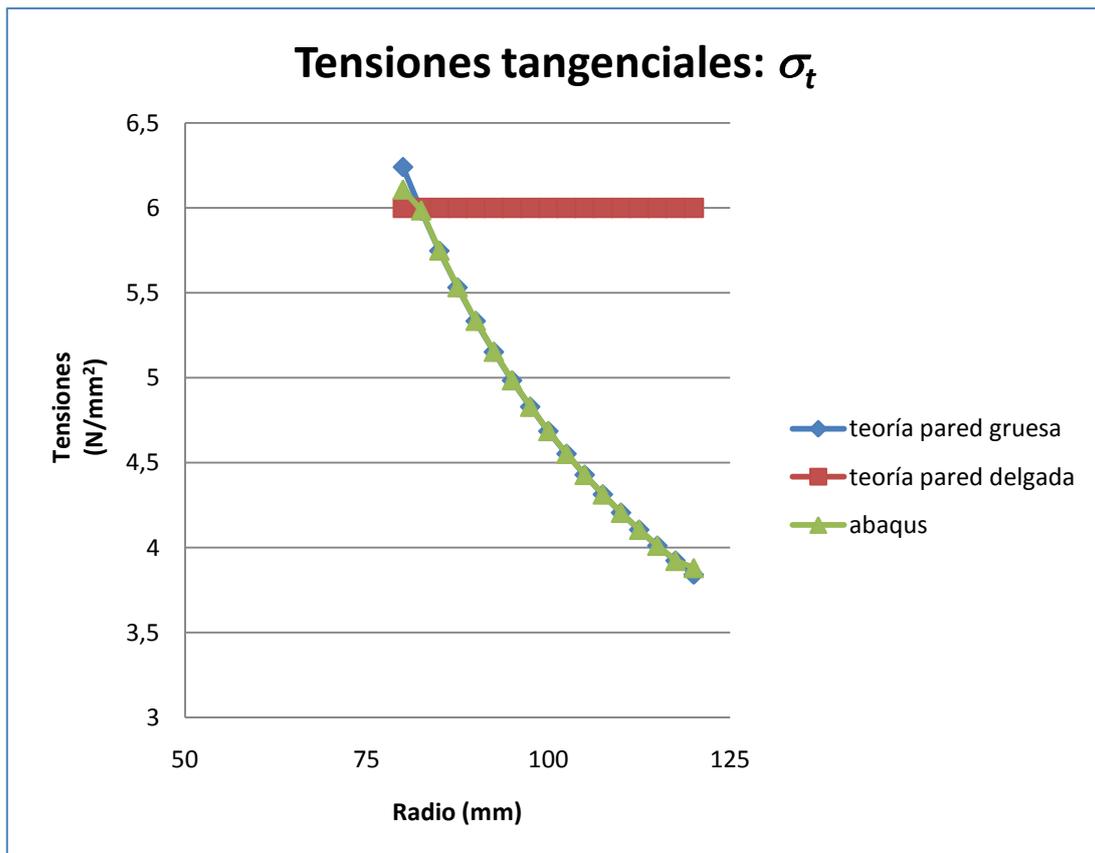
Radiales:

- Errores entre teoría exacta y MEF.

- 1^{er} punto $\rightarrow \frac{2.4-2.269}{2.4} \cdot 100 = 5.46\%$
- Último punto $\rightarrow \frac{0.082571299-0.083}{0.082571299} \cdot 100 = -0.519\%$
- Valor promedio $\rightarrow \frac{0.975193835-0.971470588}{0.975193835} \cdot 100 = 0.382\%$.

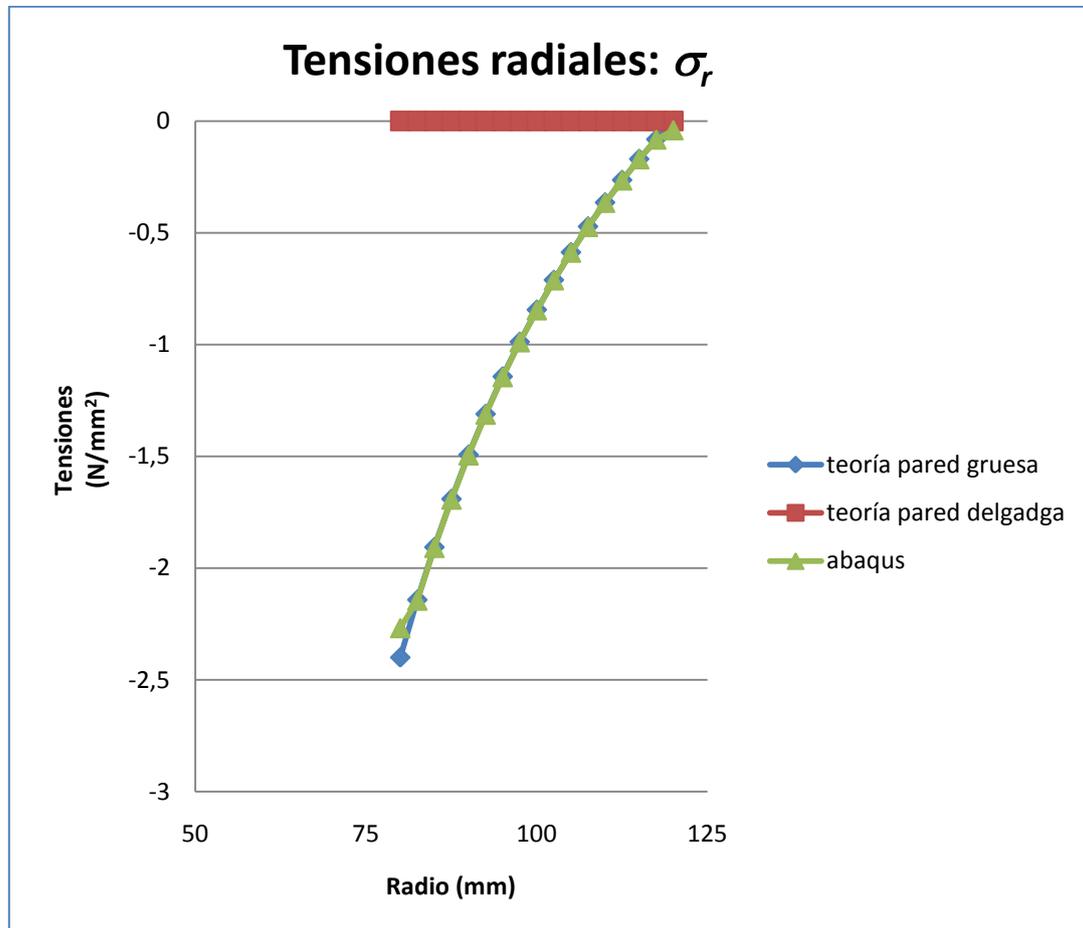
Aunque se ha aumentado el espesor del cilindro considerablemente, los errores entre los cálculos MEF y los resultados obtenidos al aplicar la teoría exacta por las fórmulas teóricas siguen siendo muy coincidentes. En cambio, la discrepancia de la teoría aproximada para cilindros de pared delgada, según el espesor se ha ido aumentando, con la teoría exacta y, por tanto, con los resultados MEF, ha ido creciendo.

La gráfica 3.7 muestra la distribución de tensiones tangenciales σ_t en función del radio para el caso 4. Se pueden destacar el valor relativamente pequeño de las máximas tensiones, en torno a 6 N/mm². Comparado con este valor máximo, una diferencia de 2.5 N/mm² entre teoría exacta (o MEF) y la teoría aproximada conduce a importantes errores relativos en algunos puntos, como se vio anteriormente. También cabe destacar que, en esta gráfica, ya se aprecia la forma de la curva que para σ_t predice la ecuación de la teoría de cilindros a presión.



Gráfica 3.7: Distribución de tensiones tangenciales para el caso 4 (t = 40mm).

En la gráfica 3.8 aparece dibujada la distribución de tensiones radiales σ_r , en función del radio para el caso 4. Los valores son similares a los de los casos anteriores. Coinciden en muy alto grado la teoría exacta y los resultados de Abaqus. También se aprecia la curva que representa la distribución de tensiones σ_r según la teoría exacta.



Gráfica 3.8: Distribución de tensiones radiales para el caso 4 ($t = 40\text{mm}$).

Por último, vemos el espesor del cilindro con los colores que representan la variación de las tensiones a lo largo del espesor del cilindro (Fig.3.10 y Fig.3.11).

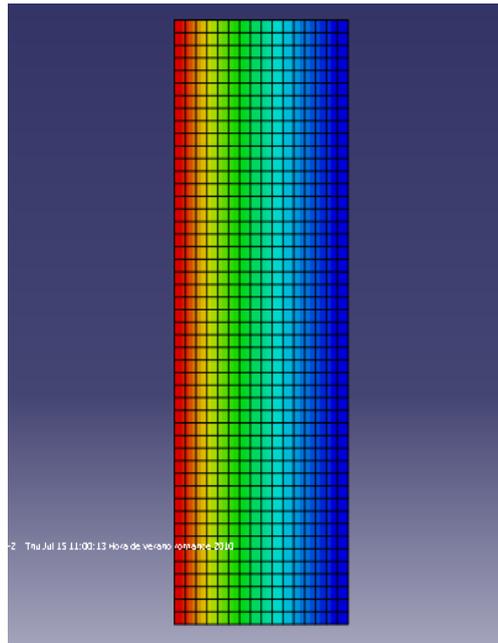


Fig.3.10: detalle de la distribución de las tensiones tangenciales en el caso 4.

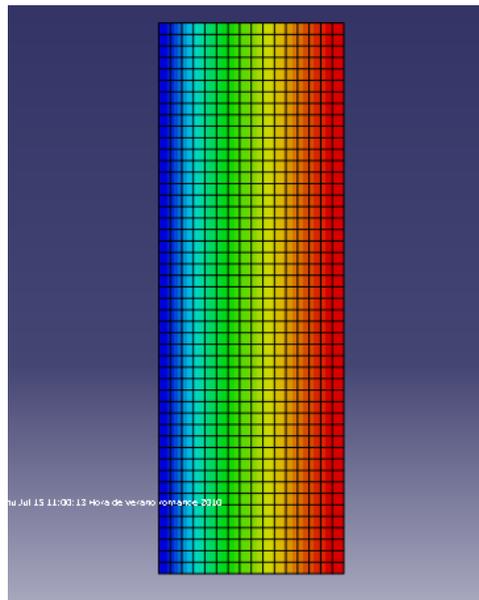


Fig.3.11: detalle de la distribución de las tensiones radiales en el caso 4.

3.3- RESUMEN Y CONCLUSIONES.

Como conclusión se va a introducir la tabla 3.5 en forma de resumen con los errores relativos promedios entre Abaqus y la teoría exacta; y entre la teoría exacta y la aproximada, para poder comparar de un solo vistazo los resultados obtenidos para los

cuatro casos. Se hará solamente para las tensiones tangenciales σ_t por alcanzar valores mayores.

TABLA 3.5:

	Error promedio Teoría exacta-Abaqus	Error promedio Teoría exacta- Aproximación pared delgada
CASO 1.	0.002%	-0.845%
CASO 2.	0.0035%	-1.72%
CASO 3.	0.0123%	-5.52%
CASO 4.	0.073%	-24.61%

Esta pequeña tabla resumen nos da una muy buena visión de cómo la teoría aproximada para cilindros de pared delgada no se puede aplicar a partir de un cierto valor de la relación entre espesor y radio (la bibliografía propone una relación límite de 1/10). En nuestro caso, en el caso 3, cuando la relación entre espesor y radio es 1/10, se encuentra ya un error relativo de algo más de un 5%. El caso 4, cuando la relación espesor/radio vale 1/3 y sobrepasa claramente el límite establecido, el error relativo cometido es muy grande (casi un 25%). (Debe tenerse en cuenta que son errores promediados, por lo que en algunos puntos se superan estos valores). Resumiendo, la teoría de cilindros de pared delgada podría aplicarse sin cometer un error significativo en los casos 1 y 2, sería de dudosa aplicación en el caso 3, y de ninguna manera debería aplicarse en el caso 4.

En cuanto a la otra columna de la tabla 3.5, se aprecia que los resultados, obtenidos por el método de los elementos finitos son coincidentes, en cualquiera de los casos estudiados, con los que proporciona la teoría de cilindros a presión, con errores relativos casi despreciables.

4 CONCENTRACIÓN DE **TENSIONES.**

4. CONCENTRACIÓN DE TENSIONES

4.1- INTRODUCCIÓN

En primer lugar, hay que explicar la metodología del diseño bajo cargas estáticas. Dado un elemento de máquina, sometido a una serie de acciones externas, realizaremos los siguientes pasos para analizarlo:

- Cálculo de las reacciones en los apoyos.
- Dibujar el sólido libre, afectado por todas las acciones.
- Determinar los diagramas de momentos flectores, momentos torsores, esfuerzos cortantes y axiles.
- Determinar la sección/es más desfavorable/es.
- Seleccionar el/los punto/s más desfavorable/es en dicha/s sección/es.
- Determinar el estado de tensiones en los puntos más desfavorables.
- Calcular las tensiones principales y la tensión cortante máxima.
- Estudio de las concentración de tensiones.
- Aplicar la teoría de fallo adecuada según el material que se utilice.
- Determinar el factor de seguridad a resistencia.
- Verificar las restricciones de deformación.

4.2- ESTADO DE TENSIONES BIDIMENSIONAL O PLANO

En las siguientes figuras aparecen las tensiones a las que estaría sometida una parte infinitesimal en forma de cubo de la pieza real (Fig.4.1):

A partir de este momento denominaremos a las **tensiones normales** por la letra griega “ σ ” y a las **tensiones cortantes** por la letra “ τ ”.

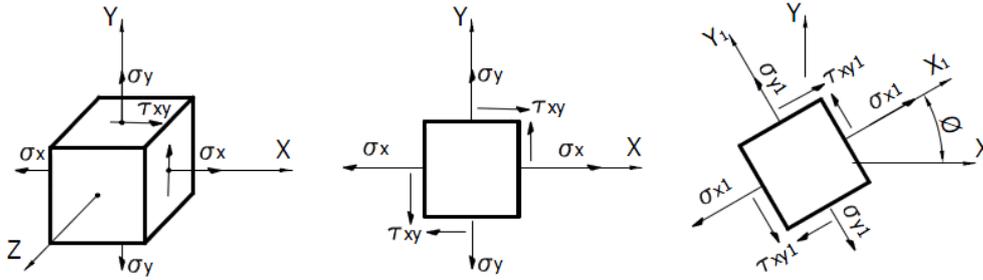


Fig.4. 1: tensiones en el plano.

A continuación, se presentan las fórmulas para conseguir las tensiones bajo un cierto ángulo ϕ , respecto con las tensiones que aparecen en el plano cartesiano XY. Según este ángulo, aunque estemos analizando el mismo punto, aparecerán valores distintos de tensiones habiendo una dirección que aparecen tensiones normales máximas o principales. Esto se explica en el siguiente apartado.

$$\sigma_{x1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\phi + \tau_{xy} \sin 2\phi$$

$$\sigma_{y1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\phi + \tau_{xy} \sin 2\phi$$

$$\tau_{x1y1} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\phi + \tau_{xy} \cos 2\phi$$

Propiedades:

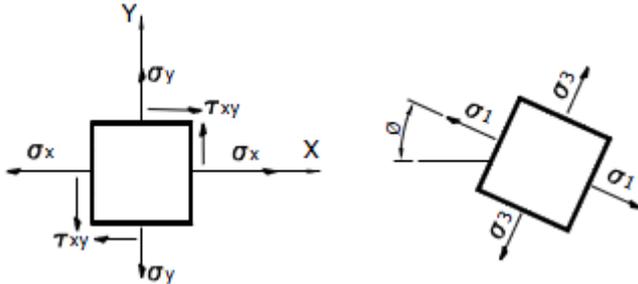
$$\sigma_{x1} + \sigma_{y1} = \sigma_x + \sigma_y$$

$$|\tau_{xy}| = |\tau_{yx}|$$

4.3.- TENSIONES PRINCIPALES.

Existe una dirección ϕ , bajo la cual el elemento se encuentra sometido a tensiones normales máximas (σ), y en la cual no existe tensión cortante (Fig.4.2). A esta dirección se le llama principal, y las tensiones máximas se denominan tensiones principales. Los esfuerzos cortantes principales actúan sobre un conjunto o sistema de planos que están a 45° en relación con los planos de los esfuerzos normales principales.

$$\tan 2\phi = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$



Donde $\phi \rightarrow$ dirección principal

Fig.4. 2: tensiones principales

Donde las tensiones normales principales vienen dadas por:

$$\sigma_1 \text{ y } \sigma_3 = \sigma_{\min}^{\max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Mientras que las cortantes máximas que están en un sistema de planos a 45° respecto con las anteriores:

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

4.4.- ESTADO DE TENSIONES TRIDIMENSIONAL.

En general, un determinado elemento diferencial de una pieza de máquina, estará sometido a un estado tridimensional de tensiones (Fig.4.3); siendo el estado plano un caso particular de aquél, cuando no existan tensiones en alguno de los planos.

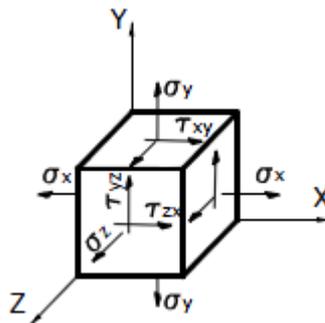


Fig.4.3: estado tridimensional de tensiones.

Las tensiones principales son las raíces del polinomio:

$$\sigma^3 - C_2\sigma^2 - C_1\sigma - C_0 = 0$$

Donde: $C_2 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$

$$C_1 = \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 - \sigma_x\sigma_y - \sigma_z\sigma_y - \sigma_x\sigma_z$$

$$C_0 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2$$

Las tensiones **cortantes principales** serán:

$$\tau_{13} = \left| \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right| \quad \tau_{21} = \left| \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \right| \quad \tau_{32} = \left| \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{2} \right|$$

Siendo la **cortante máxima**: $\tau_{m\acute{a}x} = MAX(\tau_{13}, \tau_{21}, \tau_{32})$

4.5- REPRESENTACIÓN GRÁFICA DEL ESTADO DE TENSIONES. **CÍRCULO DE MOHR.(Fig.4.4)**

Hipótesis de partida:

- Las tensiones normales se representan en el eje de abscisas.
- Las tensiones cortantes se representan en el eje de ordenadas.
- Un giro ϕ del elemento diferencial, en determinado sentido, implica un giro 2ϕ en el círculo de Mohr, en el mismo sentido.
- Los pares de giro producidos por las tensiones cortantes en el elemento diferencial, implicarán un sentido de giro del mismo. Si dicho sentido es antihorario implicará valores negativos en su representación.
- Los centros de los círculos de Mohr, así como las tensiones principales se representan sobre el eje de abscisas.

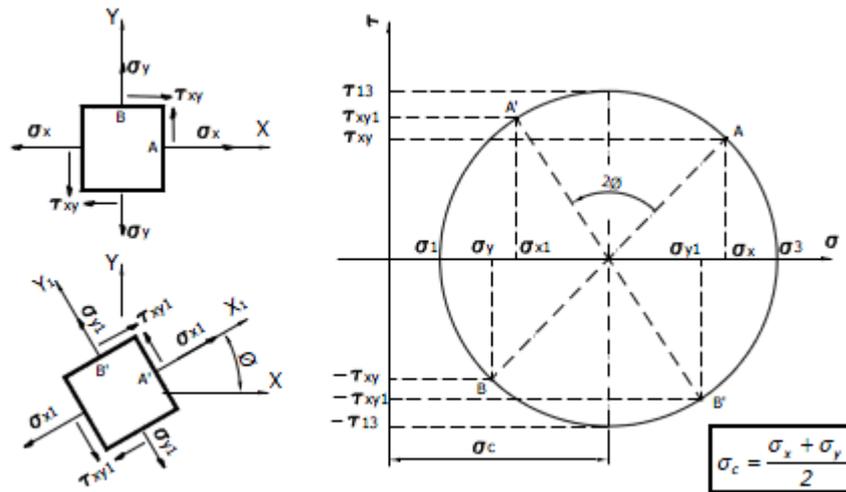


Fig.4.4: círculo de Mohr.

A continuación se muestra los círculos para distintas situaciones con sus ecuaciones para las tensiones cortantes máximas (Fig.4.5):

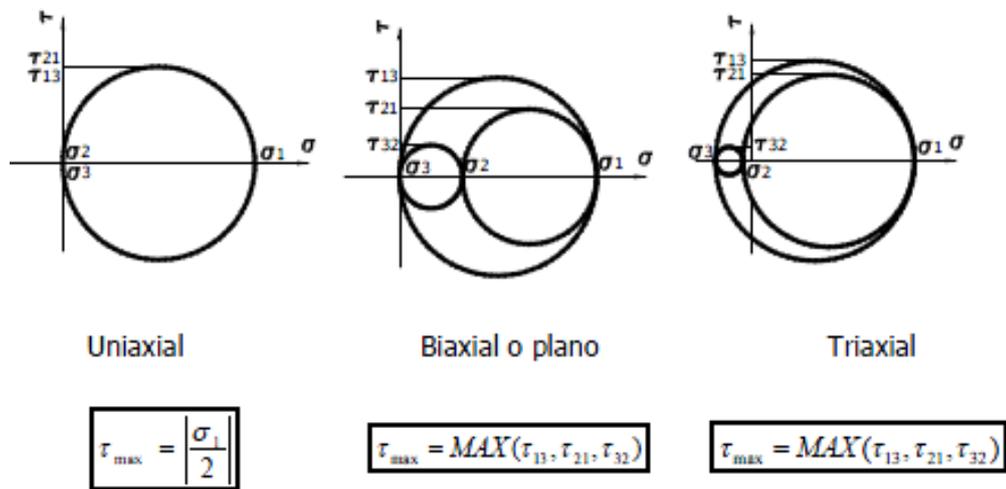


Fig.4.5: Círculos de Mohr y cortantes máx.

4.6- TENSIONES NORMALES PRODUCIDAS POR ESFUERZOS AXIALES.

Este apartado podría repetirse para los distintos esfuerzos (flexión, torsión...), pero en nuestro ejercicio sólo se trabajará con esfuerzos axiales por lo que simplemente haremos mención al caso de un cilindro o pieza sometida a este tipo de sollicitación (Fig.4.6).

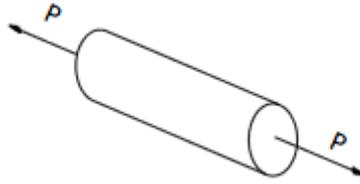


Fig.4.6: cilindro soportando tracción.

Las tensiones normales se suponen constantes y uniformemente distribuidas por toda la sección (Fig.4.7).

$$\sigma = \sigma_x = \frac{P}{A}$$

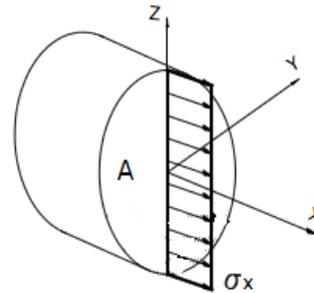


Fig.4.7: tensiones en una sección.

4.7- CONCENTRACIÓN DE TENSIONES.

Todos los elementos de máquinas analizados hasta ahora, lo han sido suponiendo secciones transversales uniformes. La mayor parte de los elementos de máquinas están constituidos por secciones variables.

Es común diseñar los ejes de máquinas con secciones escalonadas a lo largo de su longitud, para acoplar allí los distintos elementos (engranajes, poleas, rodamientos...). También es habitual mecanizar sobre los ejes chaveteros, taladros radiales, ranuras...; para fijar otros elementos a éstos.

Los cambios bruscos de sección, chaveteros, taladros, ranuras...; provocan en determinadas zonas de los elementos de máquinas, una concentración de tensiones que deberemos de tener en cuenta en su diseño.

En el diseño de máquinas se debe de prestar especial atención en la eliminación o atenuación de las concentraciones de tensiones.

Para considerar los efectos de los concentradores de tensión, utilizaremos unos coeficientes empíricos, mayores que la unidad, que multiplicarán a las tensiones nominales en las zonas donde actúen.

$$\sigma_{max} = k_t \sigma_{nom}$$

$$\tau_{m\acute{a}x} = k_{ts} \tau_{nom}$$

Estos coeficientes dependerán básicamente de:

- Tipo de tensión (normal o cortante).
- Tipo y geometría del concentrador.

Es importante considerar y conocer las concentraciones de tensiones por lo siguiente:

- Porque las tensiones mismas pueden producir plasticidad del material.
- Porque pueden llevar a la rotura frágil del material.
- Porque si hay cargas repetidas, pueden acelerar el proceso de fatiga.
- Porque aceleran la corrosión química de un material.

La aplicación del principio de Saint Venant tiende a ocultar el problema de concentración de tensiones. Consideremos una fuerza aplicada en un punto sobre el contorno de un estado plano de tensiones. Localmente se genera una distribución triangular de tensiones con un máximo, y fuera de esa región hay una distribución uniforme de tensiones. De acuerdo al principio de Saint Venant, debería tener una influencia solo local, y el objeto estructural sólo debería sentir la influencia en una zona cercana a la fuente de la concentración. Podría sustituirse una fuente de concentración de esfuerzos por un sistema estáticamente equivalente. Pero muchas estructuras se rompen debido a ese efecto local, y no puede quitárse de en medio mediante una sustitución.

Interesan principalmente tres aspectos relacionados con la distribución de tensiones:

- El valor de **la tensión máxima** que se alcanza en la zona de concentración. El factor de concentración de tensiones mide dicha tensión. A menudo es el único aspecto que se tiene en cuenta en las normas o códigos.

- La tensión puede ser un valor alto pero finito.
- Hay problemas en los que la tensión en algún punto sube tendiendo al infinito
- **La zona de concentración de esfuerzos.**
 - En algunos problemas la zona abarca un área que tiende a cero, de manera que las tensiones tienden a infinito localmente. Eso produce una singularidad.
 - En otros problemas la zona de concentración es bastante extendida, y puede producir redistribuciones importantes que comprometen el equilibrio.
- El **gradiente de tensiones** que se produce. El gradiente es la tasa de incremento de la tensión a medida que nos acercamos al origen de la concentración de tensiones. Una fuente de concentración de tensiones produce redistribución de tensiones con respecto a la distribución que existiría si no estuviera esa fuente
 - Puede haber un gradiente suave de tensiones altas, típico de problemas que se extienden sobre zonas grandes.
 - En otros problemas el gradiente es muy alto, típico de problemas que tienen singularidades.

Los orígenes de concentración de tensiones más frecuentes son:

- Existencia de objetos diferenciados dentro de un medio continuo.
 - Agujeros en un medio continuo. Ejemplos: agujeros para pasar tornillos o bulones (macromecánica), porosidades en un medio (micromecánica).
 - Inclusiones, formadas por otro material que se encuentra en un medio continuo. Ejemplos: nudos en la madera (macromecánica), inclusiones que son defectos en metales (micromecánica).
 - Fisuras. Tanto microfisuras como macrofisuras.
- Cambios abruptos en la geometría de un objeto estructural.
 - Ranuras en un estado plano.
 - Cambios en el espesor de una placa o cáscara, conservando la superficie media.
 - Cambios en el espesor de una placa o cáscara, sin conservar la superficie media.

- Discontinuidades en la tangente a la superficie media.
- Discontinuidades en la curvatura de la superficie media.
- Localización de fuerzas sobre el contorno de un objeto estructural.
 - Fuerzas aplicadas localmente sobre el contorno. Ejemplo: fuerzas concentradas.
 - Contacto entre objetos estructurales.
- Efectos de origen mecánico.
 - Tensiones debidas a soldaduras.

La ductilidad o fragilidad del material tiene un efecto pronunciado sobre su respuesta a concentraciones de esfuerzos bajo carga estática. Veremos cada uno de estos casos uno por uno.

MATERIALES DÚCTILES: Los materiales dúctiles cederán de manera local en el elevador de esfuerzos, en tanto que el material con esfuerzos menores lejos de la discontinuidad geométrica se mantendrá por debajo del punto de fluencia. Cuando el material cede localmente, su curva de esfuerzo-deformación local se hace no lineal y de pendiente reducida (Fig.4.8), lo que impide un incremento significativo adicional de esfuerzos en dicho punto. Conforme la carga aumenta, cede más material, presentando mayor proporción de la sección transversal a dicho esfuerzo. Solo cuando toda la sección transversal hay sido llevada al punto de fluencia, la parte o pieza continuará hacia arriba en la curva σ - ϵ , hasta la fractura. Por lo tanto, en materiales dúctiles bajo cargas estáticas es común despreciar los efectos de la concentración de esfuerzos geométricos. El esfuerzo para la sección transversal neta se calcula como si no existiera una concentración de esfuerzos allí. Sin embargo, la reducción en el área transversal neta o el momento de inercia de la sección recta debido al material eliminado sí es tomado en cuenta, produciendo, por lo tanto, esfuerzos más elevados a los correspondientes a una pieza sin muesca, con las mismas dimensiones generales.

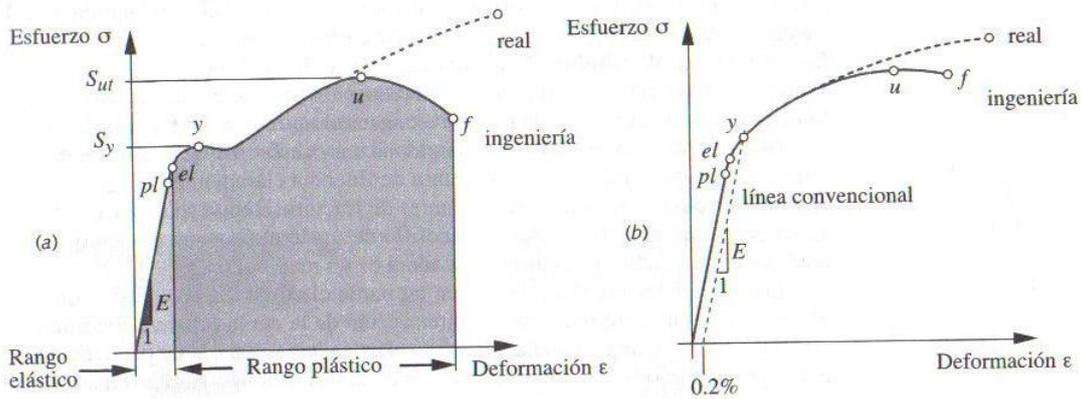


Fig.4.8: curvas esfuerzos-deformación para materiales dúctiles.

MATERIALES FRÁGILES: Éstos no cederán localmente, ya que no poseen rango plástico. Por lo tanto, las concentraciones de esfuerzo sí tienen efecto en su comportamiento, incluso bajo cargas estáticas. Una vez que el esfuerzo en elevador de esfuerzos excede la resistencia a la fractura, se empieza a iniciar una grieta. Esto reduce el material disponible para resistir la carga, con lo que se incrementa también la concentración de esfuerzos en la angosta grieta. La pieza falla enseguida. Por lo que para materiales frágiles bajo cargas estáticas deberá aplicarse el factor de concentración de esfuerzos, explicado anteriormente, a fin de aumentar el esfuerzo máximo aparente.

Una excepción de lo anterior reside en materiales frágiles fundidos que tienen tendencia a contener muchas discontinuidades y rupturas dentro de su estructura por causas de escamas de grafito en la aleación, burbujas de aire, materias extrañas, partículas de arena, etcétera, que llegaron allí junto con el material fundido del molde. Estas están presentes en los especímenes o probetas de prueba que se emplean para establecer las resistencias fundamentales del material. Por lo que los datos de resistencia publicados incluyen el efecto de concentraciones de esfuerzos. El agregar elevadores de esfuerzo geométricos al diseño de la pieza, se argumenta, agrega poco al efecto estadístico general de los ya existentes dentro del material. Por ello a menudo se pasan por alto factores geométricos de concentración de esfuerzos en el caso de materiales fundidos frágiles, o para cualquier material con defectos conocidos distribuidos en todo su volumen. Pero deberá ser aplicado a esfuerzos en otros materiales frágiles.

Para acabar de matizar esta parte de los materiales haremos una pequeña mención a la concentración de esfuerzos bajo cargas dinámicas, aunque no es el tema de

este proyecto. Los materiales dúctiles bajo cargas dinámicas se comportan y fallan como si fueran frágiles. Por lo que, aparte de la ductilidad o la fragilidad del material, cuando estén presentes cargas dinámicas (fatiga o impacto) deberá aplicarse el factor de concentración de esfuerzos. Sin embargo, aun así deberán tomarse en consideración parámetros relacionados con el material. Aunque todos los materiales bajo cargas dinámicas quedan afectados por concentraciones de esfuerzos, algunos son más sensibles que otros. Se ha definido para diversos materiales un parámetro conocido como sensibilidad a las muescas q , y sirve para modificar los factores geométricos K_t y K_{ts} de un material dado sometido a cargas dinámicas. Como se comentó anteriormente, aquí no se van a tratar el efecto de las cargas dinámicas.

Para concluir, se muestra a continuación la tabla 4.1 con los criterios para aplicar o no el factor de concentración de tensiones según el material, la carga,...

TABLA 4.1:

Material	Condición de Carga	Si o No	K	Tipo de Falla
Frágil	Cualquiera	Si	K	Fractura rápida
Dúctil	Baja Temperatura	Si	K	Fractura rápida
Dúctil	Aplicación Rápida	SI	KK	Fractura rápida
Dúctil	Cíclica	Si	K_f	Falla progresiva
Dúctil	Estática a Temp. ambiente	No	1	Ninguna

Aunque ya hemos visto cómo calcular teóricamente el factor de concentración de tensiones, se presentarán una serie de gráficas que son muy usadas desde el punto de vista práctico para su cálculo a partir de la geometría de la pieza y del tipo de carga aplicado.

Para deducir funciones de concentración de esfuerzos para algunas geometrías sencillas debe recurrirse a la teoría de la elasticidad, la cual proporciona valores de concentración de tensiones en algunos casos. Otros factores de concentración de

esfuerzos provienen de investigaciones experimentales de piezas sometidas a cargas controladas. Se pueden efectuar mediciones experimentales con medidores de deformación, técnicas fotoelásticas, holografía láser y otros medios. Cada vez se utiliza más el **análisis por elementos finitos** y el análisis de elemento límite para generar factores de concentración de esfuerzos. Cuando se hace un análisis de esfuerzo mediante estas técnicas numéricas, las concentraciones de esfuerzos “resultan de los cálculos” siempre que la malla se defina lo suficientemente fina alrededor de las áreas de los elevadores geométricos de esfuerzos. (Fig.4.9).

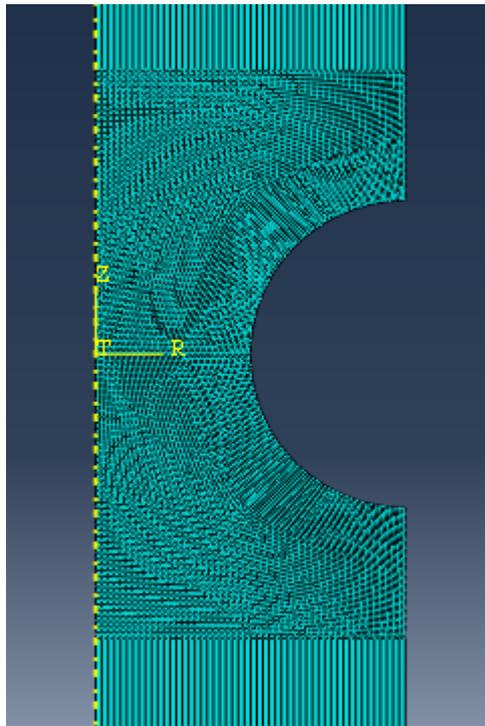


Fig.4.9: mallado muy fino alrededor de la discontinuidad

Se muestra, como ejemplo, la variación del factor de concentración de esfuerzos para el caso que estudiaremos posteriormente con ABAQUS, es decir, una pieza cilíndrica ranurada a tensión axial, en este caso tracción. También se muestra la función matemática que aproxima las diversas curvas empíricas. (Fig.4.10).

Estas gráficas y funciones de concentración de esfuerzos están disponibles para diversos tipos de piezas con distintas discontinuidades y tipos de esfuerzos, y resultan muy útiles para el diseño de piezas de maquinaria y en toda la práctica de la ingeniería.

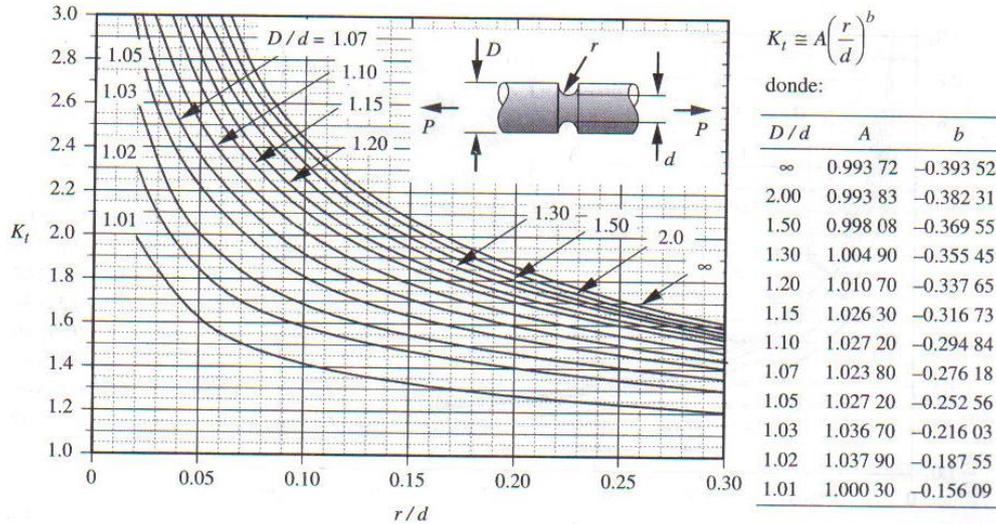


Fig.4.10: Factor de concentración de esfuerzos geométrico K_t para una flecha ranurada a tensión axial.

Después de conocer las causas y los problemas de la concentración de tensiones, lo que fundamentalmente interesa al ingeniero es cómo evitar ese problema. Cómo diseñar la pieza para que cumpla con su funcionamiento y, a la vez, reducir la concentración de tensiones al máximo.

Con frecuencia se necesita una geometría complicada para el funcionamiento adecuado de piezas de maquinaria. Por ejemplo, para lograr su objetivo, un cigüeñal debe tener un contorno particular. El diseñador siempre tiene que enfrentarse al problema de la concentración de esfuerzos en aquellas secciones que tienen cambios de forma abruptos. Lo mejor que se puede hacer es minimizar su efecto. Un estudio de las curvas de concentración de esfuerzos para diversas geometrías muestran que, en general, cuanto más aguda sea la esquina y mayor sea en magnitud el cambio de contorno, tanto peor será la concentración de esfuerzos. En el caso de la barra de escalón (Fig.4.11), mayores razones D/d , así como menores razones r/d , ocasionan peores concentraciones de esfuerzos. De estas observaciones, podemos enunciar algunas guías de diseño de tipo general para minimizar las concentraciones de tensiones.

- De ser posible, evite cambios abruptos y/o de gran magnitud en la sección transversal.
- Evite totalmente esquinas agudas o filosas y diseñe los radios de transición que sean lo mayor posible, entre superficies de contorno diferente.

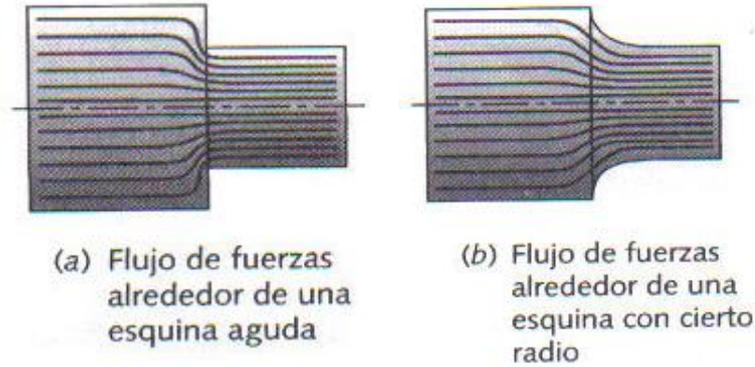


Fig.4.11: la analogía del flujo de fuerzas para partes con contorno

Estas guías de acción son fáciles de enunciar, y aún mejores si se cumplen, pero muy a menudo intervienen restricciones prácticas de diseño para evitar e impedir su estricta adherencia. Se muestran algunos ejemplos de diseños correctos e incorrectos para concentraciones de tensiones, junto con algunas artimañas comunes que los diseñadores experimentados utilizan para mejorar la situación. (Fig.4.11 y Fig.4.12).

