PROYECTO DE INNOVACIÓN DOCENTE ALGFISEEE: Adaptación de materiales docentes y establecimiento de sistemas tutoriales para la docencia de las asignaturas de Álgebra lineal y Geometría del Grado en Físicas

Memoria Final

Gloria Serrano Sotelo
Daniel Hernández Serrano
José Ignacio Iglesias Curto
Darío Sánchez Gómez

28 de junio de 2012

Índice general

El proyecto ALGFISEEE: *Adaptación de materiales docentes y establecimiento de sistemas tutoriales para la docencia de las asignaturas de Álgebra lineal y Geometría del Grado en Físicas* se ha desarrollado con normalidad en el ámbito de actuación de las asignaturas "Álgebra Lineal y Geometría I" y "Algebra Lineal y Geometría II"del primer curso del Grado en Físicas. La experiencia recogida durante la ejecución de este proyecto ha ayudado al equipo docente implicado a mejorar, tanto el desarrollo de las mismas como a considerar propuestas de cambio en sus programaciones, perfilando y mejorando tanto los contenidos, como las competencias y habilidades con el fin de garantizar su consecución. Se pretende conseguir que el alumno adquiera, entre otras competencias que citaremos a lo largo de esta memoria, la siguiente competencia básica del módulo Métodos Matemáticos de la Física recogida en la memoria de Grado en Física por la Universidad de Salamanca:

CB-5: Haber desarrollado aquellas habilidades de aprendizaje necesarias para emprender estudios posteriores en Física con un alto grado de autonomía.

El desarrollo y ejecución del proyecto se ha articulado sobre tres ejes de actuación que enunciamos ahora y analizaremos a continuación:

- Organización de actividades tutoriales presenciales y tutorías on-line a través de la plataforma Moodle y el correo electrónico. La tutorías presenciales serán tanto individuales, con una periodicidad semanal, como en pequeños grupos y con una periodicidad quincenal.

- Actualización y mejora de los contenidos teórico-prácticos que el equipo docente posee en STUDIUM y difunde a través de la iniciativa OCW, así como de los sistemas de evaluación on-line a través de la plataforma STUDIUM.

- Diseño y organización de actividades prácticas para las asignaturas "Álgebra Lineal y Geometría I" y "Álgebra Lineal y Geometría II"del primer curso del Grado en Físicas, utilizando paquetes de cálculo gráfico y simbólico (MATHEMATICA) y procesadores de textos científicos (LaTeX).

Capítulo 1

Actividades tutoriales.

El primer objetivo de este proyecto de innovación docente ha sido la organización de actividades tutoriales presenciales y online. Uno de los motivos principales era facilitar a los alumnos un entorno más personalizado en el que pudieran manifestar y resolver sus dudas e inquitudes acerca de la asignatura, para obtener como resultado final su mayor implicación y participación en el desarrollo del curso, favoreciendo la colaboración y el trabajo en grupo.

Las tutorías presenciales se han realizado tanto a nivel personal como en grupos reducidos de estudiantes con frecuencia semanal en el primer caso y quincenal en el segundo. Las personales han consistido, fundamentalmente, en resolver dudas puntuales de los estudiantes acerca de la materia dada. Para la programación de actividades tutoriales en grupos reducidos se han propuesto cuestiones formativas de carácter teórico y práctico sobre el tema que se estaba estudiando. Estas cuestiones formaban parte de los documentos que estaban a disposición de alumnos en la plataforma Moodle, con la antelación suficiente para poder fomentar el debate, la participación y el trabajo en grupo. Además, se han dedicado sesiones tutoriales a debatir con los estudiantes la marcha del curso, lo que nos ha permitido adaptar el desarrollo de la asignatura a las necesidades específicas del grupo.

Las primeras tutorías, tanto individuales como en grupo, sirvieron de sesiones de apoyo y refuerzo, y en ellas se repasaron los conocimientos previos necesarios para el correcto desarrollo de las asignaturas.

Se han realizado también numerosas tutorías online a través de la plataforma Moodle y fundamentalmente vía e-mail. Estas tutorías se han utilizado para resolver dudas concretas que surgían principalemente durante la elaboración de los problemas por Temas y los trabajos propuestos a lo largo del curso o la preparación de la pruebas presenciales de la asignatura. También se crearon foros de discusión en STUDIUM con el fin de que los estudiantes pudieran debatir cualquier aspecto de la asignatura entre ellos y con sus profesores.

Dado que estas actividades tutoriales consisten no sólo en resolver las dudas de los estudiantes sino también en orientarles y dirigirles hacia el correcto planteamiento de sus preguntas con el fin de que averigüen por sus propios medios la solución, el equipo docente prentendió en particular que el alumno adquiriese las siguientes competencias generales del módulo Métodos Matemáticos de la Físca recogidas en la memoria del Grado en Física por la Universidad de Salamanca:

CG-2: Incrementar la capacidad de organización y planificación con el objeto de resolver con éxito el problema analizado.

CG-4: Ser capaz de plantear y resolver problemas físicos obteniendo una descripción no sólo cualitativa sino también cuantitativa y con el grado de precisión que sea requerido del fenómeno físico en cuestión.

Así mismo, las tutorías en grupo ayudaron a alcanzar la siguiente competencia específica:

CE-8: Ser capaz de trabajar en grupo interdisciplinario, de presentar mediante medios escritos y orales su propia investigación o resultados de búsqueda bibliográficos tanto a profesionales como a público en general.

1.1. Puntos fuertes.

- Los estudiantes han mostrado un alto índice de participación tanto en las tutorías presenciales como en las realizadas por correo electrónico.
- Nos ha permitido conocer las necesidades específicas del grupo.
- Adaptación de los itinerarios de actuación en función de las necesidades del grupo.
- El trato personal con el alumno permite conocer mejor tanto sus habilidades como su manejo y comprensión de la asignatura.

1.2. Puntos débiles.

- Escaso uso de los foros de discusión creados en STUDIUM.

Capítulo 2

Adaptación de contenidos teórico prácticos y desarrollo de sistema de evaluación on-line.

Se ha diseñado y organizado el material necesario para realizar actividades formativas de carácter teórico y práctico que contribuyan a la adquisición y evaluación de las competencias propias de las asignaturas incluidas en el ámbito de actuación del mismo. Para ello, se han actualizado y mejorado los contenidos y documentos de las asignaturas que ya teníamos en STUDIUM y OCW. Dicho material se ha puesto a disposición del alumnado a través de la plataforma virtual Moodle.

Se realizó una prueba de nivel inicial, enfocada no a evaluar al alumno sino a comprobar los conocimientos y carencias del grupo. Esto nos ha permitido adaptar los tiempos de actuación, homogeneizar los conocimientos del grupo y diseñar las primeras tutorías, mencionadas en el apartado anterior.

Se han adaptado los archivos informáticos de contenido teórico práctico al grupo de alumnos, los documentos con problemas resueltos y propuestos, los archivos de cuestiones y preguntas tipo test y los ficheros con ejercicios propuestos para las sesiones de seminarios tutelados. Se han propuesto tests on-line y trabajos escritos que complementan este material docente. Se han realizado pruebas escritas y se han facilitado al estudiante las soluciones de las mismas.

La plataforma virtual Moodle nos ha permitido no sólo difundir dichos documentos sino también realizar parte de la evaluación a través de la entrega de trabajos on-line y la realización de tests on-line.

Las competencias específicas del módulo Métodos Matemáticos de la Físca recogidas en la memoria del Grado en Física por la Universidad de Salamanca que se persiguieron en este apartado fueron:

CE-1: Tener una buena comprensión de las teorías físicas más importantes, localizando en su estructura lógica y matemática, su soporte experimental y el fenómeno físico que puede ser descrito a través de ellos.

CE-3: Saber formular las relaciones funcionales cuantitativas de la Física en lenguaje matemático y aplicar dichos conocimientos a la resolución explícita de problemas de particular interés.

CE-5: Comprender y dominar el uso de los métodos matemáticos y numéricos más comúnmente utilizados.

En particular, la realización de trabajos permite además conseguir la competencia general:

CG-5: Aprender de manera autónoma nuevos conocimientos y técnicas.

2.1. Puntos fuertes

- La plataforma Moodle permite el fácil acceso al material docente elaborado así como a la entrega de trabajos.
- La realización de trabajos estimula la consulta de otras fuentes bibliográficas y fomenta el autoaprendizaje.
- La realización de los tests on-line ayuda al estudiante a tener un ritmo de trabajo más constante y le muestra un dato real de su comprensión de la asignatura.
- La corrección instantánea de los tests permite al estudiante conocer en el acto su nivel de conocimiento de la asignatura y supone un beneficio también para el docente al servirle como protocolo de evaluación.

2.2. Puntos débiles

- El carácter no presencial de los test on-line dificulta conocer hasta qué punto el estudiante ha adquirido las competencias. Resulta claro entonces que las las tutorías del apartado anterior ayudan en buena medida a corregir esta deficiencia.

- La baja repercusión de algunas de estas actividades en la evaluación final hace que algunos estudiantes pierdan el interés en ellas.

2.3. Material didáctico

Se adjuntan los siguientes documentos:

1. Modelo de prueba de nivel inicial.

2. Modelo de documento con contenido teórico práctico y problemas resueltos.

3. Modelo de fichero de ejercicios propuestos para seminarios.

4. Modelo de prueba escrita y soluciones.

5. Modelo de trabajo propuesto on-line.

6. Modelo de test on-line.

Capítulo 3

Diseño y realización de actividades prácticas mediante software especializado

Los aspectos prácticos de la asignatura se han reforzado mediante la realización de ejercicios con datos más complejos a los desarrollados en la pizarra de clase. Debido a su mayor complejidad computacional han requerido la utilización de paquetes de cálculo específicos con software de álgebra computacional.

La actuación de los docentes del equipo se puede dividir en tres apartados: determinar el tipo de contenidos/ejercicios en los que el uso de éstas herramientas podía ser mejor aprovechado en función de las capacidades de los alumnos y la disponibilidad de aulas, diseño de las actividades a realizar teniendo en cuenta los aspectos que más convenía reforzar por lo observado de los alumnos durante las clases teóricas, desarrollo de las actividades.

