DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA Y DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES

UNIVERSIDAD DE SALAMANCA

ANÁLISIS DE LA PRÁCTICA DEL DOCENTE UNIVERSITARIO DE PRECÁLCULO. ESTUDIO DE CASOS EN LA ENSEÑANZA DE LAS FUNCIONES EXPONENCIALES

Tesis doctoral de

Jeannette Vargas Hernández

Realizado bajo la dirección de

Dra. María Teresa González Astudillo
Dr. Salvador Llinares Ciscar

Salamanca, 2012

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA Y DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES

UNIVERSIDAD DE SALAMANCA

ANÁLISIS DE LA PRÁCTICA DEL DOCENTE UNIVERSITARIO DE PRECÁLCULO. ESTUDIO DE CASOS EN LA ENSEÑANZA DE LAS FUNCIONES EXPONENCIALES

Tesis doctoral de

Jeannette Vargas Hernández

Salamanca, 2012

Doy el correspondiente crédito a NASA/WMAP Science Team por la representación del universo; imagen adaptada que estoy utilizando en la portada de la memoria de tesis.

La representación «Línea del tiempo del Universo» la obtuve de la página de dominio público ***http://commons.wikimedia.org/wiki/Template:PD-USGov-NASA/es*** *y la imagen de alta resolución la tomé de http://map.gsfc.nasa.gov/media/060915/index.html. El empleo del mencionado recurso atiende las políticas de la NASA sobre copyright según las cuales* ***"el material de la NASA no está protegido con copyright a menos que se indique lo contrario".***

Diseño de Portada. Andrés Roberto Gómez Vargas. Estudiante de cuarto año. Ingeniería de sistemas y computación con opción académica en computación visual y arte. Colombia. Universidad de los Andes.

VNiVERSiDAD
D SALAMANCA

Dra. María Teresa González Astudillo, Profesora Titular de Universidad del Departamento de Didáctica de la Matemática y Didáctica de las Ciencias Experimentales de la Universidad de Salamanca y Dr. Salvador Llinares Ciscar, Catedrático del Departamento de Innovación y Formación Didáctica de la Universidad de Alicante.

HACEMOS CONSTAR:

Que la presente memoria titulada ANÁLISIS DE LA PRÁCTICA DEL DOCENTE UNIVERSITARIO DE PRECÁLCULO. ESTUDIO DE CASOS EN LA ENSEÑANZA DE LAS FUNCIONES EXPONENCIALES ha sido realizada bajo nuestra dirección por Jeannette Vargas Hernández y constituye su tesis para optar al grado de doctor.

Y para que conste y tenga los efectos oportunos ante el Departamento de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales de la Universidad de Salamanca, firmamos el presente documento.

Salamanca a de de dos mil doce.

Fdo: Fdo

Resumen

Análisis de la práctica del docente universitario de precálculo. Estudio de casos en la enseñanza de las funciones exponenciales
por

Jeannette Vargas Hernández

La literatura de investigación en educación muestra que hace aproximadamente cuatro décadas la enseñanza se consideraba un arte y, en consecuencia, era difícil de analizar, intervenir y someter a ciertas reglas. La manera de concebir al profesor y la enseñanza, desde la teoría y la investigación educativa, ha sufrido una evolución que se puede ver en términos del objeto específico de estudio o de la complejidad considerada.

Por ejemplo, Rosenshine (1979) señala que inicialmente se asoció la buena enseñanza con características personales del profesor. Luego el interés se centró en la interacción entre maestro y estudiantes y, posteriormente los estudios se centraron en el estudiante y, en particular, en el dominio de un cierto contenido.

Medley (1979) señala que la investigación sobre la eficacia del profesor ha tomado en consideración sus características personales y profesionales, los métodos usados para enseñar, las conductas y el clima del aula, y las competencias del profesor. Por su parte, Koelher y Grouws (1992) identifica cuatro niveles de complejidad de los estudios sobre la enseñanza de las matemáticas. En el primero se considera la efectividad del maestro relacionada con sus rasgos personales como el buen juicio, consideración, entusiasmo, magnetismo personal, apariencia personal y lealtad. En el segundo se incluyen estudios que involucran observaciones múltiples del aula que proporcionan detalles de la instrucción en matemáticas. En el tercero se amplía la mirada a los resultados del alumno y se incluyen tanto actitudes como logros; se considera que características del alumno (e.g., género, raza, nivel de confianza) pueden afectar la práctica del maestro y las acciones del estudiante mismo. El cuarto nivel recoge estudios en los que se reconoce cabalmente la complejidad de la enseñanza de las matemáticas en términos de una diversidad de aspectos que actúan interconectadamente (e.g., rango amplio de niveles de habilidad a lograr, rango amplio de temas para enseñar, surtido muy amplio de metodologías entre las cuales escoger). Adicionalmente hay técnicas, de recogida y análisis de datos, más sofisticadas que permiten abordar preguntas de investigación más complejas. Probablemente, el cambio

más sustancial logrado en los estudios de este nivel radica en la consciencia que se tiene de la necesidad de conectar la investigación sobre la enseñanza con la investigación sobre el aprendizaje.

En la década de los ochenta, y a partir de autores como Donald Schön, se asume que los profesores generan conocimiento sobre la enseñanza a partir del trabajo práctico que realizan al enseñar en aulas particulares, y que ese conocimiento merece ser investigado. Al mismo tiempo surge con fuerza el interés en las creencias, desde diversas disciplinas (psicología, ciencias políticas, antropología, educación). Entre los educadores, el interés en el estudio de las creencias y concepciones de los profesores lo alimentó el cambio de paradigma, el pasar de concebir al profesor como un técnico a concebirlo como un ser pensante, reflexivo.

Así, a finales de la década de los noventa surge el interés por comprender la gestión del docente en el aula y comienza a considerarse la importancia de analizar la actividad de los docentes en el aula. De igual manera las creencias y las concepciones adquieren un papel prominente como base para estudiar a los profesores de matemáticas y su enseñanza.

Según Sánchez (2010, 2011), en la actualidad, en el campo de la educación matemática se percibe un aumento de los estudios que investigan las creencias del profesor al igual que aspectos particulares de las prácticas de los docentes en el aula (e.g., decisiones fuera del aula de clase, acerca de los recursos usados por los profesores para definir el contenido de las lecciones, sobre aspectos concretos de las prácticas de los docentes en el aula; por ejemplo, los tipos de preguntas formuladas durante las clases). Sin embargo, es necesario ampliar la investigación en el campo a nuevas temáticas (Camacho, 2011) de manera que los problemas de investigación también se sitúen en el nivel universitario (Moreno, 2011). Nuestra investigación, que aborda el análisis de la práctica de docentes en el nivel universitario y se enfoca en la enseñanza de funciones exponenciales, pretende contribuir a llenar los espacios vacíos mencionados por Camacho y Moreno.

En nuestra investigación, se acude a que la visibilidad del discurso y la naturaleza de las acciones del profesor provienen de una perspectiva sociocultural y se reconoce que la práctica docente es una actividad mediada por el uso de ciertos "instrumentos" (Llinares, 2000) y por lo tanto permiten caracterizarla. Desde esta perspectiva, en segundo lugar, se asume «*que los instrumentos utilizados y su forma de utilización influyen en el tipo de comprensión matemática*» (Llinares, 2000, p.115) y el objetivo del profesor es favorecer dicha comprensión de los estudiantes.

El otro aspecto explícito en nuestro estudio es que el término concepciones va a hacer referencia a un conjunto de «*imágenes mentales, creencias, significados, proposiciones, reglas, y preferencias*» (Thompson, 1992, p.130) para ello el investigador a partir del análisis tanto de las acciones como de las opiniones y respuestas a preguntas sobre la práctica del docente, establece un conjunto de creencias y posicionamientos, que él interpreta, que posee el individuo (Carrillo, 1998).

El estudio que se presenta en este documento analiza la práctica profesional de docentes universitarios al enseñar la función exponencial en cursos de precálculo. Se analizan las fases de planificación y de gestión en el aula, tomando como referencia, por una parte, los mecanismos de construcción de un concepto matemático, propuestos por Ed Dubinsky en su teoría Action Process Object Schema (APOS) y, por otra parte, la modelación de la descomposición genética de un concepto, constructo expuesto desde un marco sociocultural por Gavilán (2005).

Nuestra investigación, de corte cualitativo, se enfoca en el estudio de dos casos: el de Ernesto y el de Arturo. En ella se pretende dar respuestas a dos preguntas: (i) ¿cómo modelan los profesores de precálculo en su práctica docente los mecanismos de construcción del concepto de función exponencial? y (ii) ¿cuáles son las características que subyacen a las prácticas analizadas?

En el desarrollo de la investigación se distinguen claramente tres momentos. En el primero, tras la apropiación de un marco teórico, se construye una propuesta de *descomposición genética del concepto función exponencial*. En el segundo, se recoge información directa de las sesiones de aula de los docentes de precálculo mientras enseñan la función exponencial y, a través de entrevistas semiestructuradas, se recoge nuevamente información directa sobre las intenciones de las acciones del profesor en cada una de las clases. En el tercero, se examina y analiza la práctica del docente, a través del constructo *modelación de la descomposición genética* para, posteriormente, determinar las características subyacentes a esa práctica, que determinarán lo que denominamos la *perspectiva de la práctica* (García, M.; Gavilán, J.M. & Llinares, S., en prensa).

Como parte del primer momento de la investigación, para generar un referente con el cual examinar la práctica docente en términos de la posibilidad del profesor de potenciar ciertos mecanismos de construcción, a partir de la teoría APOS, se elabora una propuesta de descomposición genética de la función exponencial. Para hacerla se llevó a término, entre otros, una revisión histórica epistemológica del desarrollo de los conceptos de logaritmo, función logarítmica, exponente y función exponencial, y se tomaron decisiones para delimitar un planteamiento de la función exponencial que fuera independiente del de la función logarítmica, atendiendo a los cambios realizados a finales del siglo XVIII en la definición de estas funciones trascendentes.

Por otro lado, también se integran en la propuesta de descomposición genética de la función exponencial resultados de investigaciones en educación matemática relativas a la comprensión de los exponentes, el aprendizaje de funciones exponenciales particulares, los procesos de inferencias de los estudiantes sobre la caracterización de estas funciones particulares y las consideraciones sobre el rol en la enseñanza y el aprendizaje de las diferentes aplicaciones de estas funciones exponenciales.

En un segundo momento se realiza la grabación de las sesiones de clase en las que se trabaja el concepto de función exponencial y de entrevistas video grabadas anteriores y posteriores a cada una de las sesiones para obtener información sobre su planificación. Para la clasificación, depuración y análisis de los datos se usa el programa Atlas.ti. Hemos realizado tres niveles de análisis: uno descriptivo y dos de inferencias para establecer los resultados de la investigación.

Se recurre a la viñeta como herramienta para organizar y presentar los resultados de los análisis de la práctica del docente (Gavilán, et al. 2007a, 2007b); en ella se muestra una descripción detallada de los segmentos de la lección considerados en términos de las tareas propuestas por el profesor, los mecanismos de construcción potenciados por el profesor, el uso de los sistemas de representación y las relaciones entre los elementos del concepto. Los análisis relativos a la forma en que el profesor propicia la construcción de conocimiento y usa los instrumentos, se sintetizan en dos modelaciones de la descomposición genética de la función exponencial que permiten identificar dos perspectivas diferentes de la práctica de los docentes.

Las modelaciones de la descomposición genética de la función exponencial resultado de esta investigación indican respecto al uso de los registros de representación que Ernesto procura integrar los significados gráficos y simbólicos de los elementos matemáticos del concepto. Esta integración le permite explicitar nociones subyacentes como son la iteración, la aproximación y la continuidad. Apoyándose además en el uso de programas de cálculo simbólico como Derive, el profesor pretende potenciar en sus estudiantes la construcción del significado del concepto independiente del modo de representación empleado; sin embargo, el recurso de identificar la función exponencial como aquella cuya variable está en el exponente genera cierta dependencia de su representación simbólica.

Ernesto enfatiza explícitamente las relaciones entre los elementos matemáticos como una manera de dotar de significado el concepto, lo que se traduce en su práctica en una construcción progresiva de los conceptos. Es decir, no solo establece relaciones entre las formas de conocer, apoyándose en una para potenciar la siguiente (acción-proceso-objeto), sino que además la secuencia que imprime a su enseñanza procura favorecer los mecanismos de interiorización y encapsulación, valiéndose inicialmente del examen y la acción sobre funciones particulares, para así propiciar la interiorización y luego encapsular la función exponencial y proseguir con la tematización de ésta.

En contraste, es característica de la modelación de Arturo la construcción independiente de los significados gráficos y simbólicos de los elementos matemáticos del concepto. Arturo hace notar diferencias e independencia entre los registros simbólicos y los gráficos. Él parece considerar que la presentación formal de un objeto matemático se debe hacer mediante el registro simbólico y que los registros gráficos se deben relegar a un segundo plano tanto en la secuencia de enseñanza como en su capacidad de contener el significado del concepto.

La modelación de Arturo para construir el concepto de función exponencial recurre desde el comienzo a la definición del concepto de función exponencial genérica en un registro simbólico y en el curso de la enseñanza va favoreciendo el reconocimiento del objeto a través del conocimiento de los elementos matemáticos que lo constituyen: base, dominio y rango de la función, monotonía, asíntota, corte con el eje y.

A estas dos prácticas de los docentes, subyace una perspectiva de la práctica que, a través de la modelación de la descomposición genética de la función exponencial, nos devela una perspectiva con tendencia holística, en un caso, y tradicional, en el otro. Los procedimientos de descripción e inferencia en nuestra investigación, aportan información sobre la complejidad de la relación entre las perspectivas del profesor que subyacen a su práctica y las características de su práctica. Además estos resultados apoyan lo aportado por las investigaciones previas (García et al, en prensa) en la línea de comprender la relación entre la práctica del profesor y la perspectiva que la apoya.

Desde los resultados obtenidos podemos inferir sugerencias para la enseñanza. Dos referencias consideramos para estas implicaciones instruccionales. En primer lugar, el que la modelación de la descomposición genética de la función exponencial identificada en el caso de Ernesto tiene como eje transversal la noción del interés compuesto y continuo. En segundo lugar consideramos la propuesta de Elstak (2007) de que el significado de los exponentes se debe construir de manera simultánea con el de la función exponencial a través de su razón de cambio.

Debido a la manera tangencial en que los docentes abordaron la razón de cambio promedio de la función exponencial y en consonancia con lo indicado por Bradie (1998), parece que existe un vacío en cuanto a la reflexión, individual e institucional sobre la enseñanza de la función exponencial. En este sentido es imprescindible determinar qué es lo característico de la función exponencial, qué se debe enseñar en un curso de precálculo sobre esta función y, si se considera la razón de cambio promedio un elemento matemático importante en esta construcción, cómo abordar esta enseñanza y el estudio de la proporcionalidad entre la razón de cambio promedio y el valor de la función en un punto.

A mi familia

Agradecimientos

A mi directora de tesis, la Dra. María Teresa González Astudillo, que siempre tuvo a bien encontrar la forma apropiada de guiarme en la elaboración de la investigación. Gracias por ayudarme a construir una tesis doctoral de calidad y sobre todo por haber estado a mi lado en tantos momentos difíciles en esta trayectoria de estudios y vida.

A mi director tesis, el Dr. Salvador Llinares Ciscar, que siempre encontró una forma ágil, eficaz y completa para impulsar los avances de mi investigación y consolidar una memoria de tesis de calidad.

A Ernesto y Arturo, quienes de manera voluntaria y decidida colaboraron en la investigación como profesores en el estudio de casos.

A mis compañeros del Doctorado, Isabel, María José, Jesús, Pedro, Ana, Ademir, Martha y Monserrat por sus aportes en la formulación del proyecto y su compañía durante mi estancia en Salamanca, al igual que a los nuevos amigos que mis estudios en España me permitieron cultivar y de quienes recibí un apoyo importante.

A la Universidad Colegio Mayor de Cundinamarca por hacer posible la realización de mis estudios de postgrado mediante el otorgamiento de una Comisión de Estudios.

Al Dr. Modesto Sierra Vázquez y los profesores del Departamento de Didáctica de la Matemática y Ciencias Experimentales de la Universidad de Salamanca por sus enseñanzas y su gentil colaboración durante el tiempo de mis estudios de postgrado.

A todos los colegas, conocidos y amigos que contribuyeron a la realización de este trabajo investigativo, especialmente a mis compañeros de matemáticas de distintas Universidades de Colombia, Mario Pérez, Fernando Castro, Leonor Camargo y Edgar Guacaneme, por su amistad y su colaboración desinteresada en el análisis de algunos documentos de esta investigación.

A mi madre Ana Beatriz, mis hermanos, Francisco, Nury, Elena, Mercedes, Pedro, Clara, Gloría y Beatriz, y a mis sobrinos, todos ellos incondicionales a la hora de necesitarlos. Gracias por desvelarse a mi lado, por los abrazos y por confiar en mí.

Al Dr. Fabio Eslava, por su comprensión y apoyo en momentos claves de la realización de la investigación. Gracias por encontrar siempre la forma de evadir las distancias y hacerme llegar una palabra ocurrente para impulsarme a continuar con mi proyecto de vida y mis estudios.

A la vida, porque escribir esta líneas es muy gratificante no solamente por tener el espacio, en mi corazón y en mi mente, para mencionar a tantas personas que influyeron para que este propósito, de conocer otra cultura y realizar mis estudios, llegara a buen término, sino porque este cierre, también marca el inicio de un nuevo período con planes, que incluyen continuar en el ámbito de la investigación, de manera que confío que ellos deparen interesantes aportes a la comunidad de Didáctica de la Matemática.