ANALOGÍA DE FLUJO DE FUERZAS: La figura 4.11.a muestra un eje con un escalón abrupto y una esquina aguda, en tanto que la figura 4.11.b muestra el mismo escalón en un eje, pero con un radio de transición grande. Una forma práctica de visualizar la diferencia en estados de esfuerzo en piezas de contornos variables como éstos es sirviéndose de una analogía de “flujo de fuerzas” que considere las fuerzas (y, por tanto, los esfuerzos) como si fluyeran por los contornos, de manera similar al flujo de un fluido ideal incompresible en el interior de una tubería o conducto de contorno variable. Un estrechamiento abrupto en la tubería o conducto crea un aumento en la velocidad del fluido en el cuello del conducto para mantener un flujo constante. El perfil de velocidad “se concentra” así en un segmento más reducido. En tuberías y conductos se manejan formas hidrodinámicas (así como en objetos que deban ser empujados a través de un medio fluido, como aeronaves y barcos) a fin de reducir turbulencias y resistencia al flujo. Al “hidrodinamizar” los contornos de nuestra pieza (por lo menos de manera interna) obtenemos un efecto benéfico similar en la reducción de concentraciones de esfuerzos. Los contornos de flujo de fuerzas en la transición abrupta en escalón están más concentrados que en el de diseño con el radio.

El siguiente ejemplo (Fig.4.12) muestra un eje en escalón, a la cual se le va a acoplar un cojinete de bolas. Es necesario el escalón para localizar axial y radialmente el cojinete sobre el diámetro exterior del eje. Los cojinetes de bolas y de rodillos comerciales tienen radios bastante pequeños en sus esquinas lo que obliga al diseñador a crear una esquina bastante aguda en el escalón de la flecha. A fin de reducir las concentraciones de esfuerzos en el escalón (Fig.4.12a), es necesario un radio superior al permitido por el cojinete. En la figura se muestran tres posibles modificaciones de diseño para crear un mejor flujo de fuerzas alrededor del escalón. El primer diseño (Fig.4.12b) elimina material sobrante de la esquina, para incrementar el radio y a continuación “retorna” el contorno para dar la superficie de localización axial necesaria para el cojinete. El segundo procedimiento (Fig.12c) elimina material detrás del escalón, para mejorar la aerodinámica de las fuerzas. El tercer procedimiento (Fig.4.12d) proporciona un radio de la esquina adecuadamente grande con la adición de una arandela especial, que hace puente sobre el radio para proporcionar el asiento del cojinete. En cada uno de estos casos se reduce la concentración de esfuerzos, en comparación con el diseño original de esquinas agudas.

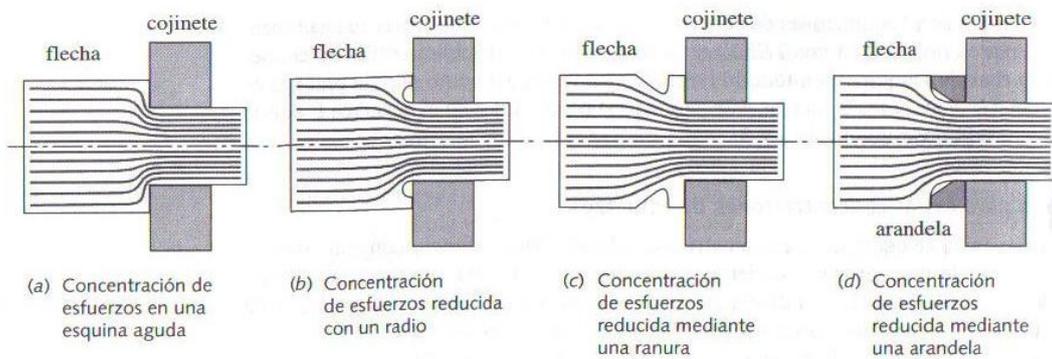


Fig.4.12: modificaciones del diseño para reducir la concentración de esfuerzos en una esquina aguda.

Estos ejemplos muestran lo útil de la analogía del flujo de fuerzas como procedimiento para mejorar cualitativamente el diseño de las piezas de maquinaria mediante la reducción de concentraciones de esfuerzos. El diseñador deberá intentar minimizar cambios bruscos en el contorno de las líneas internas de flujo de fuerzas mediante una elección adecuada de la forma de la pieza.

5 PROBLEMA 2:
CONCENTRACIÓN DE TENSIONES
EN ELEMENTOS CILÍNDRICOS.

5. Problema 2: CONCENTRACIÓN DE TENSIONES EN ELEMENTOS CÍLINDRICOS.

5.1- INTRODUCCIÓN.

En este capítulo se ha abordado el problema de obtener los valores de las tensiones que soportan cilindros con su sección central reducida debido a una muesca circular en la parte central, y el factor geométrico de concentración de tensiones k_t . (Fig.5.1). Para ello, al igual que en todo el proyecto, se va a trabajar con el programa Abaqus aunque, en este caso, debido a la mayor complejidad del problema, y debido a que se necesita un mallado más fino para llegar a resultados aceptables, no se ha empleado la versión de Abaqus de estudiante y se ha usado el Abaqus6.10. profesional. Así pues, se utilizará, mediante este programa, el método de resolución de los elementos finitos para llegar a la solución del problema planteado.

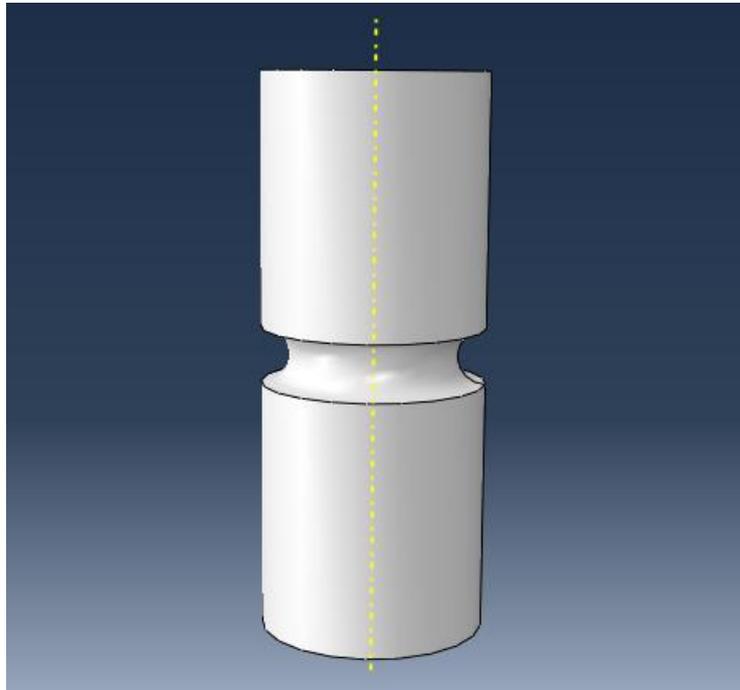


Fig.5.1: ejemplo en 3D del tipo de piezas que vamos a estudiar.

En este problema se observan varias cosas interesantes y a tener en cuenta a la hora del cálculo o diseño de piezas de este tipo. En la primera parte del problema se presentará la distribución de tensiones en la sección central del cilindro. Veremos cómo varían los valores de las tensiones según nos aproximamos a la muesca. Se representará gráficamente esta variación para así observar cómo, al aproximarse a la muesca, crecen rápidamente, en el modo en que teóricamente debe ocurrir. Además, se obtendrán los factores geométricos de concentración de tensiones de las gráficas que aparecen en la bibliografía y, por otro lado, se calcularán vía MEF, pudiendo así comparar ambos. Los cilindros que usaremos estarán sometidos a esfuerzos de tracción. Para todo ello se usarán las fórmulas que se escriben a continuación.

La variable entre los distintos caso estudiados es el radio de muesca r . La muesca consiste en una ranura circunferencial practicada en la sección media del cilindro.

Todos los cilindros están sometidos a una carga de tracción $q = 1000 \text{ N/mm}^2$, todos son de acero, la longitud del cilindro es muy grande en comparación con su diámetro, el diámetro exterior es siempre de 60 mm.

En este apartado del proyecto se utilizará la siguiente expresión para las tensiones nominales:

$$\sigma_{y,n} = \frac{q \cdot A_0}{A_1}$$

donde

$$A_0 = \pi(D/2)^2$$

es el área de la sección normal del cilindro y

$$A_1 = \pi(d/2)^2$$

el área de la sección en la muesca. En cuanto a la parte del factor geométrico de concentración de tensiones queda definido según:

$$k_t = \frac{\sigma_{y,MEF}}{\sigma_{y,n}}$$

Se han calculado con Abaqus en todos los nodos de la sección central de la pieza, las tensiones normales σ_y en la dirección de la carga. El cálculo MEF también da lugar a tensiones σ_x que no proporciona la teoría de Resistencia de Materiales, pero que son de valor muy pequeño comparadas con σ_y .

Por las razones expuestas en el capítulo anterior, la geometría se ha definido en milímetros y milímetros cuadrados en vez de en el sistema internacional. Para las fuerzas se utilizará el Newton.

5.2- MODELADO DEL PROBLEMA CON ELEMENTOS FINITOS.

A continuación, se pasa a describir el método seguido para modelar el problema con el programa de cálculos avanzados con elementos finitos ABAQUS 6.10. Se describirán las operaciones a realizar así como los comandos necesarios para llevar a cabo el modelado. Todo cálculo con elementos finitos se puede dividir en tres operaciones un **preproceso**, **proceso** y **postproceso**. El proceso es la parte que tiene que ver con el propio cálculo que lleva internamente a cabo el programa, por lo que aquí se explicarán el trabajo realizado en las otras dos etapas, como ya ocurrió en el anterior problema.

5.2.1.- Preproceso.

5.2.1.1. Geometría.

Lo primero es definir la geometría del modelo a estudiar. Estudiaremos las tensiones a lo largo del eje X y el eje Y tomando el Z perpendicular a la pantalla. Aunque el problema real sea en 3 dimensiones, basta con estudiar cualquier superficie longitudinal que por revolución genera el cilindro completo, reduciendo el problema a uno de dos dimensiones. Se opta por trabajar en el plano cartesiano XY siendo el eje horizontal el eje X y el vertical el eje Y. Bastará con trazar un rectángulo con la altura del cilindro l con un arco en la sección central para especificar la muesca (sección longitudinal). Se creará con la opción de axisimetría para que así el rectángulo dibujado se interprete como una superficie que tiene que girar alrededor de un eje para formar el cilindro. Todo ello aparece en la figura 5.2

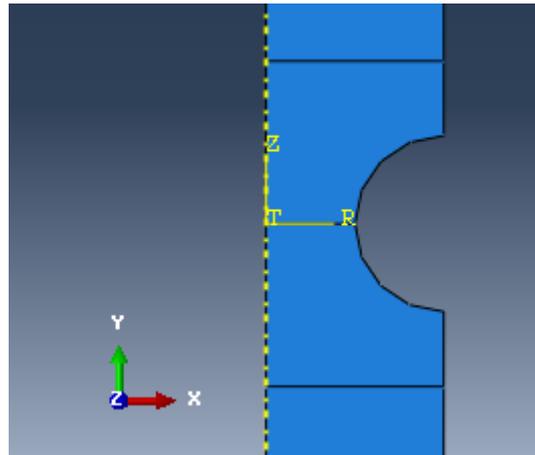


Fig.2: Detalle de los sistemas de ejes utilizados.

Ahora nos basta con describir la geometría del cilindro en dos dimensiones. En un principio se van a estudiar cuatro cilindros con diferentes muescas. La muesca de los cuatro consistirá en un semicírculo perfecto. (Fig.5.3) lo que hace que se verifique la siguiente ecuación en los cuatro casos:

$$D = d + 2r$$

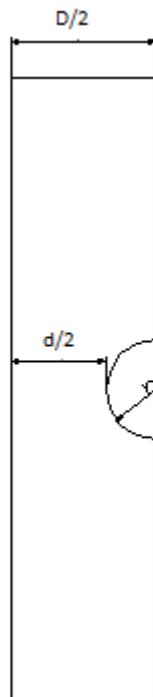


Fig.5.3: Esquema general de la sección longitudinal del cilindro que se estudia.

Para empezar, y con el objeto de ver las diferencias, se tomará el ejemplo de un cilindro sin muesca.

Todos tienen en común un diámetro exterior D de 60mm. y una longitud l de un metro. Esta longitud se toma tan grande para evitar los efectos de los extremos sobre la distribución de la tensión en la sección de la muesca.

A continuación se describen los cuatro cilindros que llamaremos: caso 1, caso 2, caso 3, caso 4:

El **caso 1** tiene las siguientes dimensiones: un diámetro exterior de 60 mm, un diámetro en la sección central de 59.04 mm y un radio de muesca de 0.297 mm.

El **caso 2** tiene las siguientes dimensiones: un diámetro exterior de 60 mm., un diámetro en la sección central de 50 mm y un radio de muesca de 5 mm.

El **caso 3** tiene las siguientes dimensiones: un diámetro exterior de 60 mm., un diámetro en la sección central de 40 mm y un radio de muesca de 10 mm.

El **caso 4** tiene las siguientes dimensiones: un diámetro exterior de 60 mm., un diámetro en la sección central de 30 mm y un radio de muesca de 15 mm.

5.2.1.2. Materiales.

El material es común a todos, lo que es lógico, ya que se quiere comparar la variación que sufren las distintas variables simplemente modificando simplemente el radio de la muesca. Se han considerado cilindros de acero con las siguientes características:

- Módulo de elasticidad: 210000 N/mm²
- Coeficiente de Poisson: 0.3.

Siempre se trabajará en la zona elástica del material, no se considerará ningún efecto plástico del acero. Tampoco interviene en ninguna parte del problema otro tipo de efectos como dilataciones térmicas,...

5.2.1.3. Condiciones de contorno.

En este apartado, hay que indicarle al programa informático el tipo de cargas a las que está sometida nuestra pieza, así como las restricciones en cuanto a movimientos

se refiere. Este apartado es común para cualquiera de los cilindros estudiados. Como se dijo anteriormente, aplicamos una carga distribuida de tracción, paralela al eje del cilindro, de valor 1000 N/mm^2 . Y se restringe el movimiento en la dirección vertical de los nodos de la sección central ($U_2 = 0$). (Fig.5.4)

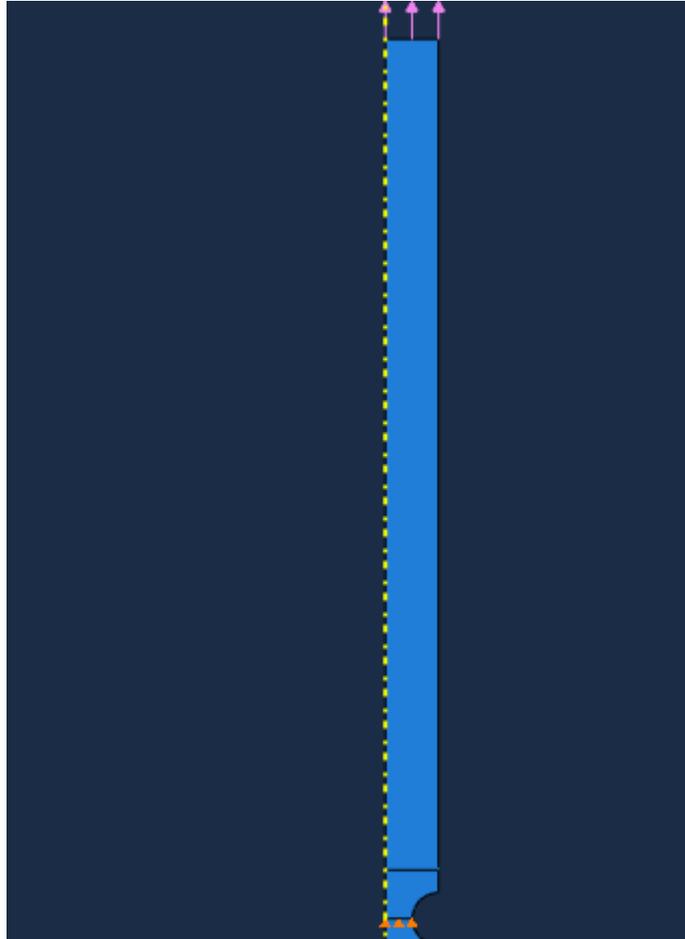


Fig.5.4: detalle de las condiciones de contorno.

5.2.1.4. Mallado.

Aquí se define el tipo de elemento con el que se malla y el número de elementos y de nodos con los que se discretiza el sólido. Una adecuada discretización es la que permite al programa obtener resultados muy exactos.

En este caso hemos utilizado elementos cuadráticos en el mallado y de tipo estructural, definidos como CAX4R. Aunque el tipo de elemento del mallado es el mismo en los cuatro casos, no es igual el número de elementos y nodos debido a la geometría, incluso no es el mismo el número de nodos en las secciones centrales, varía

según el espesor. A diferencia del ejercicio anterior, al usar una versión más potente del programa, ha resultado posible mallar mucho más fino, es decir, con muchos más elementos o nodos. Esta posibilidad se ha utilizado para mallar muy fino la sección central donde se tiene la concentración de tensiones (Fig.5.5).

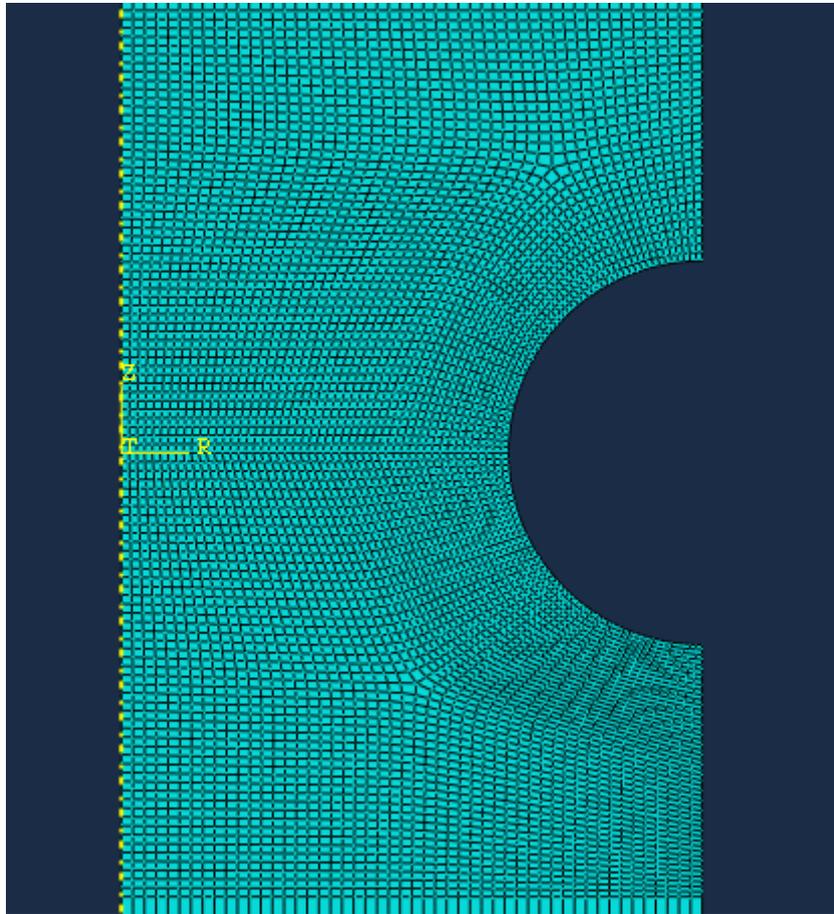


Fig.5.5: mallado en la sección central para uno de los casos.

A continuación se indican los valores concretos para cada caso:

- Caso 1: tiene 18365 nodos y 18002 elementos. La sección central contiene 301 nodos.
- Caso 2: tiene 6911 nodos y 6706 elementos. La sección central contiene 51 nodos.
- Caso 3: tiene 7082 nodos y 6871 elementos. La sección central contiene 51 nodos.
- Caso 4: tiene 7471 nodos y 7250 elementos. La sección central contiene 51 nodos. (Fig.5.6)

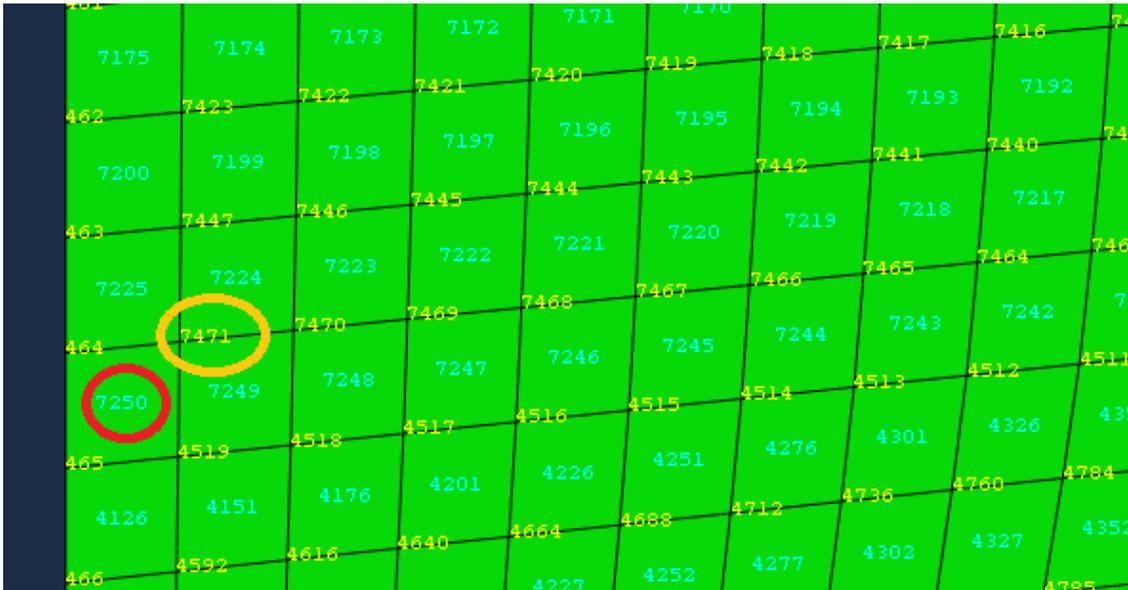


Fig.5.6: detalle del mallado del caso 4.

Con esto concluye el preproceso. En el proceso el programa calcula las tensiones y deformaciones en los cilindros a partir de los datos que se han introducido en el preproceso. A continuación, y es labor del ingeniero, se deben interpretar los resultados.

5.2.2. Postproceso.

Es en esta etapa en la que se interpretan los resultados a partir de la solución numérica del problema.

Se estudiarán las distribuciones de tensiones y, a partir de ellas, se calcularán los factores de concentración de tensiones, así que dividiremos este apartado en dos puntos de interés.

5.2.2.1 Análisis de las tensiones.

A continuación, se muestran los valores de las tensiones obtenidos con Abaqus para los distintos modelos de cilindros analizados. También, se mostrarán gráficas e imágenes para dar una idea más clara de lo que ocurre en la sección central de la pieza.

Primeramente, vamos a mostrar el caso de un cilindro sin muesca, en este caso, las tensiones se distribuyen de igual forma en cada una de las secciones del cilindro (Fig.5.7).

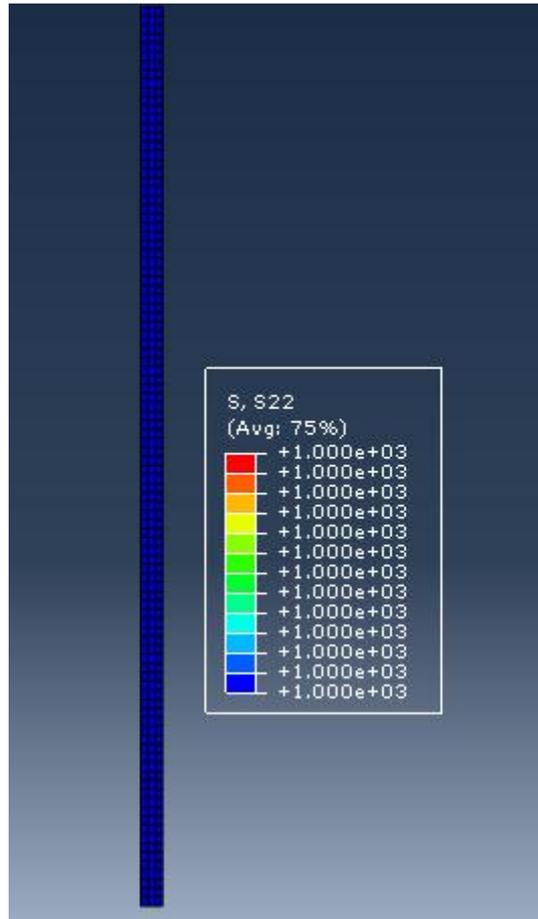


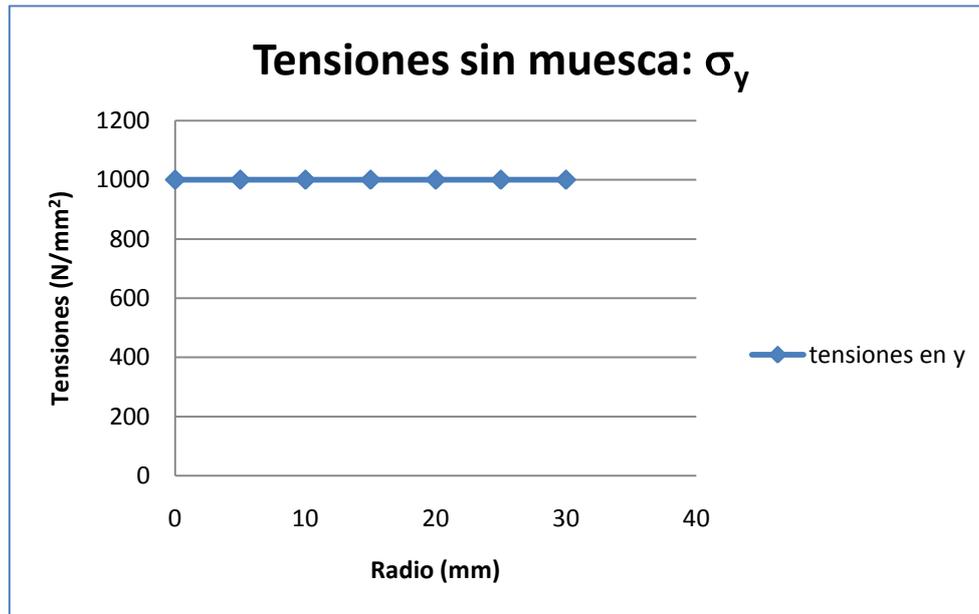
Fig.5.7: gráfico cromático del cilindro sin muesca. Leyenda con valores en N/mm^2 .

En la figura 5.7 puede verse claramente como el color no varía en ningún punto de la pieza, es decir, las tensiones toman el mismo valor en todos los puntos del cilindro, concretamente $1000 N/mm^2$. Ese valor se corresponde con el que teórico:

$$\sigma_n = \frac{q \cdot A_0}{A_0} = q = 1000 N/mm^2$$

Se destacará en todos los casos las tensiones en el eje vertical y las del eje horizontal. Es decir, las tensiones normales en el plano que está representado nuestro esquema de dos dimensiones. Por lo tanto, hablaremos de las tensiones en el eje X e Y (σ_x y σ_y). Para el caso del cilindro sin muesca son despreciables las tensiones en cualquier dirección excepto en la dirección Y que como se muestra en la figura 5.7 es $1000 N/mm^2$.

En la gráfica 5.1 se puede ver representada la distribución de tensiones, σ_y , en la sección central en función del radio. En ella se aprecia el valor constante de las tensiones. No hay ningún tipo de cambio en la sección y, por tanto, las tensiones son uniformes en la pieza. Veremos cómo, al introducir la muesca, esta uniformidad se rompe.



Gráfica 5.1: Distribución de tensiones σ_y en la sección central sin muesca.

A partir de este punto y con estos resultados iniciales con los que comparar, se mostrarán a continuación los resultados del análisis de las tensiones en los cuatro casos de cilindro con muesca propuestos.

5.2.2.1.1. Caso 1.

Las características de este primer caso ya se enunciaron anteriormente. Corresponde al cilindro con la muesca más pequeña. Es el que más nodos tiene en la sección central, exactamente 301 nodos. Su muesca tiene un radio de sólo 0.297mm. Las tensiones obtenidas se muestran en la tabla 5.1 que se presenta a continuación:

TABLA 5.1:

CONCENTRACIÓN DE TENSIONES CASO 1					
DATOS	NODOS EJE CENTRAL	COORDENADA X	COORDENADA Y	σ_y (N/mm ²)	σ_x (N/mm ²)
D = 60mm	5	29,703	0	2346,65	274,688
	633	29,604	0	1980,88	346,87
d = 59,406mm	634	29,505	0	1479,54	398,979
	635	29,406	0	1280,37	349,867
	636	29,307	0	1177,91	295,712
	637	29,208	0	1119,48	248,918
	638	29,109	0	1084,85	217,78
D/d = 1,01	639	29,01	0	1061,91	180,286
	640	28,911	0	1046,9	155,556
r = (D - d)/2 = 0,297mm	641	28,812	0	1036,04	135,506
	642	28,713	0	1028,47	118,917
	643	28,614	0	1022,66	105,186
	644	28,515	0	1018,44	93,597
	645	28,416	0	1015,07	83,827
	646	28,317	0	1012,56	75,439
	647	28,218	0	1010,49	68,256
	648	28,119	0	1008,91	62,003
	649	28,02	0	1007,59	56,578
	650	27,921	0	1006,57	51,8
	651	27,822	0	1005,7	47,61
	652	27,723	0	1005,03	43,883
	653	27,624	0	1004,45	40,585
	654	27,525	0	1004	37,629
	655	27,426	0	1003,3	34,993
	656	27,327	0	1003,03	32,614
	657	27,228	0	1002,82	30,48
	658	27,129	0	1002,64	28,544
	659	27,03	0	1002,49	26,797
	660	26,931	0	1002,36	25,205
	661	26,832	0	1002,25	23,762
	662	26,733	0	1002,15	22,442
	663	26,634	0	1002,07	21,241
	664	26,535	0	1001,99	20,138
	665	26,436	0	1001,92	19,132
	666	26,337	0	1001,85	18,204
	667	26,238	0	1001,79	17,355
	668	26,139	0	1001,73	16,569
	669	26,04	0	1001,66	15,847
	670	25,941	0	1001,6	15,178
	671	25,842	0	1001,54	14,56

672	25,743	0	1001,54	13,985
673	25,644	0	1001,48	13,453
674	25,545	0	1001,42	12,955
675	25,446	0	1001,35	12,492
676	25,347	0	1001,29	12,058
677	25,248	0	1001,22	11,653
678	25,149	0	1001,16	11,271
679	25,05	0	1001,09	10,912
680	24,951	0	1001,03	10,573
681	24,852	0	1000,96	10,253
682	24,753	0	1000,9	9,949
683	24,653	0	1000,84	9,661
684	24,544	0	1000,77	9,386
685	24,455	0	1000,71	9,124
686	24,356	0	1000,65	8,873
687	24,257	0	1000,6	8,633
688	24,158	0	1000,54	8,403
689	24,059	0	1000,54	8,182
690	23,96	0	1000,49	7,968
691	23,861	0	1000,43	7,564
692	23,762	0	1000,38	7,372
693	23,663	0	1000,34	7,186
694	23,564	0	1000,29	7,006
695	23,465	0	1000,25	6,831
696	23,366	0	1000,21	6,661
697	23,267	0	1000,17	6,496
698	23,168	0	1000,13	6,336
699	23,069	0	1000,1	6,18
700	22,97	0	1000,07	6,023
701	22,871	0	1000,04	5,88
702	22,772	0	1000	5,595
703	22,673	0	1000	5,459
704	22,574	0	1000	5,326
705	22,475	0	1000	5,196
706	22,376	0	1000	5,069
707	22,277	0	1000	4,946
708	22,178	0	1000	4,826
709	22,079	0	1000	4,709
710	21,98	0	1000	4,595
711	21,881	0	1000	4,484
712	21,782	0	1000	4,376
713	21,683	0	1000	4,271
714	21,584	0	1000	4,169
715	21,485	0	1000	1,069
716	21,386	0	1000	3,972
717	21,287	0	1000	3,878

718	21,188	0	1000	3,786
719	21,089	0	1000	3,697
720	20,99	0	1000	3,61
721	20,891	0	1000	3,526
722	20,792	0	1000	3,444
723	20,693	0	1000	3,365
724	20,594	0	1000	3,287
725	20,495	0	1000	3,212
726	20,396	0	1000	3,14
727	20,297	0	1000	3,069
728	20,198	0	1000	3,001
729	20,099	0	1000	2,934
730	20	0	1000	2,87
731	19,901	0	1000	2,747
732	19,802	0	1000	2,688
733	19,703	0	1000	2,63
734	19,604	0	1000	2,576
735	19,505	0	1000	2,523
736	19,406	0	1000	2,471
737	19,307	0	1000	2,421
738	19,208	0	1000	2,372
739	19,109	0	1000	2,325
740	19,01	0	1000	2,28
741	18,911	0	1000	2,236
742	18,812	0	1000	2,193
743	18,713	0	1000	2,152
744	18,614	0	1000	2,112
745	18,515	0	1000	2,074
746	18,416	0	1000	2,037
747	18,317	0	1000	2,001
748	18,218	0	1000	1,966
749	18,119	0	1000	1,932
750	18,02	0	1000	1,9
751	17,921	0	1000	1,868
752	17,822	0	1000	1,838
753	17,723	0	1000	1,808
754	17,624	0	1000	1,78
755	17,525	0	1000	1,752
756	17,426	0	1000	1,726
757	17,327	0	1000	1,7
758	17,228	0	1000	1,675
759	17,129	0	1000	1,651
760	17,03	0	1000	1,628
761	16,931	0	1000	1,605
762	16,832	0	1000	1,583
763	16,733	0	1000	1,562

764	16,634	0	1000	1,542
765	16,535	0	1000	1,522
766	16,436	0	1000	1,503
767	16,337	0	1000	1,484
768	16,238	0	1000	1,466
769	16,139	0	1000	1,449
770	16,04	0	1000	1,432
771	15,941	0	1000	1,416
772	15,842	0	1000	1,4
773	15,743	0	1000	1,385
774	15,644	0	1000	1,37
775	15,545	0	1000	1,356
776	15,446	0	1000	1,342
777	15,347	0	1000	1,329
778	15,248	0	1000	1,316
779	15,149	0	1000	1,303
780	15,05	0	1000	1,291
781	14,951	0	1000	1,279
782	14,852	0	1000	1,267
783	14,752	0	1000	1,256
784	14,653	0	1000	1,245
785	14,554	0	1000	1,234
786	14,455	0	1000	1,224
787	14,356	0	1000	1,214
788	14,257	0	1000	1,204
789	14,158	0	1000	1,194
790	14,059	0	1000	1,185
791	13,96	0	1000	1,176
792	13,861	0	1000	1,167
793	13,762	0	1000	1,159
794	13,663	0	1000	1,15
795	13,564	0	1000	1,142
796	13,465	0	1000	1,134
797	13,366	0	1000	1,126
798	13,267	0	1000	1,119
799	13,168	0	1000	1,111
800	13,069	0	1000	1,104
801	12,97	0	1000	1,097
802	12,871	0	1000	1,09
803	12,772	0	1000	1,083
804	12,673	0	1000	1,076
805	12,574	0	1000	1,07
806	12,475	0	1000	1,063
807	12,376	0	1000	1,057
808	12,277	0	1000	1,051
809	12,178	0	1000	1,045

810	12,079	0	1000	1,039
811	11,98	0	1000	1,033
812	11,881	0	1000	0,027
813	11,782	0	1000	1,022
814	11,683	0	1000	1,016
815	11,584	0	1000	1,011
816	11,485	0	1000	1,005
817	11,386	0	1000	1
818	11,287	0	1000	0,995
819	11,188	0	1000	0,99
820	11,089	0	1000	0,985
821	10,99	0	1000	0,98
822	10,891	0	1000	0,975
823	10,792	0	1000	0,971
824	10,693	0	1000	0,966
825	10,594	0	1000	0,961
826	10,495	0	1000	0,957
827	10,396	0	1000	0,952
828	10,297	0	1000	0,948
829	10,198	0	1000	0,943
830	10,099	0	1000	0,939
831	10	0	1000	0,935
832	9,901	0	1000	0,931
833	9,802	0	1000	0,927
834	9,703	0	1000	0,923
835	9,604	0	1000	0,919
836	9,505	0	1000	0,915
837	9,406	0	1000	0,911
838	9,307	0	1000	0,907
839	9,208	0	1000	0,903
840	9,109	0	1000	0,899
841	9,01	0	1000	0,896
842	8,911	0	1000	0,892
843	8,812	0	1000	0,889
844	8,713	0	1000	0,885
845	8,614	0	1000	0,882
846	8,515	0	1000	0,878
847	8,416	0	1000	0,875
848	8,317	0	1000	0,871
849	8,218	0	1000	0,868
850	8,119	0	1000	0,865
851	8,02	0	1000	0,862
852	7,921	0	1000	0,859
853	7,822	0	1000	0,855
854	7,723	0	1000	0,852
855	7,624	0	1000	0,849

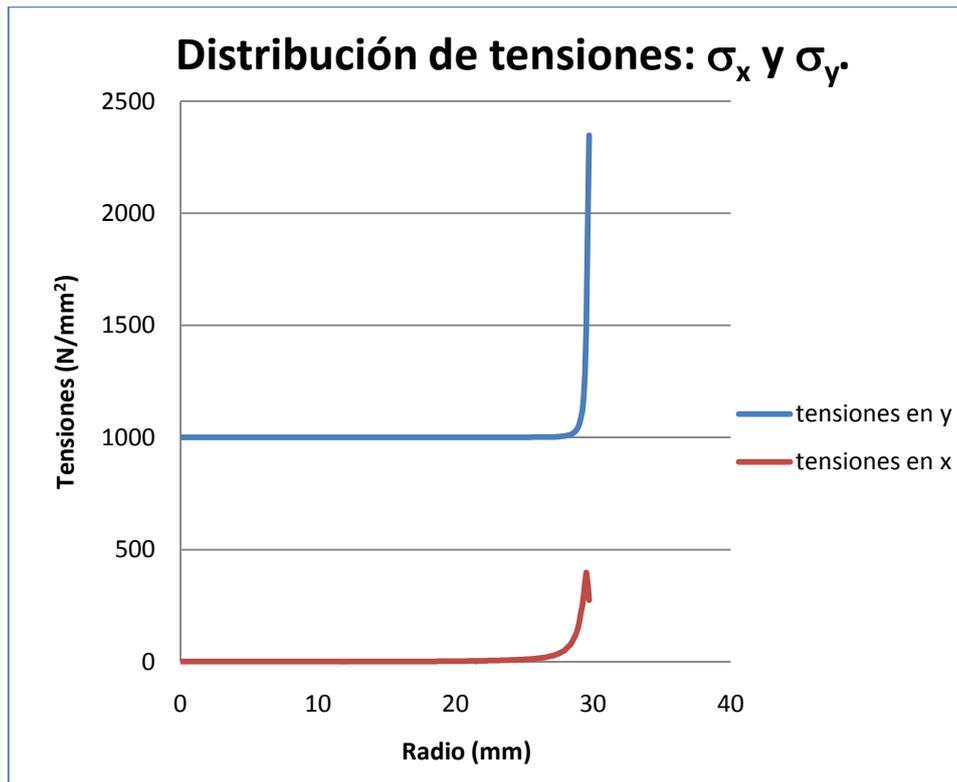
856	7,525	0	1000	0,847
857	7,426	0	1000	0,844
858	7,327	0	1000	0,841
859	7,228	0	1000	0,838
860	7,129	0	1000	0,835
861	7,03	0	1000	0,833
862	6,931	0	1000	0,83
863	6,832	0	1000	0,827
864	6,733	0	1000	0,825
865	6,634	0	1000	0,822
866	6,535	0	1000	0,82
867	6,436	0	1000	0,817
868	6,337	0	1000	0,815
869	6,238	0	1000	0,813
870	6,139	0	1000	0,811
871	6,04	0	1000	0,808
872	5,941	0	1000	0,806
873	5,842	0	1000	0,804
874	5,743	0	1000	0,802
875	5,644	0	1000	0,8
876	5,545	0	1000	0,798
877	5,446	0	1000	0,796
878	5,347	0	1000	0,795
879	5,248	0	1000	0,793
880	5,149	0	1000	0,791
881	5,05	0	1000	0,79
882	4,951	0	1000	0,788
883	4,852	0	1000	0,786
884	4,752	0	1000	0,785
885	4,653	0	1000	0,784
886	4,554	0	1000	0,782
887	4,455	0	1000	0,781
888	4,356	0	1000	0,78
889	4,257	0	1000	0,779
890	4,158	0	1000	0,778
891	4,059	0	1000	0,777
892	3,96	0	1000	0,776
893	3,861	0	1000	0,775
894	3,762	0	1000	0,774
895	3,663	0	1000	0,773
896	3,564	0	1000	0,772
897	3,465	0	1000	0,772
898	3,366	0	1000	0,771
899	3,267	0	1000	0,771
900	3,168	0	1000	0,77
901	3,069	0	1000	0,77

902	2,97	0	1000	0,77
903	2,871	0	1000	0,769
904	2,772	0	1000	0,769
905	2,673	0	1000	0,769
906	2,574	0	1000	0,769
907	2,475	0	1000	0,768
908	2,376	0	1000	0,768
909	2,277	0	1000	0,768
910	2,178	0	1000	0,768
911	2,079	0	1000	0,768
912	1,98	0	1000	0,768
913	1,881	0	1000	0,768
914	1,782	0	1000	0,768
915	1,683	0	1000	0,768
916	1,584	0	1000	0,768
917	1,485	0	1000	0,768
918	1,386	0	1000	0,768
919	1,287	0	1000	0,768
920	1,188	0	1000	0,768
921	1,089	0	1000	0,768
922	0,99	0	1000	0,767
923	0,891	0	1000	0,767
924	0,792	0	1000	0,767
925	0,693	0	1000	0,767
926	0,594	0	1000	0,767
927	0,495	0	1000	0,767
928	0,396	0	1000	0,767
929	0,297	0	1000	0,767
930	0,198	0	1000	0,766
931	0,099	0	1000	0,766
6	0	0	1000	0,766

Se puede observar muy bien, debido al gran número de nodos, que al ser la muesca tan pequeña, hay muchos puntos en la sección central en los que $\sigma_y = 1000$ N/mm², valor de la tensión en el cilindro sin muesca. Sin embargo, en la parte superior de la tabla, los valores de la tensión crecen considerablemente conforme nos acercamos al extremo de la ranura. También, se muestran en la tabla los valores de las tensiones en el eje X que, como vemos, aun siendo pequeñas, ya no parecen despreciables frente a σ_y -como ocurría cuando el cilindro no tenía muesca-.