A la hora de determinar los contenidos sobre los que realizar este tipo de prácticas se concluyó la idoneidad de utilizar el programa de álgebra computacional MATHEMATICA, no sólo por su extendida implantación en el campus sino también por lo intuitivo de su uso y sobre todo por la amplia variedad de comandos que reflejan el desarrollo de la resolución de los ejercicios en la pizarra de un mondo natural en el ordenador. No obstante, se constató que las capacidades de los alumnos en la utilización de este programa eran limitadas. Por otro lado hubo acuerdo en realizar dichas prácticas sobre todo asociadas a contenidos de la primera parte del temario de la asignatura "Álgebra Lineal y Geometría II", puesto que los contenidos de la primera asignatura no ofrecían aún una complejidad que permitiera ilustrar el potencial del uso de software en Álgebra Computacional.

Para el diseño de las actividades se recurrió tanto a la recopilación del material disponible como al diseño del nuevo material necesario para la realización de prácticas de ordenador. En dicho diseño se tuvieron en cuenta aspectos específicos de la asignatura así como el objetivo de contribuir a la adquisición de las siguientes competencias asociadas al módulo "Matemáticas" del actual plan de estudio de Grado en Física, dentro del cual se encuentran las dos asignaturas de actuación de este proyecto:

- CE-3: Saber formular las relaciones funcionales y cuantitativas de la Física en lenguaje matemático y aplicar dichos conocimientos a la resolución explícita de problemas de particular interés.
- CE-5: Comprender y dominar el uso de los métodos matemáticos y numéricos más comúnmente utilizados.

La realización de las actividades tuvo lugar mediante talleres prácticos tutelados en el aula de informática del edificio de Trilingüe. En estos talleres los estudiantes repasaron/aprendieron distintos aspectos y comandos del programa MATHEMATICA directamente relacionados con las prácticas y resolvieron ejercicios ilustrativos de los correspondientes contenidos teóricos, bajo la supervisión de uno de los docentes del equipo. Dichas sesiones tuvieron lugar durante el mes de abril.

Asimismo, observado el alto grado de interés de los alumnos por este modo de resolución de problemas, se puso a su disposición en la plataforma Studium material de apoyo para el uso de WolframAlpha, motor de búsqueda online basado en MATHEMATICA de modo que no sólo pudieran resolver otro tipo de ejercicios sino que pudieran ampliar su conocimiento de MATHEMATICA, fomentando así el auto-aprendizaje.

3.1. Puntos fuertes

- Los estudiantes mostraron un alto índice de participación y una mayor motivación en el desarrollo de estas prácticas.

- El uso de software permitió resolver ejercicios más generales, que por su complejidad son inabordables en la pizarra, complementando así los ejercicios desarrollados en las clases de problemas.
- La flexibilidad y rápidez de cálculo que supone el uso de programas informáticos permite a los estudiantes disponer de un mayor número de ejercicios resueltos.
- El uso de software permite visualizar ciertos conceptos geométricos de una forma limpia, cómoda e interactiva.
- A la vista de su utilidad, los estudiantes muestran un mayor interés en el uso de software para la resolución de problemas matemáticos.

3.2. Puntos débiles

- El conocimiento de la herramienta por parte de los estudiantes es limitado, se observa inseguridad en su manejo.
- A algunos estudiantes les cuesta preguntar cuando el programa no responde como debería, quizá por timidez al suponer que deberían saber manejarlo correctamente.
- Es difícil compaginar los horarios asignados a la asignatura con la disponibilidad de aulas.
- La realización de las prácticas precisa de (al menos) una sesión centrada exclusivamente en el manejo del software.
- Los contenidos de las asignaturas son muy amplios en relación a las horas asignadas a las asignaturas lo que restringe la realización de este tipo de prácticas aún cuando se ha constatado su conveniencia.

3.3. Material didáctico

Se adjuntan los siguientes documentos:

1. Guión de las sesiones desarrolladas mediante el uso del programa MATHEMATICA.

2. Material de apoyo para la utilización del motor de búsqueda WolframAlpha.

Capítulo 4

Anexos

A continuación se incluyen los documentos mencionados en la memoria.

VNiVERSiDAD
Ð SALAMANCA

Departamento de MATEMÁTICAS
Plaza de la Merced 1–4
37008–SALAMANCA

ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA I. 1^0 DE GRADO EN FÍSICAS. CURSO 2011/12.

PRUEBA DE NIVEL INICIAL

1. Responde brevemente y con precisión a las siguientes preguntas:

(a) ¿Dos matrices cualesquiera se pueden sumar? ¿Cómo se suman matrices?
(b) ¿Cómo se multiplica una matriz por un escalar?
(c) ¿Qué propiedades tiene la suma de matrices? ¿Y el producto de una matriz por un escalar?
(d) Encuentra una matriz X tal que $4X - 2A = 3I$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad.

2. ¿Qué condición deben cumplir dos matrices A y B para que se pueda efectuar el producto $A \cdot B$? Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \; ; \; C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \; ; \; D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

¿Cúales de los siguientes productos se pueden realizar AB, BA, AC, CA, BC, CB, DC y CD? Para los que sea posible, calcula la matriz producto.

3. Calcula el determinante de las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Responde brevemente y con precisión a las siguientes preguntas:

(a) ¿Qué entiendes por rango de una matriz?
(b) ¿Es cierto que el rango de una matriz coincide con el número máximo de columnas linealmente independientes? ¿Y con el número máximo de filas linealmente independientes?
(c) Calcula el rango de las siguientes matrices indicando el procedimiento seguido:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \; ; \; C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Dado el sistema lineal $\begin{cases} x-3y+z &= 1 \\ 2x+y-z &= 2 \\ x+4y-2z &= 1 \end{cases}$, sólo una de las afirmaciones siguientes es **cierta**:

(a) Es incompatible.
(b) No tiene solución
(c) Es compatible y determinado.
(d) Es compatible y el conjunto de soluciones es una recta que pasa por el punto $A = (1,0,0)$.

6. Sólo una de las afirmaciones siguientes es **falsa**:

(a) Los vectores $e = (x,y,z)$ de $\mathbb{R}^3$ que verifican la ecuación $2x - y + 3z = 0$ definen un plano que pasa por el origen.
(b) Los vectores $e = (x,y,z)$ de $\mathbb{R}^3$ tales que $x-y+2z = 0$ y $-x+y-2z = 0$ determinan una recta que pasa por el origen.
(c) El conjunto solución del sistema lineal $\begin{cases} x-y &= 0 \\ x+y+z &= 0 \end{cases}$ es una recta de $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen y cuya dirección viene dada por el vector $e = (1,1,-2)$.
(d) El conjunto solución del sistema lineal $\begin{cases} x+y-z &= 0 \\ 2x-y+z &= 0 \\ x-2y+2z &= 0 \end{cases}$ es una recta de $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen.

7. Sea A una matriz cuadrada. Sólo una de las afirmaciones siguientes es **falsa**:

(a) Si existe otra matriz cuadrada B tal que $A \cdot B = B \cdot A = I$, entonces A es invertible y su inversa es B.
(b) Si $A^2 + A = I$, la matriz A es invertible y su inversa es $A + I$.
(c) Si $A + 2I = 0$, la matriz A no tiene inversa.
(d) Si $A^2 = I$, la matriz A es invertible y su inversa es ella misma.

8. Sean A y B matrices cuadradas de orden 3 tales que $A^t \cdot B^2 = 2I$ y $|B| = -2$. Sólo una de las afirmaciones siguientes es **falsa**:

(a) $|A| \cdot |B|^2 = 8$
(b) $|-2B| = 2^4$
(c) $|A \cdot B| = -4$
(d) $|A| = |B|$

1. Aplicaciones lineales. Núcleo e Imagen. Tipos de aplicaciones lineales.

Sean E y E' k-espacios vectoriales.

Definición 1.1. Una **aplicación** $E \xrightarrow{T} E'$ es **lineal** si $T(e+v) = T(e) + T(v)$ y $T(\lambda e) = \lambda T(e)$ o, lo que es equivalente, si $T(\lambda e + \mu v) = \lambda T(e) + \mu T(v)$, cualesquiera que sean $e, v \in E$ y $\lambda, \mu \in k$.

Si $E \xrightarrow{T} E'$ es una aplicación lineal la imagen del vector cero es el vector cero:
$T(0) = T(0e + 0v) = 0T(e) + 0T(v) = 0$.

Ejemplo 1.2.
• La aplicación

$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{T} \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \mapsto (x + z + 2, y - z)$$

No es lineal pues $T(0,0,0) = (2,0) \neq (0,0)$

• La aplicación derivada sobre el espacio E de los polinomios en una variable, $E \xrightarrow{D} E$, es lineal : $D(\lambda p(x) + \mu q(x)) = \lambda p'(x) + \mu q'(x) = \lambda D(p(x)) + \mu D(q(x))$.
• La aplicación

$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{T} \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \mapsto (x + y, z^2)$$

No es lineal ya que $T(\lambda(x,y,z))$ no es igual $\lambda T(x,y,z)$ para todo valor de λ.

$T(\lambda(x,y,z)) = T(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = (\lambda x + \lambda y, \lambda^2 z^2) \neq (\lambda x + \lambda y, \lambda z^2) = \lambda(x+y, z^2) = \lambda T(x,y,z)$.

La igualdad se da si $\lambda^2 = \lambda$, esto es, sólo para $\lambda = 0, 1$

1.1. Núcleo e imagen de una aplicación lineal.

Definición 1.3. Sea $E \xrightarrow{T} E'$ una aplicación lineal, se definen su **núcleo**, $\ker T$, y su **imagen**, $\operatorname{Im} T$, por:

$$\ker T = \{e \in E : T(e) = 0\} \subseteq E$$
$$\operatorname{Im} T = \{e' \in E' : e' = T(e)\,,\ \text{para algún } e \in E\} \subseteq E'$$

Teorema 1.4. *Si $E \xrightarrow{T} E'$ una aplicación lineal, $\ker T$ es un subespacio vectorial de E e $\operatorname{Im} T$ es un subespacio vectorial de E' y se verifica la fórmula de dimensión:*

$$\dim_k E = \dim_k \ker T + \dim_k \operatorname{Im} T$$

Demostración.
• $\ker T$ es cerrado por combinaciones lineales:
Si $e, v \in \ker T$ y $\lambda, \mu \in k$ se tiene que $T(\lambda e + \mu v) = \lambda T(e) + \mu T(v) = 0$, lo que prueba que $\lambda e + \mu v \in \ker T$.
• $\operatorname{Im} T$ es cerrado por combinaciones lineales:
Si $T(e), T(v) \in \operatorname{Im} T$ y $\lambda, \mu \in k$ se tiene que $\lambda T(e) + \mu T(v) = T(\lambda e + \mu v)$, lo que prueba que $\lambda e + \mu v \in \operatorname{Im} T$.