CONTENIDO

APÉNDICES

CUADROS

FIGURAS E IMÁGENES

DIAGRAMAS Y ESQUEMAS

SÍNTESIS

INTRODUCCIÓN

MOTIVACIÓN Y APROXIMACIÓN AL PROBLEMA

En el Segundo Simposio Internacional de Educación Matemática, realizado en octubre de 1994 en Colombia, se presentaron tres proyectos gestados a raíz del nacimiento del Club EMA[1] dentro de un macro proyecto denominado Brecha, cuyo objetivo principal era el estudio de situaciones relativas a la transición del último grado de secundaria al primer semestre de universidad. Cada uno de los tres proyectos fue liderado por docentes de sendas instituciones de educación superior de Colombia: la Universidad de los Andes, la Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito (E.C.I.) y la Universidad Antonio Nariño.

En el proyecto Brecha, realizado en E.C.I., las investigadoras docentes manifiestan que "*Desde hace ya varios semestres se tiene inquietud entre los profesores de primer semestre de la Escuela Colombiana de Ingeniería acerca del bajo rendimiento académico de sus estudiantes en el área de matemáticas. Se ha notado, además, que este sentir no sólo es de la E.C.I. sino del ámbito universitario en*

Por un lado, antecedentes como los del proyecto Brecha y, por otro, manifestaciones en publicaciones de investigación matemática a nivel internacional, hacen notar el carácter de la asignatura de precálculo, identificándola, por ejemplo,

---

[1]El Club de Educación Matemática (Club EMA) fue un proyecto que "una empresa docente" puso en marcha en mayo de 1992 con el propósito de impulsar la consolidación de la comunidad colombiana de profesores de matemáticas como un grupo de profesionales que compartían una cultura propia y enriquecida y tenían una clara conciencia de pertenencia a una comunidad internacional de pares.

como "*Un Eslabón necesario entre las Funciones y el Análisis*" (Azcárate, 2000, p. 259), expresión con que la autora realza la identidad del precálculo y lo argumenta con otras investigaciones, en las cuales se plantea la necesidad de procesos previos a la introducción de noción de límite (Tall, 1991). Junto con afirmaciones en donde se subraya a la pendiente y la tasa media de variación como los dos conceptos clave del precálculo (Azcárate, 2000). Estos son reflejos de diversos estudios, algunos de ellos en la comunidad de educación en Colombia (Gómez y Mesa, 1996; Gómez y Valero, 1995; Gómez y Carulla, 1998; Mesa y Gómez, 1996) en los que se indaga y exponen resultados que se desprenden de un proyecto curricular marco de precálculo y varios sub proyectos.

Lo anterior, además de evidenciar la importancia de una materia de precálculo, concuerda con que en las universidades se tuvieron que tomar decisiones sobre esta materia, de las que surgen innumerables preguntas de investigación.

En Colombia, más concretamente en Bogotá, existen 7 universidades públicas y 32 universidades privadas, en las que se imparten programas de formación en pregrado. En algunos de ellos, durante los últimos 15 años, dadas las dificultades que los estudiantes tienen con algunos conceptos básicos, se incluyó, en el plan de estudios, dentro del primer semestre, una asignatura previa al cálculo. Con el fin de reforzar conceptos básicos se ha ido institucionalizando esta asignatura que se engloba bajo el nombre de *precálculo,* aunque reciba diferentes denominaciones según las instituciones. Como se ha indicado, el principal objetivo de esta materia es el trabajo relativo a los conceptos básicos de funciones, con el fin de que estos estudios previos permitan a los estudiantes cursar posteriormente con mayor éxito los cursos de cálculo. Tal asignatura, no solamente se encuentra en el plan de estudios de programas de pregrado donde se requiere una formación matemática rigurosa y formal sino también en otros programas de pregrado como es el caso, en algunas universidades, del grado en publicidad.

El interés personal hacia este campo de investigación en Educación Matemática proviene de mis funciones académicas y desempeño en programas de formación de docentes en instituciones de educación superior. Mi interés debía, además, conciliarse con otros dos aspectos, el primero de ellos es el desempeño diario en la enseñanza de precálculo a estudiantes de pregrado del área de la salud y, en segundo lugar, con algunas labores administrativas sobre la formulación de las directrices para la enseñanza de los contenidos matemáticos en dichos cursos.

La participación en un curso impartido por el Dr. Salvador Llinares, dentro del programa de doctorado de la Universidad de Alicante, permitió orientar la investigación. Mediante el planteamiento de preguntas de variada índole, justificadas por el gran desconocimiento que se tiene de la formación en la educación superior y el número escaso de investigaciones en Educación Matemática sobre las prácticas de estos docentes, se fue profundizando en el tema. Inicialmente estas preguntas eran ciertamente vagas: ¿Cómo se enseñan los conceptos matemáticos en los cursos de precálculo?, ¿Qué o cuáles conocimientos deben tener los docentes que imparten las asignaturas de precálculo?, ¿Cómo enseñar las funciones lineal, cuadrática y transcendentes básicas sin hacer uso de los conceptos de cálculo pero preparando para ello? Sin embargo, su planteamiento fue la manera de aproximarnos al problema y de ir concretando los diferentes elementos que forman parte de esta investigación.

Todos estos condicionantes se fueron delimitando y concretando poco a poco. La necesidad de buscar un tema matemático para centrar la investigación condujo a la selección del concepto de función exponencial dado que no se había realizado ninguna investigación sobre la práctica del profesor en torno a este tema, que ha sido escasamente investigado desde el punto de vista cognitivo y el fuerte impacto del concepto función exponencial y sus aplicaciones no solamente en lo tocante al crecimiento de poblaciones sino en el análisis y modelación de fenómenos en diversidad de campos. Así se gesta una primera y amplia pregunta con la cual se inicia la primera incursión en este campo: ¿Qué conocen los profesores universitarios de precálculo sobre funciones exponenciales y logarítmicas?

Después de redactar mi primer informe de investigación y de la presentación de la suficiencia investigadora en el doctorado de la Universidad de Salamanca, este interrogante se transforma en una pregunta con la cual se realizó gran parte del trabajo de indagación, ¿Cómo guía el docente la construcción de la función exponencial con estudiantes de precálculo? En ella, ya se hace explícita, por una parte, la decisión de encaminar la investigación sobre la práctica del docente en lugar de indagar sobre conocimiento didáctico del contenido, decisión que se adopta solamente después de numerosas lecturas sobre investigaciones llevadas a término en ambas líneas de trabajo; y, por otra, el reconocimiento de los requerimientos no fundamentalmente de contenido sino de destrezas, gustos y viabilidad frente a las oportunidades y condiciones del investigador.

En cuanto al concepto de función exponencial, a partir de una búsqueda y estudio exhaustivo de la literatura especializada se identificaron algunas investigaciones relevantes que atañan a la comprensión de los exponentes, el aprendizaje de los estudiantes de las funciones exponenciales particulares, los procesos de inferencias de los estudiantes sobre la caracterización de estas funciones particulares y las consideraciones sobre el rol en la enseñanza y el aprendizaje de las diferentes aplicaciones de estas funciones exponenciales, que permiten confirmar la escasa atención recibida por este concepto. Actualmente, podemos asegurar que no existen investigaciones previas que analicen la práctica de los docentes universitarios cuando enseñan el concepto de función exponencial.

APROXIMACIÓN A NUESTRO OBJETO DE ESTUDIO

El estado actual de la línea de investigación de análisis de la práctica del docente de matemáticas lo ha precedido un proceso de evolución descrito por Koelher y Grouws (1992) en términos del foco de interés y analizado por Rosenchine (1979) y Medley (1979) en términos de fases o ciclos.

Concretamente, el origen de la investigación del pensamiento del profesor, a partir de algunos antecedentes como los trabajos de Jackson (1968), Dahlof y Lundgren (1970), se ubica en 1975, año en el que se celebra el congreso del *National Institute of Education* (Gage, 1975; Perafán, 2002). A partir de este año, un buen número de académicos inician trabajos de investigación donde predomina la indagación sobre el pensamiento del profesor, estudios que se extenderán hasta la década de 1980 y que darán paso a una preocupación por el conocimiento del profesor. En ese momento, Shulman (1986) organiza los elementos del conocimiento base y se empieza a usar el término *pedagogical content knowledge*. Este cambio de interés hacia el conocimiento del profesor, se gesta a partir del reconocimiento de la insuficiencia del análisis psicológico y cognitivo, gracias al aporte, entre otros, de Schön (1983, 1987), el hecho de que los docentes son profesionales que generan conocimiento sobre la enseñanza a partir de ésta, y que ese conocimiento merece ser investigado. A finales de la década de 1990 se plantean nuevas preguntas, surge el interés por comprender la gestión del docente en el aula y se empieza a considerar importante realizar un análisis sobre la actividad que desarrollan los docentes en el aula.

De esta forma, hace aproximadamente quince años, al examinar el campo de la investigación sobre el docente, se podían encontrar revisiones que reportaban la gesta de una agenda de investigación sobre el análisis de las prácticas de los docentes en el aula, en donde se expresaba:

> *«…el objetivo de llegar a comprender mejor los procesos de enseñanza-aprendizaje en el aula ha puesto de manifiesto la necesidad de conceptualizar la noción de «práctica» introduciendo focos de estudio que modifican la problemática inicial centrada en la forma de conocer del profesor. La «gestión de la enseñanza-aprendizaje» se introduce así en las problemáticas de estudio como un aspecto de los intentos por conceptualizar la noción de práctica del profesor »* (Llinares, 1998, p. 165).

En la actualidad, la importancia de las investigaciones sobre la práctica del profesor la señalan y abordan, desde distintos enfoques teóricos, investigadores que buscan describir y proponer modelos que permitan explicarla (Llinares, 2000; Escudero y Sánchez, 1999a, 1999b, 2002, 2008; Franke *et al.*, 2007; Laborde y Perrin-Glorian, 2005; da Ponte y Chapman, 2006; Schoenfeld, 1998; Simon *et al.*, 2000;

Gavilán, *et al.,* 2007a., 2007b.; García *et al.,* en prensa; Sánchez, 2010, 2011). En particular, encontramos en estas investigaciones referencias a diversas connotaciones de la noción de práctica del docente, estudios llevados a término con marcos de la teoría sociocultural, junto con estudios que buscan evidenciar los vínculos entre la perspectiva del profesor y la práctica profesional, que son el foco de atención de esta investigación.

Nuestro estudio lo realizamos dentro de esta línea de investigación, y lo enmarcamos desde tres aspectos centrales: la práctica del docente, el nivel de escolaridad universitario y el concepto de función exponencial en los cursos de precálculo. Cada uno de estos aspectos exige y tiene un espacio específico en el tratamiento que se va a presentar y todos confluyen en nuestro estudio de un análisis de la práctica del docente universitario de precálculo en la enseñanza de la función exponencial.

En lo relativo al primer aspecto, como ya lo hemos expresado anteriormente, una de las líneas de investigación más actuales es la que trata de desentrañar la práctica del docente a través de diferentes referentes teóricos. Sin embargo, con independencia de dicho referente, la importancia de esta línea radica en asumir que la práctica del profesor es una "*variable especial*" con lo cual entenderemos que *«no es una "variable transparente" para el desarrollo de los procesos de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas»* (Gavilán *et al,* 2007a, p. 7), es decir, en el proceso educativo y en la gestión en el aula el papel del profesor se considera clave al concebirlo como un profesional reflexivo (Llinares, 1998).

La investigación concerniente a la práctica del docente, a la vez que ha contribuido con nuevas aproximaciones metodológicas en donde se relaciona el modelo de construcción del conocimiento en los estudiantes con las diferentes conductas del profesor (e.g., a través del uso de la idea de "viñeta", o el uso de metáforas para explicar el discurso del profesor), también intenta complementar otros procesos que se centran en describir, a través de la consideración del nivel de logros de los estudiantes, la eficacia de los diseños de instrucción, así como aquellas investigaciones que a partir de un modelo de aprendizaje de los estudiantes planean la realización de materiales. (Llinares, 2008).

Otra diversidad en esta línea es la consideración de la importancia de la comprensión de cómo los profesores reconocen, tienen en cuenta y dan sentido a lo que está sucediendo en las aulas (Mason, 2002; Jacobs *et al.,* 2007; Sherin, 2007). Así, se están realizando investigaciones en las que, mediante el uso de video cámara, se captan *clips* de momentos de la práctica; el mismo profesor decide cuáles de esos momentos de la instrucción capta mediante *clips* con los cuales luego el investigador caracteriza la práctica. En Colestock (2009) y Colestock y Sherin (2009), se realiza el análisis de la práctica profesional mediante una metodología en la cual el investigador analiza e identifica el cómo y cuándo se presenta el tipo de evento recogido en el *clip*, y se caracteriza la práctica del profesor, lo que permite establecer, entre otros aspectos, las creencias del profesor acerca de cómo aprenden los estudiantes.

En nuestro caso, al igual que otros autores, se asume que cuando un profesor realiza su labor en el aula, tiene como objetivo "que sus estudiantes construyan conocimiento matemático". Por tanto, el análisis de la práctica del profesor considera la manera en la que éste parece potenciar la construcción de conocimiento matemático en sus estudiantes. Este significado de la idea de práctica hace hincapié en la relación entre la enseñanza y el aprendizaje (Gavilán *et al.*, 2007a).

El segundo aspecto, que hemos señalado sobre nuestra investigación, es el nivel de educación universitaria en el cual se ubica el objeto de estudio. Sobre esta cuestión, existen revisiones que hacen ostensible la poca indagación que se ha realizado en las dos últimas décadas en el ámbito universitario dentro del campo de la Educación Matemática. Así, Moreno (2011) afirma «*tampoco son muy numerosas las investigaciones en el ámbito de bachillerato y mucho menos las del ámbito universitario, siendo éstas últimas más numerosas en temas de uso de tecnología*» (p. 121).

En este mismo sentido, tras revisar las publicaciones en didáctica de la matemática de los últimos 20 años, Camacho (2011) indica que desde el comienzo de la década de 1990 y «*casi con una periodicidad de un lustro se han publicado diversos estudios internacionales que, con enfoques generalmente diferentes, tratan de sintetizar las investigaciones realizadas a nivel internacional en el campo de la Educación Matemática.*» (p. 196). El investigador se refiere a los *Handbooks* publicados en 1992, 1996, 2002, 2006 y 2007.

Respecto al *Handbook of Research on the Psychology of Matematics Eduaction Past, Present and Future*, producido por el grupo de internacional para la psicología de la educación (PME), (Gutiérrez y Boero, 2006), Camacho (2011) observa que no existe un capítulo específico dedicado a la revisión de la investigación en los niveles superiores de la enseñanza. Sin embargo, él sostiene que, se puede considerar «*que hay tres capítulos que mantienen una relación directa con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en estudiantes de 17 a 20 años*» (p. 197). Señala que

> «*los capítulos que mayor conexión tienen con estos temas son los de Harel, Selden y Selden (2006), Mariotti (2006) y Ferrara, Pratt y Robutti (2006) que se refieren respectivamente al pensamiento matemático avanzado (PMA), a la demostración y la prueba y, al uso de la tecnología en la enseñanza y el aprendizaje, y en particular, para la enseñanza del álgebra y del cálculo*» *(Camacho, 2011, p. 197).*

Mención aparte lo constituye la revisión realizada por M. Artigue et al (2007) incluida en el *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Lester, 2007) con el título "Mathematics Teaching and Learning at Post-secondary Level.

La revisión anteriormente citada, Camacho (2011), aborda las investigaciones realizadas en el seno del *International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME), las del *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM), junto con los trabajos presentados en los Simposios de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) y, en particular, los del Grupo de Investigación Didáctica del Análisis Matemático, tomando como elemento organizador el contenido matemático. Camacho (2011) al finalizar su revisión manifiesta: «*El estudio de los problemas de enseñanza y aprendizaje en conceptos tales como límite, derivada, integral, han sido suficientemente estudiados y debemos pensar en abrir nuevos campos de investigación con nuevos enfoques*» (p. 216).

En cuanto al último aspecto, concepto de la función exponencial, a partir de una búsqueda y estudio exhaustivo en la literatura especializada se identificaron investigaciones concernientes a la comprensión de los exponentes, el aprendizaje de los estudiantes de las funciones exponenciales particulares, los procesos de inferencias de los estudiantes sobre la caracterización de estas funciones particulares y las consideraciones sobre el rol en la enseñanza y el aprendizaje de las diferentes aplicaciones de estas funciones exponenciales, relevantes en cuanto a estudios de la función exponencial en el ámbito de la Educación Matemática. En ninguna de ellas se aborda la práctica del docente, esta es otra de las razones que justifica nuestra investigación.

Cuatro son las herramientas de investigación en Educación Matemática que han orientado la elaboración de esta tesis. Desde el punto de vista teórico, el enfoque sociocultural con el constructo de *modelación de la descomposición genética de un concepto* (Gavilán, 2005) como una noción para el análisis de la práctica del docente y la perspectiva que subyace a la práctica, (Simon *et al.*, 2000; Gavilán, 2005; García *et al.*, en prensa) y, una teoría cognitiva Action Process Object Schema (APOS) que aborda la comprensión de los conceptos matemáticos. Mientras que, desde el punto de vista metodológico, se ha realizado un estudio de dos casos apoyado por el uso de un software específico para el análisis de datos cualitativos.

Una forma de entender la construcción del conocimiento matemático en el aula es a través del modelo APOS (Asiala *et al.*, 1996) que considera distintas maneras de conocer los conceptos matemáticos y diferentes mecanismos de construcción de éstos. Las relaciones entre los dos componentes del modelo (concepciones-formas de conocer y mecanismos de construcción) se organizan en una trayectoria que se llama la *descomposición genética del concepto*.