A continuación, aparece dibujado en la gráfica 5.2 las distribuciones de tensiones σ_x y σ_y a lo largo del espesor. Se ve claramente como al llegar a la zona de la

muesca las tensiones aumentan considerablemente. En particular σ_y aumenta rápidamente en un intervalo de radio r muy pequeño, llegando hasta 2346.65 N/mm^2 . Sin embargo, en la mayor parte de la sección central que contiene la muesca, la tensión está en el rango de la tensión nominal hasta llegar casi a la propia muesca (Fig.5.8). Esto se debe a que la muesca es muy pequeña. En otros casos, con muescas más grandes, el crecimiento de σ_y será más progresivo.



Gráfica 5.2: Distribución de las tensiones normales (σ_x y σ_y) en la sección central. Caso 1 ($r = 0.297\text{mm}$).

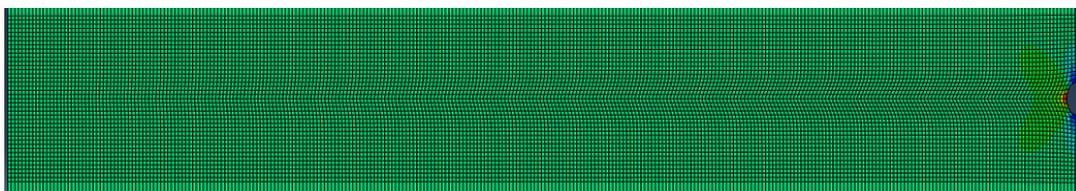


Fig.5.8: Detalle de la sección central caso 1. Colores rojos y naranjas sólo en la muesca. Tensiones en eje Y.

Como es lógico, el cilindro también estará deformado, aunque las deformaciones no son el principal objetivo de este ejercicio, ya que nos estamos centrando en analizar la concentración de esfuerzos. Al tratarse de un esfuerzo de tracción, el cilindro crecerá

en longitud lo que provoca una disminución de la sección transversal del mismo (Fig.5.9).

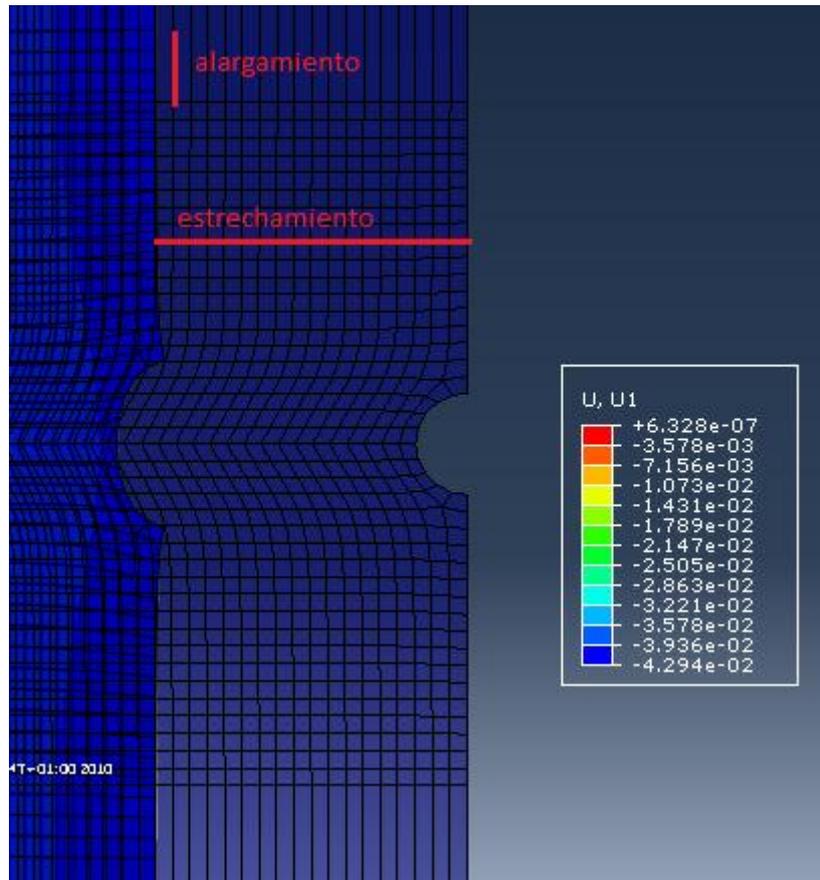


Fig.5.9: Cilindro deformado sobre original para el caso 1. Leyenda con valores en milímetros.

Observamos en la leyenda de figura los desplazamientos a lo largo del eje X, es decir, el estrechamiento que se produce en la pieza.

2.2.1.2. Caso 2.

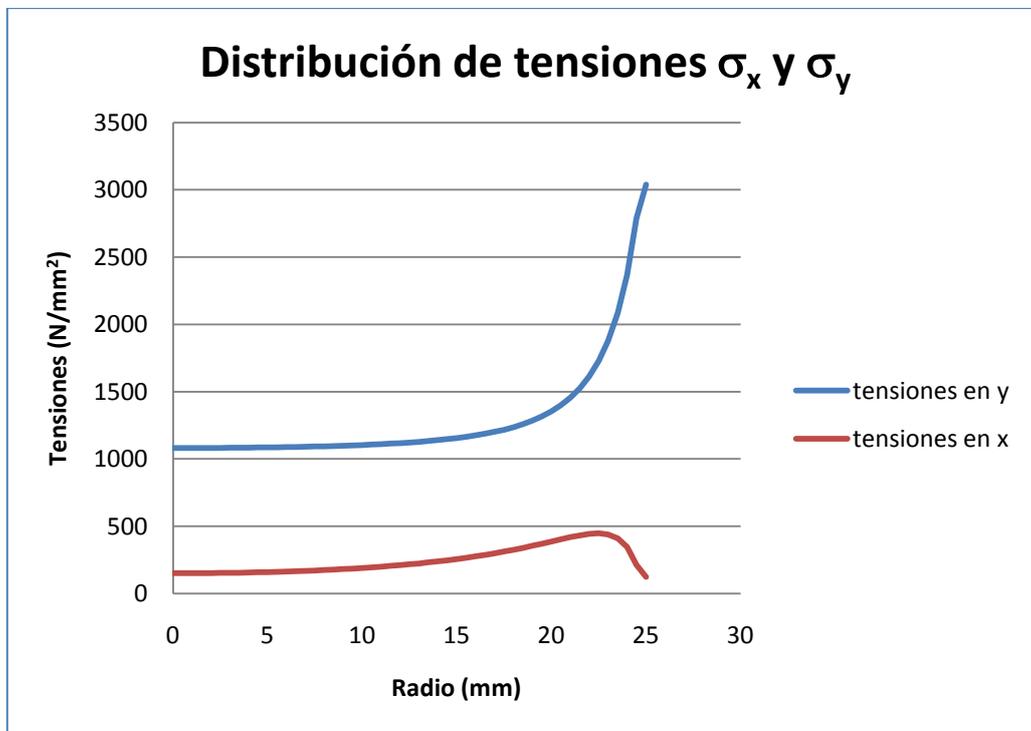
En este caso se ha optado por un cilindro de 60 mm de diámetro exterior con una muesca de radio de 5 mm y una sección central con 51 nodos. Al igual que en el caso anterior, damos en primer lugar la tabla 5.2 con los valores de las tensiones según nos desplazamos en dirección radial:

TABLA 5.2:

CONCENTRACIÓN DE TENSIONES CASO 2					
DATOS	NODOS EJE CENTRAL	COORDENADA X	COORDENADA Y	σ_y (N/mm²)	σ_x (N/mm²)
D = 60mm	5	25	0	3037,85	123,298
	178	24,5	0	2786,21	212,931
d = 50mm	179	24	0	2368,42	346,265
	180	23,5	0	2084,08	410,803
	181	23	0	1879,67	439,202
	182	22,5	0	1728,64	446,941
D/d = 1,2	183	22	0	1614,07	443,051
	184	21,5	0	1525,34	432,617
	185	21	0	1455,32	418,683
r = (D - d)/2 = 5mm	186	20,5	0	1399,21	403,054
	187	20	0	1353,61	386,815
	188	19,5	0	1316,08	370,616
	189	19	0	1284,9	354,852
	190	18,5	0	1258,73	339,739
	191	18	0	1236,57	325,393
	192	17,5	0	1217,68	311,864
	193	17	0	1201,46	299,163
	194	16,5	0	1187,45	287,276
	195	16	0	1175,27	276,176
	196	15,5	0	1164,64	265,824
	197	15	0	1155,32	256,179
198	14,5	0	1147,1	247,201	
199	14	0	1139,83	238,846	
200	13,5	0	1133,37	231,073	
201	13	0	1127,63	223,844	
202	12,5	0	1122,49	217,123	
203	12	0	1117,9	210,875	
204	11,5	0	1113,78	205,069	
205	11	0	1110,07	199,675	
206	10,5	0	1106,73	194,668	
207	10	0	1103,73	190,025	
208	9,5	0	1101,02	185,724	
209	9	0	1098,57	181,745	
210	8,5	0	1096,36	178,069	
211	8	0	1094,38	174,68	
212	7,5	0	1092,58	171,563	
213	7	0	1090,97	168,704	
214	6,5	0	1089,52	166,09	
215	6	0	1088,23	163,71	
216	5,5	0	1087,07	161,555	

217	5	0	1086,04	159,614
218	4,5	0	1085,14	157,88
219	4	0	1084,35	156,346
220	3,5	0	1083,66	155,005
221	3	0	1083,08	153,851
222	2,5	0	1082,59	152,881
223	2	0	1082,19	152,089
224	1,5	0	1081,88	151,472
225	1	0	1081,66	151,025
226	0,5	0	1081,52	150,746
6	0	0	1081,46	150,648

De los valores numéricos de la tabla, cabe destacar en primer lugar, que en ninguna parte de la sección central, incluso en la más alejada de la muesca, se alcanza el valor de la tensión nominal. Durante un cierto espesor se mantiene en un valor aproximado de 1080 N/mm². El valor máximo en la muesca llega a un valor de 3037.85 N/mm². Y como se observa en la gráfica 5.3, la tensión σ_y crece más suavemente conforme actúa la muesca como concentrador de tensiones. Las tensiones σ_x , que no predice Resistencia de Materiales, son significativamente menores, sobre todo si la comparación se hace en valores de r próximos a la muesca (gráfica 3).



Gráfica 5.3: Distribución de tensiones normales (σ_x y σ_y) en la sección central. Caso 2 ($r = 5\text{ mm}$).

En las figura 5.10 y 5.11 queda reflejado en una escala cromática lo expresado en el párrafo anterior en relación con la gráfica 5.3. La figura 5.10 muestra la distribución de tensiones σ_y , apreciándose claramente el efecto del concentrador de tensiones.

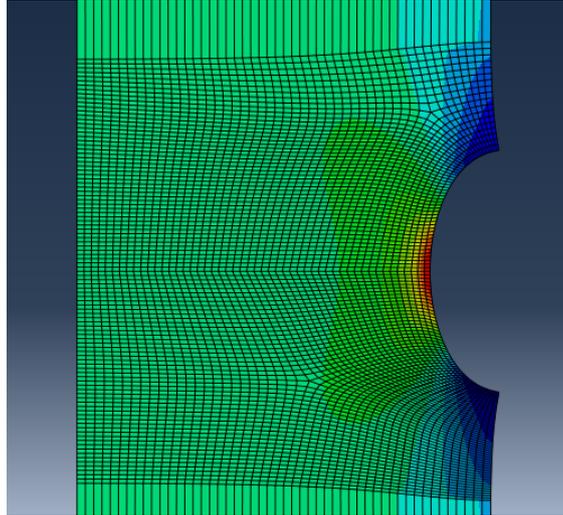


Fig.5.10: Distribución de tensiones σ_y de la sección central en el caso 2.

La fig. 5.11 es análoga a la anterior para las tensiones σ_x . Tiene valor meramente ilustrativo pues, como ya se ha dicho, esta componente de la tensión es pequeña comparada con σ_y . En todo caso, los valores máximos de σ_x no están justamente en el fondo de la muesca, aunque sí en el borde de la misma.

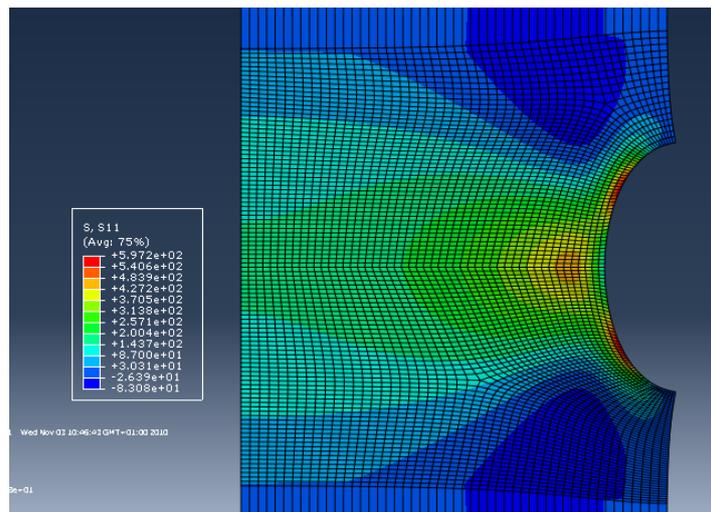


Fig.5.11: Distribución de tensiones σ_x en la sección central para el caso 2. Leyenda con valores en N/mm^2 .

5.2.2.1.3. Caso 3.

En este caso, el mallado elegido ha introducido también 51 nodos en la sección central. Se ha incrementado el radio de la muesca hasta llegar a los 10 mm. En la tabla 5.3 se muestran los resultados para las tensiones en los distintos nodos de la sección central con su coordenada radial.

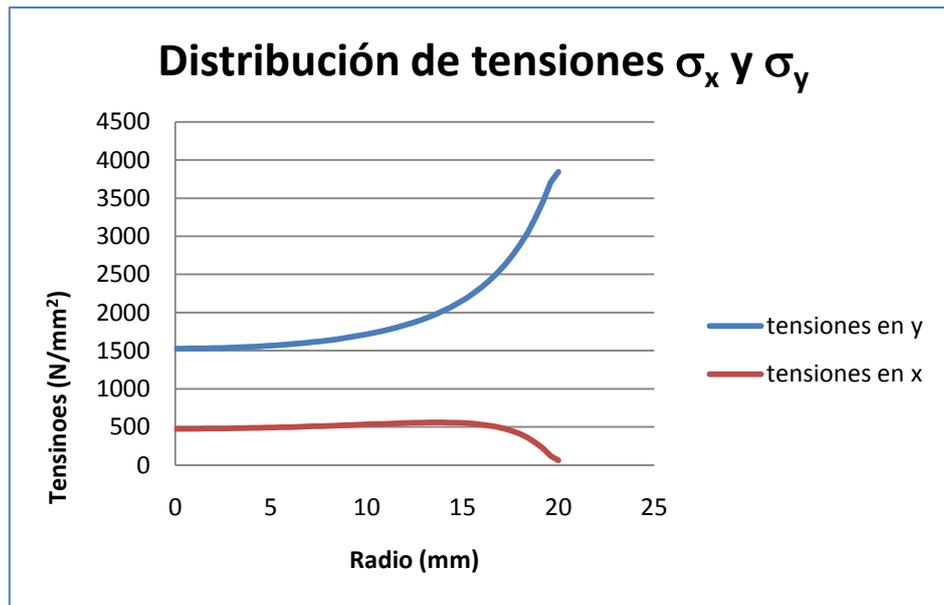
TABLA 5.3:

CONCENTRACIÓN DE TENSIONES CASO 3					
DATOS	NODOS EJE CENTRAL	COORDENADA X	COORDENADA Y	σ_y (N/mm ²)	σ_x (N/mm ²)
D = 60mm	5	20	0	3845,52	64,312
	178	19,6	0	3707,7	120,271
d = 40mm	179	19,2	0	3454,03	219,815
	180	18,8	0	3238,15	298,065
	181	18,4	0	3051,56	360,14
	182	18	0	2889,63	409,172
D/d = 1,5	183	17,6	0	2748,37	447,765
	184	17,2	0	2624,58	477,957
	185	16,8	0	2515,59	501,388
r = (D - d)/2 = 10mm	186	16,4	0	2419,22	519,36
	187	16	0	2333,66	532,921
	188	15,6	0	2257,42	542,912
	189	15,2	0	2189,21	550,012
	190	14,8	0	2128	554,772
	191	14,4	0	2072,9	557,639
	192	14	0	2023,13	558,979
	193	13,6	0	1978,07	559,085
	194	13,2	0	1937,18	558,204
	195	12,8	0	1899,99	556,537
	196	12,4	0	1866,1	554,25
	197	12	0	1835,17	551,482
	198	11,6	0	1806,88	548,345
199	11,2	0	1780,98	544,937	
200	10,8	0	1757,23	541,336	
201	10,4	0	1735,42	537,609	
202	10	0	1715,38	533,809	
203	9,6	0	1696,94	529,983	
204	9,2	0	1679,97	526,169	
205	8,8	0	1664,34	522,4	
206	8,4	0	1649,94	518,701	
207	8	0	1636,7	515,096	
208	7,6	0	1624,52	511,604	

209	7,2	0	1613,33	508,24
210	6,8	0	1603,05	505,016
211	6,4	0	1593,64	501,945
212	6	0	1585,02	499,033
213	5,6	0	1577,16	496,29
214	5,2	0	1570	493,719
215	4,8	0	1563,51	491,327
216	4,4	0	1557,66	489,116
217	4	0	1552,4	487,09
218	3,6	0	1547,72	485,251
219	3,2	0	1543,6	483,601
220	2,8	0	1540	482,142
221	2,4	0	1536,92	480,873
222	2	0	1534,33	479,796
223	1,6	0	1532,22	478,912
224	1,2	0	1530,59	478,218
225	0,8	0	1529,41	477,714
226	0,4	0	1528,68	477,4
6	0	0	1528,43	477,291

En ninguna parte de la sección la tensión σ_y permanece igual a su valor nominal. En el eje del cilindro, es decir, en $r = 0$, toma un valor de aproximado de 1530 N/mm^2 y a partir de éste crece progresivamente, hasta llegar al valor de 3845.52 N/mm^2 en el fondo de la muesca. En cuanto a las tensiones σ_x , han crecido ligeramente, se mantienen en valores por encima de 500 N/mm^2 y disminuyen en la propia muesca. En todo caso son menores que σ_y .

Todo ello vuelve a quedar reflejado en la gráfica 5.4, donde muestran las tensiones σ_x y σ_y , en función del radio.



Gráfica 5.4: Distribución de tensiones normales (σ_x y σ_y) en la sección central. Caso 3 ($r = 10\text{mm}$).

En la figura 5.12 aparece la distribución de tensiones σ_y mediante la gráfica de colores que nos proporciona Abaqus. La distribución de colores indica que, con un radio de muesca más grande, las tensiones varían más suavemente, y la concentración de tensiones en la muesca es menor.

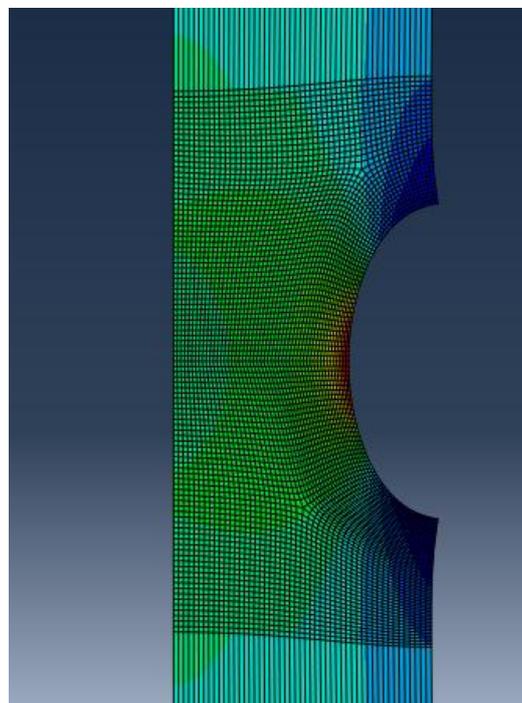


Fig.5.12: Distribución de tensiones σ_y en la sección central para el caso 3.

En la figura 5.13 se representan las tensiones σ_x en el gráfico cromático proporcionado por Abaqus (Fig.5.13). La distribución se parece mucho a la del caso 2, con valores ligeramente mayores.

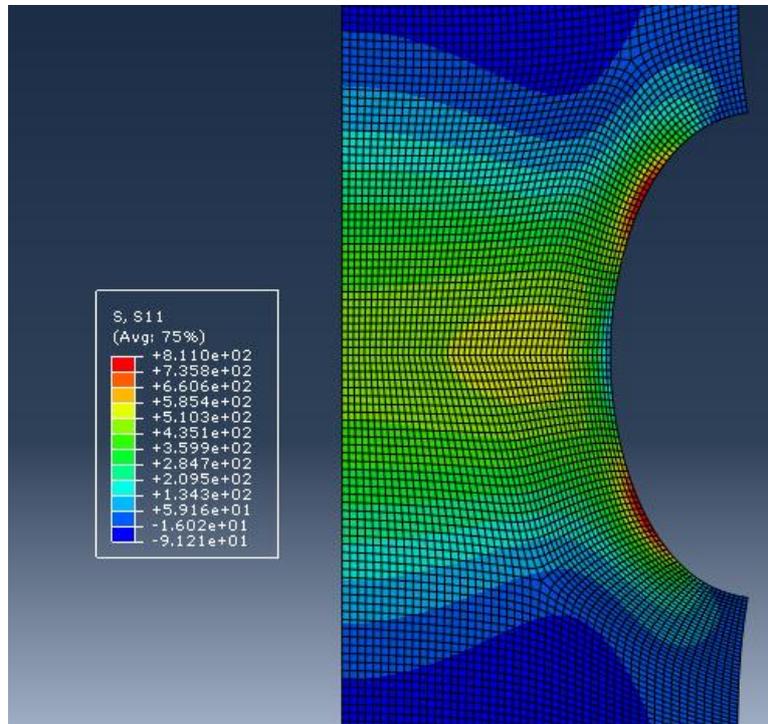


Fig.5.13: Distribución de tensiones σ_x en la sección central para el caso 3. Leyenda con valores en N/mm^2 .

5.2.2.1.4. Caso 4.

Llegamos al caso con el radio de muesca más grande considerado en este ejercicio. En este caso se ha introducido una muesca con 15 mm de radio, justo la mitad del radio del cilindro. Al igual que en los dos últimos casos se ha optado por un mallado con 51 nodos centrales. A continuación, se muestra la tabla 5.4 con todos los valores de las tensiones en la sección central y sus respectivos nodos.

TABLA 5.4:

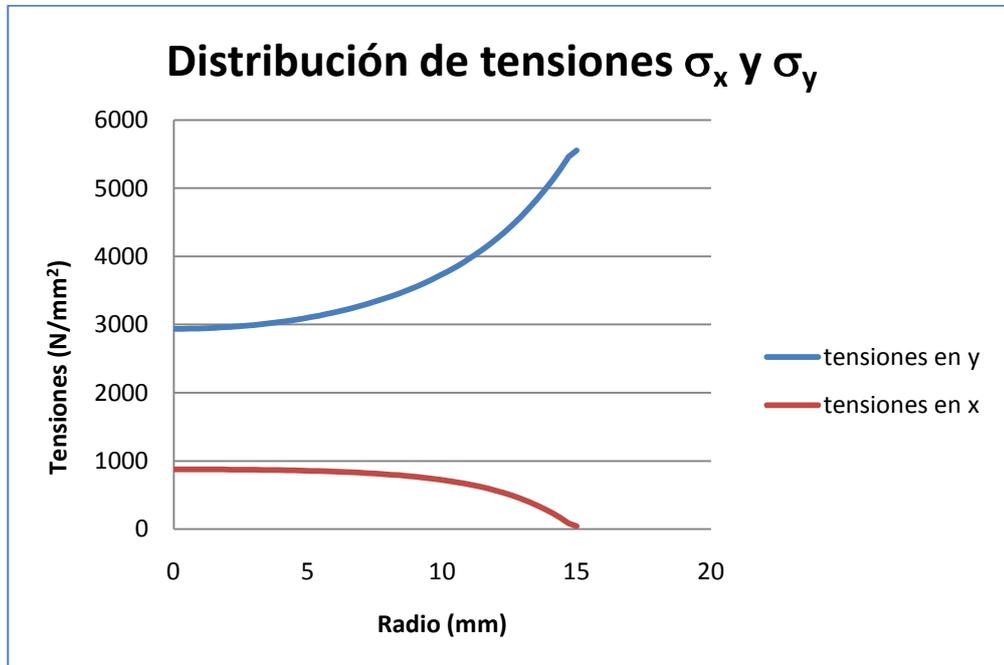
CONCENTRACIÓN DE TENSIONES CASO 4					
DATOS	NODOS EJE CENTRAL	COORDENADA X	COORDENADA Y	σ_y (N/mm^2)	σ_x (N/mm^2)
D = 60mm	9	15	0	5553,34	44,437
	294	14,7	0	5460,69	85,407
	295	14,4	0	5283,31	162,879

d = 30mm	296	14,1	0	5119,67	232,461
	297	13,8	0	4967,45	295,408
D/d = 2	298	13,5	0	4825,97	352,235
	299	13,2	0	4694,38	403,527
r = (D - d)/2 = 15mm	300	12,9	0	4571,91	449,823
	301	12,6	0	4457,85	491,618
	302	12,3	0	4351,51	529,362
	303	12	0	4252,28	563,462
	304	11,7	0	4159,62	594,279
	305	11,4	0	4073,01	622,138
	306	11,1	0	3992	647,332
	307	10,8	0	3916,18	670,12
	308	10,5	0	3845,16	690,738
	309	10,2	0	3778,61	709,394
	310	9,9	0	3716,21	726,277
	311	9,6	0	3657,67	741,558
	312	9,3	0	3602,74	755,389
	313	9	0	3551,18	767,908
	314	8,7	0	3502,75	779,241
	315	8,4	0	3457,26	789,503
	316	8,1	0	3414,26	798,795
	317	7,8	0	3374,31	807,213
	318	7,5	0	3336,54	814,836
	319	7,2	0	3301,04	821,742
320	6,9	0	3267,69	827,996	
321	6,6	0	3236,4	833,651	
322	6,3	0	3207,08	838,759	
323	6	0	3179,65	843,366	
324	5,7	0	3154,03	847,514	
325	5,4	0	3130,15	851,243	
326	5,1	0	3107,94	854,59	
327	4,8	0	3087,33	857,587	
328	4,5	0	3068,26	860,267	
329	4,2	0	3050,67	862,657	
330	3,9	0	3034,51	864,784	
331	3,6	0	3019,73	866,671	
332	3,3	0	3006,28	868,337	
333	3	0	2994,13	869,802	
334	2,7	0	2983,23	871,082	
335	2,4	0	2973,57	872,191	
336	2,1	0	2965,1	873,143	
337	1,8	0	2957,8	873,948	
338	1,5	0	2951,65	874,615	
339	1,2	0	2946,64	875,154	
340	0,9	0	2942,75	875,57	
341	0,6	0	2939,96	875,87	

342	0,3	0	2938,25	876,06
10	0	0	2937,65	876,127

Como se ve, en el eje del cilindro, o punto más alejado de la muesca, la tensión mínima σ_y tiene un valor de 2937.65 N/mm². El valor máximo de σ_y es 5553.34 N/mm². La diferencia entre ambos es la menor en términos relativos de todos los casos estudiados. Las tensiones σ_x están ahora en torno a los 900 N/mm², valores que casi duplican a los del caso 3, aunque en comparación con σ_y siguen siendo valores muy pequeños.

En la gráfica 5.5 se ha dibujado la variación con r de las tensiones σ_y y σ_x .



Gráfica 5.5: Distribución de tensiones normales (σ_x y σ_y) en la sección central. Caso 4 ($r = 15\text{mm}$).

La gráfica 5.5 muestra el aumento progresivo durante todo el espesor de la tensión σ_y y cómo dicho aumento se acentúa ligeramente conforme el valor de r es más próximo a la muesca (Fig.5.14.a y Fig.5.14.b). Sobre la tensión σ_x la muesca no tiene ningún efecto concentrador.

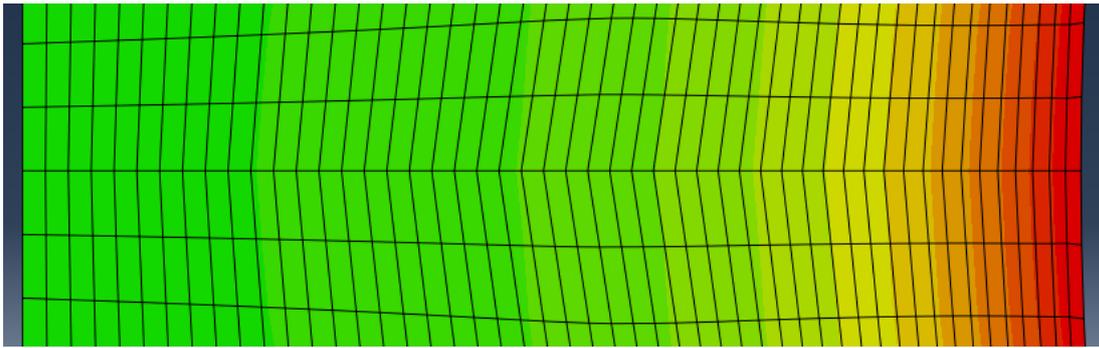


Fig.5.14.a: detalle de los nodos centrales para las tensiones en Y para el caso 4.

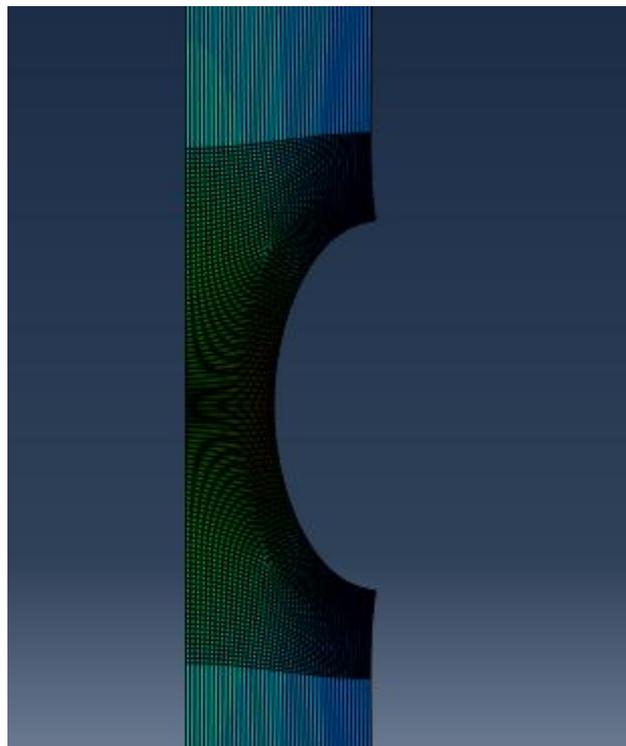


Fig.5.14.b: distribución de tensiones en sección central en el eje y para el caso 4.

Se ha optado por mostrar dos imágenes (Fig.5.14.a y Fig.5.14.b) en este caso, para visualizar tanto los nodos de la sección central en la Fig.5.14.a, como la distribución de tensiones que se produce en una zona más amplia cercana a la muesca, Fig.5.14.b.

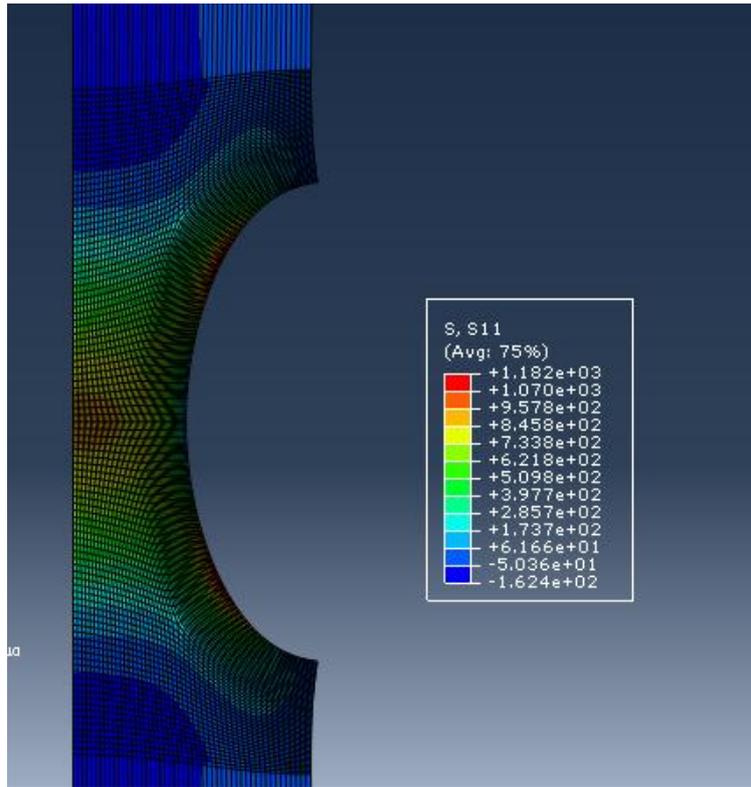


Fig.5.15: distribución de tensiones en el eje X en la sección central para el caso 4. Leyenda con valores en N/mm².

En la figura 5.15. observamos como la distribución de tensiones σ_x alrededor de la muesca es similar al resto de casos.

5.2.2.1.5. Comparativa entre cilindro sin muesca y caso 4.

Para acabar de ver la importancia que tiene el estudio de la concentración de tensiones y el conocimiento de la distribución de tensiones en la zona de reducción de área, se compararán el caso en el que el cilindro no tiene ningún tipo de muesca con el caso 4, el que corresponde a muesca de mayor radio. Se estudiar sólo las tensiones σ_y , por ser las más representativas.

En el caso del cilindro sin muesca, como ya se dijo, la tensión nominal independientemente de la sección transversal considerada, es:

$$\sigma_n = \frac{q \cdot A_0}{A_0} = q = 1000 \text{ N/mm}^2$$

En cuanto al caso 4, en la sección central hay una reducción muy considerable de área, pues se pasa de tener un diámetro exterior D de 60 mm a un diámetro d de 30 mm debido a la ranura. Por tanto, la tensión nominal en esa sección concretamente pasa a ser la siguiente:

$$\sigma_n = \frac{q \cdot A_0}{A_1} = \frac{1000 \cdot \pi \cdot 30^2}{\pi \cdot 15^2} = 4000 \text{ N/mm}^2$$

En cuanto a los valores máximos, en el caso del cilindro sin muesca el valor de la tensión σ_y es el mismo en todos los puntos de la sección central y, de hecho, en todos los puntos del mismo cilindro, y como hemos dicho vale 1000 N/mm^2 . En cambio, en el cilindro con muesca el máximo de la tensión se alcanza justamente en la sección central en el fondo de la muesca, donde $\sigma_y = 5553.34 \text{ N/mm}^2$, más de cinco veces la tensión que soporta la pieza sin muesca. Evidentemente, este efecto que se conoce como concentración de tensiones. En la segunda parte de este problema se obtendrán los factores de concentración de tensiones en los distintos cilindros estudiados.

Se aporta a continuación, algunas imágenes (Fig.5.16 y Fig.5.17) en las que se comparan algunos detalles entre el cilindro sin muesca y el cilindro con la muesca del caso 4. En la primera imagen (Fig.5.16) se muestra la distribución cromática de tensiones σ_y en torno a la muesca (parte izquierda de la figura) y la zona equivalente cuando no existe ranura. Las distribuciones de tensiones son claramente muy diferentes.

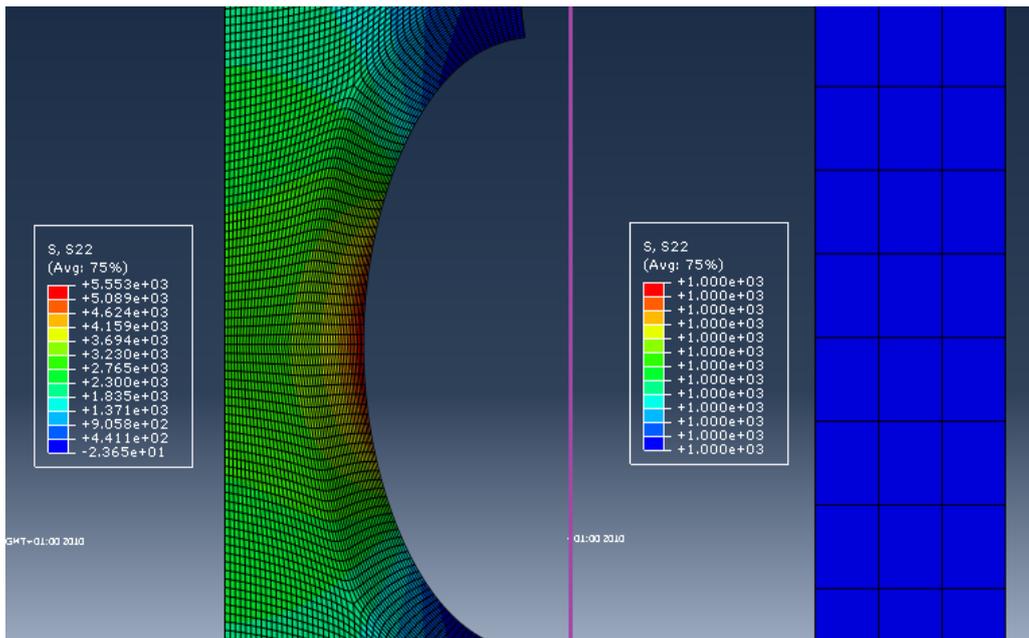


Fig.5.16: Comparación entre caso 4 y cilindro sin muesca. Secciones centrales. Leyendas con valores en N/mm^2 .

En la figura 5.17 se muestra un detalle del extremo superior de ambos cilindros. Lejos de la muesca, las tensiones se distribuyen uniformemente en los dos casos. Sus valores coinciden con los nominales de la pieza sin muesca.

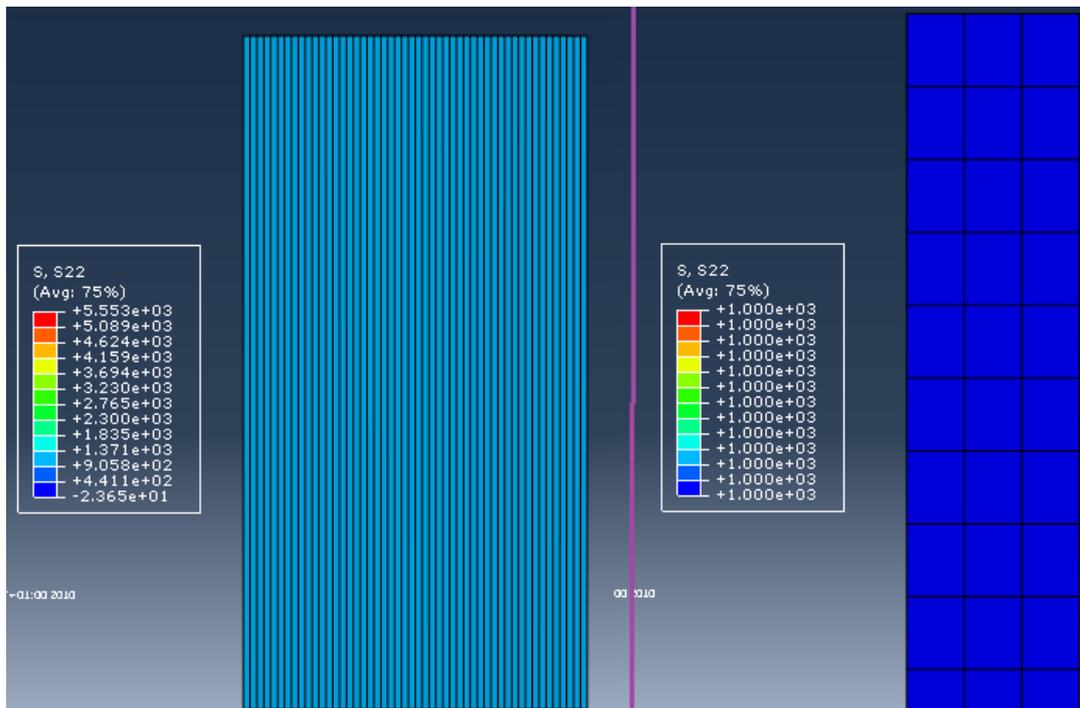


Fig.5.17: Comparación entre caso 4 y cilindro sin muesca. Secciones superiores. Leyendas con valores en N/mm^2 .