• Sea $\{v_1, \ldots, v_m\}$ una base de $\ker T$.
Ampliemos esta base para formar una base $\{v_1, \ldots, v_m, e_{m+1}, \ldots, e_n\}$ de E.
Tomando imágenes por T, los vectores $\{T(v_1), \ldots, T(v_m), T(e_{m+1}), \ldots, T(e_n)\}$ generan $\operatorname{Im} T$, y como $T(v_1) = \cdots = T(v_m) = 0$ por definición de núcleo, resulta que $\{T(e_{m+1}), \ldots, T(e_n)\}$ es un sistema de generadores de $\operatorname{Im} T$. Probaremos que $\{T(e_{m+1}), \ldots, T(e_n)\}$ son linealmente independientes con lo que quedará demostrada la fórmula.
Si $\lambda_{m+1}T(e_{m+1}) + \cdots + \lambda_n T(e_n) = 0$, por ser T lineal, $T(\lambda_{m+1}e_{m+1} + \cdots + \lambda_n e_n) = 0$, por tanto el vector $\lambda_{m+1}e_{m+1} + \cdots + \lambda_n e_n$ pertenece a $\ker T$, luego $\lambda_{m+1}e_{m+1} + \cdots + \lambda_n e_n = 0$, ya que $\{e_{m+1}, \ldots, e_n\}$ generan un suplementario de $\ker T$ y como además son linealmente independientes resulta que $\lambda_{m+1} = \cdots = \lambda_n = 0$. □

Ejemplo 1.5. Sea E el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 3. Calculemos el núcleo y la imagen de las siguientes aplicaciones lineales:

(a) Operador derivada: $E \xrightarrow{D} E$, definido por $D(p(x)) = p'(x)$.
(b) $E \xrightarrow{T} \mathbb{R}$, definida por $T(p(x)) = \int_{-1}^{1} p(x)dx$

- $\ker D = \{p(x) \in E : p'(x) = 0\} = \{\text{polinomios constantes}\} = \langle 1 \rangle$.
  $\operatorname{Im} D = \langle 1, x, x^2 \rangle$, pues la derivada de un polinomio de grado menor o igual que tres es un polinomio de grado menor o igual que 2.
- $\operatorname{Im} T$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}$ y como $\operatorname{Im} T \neq (0)$, ha de ser $\operatorname{Im} T = \mathbb{R} = \langle 1 \rangle$, luego $\dim \ker T = \dim E - \dim \operatorname{Im} T = 4 - 1 = 3$.
  Calculemos una base del $\ker T$:
  $$\int_{-1}^{1} (a + bx + cx^2 + dx^3)dx = ax + b\frac{x^2}{2} + c\frac{x^3}{3} + d\frac{x^4}{4}\Big]_{-1}^{1} = 2a + \frac{2}{3}c$$
  luego
  $$\begin{aligned}\ker T &= \{a + bx + cx^2 + dx^3 \in E : 2a + \frac{2}{3}c = 0\} = \{a + bx - 3ax^2 + dx^3 : a, b, d \in \mathbb{R}\} \\ &= \{a(1 - 3x^2) + bx + dx^3 : a, b, d \in \mathbb{R}\} = \langle 1 - 3x^2, x, x^3 \rangle\end{aligned}$$

1.2. Aplicaciones lineales inyectivas, epiyectivas y biyectivas.

Definición 1.6. Sea $E \xrightarrow{T} E'$ una aplicación lineal. T es inyectiva o epiyectiva si como aplicación de conjuntos lo es, esto es:
• T es **inyectiva** si siempre que $T(e) = T(v)$ se deduce que $e = v$, cualesquiera que sean $e, v \in E$
• T es **epiyectiva** si $\operatorname{Im} T = E'$.

T es biyectiva si es a la vez inyectiva y epiyectiva. Las aplicaciones lineales biyectivas se llaman **isomorfismos**.
Un **endomorfismo** de E es una aplicación lineal de E en si mismo, $E \xrightarrow{T} E$. Se llaman **automorfismos** a los endomorfismos biyectivos.

Ejemplo 1.7.
• Sea V un subespacio vectorial de E, la inclusión natural
$$\begin{aligned} V &\hookrightarrow E \\ v &\mapsto v \end{aligned}$$
es una aplicación lineal inyectiva.
• Si E representa el espacio vectorial de los polinomios, $p(x)$, de grado menor o igual que tres y E' el de los polinomios de grado menor o igual que dos, la aplicación derivada
$$\begin{aligned} E &\xrightarrow{D} E' \\ p(x) &\mapsto p'(x) \end{aligned}$$

es una aplicación lineal epiyectiva.
• La aplicación identidad

$$E \xrightarrow{Id} E$$
$$e \mapsto e$$

es un automorfismo de E.

Proposición 1.8. *Una aplicación lineal* $E \xrightarrow{T} E'$ *es inyectiva si y sólo si* $\ker T = \{0\}$.

Demostración.
$\Rightarrow$ Si $e \in \ker T$ es $T(e) = 0$, luego $T(e) = T(0)$ pues $T(0) = 0$. Como T es inyectiva, de $T(e) = T(0)$ se deduce que $e = 0$.
$\Leftarrow$ Si $T(e) = T(e')$, por ser T lineal $T(e - e') = 0$, luego $e - e' \in \ker T$, y como $\ker T = \{0\}$ resulta que $e = e'$, lo que prueba que T es inyectiva. □

1.3. Operaciones con aplicaciones lineales: Suma, multiplicación por escalares, composición. Aplicación lineal inversa.

– Dadas aplicaciones lineales $E \xrightarrow{f} E'$ y $E \xrightarrow{g} E'$, las **aplicaciones suma** y **multiplicación por un escalar**, definidas repectivamente por

$$E \xrightarrow{f+g} E' \qquad\qquad E \xrightarrow{\lambda f} E'$$
$$e \mapsto f(e) + g(e) \qquad\qquad e \mapsto \lambda f(e)$$

son aplicaciones lineales, pues cualesquiera que sean $e, v \in E$ y $\alpha, \mu \in k$ se verifica $(f + g)(\alpha e + \mu v) = \alpha(f + g)(e) + \mu(f + g)(v)$ y $(\lambda f)(\alpha e + \mu v) = \alpha(\lambda f)(e) + \mu(\lambda f)(v)$, como es fácil comprobar.
El conjunto de las aplicaciones lineales de E en E' se representa por $\mathrm{Hom}_k(E, E')$ y es un k-espacio vectorial con las operaciones anteriores.
– La **composición** de aplicaciones lineales

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & E' \arrow[r, "g"] & E'' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & E' \arrow[d, "g"] \\ & E'' \end{tikzcd}$$

definida, para cada $e \in E$, por $(g \circ f)(e) = g(f(e))$, es una aplicación lineal:

$$(g\circ f)(\alpha e+\mu v) = g(f(\alpha e+\mu v)) = g(\alpha f(e)+\mu f(v)) = \alpha(g\circ f)(e)+\mu(g\circ f)(v),\ \forall e, v \in E, \alpha, \mu \in k\,.$$

–Una aplicación $E \xrightarrow{f} E'$ tiene **inversa** si existe otra aplicación $E' \xrightarrow{f^{-1}} E$ tal que

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = Id\,.$$

Las aplicaciones biyectivas tienen aplicación inversa y, recíprocamente, cualquier aplicación que tiene inversa es biyectiva.
La inversa de una aplicación lineal es también una aplicación lineal.

Ejemplo 1.9. Sea T un endomorfismo del k-espacio vectorial E tal que $T^2 = T + I$. Probaremos que T es automorfismo y calcularemos T^{-1} en función de T.
De $T^2 = T + I$ se sigue $I = T^2 - T = T(T - I)$, lo que prueba que T tiene inversa y esta es $T^{-1} = T - I$ y por tanto es biyectiva.

2. Aplicaciones lineales en coordenadas: Matrices

2.1. Matriz asociada a una aplicación lineal.

Dada una aplicación lineal $E \xrightarrow{T} E'$ y bases $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E y $\{e'_1, \dots, e'_m\}$ de E', existe una única matriz $A = (a_{ij}) \in M(m \times n, k)$ determinada por

$$T(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e'_i\,, \text{ para } j = 1, \dots, n$$

A es la *matriz asociada a T respecto de la las bases* $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E y $\{e'_1, \dots, e'_m\}$ de E'. Las columnas de A son las coordenadas de los vectores $T(e_1), \dots, T(e_n)$ respecto de la base $\{e'_1, \dots, e'_m\}$ de E'.
Si $e = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ y $T(e) = x'_1 e'_1 + \cdots + x'_m e'_m$, la *expresión en coordenadas de T* es

$$T(x_1, \dots, x_n) = (x'_1, \dots, x'_m)\,, \text{ siendo } A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_m \end{pmatrix} \text{ la expresión matricial del}$$

sistema lineal que T define.
Obsérvese que:
• *A es la matriz de coeficientes del sistema lineal anterior y* $\ker T$ *es el subespacio de soluciones del sistema homogéneo asociado.*
• Los vectores $\{T(e_1), \dots, T(e_n)\}$ forman un sistema de generadores del subespacio imagen, $\operatorname{Im} T$, luego su dimensión coincide con el rango de la matriz A y por tanto la dimensión del núcleo es la de E menos el rango de A

$$\dim_k \operatorname{Im} T = \operatorname{rg} A\ , \quad \dim_k \ker T = \dim_k E - \operatorname{rg} A$$

Ejemplo 2.1. Dada la aplicación lineal

$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{T} \mathbb{R}^4$$
$$(x, y, z) \mapsto (x - y, x + 2z, y, y + z)$$

calculemos su matriz asociada y probemos que T es inyectiva.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\,, \quad \operatorname{rg} A = 3 \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} \ker T = 3 - 3 = 0 \Rightarrow \ker_{\mathbb{R}} T = \{0\}$$

Ejemplo 2.2. Sean $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base de E y $\{e'_1 e'_2, e'_3, e'_4\}$ una base de E' y $k = \mathbb{R}$. Considérense la aplicación lineal $E \xrightarrow{T} E'$ definida por

$$T(e_1) = e'_1 + e'_2 - e'_3\,,\ T(e_2) = 2e'_2 - e'_4\,,\ T(e_3) = 3e'_1 + 3e'_2 - 3e'_3$$

calculemos su expresión en coordenadas y bases y dimensiones de $\operatorname{Im} T$ y $\ker T$.