Usamos el marco APOS como modelo de comprensión debido a que pretendemos, al igual que en investigaciones precedentes, analizar cómo el profesor, mediante su práctica potencia la construcción del conocimiento en sus estudiantes. La propuesta de una descomposición genética de la función exponencial será un elemento clave para realizar posteriormente este análisis. Dicha descomposición se ha construido a partir de los conocimientos de los investigadores, los resultados de investigaciones previas sobre los procesos utilizados por los estudiantes cuando tratan de comprender el concepto y una revisión histórico–epistemológica de los conceptos logaritmo, exponente, funciones logarítmicas y funciones exponenciales.

Por otra parte, la modelación de la descomposición genética de un concepto o noción matemática es un elemento teórico que nos permite indagar en las «*características de la práctica del profesor que favorecen los procesos de construcción potencial del conocimiento en los estudiantes y de lo que puede estar justificando dichas características*» (Gavilán et al., 2007a, p. 9). El análisis se refiere a la construcción de un conocimiento en la interacción entre un profesor y los estudiantes, un colectivo de la clase, no se refiere a un estudiante concreto (Gavilán et al., 2007a).

En consonancia con lo anterior, la modelación de los mecanismos de construcción (Gavilán, 2005) se fundamenta tanto en aspectos socioculturales como cognitivos del análisis de la práctica del profesor. Por un lado, se acude a que la visibilidad del discurso y la naturaleza de las acciones del profesor provienen de una perspectiva sociocultural y se reconoce que la práctica docente es una actividad mediada por el uso de ciertos "instrumentos" (Llinares, 2000) y por lo tanto permiten caracterizarla. Esta perspectiva asume «que los instrumentos utilizados y su forma de utilización influyen en el tipo de comprensión matemática.» (Llinares, 2000, p.115). De allí que, la justificación del uso de los instrumentos en esa práctica se interpreta a la luz de una perspectiva cognitiva, haciendo énfasis en el papel que desempeña la cognición del profesor. «*En definitiva, el profesor actúa en un ámbito «sociocultural» en el que lo individual y lo social se interrelacionan*» (Gavilán et al., 2007b, p. 166).

En nuestra investigación la noción de *modelación de la descomposición genética* (Gavilán, 2005) es la clave para el análisis de la práctica docente, puesto que permite identificar cómo el docente usa los instrumentos y justifica los usos de estos instrumentos. Instrumentos que, en nuestro caso, son los elementos matemáticos del concepto función exponencial y los diferentes registros de representación.

La *perspectiva de la práctica* se refiere, de acuerdo con Simon *et al.* (2000), a las características que subyacen a la práctica del profesor y son las inferencias que hace el investigador a partir de los datos recogidos de la práctica del profesor. Dicha caracterización no es necesariamente aquella explícitamente formulada por el profesor. La perspectiva que subyace a la práctica pasa a ser una "construcción teórica" (Simon *et al.*, 2000) que permite al investigador elaborar conjeturas sobre lo que fundamenta la práctica del profesor, su concepción sobre cómo concibe las matemáticas escolares y cómo se produce el aprendizaje de conceptos matemáticos.

En congruencia con el constructo modelación de la descomposición genética, para indagar sobre la perspectiva de la práctica, Gavilán (2005) asimila y acomoda su constructo con la idea de Simon y el grupo de colaboradores, citados en el párrafo anterior. Así, en su investigación considera dos dimensiones: *cómo el profesor concibe el desarrollo de la comprensión matemática*; su concepción sobre el aprendizaje matemático, y *cómo el profesor concibe las matemáticas escolares*; su visión de las matemáticas como objeto de enseñanza-aprendizaje (García *et al.,* en prensa).

Finalmente, en nuestra investigación, a través de dos estudios de caso, el enfoque cualitativo permitió, por un lado, examinar de manera detallada, comprehensiva, sistemática y en profundidad la modelación de los mecanismos de construcción y, por otro, abarcar también la complejidad como un todo (Gurdían-Fernández, 2007). En este aspecto tenemos presente que la singularidad del caso no excluye su complejidad. Un caso puede constituirse por 'subsecciones', acontecimientos, concatenación de dominios, entre otros, y a su vez un estudio de caso es también un examen holístico de lo único, lo que significa tener en cuenta las complejidades que lo determinan y definen (Stake, 1994, 1998).

PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN Y OBJETIVOS

En esta investigación se asume que la práctica del profesor es una "*variable especial*" dado que en el desarrollo de los procesos de aprendizaje y enseñanza de las matemática el papel del profesor se considera clave y él es identificado como un profesional reflexivo (Llinares, 1998). Además, cuando un profesor realiza su labor en el aula, tiene un objetivo: "*que sus estudiantes construyan conocimiento matemático*" por lo que el análisis de la práctica del profesor debe considerar la manera en la que parece potenciar la construcción de conocimiento matemático en sus estudiantes. Este planteamiento de la noción de práctica resalta la relación entre la enseñanza y el aprendizaje (Gavilán *et al.*, 2007a).

Los referentes teóricos sobre los que se apoya nuestro estudio y que permiten agregar en el análisis de la práctica del docente la alusión al aprendizaje que se pretende fomentar en los estudiantes tienen como objetivo llegar a comprender mejor los procesos de enseñanza-aprendizaje en el aula. Sin embargo, se plantea la independencia del objetivo de identificar unas determinadas prácticas que aseguren que los estudiantes aprenderán de una determinada manera. Nuestro interés se torna en comprender y usar el por qué un profesor se comporta de la manera en que lo hace y en qué se apoya para las decisiones que toma.

Esta investigación se centra, por tanto, en el análisis de las prácticas de docentes universitarios cuando enseñan un tema matemático específico de precálculo, concretamente el concepto de función exponencial. Las preguntas de investigación que han permitido materializar este estudio son:

- ¿Cómo modelan los profesores de precálculo en su práctica docente los mecanismos de construcción del concepto de función exponencial?
- ¿Cuáles son las características que subyacen a las prácticas analizadas?

A partir de ellas se formulan lo siguientes objetivos.

1. Realizar un aporte en el campo de la teoría APOS a través de una propuesta de descomposición genética de la función exponencial.
2. Revisar el desarrollo histórico–epistemológico de los conceptos exponente, logaritmo, funciones logarítmicas y funciones exponenciales.
3. Describir y analizar la gestión de las actividades docentes, a través de un estudio de dos casos mediante la herramienta teórica de la modelación de la descomposición genética del concepto funciones exponenciales.
4. Plantear la perspectiva que subyace a la práctica de los docentes a través de la caracterización de su concepción sobre cómo se conciben las matemáticas escolares y cómo se produce el aprendizaje de conceptos matemáticos.

ORGANIZACIÓN DE LA TESIS

El documento está organizado en cuatro capítulos.

El *Capítulo 1* contextualiza y ubica la investigación tanto dentro del marco teórico del análisis de la práctica del docente como dentro del marco de referencia de una teoría de la comprensión de la construcción del conocimiento en cuatro secciones:

En la primera sección se encuentra una introducción tanto a los antecedentes como a las bases teóricas necesarias para la comprensión del análisis de la práctica del docente que se desarrollará en capítulos posteriores. Estas bases son los conceptos de *práctica del docente, modelación de la descomposición genética de un concepto y perspectiva de la práctica,* identificados tanto por medio de los elementos matemáticos del concepto función exponencial como de los dos registros de representación que serán denominados *los instrumentos de la práctica*.

En la segunda sección se examinan varios aspectos de la teoría APOS que es el marco que explica cómo se produce la construcción del conocimiento matemático en los estudiantes en el aula de clase. Uno de los conceptos básicos de esta teoría, que será uno de los elementos centrales de esta tesis doctoral, es la noción de *descomposición genética de un concepto,* junto con la *modelación de la descomposición genética.*

En tercer lugar y, a partir de los planteamientos de la teoría APOS, se desarrollan todos los aspectos que se tuvieron en cuenta para construir una descomposición genética de la función exponencial. Esto incluye una revisión de la evolución histórico-epistemológica del concepto de logaritmo, de las funciones logarítmicas así como de la noción de exponente y de las funciones exponenciales. También se presenta una revisión de la literatura e investigaciones en educación matemática, concernientes a los procesos que son utilizados por los estudiantes cuando tratan de comprender el concepto de función exponencial.

Al final del capítulo, a partir de las fuentes arriba mencionadas se propone una descomposición genética de la función exponencial; para la descripción de dicha descomposición, se determinan los elementos matemáticos y los sistemas de representación que configuran dicho concepto que permiten detallar la descomposición elaborada.

El *Capítulo 2* está dedicado a describir la metodología empleada en la investigación. Se resalta nuestra intención de realizar un estudio de análisis de la práctica del docente, centrado en las fases de planeación y de gestión en el aula del profesor, tomando como base los mecanismos de construcción y la modelación de la descomposición genética de la función exponencial. El capítulo se divide en tres secciones.

En la sección uno, se describe el contexto de los dos estudios de caso y, en la sección dos, se describen los instrumentos que se van a utilizar para recoger los datos que se transformarán en resultados. Se incluyen allí una entrevista inicial estructurada, entrevistas posteriores a las clases semiestructuradas, grabaciones de voz y video. Dado que son dos fases de la práctica profesional del docente en las que estamos interesados, en este estudio, los instrumentos están referidos y descritos, en dos secciones, una para la fase de planeación y la otra destinada a la fase de gestión de la práctica del docente.

En la tercera sección se detalla la clasificación, depuración y análisis de los datos en donde se tienen en cuenta, de manera transversal, dos aspectos: la modelación de la descomposición genética, a través de la propuesta en la sección 1.4 de la presente memoria de tesis y, como una ayuda para la investigación, se optó por utilizar el programa Atlas.ti en el proceso de análisis de los datos. Esta tercera sección se subdivide en tres.

Se describe la forma en que se aborda un primer nivel de análisis que llamamos descriptivo. A continuación se detalla el segundo nivel de análisis, inferencial, a través de tres pasos generados por la modelación de los mecanismos de construcción y que nos permite hablar de la modelación de la descomposición genética de cada uno de los casos. Finalmente en el tercer nivel de análisis, también inferencial y llevado a cabo sobre la modelación de la descomposición genética nos permite describir la perspectiva de la práctica de cada docente.

El *Capítulo 3* se detalla los resultados obtenidos del estudio de la práctica de los dos profesores participantes en esta investigación. El capítulo está dividido en dos secciones diferenciadas para cada uno de los casos. En cada uno de los casos se presenta la modelación de la descomposición genética en términos de cada mecanismo y de su secuencia–relación que incluyen los elementos del concepto y los registros de representación utilizados por el profesor. Para ello se establecen tres subsecciones, correspondientes a las viñetas de cada uno de los mecanismos de construcción. La secuencia de viñetas se inicia mostrando la modelación del mecanismo de interiorización pasando luego a explicar la modelación del mecanismo de encapsulación y finaliza con el mecanismo de tematización. Cada una de las viñetas se subdivide de acuerdo con los descriptores establecidos en los referentes teóricos (sección 1.4) teniendo en cuenta los registros de representación, cuando la tarea y la modelación del mecanismo por parte del profesor lo hacen necesario. A estas dos prácticas de los docentes, subyace una perspectiva de la práctica que, a través de la modelación de la descomposición genética de la función exponencial, nos devela una perspectiva con tendencia holística, en un caso, y tradicional, en el otro. Los procedimientos de descripción e inferencia en nuestra investigación, aportan información sobre la complejidad de la relación entre las perspectivas del profesor que subyacen a su práctica y las características de su práctica. Finaliza cada una de las dos secciones del capítulo con la caracterización de la perspectiva de la práctica de cada docente, para lo cual se utiliza la modelación de la descomposición genética.

El *Capítulo 4* está dedicado a las conclusiones, discusión y proyección de la investigación. En primer lugar se presenta la discusión de los resultados, luego sintetizamos la consecución de los objetivos y finalmente se encuentran las implicaciones para futuras investigaciones y para la enseñanza. Después se encuentra las *Referencias* de las citas bibliográficas.

En la tabla de contenido se indica la relación de *Apéndices* mencionados dentro del documento, los cuales podrán consultarse en el medio magnético anexo.

CAPÍTULO 1: Referentes teóricos

Este capítulo tiene un doble propósito: primero, presentar el marco teórico del análisis de la práctica del docente que sustenta la investigación y segundo, contextualizar y ubicar la investigación dentro del marco de referencia de una teoría de la comprensión de la construcción del conocimiento. Para ello, se ha organizado el documento en tres partes.

En la primera parte se encuentra una introducción de los antecedentes y de las bases teóricas necesarias para la comprensión del análisis de la práctica del docente que se desarrollará en capítulos posteriores. Estas bases son los conceptos de *práctica del docente* y la *modelación de la descomposición genética de un concepto,* identificados tanto por medio de los elementos matemáticos del concepto función exponencial como de los dos registros de representación que serán denominados *los instrumentos de la práctica*. Se cierra esta explicación con la noción de *perspectiva de la práctica* indicando su origen y enunciando los dominios que en nuestro caso hacen referencia a las características que subyacen a la práctica del profesor.

En la segunda parte, se examinan varios aspectos de la teoría APOS que será el marco que explique cómo se produce la construcción del conocimiento matemático en los estudiantes. Uno de los conceptos básicos de esta teoría, que será un elemento central de esta tesis doctoral, es la noción de *descomposición genética de un concepto.*

En tercer lugar y, a partir de los planteamientos de la teoría APOS, se desarrollan todos los aspectos que se tuvieron en cuenta para construir una descomposición genética de la función exponencial. Esto incluye una revisión de la evolución histórico-epistemológica del concepto de logaritmo, de las funciones logarítmicas así como de la noción de exponente y de las funciones exponenciales. También se consideran los resultados de las investigaciones en educación matemática concernientes a los procesos que son utilizados por los estudiantes cuando tratan de comprender el concepto de función exponencial, así como las dificultades y etapas que superan en su adquisición.

Al final del capítulo, a partir de las fuentes arriba mencionadas, se propone una descomposición genética de la función exponencial. Para la descripción de dicha descomposición, se determinan los elementos matemáticos y los sistemas de representación que configuran dicho concepto que permiten describir con detalle la descomposición elaborada.

1.1. ENFOQUE TEÓRICO DE LA PRÁCTICA DEL DOCENTE

Esta sección está dividida en dos partes. La primera incluye una síntesis de la revisión de la literatura que enmarca nuestra investigación, muestra la pertinencia del tema dentro del campo de problemas vigentes en investigación en didáctica de las matemáticas y permite una identificación del origen de algunas herramientas conceptuales y metodológicas usadas en el estudio. La segunda contiene una presentación de la teoría sociocultural en el análisis la práctica del docente en la educación matemática y las principales nociones que en nuestra investigación vamos a usar.

1.1.1. Revisión de literatura

Para enmarcar nuestra investigación mencionaremos los principales trabajos revisados, particularmente los que se relacionan de forma estrecha con nuestra investigación y que nos brindan herramientas conceptuales y metodológicas.

Primero nos referimos a la evolución de la investigación en educación que llevó a gestar esta línea de análisis de la práctica del docente y haremos un bosquejo de investigaciones centradas en la actividad del profesor. Se citan algunas investigaciones en educación matemática que hacen uso de la teoría socio-cultural y abordan el análisis de la práctica del profesor de matemáticas. Segundo, retomamos algunas investigaciones sobre la práctica del profesor que, sin enmarcarse propiamente dentro del enfoque sociocultural, comparten intereses con nuestra mirada al objeto de estudio y nos dotan de las herramientas modelación de la descomposición genética y perspectiva de la práctica.

1.1.1.1. Conocimiento de los profesores de las matemáticas y sobre la enseñanza de las matemáticas

La investigación de las prácticas del docente de matemáticas es un campo relativamente reciente. Su actual situación ha sido precedida por un proceso de evolución de la investigación en enseñanza, en cuanto a su foco de interés, (Koelher y Grouws, 1992) que es analizado por algunos investigadores en términos de fases o ciclos (Rosenchine, 1979; Medley, 1979). Concretamente, el origen de la investigación sobre el pensamiento del profesor; a partir de algunos antecedentes como los trabajos de Jackson (1968), Dahlof y Lundgren (1970), se ubica en 1975, año en el que se celebra el congreso del National Institute of Education (Gage, 1975; Perafán, 2002). A partir de este año, un buen número de académicos inician trabajos de investigación donde impera la indagación sobre el pensamiento del profesor que se extenderán hasta la década de los años 80 para luego transitar hacia una atención sobre el conocimiento del profesor.

Es así como en los 80s nuevos enfoques sobre conocimiento de los profesores se convierten en prominentes, especialmente Elbaz (1983), Shulman (1986) y Schön (1983). En ese momento, Elbaz (1983) se centra tanto en el qué, como en el cómo, es decir, en identificar qué conocen los profesores frente a otros profesionales; lo que llama conocimiento práctico, y cómo los profesores encapsulan este conocimiento. «*Ella afirmó que este conocimiento se basa en la experiencia de primera mano y abarca el conocimiento de sí mismo, el ambiente, la materia, el desarrollo curricular y la instrucción, y se representa como reglas en la práctica, principios prácticos e imágenes*» *(Citado en da Ponte y Chapman, 2006, p.461).* Mientras, Shulman (1986) establece los elementos del conocimiento base y se empieza a usar el término *Pedagogical Content Knowledge*. Desde entonces surgirán numerosos trabajos de investigación que muestran el cambio de interés hacia el conocimiento del profesor, motivado por el reconocimiento de la insuficiencia del análisis psicológico y cognitivo, así como de una creciente influencia de los aportes de Schön (1983, 1987) quien establece diferencia entre práctica reflexiva y racionalidad técnica. Para este autor, la práctica reflexiva es atribuible a los profesionales en ejercicio, argumentando que cuando se requiere la acción, los profesionales en ejercicio actúan sin escindir el conocimiento práctico del formal.