La siguiente figura, Fig.5.18, es un esquema con vectores, lo que nos da una muy visión muy clara del efecto de la concentración de tensiones. Primero se muestran las dos secciones longitudinales completas (Fig.5.18.a) y después detalles de la parte central (Fig.5.18.b). La densidad y el color de los vectores en una zona nos da la idea de dónde las tensiones son más intensas,.

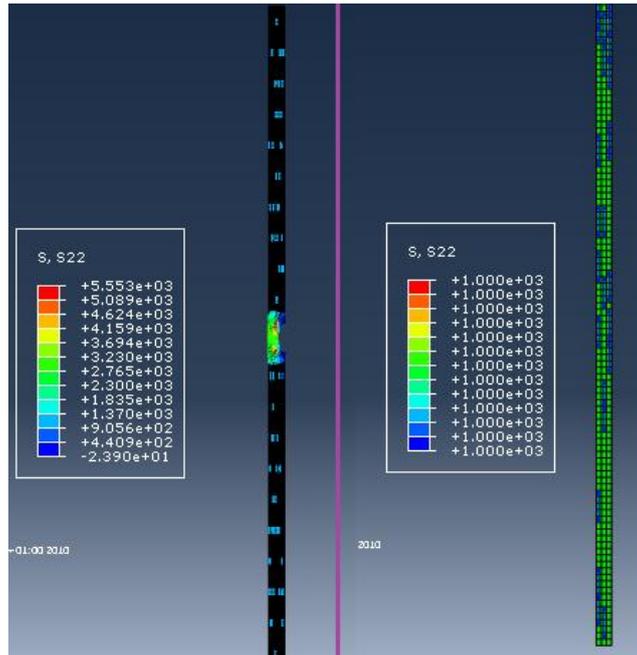


Fig.5.18.a: cilindros completos con vectores de tensión.

La figura.5.18.b representa una zona ampliada de la figura 5.18.a. En esta figura 5.18b se puede apreciar perfectamente como en el lado derecho, caso del cilindro sin muesca, la densidad de los vectores es pequeña en cualquier zona y están distribuidos de igual forma por todo el cilindro. En cambio, en la parte izquierda, en la zona central próxima a la ranura, hay una gran cantidad de vectores y, una vez lejos de esa zona, el número de vectores disminuye considerablemente. En definitiva, se aprecia perfectamente el incremento de las tensiones en el caso en que existe un concentrador de tensiones y una distribución uniforme en un cilindro perfecto en el que no existe este fenómeno.

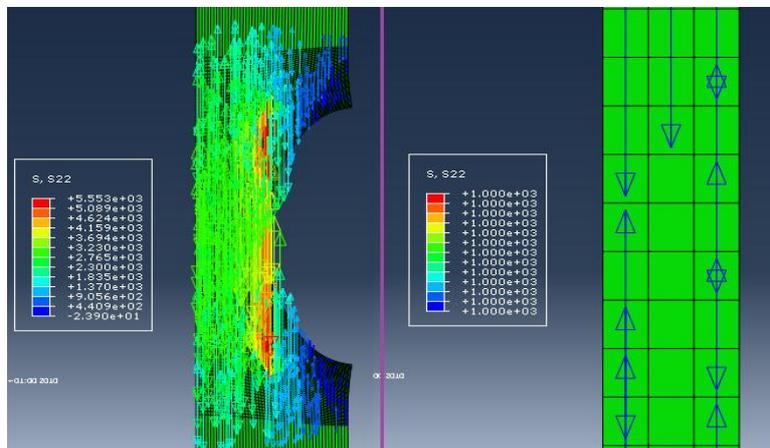


Fig.18.b: Vectores tensión en la sección central del caso 4 y el cilindro sin muesca.

5.2.2.2 Factor de concentración de tensiones.

En este apartado se trata numéricamente este efecto tan localizado de aumento de tensiones que se produce en la zona próxima a la muesca. Se calcularán dos factores de concentración en cada caso. Un valor del factor de concentración de tensiones se calculará a partir de los datos obtenidos en Abaqus siguiendo la siguiente ecuación:

$$k_t = \frac{\sigma_m}{\sigma_n} \quad \text{siendo} \quad \sigma_n = \frac{q \cdot A_0}{A_1}$$

donde la σ_m es el resultado de la tensión σ_y , que proporciona Abaqus en la muesca.

Por otro lado, se tendrá un factor geométrico de concentración de tensiones obtenido mediante las gráficas y las ecuaciones que se encuentran en la bibliografía. En nuestro caso, se ha utilizado la siguiente gráfica (Fig.5.19) del libro “Diseño de Máquinas” de Norton, Robert L.

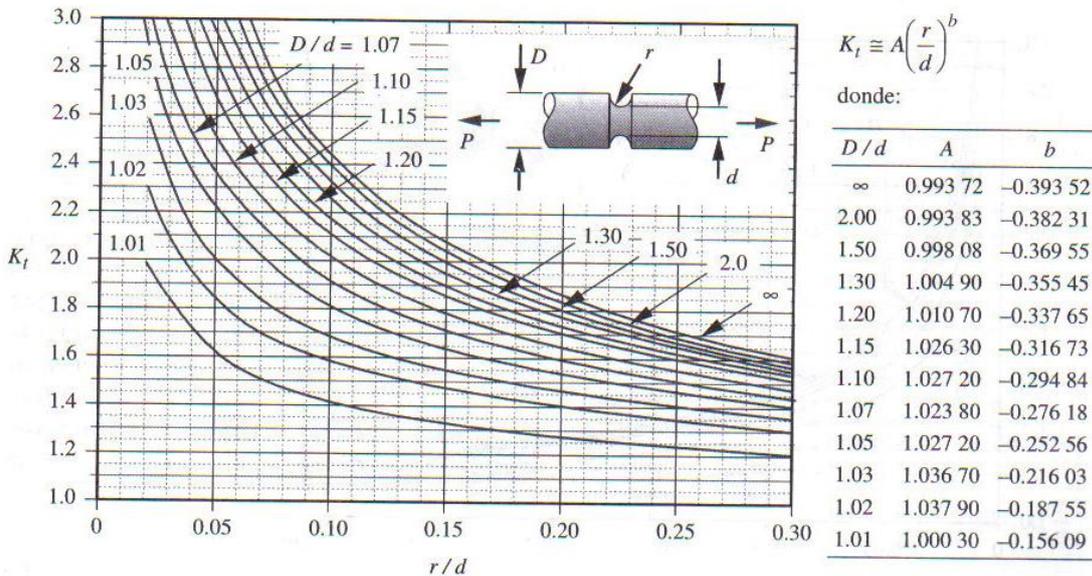


Fig.5.19: curvas y ecuación para el factor de concentraciones de nuestro caso.

Como vemos en la figura 5.19, se puede deducir un valor del factor de concentración a partir de las gráficas con las relaciones D/d y r/d ó a partir de la ecuación con los valores de los coeficientes A y b que se muestran a la derecha de la figura. Este valor se comparará con el calculado a partir de los resultados de Abaqus. Dicha comparación se hará más clara mediante el uso de gráficas, y de este modo se

mostrará el acuerdo o discrepancia entre el factor geométrico de referencia y la simulación informática.

5.2.2.2.1. Caso 1.

Como puede verse en la Fig.5.19, para hallar el factor mediante la ecuación hay que calcular valores de los coeficientes A y b para cada relación D/d, por tanto:

$$D = 60mm. \quad d = 59.04mm. \quad \rightarrow \frac{D}{d} = \frac{60}{59.04} = 1.01$$

Esto implica los siguientes valores de A y b:

$$A = 1.0003 \quad b = -0.15609 \quad \text{de donde } k_t = A \left(\frac{r}{d}\right)^b \rightarrow$$

$$\rightarrow k_t = 1.0003 \left(\frac{0.297}{59.406}\right)^{-0.15609} = 2.287 \rightarrow k_t(\text{teórica})$$

Para el cálculo de la k_t a partir de los valores obtenidos mediante Abaqus, se necesita la tensión σ_n nominal:

$$\sigma_n = \frac{q \cdot A_0}{A_1} = \frac{1000 \cdot \pi \cdot 30^2}{\pi \cdot 29.703^2} = 1020.1 \text{ N/mm}^2$$

y tensión la máxima σ_m en la muesca obtenida mediante simulación en un apartado anterior:

$$k'_t = \frac{\sigma_m}{\sigma_n} = \frac{2346.65}{1020.1} = 2.3 \rightarrow k'_t(\text{Abaqus})$$

Esta parte práctica queda resumida en la siguiente tabla 5.5:

TABLA 5.5:

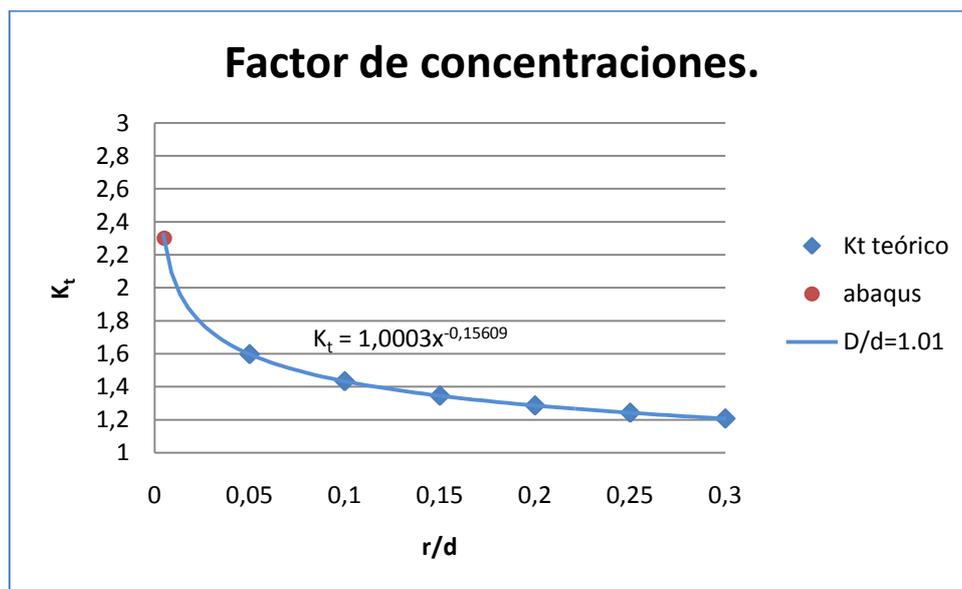
DATOS OBTENIDOS CON ABAQUS						
D(mm)	d(mm)	r(mm)	r/d	$\sigma_{\text{muesca}}(\text{N/mm}^2)$	$\sigma_{\text{nominal}}(\text{N/mm}^2)$	$\sigma_{\text{muesca}}/\sigma_{\text{nominal}}=k'$
60	59,04	0,297	0,005	2346,65	1020,1	2,300411724

A continuación, se ha dibujado la curva para $D/d = 1.01$ -una de las mostradas en la Fig.5.19- a partir de los valores de la tabla 5.6.

TABLA 5.6:

CASO 1 (r=0,297mm)			
A	b	r/d	K_t
1,0003	-0,15609	0,05	1,596643807
		0,1	1,432914472
		0,15	1,345036854
		0,2	1,285974914
		0,25	1,241954864
		0,3	1,207108789

La gráfica 5.6 muestra dicha curva. El punto en color rojo corresponde al valor de k_t obtenido MEF para la relación $r/d = 0.005$, relación usada en el cilindro del caso 1. Como vemos, el punto calculado está sobre la línea azul, mostrando la coincidencia en los valores de los factores k_t deducidos por ambos métodos.



Gráfica 5.6: Factor geométrico de concentración de tensiones k_t en el caso 1.

5.2.2.2.2. Caso 2.

De nuevo, según la tabla de valores de la Fig5.19, los coeficientes A y b según la relación D/d son:

$$D = 60\text{mm.} \quad d = 50\text{mm.} \quad \rightarrow \frac{D}{d} = \frac{60}{50} = 1.2$$

Esto implica los siguientes valores de A y b:

$$A = 1.0107 \quad b = -0.33765 \quad \text{de donde } k_t = A \left(\frac{r}{d}\right)^b \rightarrow$$

$$\rightarrow k_t = 1.0107 \left(\frac{5}{50}\right)^{-0.33765} = 2.199 \rightarrow k_t(\text{teórica})$$

La tensión nominal es este caso:

$$\sigma_n = \frac{q \cdot A_0}{A_1} = \frac{1000 \cdot \pi \cdot 30^2}{\pi \cdot 25^2} = 1440 \text{ N/mm}^2$$

Y partir de la tensión máxima en la muesca calculada con Abaqus, se obtiene k_t :

$$k'_t = \frac{\sigma_m}{\sigma_n} = \frac{3037.85}{1440} = 2.11 \rightarrow k'_t(\text{Abaqus})$$

Los datos anteriores se resumen en la tabla 5.7:

TABLA 5.7:

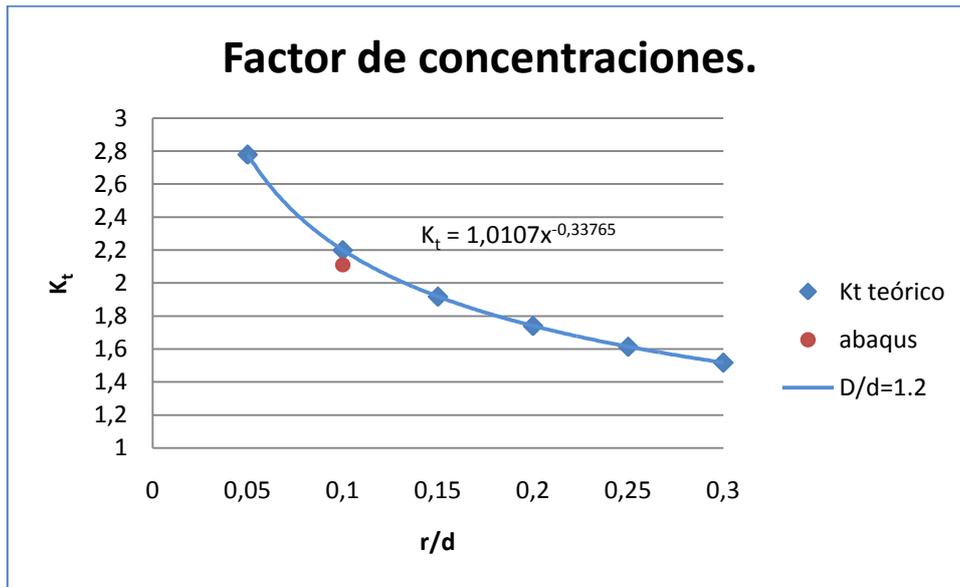
DATOS OBTENIDOS CON ABAQUS						
D(mm)	d(mm)	r(mm)	r/d	$\sigma_{\text{muesca}}(\text{N/mm}^2)$	$\sigma_{\text{nominal}}(\text{N/mm}^2)$	$\sigma_{\text{muesca}}/\sigma_{\text{nominal}}=k'$
60	50	5	0,1	3037,85	1440	2,109618056

A continuación, se muestran en la tabla 5.8 los datos utilizados para representar la curva $D/d = 1.2$, todo ello a partir de la ecuación dada en la figura 5.19.

TABLA 5.8:

CASO 2 (r=5mm)			
A	b	r/d	K_t
1,0107	-0,33765	0,05	2,779169556
		0,1	2,199238176
		0,15	1,917851834
		0,2	1,740321509
		0,25	1,614015948
		0,3	1,517652264

Con los números de la tabla 5.8 se dibuja en la gráfica 5.7 la curva de referencia. En rojo aparece el valor de k_t para $r/d = 0.1$, obtenido a partir de los resultados de Abaqus. Como se puede apreciar, la diferencia entre el valor de k_t MEF (punto rojo) y el correspondiente valor sobre la curva de referencia (curva azul) es muy pequeña.



Gráfica 5.7: Factor geométrico de concentración de tensiones k_t en el caso 2.

5.2.2.2.3. Caso3.

A partir de la tabla y la ecuación de la figura 5.19, para $D/d = 1.5$:

$$D = 60mm. \quad d = 40mm. \quad \rightarrow \frac{D}{d} = \frac{60}{40} = 1.5$$

Esto implica los siguientes valores de A y b:

$$A = 0.99808 \quad b = -0.36955 \quad \text{de donde } k_t = A \left(\frac{r}{d}\right)^b \rightarrow$$

$$\rightarrow k_t = 0.99808 \left(\frac{10}{40}\right)^{-0.36955} = 1.649 \rightarrow k_t(\text{teórica})$$

La tensión nominal es ahora:

$$\sigma_n = \frac{q \cdot A_0}{A_1} = \frac{1000 \cdot \pi \cdot 30^2}{\pi \cdot 20^2} = 2250 \text{ N/mm}^2$$

y la tensión máxima en la muesca deducida mediante el cálculo con Abaqus:

$$k'_t = \frac{\sigma_m}{\sigma_n} = \frac{3845.52}{2250} = 1.71 \rightarrow k'_t(\text{Abaqus})$$

Se resumen los datos anteriores en la tabla 5.9:

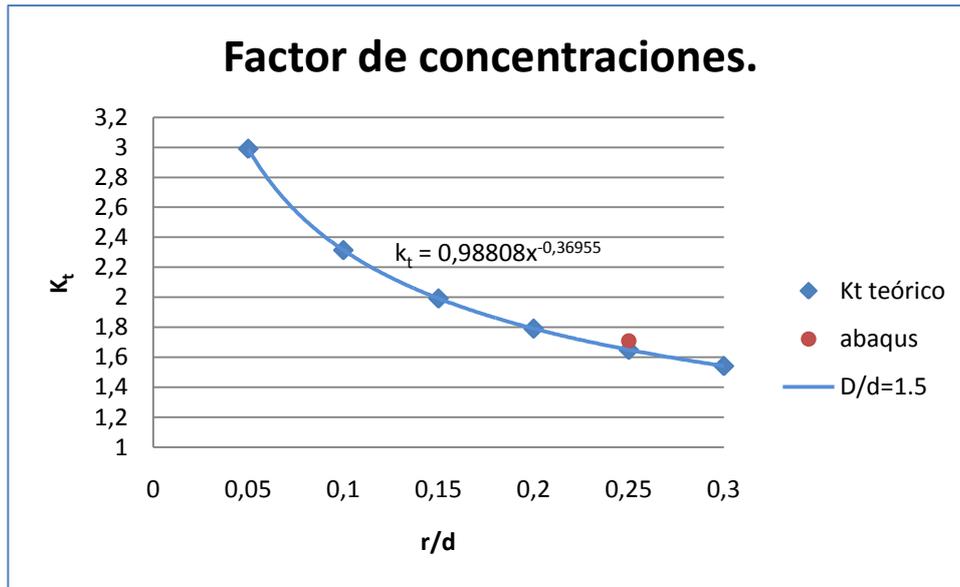
DATOS OBTENIDOS CON ABAQUS						
D(mm)	d(mm)	r(mm)	r/d	$\sigma_{\text{muesca}}(\text{N/mm}^2)$	$\sigma_{\text{nominal}}(\text{N/mm}^2)$	$\sigma_{\text{muesca}}/\sigma_{\text{nominal}}=k'$
60	40	10	0,25	3845,52	2250	1,70912

Se muestran los valores de A y b para la relación $D/d = 1.5$ en la tabla 5.10 que figura a continuación. También los valores de r/d utilizados para dibujar la curva de factores k_t de referencia.

TABLA 5.10:

CASO 3 (r=10mm)			
A	b	r/d	K_t
0,99808	-0,36955	0,05	2,989425561
		0,1	2,313886801
		0,15	1,99190024
		0,2	1,791003662
		0,25	1,649238174
		0,3	1,541778372

La gráfica 5.8 muestra la curva representada a partir de la tabla anterior. En rojo el valor de k_t calculado vía MEF. También, en este caso, el acuerdo de k_t por elementos finitos con el valor de referencia es muy grande.



Gráfica 5.8: Factor geométrico de concentración de tensiones k_t en el caso 3.

5.2.2.2.4. Caso 4.

En el caso 4 hemos considerado tres valores de la relación r/d , lo cual ha supuesto modificar la geometría de la pieza y las dimensiones.

El radio de la muesca es siempre de 15 mm. La longitud del cilindro sigue siendo 1 m. La relación D/d es también fija, $D/d = 2$. En cambio, se modifica el valor del diámetro exterior: se consideran los valores de 60 mm, 100 mm y 300 mm.

La forma de la muesca está ahora compuesta por un semicírculo de radio 15 mm y de dos rectas de la longitud necesaria para completar el diámetro exterior D (ver figura 5.20). Cada recta, en el cilindro con $D = 100$ mm, mide 10 mm, mientras que con $D = 300$ mm mide 60 mm. Esta longitud se denotará por espesor “ e ” a partir de ahora. Esto implica que en los cilindros no se cumple ya la ecuación propuesta al principio del ejercicio:

$$D = d + 2r$$

Ahora se cumple la siguiente ecuación:

$$D = d + 2r + 2e$$

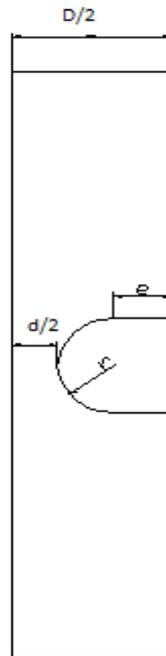


Fig.5.20: Esquema de la sección del cilindro. Muesca con parte recta.

Procediendo como en los tres casos anteriores:

$$D = 60 \text{ mm.} \quad d = 30 \text{ mm.} \quad \rightarrow \frac{D}{d} = \frac{60}{30} = 2$$

$$D = 100 \text{ mm.} \quad d = 50 \text{ mm.} \quad \rightarrow \frac{D}{d} = \frac{100}{50} = 2$$

$$D = 300 \text{ mm.} \quad d = 150 \text{ mm.} \quad \rightarrow \frac{D}{d} = \frac{300}{150} = 2$$

Los valores de A y b para la relación $D/d = 2$ y los valores de los factores de concentración de tensiones deducidos con los mismos son:

$$A = 0.99383 \quad b = -0.38231 \quad \text{de donde } k_t = A \left(\frac{r}{d}\right)^b \rightarrow$$
$$\rightarrow k_t = 0.99383 \left(\frac{15}{30}\right)^{-0.38231} = 1.295 \rightarrow k_t(\text{teórica})$$

$$A = 0.99383 \quad b = -0.38231 \quad \text{de donde } k_t = A \left(\frac{r}{d}\right)^b \rightarrow$$
$$\rightarrow k_t = 0.99383 \left(\frac{15}{50}\right)^{-0.38231} = 1.575 \rightarrow k_t(\text{teórica})$$

$$A = 0.99383 \quad b = -0.38231 \quad \text{de donde } k_t = A \left(\frac{r}{d}\right)^b \rightarrow$$
$$\rightarrow k_t = 0.99383 \left(\frac{15}{150}\right)^{-0.38231} = 2.397 \rightarrow k_t(\text{teórica})$$

Ya tenemos los valores de referencia.

La tensión nominal y con la tensión máxima σ_m obtenida mediante elementos finitos se calcula:

$r/d = 15/30$:

$$\sigma_n = \frac{P \cdot A_0}{A_1} = \frac{1000 \cdot \pi \cdot 30^2}{\pi \cdot 15^2} = 4000 \text{ N/mm}^2$$
$$k'_t = \frac{\sigma_m}{\sigma_n} = \frac{5553.34}{4000} = 1.388 \rightarrow k'_t(\text{Abaqus})$$

$r/d = 15/50$:

$$\sigma_n = \frac{P \cdot A_0}{A_1} = \frac{1000 \cdot \pi \cdot 50^2}{\pi \cdot 25^2} = 4000 \text{ N/mm}^2$$
$$k'_t = \frac{\sigma_m}{\sigma_n} = \frac{6342.9}{4000} = 1.586 \rightarrow k'_t(\text{Abaqus})$$

$$r/d = 15/150:$$

$$\sigma_n = \frac{P \cdot A_0}{A_1} = \frac{1000 \cdot \pi \cdot 150^2}{\pi \cdot 75^2} = 4000 \text{ N/mm}^2$$

$$k'_t = \frac{\sigma_m}{\sigma_n} = \frac{9723.4}{4000} = 2.431 \rightarrow k'_t(\text{Abaqus})$$

Se muestra la tabla 5.11 con un resumen de los datos anteriores.

TABLA 5.11:

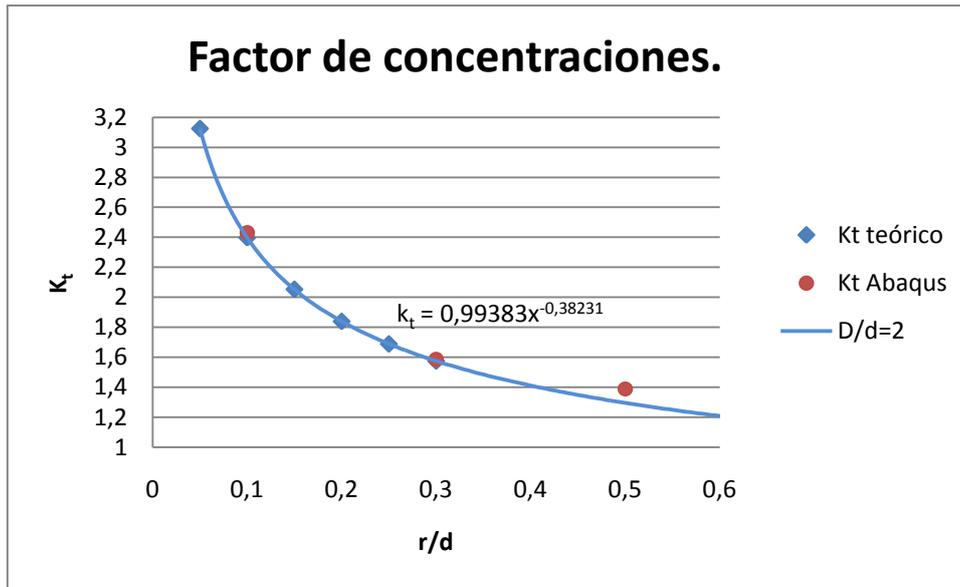
DATOS OBTENIDOS CON ABAQUS							
D(mm)	d(mm)	r(mm)	e(mm)	r/d	$\sigma_{\text{muesca}}(\text{N/mm}^2)$	$\sigma_{\text{nominal}}(\text{N/mm}^2)$	$\sigma_{\text{muesca}}/\sigma_{\text{nominal}}=k'$
60	30	15	0	0,5	5553,34	4000	1,388335
100	50	15	10	0,3	6342,9	4000	1,585725
300	150	15	60	0,1	9723,4	4000	2,43085

A continuación, se muestra la tabla 5.12 con los datos que han servido para representar gráficamente la curva $D/d = 2$ que utilizará como referencia.

TABLA 5.12:

CASO 4 (r=15mm)			
A	b	r/d	K_t
0,99383	-0,38231	0,05	3,123984569
		0,1	2,396746503
		0,15	2,052582648
		0,2	1,838803513
		0,25	1,688440099
		0,3	1,574758189

Con los datos de la tabla 5.12 se dibuja la gráfica 5.9. Los valores de k_t obtenidos por elementos finitos se han representado mediante tres puntos rojos (uno por cada valor de r/d). El acuerdo de nuevo en los tres casos estudiados es bueno ($r/d = 15/30$) o muy bueno ($r/d = 15/50$ y $r/d = 15/150$).



Gráfica 9.9: Factor geométrico de concentración de tensiones k_t en el caso 4.

5.3- RESUMEN Y CONCLUSIONES.

Tal y como la bibliografía recoge, hemos visto para una geometría de la muesca en forma de ranura circunferencial, que al aumentar el radio de la misma en un cilindro de diámetro exterior constante, la tensión máxima en la sección central (la de menor radio) aumenta.

En el primer caso, con un radio muesca muy pequeño, el incremento de las tensiones se produce muy rápidamente, en una zona muy próxima a la muesca. Conforme aumenta el radio de muesca (casos 2, 3 y 4), el incremento de las tensiones es más progresivo y, términos relativos, menos importante.

Se han calculado los factores k_t de concentración de tensiones utilizando los resultados obtenidos mediante la aplicación del MEF y se han comparado con los que proporciona la bibliografía de referencia. En todos los casos, el acuerdo encontrado entre dichos factores ha sido muy alto.

6 TENSIONES DE CONTACTO.

6. TENSIONES DE CONTACTO.

6.1- INTRODUCCIÓN.

Cuando dos cuerpos que tienen superficies curvas se presionan uno contra el otro, el contacto que en un principio es un punto o línea se transforma en un contacto de área y el esfuerzo desarrollado en ambos cuerpos es tridimensional.

Estas áreas de contacto son tan pequeñas que los esfuerzos a compresión correspondientes tienden a ser extremadamente altos. En consecuencia se producen fallos en la superficie como son grietas, hendiduras o desprendimientos de partículas del material.

Este tipo de esfuerzos se da en aplicaciones de ingeniería tan habituales como el contacto a compresión entre una rueda y un riel o entre una leva y un seguidor, en el ajuste de dientes de engranajes y en la acción de cojinetes de rodamiento.

Los resultados que se presentan, a continuación, fueron estudiados por Hertz y en consecuencia se les conoce en general como esfuerzos de contacto de Hertz,

Uno de los casos más importantes en los que se aplica esta teoría se refiere al contacto entre cilindros macizos, que a continuación se pasan a estudiar:

6.2- CILINDROS MACIZOS.

En este tipo de contacto se basará más adelante el ejercicio del proyecto relacionado con esta teoría.

El contacto cilíndrico es común en maquinaria. Se suele utilizar rodillos de contacto para tirar de materiales en procesos de laminado o calandrado. Los cojinetes de rodillos son otra aplicación. Los cilindros pueden ser convexos ambos, uno convexo y

otro cóncavo (cilindro en canal) o, en el límite, un cilindro sobre un plano (problema de este proyecto). En todos estos tipos de contacto hay la posibilidad tanto de deslizamiento como de rodamiento en la interfaz. La presencia de fuerzas de deslizamiento tangenciales tiene un efecto significativo en los esfuerzos, en comparación con el rodamiento puro. Primero consideraremos el caso de dos cilindros al rodamiento puro y posteriormente introduciremos una componente deslizante.

Cuando los elementos en contacto son dos cilindros de longitud L y diámetro d_1 y d_2 , como se muestra en la figura 6.1, el área de contacto es un rectángulo angosto de ancho $2b$ y longitud L , y la distribución de la presión es semielíptica.

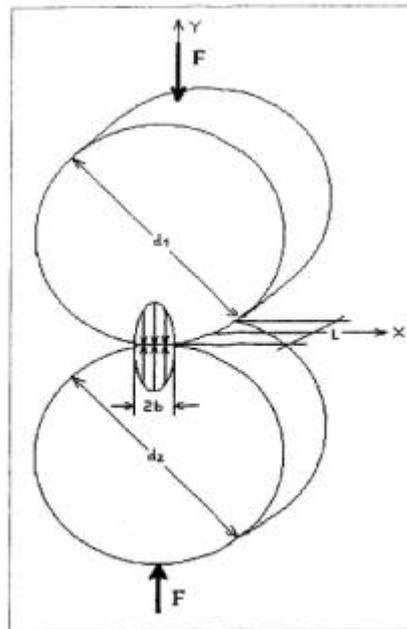


Fig.6.1: Geometría de dos cilindros en contacto

En la figura 6.2 se representan el valor de los esfuerzos principales en el área de contacto junto con esta distribución semielíptica.

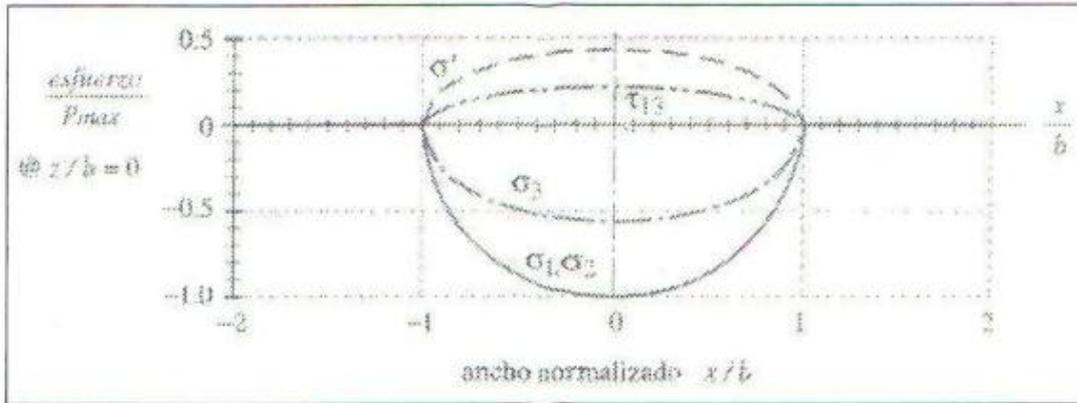


Fig.6.2: Representación de distintos esfuerzos en el área de contacto.

Hay algunos parámetros, que interesan mucho para conocer exactamente las características del contacto, alguno de ellos son los siguientes:

Lo primero es definir las constantes de los materiales:

$$m_1 = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} \qquad m_2 = \frac{1 - \nu_2^2}{E_2}$$

Siendo ν el coeficiente Poisson y E el módulo de elasticidad del material.

Definimos ahora una constante de geometría cilíndrica, que depende de los radios R_1 y R_2 de ambos cilindros.

$$B = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

Para tomar en consideración el caso de un cilindro sobre un plano, R_2 se hace infinito haciendo $1/R_2$ igual a cero. En el caso de un cilindro en un canal, R_2 se hace negativo. De lo contrario R_2 es finito y positivo, igual que R_1 . El **semiancho** b de la huella de contacto se determina entonces a partir de:

$$b = \sqrt{\frac{2 m_1 + m_2}{\pi} \frac{F}{B L}}$$

Donde F es la carga total aplicada y L la longitud de contacto a lo largo del eje del cilindro.

Con esto se puede hallar la presión máxima:

$$p_{m\acute{a}x} = \frac{2F}{\pi bL}$$

Al comprimirse un cilindro contra otro parece lógico que la distancia entre centros se tenga que reducir en una cierta cantidad, ese decremento en la distancia entre centros viene dado por la siguiente expresión:

$$\Delta y = \frac{4p(1 - \nu^2)}{\pi E} \left(\frac{2}{3} + \ln \frac{2d_1}{b} + \ln \frac{2d_2}{b} \right)$$

La distribución de presiones sobre la superficie de contacto entre los cilindros queda representada en la figura 6.3.

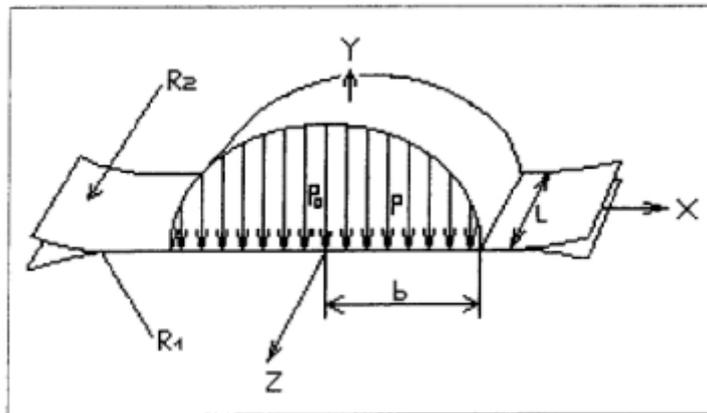


Fig.6.3: Distribución semielíptica de las presiones de contacto

Las tensiones normales a lo largo del eje de carga son tensiones principales y vienen dadas por:

$$\sigma_x = -p_{m\acute{a}x} \left[\left(2 - \frac{1}{1 + \frac{y^2}{b^2}} \right) \sqrt{1 + \frac{y^2}{b^2} - 2\frac{y}{b}} \right]$$

$$\sigma_y = \frac{-p_{m\acute{a}x}}{\sqrt{1 + \frac{y^2}{b^2}}}$$

$$\sigma_z = -2\nu p_{m\acute{a}x} \left(\sqrt{1 + \frac{y^2}{b^2} - \frac{y}{b}} \right)$$

Al estado de esfuerzos descrito por las ecuaciones anteriores le corresponden tres círculos de Mohr no coincidentes ya que $\sigma_x \neq \sigma_y \neq \sigma_z$. El mayor de los esfuerzos cortantes a lo largo del eje vendrá dado por el radio del mayor círculo de Mohr. Como ejemplo, en la figura 6.4 se representan los círculos de Mohr para las tensiones en el eje de carga a una profundidad b bajo la superficie de contacto de los dos cilindros.

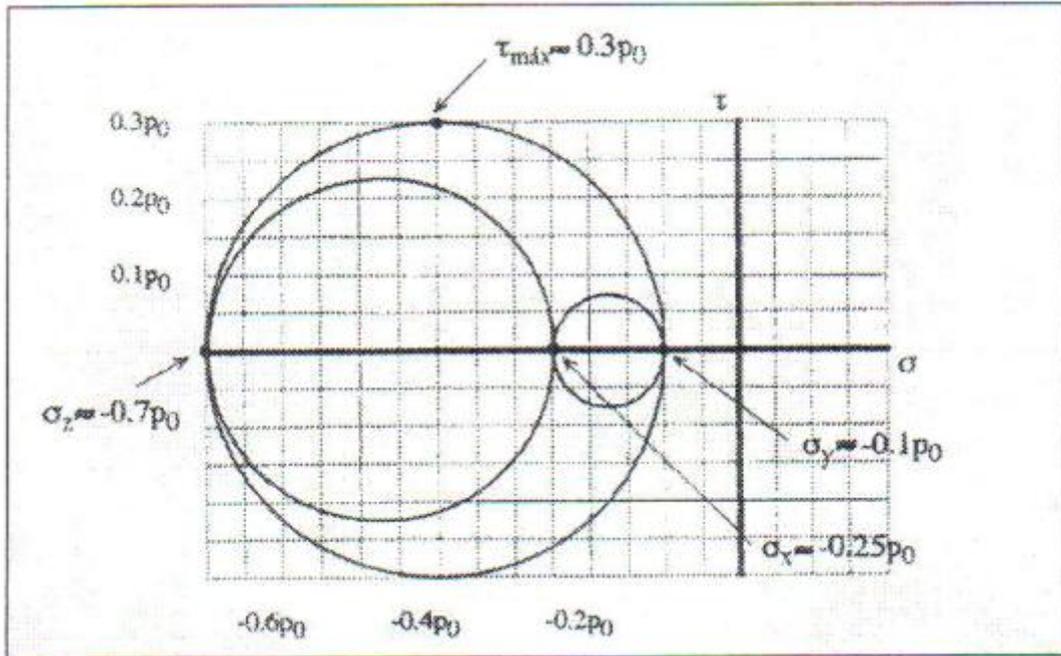


Fig.6.4: Círculos de tensiones de Mohr a una profundidad b .

En la figura 6.5 se representan las tres tensiones normales y el esfuerzo cortante

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}$$

en función de la presión máxima de contacto de los cilindros hasta una profundidad $3b$, para un coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$.

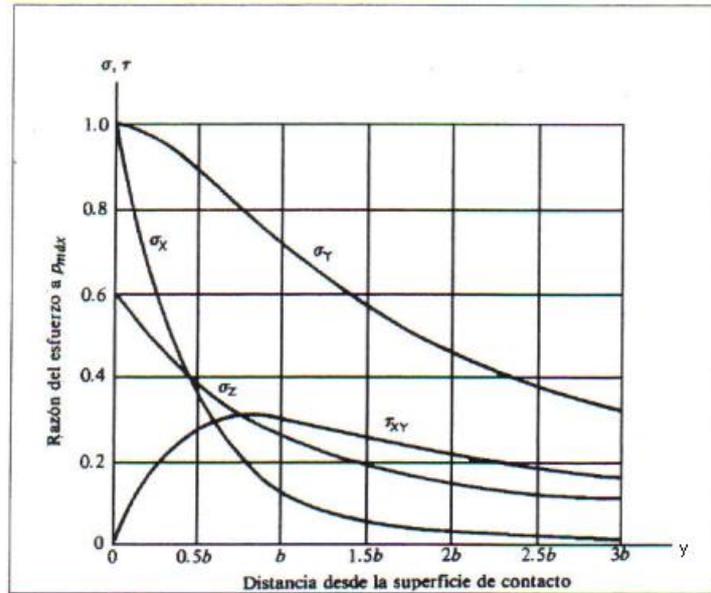


Fig.6.5: Tensiones a lo largo del eje de carga.

Se observa que el esfuerzo cortante τ_{xy} se vuelve el mayor de los tres esfuerzos cortantes aproximadamente en $y = 3/4 b$; siendo su valor máximo $0.3 p_{máx}$. Además, en $y = 0$, las tensiones valen: $\sigma_x = \sigma_y = p_{máx}$.

Las tensiones de Von Mises a lo largo del eje de carga se pueden calcular a partir de la expresión más general teniendo en cuenta que σ_x , σ_y y σ_z son esfuerzos principales:

$$\sigma' = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}{2}}$$

Existe un esfuerzo cortante importante bajo la superficie de contacto pero desplazado a partir del eje de carga (Fig.6.6) que experimenta un cambio de signo que se explica a continuación.