La matriz asociada a T, por columnas, es $A = \begin{pmatrix} T(e_1) & T(e_2) & T(e_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} T = \operatorname{rg} A = 2\,, \quad \operatorname{Im} T = \langle T(e_1), T(e_2) \rangle = \langle e'_1 + e'_2 - e'3, 2e'_1 - e'_4 \rangle$$
$$\dim_{\mathbb{R}} \ker T = \dim_{\mathbb{R}} E - \operatorname{rg} A = 1$$
$$\ker T \equiv \begin{cases} x + 3z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$$
$$\ker T = \{(-3z, 0, z), z \in \mathbb{R}\} = \langle (-3, 0, 1) \rangle = \langle -3e_1 + e_3 \rangle$$

2.2. Matrices asociadas a la suma de aplicaciones lineales y al producto de una aplicación lineal por un escalar.

Sean $A=(a_{ij})$ y $B=(b_{ij})$ las matrices asociadas a las aplicaciones lineales $E \xrightarrow{f} E'$ y $E \xrightarrow{g} E'$ respecto de la las bases $\{e_1,\ldots,e_n\}$ de E y $\{e'_1,\ldots,e'_m\}$ de E'.

• La matriz asociada a la aplicación lineal suma $f+g$ es la matriz $A+B$. En efecto:

$$(f+g)(e_j)=f(e_j)+g(e_j)=\sum_{i=1}^{m} a_{ij}e'_i+\sum_{i=1}^{m} b_{ij}e'_i=\sum_{i=1}^{m}(a_{ij}+b_{ij})e'_i$$

• La matriz asociada a la aplicación lineal λf es la matriz λA. En efecto:

$$(\lambda f)(e_j)=\lambda f(e_j)=\lambda\sum_{i=1}^{m} a_{ij}e'_i=\sum_{i=1}^{m}\lambda a_{ij}e'_i$$

2.3. Matriz asociada a la composición de aplicaciones lineales.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & E' \arrow[r, "g"] & E'' \end{tikzcd}$$

Sea $A=(a_{ij})$ la matriz asociada a f respecto de la las bases $\{e_1,\ldots,e_n\}$ de E y $\{e'_1,\ldots,e'_m\}$ de E' y sea $B=(b_{ij})$ la matriz asociada a g respecto de la las bases $\{e'_1,\ldots,e'_m\}$ de E' y $\{e''_1,\ldots,e''_s\}$ de E'', esto es:

$$f(e_j)=\sum_{i=1}^{m} a_{ij}e'_i\,,\ \text{para } j=1,\ldots,n\,;\quad g(e'_i)=\sum_{k=1}^{s} b_{ki}e''_k\,,\ \text{para } i=1,\ldots,m$$

La matriz asociada a $g\circ f$ respecto de las bases $\{e_1,\ldots,e_n\}$ de E y $\{e''_1,\ldots,e''_s\}$ de E'' es la matriz producto $B\cdot A$. En efecto:

$$(g\circ f)(e_j)=g(f(e_j)=\sum_{i=1}^{m} a_{ij}g(e'_i)=\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\sum_{k=1}^{s} b_{ki}e''_k=\sum_{k=1}^{s}(\sum_{i=1}^{m} b_{ki}a_{ij})e''_k=\sum_{k=1}^{s}(B\cdot A)_{kj}e''_k$$

Ejemplo 2.3. Dadas las aplicaciones lineales

$$\begin{array}{cc} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 & \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z)\mapsto(x-y,y+2z) & (x,y)\mapsto(x+y,2y,x-y) \end{array}$$

Calculemos las matrices asociadas a $f\circ g$ y $g\circ f$ y la dimensión y una base del subespacio $\mathrm{Im}(f\circ g)$ de $\mathbb{R}^2$ y del subespacio $\mathrm{Im}(g\circ f)$ de $\mathbb{R}^3$.

3. Cambios de base

Sea $\{e_1,\ldots,e_n\}$ una base de E, que llamaremos *base inicial o antigua*, y $\{\bar e_1,\ldots,\bar e_n\}$ otra base de E, a la que nos referiremos como *base nueva*. Los vectores $\bar e_j$ de la base nueva expresados como combinación lineal de los de la base antigua, $\bar e_j=\sum_{i=1}^n b_{ij}e_i$, definen la matriz $B=(b_{ij})$ que expresa el cambio de base en el espacio vectorial E.

La *matriz de cambio de base* $B=(b_{ij})$ es la matriz cuyas columnas son las coordenadas de los vectores de la base nueva en función de los de la antigua.

La *aplicación lineal que realiza el cambio de base de matriz* B es la aplicación identidad respecto de las bases $\{\bar e_1,\ldots,\bar e_n\}$ y $\{e_1,\ldots,e_n\}$.

$$\langle\bar e_1,\ldots,\bar e_n\rangle=E\xrightarrow{Id_B}E=\langle e_1,\ldots,e_n\rangle\,,\quad Id_B(\bar e_j)=\bar e_j=\sum_{i=1}^{n} b_{ij}e_i\,,$$

cuya expresión en coordenadas es $B\begin{pmatrix}\bar{x}_1\\ \vdots\\ \bar{x}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$, siendo $e=\bar{x}_1\bar{e}_1+\cdots+\bar{x}_n\bar{e}_n$ y $e=x_1e_1+\cdots+x_ne_n$ las expresiones en coordenadas del vector e respecto de la base nueva y respecto de la base antigua, coordenadas nuevas $(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)$ y coordenadas antiguas $(x_1,\ldots,x_n)$. Se obtiene así:

3.1. Fórmula del cambio de base para vectores.

$$\begin{pmatrix}\bar{x}_1\\ \vdots\\ \bar{x}_n\end{pmatrix}=B^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

Ejemplo 3.1. Comprobemos que los polinomios $\{x-1,2-3x^2,x-x^3,x^3+x^2-1\}$ forman una nueva base del espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a 3, $E=\langle 1,x,x^2,x^3\rangle$. Y calculemos la expresión del polinomio $p(x)=3-x+x^2$ en función de esa nueva base.

• $\det(x-1,2-3x^2,x-x^3,x^3+x^2-1)=\begin{vmatrix}-1&2&0&-1\\1&0&1&0\\0&-3&0&1\\0&0&-1&1\end{vmatrix}=-2\neq 0$

Lo que prueba que $\{x-1,2-3x^2,x-x^3,x^3+x^2-1\}$ es una base de E (base nueva), y la matriz de cambio de base respecto de la base inicial $\{1,x,x^2,x^3\}$ es la matriz cuyas columnas son las coordenadas de los polinomios $\{x-1,2-3x^2,x-x^3,x^3+x^2-1\}$ respecto de la base $\{1,x,x^2,x^3\}$:

$$B=\begin{pmatrix}-1&2&0&-1\\1&0&1&0\\0&-3&0&1\\0&0&-1&1\end{pmatrix}$$

• Si (a,b,c,d) son las coordenadas del polinomio $p(x)$ en la base nueva, como sus coordenadas iniciales son $(3,-1,1,0)$, se tiene:

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=B^{-1}\begin{pmatrix}3\\-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\1\\4\\4\end{pmatrix}$$

Es decir la expresión de $p(x)$ en la nueva base es:

$$p(x)=-5(x-1)+(2-3x^2)+4(x-x^3)+4(x^3+x^2-1)$$

3.2. Cambio de base para aplicaciones lineales.

Sea A la matriz asociada a la aplicación lineal $E\xrightarrow{T}E'$ respecto de las bases $\{e_1,\ldots,e_n\}$ de E y $\{e'_1,\ldots,e'_m\}$ de E'. Efectuemos cambios de base en E y en E' de matrices respectivas B y B';

$$\langle\bar{e}_1,\ldots,\bar{e}_n\rangle=E\xrightarrow{Id_B}E=\langle e_1,\ldots,e_n\rangle$$

$$\langle\bar{e}'_1,\ldots,\bar{e}'_m\rangle=E\xrightarrow{Id_B}E=\langle e'_1,\ldots,e'_m\rangle$$

Si $\bar{A}$ es la matriz de T respecto de las nuevas bases $\{\bar{e}_1,\ldots,\bar{e}_n\}$ y $\{\bar{e}'_1,\ldots,\bar{e}'_m\}$, se tiene el siguiente diagrama conmutativo, del que se deduce la fórmula de cambio de base

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "T_A"] & E' \\ E \arrow[u, "Id_B"] \arrow[r, "T_{\bar{A}}"] & E' \arrow[u, "Id_{B'}"'] \end{tikzcd} \qquad T_{\bar{A}}=Id_{B'}^{-1}\circ T_A\circ Id_B\Rightarrow \bar{A}=B'^{-1}\cdot A\cdot B$$

Es fácil deducir las correspondientes fórmulas cuando sólo se cambia la base de E, $\bar{A} = A \cdot B$, o sólo la de E', $\bar{A} = B'^{-1} \cdot A$.
En particular, si $E \xrightarrow{T} E$ un endomorfismo de E, A su matriz asociada respecto de la base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E y $\bar{A}$ es la matriz de T respecto de la nueva base $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$, se tiene:

Fórmula de cambio de base para endomorfismos: $\bar{A} = B^{-1} \cdot A \cdot B$

Ejemplo 3.2. Sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base de E y $E \xrightarrow{T} E$ el endomorfismo de E definido por:

$$T(e_1) = e_1 + 2e_2 - e_3, T(e_2) = 2e_1 - e_3, e_3 + e_2 \in \ker T$$

(a) Averigemos si $\operatorname{Im} T$ y $\ker T$ son subespacios suplementarios. De $e_3 + e_2 \in \ker T$ se deduce que $T(e_3) = -T(e_2)$, luego la matriz asociada es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, y se tiene:

$\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} T = \operatorname{rg} A = 2$ y $\{T(e_1) = (1, 2, -1), T(e_2) = (2, 0, -1)\}$ es una base de $\operatorname{Im} T$.
$\dim_{\mathbb{R}} \ker T = \dim_{\mathbb{R}} E - \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} T = 1$ y $\{e_3 + e_2 = (0, 1, 1)\}$ es una base de $\ker T$.