De acuerdo con Schön (1983, 1987) la reflexión de un profesor sobre la práctica tiene que ver con el conocimiento del contenido y el conocimiento pedagógico relacionado con el contenido. Entendemos que la práctica reflexiva se presenta cuando los profesores tratan con los problemas profesionales y se cristaliza como una parte clave de su conocimiento. En este sentido, el conocimiento de los profesores no solo es saber cosas, sino saber cómo construir conocimiento.

En los últimos veinte años, la investigación sobre la actividad del profesor ha tomado un ritmo importante, generándose la necesidad de intentar organizar y presentar a la comunidad los nuevos marcos teóricos y los hallazgos de estos estudios. Al respecto, nosotros, trazamos un esbozo centrándonos en aspectos que consideramos importantes para nuestra investigación, a partir de la revisión elaborada por da Ponte y Chapman (2006) quienes identifican y destacan estudios sobre el conocimiento y la práctica del profesor que han llegado a la comunidad a través del PME.

Los informes concernientes a la investigación sobre la actividad del profesor abarcan un interesante e importante campo de marcos teóricos, metodologías e intentos de ingresar en la complejidad del sistema escolar (da Ponte y Chapman, 2006), ya sea desde la teoría de situaciones didácticas (Hersant y Perrin-Glorian, 2005), desde la teoría sociocultural (Gavilán *et al.*, 2007b; García et al. en prensa) o las perspectivas de la prácticas con un enfoque cognitivo (Escudero y Sánchez, 2007, 2008), entre otros.

Cada investigación, bien sea caracterizando la llamada "práctica discusión interactiva de síntesis", las acciones del profesor a través de la "modelación de la descomposición genética de un concepto o noción", o la "perspectiva de la práctica del docente", nos informa acerca de la transformación del papel que tradicionalmente han tenido los profesores o del nuevo contexto de aula y de organizaciones sociales. Esto ha complejizado la investigación en este campo ya que requiere, en ocasiones, que sea abordada desde lo local, para luego integrar los diferentes elementos y establecer resultados. Se trata de que la Educación Matemática pueda aportar un marco desde el cual el profesor se forme y se repiense.

A partir de revisiones como las realizadas por Franke *et al.* (2007) y da Ponte y Chapman (2006), nos acercamos a comprender el estado de la investigación sobre el conocimiento y la práctica del profesor. Se presenta la siguiente síntesis organizada en las cuatro categorías establecidas por estos autores: conocimiento de los profesores de matemáticas (Tabla A), conocimiento de los profesores sobre la enseñanza de las matemáticas (Tabla B), práctica de los profesores y creencias y concepciones. En la tabla A se realiza una síntesis de las preguntas de investigación correspondientes al primer apartado, así como de los temas abordados en cada una de las investigaciones.

En cuanto a la investigación sobre conocimiento de los profesores de la enseñanza de las matemáticas, (Tabla B), al igual que en las otras tres categorías, da Ponte y Chapman (2006) encuentran que hay un claro énfasis en los procesos metodológicos en el uso de cuestionarios en los años iniciales, con un cambio posterior hacia las entrevistas y observaciones. También identifican que se ha comenzado a usar diarios del profesor y reflexiones conjuntas de investigadores e investigados y además algunos investigadores están tratando de combinar los métodos cuantitativos como cualitativos. Establecen que recientemente algunos estudios colaborativos están incluyendo un fuerte empleo de tecnología para recoger datos. Otros recursos metodológicos incluyen usar mapas conceptuales, grupos focales y se sugiere el uso de las narrativas en y para investigar profesores.

<table>
<tr><th colspan="4">CONOCIMIENTO DE LOS PROFESORES DE MATEMATICAS. Conocimiento referido a la disciplina académica; las matemáticas.</th></tr>
<tr><th>Justificación</th><th>Preguntas</th><th>Investigadores</th><th>Temas</th></tr>
<tr><td rowspan="21">El conocimiento de los profesores sobre la disciplina de las matemáticas es reconocido ampliamente como uno de los focos y atributos críticos de los profesores de matemáticas.</td><td rowspan="16">¿Cuáles son las deficiencias en el conocimiento de los profesores de matemáticas?</td><td>Linchevsky and Vinner (1989).</td><td rowspan="5">Fracciones.

Multiplicación, división.
Número racional</td></tr>
<tr><td>Llinares and Sánchez (1991).</td></tr>
<tr><td>Tirosh, Graeber and Glover (1986).</td></tr>
<tr><td>Greer and Mangan (1986).</td></tr>
<tr><td>Pinto and Tall (1996).</td></tr>
<tr><td>Hershkowitz and Vinner (1984).</td><td rowspan="2">Geometría</td></tr>
<tr><td>Braconne and Dionne (1987).</td></tr>
<tr><td>Shriki and David (2001)</td><td>Algebra y Geometría.</td></tr>
<tr><td>Ponte (1985)</td><td rowspan="5">Funciones</td></tr>
<tr><td>Even (1990)</td></tr>
<tr><td>Harel and Dubinsky (1991)</td></tr>
<tr><td>Thomas (2003)</td></tr>
<tr><td>Hansson (2005),</td></tr>
<tr><td>Van Dooren, Verschaffel and Onghena (2001).</td><td>Resolución de problemas.</td></tr>
<tr><td>Barkai et al. (2002).</td><td>Proposiciones</td></tr>
<tr><td>Mastorides and Zachariades (2004)</td><td>Limites y continuidad</td></tr>
<tr><td rowspan="5">¿Cómo poseen los profesores de matemáticas su conocimiento?</td><td>Simon (1990)</td><td rowspan="3">Conocimiento conceptual y procedimental sobre: División. Fracciones
Estructura multiplicativa de números enteros.</td></tr>
<tr><td>Philippou and Christou (1994)</td></tr>
<tr><td>Zazkis and Campbell (1994)</td></tr>
<tr><td>Chazan, Larriva and Sandow (1999)</td><td>Enseñanza de la resolución de una ecuación.</td></tr>
<tr><td>Presmeg and Nenduradu (2005)</td><td>Movimiento entre modos de representar relaciones exponenciales.</td></tr>
<tr><td colspan="4">La observación y sugerencia de da Ponte y Chapman, (2006) es que, dada la gama de hallazgos basados en muy diversas perspectivas teóricas, sobre matemáticas y conocimiento matemático, existe la necesidad de proponerse la teorización del conocimiento matemático de los profesores, elaborando conceptos apropiados para describir sus características y procesos y establecer criterios claros de niveles de competencia de los profesores de matemáticas y los instrumentos para evaluarlos.</td></tr>
</table>

Tabla A. Síntesis de investigaciones sobre conocimiento de matemáticas, citadas en da Ponte y Chapman (2006).

Preguntas	Investigadores	Características
¿Qué elementos son importantes, del conocimiento de los profesores acerca de la enseñanza de las matemáticas?	Andelfinger (1981)	Método de encuesta para obtener información sobre la enseñanza diaria.
	Brissiaud *et al.* (1982)	Relaciones entre las percepciones de estudiantes y los profesores sobre lo que es un problema.
	Rees (1982)	Conciencia de los profesores sobre las concepciones erróneas de los aprendices es crítica para una enseñanza eficaz y eficiente.
	(Shulman, 1986)	Noción de conocimiento de contenido pedagógico de los profesores.
	Even, Markovits (1991)	Conocimiento de Contenido pedagógico de los profesores, con base en las respuestas a preguntas de los estudiantes alrededor del tema de funciones.
	Klein and Tirosh (1997)	Conocimiento de profesores de primaria en formación y en ejercicio sobre las dificultades comunes de los estudiantes sobre problemas de multiplicación y división.
	Rossouw and Smith (1998)	Perspectiva crítica del conocimiento de contenido pedagógico, incluyendo la perspectiva de conocimiento en acción. (Schön, 1983)
	Robinson, Even and Tirosh (1992, 1994).	Diferencias expertos novatos, consistentes en presentar material matemático de una manera conectada y la conciencia sobre las fuentes de algunas dificultades de los estudiantes.
¿Cuál es el papel del conocimiento de la cognición de los estudiantes?	Carpenter and Fennema (1989). Bright, Bowman and Vacc (1997). Gal and Vinner (1997). Gal (1998).	Nuevo constructo. Instrucción guiada cognitivamente. Entender el conocimiento de la cognición en matemáticas, de los estudiantes, es un componente importante del conocimiento de los profesores de matemáticas.
¿Cuál es la naturaleza y cómo se desarrolla el conocimiento de los profesores?	Ponte (1994)	Noción de conocimiento profesional como esencialmente conocimiento en acción, reflexión sobre la experiencia y el conocimiento teórico.
	Chapman (2004)	Constructo de conocimiento práctico para describir el conocimiento que guía las acciones del profesor.
	Simon (1991)	Concepciones de futuros profesores de primaria al inicio de su formación para profesores. Que ideas son realmente desarrolladas y cambiadas y cuales no son desarrolladas y se resisten a evolucionar.

Tabla B. Síntesis de investigaciones sobre conocimiento de la enseñanza de las matemáticas, citadas en da Ponte y Chapman (2006)

Da Ponte y Chapman (2006) establecen que la imagen que emerge del profesor en las investigaciones es la de un profesional con un conocimiento deficiente, en particular, de las matemáticas y de la enseñanza de las matemáticas. Tales estudios enfatizan lo que el profesor no sabe, no comprende o no hace. Situación diferente se encuentra en el contraste experto novato usado en unos pocos estudios, que proporciona una imagen más positiva, al menos para los profesores que tienen experiencia. Sin embargo, los autores sugieren que si miramos a los profesores como profesionales, enfatizando en la noción de conocimiento profesional, debemos señalar la complejidad de su conocimiento y su relación intima con sus prácticas.

1.1.1.2. Connotaciones de la noción práctica docente

La práctica docente, que en los primeros estudios, fue considerada esencialmente como "acciones", "actos" o "comportamientos", está evolucionado de manera relevante en los últimos años (da Ponte y Chapman, 2006). La práctica incluye tanto aquello que los profesores hacen, como sus motivaciones para dichas acciones y también lo que piensan acerca de lo que hacen (Simon et al., 2000) es decir, se interpreta la práctica «*como un conglomerado que tiene su esencia en la unión de todas sus partes y no puede ser entendida más que mirando a las partes formando parte de esa totalidad (es decir, mirando sólo a las creencias, o el conocimiento matemático, entre otros.)*» (Simon and Tzur, 1997, p. 160)

En la misma línea de complejidad, Leinhardt *et al.* (1995) describen la práctica docente "*como un todo coherente*" (p. 404) explicando que no puede ser separada en habilidades discretas, conocimientos o técnicas. Además, argumentan que *«tanto la enseñanza como el aprendizaje implican el movimiento en varias direcciones al mismo tiempo»* (p. 407), mostrarse de acuerdo en la concurrencia de procesos multidireccionales y multicausales en el trabajo del profesor.

Skott (1999; 2004; 2009) marca la importancia de los múltiples motivos que determinan las prácticas docentes refiriéndose a la intención de facilitar la matemática a los estudiantes, cumplir con la cultura dominante de la escuela, generar apoyo, entre otros. Mientras que Saxe (1999) piensa las prácticas como *«recurrent socially organized activities that permeate daily life»* (p. 25). De acuerdo con da Ponte y Chapman, (2006) se considera como un supuesto clave la existencia de una relación reflexiva entre las actividades y las prácticas individuales, ya que ellos admiten a las actividades del individuo como constitutivas de prácticas y, al mismo tiempo, las prácticas dan forma y sentido social a las actividades del individuo. Boaler (2003) describe las prácticas como «*las actividades recurrentes y las normas que se desarrollan en aulas a través del tiempo, en los que profesores y estudiantes se dedican*» (p. 3).

Estas ideas de práctica que usan la noción de estabilidad y recurrencia de las practicas hacen hincapié, como en el caso de Saxe (2003), en las actividades y, en otros casos, tienen en cuenta no sólo actividades, sino también las normas (Boaler, 2003). Parafraseando a da Ponte y Chapman (2006), podemos reflexionar en el estudio de las prácticas de los actores sociales en sus contextos naturales con: las actividades, la recurrencia, el entorno social y el conocimiento, junto con los significados y los motivos de los participantes. Consecuentemente, las prácticas docentes pueden ser vistas como las actividades que ellos regularmente llevan a cabo, teniendo en cuenta su trabajo, el contexto y sus significados e intenciones. Esto incluye, como también lo señala Skott (2009) la estructura social del contexto y sus muchas capas - aula, escuela, comunidad, estructura profesional y el sistema educativo y social -.

1.1.1.3. Estudios sobre la práctica profesional de los docentes.

Los estudios sobre las prácticas de los profesores, han tenido un ritmo de crecimiento sorprendente en el período 1995-2005 (Da Ponte, 2006) y sus focos de indagación, las metodologías usadas, la teoría y la literatura en torno a la práctica del aula, permiten contar con diferentes resultados útiles en el momento de investigar acerca de la gestión del profesor en el aula.

Por otro lado, a partir de la clasificación sobre enfoques teóricos para el estudio de la práctica docente de Llinares (2000), englobadas en el enfoque cognitivo y antropológico, Gavilán (2005) ubica la perspectiva sociocultural, que nos atañe en esta investigación, dentro del enfoque antropológico y señala los siguientes marcos teóricos dentro del enfoque cognitivo: Teoría de la enseñanza como estrategia cognitiva, Teoría de la enseñanza en Contexto, Teoría cognitiva para la reflexión y desarrollo y Teoría sobre perspectivas y desarrollo profesional. Dentro del enfoque antropológico los marcos teóricos que identifica Gavilán son: la teoría antropológica de lo didáctico, funciones semióticas y perspectiva sociocultural. Respecto a esta última, la cual es la teoría de referencia del presente trabajo, las nociones teóricas en las que nos sustentamos son: las fases de la práctica, los instrumentos y la transparencia.

La teoría e investigaciones acerca de la práctica del docente permiten, entre otras, la identificación de tres características de la práctica de aula como centrales, así:

> *«a) moldear el discurso matemático del aula, b) desarrollar normas del aula que apoyen el involucramiento en torno a las ideas matemáticas, c) desarrollar relaciones con estudiantes y el grupo de la clase de una manera que apoye oportunidades para la participación en el trabajo matemático en el aula»* (Franke *et al.*, 2007, p. 230).

Moldear el discurso matemático es un aspecto importante del trabajo del profesor. Aunque el papel del profesor en apoyar las prácticas discursivas en el aula es determinante para permitir a los estudiantes aprender sobre las matemáticas, sin embargo, según Franke *et al.* (2007) los resultados de la actuales investigaciones resaltan que aún sabemos poco sobre lo que deben hacer los profesores para apoyar mejor el discurso en el aula de una manera que abra la participación y apoye el desarrollo del conocimiento y las identidades de los estudiante. "*Lo que los profesores deben hacer para apoyar tales oportunidades es complejo y no está bien caracterizado en la literatura*" (p.231)

Respecto a las prácticas discursivas, los autores citados en el párrafo anterior afirman que en los últimos quince años un creciente corpus de investigación ha documentado y teorizado alternativas al patrón discursivo IRE identificado como dominante en el aula; iniciar-responder-evaluar. En este patrón el discurso IRE del aula, se presenta un esquema dominado por el profesor: inicia con pregunta hecha por el profesor, luego respuesta del estudiante y evaluación realizada por el profesor.

Relativo a estas prácticas discursivas señalan Franke *et al.* (2007) que usualmente se ha hecho poco énfasis en que el estudiante explique lo que piensa, trabaje públicamente a través de una idea incorrecta, conjeture, o llegue a un consenso sobre una idea matemática.

> *«Las nuevas concepciones del discurso del aula se enfocan en cómo las conversaciones favorecen el argumento matemático de manera que los estudiantes puedan llegar a entender las diferentes formas de explicación matemática, crear una base de conocimiento público que el grupo pueda usar como recurso, alinear a los estudiantes entre ellos y con el contenido, desarrollar las identidades matemáticas de los estudiantes, y en general fomentar el pensamiento de orden superior»* (Franke *et al.*, 2007, p. 231).

De acuerdo con Franke *et al*. (2007) existen cuatro ideas que nombramos brevemente para destacar el detalle con el que, según estos autores, los educadores matemáticos podemos llegar a entender el discurso matemático y la dirección en la que podemos ir desarrollando conocimiento adicional para apoyar a profesores y estudiantes que se involucren en este trabajo.

Primera, hay evidencia sobre las conversaciones matemáticas y el papel que desempeñan los profesores en las particularidades de cómo ellos les responden a los estudiantes dentro de la dinámica de parafrasear. Segunda, el trabajo respecto a las maneras en que las tareas desempeñan un papel en el desarrollo del discurso matemático, de tal forma que las tareas matemáticas comprometan a los estudiantes en pensar; les exijan justificar, conjeturar e interpretar (Franke *et al.,* 2007). Una investigación que examina, entre otros, los propósitos de tareas propuestas por el profesor es la de Escudero y Sánchez (2008).

La tercera idea concierne al conocimiento propio de las iniciativas y hallazgos en las investigaciones relacionadas con el discurso matemático para aprendices de inglés. Así, Adler (1995), estudiando las interacciones que se producen en el aula, en la complejidad de la enseñanza de las matemáticas en los salones multilingües, se centra en la naturaleza de la intervención del profesor cuando no existe una forma efectiva de interacción estudiante - estudiante. Atiende a las formas en que los docentes entran a armonizar las dificultades de comunicación entre los estudiantes, y la profundidad de comprensión del conocimiento. Concluye que en algunos casos el maestro no debe actuar como punto de referencia para los estudiantes para permitir una cultura de la clase participativa. Pero en otros casos, la mediación docente es esencial para mejorar el contenido de la comunicación acerca de las matemáticas, por lo tanto, la búsqueda de un equilibrio adecuado se transforma en un reto profesional permanente.