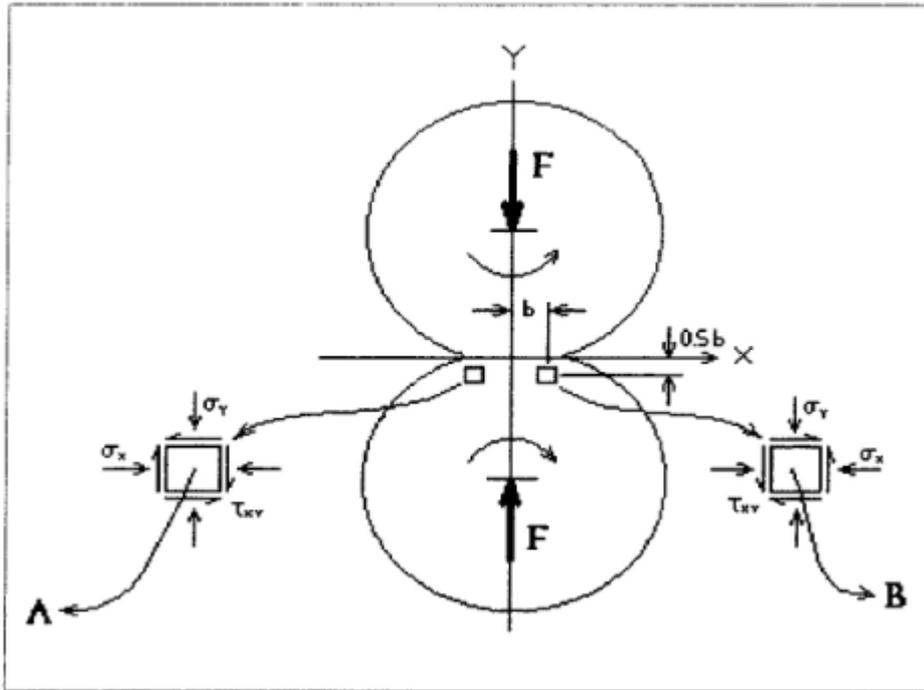


Fig.6.6: Representación de esfuerzos de compresión y cortantes a ambos lados del eje Y.

Cuando los cilindros giran juntos los puntos situados bajo la superficie experimentan esfuerzos primero en B y luego en A de forma que el esfuerzo cortante invierte completamente su sentido. Este esfuerzo es más grande en los puntos bajo la superficie a una distancia de $0.5b$. Mientras que un punto en esta profundidad rueda por la zona de contacto, se alcanza los valores máximos de este esfuerzo cortantes a una distancia de alrededor b en ambos lados del eje de carga y su valor es aproximadamente de $0.24P_{m\acute{a}x}$.

Los esfuerzos de contacto en cualquier punto específico se aplican de forma cíclica (con cada revolución de un cojinete o engranaje). Esto origina el inicio y la propagación de grietas diminutas bajo la superficie, que finalmente pueden provocar el fallo por la fatiga de la pieza.

Hasta ahora, se ha presentado la teoría para cuando en el problema no hay deslizamiento, simplemente un rodamiento puro, a continuación se explica que pasa cuando hay deslizamiento y comienza a ver un rozamiento entre los cilindros.

6.3- ESFUERZOS DINÁMICOS DE CONTACTO.

Las ecuaciones arriba presentadas para esfuerzos de contacto suponen que la carga es rodamiento puro. Cuando están presentes a la vez rodamiento y deslizamiento,

el campo de esfuerzos se distorsiona, en función de la carga tangencial. La figura 6.7 muestra un estudio fotoelástico de un par leva-seguidor cargado estáticamente (a) y dinámicamente con deslizamiento (b). En la parte b se observa la distorsión del campo de esfuerzos debido al movimiento de deslizamiento. Se trata de una combinación de contacto de rodamiento con un deslizamiento de relativamente baja velocidad. Un deslizamiento más elevado genera más distorsión en el campo de esfuerzos.

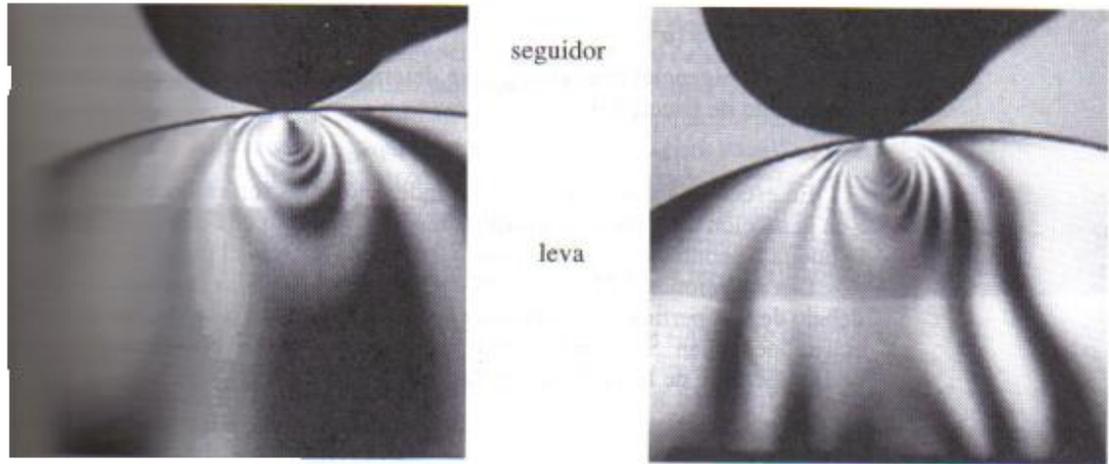


Fig.6.7: Estudio fotoelástico de esfuerzos para dos cilindros en contacto en carga estática (a) y rodamiento puro dinámico (b)

6.3.1.- Efecto sobre los esfuerzos de contacto de una componente deslizante.

Smith y Lui analizaron el caso de rodillos paralelos en rodamiento y deslizamiento combinados, y definieron las ecuaciones para la distribución de esfuerzos por debajo del punto de contacto. La carga deslizante (de fricción) tiene un efecto significativo en el campo de esfuerzos. Los esfuerzos se pueden expresar como componentes independientes, un conjunto debido a la carga normal sobre los rodillos (identificado por un subíndice n) y el otro conjunto debido a la fuerza de fricción tangencial (identificada por un subíndice t). Éstos a continuación se combinan para obtener la situación completa de esfuerzos. El campo de esfuerzos puede ser en dos dimensiones, si se trata de un rodillo muy corto como una leva de placa delgada o un engrane delgado, suponiendo que está a un esfuerzo plano. Si los rodillos son axialmente largos, entonces existirá una situación de deformación plana en las regiones alejadas de los extremos, dando lugar a un estado de esfuerzos tridimensional.

La geometría de contacto es como se muestra en la figura 6.3 con el eje X alineado en la dirección del movimiento, el eje de las Y radial a los rodillos y el eje de las Z axial con los rodillos. Los esfuerzos debidos a la carga normal $P_{máx}$ son:

$$\sigma_{x_n} = -\frac{y}{\pi} \left[\frac{b^2 + 2x^2 + 2y^2}{b} \alpha - \frac{2\pi}{b} - 3x\beta \right] p_{máx}$$

$$\sigma_{y_n} = -\frac{y}{\pi} [b\beta - x\alpha] p_{máx}$$

$$\tau_{xy_n} = -\frac{1}{\pi} y^2 b p_{máx}$$

Y los correspondientes a la fuerza por fricción unitaria $f_{máx}$ son:

$$\sigma_{x_t} = -\frac{1}{\pi} \left[(2x^2 - 2b^2 - 3y^2)\alpha + 2\pi \frac{x}{b} + 2(b^2 - x^2 - y^2) \frac{x}{b} \beta \right] f_{máx}$$

$$\sigma_{y_t} = -\frac{1}{\pi} y^2 \alpha f_{máx}$$

$$\tau_{xy_t} = -\frac{1}{\pi} \left[(b^2 + 2x^2 + 2y^2) \frac{y}{b} \beta - 2\pi \frac{y}{b} - 3xy\alpha \right] f_{máx}$$

Donde los factores α y β están dados por:

$$\alpha = \frac{\pi}{k_1} \frac{1 - \sqrt{\frac{k_1}{k_2}}}{\sqrt{\frac{k_1}{k_2}} \sqrt{2\sqrt{\frac{k_1}{k_2}} + \left(\frac{k_1 + k_2 - 4b^2}{k_1}\right)}}$$

$$\beta = \frac{\pi}{k_1} \frac{1 + \sqrt{\frac{k_1}{k_2}}}{\sqrt{\frac{k_1}{k_2}} \sqrt{2\sqrt{\frac{k_1}{k_2}} + \left(\frac{k_1 + k_2 - 4b^2}{k_1}\right)}}$$

Donde:

$$k_1 = (b + x)^2 + y^2$$

$$k_2 = (b - x)^2 + y^2$$

La fuerza tangencial unitaria $f_{m\acute{a}x}$ se determina a partir de la carga normal y de un coeficiente de fricción μ .

$$f_{m\acute{a}x} = \mu p_{m\acute{a}x}$$

En estas ecuaciones las variables independientes son entonces las coordenadas x , e y en la sección transversal del rodillo, respecto al punto de contacto, el semiancho b de la huella de contacto, y la carga normal máxima $p_{m\acute{a}x}$ en el punto de contacto.

Las ecuaciones anteriores definen el comportamiento de las funciones de esfuerzo por debajo de la superficie, pero cuando $z = 0$, los factores α y β se vuelven infinitos, y estas ecuaciones fallan. Se necesitan otras formas para tomar en consideración los esfuerzos de la superficie de la huella de contacto.

Cuando $z = 0$:

$$\text{si } |x| \leq b \text{ entonces } \sigma_{x_n} = -p_{m\acute{a}x} \sqrt{1 - \frac{x^2}{b^2}} \text{ o bien } \sigma_{x_n} = 0$$

$$\sigma_{y_n} = \sigma_{x_n}$$

$$\tau_{xy_n} = 0$$

$$\text{si } x > b \text{ entonces } \sigma_{x_t} = -2f_{m\acute{a}x} \left(\frac{x}{b} - \sqrt{\frac{x^2}{b^2} - 1} \right)$$

$$\text{si } x < b \text{ entonces } \sigma_{x_t} = -2f_{m\acute{a}x} \left(\frac{x}{b} + \sqrt{\frac{x^2}{b^2} - 1} \right)$$

$$\text{si } |x| \leq b \text{ entonces } \sigma_{x_t} = -2f_{m\acute{a}x} \frac{x}{b}$$

$$\sigma_{y_t} = 0$$

$$\text{si } |x| \leq b \text{ entonces } \tau_{xy_t} = -f_{\text{máx}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{b^2}} \text{ o bien } \tau_{xy_t} = 0$$

El esfuerzo total de cada plano cartesiano se determina superponiendo las componentes debidas a las cargas normales y tangenciales.

$$\sigma_x = \sigma_{x_n} + \sigma_{x_t}$$

$$\sigma_y = \sigma_{y_n} + \sigma_{y_t}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xy_n} + \tau_{xy_t}$$

En el caso de rodillos cortos en esfuerzos planos, σ_z es cero; pero si los rodillos son axialmente largos, entonces se presentará una situación de deformación plana lejos de los extremos y en la dirección y el esfuerzo será:

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$$

Donde ν es la razón de Poisson.

Estos esfuerzos son máximos en la superficie y disminuyen con la profundidad. Excepto a razones muy bajas de fuerza tangencial a fuerza normal (aproximadamente 1/9) el esfuerzo cortante máximo también ocurre en la superficie, a diferencia del caso de rodamiento puro.

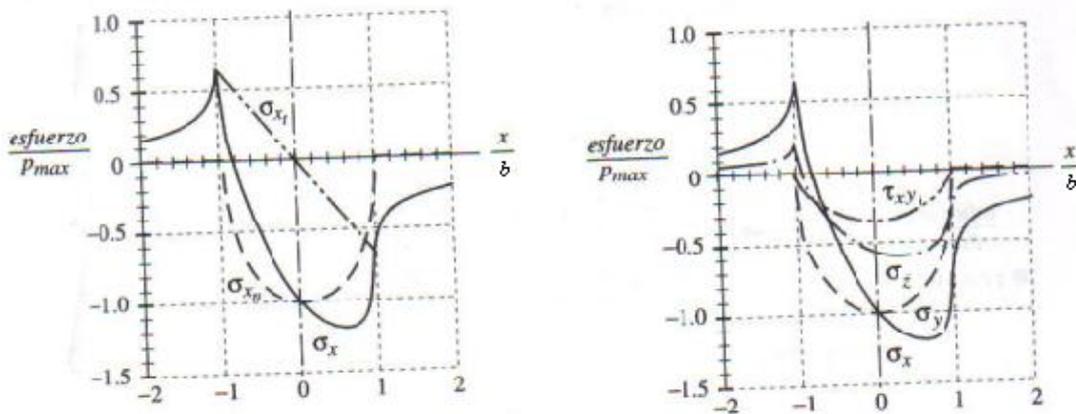


Fig.6.8: Esfuerzos tangenciales normales y cortantes aplicados en la superficie para cilindros al rodamiento y deslizamiento combinado

La figura 6.8 (a) muestra los esfuerzos en la dirección X en la superficie debidos a cargas normales y tangenciales, también mostrando su suma.

Puede sorprender en esta figura que la componente de esfuerzo σ_{xt} debido a la fuerza tangencial, es a tensión del punto de contacto y más allá del borde de salida de la huella de contacto. Esto no deberá ser sorprendernos, ya que se puede uno imaginar que la fuerza tangencial está intentando acumular material enfrente del punto de contacto, y de estirlo más allá del mismo, de la misma forma que un tapete se acumula frente a cualquier cosa que usted intente deslizar por encima del mismo. La componente de esfuerzo σ_{xn} debido a la fuerza normal es a compresión por todos sitios. Sin embargo, la suma de ambas componentes σ_x tiene un valor a tensión normalizado significativo de dos veces el coeficiente de fricción (aquí $0.66p_{máx}$) y un pico a compresión de aproximadamente $-1.2p_{máx}$. La figura 6.8 (b) muestra todos los esfuerzos aplicados en las direcciones X, Y y Z a través de la superficie de la zona de contacto. Se puede observar que los capos de esfuerzos en la superficie se extienden más allá de la zona de contacto estando presente una fuerza tangencial, a diferencia de la situación del rodamiento puro, donde se extiende más allá de la zona de contacto sólo por debajo de la superficie.

La figura 6.9 muestra los esfuerzos principales, el esfuerzo cortante máximo y los esfuerzos de Von Mises para el estado de deformación plana, de esfuerzos aplicados de la figura 6.8. Advierta que la magnitud del mayor esfuerzo principal a compresión es de alrededor $1.38p_{máx}$ y el mayor esfuerzo principal a tensión es de $0.66p_{máx}$ en el borde de salida de la huella de contacto. La presencia de un esfuerzo cortante tangencial aplicado en este ejemplo incrementa el esfuerzo pico a compresión en 40% sobre un caso de rodamiento puro, e introduce un esfuerzo a tensión en el material. El esfuerzo cortante principal toma un valor pico de $0.40p_{máx}$ en $x/b = 0.4$.

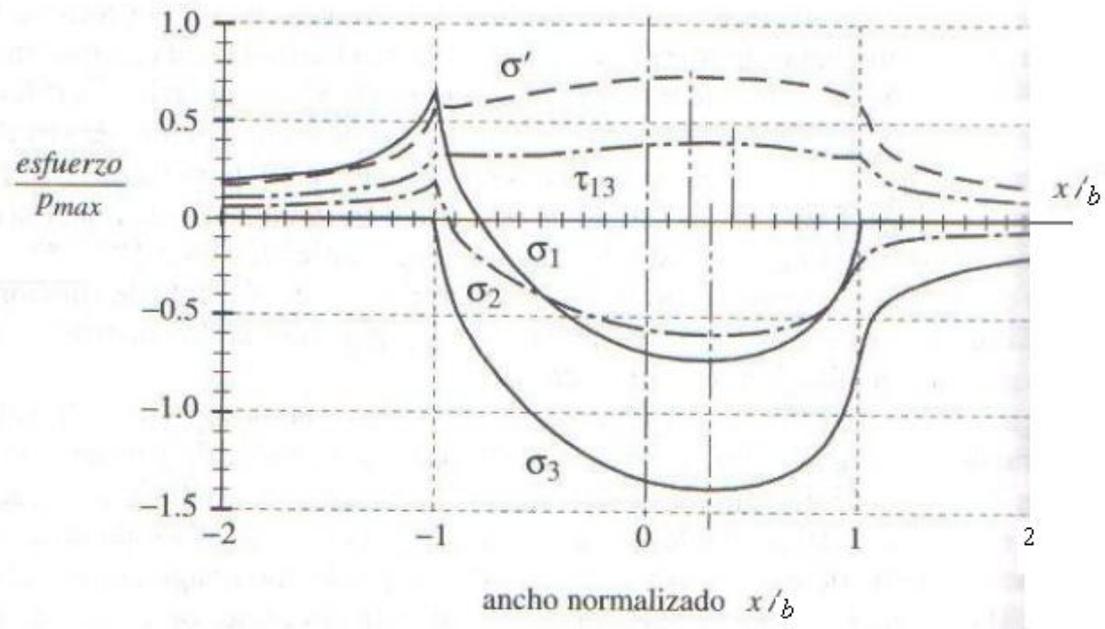


Fig.6.9: Esfuerzos principales y de Von Mises en la zona de contacto en la superficie para cilindros en el rodamiento y deslizamiento combinados.

Por debajo de la superficie, se reducen las magnitudes de los esfuerzos a compresión debidos a la carga normal. Sin embargo, el esfuerzo cortante τ_{xyn} debido a la carga normal se incrementa con la profundidad, llegando a un máximo por debajo de la superficie en $z = 0.5a$, (Fig.6.10). Se pueda observar la inversión de signos en el punto medio de la zona de contacto. Hay componentes del esfuerzo cortante totalmente alternante que actúan sobre cada elemento diferencial de material conforme pasa a través de la zona de contacto. El rango pico a pico de este esfuerzo totalmente alternante en el plano XY es en magnitud mayor que el rango del esfuerzo cortante máximo y es considerado por algunos como el causante de las fallas superficiales por picado.

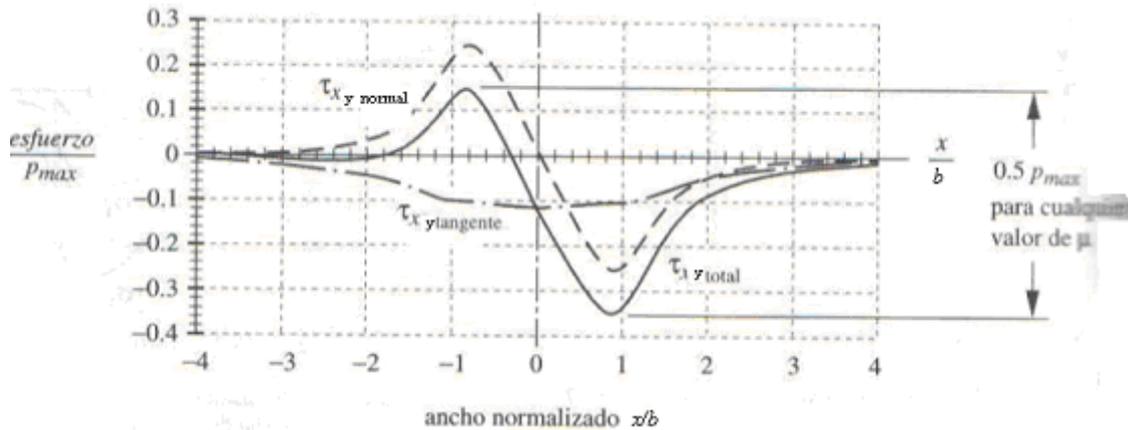


Fig.6.10: Esfuerzos cortantes por debajo de la superficie en $y/b = 0.5$ para cilindros al rodamiento y deslizamiento combinado.

6.4- MODELOS DE FALLA DE FATIGA SUPERFICIAL: CONTACTO DINÁMICO.

Este apartado es una breve mención a los fallos que ocurren debido al contacto explicado anteriormente, aunque dicho tema no es objeto de este proyecto.

Todavía sigue habiendo algún desacuerdo entre expertos en lo que se refiere al mecanismo real de falla que resulta en picado y descascarado de la superficie. La posibilidad de tener un esfuerzo cortante máximo en una localización subsuperficial (en el rodamiento puro) ha llevado a algunos a concluir que los picados empiezan cerca de dicha localización. Otros han llegado a la conclusión que los picados empiezan en la superficie. Es posible que ambos mecanismos estén operando en estos casos, ya que la iniciación de la falla generalmente empieza en alguna imperfección, que puede estar sobre o por debajo de la superficie. Por lo tanto puede haber grietas superficiales y subsuperficiales (Fig.6.11)

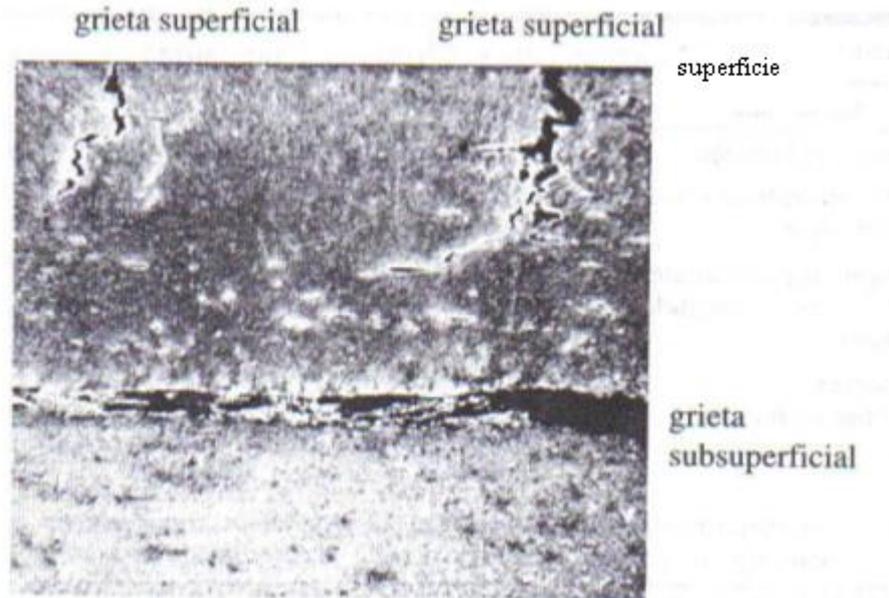


Fig.6.11: Fotomicrografía de grietas superficiales y subsuperficiales de un rodillo carburizado y endurecido sujeto a una severa carga por rodamiento.

Como resumen se puede decir que, la fatiga superficial ocurren en el contacto de rodamiento puro y deslizamiento, pero no en situaciones de puro deslizamiento. Los muy elevados esfuerzos de contacto debidos a las pequeñas áreas de contacto actúan para causar falla por fatiga de los materiales después de miles de ciclos de esfuerzos repetidos. El picado es la pérdida de pequeños trozos de material de la superficie, dejando carcomido detrás. Estos huecos crecerán a áreas más extensas de material superficial escamado, que entonces se conoce como descascarado. Por lo general cuando se inicia el proceso de picado se tiene una advertencia audible. De no atenderse, continuará hasta crear daños importantes a la pieza.

Los materiales lisos de alta resistencia son los requeridos en aplicaciones de esfuerzo por contacto. Contra la fatiga superficial no existe ningún material que muestre tener límites de resistencia a la fatiga y a la larga todos fallan por este mecanismo de no someterlos a un número suficiente de inversiones contacto-esfuerzo.

7 PROBLEMA 3: TENSIONES DE
CONTACTO EN UN CILINDRO
SOBRE UN PLANO RÍGIDO.

7. Problema 3: TENSIONES DE CONTACTO EN UN CILINDRO SOBRE UN PLANO RÍGIDO.

7.A) PROBLEMA ESTÁTICO (SIN ROZAMIENTO).

7.A.1- INTRODUCCIÓN.

Este problema es el más complejo del proyecto, en él se realizará un estudio comparativo entre tensiones teóricas y las calculadas en un cilindro en contacto con un plano rígido. Para el cálculo por el método de los elementos finitos se empleará el programa Abaqus.

El problema consiste en estudiar las tensiones que se producen en la zona de contacto entre un cilindro de acero y un plano rígido al aplicarle al primero una carga de compresión. Se considerarán dos valores de cargas y dos radios diferentes.

Los resultados que se obtienen mediante este tipo de análisis son mucho interés en el ámbito del diseño de máquinas, pues es muy frecuente el contacto entre piezas de máquinas y es necesario conocer las tensiones que se producen en esas condiciones con bastante exactitud. Como ya se dijo en el capítulo anterior, las tensiones están muy localizadas concentrándose en zonas de extensión muy pequeña y alcanzando valores muy grandes, lo que puede provocar fallos por fatiga superficial.

Antes de comenzar la descripción del problema se muestran algunas de las fórmulas más importantes que serán utilizadas en los cálculos. Todas las fórmulas están en el correspondiente capítulo teórico, por lo que aquí se muestran solamente las de mayor interés:

El semiancho de la huella de contacto queda definido por:

$$b = \sqrt{\frac{2 m_1 + m_2 F}{\pi B L}}$$

Donde m_1 y m_2 son constantes del material, F la fuerza aplicada, B una constante geométrica y L la longitud del cilindro.

La presión máxima de contacto es:

$$p_{\text{máx}} = \frac{2F}{\pi bL}$$

Las tensiones normales a lo largo del eje de carga (solo componentes x e y) son:

$$\sigma_x = -p_{\text{máx}} \left[\left(2 - \frac{1}{1 + \frac{y^2}{b^2}} \right) \sqrt{1 + \frac{y^2}{b^2}} - 2 \frac{y}{b} \right]$$

$$\sigma_y = \frac{-p_{\text{máx}}}{\sqrt{1 + \frac{y^2}{b^2}}}$$

Por último, las tensiones cortantes:

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}$$

7.A.2- MODELADO DEL PROBLEMA CON ELEMENTOS FINITOS.

Como ya señalamos en los dos problemas anteriores, hay tres etapas: preproceso, proceso y postproceso en un cálculo por elementos finitos. Se describen el primero y el último; el proceso es la fase de cálculo que lleva a cabo el programa informático.

7.A.2.1- Preproceso.

7.A.2.1.1- Geometría.

El problema consiste en un cilindro tumbado sobre un plano, es decir, con las caras transversales del cilindro perpendiculares al plano. La distancia de apoyo del cilindro sobre el plano es igual a la longitud del cilindro L . El problema real es tridimensional (Fig.7.1). Sin embargo, este problema obedece a las hipótesis de la elasticidad bidimensional, tratándose de un caso de tensión plana y reduciéndose así, de nuevo, un problema de tres dimensiones a uno de dos dimensiones. En la figura 7.2 se aprecia la sección transversal con la que se trabajará en Abaqus.

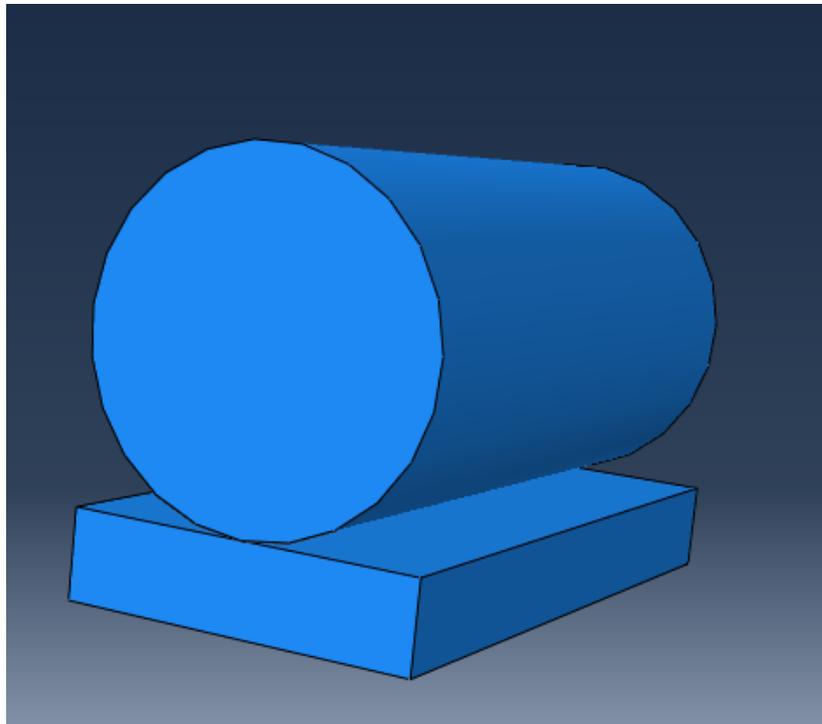


Fig.7.1: Simulación del problema real en 3D

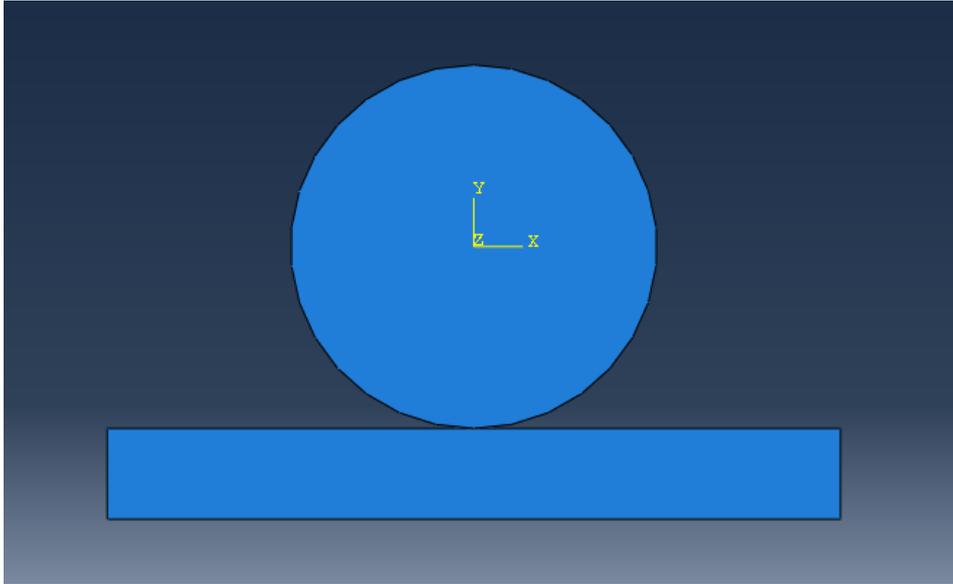


Fig.7.2: Sección transversal en el plano XY usada para este ejercicio.

Otro aspecto a destacar en esta introducción al problema es el sistema de coordenadas utilizado. Como se aprecia en la figura 7.2, hemos llamado al eje horizontal X, al vertical Y y al perpendicular a la pantalla Z (eje no necesitado en este ejercicio por tratarse de un problema de tensión plana). Al considerar sólo la sección de dicha figura, únicamente es necesario trabajar en el plano XY.

Por lo tanto el cilindro queda definido por una longitud L a lo largo del eje Z y un radio R en el plano XY. Todo ello se refleja en la figura 7.3, junto con el sistema de ejes tomado.

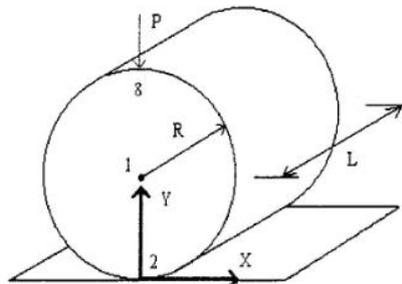


Fig.7.3: Esquema del problema, geometría y sistema de coordenadas

Para crear ambas superficies con el programa Abaqus, elegimos el módulo “Part”, aquí (a diferencia de los otros de problemas) hay que crear dos partes. Para ambas seleccionamos la opción de “2D Planar” y “Deformable”. Con estas elecciones sólo queda dibujar el cuerpo con las dimensiones que deseemos.

La carga se aplicará en el punto superior de la circunferencia en la dirección del eje Y (Fig.7.3).

Por último, se definen los cuatro casos considerados con sus magnitudes y unidades. Las unidades con las que se ha trabajado son las siguientes

- Tensiones \longrightarrow N/mm²
- Longitudes \longrightarrow mm.
- Fuerzas \longrightarrow Newton (N)

Los radios toman valores de 10 mm (caso de radio RC1) y 50 mm (caso de radio RC2). Las fuerzas de compresión son de 9800 N (caso de carga LC1) y 49000 N (caso de carga LC2). Por último, la longitud del cilindro L es de 20 mm.

7.A.2.1.2- Materiales.

En el programa ahora seleccionamos el módulo “Property”, con el creamos un material; en este caso tendrá las características de un acero:

- $E = 196000\text{N/mm}^2$
- $\nu = 0.29$.

Con este mismo módulo también se crea una sección, elegiremos la opción de homogénea e introduciremos el espesor del cilindro; éste, aunque en principio no aparezca por tratarse de un problema de tensión plana, es necesario introducirlo para el reparto de cargas y tensiones. Por último, las características de la sección se asignan a los cuerpos creados en la primera parte (cilindro y plano). Más adelante se hará rígido el plano.

7.A.2.1.3- Ensamblaje y paso.

Esta es la primera vez que aparecen y se explican estos dos módulos, ya que en este problema existen dos partes distintas

Para el ensamblaje desplegamos el módulo “*Assembly*” con el que se consigue la colocación de los dos cuerpos, uno respecto a otro, que deseamos. Nosotros elegimos en este caso que el círculo toque al plano con su punto más bajo (Fig.7.3). Por otro lado, con esta opción del programa también se elige si hacer independiente o dependiente uno respecto a otro. Esto es importante para el mallado, para que posteriormente sea posible mallar el modelo completo o tenga que hacerse por partes.

Después de asignar las características del ensamblaje, mediante el módulo “*Step*” se introduce el método de resolución que se quiere que emplee el programa. En este problema creamos un paso de tipo estático general. Pero a diferencia de los otros problemas, ahora se activa la opción de introducir efectos no lineales.

A.2.1.4- Condiciones de contorno.

Se utiliza el módulo “*Load*”. En este problema hay que introducir en este módulo varios parámetros. Comenzaremos hablando de las restricciones al movimiento. Mediante la opción de empotramiento se deja empotrada la parte inferior del plano. Por otro lado, dada la simetría del problema, se restringe el movimiento horizontal del eje de carga del cilindro. Por último, crearemos un punto de referencia. Se ha optado por crearlo en un punto del plano (podía haber sido cualquier otro punto, incluso fuera de las dos partes del modelo). Se restringe totalmente el movimiento de dicho punto. La definición del punto de referencia (Fig.7.4) se utiliza como paso previo a la creación del plano rígido (en el siguiente módulo).

Por último, también deberemos crear la carga. Introducimos una carga concentrada y con un valor de -9800 N ó -49000 N (según el caso) en la dirección del eje Y. (Fig.4)

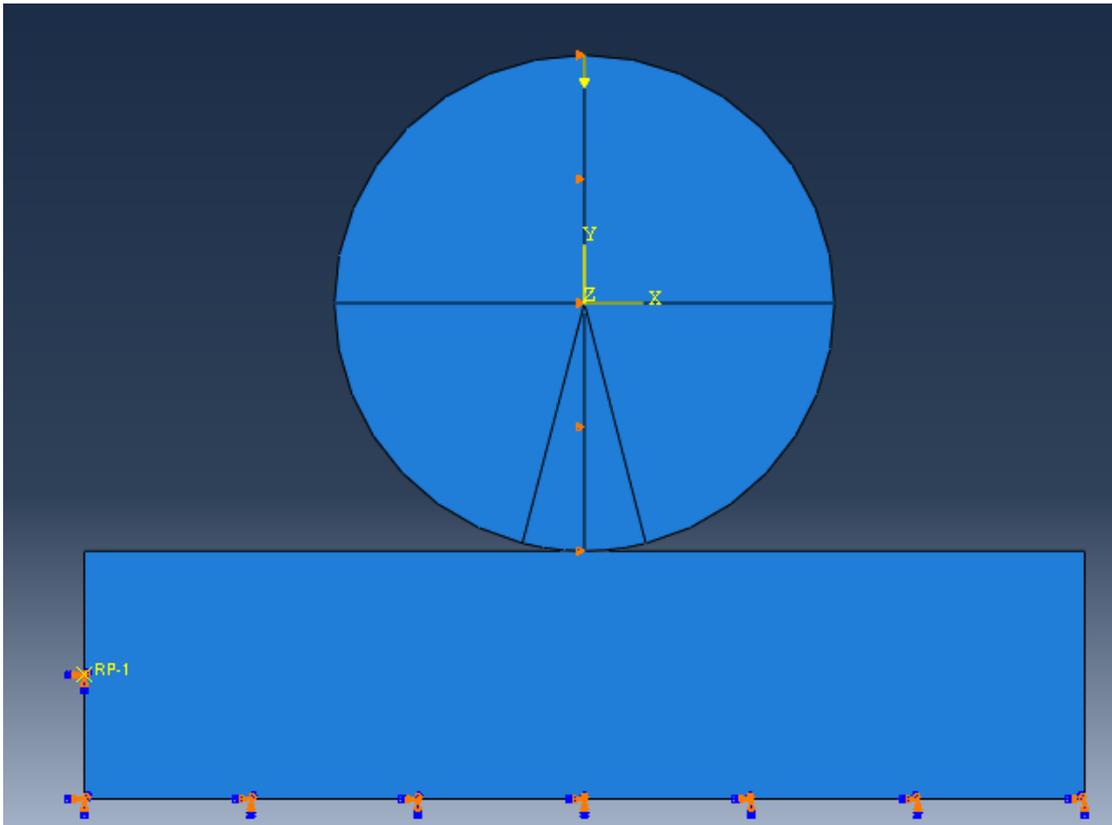


Fig.7.4: Condiciones de contorno del problema. Detalle de las divisiones del cilindro.

7.A.2.1.5- Contacto y cuerpo rígido.

Es necesario crear un contacto para exista interacción entre una parte con otra.

En el módulo “*Interaction*” se creará una “*Constraint*”, elegiremos la opción de cuerpo rígido. Se elige como región el rectángulo (el plano) y como punto de referencia el creado en el módulo anterior que tiene sus movimientos restringidos. De esta manera el plano resulta ser totalmente rígido. Así el plano (o cualquier cuerpo) toma las características del punto de referencia que se haya definido: si éste tiene impedido su movimiento, el primero se hace perfectamente rígido.

En cuanto al contacto se refiere, Abaqus tiene infinidad de opciones. Crearemos una interacción y elegiremos la opción “*surface-surface*”. A continuación, se define el plano como superficie maestra y el cilindro como esclava. La superficie rígida (plano) siempre debe ser la maestra y la superficie esclava aquella que tenga un mallado más fino (cilindro) (Fig.7.5). Por último, crearemos las características del contacto. Se ha escogido un contacto normal con la opción de “*hard-contact*”. Así queda creado finalmente el contacto entre ambas superficies.

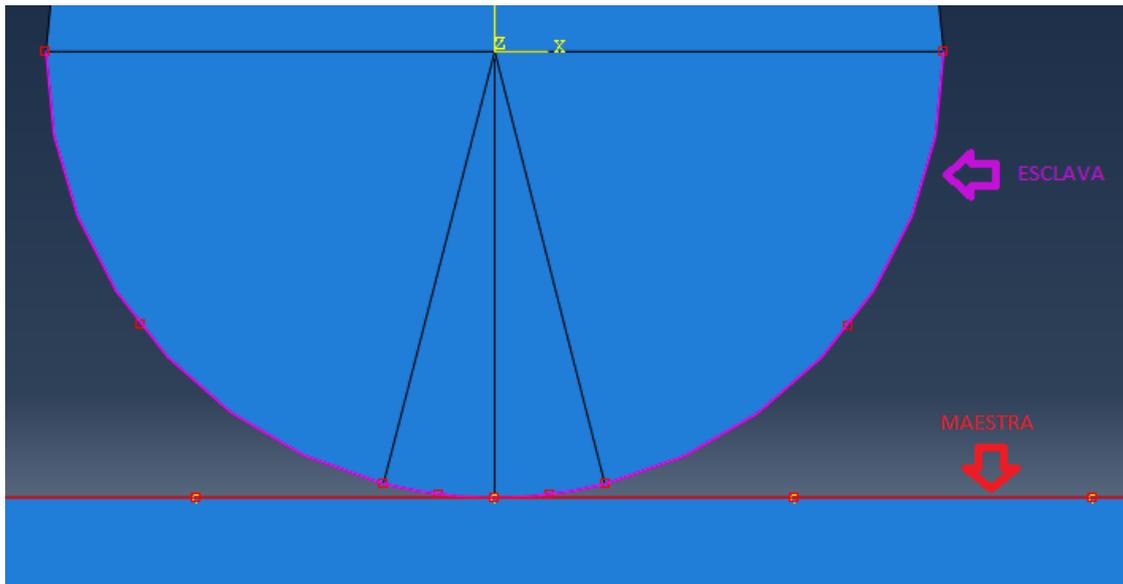


Fig.7.5: Detalle de la superficie maestra y esclava.

7.A.2.16- Mallado.