Los vectores $\{(1, 2, -1), (2, 0, -1), (0, 1, 1)\}$ forman una base de E pues su determinante es no nulo, luego $\operatorname{Im} T$ y $\ker T$ son subespacios suplementarios.

(b) Calculemos la matriz $\bar{A}$ de T respecto de la base $\{2e_1 + e_2, e_2 - e_3, e_1 + e_2 - e_3\}$. La matriz del cambio de base es $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, luego

$$\bar{A} = B^{-1} \cdot A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -6 & -4 \\ 2 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

(c) Sea $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ una base del espacio vectorial E' y $E \xrightarrow{T'} E'$ la aplicación lineal definida por

$$T(e_1) = e'_1 + e_2, T(e_2) = e'_1 - e'_2, T(e_3) = e'_2 + e'_3$$

Calculemos la matriz asociada a la composición $T' \circ T$ respecto de las bases $\{2e_1 + e_2, e_2 - e_3, e_1 + e_2 - e_3\}$ de E y $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ de E'.
Las matrices A' de T' y C de $T' \circ T$ respecto de las bases $\{e_1, e_2, e_3\}$ de E y $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ de E' son

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = A' \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz $\bar{C}$ de $T' \circ T$ respecto de las bases $\{2e_1 + e_2, e_2 - e_3, e_1 + e_2 - e_3\}$ de E y $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ de E', viene dada por:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "(T'\circ T)_C"] & E' \\ E \arrow[u, "Id_B"] \arrow[ur, "(T'\circ T)_{\bar{C}}"'] & \end{tikzcd} \qquad \bar{C} = C \cdot B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ -3 & 2 & 0 \\ -3 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Sea T el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$T(x,y,z) = (x+y, x+z, x-y+2z)$$

(a) Calcular la dimensión y una base de los subespacios $\ker T$ e $\operatorname{Im} T$.
(b) ¿Se verifica que $\mathbb{R}^3 = \ker T \oplus \operatorname{Im} T$? En caso afirmativo, calcular las coordenadas del vector $(1,2,3)$ en la nueva base que la identificación anterior define.
(c) Determinar λ para que la imagen del vector $e = (\lambda, 1, 0)$ pertenezca al subespacio generado por $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$.

Solución. Las ecuaciones del endomorfismo y su matriz asociada respecto de la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ son, respectivamente:

$$\left.\begin{aligned} x+y &= \bar{x} \\ x+z &= \bar{y} \\ x-y+2z &= \bar{z} \end{aligned}\right\} \qquad A = (T(e_1), T(e_2), T(e_3)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Como $T(e_3) = T(e_1) - T(e_2)$ es $\operatorname{rg} A = 2$.
(a) $\dim(\operatorname{Im} T) = \operatorname{rg} A = 2$ e $\operatorname{Im} T = \langle T(e_1), T(e_2)\rangle$.

$$\dim(\ker T) = 3 - \operatorname{rg} A = 1$$
$$\ker T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y=0, x+z=0\} = \langle (1,-1,-1)\rangle$$

(b) $\ker T$ es un subespacio suplementario de $\operatorname{Im} T$ pues

$$\det(T(e_1), T(e_2), \bar{e}_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0\,.$$

Si escribimos $\bar{e}_1 = T(e_1)$, $\bar{e}_2 = T(e_2)$, $\bar{e}_3 = \bar{e}_3$, la matriz B del cambio de base es

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

y las coordenadas del vector $(1,2,3)$ en la nueva base son:

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = B^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(c) $(\lambda+1, \lambda, \lambda-1) = T(e) \in \langle e_1, e_2\rangle$ precisamente si $\operatorname{rg}(T(e), e_1, e_2) = 2$, es decir, si:

$$0 = \det(T(e), e_1, e_2) = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \\ \lambda-1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \lambda - 1 \implies \lambda = 1\,.$$

2. Calcular la matriz asociada a la aplicación lineal

$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{T} \mathbb{R}^2$$
$$(x,y,z) \mapsto (x+3y-2z, y-z)$$

en las bases $\{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ y $\{\bar{u}_1 = (1,-1), \bar{u}_2 = (1,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$.

Solución. La aplicación T viene dada en coordenadas, por tanto referida a dos bases prefijadas $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ y $\{u_1, u_2\}$ de $\mathbb{R}^2$. La matriz de T en estas bases es la matriz cuyas columnas son las coordenadas de los vectores $T(e_1), T(e_2), T(e_3)$ en la base $\{u_1, u_2\}$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} .$$

La matriz pedida es la matriz $\bar{A}$ asociada a T en las bases $\{e_1, e_2, e_3\}$ y $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}$. De modo que, si $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ es la matriz del cambio de base en $\mathbb{R}^2$, del diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3 \arrow[r, "T_A"] \arrow[dr, "T_{\bar{A}}"'] & \mathbb{R}^2 \\ & \mathbb{R}^2 \arrow[u, "Id_B"'] \end{tikzcd}$$

resulta $B \cdot \bar{A} = A$, luego:

$$\bar{A} = B^{-1} \cdot A = 1/2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & -1/2 \\ 1/2 & 2 & -3/2 \end{pmatrix} .$$

3. Sea E el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de los polinomios $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ de grado menor que 3. Se define una aplicación $E \xrightarrow{T} E$ por:

$$T(p(x)) = p(0) + p'(0)(x-1) + p''(0)(x-1)^2$$

(a) Probar que T es lineal y calcular su matriz en la base $\{1, x, x^2\}$ de E.
(b) Es T un isomorfismo?. Razónese la respuesta.

Solución.
(a) T es lineal, en efecto:

$$\begin{aligned} T(\lambda p + \mu q) &= (\lambda p + \mu q)(0) + (\lambda p + \mu q)'(0)(x-1) + (\lambda p + \mu q)''(0)(x-1)^2 \\ &= \lambda p(0) + \mu q(0) + \lambda p'(0)(x-1) \\ &\quad + \mu q'(0)(x-1) + \lambda p''(0)(x-1)^2 + \mu q''(0)(x-1)^2 \\ &= \lambda T(p) + \mu T(q) . \end{aligned}$$

Por otra parte, la matriz de T en la base $\{1, x, x^2\}$ tiene por columnas las coordenadas en esta base de los vectores $T(1) = 1$, $T(x) = x - 1$, $T(x^2) = 2(x-1)^2$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

(b) Como $\operatorname{rg} A = 3$, pues $\det(A) \neq 0$, se tiene que $\dim \operatorname{Im} T = 3 = \dim_{\mathbb{R}} E$, luego T es epiyectiva. De la fórmula de la dimensión $\dim_{\mathbb{R}} E = \dim_{\mathbb{R}} \ker T + \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} T$ se sigue que $\ker T = \{0\}$ y en consecuencia T también es inyectiva.

4. Hallar las ecuaciones de la tranformación lineal T de $\mathbb{R}^3$ tal que:

(a) La restricción de T al plano $\pi \equiv x + y + z = 0$ es una homotecia de razón 3.
(b) T deja invariante la recta r

$$\left.\begin{aligned} 2x + 4y + 3z &= 0 \\ x + 2y + z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

(c) $T(0, 0, -1) = (10, -5, -3)$

Solución. El plano π y la recta r son subespacios suplementarios, pues $\pi \cap r = \{0\}$ ya que el sistema lineal determinado por sus ecuaciones tiene determinante no nulo. Por tanto, si elegimos como base (nueva) en $\mathbb{R}^3$ $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, siendo $\langle \bar{e}_1, \bar{e}_2 \rangle = \pi$ y $\langle \bar{e}_3 \rangle = r$ bases respectivas de π y r, la matriz asociada a T en esta base es:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

pues por la condición (a) es $T(\bar{e}_1) = 3\bar{e}_1$, $T(\bar{e}_2) = 3\bar{e}_2$ y de la condición (b) se deduce que $T(\bar{e}_3) = \lambda \bar{e}_3$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$.

Calculemos bases de π y r:

$$\pi = \langle \bar{e}_1 = (1, 0, -1), \bar{e}_2 = (0, 1, -1) \rangle \,; \quad r = \langle \bar{e}_3 = (-2, 1, 0) \rangle \,.$$

Por último, el λ de la matriz $\bar{A}$ se determina imponiendo la condición (c), pero para ello hay que efectuar previamente un cambio de base. Si A es la matriz de T en la base antigua y B es la matriz del cambio de base es:

$$\begin{aligned} A = B \cdot \bar{A} \cdot B^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 + 2\lambda & -6 + 2\lambda & -6 + 2\lambda \\ 3 - \lambda & 6 - \lambda & 3 - \lambda \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y aplicando(c)

$$A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \text{resulta } \lambda = -2\,.$$

Y las ecuaciones de T son:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{aligned} -7x - 10y - 10z &= \bar{x} \\ 5x + 8y + 5z &= \bar{y} \\ 3z &= \bar{z} \end{aligned}$$

5. Problemas propuestos

1. Sea $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$ la aplicación definida por:

$$f(x, y, z) = (x - y + z, x + y - z)$$

Probar que es una aplicación lineal y calcular bases y dimensión del núcleo y la imagen. ¿Es epiyectiva?

2. Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación definida por:

$$T(x, y, z) = (y - z, -x + 4z, y + z)$$

Probar que es una aplicación lineal. Hallar el núcleo y la imagen. ¿Es un isomorfismo?

3. Sea E el espacio vectorial de los polinomios de grado menor que 4. Se define la aplicación $T\colon E \to E$ por $T(p(x)) = (x - 1)p'(x)$, siendo $p'(x)$ la derivada del polinomio $p(x)$.

(a) Demostrar que T es lineal. Calcular su núcleo y su imagen.

(b) Calcular los polinomios $p(x)$ tales que $T(p(x)) = p(x)$.

4. Sea $T \in End_k(E)$. Pruébese que el conjunto S de vectores que permanecen invariantes forman un subespacio vectorial.