Cuarta, existe la propuesta de una práctica discursiva tomada de las aulas de ciencias, que se denomina sondear el significado (Rosebery *et al.*, 2005 Citado por Franke *et al.*, 2007). Una de las bondades de sondear el significado es que involucra a los estudiantes en una posición de inspección a la vez que crea una norma alrededor de la naturaleza esperada del cuestionar y retar las ideas de tal forma que el foco se traslada del ámbito de quién se equivocó, o de quién fue incompleta la explicación, al hábito de descomponer cada respuesta de maneras que apoyen el aprendizaje.

En cuanto a **establecer normas para hacer y aprender matemáticas**, en la teoría sobre la práctica en el aula, en Franke *et al.* (2007), se subraya la importancia de la relación entre manejar el discurso del aula y las exigencias que eso impone al profesor para establecer, mantener y negociar continuamente con los estudiantes las normas que gobiernan las interacciones del aula y el trabajo matemático. Se reconoce además que «*dependiendo de la perspectiva teórica que se tenga, la discusión sobre crear oportunidades para participar puede enfocarse en el establecimiento de reglas*, *la creación de un contexto para el aprendizaje, o desarrollar un conjunto de normas de aula*» (p. 238).

En cada caso, afirman Franke *et al*. (2007) la búsqueda de formas para apoyar el aprendizaje del estudiante y favorecer el desarrollo de ciertas disposiciones hacia hacer matemáticas, está en relación con moldear el entorno de aprendizaje. De manera que en lo relativo a la creación de aulas de matemáticas donde tanto dar sentido como el discurso en sí sean ejes y se vaya al encuentro de diferentes formas de participación incluyente, se puede considerar central la tarea de detallar el desarrollo de las normas.

La investigación acerca del establecimiento de normas en una de sus vertientes ha llevado a identificar distinciones entre las normas sociales del aula de clase y las normas socio matemáticas. De allí se desprende que diversos investigadores proponen desarrollar normas para articular condiciones, hacer conjeturas, y revisar ideas, otros documentan tipos de normas; normas en torno al trabajo conjunto, a quién decide sobre las explicaciones aceptables, y qué tipos de razones matemáticas son aceptables (Franke *et al*, 2007).

Negociar normas sociomatemáticas, según lo exponen en su revisión Franke *et al*. (2007), exige que el profesor sepa no sólo cómo manejar el discurso sino también cómo recurrir al conocimiento de la asignatura y del conocimiento matemático de los estudiantes, cómo usar herramientas estratégicamente y cómo construir relaciones con los estudiantes. Estas actividades también implican que los profesores tienen que aprender a partir de su práctica a medida que se involucran en este trabajo.

En lo relativo a **construir relaciones para hacer y aprender matemáticas**, en Franke *et al.* (2007) se aborda el aspecto relativo a la construcción de relaciones con los estudiantes que permitan a los profesores cuestionar supuestos sobre quiénes son los estudiantes y qué llevan ellos al aula de matemáticas de manera que apoya la creación de oportunidades para la participación y el aprendizaje matemático.

Desde planteamientos teóricos e investigaciones se considera que atender a la comprensión en matemáticas requiere que los profesores atiendan los detalles del trabajo de los estudiante, en este ámbito, afirman Franke *et al.* (2007), está muy bien documentado los beneficios de conocer el pensamiento matemático de los estudiantes. El saber sobre «*el pensamiento matemático de los estudiantes involucra conocer los detalles del sentido que dan los estudiantes a ideas matemáticas particulares y al mismo tiempo conocer en general cómo los estudiantes se desenvuelven en relación con una idea matemática particular*» (p. 242).

Consideramos en este ámbito varias investigaciones en relación a las nociones de “scaffolding”, trayectorias hipotéticas y la descomposición genética:

Partiendo del constructo “scaffolding” de la teoría sociocultural, Anghileri (2002) caracteriza algunas prácticas en el aula que pueden ser identificados como “andamios”, combinando las clasificaciones originales, de Tanner y Jones (1999), con nuevas estrategias que ella misma identificó. Este constructo, el “andamiaje”, es una metáfora, una idea que hace hincapié en la intención de apoyarse sobre una base sólida e ir aumentando la independencia del estudiante en las construcciones de pensamiento, dando lugar a la generación de acuerdos matemáticamente válidos. En este constructo, el “andamiaje” se puede hacer en diferentes niveles, interactuando a un nivel bajo de demanda cognitiva y avanzando a formas más sofisticadas de interacción, tales como construir conexiones, desarrollar herramientas de representación y generar un discurso conceptual.

Combinando la noción de andamio como apoyo y la forma de construcción de los conceptos de los estudiantes, resulta un cambio en la enseñanza tradicional. Un estudio concreto se encuentra en la práctica que la autora describe como: Mirar, tocar y verbalizar en la que se centra en el papel que pueden tener diferentes sentidos para que los estudiantes manejen objetos manipulables, reflexionando sobre lo que pueden ver, repitiendo las instrucciones u observaciones y verbalizando. Así, los maestros trabajan para establecer prácticas de aula en las que los patrones de instrucción son establecidos para apoyar este aprendizaje (Anghileri, 2002).

Khisty (2001) considera la actividad sociocultural como el contexto en el cual los niños participan y desde el cual ellos se apropian del uso de herramientas y del pensamiento cultural. Así "los profesores eficaces" comparten características tales como*: «i) fomentar el apoyo mutuo entre los estudiantes, (ii) formular expectativas, (iii) son hábiles al conceptualizar situaciones matemáticas, y iv) usar preguntas de sondeo y declaraciones, tanto orales como escritas, como herramientas para el aprendizaje.*» (Citado por da Ponte y Chapman, 2006, p. 480)

Otra noción a la que se recurre en la investigación sobre la comprensión es la noción de trayectoria hipotética de aprendizaje, como una predicción sobre el camino por el que puede discurrir el aprendizaje. En este constructo las investigaciones previas a cómo construyen los estudiantes el conocimiento matemático sobre temas concretos son la base de las hipótesis de aprendizaje. Para Simon (1995) y Tzur *et al.* (2001)

> «*las trayectorias hipotéticas de aprendizaje están compuestas de tres partes interrelacionadas: las metas del profesor para un posible avance en las "concepciones" (formas de conocer el concepto) de ese momento de los estudiantes, las situaciones problema que pueden crear oportunidades para que se promuevan dichos avances, y las hipótesis sobre los procesos por los que el aprendizaje puede ocurrir*» (p.230).

El conocimiento de los profesores de las trayectorias cognitivas del aprendizaje de cada estudiante, o en el caso de la descomposición genética, de las acciones, procesos y objetos por los que transitan las nuevas construcciones, proporciona la base para elegir tareas que apoyen la abstracción reflexiva de los estudiantes. Estas trayectorias ofrecen una manera de pensar más claramente sobre los mecanismos subyacentes a la adquisición de conocimiento particular. Aquí los mecanismos son vitales. Entender los mecanismos posibilita a los profesores elegir actividades o tareas que provean oportunidad para aprender.

De allí se desprenden nuevas investigaciones que pretenden generar nociones teóricas, como en el caso de la *modelación de la descomposición genética de un concepto* (Gavilán, 2005). A partir de un posicionamiento frente a la comprensión y el aprendizaje de la matemática en el aula de clase se estudia la práctica de los profesores integrando las nociones teóricas de "fases de la práctica", los instrumentos y la transparencia (Gavilán, 2005). Estos constructos teóricos permite examinar la práctica del docente a la luz de *¿Cómo intenta este profesor enseñar a sus estudiantes matemáticas que van más allá de lo que el estudiante ya conoce?* (Simon y Tzur, 1999, p. 257). La respuesta a esta cuestión se realiza por medio de la identificación que el investigador lleva a término de los mecanismos de construcción potenciados por las acciones del profesor en el aula de clase.

Existe otro grupo igualmente importante de investigaciones y formas de caracterizar la práctica. Por ejemplo, el examen de la práctica del docente que proporciona ejemplos concretos de cómo la integración de los dominios del conocimiento de los maestros, se relaciona con los procesos de planificación y ejecución (Escudero y Sánchez, 2007). De otro lado, el estudio sobre la práctica docente, que hace uso tanto de un enfoque cognitivo como un enfoque socio-cultural (Even y Schwartz, 2002). Estos autores llaman la atención acerca de que cada marco teórico desde el que se emprende una investigación tiende a hacer su propio tipo de preguntas, lo que lleva naturalmente a una imagen diferente de la situación. Y concluyen que la práctica es demasiado compleja para ser entendida a través de un solo enfoque, pero si bien la combinación de varios enfoques teóricos puede parecer una propuesta atractiva, puede plantear cuestiones de legitimidad que deben ser abordados por los investigadores. También, desde la teoría antropológica de lo didáctico (Espinoza y Azcarate, 2000) y de las situaciones didácticas se plantea el papel importante del contrato didáctico (Hersant et al, 2005).

Finalizando esta síntesis, el planteamiento de Franke *et al.* (2007) es el de avanzar en la investigación sobre la práctica del aula mediante estudios para identificar «*rutinas de práctica*» y estudiar cómo las tres características de la práctica del aula; el discurso, las normas y las relaciones construidas, funcionan juntas en dichas rutinas. Entendiendo por rutinas de práctica que

> «*debemos estar de acuerdo en actividades centrales (dentro de cada dominio matemático y en niveles de grado apropiados) que podrían y deberían ocurrir regularmente en la enseñanza de las matemáticas Tales rutinas podrían convertirse en el núcleo para la práctica de los profesores y debería convertirse en el foco del estudio de la práctica del aula*» (Franke *et al.*, 2007, 249).

Otras proyecciones sobre la investigación de la práctica del aula, se esbozan a partir de una revisión de publicaciones sobre Desarrollo Profesional de Profesores de Matemáticas, en las principales revistas y actas de congresos en el período de 1999 a 2003, en la cual plantean las siguientes sugerencias sobre situaciones deseables en los estudios investigativos:

Adler *et al.* (2005) señalan respecto a los estudios de caso que estos tienen ventajas para la relación teoría y práctica ya que es más fácil integrar a los profesores en la investigación. Los resultados de estas investigaciones pueden ser descritos en forma de “historias”, lo cual da una visión auténtica de la práctica, da una comprensión, un entendimiento de la complejidad de la profesión de enseñar y, siendo estas historias un buen inicio para trabajar con profesores. Además otros profesores pueden, en estas historias, comparar su situación con la de los casos. Estos investigadores afirman que los estudios cualitativos a pequeña escala hacen contribuciones significativas para conceptualizar la complejidad de la formación del profesor y modelar los procesos de aprendizaje individual del profesor. Adicionalmente, los resultados de los estudios cualitativos en pequeña escala podrían ser usados como datos para análisis secundarios que busquen contribuir a la teoría. Por otra parte, para estos autores, cuando se teoriza, los estudios a gran escala son necesarios para evaluar las hipótesis.

Concluyen Adler *et al.* (2005), que es necesario realizar tres tipos de estudio. Estudios a gran escala para entender el amplio campo de oportunidades de los profesores para aprender y contribuir a las teorías de aprender a enseñar. Por otro lado análisis a través de casos; con los análisis de casos cruzados, se posee oportunidades para evaluar esas creencias, para tratarlas como hipótesis y así aprender acerca de cómo los diferentes enfoques, programas y marcos afectan el contenido del conocimiento que los profesores necesitan para aprender cómo enseñar. Además se requieren estudios longitudinales dado que muchos de los estudios encontrados son a corto plazo.

Otras dos observaciones del estudio que hemos citado en los párrafos anteriores son que los procesos de reforma curricular en matemáticas, a través de diferentes países, dieron lugar a que muchos profesores experimentados y que muy posiblemente fueron exitosos, ahora tienen que enseñar un plan de estudios que es bastante diferente a aquel mediante el cual fueron formados como profesores. Desde otro ángulo, estos autores, establecen que en Educación Matemática los estudios que se basan en un mismo enfoque de investigación son a menudo vistos simplemente como la replicación, y por lo tanto rechazados cuando se presentan para publicación. Esta situación es una diferencia con las investigaciones en ciencias naturales, donde replicar los estudios experimentales tiene su valor reconocido.

1.1.1.4. La investigación sobre práctica profesional de los docentes y las creencias y concepciones.

En la actualidad, en el campo de la educación matemática se percibe un aumento de los estudios que investigan las creencias del profesor (Sánchez, 2010, 2011). En nuestro estudio asumimos que el término concepciones hace referencia a un conjunto de «*creencias, significados, conceptos, proposiciones, reglas, imágenes mentales y las preferencias*» Thompson (1992, p.130) y como «*conjunto de creencias y posicionamientos que el investigador interpreta que posee el individuo, a partir del análisis de sus opiniones y respuestas a preguntas sobre su práctica*». (Carrillo, 1998, p.42).

Thompson (1992), en su síntesis sobre las investigaciones de las creencias y concepciones de los profesores, concluye que es necesario explicitar las ideas de los profesores si queremos intentar promover una transformación de éstas y si queremos comprender la actuación del profesor en el aula. Philipp (2007), en su revisión identifica el gran número de investigaciones sobre las creencias de los profesores de matemáticas, centradas en tres líneas: la comprensión de creencias de los profesores, el cambio de creencias de los profesores y la investigación de la relación entre las creencias de los profesores y las prácticas. Por su parte Skott (2009) considera que las creencias y concepciones es probablemente una de las áreas más populares en el campo de investigación, tal vez debido a que se asocia con la idea de que las creencias informan y definen las prácticas de enseñanza.

Sobre esta primacía Skott (2009) afirma que la investigación sobre creencias no parece haber cumplido sus promesas. El autor relativiza el énfasis prestado, durante los últimos 20 años, a las creencias de los profesores como un elemento que define sus prácticas y para ello plantea un estudio de caso en cual se indaga sobre las creencias de un profesor acerca la enseñanza, al iniciar su vida profesional. En el transcurso de la inserción del profesor en la enseñanza – estudio de caso – el autor detecta que existen factores que afectan a dicho profesor, como sus vínculos con los demás profesores, las metas de la escuela y de la educación. Muchos elementos de lo que debería ser una comunidad de práctica influyen y no permiten que, en realidad, su práctica esté determinada exclusiva y primordialmente por sus concepciones. El autor sugiere desechar la idea a priori de que las creencias del maestro son los determinantes principales en lo concerniente a qué y cómo se enseña la matemática. Con ello, el autor afirma que de ninguna manera pretende ver la investigación sobre concepciones y creencias como algo obsoleto. Pero indica que las esperanzas sobre las contribuciones del campo para la práctica pueden haberse tornado ambiciosas, y por ello sugiere que deben definirse expectativas más modestas de su impacto potencial. Estas expectativas deben reconocer que las aulas son entidades sociales, a pesar de la influencia incuestionable del maestro.

Para explicar las aparentes inconsistencias encontradas en su estudio, Hoyles (1992) concluye que la noción de “*creencias situadas*” nos permite hacer frente a esta diversidad. También Skott (2001) llegó a esta conclusión pues en el caso particular de su estudio, el objetivo del profesor había cambiado, y sólo después de entender el objetivo real, el investigador podrá explicar las aparentes contradicciones entre las creencias y las acciones. Sztajn (2003) también considera la relación entre creencias de los profesores y las prácticas, mediadas por los contextos en los que los maestros están trabajando, pero en lugar del análisis de un profesor en dos contextos como había hecho Skott, se analizaron dos profesores que tenían creencias similares, pero enseñan en diferentes contextos. Concluye que las creencias de los profesores sobre las matemáticas no es suficiente para explicar las prácticas, y sólo después de considerar en los profesores "las creencias acerca de los niños, la sociedad y la educación" era cuando se llegaba a evidenciar las diferencias en las prácticas de los maestros.

Otros estudios concernientes a la investigación de la relación entre las creencias de los profesores y las prácticas, y el cambio de creencias de los profesores, dan como origen el constructo *perspectiva de la práctica,* el cual nace de las investigaciones sobre procesos de transición de las prácticas de docentes, para acomodarse a las reformas en la enseñanza de la matemática. A través de estudios de caso, Tzur *et al.* (2001), y de la observación de grupos, se realizan “informes de práctica” para obtener una serie de datos, destacar e inferir aspectos y bajo «*el término perspectiva postulan una estructura pedagógica amplia compuesta de concepciones múltiples que colectivamente organizan algunos aspectos de la práctica de un profesor» (p.228).*

Simon et *al.* (2000) conciben diferentes tipos de perspectivas de la práctica: basada en la percepción, la tradicional y la basada en concepciones, que a partir de estos autores, exponemos a continuación:

La *perspectiva basada en la percepción* (Simon *et al.*, 2000) consiste en una visión platónica del conocimiento, que existe como parte de una realidad objetiva accesible a todos. Una visión de que las ideas matemáticas son o están interconectas y del aprendizaje de las matemáticas como un proceso activo, como experiencia de primera mano de las matemáticas y, una visión de la enseñanza de las matemáticas creando situaciones. Situaciones que revelen las ideas matemáticas y que orienten la atención de los estudiantes a los aspectos clave de ellas mismas.

En la *perspectiva tradicional*, al igual que en la perspectiva basada en la percepción, el docente considera que la matemática existe independientemente de la experiencia humana. Sin embargo la perspectiva tradicional puede, o no, hacer énfasis en la comprensión matemática a través del establecimiento de conexiones y no considera la percepción personal directa. Esta perspectiva, según Simon *et al.* (2000) puede caracterizarse porque el profesor intenta transmitir ideas concretas a los estudiantes quienes reciben pasivamente el conocimiento matemático de él o a través de los libros de matemáticas.

Finalmente, una *perspectiva basada en las concepciones* caracterizada por una concepción de que las matemáticas son creadas a través de la actividad humana; asumiendo que lo que los individuos ven, comprenden y aprenden está limitado y estimulado por el conocimiento actual que tienen. Esta perspectiva refleja una visión del aprendizaje de las matemáticas como un proceso de transformación del conocimiento y de las formas de actuar. El término transformación, en cuanto al aprendizaje, involucra una modificación de las ideas existentes, no simplemente la acumulación de ideas adicionales (Tzur *et al.,* 2001).