En este problema se ha tenido que emplear un mallado muy fino, en especial en la zona más próxima al contacto. Por ello el cilindro se ha dividido en varias partes, lo que facilita el reajuste del mallado. Se ha dividido en cuatro sectores, con una forma triangular en el área próxima al contacto (Fig.7.4). Los sectores triangulares serán los más finamente mallados.

Elegimos el módulo “*Mesh*” de la lista. El tipo de elemento elegido es un elemento triangular, y de tipo estructural, este elemento es conocido con el nombre de *CPS3*. Este elemento está orientado a la resolución de problemas de tensión plana, y es en este momento dónde se especifica dicha hipótesis en Abaqus.

El plano tiene un mallado muy grueso pues en él no aparecerán tensiones ya que es rígido, simplemente sirve como apoyo al cilindro.

En el cilindro se ha optado por un mallado algo más fino en el exterior al sector triangular, y en el interior de éste un mallado extremadamente fino (Fig.7.7) pues en el interior del mismo es donde se aparecen las distribuciones de tensiones que se quieren estudiar y comparar con la teoría. El modelo entero mallado queda como se muestra en la figura 7.6.

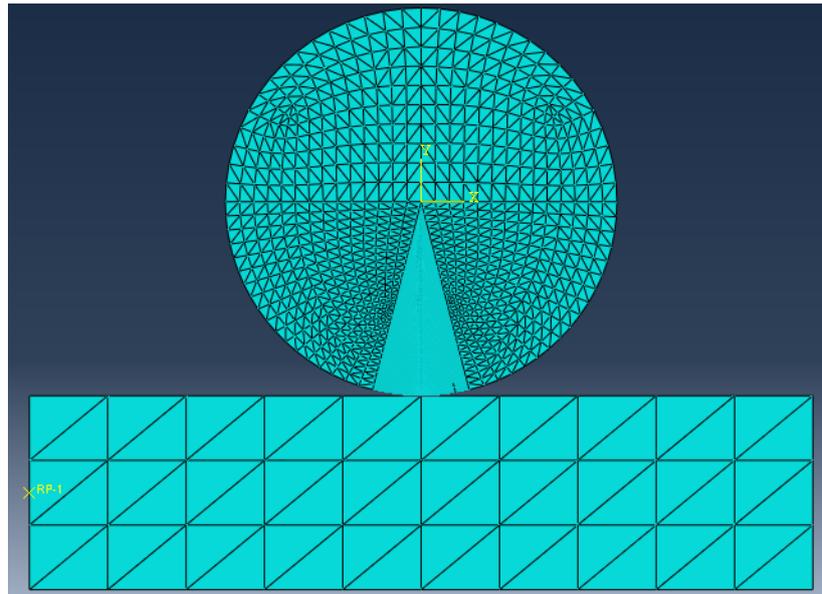


Fig.7.6: Mallado del modelo completo. RC1

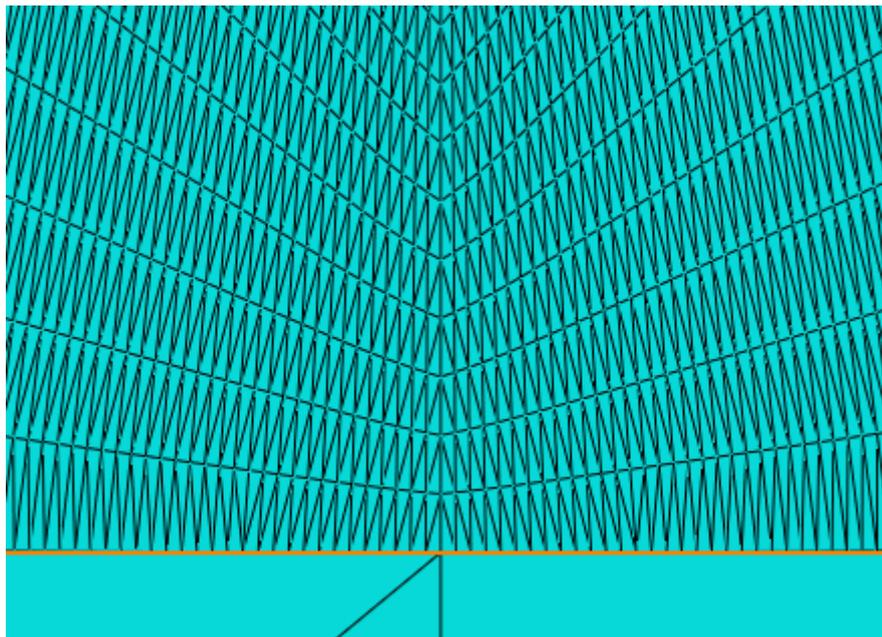


Fig.7.7: Detalle del mallado de la zona triangular. Alrededor del punto de contacto. RC1

Aunque se tienen cuatro casos, geoméricamente sólo hay dos diferentes. Esto implica que el mallado coincide en aquellos dos casos en los que el radio es el mismo. Cuando el radio es 10 mm (RC1) hay un total de 59118 nodos y 116222 elementos; mientras que para el radio de 50 mm (RC2) hay un total de 35472 nodos y 69934

elementos. No están incluidos los nodos y elementos del plano rígido por ser muy pocos en comparación con los del cilindro.

7.2.2- Proceso.

El cálculo se lanza en el módulo “*Job*”. Creamos un trabajo y dejamos que el programa Abaqus haga el resto.

7.2.3- Postproceso.

Una vez que el programa ha completado el cálculo, estamos en condiciones de analizar los resultados numéricos. Con el módulo “*Visualization*”, es posible generar mapas con las distribuciones de deformaciones, tensiones,...

7.A.2.3.1- Análisis de las magnitudes mayor interés.

Se calcularán el semiancho de huella y las tensiones normales en ambos ejes (σ_x y σ_y). Primeramente, se estudian las tensiones a lo largo del eje de carga.

7.A.2.3.1.1 Caso 1. RCI-LCI.

Este caso corresponde al menor de los dos radios (10 mm) y la menor de las cargas (9800 N).

Todos los cálculos, gráficas..., aquí presentados han sido calculados o dibujadas mediante la aplicación EXCEL.

Es posible hallar el semiancho a partir de los resultados de Abaqus mediante una opción llamada “*Contact Pressure*”, la cual nos presenta en una tabla la presión de contacto a la que están sometidos todos los nodos. Lógicamente, sólo aquellos que pasan a tocar al plano (huella) presentarán valores no nulos de esta presión. En este caso son 68 nodos los que entran en contacto y definen el semiancho b . Todo esto puede apreciarse en las figura 7.8 y figura 7.9. En la figura 7.8, con el cilindro aún sin fuerza de compresión, se ha marcada en color rojo una zona que no se encuentra en contacto con el plano. Cuando se ejerce una presión, figura 7.9, el cilindro se deforma y en parte entra en contacto (por ejemplo, la zona marcada en rojo) con el plano dando lugar a una huella rectangular de semiancho b . El último de los nodos en contacto proporciona el valor de b .

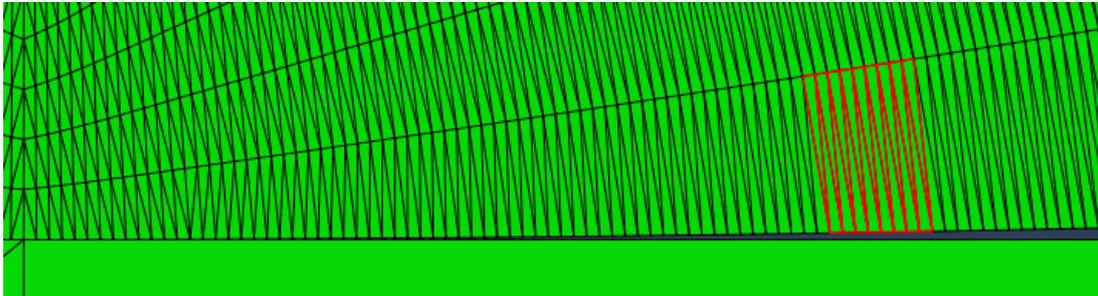


Fig.7.8: Zona de contacto sin deformación. RC1-LC1

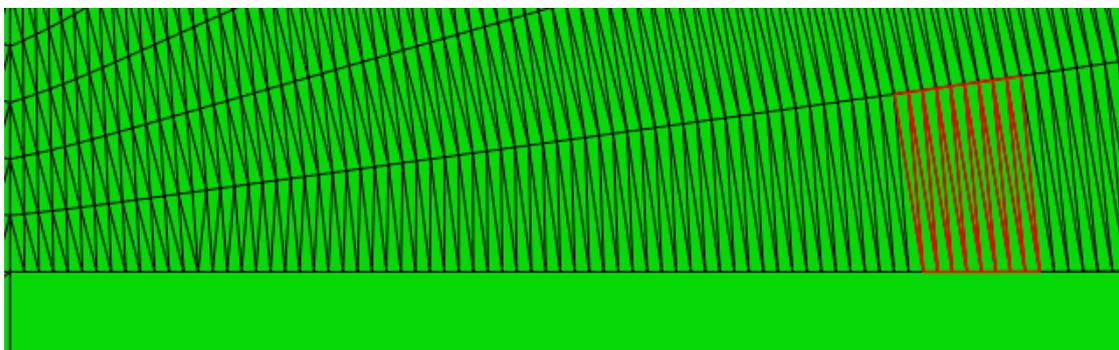
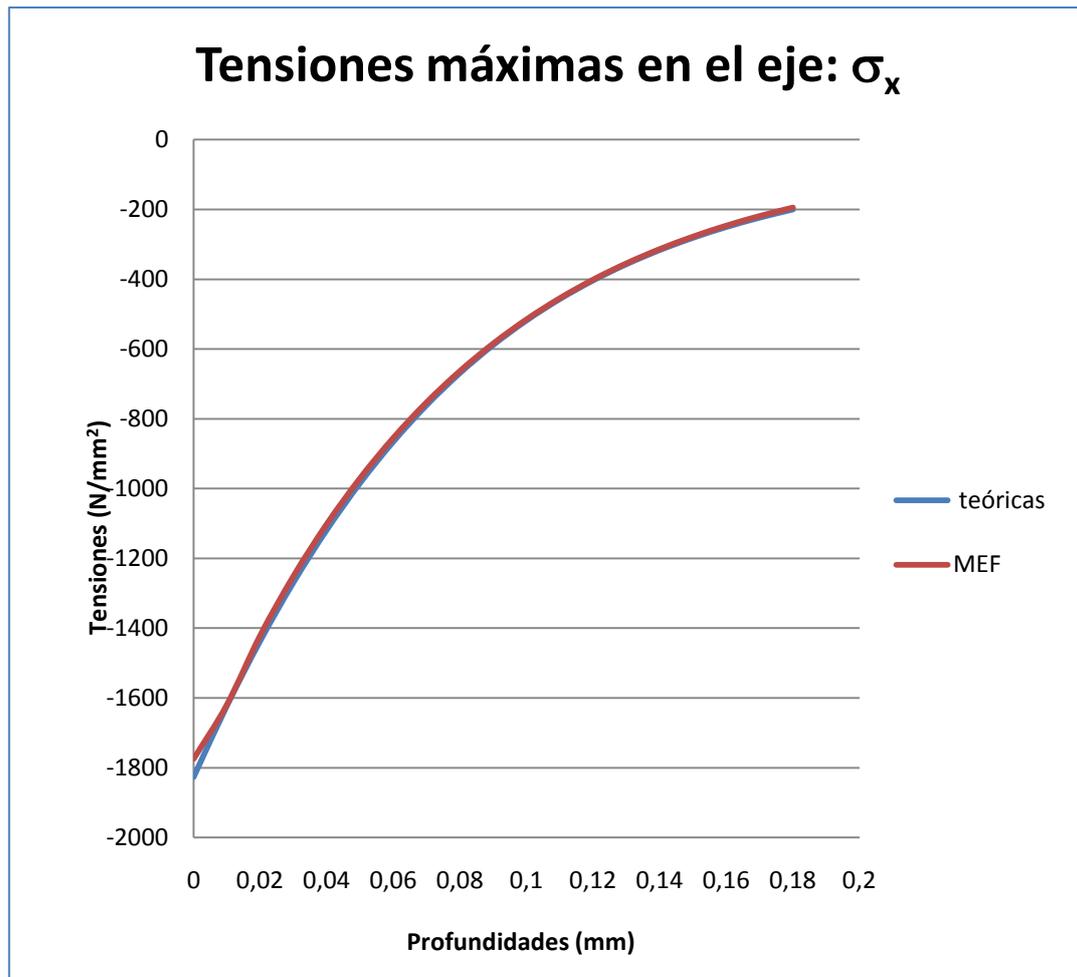


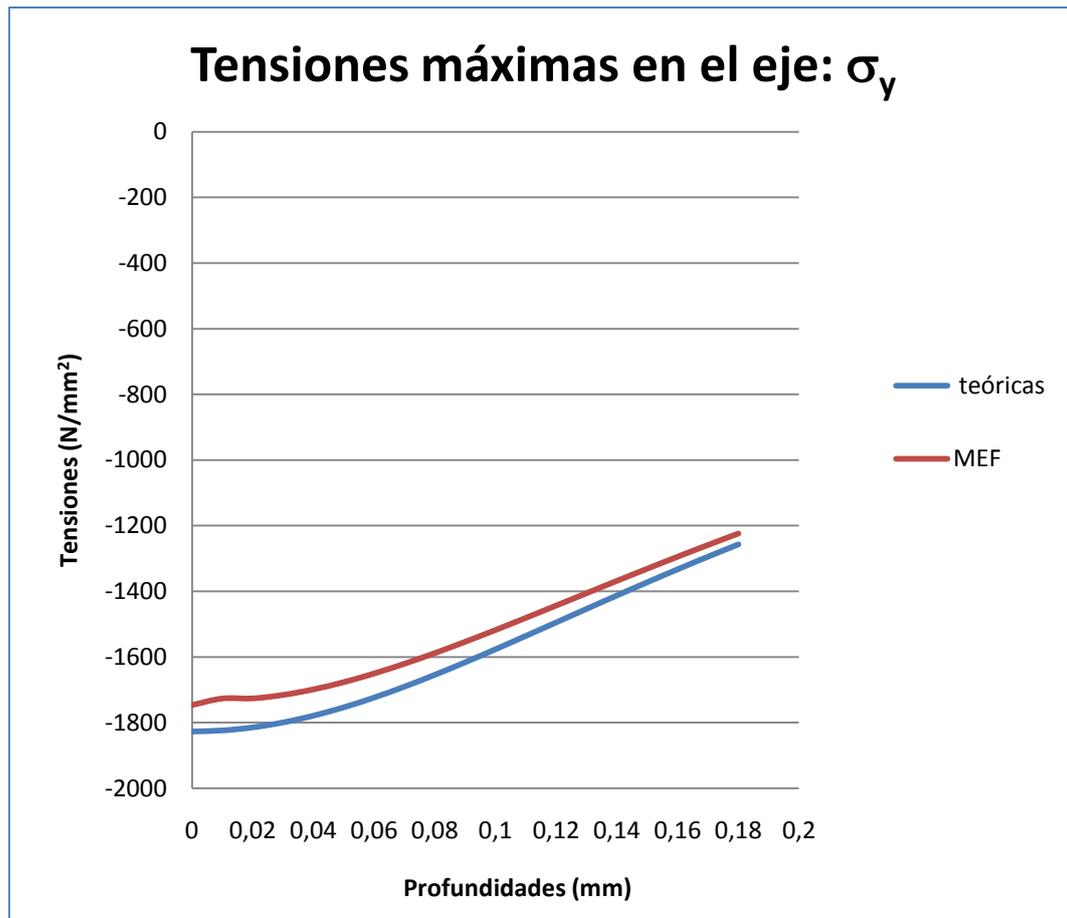
Fig.7.9: Zona de contacto deformada. RC1-LC1.

La gráfica 7.1 muestra la variación de las tensiones normales en la dirección horizontal σ_x a lo largo del eje de carga hasta una profundidad igual al semiancho b . En esta gráfica se aprecia como las dos curvas dibujadas (teórica y MEF) son casi coincidentes. Hay una pequeña discrepancia en el primer punto (punto inicial de contacto) debido a que se trata inicialmente de un punto singular. También, debe notarse la rapidez con que la tensión σ_x tiende a cero conforme se consideran puntos a mayor profundidad a lo largo del eje de carga.



Gráfica 7.1: σ_x en el eje de carga. RC1-LC1

La gráfica 7.2 muestra la distribución de las tensiones normales en la dirección del eje Y σ_y , a lo largo del eje de carga. En esta gráfica se aprecia una mayor diferencia entre la curva teórica y la curva calculada MEF. Sin embargo, la forma de ambas curvas es muy similar y los errores relativos son pequeños. La diferencia entre ambas curvas puede deberse al mallado: los problemas de contacto requieren, para alcanzar la convergencia, un mallado muy fino.



Gráfica 7.2: σ_y en el eje de carga. RC1-LC1

En las curvas MEF, el valor de σ_x o σ_y a profundidad cero nos da la presión máxima. Como puede verse ambos valores son muy semejantes (de acuerdo con la teoría que predice que deben ser iguales). De hecho, la relación $\sigma_{x\text{máx}}/\sigma_{y\text{máx}}$ es 1.016 (ver tabla 7.1).

Se muestran la tabla 7.1 los resultados numéricos comparando la teoría con los resultados MEF por medio de los errores relativos. Como puede verse, el cálculo de b es extremadamente exacto. Y el mayor de los errores, aproximadamente un 4.5% en $\sigma_{y\text{máx}}$, puede considerarse despreciable. Esto indica un grado de aproximación muy alto entre los resultados obtenidos por MEF y la teoría de Hertz.

TABLA 7.1:

	$(\sigma_x)_{\text{máx}}$ (N/mm ²)	$(\sigma_y)_{\text{máx}}$ (N/mm ²)	b (mm)	$(\sigma_x)_{\text{máx}}/(\sigma_y)_{\text{máx}}$
Teórico	-1826.95	-1826.95	0.1707	1
Calculado	-1774.96	-1746.34	0.17067	1.016
Error relativo	2.846%	4.412%	0.044%	-----

7.A.2.3.1.2- Caso 2.RC1-LC2.

En este caso se mantiene el radio de 10 mm pero la carga se multiplica por cinco, pasa a ser 49000 N.

Como parece lógico, la presión en el cilindro es mayor y aumentarán tanto las tensiones máximas como el semiancho de huella. Establecen ahora contacto con el plano rígido un total de 150 nodos. En la Fig.7.10.a se muestra el desplazamiento que sufre el último nodo que define el semiancho b .

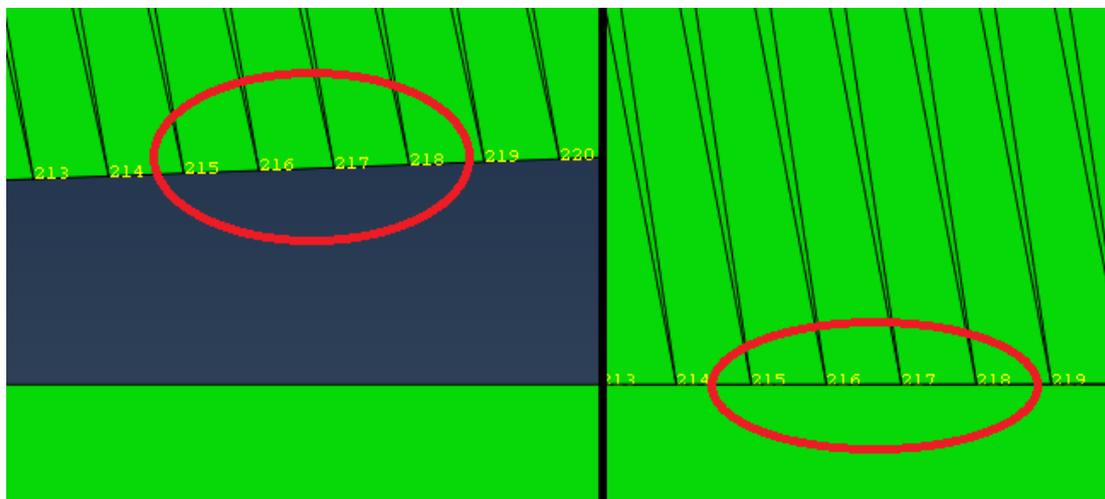


Fig.7.10.a.: Último nodo de un semiancho antes de la deformación y después de la misma. RC1-LC2.

La (Fig.7.10.b.) muestra una imagen en escala cromática que representa los desplazamientos verticales en el cilindro.

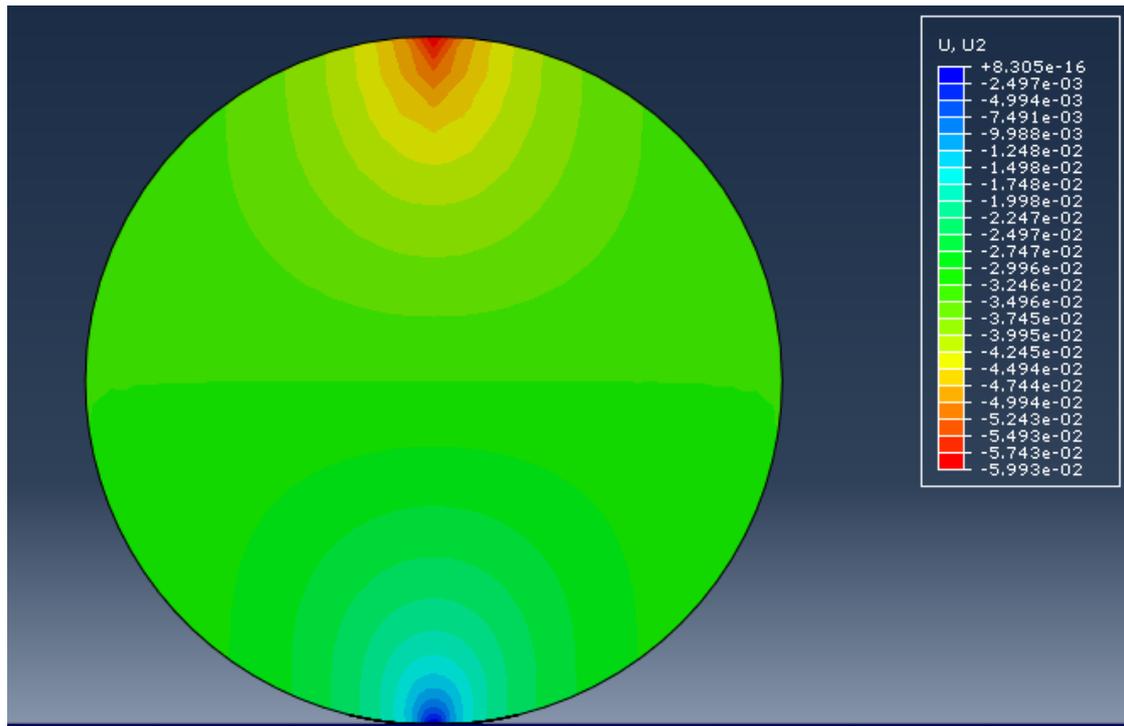
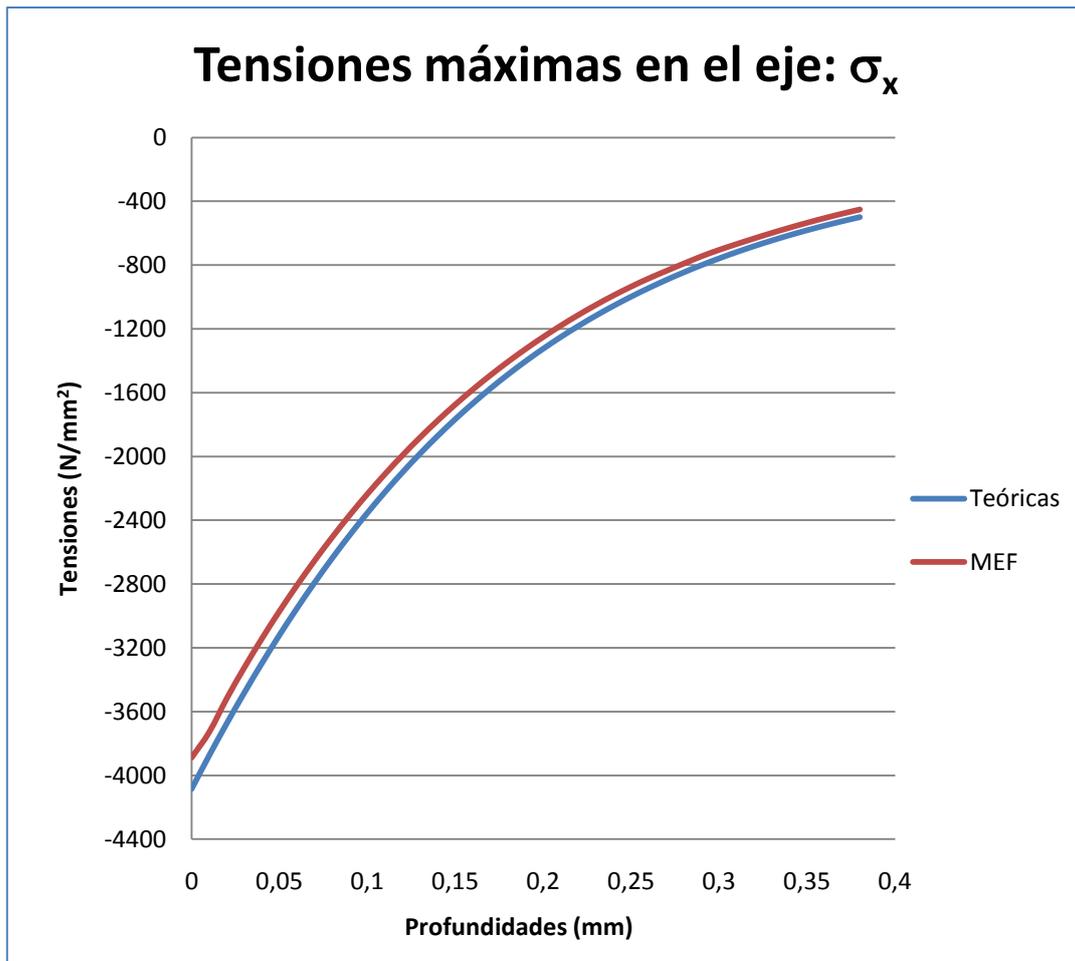


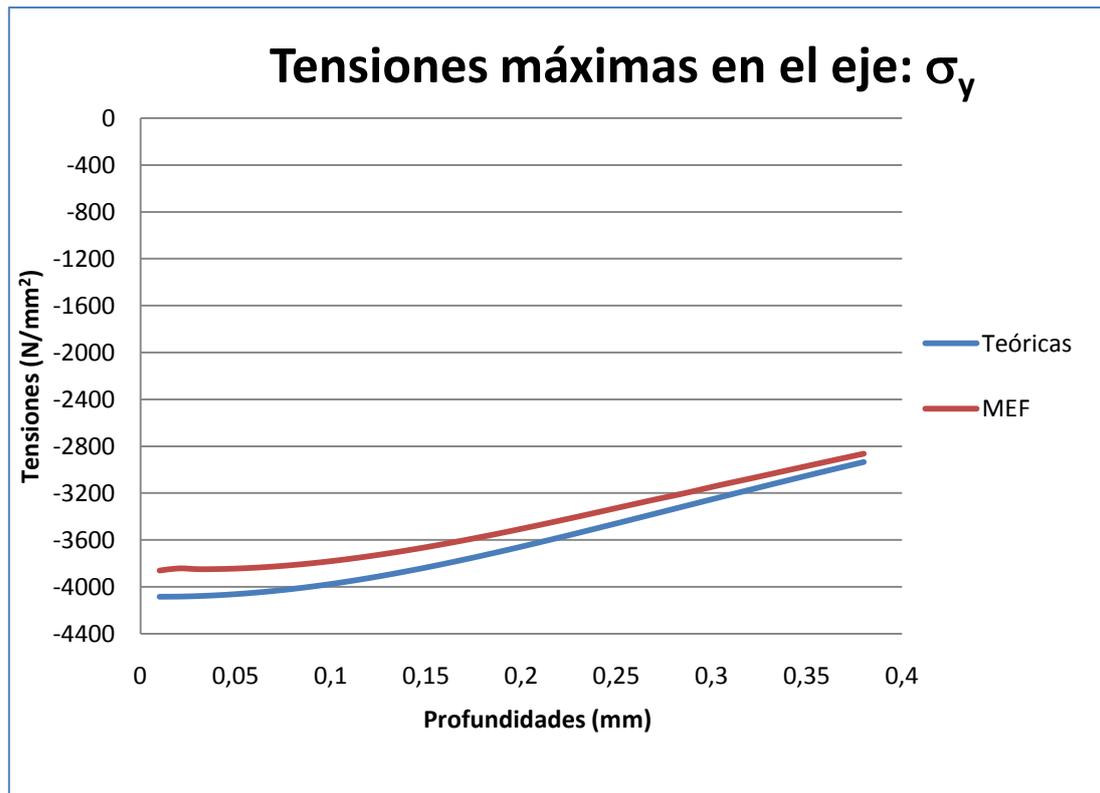
Fig.7.10.b.: Desplazamientos UY en la pieza RC1-LC2.

En la gráfica 7.3 se dibuja la variación de la tensión σ_x a lo largo del eje de carga. De nuevo existe una gran coincidencia entre la curva teórica y la calculada MEF. Aunque su valor máximo ha crecido considerablemente, σ_x tiende a cero muy rápidamente con la profundidad.



Gráfica 7.3: σ_x en el eje de carga. RC1-LC2.

En la gráfica 7.4 se muestra la distribución de tensiones σ_y , a lo largo del eje de carga. Se ven cosas similares al caso anterior. Ambas curvas, teórica y MEF, presentan un comportamiento muy similar. También se aprecia como σ_y disminuye con la profundidad aunque no tan rápidamente como σ_x .



Gráfica 7.4: σ_y en el eje de carga. RC1-LC2.

Los valores numéricos se presentan la tabla 7.2 donde aparecen también los errores relativos:

TABLA 7.2:

	$(\sigma_x)_{\text{máx}}$ (N/mm ²)	$(\sigma_y)_{\text{máx}}$ (N/mm ²)	b (mm)	$(\sigma_x)_{\text{máx}}/(\sigma_y)_{\text{máx}}$
Teórico	-4085.19	-4085.19	0.3818	1
Calculado	-3889.12	-3861.66	0.38202	1.007
Error relativo	4.799%	5.472%	0.058%	-----

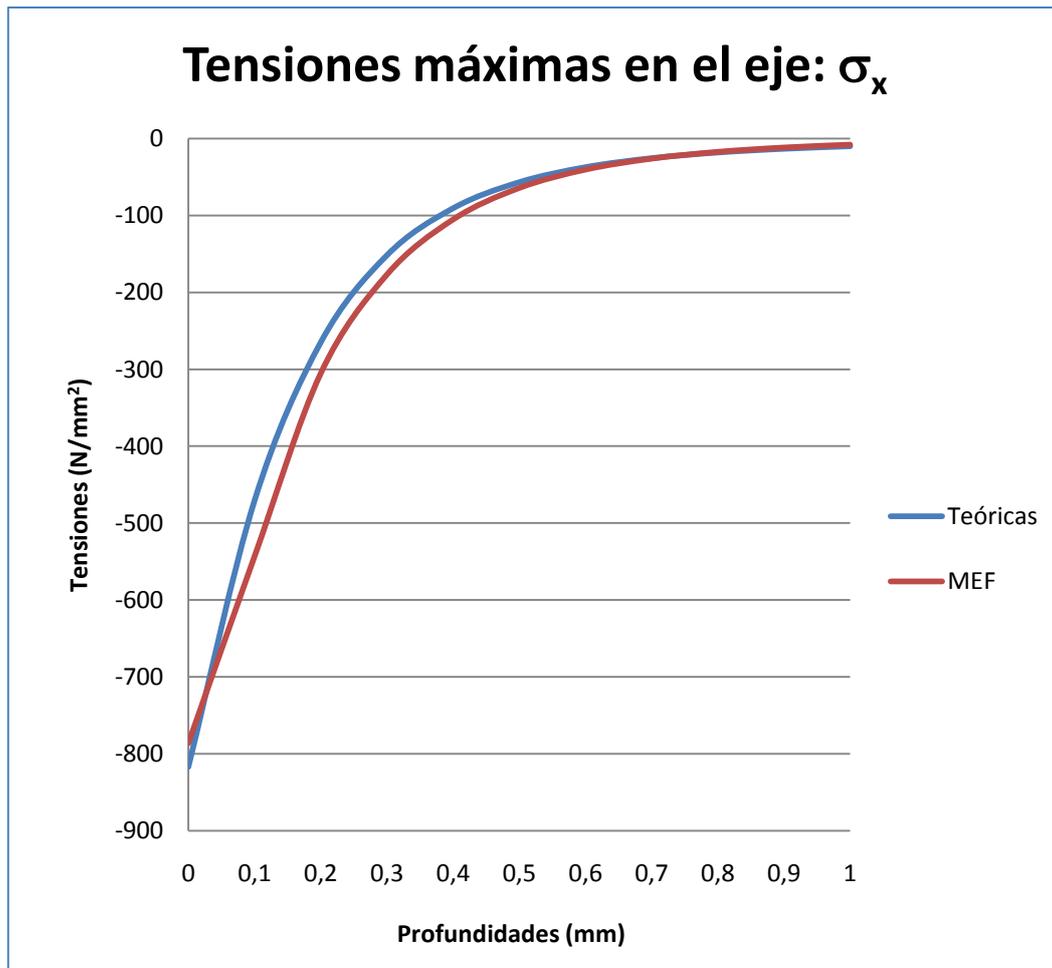
En este caso, con una carga mayor, los errores en las tensiones máximas han crecido un poco. Aun así siguen estando en torno al 5%. El cálculo del semiancho de huella es exacto y la relación entre las tensiones máximas calculadas es 1, de acuerdo con lo predicho por la teoría.

7.A.2.3.1.3- Caso 3. RC2-LC1.

Ahora el radio es mayor, 50 mm, y la carga 9800 N. Al modificarse la geometría a través del radio, también ha sido necesario modificar el mallado. Resultará interesante comparar éste con el caso 1, pues ambos tienen la misma carga aunque el radio del cilindro es diferente.

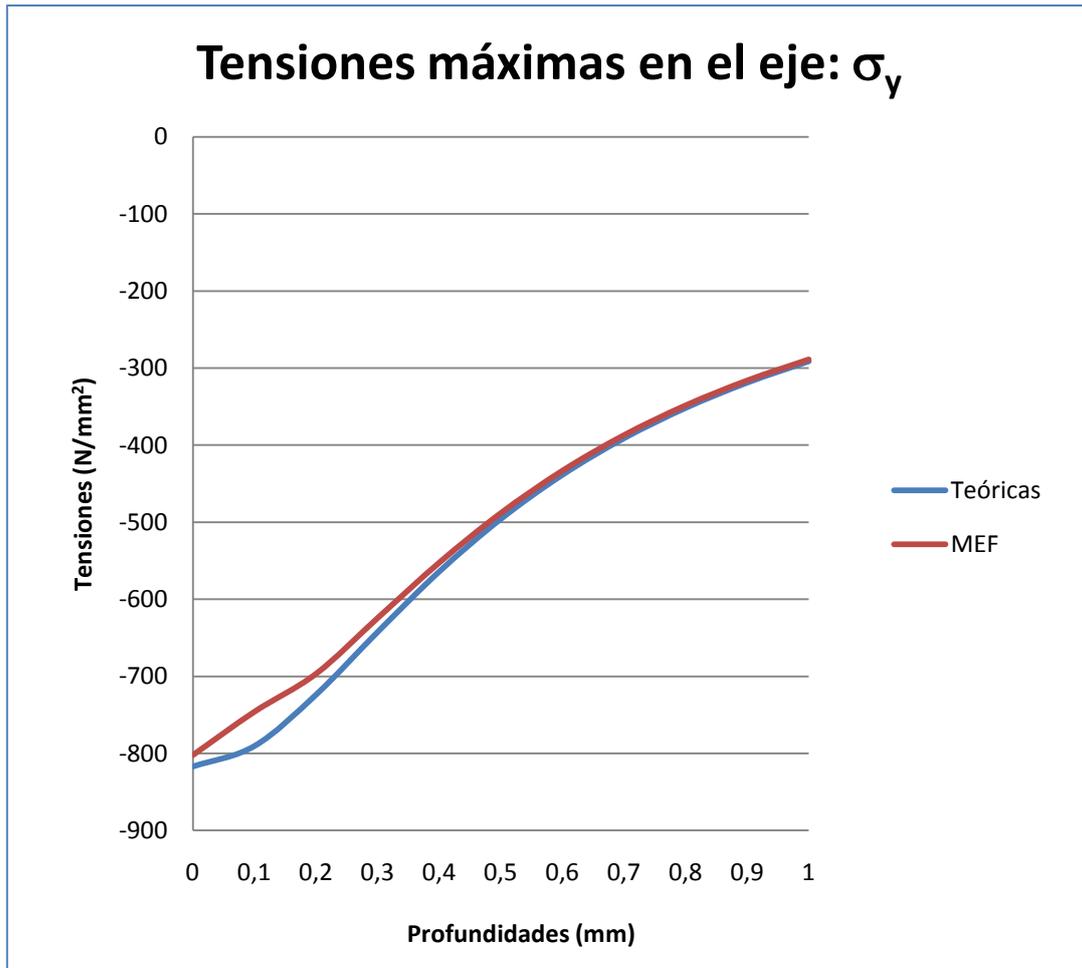
Al deformarse el cilindro, son 30 los nodos que entran en contacto y definen el semiancho.

La gráfica 7.5 muestra la variación de la tensión σ_x a lo largo del eje de carga hasta una profundidad de un milímetro. Aparece un comportamiento similar al de casos anteriores. Se aprecia también un muy buen grado de aproximación entre la curva teórica y la calculada. El valor de $p_{máx}$ (σ_x en profundidad cero) es ahora notablemente menor (alrededor de 800 N/mm²) ya que el cilindro es de mayor dimensión debido a su mayor radio.



Gráfica 7.5: σ_x en el eje de carga. RC2-LC1.

En la gráfica 7.6 se muestra la variación de la tensión σ_y a lo largo del eje de carga para una misma profundidad. Se aprecia una muy buena aproximación de la curva calculada a la teórica. Al aumentar la profundidad en el eje de carga, σ_y se acerca rápidamente a cero aunque de forma menos pronunciada que σ_x .



Gráfica 7.6: σ_y en el eje de carga. RC2-LC1.

Se muestran en la tabla 7.3 los valores numéricos y los errores relativos.

TABLA 7.3:

	$(\sigma_x)_{\text{máx}}$ (N/mm ²)	$(\sigma_y)_{\text{máx}}$ (N/mm ²)	b (mm)	$(\sigma_x)_{\text{máx}}/(\sigma_y)_{\text{máx}}$
Teórico	-817.038	-817.038	0.3818	1
Calculado	-786.378	-802.293	0.36876	0.98
Error relativo	3.753%	1.805%	3.415%	-----

Los errores relativos en las tensiones máximas son menores. Por el contrario, ha aumentado considerablemente el error relativo en el semiancho de la huella. Esto se

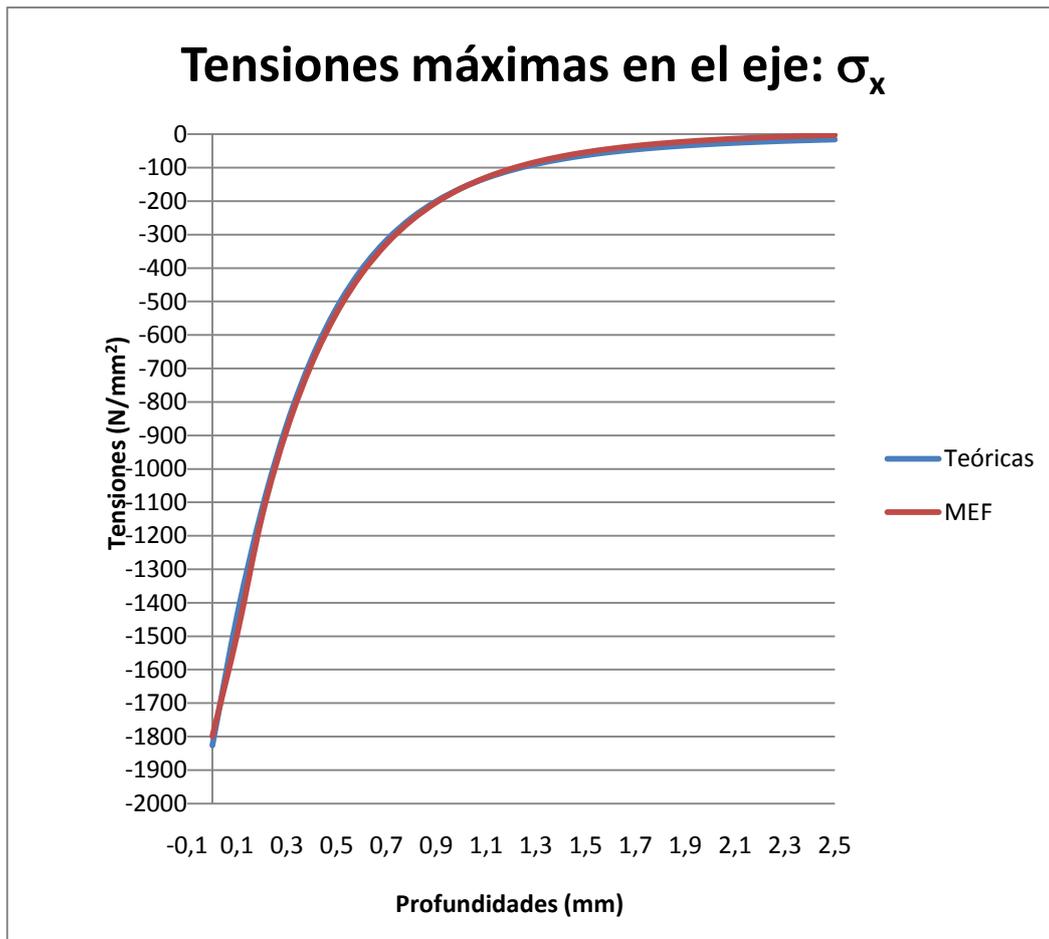
debe al hecho de haber trabajado con un mallado más grueso. Esto provoca que no haya tanta precisión en la medida de longitudes muy pequeñas, como es el caso del semiancho. Aún así el error es sólo del 3,4%. El cociente $(\sigma_x)_{\max}/(\sigma_y)_{\max}$ es 0.98, prácticamente 1.