5. Sobre el espacio vectorial E de las matrices cuadradas de orden 2 con coeficientes reales, se considera la aplicación $T\colon E \to E$ definida por:

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a-3b & 6a-4b \\ -a+\frac{9}{2}b+3c-2d & 6a-3b-d \end{pmatrix}$$

Probar que T es lineal y calcular su núcleo y su imagen.

6. Sea $f \in End_k(E)$ tal que $f^2 = Id$. Pruébese que los subconjuntos E^+ y E^- de E definidos por $E^+ = \{x \in E\colon f(x) = x\}$, $E^- = \{x \in E\colon f(x) = -x\}$ son subespacios de E y se verifica $E = E^+ \oplus E^-$.
Utilícese lo anterior para demostrar que toda función real de variable real es suma, de manera única, de una función par más una impar.

7. Sea T un endomorfismo idempotente, $T^2 = T$, del espacio vectorial E. Pruébese que la imagen de T está formada por los vectores invariantes por T y conclúyase que

$$E = \ker T \oplus Im\, T$$

8. Calcular la matriz asociada a la aplicación lineal

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (x+3y-2z, y-z) \end{array}$$

en las bases $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ y $\{(1,-1),(1,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$.

9. Para cada número real θ, sea $\tau_\theta\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación definida por la fórmula:

$$\tau_\theta(x,y,z) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta, z)$$

(a) Pruébese que τ_θ es un automorfismo del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y hállese su matriz en la base estándar del espacio.
(b) Interprétese geométricamente la aplicación τ_θ y calcúlense sus subespacios invariantes.

10. Considérese la aplicación lineal $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x,y,z) = (2x+y, -z, 0)$. Calcular su matriz y a partir de ella:
(a) Determinar $\ker f$ y hallar una base de dicho subespacio.
(b) Hallar $Im\, f$ y el rango de f.
(c) ¿Pertenece $(6,-2,0)$ al $\ker f$?.

11. Sea E el espacio vectorial de las matrices reales de la forma $\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & c \end{pmatrix}$ con $a+b+c=0$. Calcular una base de E y respecto de la misma calcular la matriz del endomorfismo $T\colon E \to E$ definido por:

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & a-2b \\ 2b-3c & 3c-a \end{pmatrix}$$

Deducir de lo anterior bases de $\ker T$ e $Im\, T$.

12. Hallar la matriz de una aplicación lineal $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por las condiciones:
(a) $f(1,0,0)$ es proporcional a $(0,0,1)$.
(b) $f^2 = f$.
(c) $\ker f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon x+z=0\}$.
¿Es f única?.

13. Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el endomorfismo $T(x,y,z) = (y-z, z-x, x-y)$. Se pide:
(a) Calcular la matriz de T en la base ordinaria.
(b) Calcular la matriz de T en la base $e_1 = (0,1,1)$, $e_2 = (1,0,1)$, $e_3 = (-1,0,0)$.
(c) Hallar una base de $\ker T$, $Im\, T$, precisando sus dimensiones.
(d) Calcular una base de $\ker T^2$. ¿Coincide este núcleo con el de T?. Razónese la respuesta.

14. Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por:

$$T(x, y, z) = (x + y + z, x + 2y, z - y)$$

(a) Calcular la matriz asociada a T y con ella encontrar $\ker T$, $Im\, T$, $\ker T^2$ e $Im\, T^2$.
(b) Hallar bases de dichos subespacios vectoriales.

15. Sea E un espacio vectorial de dimensión 3 y $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base del mismo. Un endomorfismo T de E verifica que:

$$T(e_1) = e_1 + e_2,\ T(e_3) = e_3,\ \ker T =< e_1 + e_2 >$$

Deducir la matriz de T y calcular $Im\, T$, $\ker T^2$ y $\ker T^3$.

16. Sea T una aplicación lineal y sean V y V' subespacios vectoriales de E y E' respectivamente. Demostrar que

(a) *Imagen de* $V = \{e' \in E' : e' = T(v)$ para algún $v \in V\}$ es un subespacio vectorial de E', el *subespacio imagen de* V *por la aplicación* T, que representaremos por $T(V)$.
(b) *Antiimagen de* $V' = \{e \in E : T(e) \in V'\}$ es un subespacio vectorial de E, el *subespacio antiimagen de* V' *por la aplicación* T, que representaremos por $T^{-1}(V)$.
(Observa que $T(E) = \operatorname{Im} T$ y $T^{-1}(0) = \ker T$)

17. Sea E el espacio vectorial de los polinomios $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ de grado menor o igual que 4. Se define $f\colon E \to E$, $T(p(x)) = p'(x)$.

(a) Probar que T es una aplicación lineal.
(b) Calcular $T^{-1}(3x^2 - 1)$.
(c) Calcular bases y dimensión de $\ker T$ e $\operatorname{Im} T$.

18. Calcular la matriz de la aplicación lineal $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1, 0, 0) = (0, 1, 0)$ y cuyo núcleo está generado por los vectores $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$, $(2, 1, 3)$.

19. Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 4 y $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ una base del mismo. Dado el endomorfismo T de E definido por:

$$T(e_1) = e_1 - e_2,\ T(e_2) = e_2 - e_3 + e_4,\ T(e_3) = e_1 - e_3 + e_4,\ e_1 + e_4 \in \ker T$$

Calcular la matriz de T y deducir bases de $\ker T$ e $Im\, T$. ¿Se verifica que $E = \ker T \oplus Im\, T$?.

20. Sea $E =< x, \sin x, \cos x >$. Calcular la matriz del endomorfismo $T\colon E \to E$ definido por

$$T(f(x)) = f(0)x + f'(0)\sin x + f''(0)\cos x$$

en una base de E. Decidir si T es isomorfismo.

21. Dado el endomorfismo $T\colon E_3 \to E_3$ cuya matriz es $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 1 & \lambda & \lambda \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, demostrar que para cualquier valor de λ la dimensión del subespacio imagen es 2. Hallar el núcleo y la imagen para $\lambda = -2$.

22. Considérese el endomorfismo T de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$T(x, y, z) = ((m - 2)x + 2y - z, 2x + my + 2z, 2mx + 2(m - 1)y + (m + 1)z)$$

A partir de su matriz, demuéstrese que la dimensión del núcleo es 0 excepto para valores particulares de m. Para dichos valores, estudiar T.

23. Sea $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ una base del espacio vectorial E.

(a) Probar que los vectores $u'_1 = 2u_1 - u_2 + u_3,\ u'_2 = u_1 + u_3,\ u'_3 = 3u_1 - u_2 + 3u_3$ forman una base de E.
(b) Calcular las coordenadas del vector $u = u_1 - 4u_3$ en la base de (a).
(c) Hallar las coordenadas respecto de la base inicial del vector $v = -2u'_1 + 3u'_2 + u'_3$.

24. Sea T el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz en la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ es $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Hallar la matriz de T en la base $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ siendo:

$$e_1 = e'_1,\ e_2 = \frac{1}{2}e'_2,\ e_3 = e'_3 + e'_1 - \frac{1}{2}e'_2$$

Seminario de Álgebra Lineal y Geometría II.

Grado en Física. Curso 2011/2012.

Departamento de Matemáticas - Universidad de Salamanca.

SEMINARIO I.

1. Clasificación de Endomorfismos.

1.1. Polinomios caracterÌstico y anulador. Diagonalización.

1. Sea $\mathbb{R}_3[x]$ el espacio de polinomios reales de grado menor o igual que 3, y $f:\mathbb{R}_3[x]\to\mathbb{R}_3[x]$ el endomorfismo:
$$f\big(p(x)\big)=x\big(p(x+1)-p(x)\big).$$
Calcular el polinomio característico y el anulador y estudiar la diagonalización de f.
2. Calcular el polinomio anulador y estudiar la diagonalización del endomorfismo T cuyas ecuaciones son:
$$x'=x+t\,,\quad y'=y\,,\quad z'=z-t\,,\quad t'=3z+5t\,.$$
3. Estudiar en función de los distintos valores del parámetro a la diagonalización de la matriz:
$$A=\begin{pmatrix} a+1 & 0 & 2a\\ 1 & a & 2a\\ -1/2 & 0 & 0\end{pmatrix}$$
Para los valores de a en los que diagonaliza, calcular una base de diagonalización.
4. Calcular el polinomio característico y anulador de las siguientes matrices:
$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} a & 0 & 0\\ 1 & a & 0\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} a & 0 & 0\\ 1 & a & 0\\ 0 & 1 & a\end{pmatrix}.$$
5. Sea $M_{2\times 2}(k)$ el espacio vectorial de la matrices cuadradas de orden 2 con coeficientes en k. Estudiar la diagonalización del endomorfismo:
$$\begin{aligned} T_A\colon M_{2\times 2}(k)&\to M_{2\times 2}(k)\\ B&\mapsto A\cdot B\end{aligned}$$
donde $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & a\end{pmatrix}$ y $a\in k$.
6. Demostrar que para todo endomorfismo de $\mathbb{C}^2$ de determinante 1 y traza **distinta** de ± 2 existe una base en la que su matriz es $\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & 1/\lambda\end{pmatrix}$.