Simon *et al.* (2000) y Tzur *et al.* (2001), hacen hincapié en que las perspectivas: tradicional, basada en la percepción y basada en la concepción son sus caracterizaciones, como investigadores, de las prácticas docentes y, no como los maestros describen sus propias prácticas. Estas perspectivas son retomadas por otros investigadores, bajo el supuesto que una mejor comprensión de las perspectivas de los profesores puede contribuir a los esfuerzos que hacen los educadores matemáticos por trabajar de manera más eficaz con profesores. Así, García *et al.* (en prensa) examinan la práctica del profesor considerando las condiciones de aprendizaje que él crea para sus estudiantes. A través de la modelación de la descomposición genética del concepto *derivada,* se enfatiza la «*complejidad de relación entre las características que subyacen a la práctica del profesor y las características de su práctica*» *(p.19),* utilizando la manera en la que el docente modeliza en el aula los mecanismos de construcción del conocimiento para inferir las concepciones de los profesores sobre las matemáticas escolares y el aprendizaje.

En esta misma línea de estudios, Escudero y Sánchez (2008) a través de caracterización de segmentos, de las clases de los docentes, obtienen resultados que ayudan a teorizar y comprender la perspectiva basada en la percepción, mediante el estudio que llevan a termino respecto a la perspectiva que subyace a los enfoques pedagógicos de los docentes, de acuerdo con las adaptaciones de la práctica de enseñanza. Para finalizar, Sánchez (2010, 2011), manifiesta que la tendencia en esta línea de investigación gira en torno a los estudios sobre aspectos concretos de las prácticas de los docentes en el aula; por ejemplo los tipos de preguntas formuladas durante las clases, la forma de administrar el tiempo en una lección en particular, o la elección de los ejemplos usados en el aula. En este aspecto una de las formas de acceder al aula actualmente es a través del análisis de *clips*.

En Colestock (2009) se identifica el cómo y cuándo se presenta el tipo de evento, recogido en el *clip*, y se caracteriza la práctica del profesor, lo que permite establecer, entre otros aspectos, las creencias del profesor acerca de cómo aprenden los estudiantes. También existen estudios que, como en el caso de Gueudet *&* Trouche, (2009), se encuentran dentro un pequeño grupo de investigadores que ha comenzado a centrarse en el trabajo de los profesores de matemáticas fuera del aula de clase. Estos investigadores están particularmente enfocados en la clase de recursos usados por los profesores para definir el contenido de las lecciones. (Sánchez, 2010, 2011)

1.1.2. Teoría socio-cultural en el análisis de la práctica del docente

1.1.2.1. La práctica del profesor

Nuestra intención de aproximarnos a la práctica profesional de los docentes de precálculo para describir y analizar los momentos de planificación y gestión de la enseñanza requiere el tomar decisiones sobre las maneras de mirar dicha práctica. Para este fin tomamos como referencia los planteamientos de Llinares (2000) para quien "Ser profesor de matemáticas"

> «*debería ser entendido desde la perspectiva de participar en una práctica social: enseñar matemáticas. La práctica profesional del profesor se ve como el conjunto de actividades que genera cuando realiza las tareas que definen la enseñanza de las matemáticas y la justificación dada por el profesor. En este sentido la práctica del profesor no está inscrita únicamente en lo que sucede en el aula, sino que se conceptualiza desde una perspectiva más amplia, comunidad de práctica profesional en la que se incluyen tareas como tutorías, reuniones de seminario-departamento, asistencia a actividades de formación, etc.*» (Llinares, 2000, p. 110)

La descripción anterior, determina ver la práctica del profesor de matemáticas desde una perspectiva sociocultural, lo cual, por un lado, permite destacar que un principio central de la aproximación sociocultural en el ámbito educativo, es que las acciones humanas, tanto en el plano individual como en el plano social están mediadas por herramientas y signos (Goos, 2004; Lerman, 1996; Mariotti, 2000). También nos señala que existen diferentes momentos y lugares donde se desarrolla la práctica del profesor, que ha sido entendida como un sistema de actividad. En nuestro caso, nos centraremos en el estudio de la práctica del profesor en dos fases de ella; en la planificación de la lección y en la gestión en el aula.

De acuerdo con Llinares (2000)

> «*las 'prácticas matemáticas' que se desarrollan en el aula vendrán caracterizadas por las interacciones entre el profesor, los estudiantes y la tarea matemática a realizar mediados por los objetivos pretendidos. Vistas globalmente estas prácticas matemáticas van a definir las oportunidades de aprendizaje de los estudiantes. En el caso concreto de la gestión del profesor del proceso de enseñanza – aprendizaje, esta viene articulada a través de la realización de unas tareas mediante el uso de unos instrumentos*» *(114).*

En las prácticas en el aula de matemáticas, en las cuales las conversaciones profesor –estudiantes, estudiantes – estudiantes se encaminan en la solución de tareas propuestas por el profesor, estas mismas tareas son consideras instrumentos de su práctica al igual que el lenguaje hablado, los modos de representación simbólica y los materiales didácticos. Contemplar los instrumentos conlleva incluir la "noción de transparencia" como una noción ligada a ellos (Lave y Wenger, 1991), sin que esta transparencia de los instrumentos sea una cualidad objetiva, inherente a los mismos, sino que depende del uso que se les dé (Meira, 1998). Reconocida esta dependencia de la cualidad respecto de su uso, se plantea el dilema de la transparencia que se resume en la dualidad visible-invisible, es decir, deben ser los instrumentos invisibles para que permitan ver los conceptos matemáticos y a la vez deben ser considerados como el elemento a través del cual se están viendo dichos conceptos. (Adler, 2000; Llinares, 2000).

Centrados en el uso que hace el profesor de los instrumentos de la práctica, se han empezado a realizar algunas caracterizaciones de la práctica que incluyen además de lo que el profesor hace, tanto su comprensión de los instrumentos como el propósito al usarlos (Llinares, 2000). Al respecto, en nuestro análisis, se asume «*que los instrumentos utilizados y su forma de utilización influyen en el tipo de comprensión matemática y creencias de los estudiantes*» (Llinares, 2000, p.115) Lo anterior conlleva a focalizarnos en identificar aspectos del uso que hace el profesor de los instrumentos en el aula de matemáticas. (Gavilán, 2005).

1.1.2.2. Modelación de la Descomposición Genética.

La noción "*modelación de la descomposición genética*" postulada por Gavilán (2005) nos interesa en nuestro estudio dado que se enmarca dentro de la perspectiva sociocultural. Así, Gavilán asume que el entorno usual de desempeño profesional de los profesores es una comunidad natural de práctica lo que justifica el uso de las ideas teóricas: fases de la práctica, instrumentos y transparencia, para introducir la modelación de la descomposición genética de una noción. Esta noción permite explicar la práctica del profesor de matemáticas desde el punto de vista de la construcción del conocimiento matemático (aprendizaje) que parece potenciar en los estudiantes. Las características descritas son las que nos conducen a utilizar dicha noción en nuestro análisis de la práctica del docente.

Diferentes investigaciones han considerado la relación entre la práctica del profesor y la manera de entender el aprendizaje de los estudiantes desde distintos enfoques teóricos y con diversos grados de explicitación. Dentro de ellas, la *modelación de la descomposición genética* de una noción nos permite analizar la práctica de un profesor vinculada con nuestra mirada de comprensión del aprendizaje de los estudiantes a través de la propuesta de la Teoría APOS. La "*modelación de la descomposición genética de un concepto o noción matemática*" nos permite hablar de las características de la práctica del profesor que favorecen los procesos de construcción potencial del conocimiento en los estudiantes y de lo que puede estar justificando dichas características. Nos permite explicitar claramente el modelo usado para explicar el aprendizaje potencial que puede generar el profesor (Gavilán, 2005). La idea de *modelación de la descomposición genética de una noción matemática*

> *«se construye utilizando la noción de descomposición genética introducida por el grupo RUMEC (Dubinsky, 1991; Asiala et al., 1996). Desde la práctica del profesor, y la mirada del investigador, debemos entenderla como una descripción y secuencia (orden en el que se presentan y las relaciones) de los mecanismos de construcción que el profesor modela cuando pretende que sus estudiantes lleguen a comprender un concepto».* (Gavilán 2005, p. 77)

Concretamos así dos aspectos de nuestra investigación:

Primero, *la modelación de un mecanismo de construcción* será desde nuestra posición de investigadores la manera de cristalizar el significado que damos a las a las acciones[2] del profesor, a sus decisiones sobre qué tareas utilizar, a cómo gestiona el contenido matemático en el aula, a las intenciones que manifiesta y justificaciones que proporciona (Gavilán *et al.*, 2007a).

Segundo, los "instrumentos de la práctica", en nuestra investigación conforman dos conjuntos; por un lado los modos de representación que hemos englobado en

[2] Las "acciones" del profesor en esta investigación, al igual que en Gavilán (2005), «*tienen un sentido amplio incluyendo tareas, la secuencia de tareas y lo que "hace" el profesor*» (p. 78).

simbólicos y gráficos, y por otro los elementos matemáticos del concepto (ver sección 1.4.1).

> «*Las características del "uso que hace el profesor de los instrumentos de la práctica" se determinarán a través de las relaciones que establece, más o menos explícitamente, entre los elementos matemáticos del concepto, y las conversiones entre los modos de representación que utiliza, para que los estudiantes lleguen a construir los significados pretendidos. En este sentido, cuando un profesor "hace y dice cosas" en el aula, crea las condiciones para que sus estudiantes puedan construir los significados del concepto. Así, el profesor no "construye las formas de conocer de los conceptos", sino que pone los medios —crea el contexto— para que sus estudiantes construyan los significados y desarrollen los mecanismos de construcción pretendidos. Éste es el motivo por el que intentamos describir la manera en la que el profesor "modela mecanismos de construcción de conocimiento"*» (Gavilán *et al.*, 2007a, p. 10)

Con los anteriores elementos explicativos que nos proporciona la "*modelación de la descomposición genética de una noción*" y, teniendo presente que nuestra investigación no tiene como objetivo identificar unas determinadas prácticas que aseguren que los estudiantes aprenderán de una determinada manera, sino comprender por qué un profesor se comporta de la manera en que lo hace y qué influye en las decisiones que toma, se analizarán las prácticas de los docentes universitarios de precálculo. Al mismo tiempo pretendemos examinar la capacidad explicativa de la noción *modelación de la descomposición genética* al ser extendida a otros conceptos y contextos distintos de los que fueron su origen.

1.1.2.3. Perspectiva de la Práctica.

Los referentes teóricos que se han asumido en esta investigación nos permiten acercarnos a la caracterización de la práctica profesional de un profesor usando la idea de la modelación que el profesor hace de los mecanismos de construcción de la función exponencial para conseguir desarrollar en los estudiantes la comprensión del concepto. A su vez la modelación de la descomposición genética nos permitirá inferir, de acuerdo con Gavilán (2005), aspectos que subyacen a la práctica del profesor, como un constructo teórico definido por un "conglomerado" de ideas agrupadas en dos dimensiones:

- *«cómo concibe el profesor el desarrollo de la comprensión: concepción sobre el aprendizaje de los conceptos visto a través de los mecanismos de construcción del conocimiento que se potencia, secuencia y relaciones y su justificación.*

- *su visión de las matemáticas: concepción de las matemáticas como objeto de enseñanza y aprendizaje visto a través de cómo organiza el contenido matemático para enseñarlo.» (Gavilán, 2005, p. 227)*

La propuesta de Gavilán (2005) para realizar las inferencias sobre estas dimensiones consiste en el uso de las variables siguientes:

- La forma en que usa los sistemas de representación como instrumentos de la práctica.
- Cómo el profesor organiza los distintos conceptos matemáticos y cómo establece relaciones entre ellos.
- Las formas de conocer que parece potenciar mediante las modelaciones de los mecanismos de construcción.

En cuanto a la forma de examinar las características de la práctica, una opción de procedimiento se establece en Gavilán (2005). El autor identifica un desarrollo de la «*comprensión progresiva*»; indicando con esto que la modelación de la descomposición genética parte de la modelación de acciones, interiorización... y sigue el orden prescrito en el modelo APOS, referido al desarrollo del concepto; desarrollo progresivo de tipo *"horizontal"*.

Por otra parte, se entiende que cuando un concepto se construye a partir de otro, hace referencia a relaciones entre distintos conceptos. Este tipo de desarrollo del concepto es denominado por Gavilán (2005) como un desarrollo "*progresivo vertical*".

Para Gavilán (2005) hay una perspectiva de la práctica que se apoya en la necesidad de establecer relaciones explícitas entre "elementos" involucrados en tres variables: uso de los sistemas de representación, organización de los conceptos matemáticos y formas de conocer potenciadas, la cual él afirma que pone de manifiesto una determinada forma de concebir las matemáticas escolares y de concebir el aprendizaje de las matemáticas, y la identifica como *perspectiva holística*.

> *«Para esta situación tenemos una perspectiva de la práctica del profesor en la que son relevantes no sólo los modos de representación, los conceptos matemáticos y las formas de conocer presentes en la práctica desarrollada, sino que son esenciales las relaciones entre dichos elementos. En este sentido, hay un "plus" al considerarlos en conjunto en la práctica, que va más allá de la "suma" de las partes involucradas, ese plus viene dado por las relaciones.*

Por ello esta perspectiva de la práctica del profesor la hemos denominado "holística"[3]» (Gavilán, 2005, 295).

Otra perspectiva de la práctica es la que, este mismo autor, identifica como esencialmente "algorítmica"

« en la que el énfasis está puesto en la necesidad de reglas y procedimientos algorítmicos paso-a-paso, no hay necesidad de establecer relaciones entre los "elementos" de las variables definidas: uso de sistemas de representación, organización de conceptos matemáticos y formas de conocer potenciadas. En los casos en que se relacionan, éstas se pueden construir mediante reglas. En esta perspectiva lo relevante es recordar y aplicar las reglas sin vinculaciones. Esta forma de proceder manifiesta una determinada concepción de las matemáticas y una concepción del aprendizaje matemático…[]…la denominaremos tradicional.» (p. 295)

De lo anteriormente expuesto, surgen dos perspectivas de la práctica claramente identificadas (Gavilán, 2005) y de un continuo entre estas dos visiones, de tal manera que desde la perspectiva holística a la perspectiva tradicional se encuentra una infinita gama de posturas de los docentes en su práctica profesional de enseñanza.

1.2. LA TEORÍA DE CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO APOS

La teoría cognitiva de la construcción del conocimiento de Piaget y sus colaboradores considera el proceso de abstracción reflexiva como una clave en la construcción de los conceptos lógico matemáticos (Piaget, 1977). Esta teoría es retomada, posteriormente, por Dubinsky (2000), que propone la teoría APOS (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas). Dubinsky desarrolla esta teoría de aprendizaje considerando que el conocimiento matemático de un individuo «*es su tendencia a responder ante situaciones matemáticas problemáticas reflexionando sobre ellas; construyendo y reconstruyendo acciones, procesos y objetos matemáticos y organizándolos en esquemas con el fin de manejar las situaciones*». (Dubinsky, 1996, p. 32)

[3] «*El diccionario de la Real Academia de la Lengua (disponible on-line) define holístico como "perteneciente o relativo al holismo" y define holismo como "Doctrina que propugna la concepción de cada realidad como un todo distinto de la suma de las partes que lo componen".*
Asiala et al. (1996) denominan "holística" la aproximación a la enseñanza desarrollada por el grupo RUMEC, debido a que el estudiante desarrolla la comprensión resumiendo y considerando ideas juntas relacionadas». (Gavilán, 2005, p. 295)

Así los procesos, objetos y esquemas son construcciones mentales que, «*según esta teoría, un individuo realiza para obtener significados de las situaciones y de los problemas matemáticos. Los mecanismos para hacer dichas construcciones se llaman abstracciones reflexivas e incluyen la repetición, la interiorización, la encapsulación, la desencapsulación, la coordinación, la inversión, etcétera*» (Dubinsky, 2000 p. 60)

De acuerdo con esta descripción, el conocimiento presenta dos aspectos: conocer un concepto y acceder a éste cuando sea necesario teniendo en cuenta, además, que el conocimiento es una tendencia a hacer construcciones mentales que son usadas en una situación problemática. El progreso en el desarrollo del conocimiento matemático tiene lugar cuando se hace una reconstrucción a través de una interiorización, una coordinación, una inversión o una generalización, frente a un problema parecido a otro tratado anteriormente.

En la teoría APOS, se parte de la idea de que la comprensión matemática de un concepto se inicia con la manipulación de un objeto físico o mental para formar *acciones*, de manera que la repetición de esas manipulaciones permita que sean interiorizadas para formar *procesos*, los cuales pueden ser encapsulados para formar *objetos*. Los objetos, pueden ser desencapsulados invirtiendo el proceso por el cual fueron formados. Finalmente acciones, procesos y objetos pueden ser organizados en esquemas (Dubinsky y Mcdonald, 2001). Lo anterior se bosqueja así:

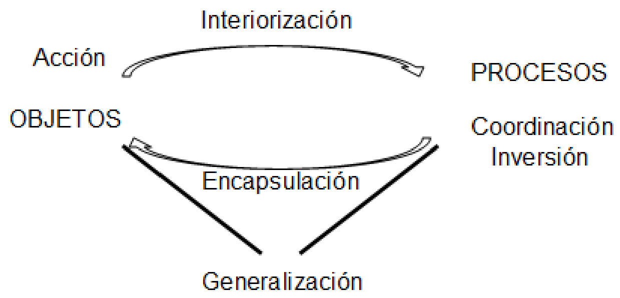


Figura 1. Mecanismos de construcción. (Dubinsky, 1991. p.107)

Analicemos el modelo propuesto por la teoría APOS para la formación del conocimiento matemático. El estudiante que aprende lleva a cabo una *acción* cuando realiza una manipulación física o mental sobre un objeto que es percibido de manera externa a él. En muchos casos esta manipulación ocurre como reacción a estímulos externos que indican los pasos a realizar. A pesar de que la conceptualización en el nivel de las acciones es muy limitada, la teoría señala que éstas son el inicio decisivo para lograr la posterior comprensión de un concepto.