7.A.2.3.1.4- Caso 4. RC2-LC2.

Se aplica la carga mayor y se considera el radio de mayor longitud.

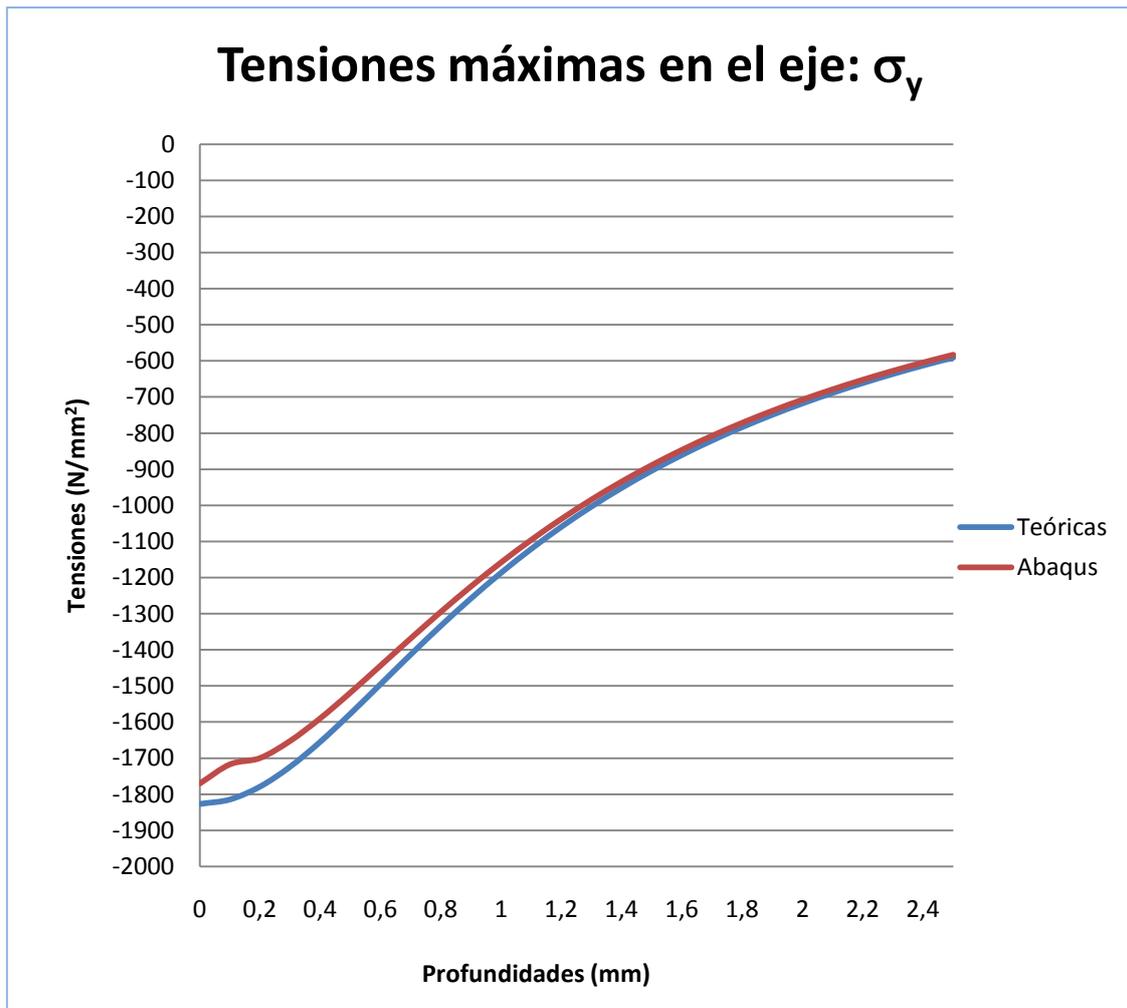
Han entrado en contacto 55 nodos, que se utilizan para calcular el semiancho (30 nodos lo hacían en el caso 3, con una carga menor y con el mismo radio).

En la gráfica 7.7 se muestra la variación de la tensión σ_x a lo largo de del eje de carga hasta 2.5 mm de profundidad. En ella se ven las mismas cosas que en las otras tres gráficas de estas tensiones explicadas con anterioridad. Se aprecia de nuevo la tendencia rápida de σ_x a cero según nos alejamos de la superficie a través del eje de carga. Hay una coincidencia entre ambas curvas casi perfecta.



Gráfica 7.7: σ_x en el eje de carga. RC2-LC2.

La variación de la tensión σ_y a lo largo del eje de carga para la misma profundidad que en la anterior viene dibujada en la gráfica 7.8. Se observa una gran coincidencia entre la curva teórica y la calculada, salvo alguna pequeña diferencia cerca del punto inicial de contacto.



Gráfica 7.8: σ_y en el eje de carga. RC2-LC2.

Por último se resumen en la tabla 7.4 los valores numéricos y se muestran los errores relativos.

TABLA 7.4:

	$(\sigma_x)_{\text{máx}}$ (N/mm ²)	$(\sigma_y)_{\text{máx}}$ (N/mm ²)	b (mm)	$(\sigma_x)_{\text{máx}}/(\sigma_y)_{\text{máx}}$
Teórico	-1826.95	-1826.95	0.854	1
Calculado	-1799.4	-1770	0.82968	1.0166
Error relativo	1.508%	3.117%	2.817%	-----

Se han encontrado errores muy pequeños en todas las magnitudes estudiadas. La diferencia entre $(\sigma_x)_{\text{máx}}$ y $(\sigma_y)_{\text{máx}}$ es muy pequeña. Así los resultados encontrados vía MEF están en muy buen acuerdo con la teoría de Hertz.

Para ver con claridad las variaciones que se producen en las tensiones normales máximas y en la longitud del semiancho de huella veamos la tabla 7.5, con los datos de los cuatro casos descritos y calculados vía MEF:

TABLA 7.5:

	$(\sigma_x)_{\text{máx}}$ (N/mm ²)	$(\sigma_y)_{\text{máx}}$ (N/mm ²)	b (mm)
Caso 1	-1774.96	-1746.34	0.17067
Caso 2	-3889.12	-3861.66	0.38202
Caso 3	-786.378	-802.293	0.36876
Caso 4	-1799.4	-1770	0.82968

Obsérvese como el caso donde las tensiones son mayores es el caso 2, correspondiente con el cilindro con la mayor carga y menor radio. En cambio véase como no es el que tiene mayor huella de contacto, sino que es el caso cuatro que corresponde con el cilindro de mayor carga pero también de mayor radio. También se puede observar como el caso 1 y caso 4 alcanzan valores de tensiones muy aproximados. Recordemos que el caso 4 está cargado con cinco veces la carga del primero y su radio también es cinco veces mayor. Este tipo de comparaciones son las más interesantes para considerarlas en el diseño de cualquier pieza.

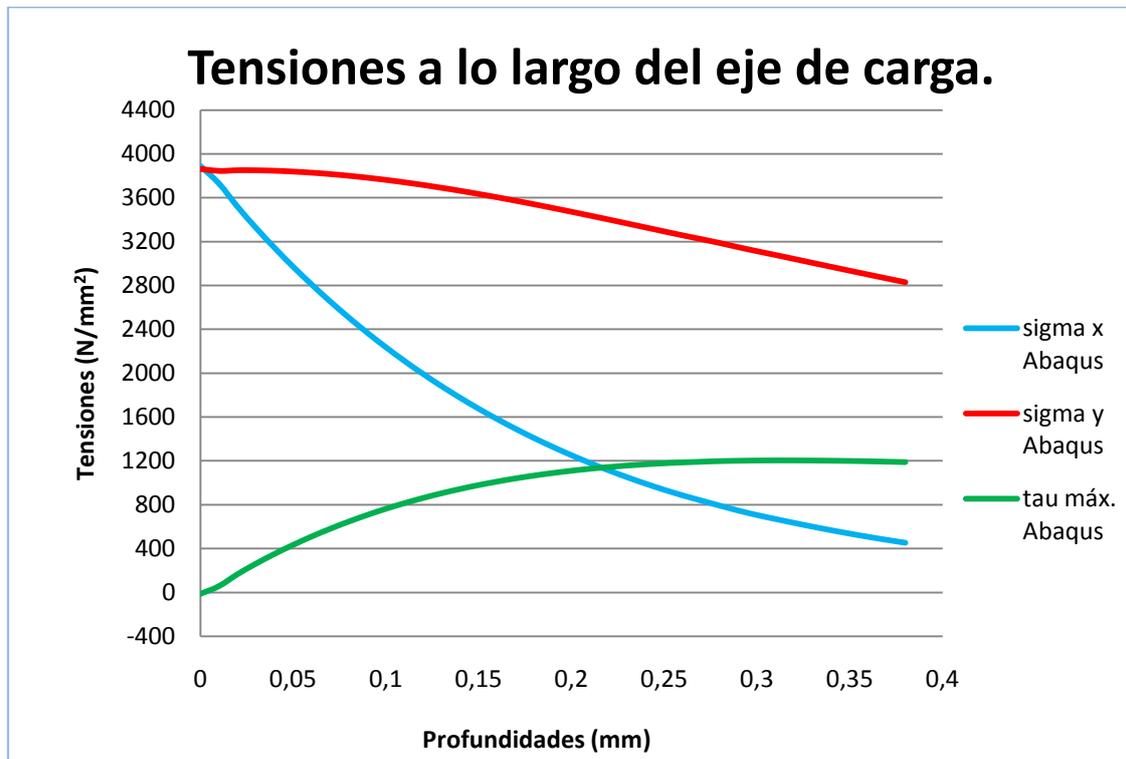
A partir de aquí sólo se trabajará con el caso 2 (RC1-LC2), es decir, el cilindro con menor radio y el más cargado. Se mostrará la variación de algunas magnitudes a lo largo del eje de carga, pero se hará lo propio sobre la superficie y sobre capas a cierta profundidad paralelas a la superficie.

7.A.2.3.2- Tensiones en el eje de carga. RC1-LC2.

Este apartado se centra en el estudio de las tensiones en el eje de carga, ya que se dispone de expresiones analíticas que dan las tensiones a lo largo del mismo y con las

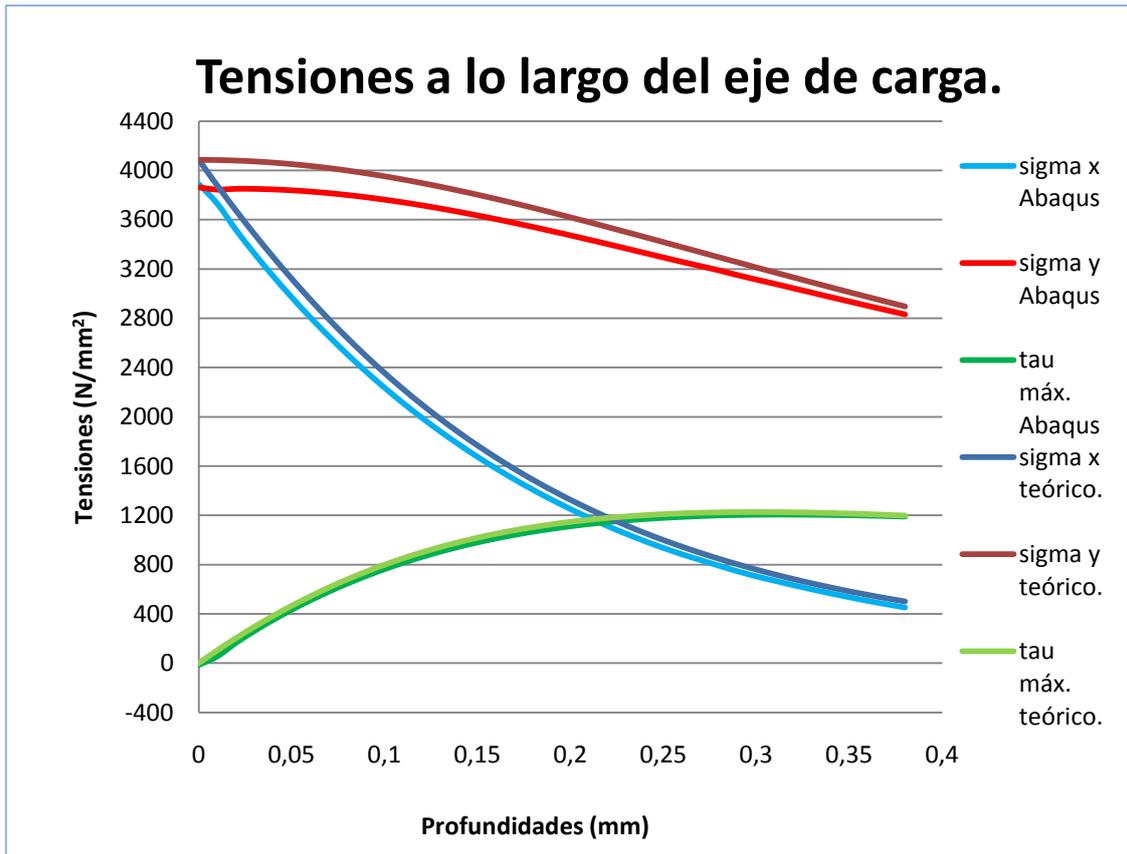
que comparar los resultados obtenidos en nuestro modelo y confirmar si son correctos. Recordemos que en el apartado anterior ya se estudió σ_x y σ_y , a lo largo del eje de carga, pero en este caso también se añadirán las tensiones cortantes máximas.

La gráfica 7.9 muestra la evolución de las tensiones σ_x , σ_y , y $\tau_{m\acute{a}x}$ a lo largo del eje de carga hasta una profundidad aproximada de un semiancho b . Apréciese que tanto σ_x como σ_y toman valores máximos en el punto de contacto, disminuyendo con la profundidad. También se ve con claridad como $\tau_{m\acute{a}x}$ alcanza su valor máximo a una profundidad aproximada de 0.3 mm, cantidad muy aproximada a los $0.75b$ que predice la teoría, pues recordemos que $b = 0.38202$ mm. Dado que σ_x y σ_y son tensiones principales, el valor de $\tau_{m\acute{a}x}$ se encuentra donde la distancia que separa las dos curvas de las tensiones normales es máxima.



Gráfica 7.9: Tensiones σ_x , σ_y y $\tau_{m\acute{a}x}$ calculadas a lo largo del eje de carga. RC1-LC2.

La gráfica 7.10 presenta una comparación entre los valores teóricos y calculados a lo largo del eje de carga. Muestra en conjunto, el gran acuerdo que existe entre las curvas correspondientes.



Gráfica 7.10: Tensiones σ_x , σ_y y $\tau_{m\acute{a}x}$ teóricas y calculadas a lo largo del eje de carga. RC1-LC2.

Conviene recordar que, aunque la teoría de esfuerzos de contacto de Hertz proporciona las tres tensiones normales, el cálculo por elementos finitos efectuado, con la hipótesis de tensión plana, sólo aporta los valores de σ_x y σ_y .

7.A.2.3.3.- Tensiones fuera del eje de carga.

El comportamiento de las tensiones de contacto en la superficie de un cilindro al rodar este sobre un plano es conocido. También cómo se comportan en el interior del propio cilindro en esas condiciones. El mallado utilizado permite obtener de una manera sencilla la distribución de las tensiones en la superficie y en capas internas paralelas a ésta.

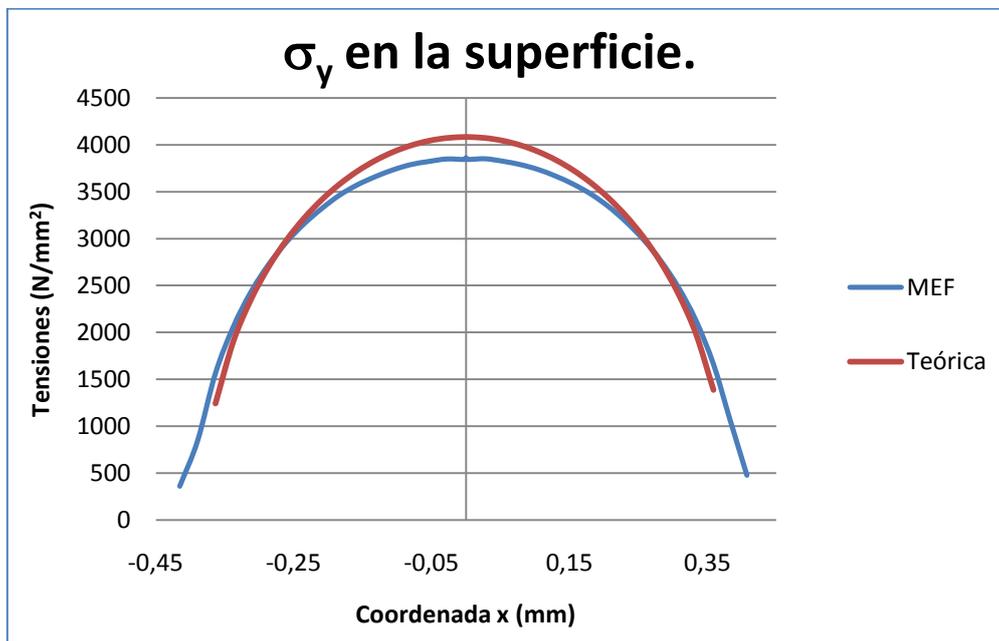
De este modo, es posible comprobar si la distribución de tensiones sobre la superficie de contacto se corresponde con la distribución semi-elíptica que predice la teoría para las tensiones normales a la misma. Además, es interesante observar cómo es la distribución de esfuerzos cortantes y, en particular, comprobar si el máximo se

obtiene a cierta profundidad y fuera del eje de carga y el cambio de signo de un lado a otro del eje.

Se dibujará la distribución de las tensiones normales σ_x y σ_y tanto teórica como calculada MEF a lo largo de la superficie. En cambio sólo se mostrará la distribución calculada de las tensiones de Von Mises y cortantes.

7.A.2.3.3.1.- Tensiones normales σ_y .

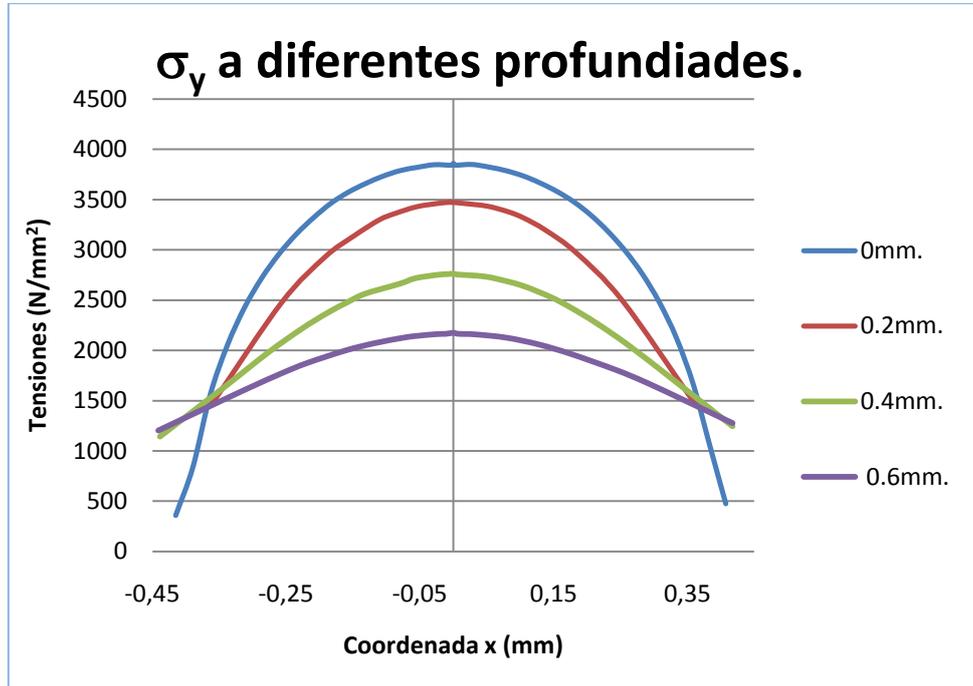
Las gráficas 7.11 y 7.12 permiten analizar si los resultados obtenidos concuerdan o no con la distribución de tensiones semielíptica que predice la teoría. En la gráfica 7.11 se representan las tensiones σ_y obtenidas a lo largo de la superficie del cilindro en la zona de contacto, tanto las teóricas como las calculadas. Se observa perfectamente la forma semielíptica que toma la distribución, siendo simétrica respecto al eje de carga. También se aprecia, al comparar la curva teórica con la calculada, que son muy similares. La mayor discrepancia existe en el punto superior de la curva (donde ocurre $p_{máx}$), pero este es precisamente el punto de contacto inicial, que es un punto singular.



Gráfica 7.11: Tensiones σ_y en la superficie. RC1-LC2.

En la gráfica 7.12 podemos observar qué ocurre con la distribución de tensiones σ_y en capas paralelas a la superficie de contacto, a una cierta profundidad. Nótese como

las cuatro curvas adoptan la forma semielíptica y mantienen la simetría respecto al eje de carga, aunque el valor máximo disminuye conforme aumenta la profundidad.



Gráfica 7.12: Tensiones σ_y a diferentes profundidades. RC1-LC2.

La figura 7.11 nos muestra un gráfico cromático de las tensiones σ_y en la zona de contacto obtenido con Abaqus. Puede verse como las tensiones son muy grandes en la zona de contacto (color rojo) y cómo, no muy lejos de esa zona, decaen rápidamente. También se aprecia la forma semielíptica de la distribución.

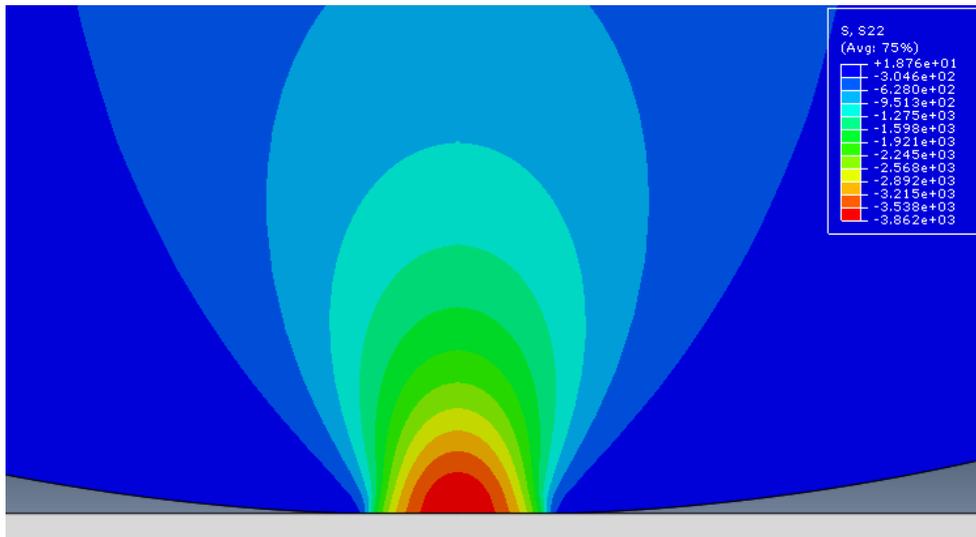
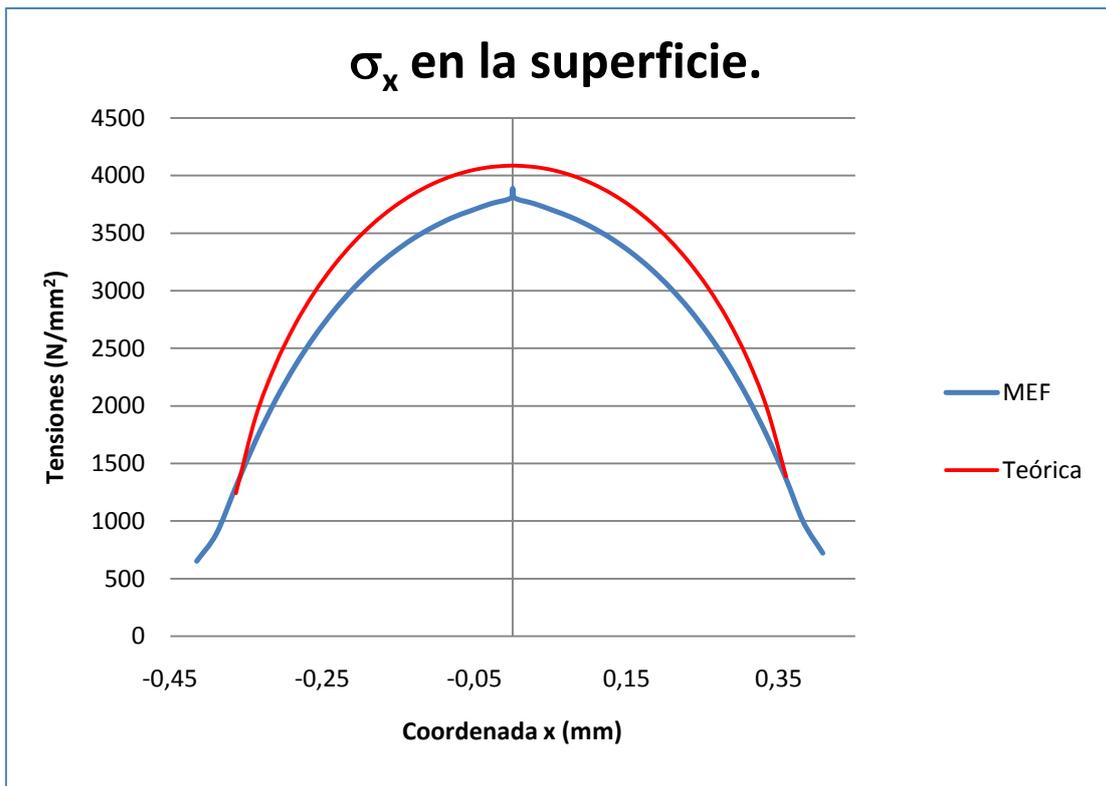


Fig.7.11: Tensiones σ_y próximas a la zona de contacto. RC1-LC2.

7.A.2.3.3.2.- Tensiones normales σ_x .

Analizando la distribución de tensiones σ_x en la superficie de contacto, se confirma que el valor máximo se encuentra en el eje de carga (gráfica 7.13). En el punto inicial de contacto se aprecia una pequeña distorsión. Esto es debido, como ya se ha señalado varias veces, a que ese es un punto muy delicado, con un alto gradiente de tensión en un área muy reducida. Este hecho, sin embargo, no impide que las diferencias entre las tensiones teóricas y calculadas no superen el 5%.

La figura 7.12 muestra la distribución de tensiones σ_x sobre y cerca de la superficie de contacto en la escala cromática. La distribución adopta una forma muy similar a la de las tensiones σ_y . En la figura 7.13 mediante líneas se marcan las zonas de igual valor de la tensión, de modo que así se muestra de una forma más clara la distribución de tensiones σ_x en capas a diferente profundidad,



Gráfica 7.13: Tensiones σ_x en la superficie. RC1-LC2.

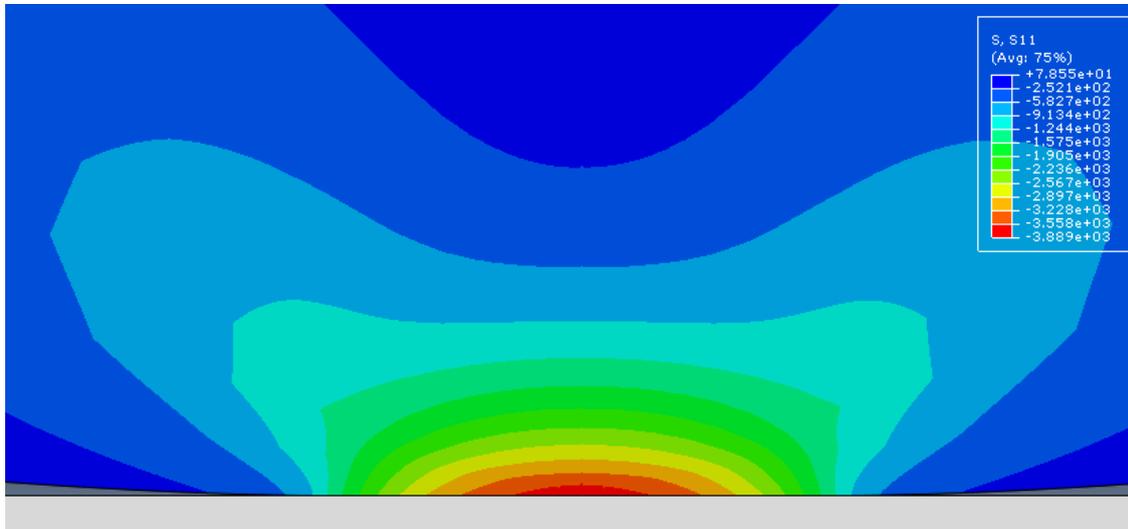


Fig.7.12: Tensiones σ_x próximas a la zona de contacto. RC1-LC2.

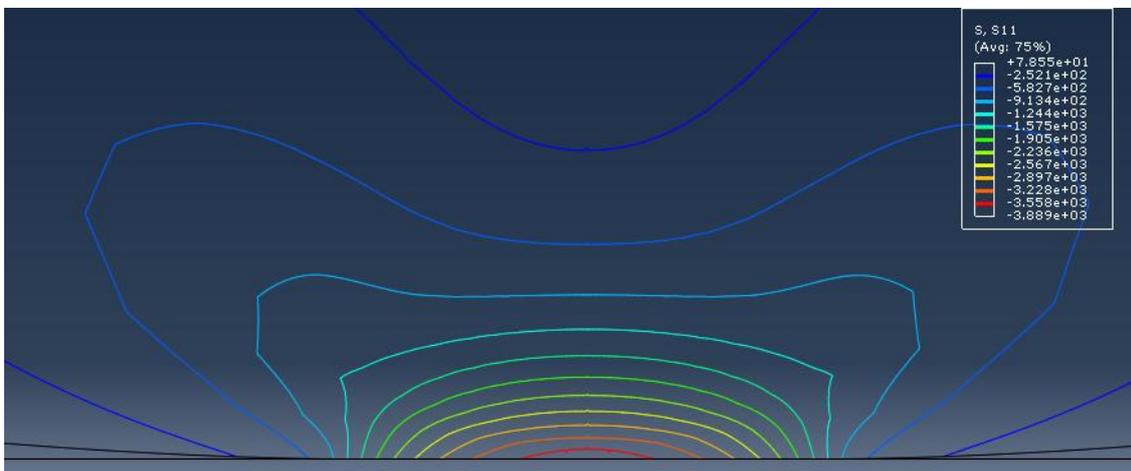
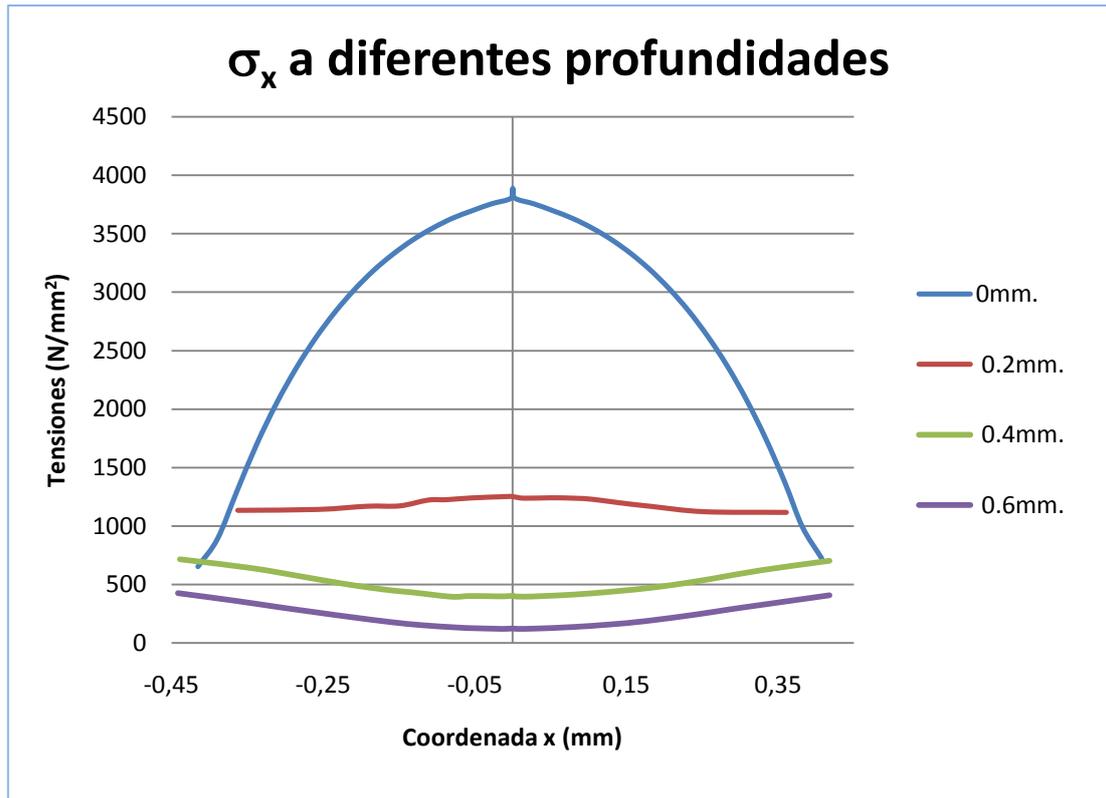


Fig.7.13: Tensiones σ_x próximas a la zona de contacto. RC1-LC2.

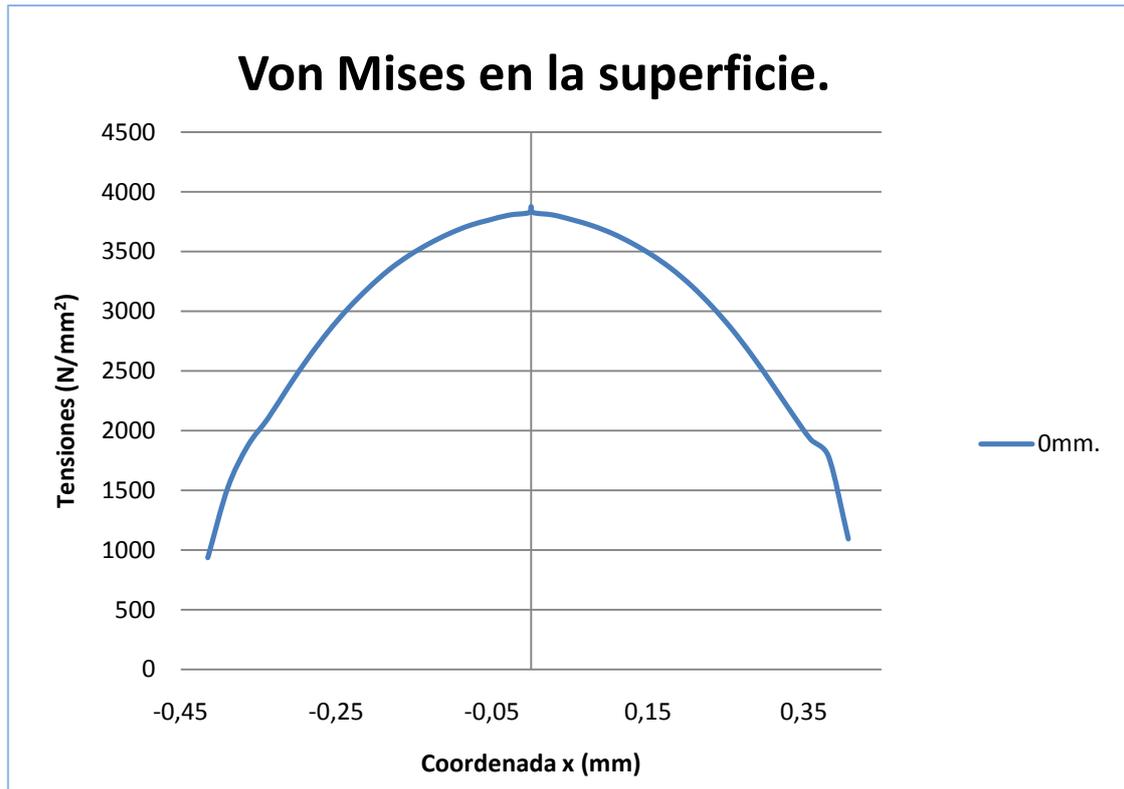


Gráfica 7.14: Tensiones σ_x a diferentes profundidades. RC1-LC2.

La gráfica 7.14 muestra el comportamiento de σ_x en diferentes profundidades. Como se observa, las tensiones disminuyen muy rápidamente conforme se consideran superficies más interiores en el cilindro. Además, a una cierta profundidad, las tensiones σ_x son mayores fuera del eje de carga que en el propio eje, aunque entonces sus valores son relativamente pequeños.

7.A.2.3.3.3.- Tensiones de Von Mises.

Si se analizan las tensiones de Von Mises obtenidas a lo largo de la superficie de contacto, se encuentra de nuevo una distribución semielíptica y, por lo tanto, simétrica respecto al eje de carga, como dice la teoría, La distribución de estas tensiones se ha dibujado en la gráfica 7.15. La figura 7.14 que reproduce la distribución de las mismas tensiones alrededor de la zona de contacto según es proporcionada en escala cromática por Abaqus.



Gráfica 7.15: Tensiones de Von Mises alrededor de la zona de contacto. RC1-LC2.

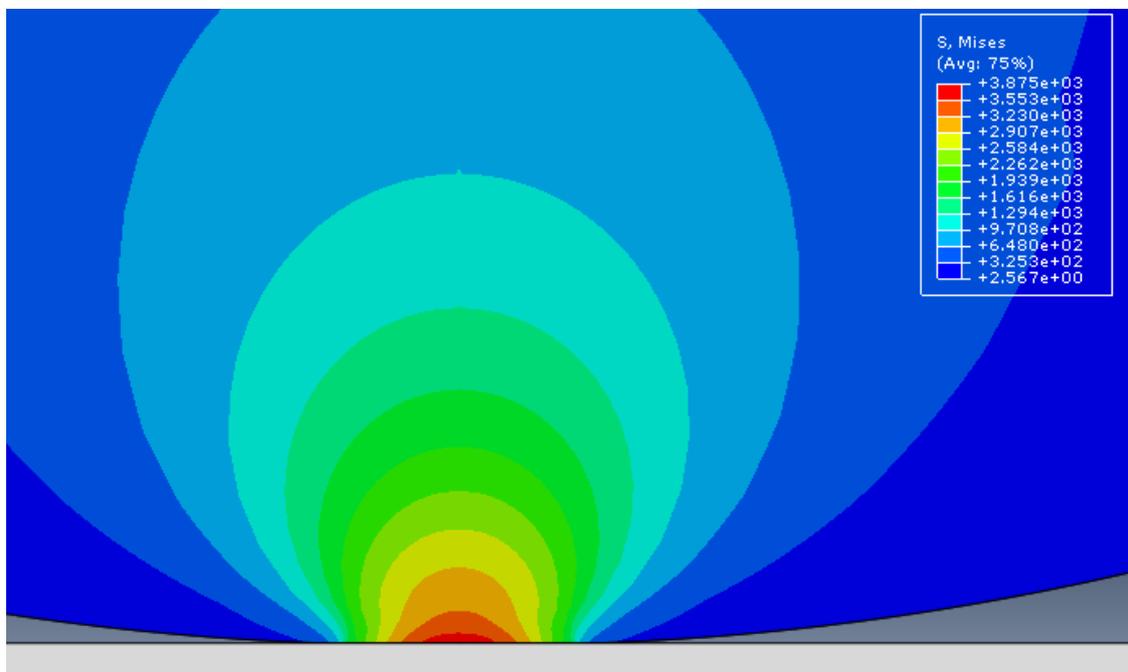
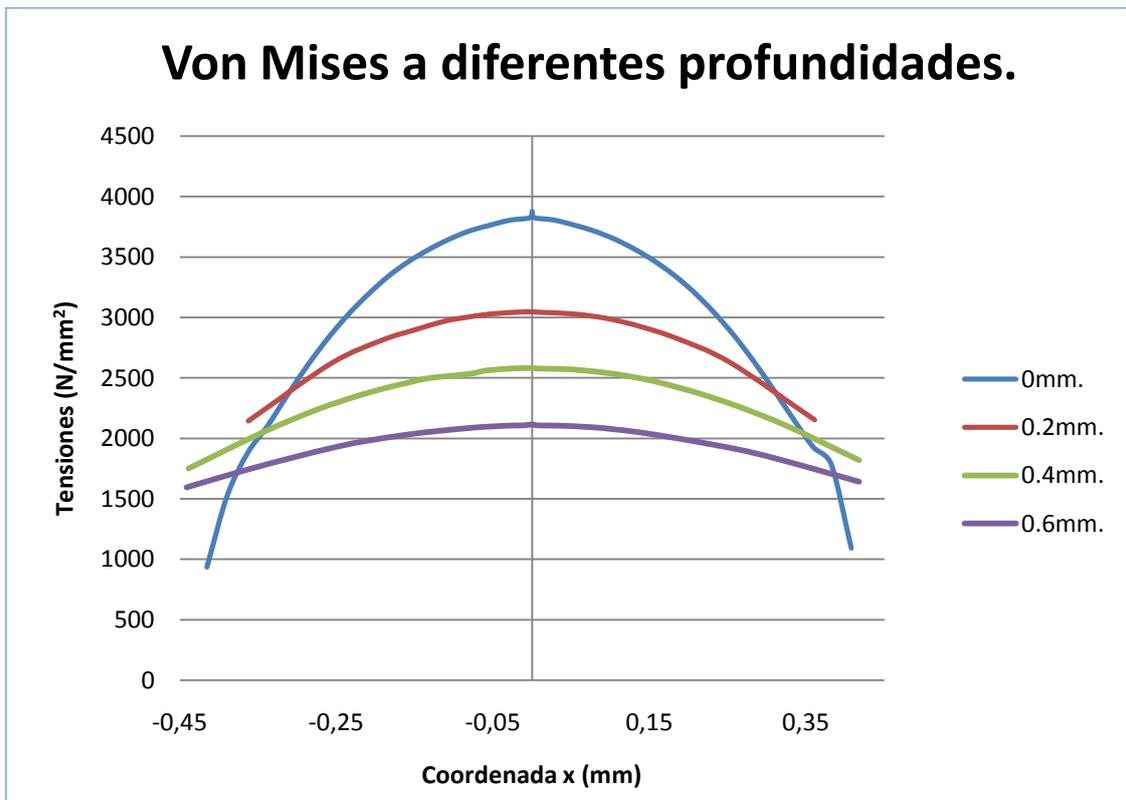


Fig.7.14: Tensiones de Von Mises alrededor de la zona de contacto. RC1-LC2.