26-Octubre-2011

Prueba escrita I (1^0 Grado en Físicas)

1. Sea E un k-espacio vectorial y E_1, E_2 dos subespacios. Demuestra que $E_1 + E_2$ y $E_1 \cap E_2$ son subespacios de E. Escribe la fórmula que relaciona sus dimensiones. **(2 puntos)**

2. Define los conceptos de base y dimensión de un espacio vectorial y de coordenadas de un vector respecto de una base. **(2 puntos)**

3. Dados los vectores $u = (3, 0, -1, 2)$, $v = (1, 1, 1, -2)$ y $w = (0, 1, 0, 3)$, cuyas coordenadas están referidas a la base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ de $\mathbb{R}^4$, indica cuál de las siguientes afirmaciones es falsa:

(a) Los vectores $\{u, e_2, e_3, e_4\}$ forman una base de $\mathbb{R}^4$.
(b) El subespacio $\langle u, v\rangle$ es un suplementario del subespacio $\langle e_3, e_4\rangle$.
(c) El subespacio $\langle u, v, w\rangle$ es un suplementario del subespacio $\langle e_4\rangle$.
(d) El subespacio $\langle e_1, e_2\rangle$ es un suplementario del subespacio $\langle u, v\rangle$. **(2 puntos)**

4. Sean V y V' los subespacios de $M(2, \mathbb{R})$ dados por:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{R}) : t = x - y, x + z = 0 \right\}, \ V' = \left\{ \begin{pmatrix} a & a+b \\ -a & b \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{R}) : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Calcula la dimensión y una base de $V + V'$ y las coordenadas de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in V + V'$ respecto de dicha base. **(2 puntos)**

5. En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 3, se consideran los subespacios:

$$S = \{p(x) \text{ tal que } p(-1) = 0\}$$
$$T = \{p(x) \text{ tal que } p(x) = 2b + (a+b)x + bx^2 + ax^3, \text{ con } a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Calcula la dimensión y una base de S, T, $S \cap T$. Calcula también un suplementario de T. **(2 puntos)**

Gloria Serrano Sotelo
Departamento de MATEMÁTICAS

26-Octubre-2011

Prueba escrita I (1^0 Físicas)

1. Sea E un k-espacio vectorial y E_1, E_2 dos subespacios. Demuestra que $E_1 + E_2$ y $E_1 \cap E_2$ son subespacios de E. Escribe la fórmula que relaciona sus dimensiones. **(2 puntos)**
Solución.
Sean E_1 y E_2 subespacios vectoriales de E. Se definen la **suma** $E_1 + E_2$ y la **intersección** $E_1 \cap E_2$ por

$$E_1 + E_2 = \{e \in E : e = u + v\,,\ \text{donde } u \in E_1 \text{ y } v \in E_2\}$$
$$E_1 \cap E_2 = \{e \in E : e \in E_1 \text{ y } e \in E_2\}$$

Probaremos que ambos **son subespacios vectoriales** de E comprobando que son cerrados por combinaciones lineales:

- Si $u+v, u'+v' \in E_1 + E_2$ y $\lambda, \mu \in k$ el vector $\lambda(u+v) + \mu(u'+v')$ está en $E_1 + E_2$ pues $\lambda(u+v) + \mu(u'+v') = \lambda u + \lambda v + \mu u' + \mu v' = (\lambda u + \mu u') + (\lambda v + \mu v') \in E_1 + E_2$, ya que E_1 y E_2 son cerrados por combinaciones lineales.
- Si $e, e' \in E_1 \cap E_2$ y $\lambda, \mu \in k$, su combinación lineal $\lambda e + \mu e'$ es un vector de E_1 y también de E_2, ya que ambos son subespacios y, por tanto, cerrados por combinaciones lineales. Luego $\lambda e + \mu e'$ es un vector de la intersección $E_1 \cap E_2$.

Se verifica la siguiente **fórmula de dimensión**

$$\dim_k(E_1 + E_2) = \dim_k E_1 + \dim_k E_2 - \dim_k(E_1 \cap E_2)$$

2. Define los conceptos de base y dimensión de un espacio vectorial y de coordenadas de un vector respecto de una base. **(2 puntos)**
Solución.

- Los vectores $\{e_1, \dots, e_n\}$ **generan** E si todo vector e de E se puede expresar como combinación lineal de ellos, $e = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$ para ciertos $\lambda_i \in k$.
- Los vectores $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E son **linealmente independientes** si ninguno de ellos es combinación lineal de los restantes o, lo que es equivalente, si existe una combinación lineal de ellos igual al vector cero, necesariamente los escalares de la combinación lineal son cero, si $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Definición 1. Los vectores $\{e_1, \dots, e_n\}$ forman una **base** de E si generan E y son linealmente independientes.

El Teorema de *Caracterización de una base*, que dice:
Los vectores $\{e_1, \dots, e_n\}$ forman una base de E si y sólo si cualquier vector de E se puede expresar de modo único como combinación lineal de ellos.
Nos permite definir:

Definición 2. Las **coordenadas de un vector respecto de una base** son los escalares de la combinación lineal, es decir, si $e = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$ es la expresión del vector e en la base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E, los escalares $(\lambda_1, \dots \lambda_n)$ son sus **coordenadas** en esa base.

Como todas las bases de un k-espacio vectorial tienen el mismo número de elementos (*Teorema de la base*), podemos definir:

Definición 3. La **dimensión** del espacio vectorial E es el número de elementos de una base de E.

3. Dados los vectores $u = (3, 0, -1, 2)$, $v = (1, 1, 1, -2)$ y $w = (0, 1, 0, 3)$, cuyas coordenadas están referidas a la base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ de $\mathbb{R}^4$, indica cuál de las siguientes afirmaciones es falsa:

(a) Los vectores $\{u, e_2, e_3, e_4\}$ forman una base de $\mathbb{R}^4$.
(b) El subespacio $\langle u, v\rangle$ es un suplementario del subespacio $\langle e_3, e_4\rangle$.
(c) El subespacio $\langle u, v, w\rangle$ es un suplementario del subespacio $\langle e_4\rangle$.
(d) El subespacio $\langle e_1, e_2\rangle$ es un suplementario del subespacio $\langle u, v\rangle$. **(2 puntos)**

Solución.
(d) es FALSA:

$$\operatorname{rg}(e_1, e_2, u, v) \neq 4\,,\ \text{ya que} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0\,.$$

4. Sean V y V' los subespacios de $M(2, \mathbb{R})$ dados por:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M(2,\mathbb{R}) : t = x - y, x + z = 0 \right\}\,,\ V' = \left\{ \begin{pmatrix} a & a+b \\ -a & b \end{pmatrix} \in M(2,\mathbb{R}) : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Calcula la dimensión y una base de $V + V'$ y las coordenadas de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in V + V'$ respecto de dicha base. **(2 puntos)**

Solución.

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -x & x-y \end{pmatrix} \in M(2,\mathbb{R}) \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$V = \left\langle A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V' = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Para hallar la dimensión de $V + V'$ calcularemos las coordenadas de las matrices A_1, A_2, B_1, B_2 en la base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ de $M(2, \mathbb{R})$:

$$A_1 = (1, 0, -1, 1), A_2 = (0, 1, 0, -1), B_1 = (1, 1, -1, 0), B_2 = (0, 1, 0, 1)$$

Se tiene:

$$V + V' = \langle A_1, A_2, B_1, B_2 \rangle \quad \text{y} \ \dim_{\mathbb{R}}(V + V') = \operatorname{rg}(A_1, A_2, B_1, B_2)$$

$$\operatorname{rg}(A_1, A_2, B_1, B_2) = \operatorname{rg}(A_1, A_2, B_2) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 3\,,\ \text{pues } A_1 + A_2 = B_1$$

Resulta

$$V + V' = \langle A_1, A_2, B_2 \rangle\,;\ \dim_{\mathbb{R}}(V + V') = 3\,.$$

Calculemos las coordenadas (α, β, γ) de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ en la base $\{A_1, A_2, B_2\}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta + \gamma \\ -\alpha & \alpha - \beta + \gamma \end{pmatrix}$$

Se obtiene:

$$\alpha = 1\,, \quad \beta = 1\,, \quad \gamma = 1\,.$$

5. En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 3, se consideran los subespacios:

$$\begin{aligned} S =& \{p(x) \text{ tal que } p(-1) = 0\} \\ T =& \{p(x) \text{ tal que } p(x) = 2b + (a+b)x + bx^2 + ax^3, \text{ con } a, b \in \mathbb{R}\}\,. \end{aligned}$$

Calcula la dimensión y una base de S, T, $S \cap T$. Calcula también un suplementario de T.
(2 puntos)
Solución.
Sea E el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 3. Sabemos que $E = \langle 1, x, x^2, x^3 \rangle$ y $\dim_{\mathbb{R}} E = 4$. Se tiene:

$$\begin{aligned} S &= \{p(x) \in E : p(-1) = 0\} = \{a + bx + cx^2 + dx^3 \in E : a - b + c - d = 0\} = \\ S &= \{(a, b, c, a - b + c) \in E\} = \langle (1,0,0,1), (0,1,0,-1), (0,0,1,1) \rangle = \\ S &= \langle 1 + x^3, x - x^3, x^2 + x^3 \rangle \end{aligned}$$

Luego

$$\dim_{\mathbb{R}} S = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 3 \quad \text{ y } \{1 + x^3, x - x^3, x^2 + x^3\} \text{ es una base de } E.$$

$$\begin{aligned} T &= \{2b + (a+b)x + bx^2 + ax^3 \in E\} = \{(2b, a+b, b, a) : a, b \in \mathbb{R}\} = \\ T &= \langle (2,1,1,0), (0,1,0,1), \rangle = \langle 2 + x + x^2, x + x^3 \rangle \\ &\dim_{\mathbb{R}} T = 2\,, \quad \{2 + x + x^2, x + x^3\} \text{ es una base de } T \end{aligned}$$

Calculemos $S \cap T$:

$$p(x) \in S \cap T \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} p(x) \in S : p(-1) = 0 \\ p(x) \in T : p(x) = 2b + (a+b)x + bx^2 + ax^3 \end{array} \right\} \Leftrightarrow 2b - (a+b) + b - a = 0$$

Luego

$$b = a\,, \quad p(x) = 2a + (a+a)x + ax^2 + ax^3 = a(2 + 2x + x^2 + x^3)\,, \quad S \cap T = \langle 2 + 2x + x^2 + x^3 \rangle\,.$$

Un suplementario de T es $T' = \langle x^2, x^3 \rangle$ pues $\operatorname{rg} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Modelo de trabajo propuesto on-line.

STVDIVM CAMPVS VIRTVAL

VNIVERSIDAD D SALAMANCA
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Algebra Lineal y Geometría I. Curso 11-12

studium ▶ AGI(11/12) ▶ Tareas ▶ Trabajo 1

Actualizar Tarea

Ver 62 tareas enviadas

1. Sean E_1 y E_2 subespacios de un k-espacio vectorial E. Demuestra, sin utilizar bases, que las siguientes proposiciones son equivalentes:

(a) $E = E_1 \oplus E_2$

(b) Todo vector de E se expresa de modo único como suma de un vector de E_1 y otro de E_2.

2. Sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base del $\mathbb{R}$-espacio vectorial E y T el endomorfismo de E definido por:

$$\mathrm{T}(e_1) = e_1 + 3e_2 + 6e_3\,,\ T(e_2) = -3e_1 - 5e_2 - 6e_3\,,\ T(e_3) = 3e_1 + 3e_2 + 4e_3\,.$$

(a) Demuestra que $\ker(T + 2I)$ y $\ker(T - 4I)$ son subespacios vectoriales de E que quedan invariantes por T.