De acuerdo con la teoría APOS, cuando la *acción* es repetida manual o mentalmente y no es provocada necesariamente por estímulos externos puede ser *interiorizada* en un *proceso*. Un *proceso* es considerado, por tanto, como una actividad interna y completamente controlado por el estudiante. La *interiorización* permite al sujeto ser consciente de la acción, reflexionar sobre ella. También se pueden *coordinar* dos o más procesos lo que faculta para construir un nuevo proceso o un objeto, o bien, se pueden construir procesos nuevos a partir de procesos existentes mediante el mecanismo de *inversión.* Cuando un estudiante es capaz de invertir los pasos de una transformación matemática se produce un progreso significativo en su conocimiento matemático (Dubinsky, 1996).

Si el estudiante puede reflexionar de manera más general sobre un proceso particular, si lo concibe como una totalidad y si puede efectuar transformaciones sobre el mismo, decimos entonces que ha *encapsulado* a dicho proceso como un *objeto* (Dubinsky y Mcdonald, 2001).

Una colección coherente de procesos y objetos puede ser organizada estructuralmente para formar *esquemas*. Los esquemas pueden ser tratados como objetos e incluidos en organizaciones más complejas que la teoría denomina "esquemas de alto nivel". Cuando esto ocurre los esquemas, son considerados como objetos y se dice que han sido *tematizados.* «*Así, un esquema es una colección más o menos coherente de objetos y procesos. La tendencia de un sujeto a invocar un esquema le permite llegar a comprender, organizar o dar sentido o lidiar con una situación problemática* » (Dubinsky, 1996. 103).

Las afirmaciones anteriores determinan la propuesta del modelo de comprensión APOS, y con ello una de las "nociones" fundamentales de dicho modelo, como lo es, la descomposición genética de un concepto. La descomposición genética de un concepto matemático, es un modelo usado por los investigadores para describir las construcciones mentales específicas que un estudiante realiza para adquirirlo. Así, se entiende por descomposición genética de un concepto a «*un conjunto estructurado de construcciones mentales, las cuales pueden describir cómo el concepto puede ser desarrollado en la mente de un individuo*» (Asiala *et al.*, 1996, p. 7)

> «*Una de las metas de la teoría APOS, al elaborar la teoría general, es aislar porciones pequeñas de esta estructura compleja y dar descripciones explícitas de relaciones posibles entre los esquemas. Cuando esto se hace para un concepto particular, se llama descomposición genética del concepto. Es importante precisar que, aunque se de, para cada concepto, una sola descomposición genética, no se considera que ésta es la descomposición genética, válida para todos los estudiantes. Más bien representa, de una manera razonable, algo de lo que los estudiantes pudieron utilizar para construir un concepto*» (Dubinsky, 1991 p. 102).

En nuestro estudio, la descomposición genética del concepto hace referencia a dos componentes del modelo de comprensión APOS: las formas de conocer: acción, proceso, objeto y esquema, y los mecanismos de construcción: interiorización, inversión, coordinación, encapsulación y desencapsulación.

Utilizando como marco teórico APOS, se ha realizado un importante número de investigaciones en didáctica de la matemática que proponen una descomposición genética sobre diferentes conceptos matemáticos. Este es el caso de investigaciones sobre las nociones conjunto generador y espacio generado en álgebra lineal (Kú Euán, 2008), la convergencia de serie numérica (Codes, 2010), las inecuaciones (Barbosa, 2003), la transformada de Laplace (Cordero y Miranda, 2002), la transformación de funciones, el dominio y rango de una función (Baker, *et al.*, 2001), la inducción y los conjuntos compactos (Dubinsky y Lewin, 1986), la función inversa (Vidakovik, 1997), la composición de funciones (Ayres *et al.*,1988; Dubinsky *et al*, 1989), la noción de integral definida Boigues (2010) y Aldana (2011), entre otras. Otras investigaciones utilizan descomposiciones ya realizadas para analizar los esquemas de los estudiantes como es el caso de Sánchez-Matamoros, García y Llinares, (2006) en relación con el esquema de derivada. Sin embargo, de acuerdo con nuestra indagación, sobre función exponencial solo en Weber (2002a) se encuentran algunos aspectos concernientes a un bosquejo de una descomposición genética.

1.3. PROCEDIMIENTO DE ELABORACIÓN DE UNA DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

A partir del marco de referencia de la teoría APOS, vamos a proponer una descomposición genética de la función exponencial que establece algunas especificidades de los mecanismos de construcción y las formas de conocer de este concepto en particular.

Para realizar la descomposición genética de un concepto, es decir, una detallada identificación de cada una de las construcciones mentales que un individuo debe hacer para llegar a comprenderlo, algunos investigadores (Harel y Dubinsky, 1992; Vidakovic, 1997) parten inicialmente de la experiencia del profesor o investigador. Otros investigadores (Cordero y Miranda, 2002) consideran que el análisis teórico inicial debe descansar en la epistemología del concepto puesto que este conocimiento enriquece dicho análisis teórico y, existe un consenso en la necesidad de identificar los procesos utilizados por los estudiantes cuando tratan de comprender el concepto (Dubinsky y Lewin, 1992). Considerando los aspectos anteriormente mencionados planteamos una descomposición genética considerando la propia estructura del concepto, una revisión histórico-epistemológica de las funciones logarítmicas y exponenciales y los resultados de diversas investigaciones acerca de los procesos utilizados por los estudiantes cuando tratan de comprender el concepto de exponente y el de función exponencial.

1.3.1 Definición de la función exponencial

Recordemos brevemente qué se entiende por función exponencial y cómo aparece en los libros de texto de precálculo. Se llaman funciones exponenciales a funciones de la forma $f(x)=b^x$, siendo b una constante y x la variable independiente. La definición de la función exponencial exige siempre que la base sea positiva y distinta de 1(b>0, $b \neq 1$). La condición de que la base sea distinta de 1 se debe a que si consideráramos ese caso obtendríamos la función constante y=1. La base no puede ser negativa porque en ese caso no tendría sentido en el conjunto de los números reales.

La función exponencial $f(x)=b^x$ tiene dominio R y rango $(0,\infty)$ y todas las gráficas pasan por el punto (0,1) independientemente del valor de la base.

Si b>1 las funciones son monótonamente crecientes, si 0<b<1, son monótonamente decrecientes. En la figura 2 se puede ver la representación gráfica para distintos parámetros de b.

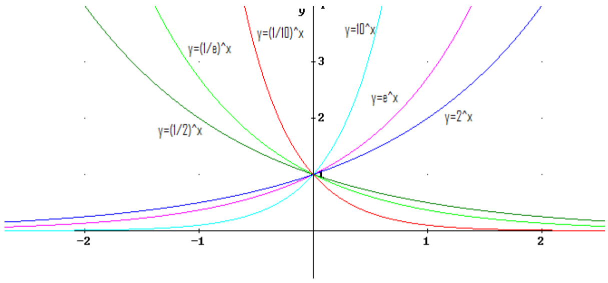


Figura 2. Función exponencial para diversos parámetros de b.

Si b>1, entonces la gráfica de $y=b^x$ se acerca a $y=0$ para valores negativos de x, por lo que el eje x es una asíntota horizontal. Si 0<b<1, la gráfica se acerca a $y=0$ cuando x crece indefinidamente y de nuevo el eje x es una asíntota horizontal. En cualquiera de los casos la gráfica nunca corta al eje x, es decir $b^x>0$ para todo x.

Algunas características de las funciones exponenciales:

1) El dominio es el conjunto de los números reales.

2) El recorrido es el conjunto de los números reales positivos.

3) El valor de y se acerca a cero pero nunca será cero, cuando x toma valores negativos en las funciones crecientes y positivos en las decrecientes.

4) Todas las funciones intersecan al eje y en el punto (0,1).

5) Son funciones continuas.

Se considera como caso especial la función: $y = e^x$ (Función exponencial natural).

Estas funciones tienen una gran aplicación en campos muy diversos como la biología, la física, la química, la economía, la sociología o la ingeniería. Así fenómenos que se modelan con la función exponencial pueden ser crecimiento de poblaciones, modelos de expansión del universo, enfriamiento de sustancias, decrecimiento radiactivo, interés compuesto continuo, sonido, entre otros. Hemos incluido esta definición de función exponencial con la única intención de contextualizarla dado que este es el nivel donde se introduce y estructura este concepto matemático y el nivel educativo al que se refiere esta investigación.

1.3.2. Evolución del concepto de logaritmo y función logaritmo

Una vez que iniciamos nuestra lectura sobre la génesis y consolidación del concepto función exponencial y ubicados en el siglo XVIII cuando Euler (1707-1783) relaciona las funciones logarítmica y exponencial como funciones inversas y, dado que es esta la manera en que actualmente se enseñan en la escuela, se toma la decisión de hacer el estudio independiente de cada una de ellas. La indagación nos permite resaltar que si bien la noción de logaritmo fue creada por Napier (1550-1617) quien murió antes de que Descartes (1596 - 1650) introdujera la notación, *n, nn,* n^3, . . . para las potencias, ambos, logaritmo y exponente comparten orígenes pero tienen características independientes en su evolución que se detallan a continuación.

Como resultado de la revisión histórico-epistemológica del concepto de logaritmo y de la función logaritmo se han establecido diferentes etapas en la evolución de este concepto (González y Vargas, 2007). Esto nos ha permitido centrar la mirada en los cambios significativos que determinan cada nuevo “escalón” en su evolución.

Se suele datar la invención de los logaritmos a principios del siglo XVII. El germen sobre el que se construye este concepto se puede encontrar en un trabajo de Arquímedes (aprox. 287-212 a.C.) relativo a los números gigantescos, donde se menciona que la suma de los «órdenes» de varios números (equivalentes a sus exponentes tomando la base $100_1000.000$) corresponde al «orden» del producto de dichos números.

Posteriormente se plantea la relación entre los términos de una progresión geométrica y los correspondientes términos en la progresión aritmética, sin que emerja aún ningún concepto; en la *Arithmética Integra* (1544) de Stifel (1487-1567), se establece que los términos de la progresión geométrica[4]:

$1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, \ldots$

se corresponden con los términos de la progresión aritmética formada por los exponentes

0, 1, 2, 3, 4, 5, …,

La multiplicación de dos términos de la progresión geométrica produce un término, cuyo exponente es la suma de los términos correspondientes en la progresión aritmética[5], y la división de dos términos de la progresión geométrica produce un término, cuyo exponente es la diferencia de los correspondientes términos en la progresión aritmética (Kline, 1990; Wussing, 1989).

En la siguiente etapa se nomina el nuevo concepto y, desprendiéndose de la mirada en las progresiones discretas, se elabora un modelo que involucra variabilidad, covariación y una búsqueda de continuidad, generando una definición geométrica y la elaboración de tablas de cálculo. Podemos considerar que Napier (1550-1617) fue el artífice de este avance en la construcción del concepto de logaritmo. Su invención fue más que el fruto de una elaboración aritmética del estilo de las de Stifel, el resultado del estudio de un problema de mecánica, para el que se construyó un modelo adecuado que permitiera conjugar (Confrey, 1994) el mundo aditivo y el multiplicativo.

Cabe anotar el interés de Napier por resolver los problemas astronómicos de la época, para lo que utilizó las recién descubiertas Reglas de Prosthaphaeresis. Estas reglas se habían adoptado en los observatorios astronómicos, incluido el de Tycho Brahe (1546-1601) en Dinamarca, de donde llegó la noticia a Napier en Escocia, que al parecer le animó a redoblar esfuerzos y a publicar en 1614 su obra *Mirifici logarithmorum*[6] *canonis descriptio* («Descripción de la maravillosa regla de los logaritmos») en la que utiliza por primera vez el término logaritmo y que contenía solamente una introducción y una guía para el cálculo de los logaritmos.

---

[4] Por comodidad para el lector se va a utilizar en el texto la notación actual relativa a los diferentes conceptos matemáticos.
[5] Esta propiedad de los exponentes fue expuesta para números naturales en el libro IX de los Elementos de Euclides [Millán, 2004], para fracciones positivas se empieza a usar en el siglo XIV a partir de Nicolas de Oresme; en los siglos XV, XVI y XVII comienzan a usarse con exponentes negativos y fraccionarios en general; y finalmente, Euler es quién los va a extender a los irracionales.
[6] El término logaritmo acuñado por Napier proviene de « logos », razón y “aritmos”, número, y hace referencia al " número de la razón ", es una medida del "numero" de veces que la "acción razón" ha ocurrido.

Napier lo explica de la siguiente manera:

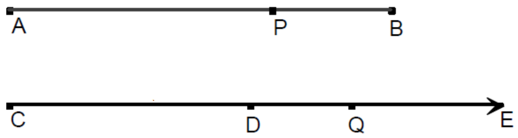


Figura 3.Una representación de logaritmo.

«*Sea el segmento AB y una semirrecta CDE dados en la figura 3. Sea un punto P que parte de A y se mueve a lo largo de AB con velocidad variable que decrece en proporción a su distancia B; supongamos que un punto Q parte al mismo tiempo de C y se mueve a lo largo de la semirrecta CDE con velocidad uniforme igual a la velocidad inicial del punto P; entonces Napier llama a la distancia variable CQ, el logaritmo de la distancia PB*» (Boyer, 2003, p. 397).

Más tarde, se publicó una obra póstuma de Napier titulada *Mirifici logarithmorum canonis constructio* (1619) en la que aparecen las tablas de Napier que fueron recibidas con entusiasmo por astrónomos[7] y navegantes, ya que convertía los tediosos cálculos de multiplicaciones y divisiones en simples sumas y restas. Hay que señalar que, en la época de Napier, todavía no se había desarrollado las potencias con exponente fraccionario ni la notación exponencial. Tampoco estaba extendido el uso del punto decimal para separar las cifras decimales, de hecho fue Napier, y su uso sistemático del punto decimal, el responsable de su generalización (Edwards, 1979).

Además de que Napier no utilizaba una base para su sistema de logaritmos, una de las diferencias más notable entre sus logaritmos y los nuestros consiste en el hecho de que su logaritmo de un producto (o de un cociente) no es igual, en general, a la suma (o la diferencia) de los logaritmos. Esto se superará en la siguiente etapa que se caracteriza por cambios que conllevan la aceptación de las igualdades $\log 1 = 0$ y $\log 10 = 1$ y la utilización de 10 como base de los logaritmos, situación que se traduce en un esquema de logaritmo con propiedades explícitas como las actuales enunciadas por primera vez por Oughtred (1574-1660).

Euler (1707-1783), en su manuscrito inédito (*Opera Posthuma*, II, 800-804), introduce por primera vez la definición de logaritmo de un número positivo como el exponente al cual hay que elevar la potencia, cuya base es la elegida para que dé el número prefijado (Kline, 1990). Euler utiliza esta definición para la resolución de problemas relativos a la variación de interés compuesto y el crecimiento de la población que incluye al final del capítulo VI de su *Introductio*. De esta forma resuelve el problema propuesto por Descartes en su *Géométrie* (1637) (Chica, 2001),

[7] Kepler utilizó las tablas de Napier para el descubrimiento de su tercera ley de los planetas.

en torno a las curvas cuyas ordenadas $y\left(1+\frac{b}{a}\right)^n$ crecen con las abscisas x+nb (González, 2001, p.189). Euler fue el primero que vio en la logaritmación una de las dos operaciones inversas de la elevación de potencias, con lo cual se hizo posible aplicar a los logaritmos procedimientos algebraicos (Wieleitner, 1932). Su contribución no se limitó a su definición en términos de exponentes, sino que en 1747 escribió a D'Alembert (1717-1783) explicando el status de los logaritmos de números negativos.

Una de las principales etapas del desarrollo matemático del concepto es aquella en la que se considera al logaritmo como área bajo una curva, la hipérbola. El descubrimiento del carácter logarítmico de las áreas hiperbólicas provocó una promoción de los logaritmos al rango de valor analítico, adquiriendo así un carácter universal, que motivó nuevos trabajos sobre áreas hiperbólicas, lo que a su vez preparó el camino para la introducción de algunos desarrollos en serie (González, 1992). El cálculo de logaritmos por medio de series infinitas se hizo a continuación gracias a James Gregory (1638-1675), Lord Brouncker (1620-1684), Nicholas Mercator (1620-1687), Walllis (1616–1703) y Edmond Halley (1656-1742). Fue Mercator quien dio el nombre de logaritmos naturales a los valores que se obtenían a partir de la serie:

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x} = \int_0^x (1-x+x^2-x^3+...)dx = \ln(1+x) = \frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...$$

Esta etapa y el desarrollo del Análisis, dan paso a la introducción de los logaritmos en el ámbito de las funciones trascendentes como última etapa en la que nos detenemos en este recorrido.

Es importante tener presente que muchas de las funciones estudiadas en el siglo XVII fueron primero examinadas como curvas, antes de que el concepto de función estuviera totalmente determinado. Esto ocurrió también en el caso de las funciones trascendentes elementales tales como *log x, sen x* y a^x.