Evaluando las tensiones de Von Mises a lo largo de capas interiores paralelas a la superficie de contacto obtenemos los resultados reflejados en la gráfica 7.16, que de nuevo muestran la existencia de una distribución semielíptica, con valores máximos que disminuyen con la profundidad. Fuera del eje de carga, las tensiones en algunos puntos pueden llegar a ser mayores a cierta profundidad que sobre la propia superficie de contacto.

Debe recordarse que, a la hora de calcular las tensiones de Von Mises, en puntos fuera del eje de carga las tensiones normales σ_x y σ_y ya no son tensiones principales.



Gráfica 7.16: Tensiones de Von Mises a diferentes profundidades. RC1-LC2.

7.A.2.3.3.4. Tensiones cortantes τ_{xy} .

La figura 7.15 permite observar la distribución general de las tensiones cortantes τ_{xy} . Se aprecian máximos significativos a una cierta distancia a ambos lados del eje de carga y con cambio de signo. El cambio de signo de τ_{xy} se explica de la siguiente manera: los esfuerzos normales son esfuerzos de compresión a ambos lados del eje, de tal manera que así se respeta la simetría del problema respecto del eje de carga. Sin

embargo, para que los esfuerzos cortantes respeten dicha simetría, τ_{xy} debe tener sentidos contrarios a ambos lados del eje (ver teoría).

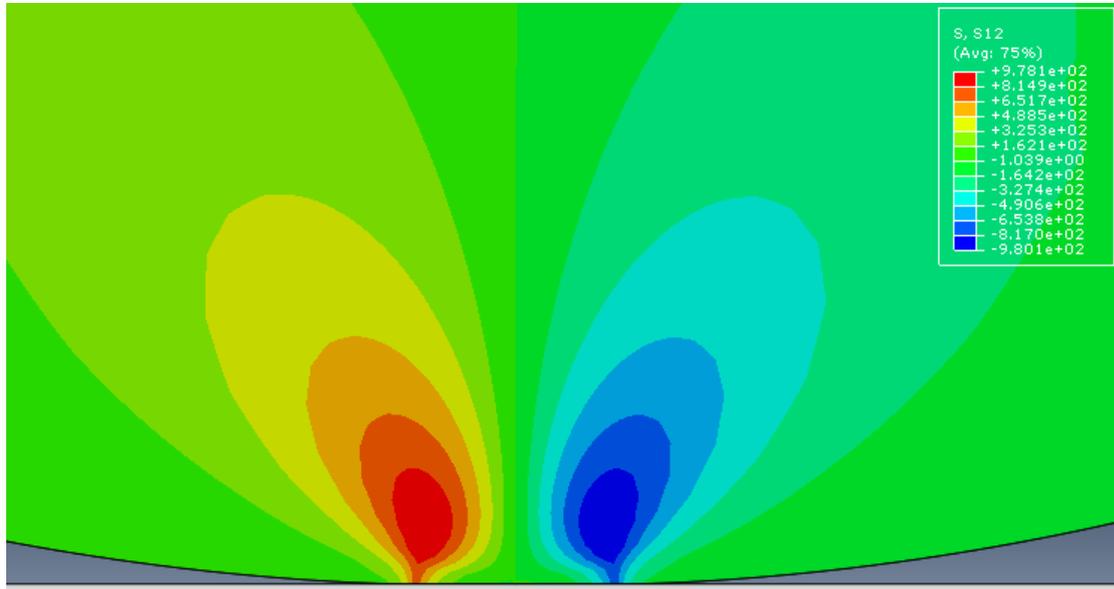
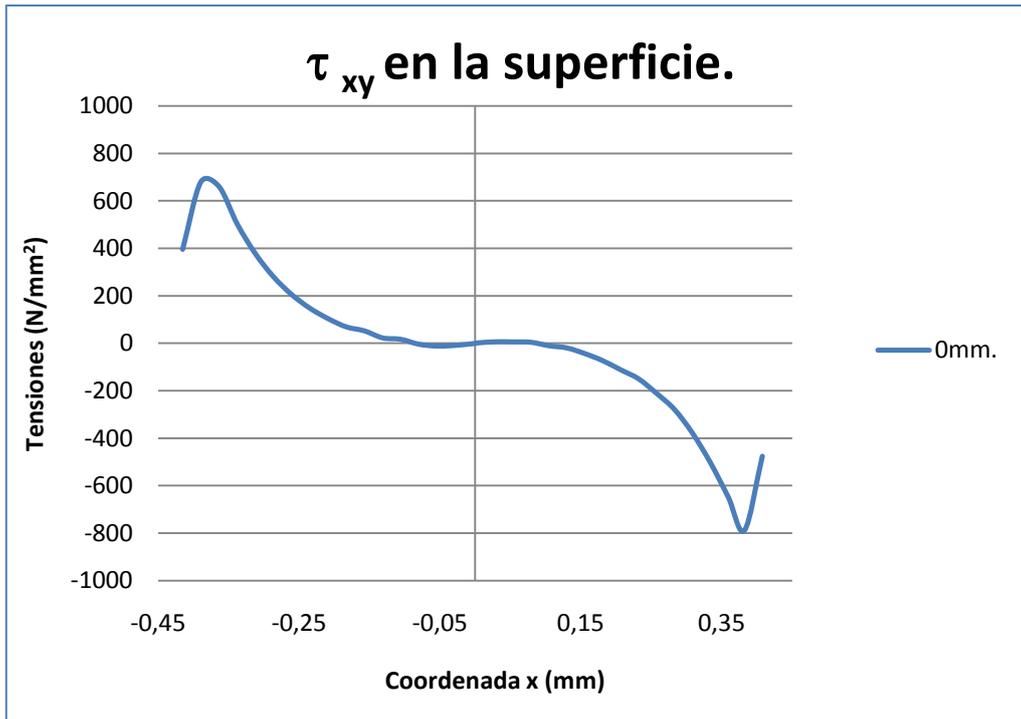


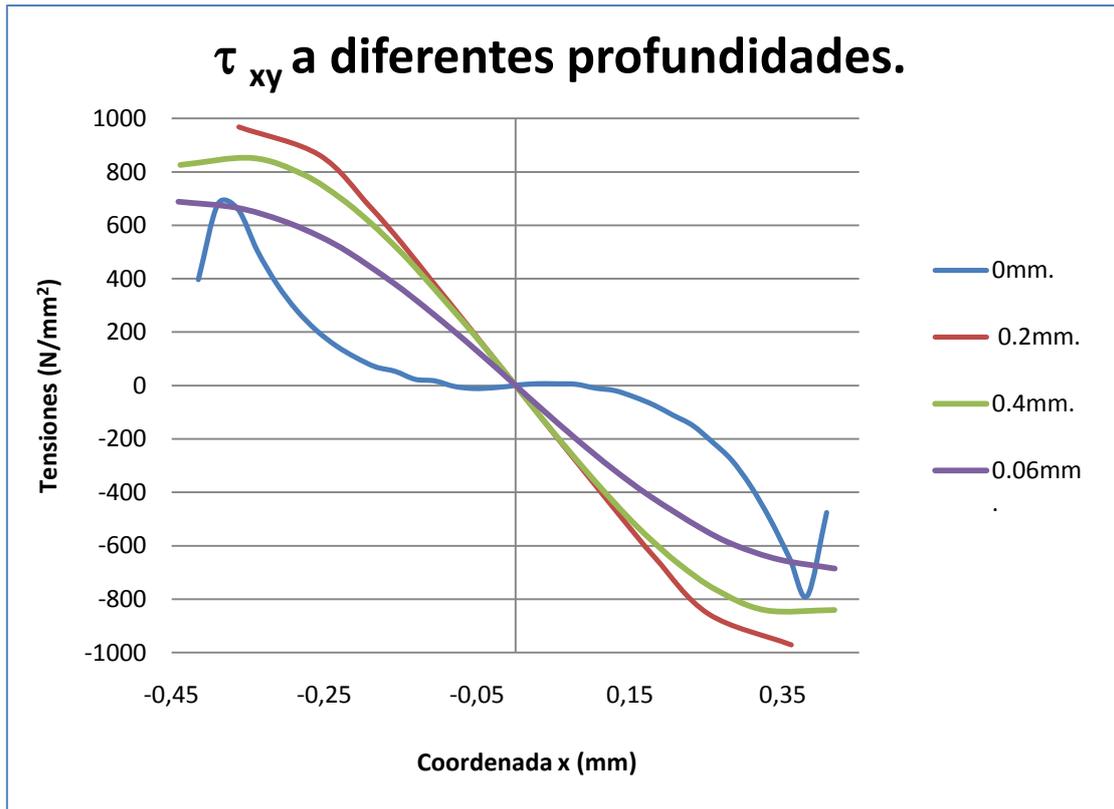
Fig.7.15: Tensiones de τ_{xy} alrededor de la zona de contacto. RC1-LC2.

En el análisis de las tensiones τ_{xy} en la superficie de contacto se aprecia como aparecen máximos, de distinto signo, aproximadamente a una distancia b a ambos lados del eje de carga, como queda reflejado en la gráfica 7.17. También se aprecia la distribución de τ_{xy} es igual a un lado y al otro del eje de carga, simplemente varía el signo de misma.



Gráfica 7.17: Tensiones τ_{xy} en la superficie. RC1-LC2.

Analizando las tensiones τ_{xy} en capas interiores paralelas a la superficie de contacto, encontramos los valores máximos de τ_{xy} a una distancia del eje de aproximadamente 0.36 mm, valor muy aproximado al del semiancho b , y a una profundidad de 0.2 mm, que es aproximadamente $0.5b$, tal y como predice la teoría. Estos resultados se deducen de la gráfica 7.18. La curva roja es la correspondiente a la profundidad de 0.2 mm. El valor máximo obtenido tiene un valor aproximado de 970 N/mm², este resulta ser el máximo absoluto del campo de tensiones τ_{xy} en el cilindro. El valor de 970 N/mm² es casi $0.24 p_{máx}$, tal y como anticipa la teoría.



Gráfica 7.18: Tensiones τ_{xy} a diferentes profundidades. RC1-LC2.

El cambio de signo y la simetría hacen que las tensiones sean cero sobre el eje de carga.

Como se señaló en la teoría, el valor máximo de las tensiones τ_{xy} y su inversión del sentido a ambos lados del eje de carga son el origen de un fenómeno de fatiga de gran importancia en el diseño de la pieza.

7.A.3- RESUMEN Y CONCLUSIONES.

Se ha modelizado y analizado un problema tridimensional utilizando las técnicas basadas en las propiedades de los elementos planos que nos han permitido reducir el mismos a un problema bidimensional.

Se ha utilizado un método de análisis sencillo, como es el análisis estático, aunque con la inclusión de efectos no lineales en las deformaciones, para estudiar un problema complejo como es el de las tensiones de contacto. En general, hemos

comprobado que este análisis relativamente sencillo por elementos finitos usando el programa Abaqus proporciona una muy buena aproximación a las variables geométricas (semiancho de huella) y tensiones involucradas en el problema.

El semiancho de huella b , para un caso de carga de 49000 N y un radio de 10 mm, ha sido calculado casi exactamente, con un error relativo del 0.058%.

Las tensiones calculadas en el eje de carga en los cuatro casos se han obtenido con una muy buena aproximación en relación con las teóricas, con errores relativos como máximo del 5%. Otros resultados, como la profundidad a la que se debía encontrar la tensión cortante máxima, refuerzan la idea de la buena aproximación encontrada a través del uso del método de los elementos finitos.

Para las tensiones fuera del eje de carga se han obtenido valores y distribuciones de tensiones que parecen lógicos. Se han podido comparar, además, las tensiones normales σ_x y σ_y dando resultados muy aproximados con los teóricos.

Los valores máximos de las tensiones normales se han obtenido en el eje de carga, de acuerdo con lo que predice la teoría. Señalemos que estos son los valores más importantes a tener en cuenta en el diseño de la pieza. Además, las razones entre los máximos calculados coinciden casi exactamente con las razón teórica (igual a 1), siendo el cociente más desfavorable 0.98.

Se ha comprobado que los máximos absolutos de las tensiones cortantes τ_{xy} se encuentran fuera del eje de carga a una distancia de un semiancho b , y alejados de la superficie de contacto una profundidad de $\frac{1}{2} b$, todo ello conforme a lo predicho por la teoría.

En general estas conclusiones muestran la potencia del método de elementos finitos a la hora de resolver este tipo de problemas.

7.B) PROBLEMA DINÁMICO (CON ROZAMIENTO).

7.B.1- INTRODUCCIÓN.

Hasta ahora el problema se ha centrado en el análisis de las tensiones en un cilindro apoyado sobre un plano rígido, pero sin ningún tipo de deslizamiento entre una superficie y otra. En esta última parte del problema se estudiará qué ocurre cuando hay deslizamiento y se introduce una fuerza de fricción $f_{máx}$ entre ambas superficies.

El esquema del problema es similar al anterior en lo que a geometría se refiere. En esta apartado sólo se estudiará un caso. Se aplican las hipótesis bidimensionales de la elasticidad, trabajando en tensión plana de nuevo. En estas condiciones, el problema tiene una complejidad bastante elevada, por lo que no se han podido alcanzar todos los resultados que se hubieran deseado. Se mostrarán los cambios que se producen en las distribuciones de tensiones al introducir el rozamiento.

Las tensiones, ahora, no son simétricas respecto con el eje de carga (véase teoría). Esta es una característica que señalaremos más adelante. Por otro lado, observaremos cómo las tensiones cortantes ya no tienen el mismo valor absoluto a un lado y al otro del eje de carga, siendo la diferencia entre un pico y otro de $0.5p_{máx}$, como se explicó al respecto en el apartado teórico.

Las tensiones normales serán una suma de las tensiones producidas por la fuerza de compresión, más las tensiones producidas por la fuerza de fricción.

Mostramos algunas de las fórmulas más importantes:

Las tensiones en la zona de contacto están dadas por:

$$\sigma_{x_n} = -p_{máx} \sqrt{1 - \frac{x^2}{b^2}} \quad \text{o bien} \quad \sigma_{x_n} = 0$$

$$\sigma_{y_n} = \sigma_{x_n}$$

$$\tau_{xy_n} = 0$$

$$\sigma_{x_t} = -2f_{m\acute{a}x} \frac{x}{b} \quad \text{donde} \quad f_{m\acute{a}x} = \mu p_{m\acute{a}x}$$

$$\sigma_{y_t} = 0$$

$$\tau_{xy_t} = -f_{m\acute{a}x} \sqrt{1 - \frac{x^2}{b^2}} \quad \text{o bien} \quad \tau_{xy_t} = 0$$

La suma de las dos componentes antes expresadas da la tensión total que aparecerá en el cilindro para un caso con rozamiento, por lo que se tiene:

$$\sigma_x = \sigma_{x_n} + \sigma_{x_t}$$

$$\sigma_y = \sigma_{y_n} + \sigma_{y_t}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xy_n} + \tau_{xy_t}$$

7.B.2- MODELADO DEL PROBLEMA CON ELEMENTOS FINITOS.

7.B.2.1- Preproceso.

En este apartado nos limitaremos a explicar los cambios que se han tenido que introducir en Abaqus respecto de la primera parte del problema.

En los módulos “Part”, “Assembly”, “Mesh” y “Job” no se ha hecho ningún cambio. Se ha trabajado con las condiciones del caso 1. Recordemos que se representa una sección transversal en el plano XY, siendo el eje X el horizontal y el eje Y el vertical.

En el módulo “Step” se ha tenido que cambiar el tipo de paso o cálculo: necesariamente se ha elegido un cálculo dinámico, lo cual ha obligado a introducir la densidad en el módulo “Property”.

En el módulo “Load” se han introducido dos cambios importantes. El primero de ellos, ha sido eliminar la restricción de movimiento del eje de carga del cilindro, pues ahora incluimos deslizamiento. Por otro lado, se ha cambiado el valor de la carga, con el objeto de lograr una mejor transmisión de la misma en las condiciones dinámicas del problema.

Se han buscado unas condiciones de gravedad y densidad en el cilindro que dieran lugar a una presión máxima $p_{m\acute{a}x}$ de valor muy parecido al que se tenía en el caso correspondiente sin rozamiento. Aun con todo, como se verá más adelante, no se han obtenido unos resultados tan aproximados cuantitativamente a los anticipados por la teoría, aunque cualitativamente son razonables.

Por último, para conseguir el deslizamiento se ha introducido una velocidad de traslación rectilínea, el valor no es relevante, su objetivo es simplemente que entre en acción la fuerza de rozamiento.

En el módulo “Interaction” se ha introducido un coeficiente de fricción μ de valor 0.33. El resto se mantiene como en la primera parte del problema.

A continuación, se estudiará de una manera cuantitativa y cualitativa qué ocurre al introducir el deslizamiento entre una superficie y otra.

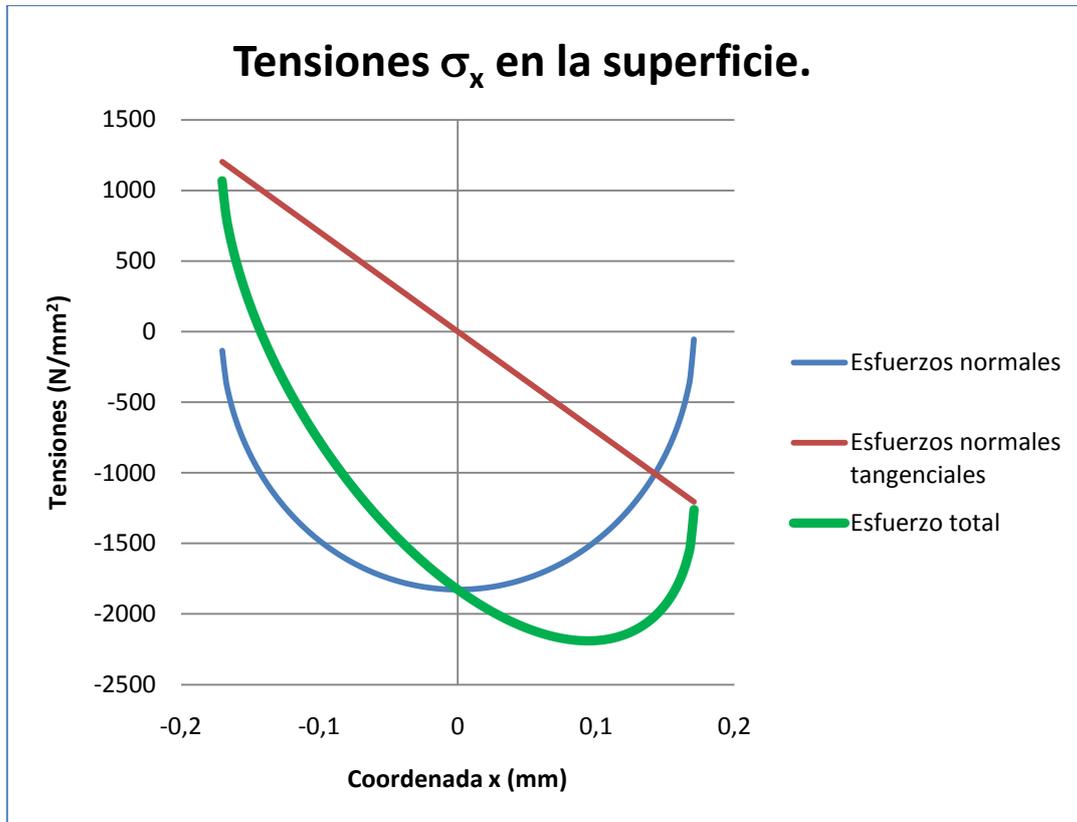
7.B.2.2- Postproceso.

Una vez que mediante Abaqus se han hecho los cálculos, se analizan los resultados, fundamentalmente, las distribuciones de tensiones en el cilindro.

7.B.2.2.1- tensiones normales σ_x .

Se trabajará sobre la superficie de contacto, ya que las expresiones teóricas nos dan la variación de las tensiones en esta zona. En la gráfica 7.19 aparece la distribución de tensiones de las dos contribuciones a σ_x (normal debida a la carga de compresión y tangencial debida al rozamiento) y su suma que da el valor total, según resultan de aplicar la teoría. En azul la curva que se analizó en el cilindro sin rozamiento, es decir, la distribución semielíptica y totalmente simétrica respecto al eje de carga. En color rojo aparece la tensión normal σ_x producida por la fricción a consecuencia del deslizamiento. Obsérvese que se trata de una línea recta. Por último, en verde la distribución de tensiones totales. Nótese como el máximo se ha desplazado fuera del eje de carga y se

ha roto la simetría con respecto al mismo. Recordemos que esta última curva es suma de las otras dos. Las distribuciones se han representado sobre el semiancho b .



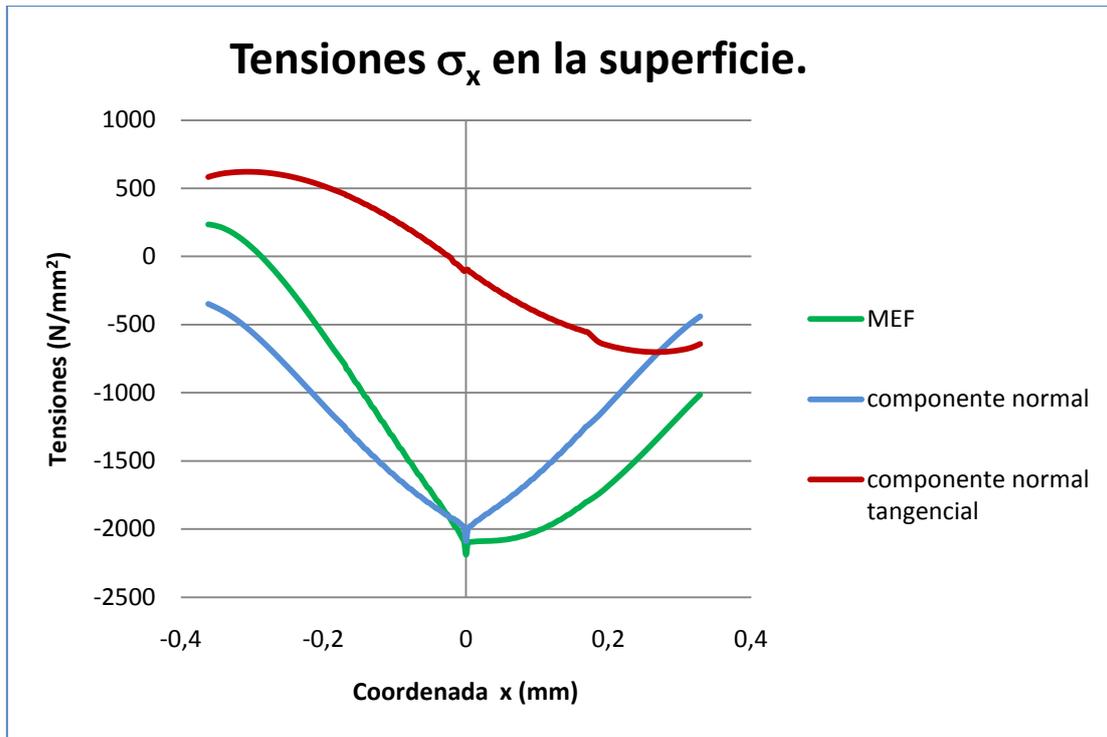
Gráfica 7.19: Componentes y tensión total de la distribución de tensiones σ_x .

En la gráfica 7.20 se muestran los resultados que se han obtenido mediante Abaqus con los parámetros introducidos. Recordemos que, aunque parecidas, las condiciones de trabajo no son exactamente las mismas que las correspondientes a las gráficas teóricas de la gráfica 7.19.

Se han representado (gráfica 7.20) las distribuciones de las contribuciones a σ_x sobre la superficie de contacto, y la suma de ambas.

La contribución de la fuerza normal a σ_x (en azul) mantiene la simetría y se parece a la curva teórica. La curva en color verde corresponde al valor total de σ_x , y también es similar a la teórica. Cambia de signo en uno de sus extremos, y presenta una asimetría característica respecto del eje de carga. Hay cierta distorsión en el punto inicial de contacto sobre el eje de carga debido a la singularidad de dicho punto, como ya se señalado en otras ocasiones.

La contribución a σ_x del rozamiento (en rojo) se ha obtenido restando del valor total la contribución normal. Se aproxima a una recta tal como cabría esperar teóricamente. También se hace cero en un punto muy próximo al eje de carga (es decir, en el punto inicial de contacto), punto donde la teoría marca que debe ocurrir.



Gráfica 7.20: Componentes y tensión total de la distribución de tensiones σ_x calculadas mediante MEF.

La figura 7.16 que aparece a continuación, compara con los gráficos cromáticos la distribución de tensiones en un cilindro con y sin fricción. Se aprecia claramente la distorsión que se ha producido en la distribución como consecuencia del deslizamiento con rozamiento.

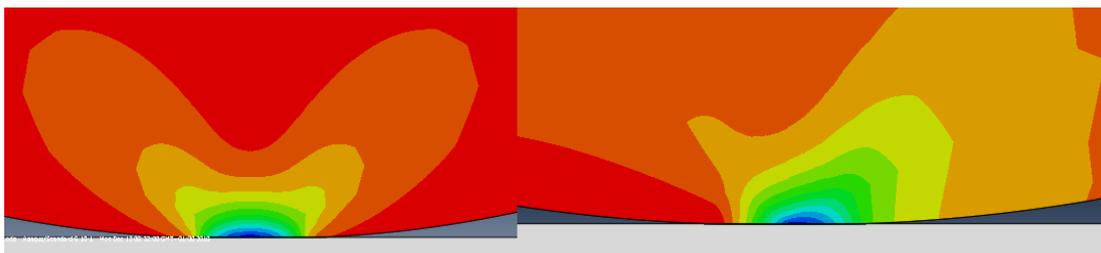
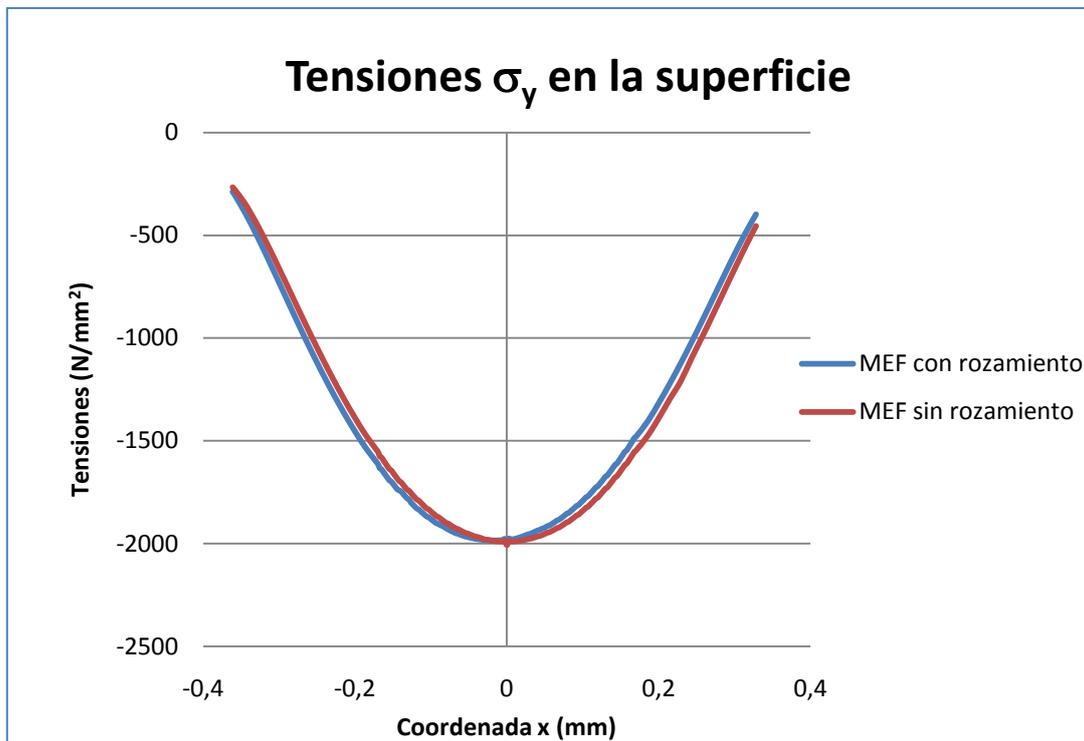


Fig.7.16: Tensiones σ_x en la zona de contacto. Izquierda sin rozamiento. Derecha introducción de rozamiento.

7.B.2.2.2- Tensiones normales σ_y .

En esta componente de la tensión normal no hay contribución debida a la fuerza tangencial, por lo que no cambian aunque se introduzca rozamiento. Esto quiere decir que la curva de la distribución de tensiones σ_y debe ser la misma con o sin rozamiento. Esta circunstancia queda reflejada en la gráfica 7.21. En ella se han dibujado las distribuciones de tensiones σ_y calculadas vía MEF con rozamiento y sin rozamiento sobre la superficie de contacto para el semiancho b a cada lado del eje de carga. Existe una gran coincidencia entre ambas curvas.



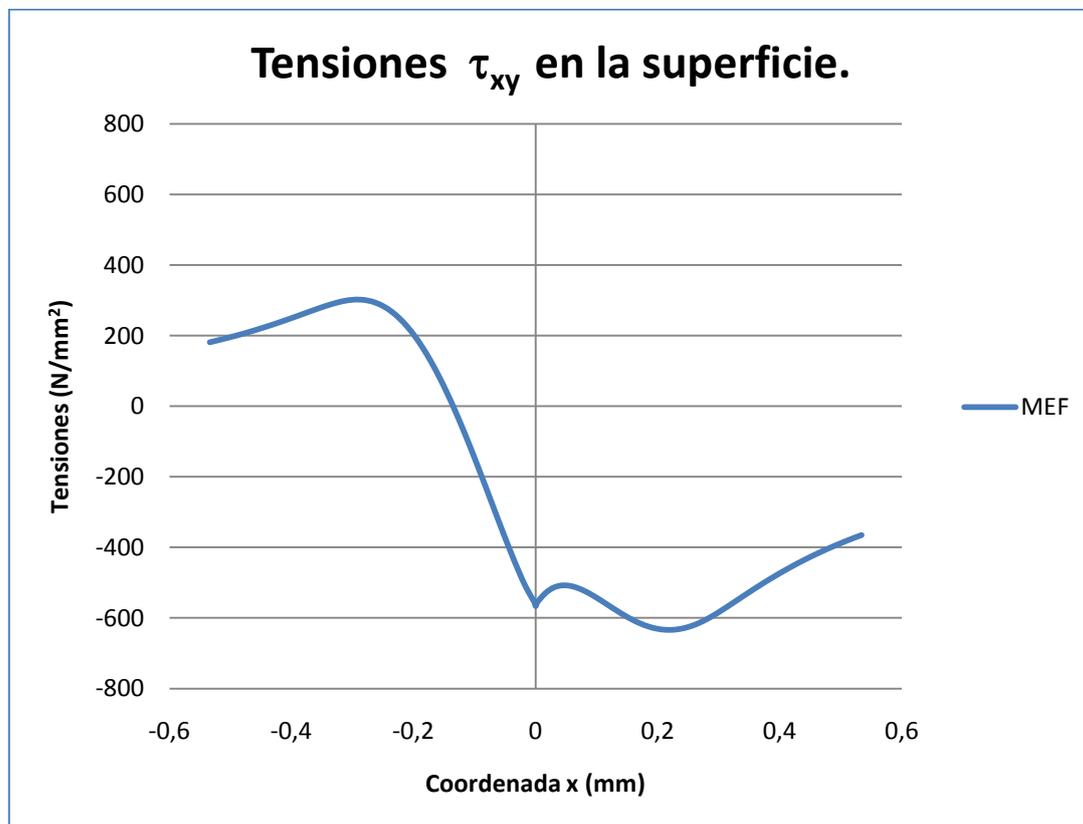
Gráfica 7.21: Distribución de tensiones σ_y sobre la superficie con y sin rozamiento.

7.B.2.2.3- Tensiones cortantes τ_{xy} .

A continuación, se presentan algunos resultados obtenidos para las tensiones cortantes cuando se tiene en cuenta el efecto del rozamiento. Se presenta en la gráfica 7.22 la distribución de tensiones cortantes τ_{xy} sobre la superficie de contacto sobre un semiancho b a cada lado del eje de carga, según resulta del cálculo por elementos finitos.

En las gráficas 7.20 y 7.21, el máximo de las tensiones σ_x y σ_y se encuentra alrededor de 2000 N/mm^2 , es decir, la presión máxima en el cilindro vale $p_{m\acute{a}x} = 2000 \text{ N/mm}^2$. Si se calcula la diferencia entre el máximo y el mínimo de τ_{xy} en la gráfica 7.22 resulta un valor aproximado de 1000 N/mm^2 , es decir, $0.5p_{m\acute{a}x}$. Este valor de $0.5p_{m\acute{a}x}$ es el que la teoría predice para cualquier valor del coeficiente de rozamiento.

Sin rozamiento, τ_{xy} alcanzaba el mismo valor absoluto a un lado y al otro del eje de carga, variando únicamente su signo. Ahora, con rozamiento, la distribución de τ_{xy} muestra una asimetría característica, ya no toma el mismo valor máximo, en valor absoluto, en ambos lados del eje de carga y tampoco se hace cero sobre el mismo eje.



Gráfica 7.22: Distribución de tensiones cortantes τ_{xy} calculadas sobre la superficie.

En la figura 7.17 se presenta la distribución de tensiones τ_{xy} de manera cromática alrededor de la zona de contacto. En la parte izquierda se muestra la distribución de tensiones sin rozamiento (coincide con la Fig.7.15), y en la parte derecha lo que ocurre

al introducir el rozamiento. Se observa claramente como, al introducir una fuerza tangencial debida al rozamiento, la simetría de la distribución se ha roto.

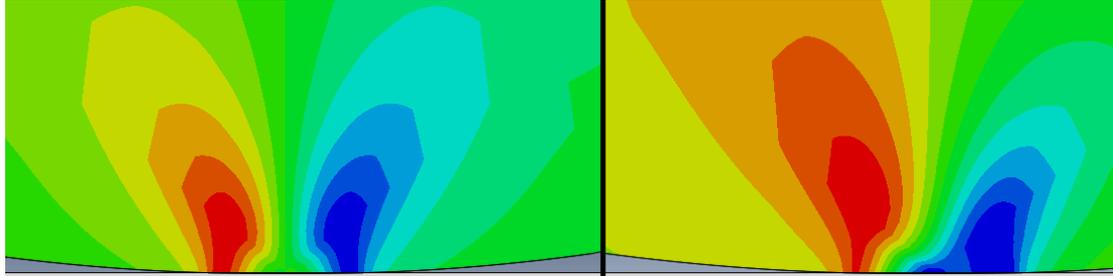


Fig.7.17: Comparación entre el caso sin rozamiento y con rozamiento para las tensiones cortantes τ_{xy} .

7.B.3- RESUMEN Y CONCLUSIONES.

Hemos de señalar que, aunque algunas de las condiciones que definen la dinámica del problema no se han sabido tratar convenientemente a través de las opciones de cálculo que ofrece el programa Abaqus, se ha llegado a un grado de acuerdo cualitativo con la teoría bastante aceptable, cuando sobre el cilindro se han considerado los efectos de una fuerza de rozamiento.

Se ha encontrado que las contribuciones normal y tangencial y el valor total de σ_x , se distribuyen sobre la zona de contacto de forma similar a lo previsto por la teoría. Se ha comprobado que la contribución tangencial, que resulta de restar al total la contribución normal, da lugar aproximadamente a una distribución en forma de recta, resultado coherente con la teoría. Además, la tensión total σ_x con rozamiento presenta una distribución que no es simétrica respecto al eje de carga, como debe ser debido al efecto de la fuerza tangencial de fricción.

Las tensiones normales σ_y no deben de cambiar pues el rozamiento no afecta a este tipo de tensiones. Se ha visto cómo las curvas que representan la distribución de σ_y tanto con rozamiento como sin rozamiento son coincidentes, y ambas simétricas y de forma semi-elíptica (tal como dice la teoría).

La última magnitud estudiada ha sido la tensión cortante τ_{xy} . Cabe destacar dos resultados interesantes. Por un lado, el máximo en valor absoluto a un lado y a otro del

eje de carga ya no coinciden. Por otro, se ha encontrado un acuerdo numérico muy significativo, a saber, la diferencia entre el máximo y mínimo en la curva de la distribución de tensiones cortantes τ_{xy} es aproximadamente 1000 N/mm^2 , lo que coincide con $0.5p_{m\acute{a}x}$, relación que es exactamente la que la teoría predice.

CONCLUSIONES.

CONCLUSIONES.

Utilizando el método de los elementos finitos, se han resuelto tres problemas propios del cálculo de elementos de máquinas caracterizados todos ellos por tratarse de geometrías cilíndricas. Concretamente:

- Cilindros a presión (de pared delgada y gruesa).
- Concentración de tensiones en elementos cilíndricos.
- Tensiones de contacto en un cilindro sobre un plano rígido (caso estático y dinámico).

De los resultados alcanzados se concluye que se han encontrado niveles de aproximación muy buenos con respecto a los que proporcionan las correspondientes teorías. En la mayoría de los casos no se han superado errores relativos del 5%. Para la visualización de todos los resultados se han dibujado multitud de gráficas y comparando curvas teóricas con calculadas. Se han presentado también multitud de tablas con errores relativos y resultados numéricos.

El programa utilizado ha sido Abaqus. Resulta muy adecuado para la aplicación del MEF a la resolución de problemas de análisis de tensiones y deformaciones, pues cuenta con infinidad de opciones y variables de modo que puede aplicarse a cálculos estáticos, dinámicos, con materiales de diferente comportamiento, etc.

El trabajo realizado me ha ayudado a profundizar en los contenidos de las asignaturas de Resistencia de Materiales y Diseño de Máquinas cursadas en la titulación de Ingeniero Técnico Mecánico.

Por otra parte, este proyecto ha servido para iniciarme en el conocimiento tanto teórico como práctico del método de los elementos finitos, de tanta importancia hoy en día en el campo de la Ingeniería Mecánica. Me ha permitido, además, iniciarme en el manejo de un programa informático para la resolución de problemas mediante la aplicación del método de los elementos finitos como es Abaqus.

BIBLIOGRAFÍA.

BIBLIOGRAFÍA.

- Diseño de máquinas.

Rober L. Norton.

- Introducción a Abaqus/Standard y Abaqus/Explicit.

Simulia.

- Ayuda del programa Abaqus/ CAE 6.10-1 disponible en el siguiente link:

[http://127.0.0.1:2080/v6.10/books/usi/default.htm?startat=ap01s01.html#usi-kwb-browser.](http://127.0.0.1:2080/v6.10/books/usi/default.htm?startat=ap01s01.html#usi-kwb-browser)

- Es.wikipedia.org

- Diseño en ingeniería mecánica.

Joseph E. Shigley y Charles R. Mischke.