(b) Calcula la dimensión y una base de cada uno de los subespacios invariantes $\ker(T+2I)$ y $\ker(T-4I)$ y prueba que son subespacios suplementarios.

(c) Calcula la matriz , $\bar{A}$, de T respecto de la base de E definida por las bases de $\ker(T + 2I)$ y $\ker(T - 4I)$ que has calculado en el apartado anterior.

(d) Escribe la expresión matricial que relaciona la matriz de T en la base inicial dada con la matriz $\bar{A}$ del apartado anterior.

Disponible en: sábado, 3 de diciembre de 2011, 01:35
Fecha límite de entrega: sábado, 17 de diciembre de 2011, 23:55

Álgebra lineal y Geometría II. Curso 11-12

Vista previa del cuestionario

Comenzar de nuevo

Los estudiantes verán este cuestionario en una ventana segura

1

Puntos: 1

Sea T un endomorfismo de $\mathbb{R}^4$ con polinomio característico $x^4 + x^2 - 2$. Sólo una de las afirmaciones siguientes es **falsa**:

Seleccione una

- ○ T es diagonalizable.
- ○ Existe una recta r de $\mathbb{R}^3$ tal que $T(e) \in r$ para todo $e \in r$.
- ○ Existe una recta formada por vectores propios de valor propio -1.
- ○ Existe una recta r de $\mathbb{R}^3$ tal que $T(e) = e$ para todo $e \in r$.

2

Puntos: 1

Sea $A \in M(3, \mathbb{R})$ una matriz invertible tal que $A^3 - 4A = 0$. Si T es el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ asociado a A, sólo una de las afirmaciones siguientes es **falsa**:

Seleccione una

- ○ El polinomio característico de T puede ser $(x-2)^2(x+2)$.
- ○ El polinomio anulador de T puede ser $x(x-2)(x+2)$.
- ○ Si T tiene dos valores propios diferentes su polinomio anulador es $(x-2)(x+2)$.
- ○ Existe una base de $\mathbb{R}^3$ en la que la matriz de T tiene forma diagonal.

3 Puntos: 1

Sólo una de las afirmaciones siguientes es **falsa**:

Seleccione una

- Si T es invertible, T no puede tener un valor propio igual a cero.
- Si 0 es un valor propio de T, T no puede ser un isomorfismo.
- Si A es una matriz hemisimétrica de orden impar su determinante es cero.
- Cualquier endomorfismo asociado a una matriz hemisimétrica de orden par tiene un valor propio igual a cero.

4 Puntos: 1

Sea T el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ definido por $T(x, y, z) = (3x + 2y, -x, 3x + 4y + z)$.
La matriz asociada a T en cierta base es:

Seleccione una respuesta.

- $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

5 Puntos: 1

¿En cuál de los siguientes casos se puede asegurar que el endomorfismo T NO diagonaliza?

Seleccione una respuesta.

- Su polinomio característico es $(x-2)(x+3)$
- Su polinomio característico es $(x-2)^2(x+3)$
- Su polinomio anulador es $(x-2)(x+3)$
- Su polinomio anulador es $(x+3)^2$

6 Puntos: 1

El valor de λ para el que el vector $e = (1,2,3)$ es un vector propio del endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ de matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 6 & -\lambda \\ 3 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ es:

Seleccione una respuesta.

- $\lambda = 2$
- $\lambda = -3$
- $\lambda = -2$
- $\lambda = 3$

7 Puntos: 1

Sea $A \in M(n, \mathbb{C})$. Sólo una de las afirmaciones siguientes es **falsa**:

Seleccione una

- Si A es nilpotente, 0 es su único valor propio.
- Si A es hemisimétrica de orden impar, A tiene un valor propio igual a 0.
- A es invertible si y sólo si no tiene ningún valor propio nulo.
- Si 0 es el único valor propio real de A, A es nilpotente.

Guardar sin enviar | Enviar todo y terminar

Material docente para las sesiones con MATHEMATICA.

Los siguientes guiones fueron diseñados como soporte al desarrollo de las dos sesiones prácticas en el aula de informática utilizando el programa MATHEMATICA.

Sesión 1. Elementos a usar de MATHEMATICA

- Breve introducción al programa MATHEMATICA y a las distintas posibilidades de aplicación.
- Células. Se explica la división de los contenidos en células, los distintos tipos de éstas, la utilidad de cada una y la jerarquía que permite desplegar o recoger contenidos.
- Sintaxis: discriminación entre mayúsculas y minúsculas, significado de los espacios, uso de los delimitadores `( )`, `/`, `{ }`, `[ ]`, `(* *)`,...
- Ejemplos de funciones predefinidas (`Limit`, `Solve`, `Sqrt`, `Sin`, `Cos`, `Exp`, `Log`,...)
- Ayuda mediante `?` y ayuda ampliada con ejemplos, distintos usos de los comandos y comandos relacionados.
- Constantes predefinidas (`I`, `E`, `Pi`, `Infinity`,...)
- Uso de resultados previos mediante `%` y `%n`
- Uso de variables para almacenar resultados que se usarán después
- Introducción al uso de listas en MATHEMATICA
- Matrices como listas de dos niveles.
- Acceso a elementos individuales de una lista.
- Comandos para trabajar con matrices: `Transpose`, `InverseMatrix`, `Det`, `MatrixForm`, `Length`, `Dimensions`.

Sesión 2. Clasificación de endomorfismos con MATHEMATICA

Se introducen algunos comandos algo más específicos que serán necesarios para el desarrollo de la práctica: producto de matrices mediante ".", producto de un escalar o variable por una matriz, `NullSpace` para calcular el núcleo de un morfismo asociado a una matriz, `CharacteristicPolynomial` para calcular el polinomio característico de una matriz cuadrada, `IdentityMatrix` para obtener una matriz identidad de dimensión prefijada, `MatrixRank` para obtener el rango de una matriz, `MatrixPower` para calcular potencias de matrices, `Factor` para factorizar polinomios.

Enunciado del problema a resolver. Calcular la matriz de Jordan y una base de Jordan de un endomorfismo con matriz asociada `M` (se considera un espacio de dimensión al menos 6 y un endomorfismo que permita ilustrar los diferentes casos posibles a la hora de obtener los elementos de una base de Jordan).

Resolución.

Cálculo del polinomio característico. Primero se aplica estrictamente la definición y se calcula `Det[M - x IdentityMatrix[n]]`. Mediante `Factor` se obtiene la factorización del polinomio obtenido. Comprobamos que se obtiene el mismo resultado mediante el comando específico predefinido en el programa, `CharacteristicPolynomial[M,x]`.

En función de los resultados obtenidos se calculan los rangos de las matrices asociadas a los distintos factores primos del polinomio caracterísico (y eventualmente de sus potencias) lo que permite conocer las dimensiones de los correspondientes núcleos y por tanto sabe cómo se tomarán los vectores de la base de Jordan que vamos a calcular. Ejemplo:

```
MatrixRank[M-2 IdentityMatrix[n]],
MatrixRank[MatrixPower[M,2]+M+ IdentityMatrix[n]],
MatrixRank[MatrixPower[M-2 IdentityMatrix[n],2]],...
```

En función de los datos del paso anterior, se pasan a calcular explícitamente los núcleos en los que deben (o no deben) estar los vectores que generan cada monógeno, utilizando `NullSpace`. Ejemplo:

```
NullSpace[M-2 IdentityMatrix[n]],
NullSpace[MatrixPower[M,2]+M+ IdentityMatrix[n]],
NullSpace[MatrixPower[M-2 IdentityMatrix[n],2]],...
```

Multiplicando por la matriz adecuada se obtienen el resto de vectores de la base de cada monógeno.

Para obtener la matriz de cambio de base, `B`, se crea una lista con los vectores de la base de Jordan calculada y se transpone mediante `Transpose`. Finalmente, mediante `InverseMatrix[B].M.B` se comprueba que en la nueva base la matriz tiene la forma canónica de Jordan correspondiente a los datos calculados.

Material de apoyo para el uso de WolframAlpha.

Decía en su presentación: "WolframAlpha es la primera etapa de un proyecto a largo plazo para hacer computable el conocimiento sistemático".

No sólo incluye las posibilidades de su programa comercial Mathematica sino que utiliza sus algoritmos integrados y su enorme y creciente base de datos para dar respuesta a cualquier cálculo, palabra o frase que introduzcamos.

Desde que Stephen Wolfram lo lanzó en el año 2009 ha mejorado y cambiado mucho, sobre todo en este último curso.

Probadlo, merece la pena: `http://www.wolframalpha.com`

Conviene que creéis una cuenta para tener Wolfram ID. Además, esto os permitirá tener acceso a vuestros favorites, history, down and uplouds, widgets y API's, así como acceder a una versión de prueba del WolframAlphaPro.

Si queréis aprender la sintaxis de Mathematica basta con que en cada celda situéis el cursor sobre la letra **A** (Copypiableplaintext) y al hacer clic aparecerá la mini-ventana con el input de Mathematica.

Os cuento algunas cosas que os vendrán muy bien:

- ¿Cómo se escribe una matriz? Una matriz es un conjunto cuyos elementos son sus filas, siendo cada fila un conjunto de tantos elementos como columnas tenga la matriz. Un ejemplo de matriz de orden 3×3 es el siguiente:
$$\{\{3, 2, 0\}, \{-1, 0, 0\}, \{3, 4, 1\}\}.$$
Sólo con escribir esto en la ventana de WolframAlpha y ejecutar obtendréis, entre otras cosas, el determinante, la traza, el polinomio característico, los valores propios (eigenvalues), vectores propios (eigenvectors), la inversa si existe y, en otro caso, el rango de la matriz. Observad que los valores propios los calcula sobre los complejos.

- Algunas funciones para matrices que os pueden resultar más que útiles (muchas de ellas las podéis deducir de poner en práctica el párrafo anterior): MatrixRank (rango de la matriz), NullSpace (nuestro Ker), Factor (factoriza un polinomio, sobre C), CharacteristicPolynomial, Eigenvalues, Eigenvectors y JordanDecomposition (os da la forma de Jordan J y la matriz S de cambio de base, debéis interpretar en qué coincide con lo que nosotros hacemos).