En 1646, entre los problemas que ocupaban a Torricelli (1608-1647), estaba uno en el que representa la curva cuya ecuación escribiríamos nosotros como $x = \log y$, en la que es quizás la primera representación gráfica de una función logarítmica; Torricelli calculó el área limitada por la curva, su asíntota y una ordenada, así como el volumen del sólido obtenido al girar esta área alrededor del eje OX (Boyer, 2003). Sin embargo, su muerte en 1647 retrasa la difusión de la gráfica. Será Huygens (1629-1695) a quien corresponderá exponer sus propiedades en el "*Discurso sobre la causa de la gravedad*", (1690). Huygens estaba interesado, desde 1651, por los logaritmos y su cálculo, en particular, la cuadratura de la hipérbola y retomó el problema mucho más tarde (1666), cuando participaba en los trabajos de la nueva Academia Real de

Ciencias de París utilizando esta noción en cuestiones de probabilidad y de combinatoria.

La dificultad más importante con la que se encontró el desarrollo del Análisis Infinitesimal fue una idea de dependencia funcional, que permitiera aplicar a las distintas funciones las operaciones del nuevo cálculo. Por ello resultaba cada vez más necesario investigar el significado del concepto de función, dar una clasificación de todas las funciones conocidas y encontrar los medios para operar con ellas.

Ya Bernoulli (1667-1748) propone en 1718[8], considerar que una función es una expresión analítica (Sánchez y Valdés, 2001). Posteriormente, Euler (1707-1783) escribió su *Introductio in analysin infinitorum* (1748) que está dedicada al estudio de las funciones, a su clasificación, propiedades, métodos de desarrollo de funciones en series y productos infinitos, en fracciones continuas y en suma de fracciones simples. Así, Euler da la siguiente definición de función: «*Functio quantitatis variabilis, est esspressio analytica quomodocunque composita ex illa quantitate variabili, et numeris seu quantitatibus constantibus*»[9] (Euler, 1748, p. 4).

Euler admite tanto valores reales como imaginarios del argumento. Una función conceptuada simplemente como una expresión analítica, se forma, según Euler, mediante una clase de operaciones admisibles en la cual entran las operaciones aritméticas, las potencias, las raíces y las soluciones de ecuaciones algebraicas. A ellas, Euler adjuntó las funciones trascendentes elementales: e^z, lnz y las funciones trigonométricas (Euler, 1748, p.5). Así mismo, Euler, definió las funciones polinómicas, las trigonométricas y las exponenciales: "*Potestas quantitatis constantes a, Exponentem haben variabilem z*"[10] (Euler, 1748, p. 70). Para añadir, a continuación, refiriéndose a las funciones exponenciales: «*dato valorem quocunque afirmativo ipsius y, conveniens datibur valor pisius z, ut fit a^z=y; iste autem valor ipsius z, quatenud tanquam Functio ipsiys y spectatur, ocari solet LOGARITHMUS ipsius y*»[11] (Euler, 1748, p. 73).

También enuncia Euler su "regla de oro para los logaritmos", la cual afirma que si hemos calculado $\log_a y$, entonces se puede calcular $\log_b y$, siendo b cualquier otra base mediante la fórmula:

---

[8] Esta idea aparece impresa en un trabajo sobre el problema isoperimétrico en la Academia Real de Ciencias de París

[9] Es función de una cantidad variable cualquier expresión analítica compuesta como quiera que sea por esa cantidad y números o cantidades constantes

[10] Potencia de la cantidad constante *a*, que tiene por exponente la variable *z*.

[11] Dado un valor afirmativo cualquiera de *y* vendrá dado el valor de *z* conveniente para que sea $a^z = y$; este valor de *z* contemplado en cuanto función de *y*, suele llamarse LOGARITMO de *y*.

$$\log_b y = \frac{\log_a y}{\log_a b}$$

Además, establece que los logaritmos de los números negativos no son reales, sino imaginarios y que tendrán un número infinito de éstos. Partiendo de la fórmula $e^{i\theta} = \cos\theta + isen\theta$ y, sustituyendo θ por π, resulta que $e^{i\pi} = -1$, con lo que $\ln(-1) = i\pi$ Además, cualquier número positivo o negativo tiene no sólo un logaritmo sino infinitos.

A continuación se presenta una tabla a manera de síntesis de las etapas descritas anteriormente:

ETAPAS	**CARACTERÍSTICAS DE LA EVOLUCIÓN**	**CRONOLOGÍA**
Antecedentes: las relaciones entre las progresiones aritméticas y geométricas.	El germen del concepto de logaritmo en el trabajo relativo a los números gigantescos. Se establece que los términos de la progresión geométrica: $1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, \ldots$ se corresponden con los términos de la progresión aritmética formada por los exponentes *0, 1, 2, 3, 4, 5, . . .* Uso de diversos tipos de identidades trigonométricas por toda Europa para simplificar los cálculos astronómicos; las *Reglas de Prosthaphaeresis*, permitían convertir el producto de funciones circulares en una suma o diferencia.	Arquímedes (aprox. 287-212 a.C.) en su obra Arenario o Psammites. Stifel (1487-1567) en la Arithmética Integra (1544). Nicolas Chuquet (1445-1488) en Le Triparty en la science des nombres (1484). Siglo XVI.
Los inicios del concepto: una base aritmética con un fundamento geométrico.	Se nomina el nuevo concepto. Utiliza por primera vez la palabra logaritmo. Se inicia el desprendimiento de la mirada sobre progresiones discretas; se elabora un modelo que involucra variabilidad, covariación y una búsqueda de continuidad, generando una definición geométrica y la elaboración de tablas de cálculo. La noción de *base* no existió en los sistemas de logaritmos, de Napier y Bürgi, y la igualdad $log\ 1 = 0$ era inadmisible en el mismo. Diferencias de los dos acercamientos al concepto de logaritmo: • Napier eligió al principio $log\ 10^7 = 0$ y construye la progresión geométrica de razón $1 - 10^{-7}$; un número próximo a 1. • Bürgi parte de log $10^8 = 0$ *y* tomó como razón, para su progresión geométrica, el número $r = 1 + 1/10^4$. • Así, la relación $log\ m < log\ n$ si $m > n$, es cierta en el sistema de Napier, mientras en el de Bürgi se verifica $log\ m > log\ n$ si $m > n$.	Napier (1550-1617) llamó a sus índices de potencias o exponentes números artificiales, y más tarde se decidió por la palabra compuesta de las dos palabras griegas logos (o razón) y arithmos (o número). Napier (1614) su obra Mirifici logarithmorum canonis descriptio. Jobst Bürgi (1552-1632) en Arithmetishe und geometrische Progress-Tabulen (1620).

ETAPAS	**CARACTERÍSTICAS DE LA EVOLUCIÓN**	**CRONOLOGÍA**
Generalización del logaritmo como exponente de las potencias.	Se integró el uso de las potencias de diez. Napier, sugiere una tabla basada en las igualdades *log 1 = 0* y *log 10 =* 10^{10}. Napier y Briggs convienen $log1 = 0$ y $log10 = 1$. Primera tabla de logaritmos llamados logaritmos vulgares o de Briggs Briggs parte de la igualdad $\log 10 = 1$ y después va calculando logaritmos tomando raíces y haciendo uso de la igualdad $\log 10^n x = n + logx$. Las tablas de Briggs tienen todas las propiedades usuales de los logaritmos, además, los nombres característica y mantisa se derivan su libro. Se enuncia de forma explicita, las siguientes propiedades de los logaritmos: $\log mn = \log m + \log n$, $logx^n = n\ logx$ $log\left(\frac{m}{n}\right) = logm - logn$. La definición de logaritmos, como los exponentes de las potencias que representan los números con una base fija, se convirtió en un acercamiento común, sin embargo esta definición no se utilizó en los inicios del siglo XVII porque no se usaban los exponentes fraccionarios e irracionales. Se introduce por primera vez la definición de logaritmo de un número positivo como el exponente al cual hay que elevar la potencia, cuya base es la elegida para que dé el número prefijado. Se vio en la logaritmación una de las dos operaciones inversas de la elevación de potencias, con lo cual se hizo posible aplicar a los logaritmos procedimientos algebraicos.	Henry Briggs (1561-1639) Briggs en 1617 publicó su obra Logarithmorum chilias prima Briggs, en su obra La Arithmetica Logarítmica (1624). William Oughtred (1574 - 1660). Euler (1707-1783) define los logaritmos como exponentes en 1728. Euler (1707-1783).
Relación del logaritmo con curvas y series.	Se resuelve en torno a las curvas cuyas ordenadas $y\left(1+\frac{b}{a}\right)^n$ crecen con las abscisas $x + nb$. Se evidencia que las áreas bajo la hipérbola se parecen a los logaritmos. La función área bajo la hipérbola cumple la propiedad aditiva característica de los logaritmos. El descubrimiento del carácter logarítmico de las áreas hiperbólicas provocó una promoción de los logaritmos al rango de valor analítico.	Euler (1707-1783). Gregoire de Saint-Vincent (1584-1667) en Opus geometricorum quadrature circuli et sectionum coni (1630/1647)-

Relación del logaritmo con curvas y series.	Cálculo de los logaritmos por métodos que se derivan de los utilizados por Napier y Briggs. Y fórmulas de aproximación para el cálculo de logaritmos, entre ellas la "*serie de Mercator*". La *serie de Mercator* es divergente para $x = -1$, dió lugar a una polémica entre Bernoulli y Leibniz acerca de la naturaleza de los logaritmos de los números negativos. El cálculo de logaritmos por medio de series infinitas.	Jesuita Sarassa (1618-1687), en su Solutio Problematis a Mercenno Propositi (1649). *Logarithmotechnia* de Mercator James Gregory (1638-1675), Lord Brouncker (1620-1684), Nicholas Mercator (1620-1687), Wallis (1616-1703), Newton (1642-1727) y Edmond Halley (1656-1742).
Logaritmo como función.	El desarrollo del Análisis Infinitesimal necesitó de una idea de dependencia funcional, que permitiera aplicar a las distintas funciones las operaciones del nuevo cálculo, además de la clasificación de las funciones conocidas. Se considera que una función es una expresión analítica. Se define función. Euler introduce así el logaritmo como función inversa de la exponencial. Dado un valor afirmativo cualquiera de *y* vendrá dado el valor de *z* conveniente para que sea $a^z = y$; este valor de *z* contemplado en cuanto función de *y*, se llama LOGARITMO de *y*. También enuncia Euler su regla de oro para los logaritmos, la cual afirma que si hemos calculado $\log_a y$, entonces se puede calcular $\log_b y$, siendo b cualquier otra base. Euler establece que los logaritmos de los números negativos no son números reales, sino imaginarios y que tendrán un número infinito de éstos.	Bernoulli (1667-1748). Euler (1707-1783) escribió su Introductio in analysin infinitorum (1748) que está dedicada al estudio de las funciones.

Tabla C. Evolución de los conceptos logaritmo y funciones logarítmicas.

La descripción detallada de esta revisión de la evolución de los conceptos logaritmo y funciones logarítmicas se encuentran en el apéndice A de la tesis que corresponde al documento, González y Vargas (2007).

1.3.3. Evolución de los exponentes y la función exponencial

Al indagar en el desarrollo histórico-epistemológico de las funciones exponenciales y logarítmicas, se establecen momentos en los cuales es evidente el desarrollo de cada uno de estos conceptos mientras que, en otros, es imposible distinguir la separación entre ambos, siendo necesario en ocasiones referirse a lo exponencial y lo logarítmico al mismo tiempo.

En la evolución de los exponentes y la función exponencial también se han identificado diferentes fases que nos ayudan a describir los cambios y avances que culminaron en el concepto tal como lo conocemos hoy en día. Vamos a iniciar esta revisión desde el nacimiento del concepto de potencia, sobre un sustrato de elementos orientales, al cuál los griegos imprimieron una fuerte conexión, por un lado, con la geometría, concretamente con los conceptos de área y volumen; y por otro lado, con la numeración. Ya Arquímedes (287-212 a.C.), en su obra titulada *Psammites* («El cálculo de los granos de arena », más conocida como «El Arenario»), evidenció la necesidad del desarrollo de una notación para algunas potencias ligadas a números grandes provenientes de cálculos astronómicos que se materializa cuando Diofanto (ca. 150 d.C.), usa en su *Aritmética*, de forma sistemática, abreviaturas para las potencias de números así como para las relaciones y las operaciones. Concretamente, aparecen abreviaturas para la incógnita, sus potencias hasta la sexta, las operaciones de adición y sustracción, y los inversos (Kline, 1972). Es importante tener en cuenta que a un pueblo que escribía los números concretos mediante letras, difícilmente podía ocurrírsele indicar también con letras los números genéricos (Colerus, 1972).

En la etapa siguiente se continúan ampliando la notación y la noción de exponentes. Así Nicole Oresme (c.1323-1382) generalizó el concepto de potencia, introduciendo los exponentes fraccionarios (Ribnikov, 1991) y Nicolas Chuquet (1445? – 1500?) y perfeccionó el simbolismo algebraico, en el cual aún no hay un símbolo especial para la incógnita, que es designada por la palabra *premie*. La denominación o potencia de la cantidad incógnita venía indicada por un exponente asociado con el coeficiente del término en cuestión. Este sistema de notación pone claramente en evidencia las leyes que rigen las operaciones con exponentes, con las que probablemente se había familiarizado Chuquet leyendo la obra de Oresme sobre proporciones, *Algorimus proportionum*. Chuquet escribe, por ejemplo, que $.72.^{1}$ dividido $.8^{3}$ es igual a $.9.^{2m}$, es decir: $\frac{72x}{8x^{3}} = 9x^{-2}$ (Boyer, 2003). Esto supone un gran avance como señala Martínez (2000):

> Su notación, que podríamos llamar "exponencial", está justificada por la economía en la escritura de las multiplicaciones. Este hecho muestra que Chuquet ha abandonado las significaciones geométricas que posee el "número primero de cantidad continua" (longitud) y sus multiplicaciones ("número segundo de cantidad continua" como área y "número tercero de

> cantidad continua" como volumen) hecho que por si mismo representa toda una nueva concepción en aquella época.
> El libre uso que hace de los números negativos (como "exponentes" según nuestro interés) es también una concepción adelantada para su época. Este hecho nos permite plantear la hipótesis de que las multiplicaciones que realizaba con las "potencias" de la variable le permitieron darle legitimidad a los números negativos.
> En términos estrictos con la información con que contamos no podemos decir que haya identificado $x^o = 1$; ya que él utiliza el superíndice cero para denotar que no hay variable. (p. 18)

El término *exponente* fue introducido por Michael Stifel (1487-1567) en 1544 en la *Arithmetica Integra*, en donde no se limitó a considerar de forma separada una progresión aritmética y otra geométrica, sino que explicó la importancia práctica de una asociación entre ambas, como vimos ya en la sección de la evolución del concepto de logaritmo, y:

-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
1/8	¼	½	1	2	4	8	16	32	64

> … propuso que la adición en la parte superior de la serie aritmética corresponde a la multiplicación de la serie de abajo (geométrica)[2]. Por ejemplo 2+3=5 corresponde a la multiplicación de 4*8=32, pero en esa época la ausencia de la notación exponencial no permitió a Stifel expresarla como se presenta en la actualidad: $2^2 * 2^3 = 2^{2+3}$, él nombró los números de arriba exponentes y a los de la parte inferior, números (progresión geométrica)... (Trujillo, 1995).

De esta forma, "Stifel extendió esta conexión entre dos progresiones para exponentes negativos y fraccionarios. Entonces la división entre r^2 y r^3 es r^{-1}, que corresponde con el término −1 con la progresión aritmética extendida" (Kline, 1972)

Además, Stifel, aun cuando no había sido todavía impresa la obra *Algorismus proportionum*, en la teoría de las proporciones, utiliza la idea de los exponentes fraccionarios de Oresme, para la resolución de ecuaciones exponenciales, por ejemplo resuelve $\left(\frac{27}{8}\right)^x = \frac{2187}{128}$, poniendo $x = 2\frac{1}{3}$, (Wieleitner, 1932)

Estos cambios en la naturaleza de los exponentes son consolidados por Descartes (1596 – 1650) que es considerado uno de los principales gestores de la ruptura con la tradición griega ya que no sólo considera x^2 y x^3 como un área y el volumen sino simplemente como segmentos, lo que hace que su álgebra sea mucho más flexible.

En una etapa posterior, el estudio de curvas, la necesidad de homogeneidad en las operaciones entre monomios y la ampliación de índices (exponentes) fraccionarios y negativos, con John Wallis (1606-1703), como principal representante, marcan la evolución de esta noción hacia la conceptualización de los denominados exponentes continuos. John Wallis propone una noción de índices fraccionarios (exponentes) y muestra cómo esta noción puede ser válida tanto en escenarios algebraicos como geométricos. Además, la consideración de áreas bajo curvas le da una representación alternativa para validar su definición aritmética sobre índices fraccionarios. Su obra y, especialmente, su *Arithmetica Infinitorum* (1665) constituye la pieza fundamental para que la noción de exponente no natural sea aceptada de manera generalizada en la matemática de finales del siglo XVII (Dennis y Confrey, 1996).

Wallis (1655) mostró que $x^0 = 1$ y estableció la relación $x^{-1} = \frac{1}{x}$ interpretando los números negativos como exponentes de la misma manera que lo hacemos nosotros. Esto es, define el índice de $\frac{1}{x}$ como - 1, el índice de $\frac{1}{x^2}$ como -2, etc. También extiende esta definición a las fracciones: por ejemplo, $\frac{1}{\sqrt{x}}$ tiene un índice de $-\frac{1}{2}$. (Dennis y Confrey, 1996). «*Nosotros solemos tomar ahora como lo más natural del mundo nuestra notación simbólica para las potencias y raíces, sin pararnos a pensar en la sorprendente lentitud con que se desarrolló esta notación a lo largo de la historia de la matemática*» (Boyer, 2003, p.338).

Otros historiadores, como Kline (1972), consideran que la extensión de la notación para exponentes negativos y racionales se debe a Newton (1642- 1727) ya que en la primera carta que dirigió a Leibniz, la *epístola pri*or usa exponentes positivos, negativos, enteros y fraccionarios como $x^{5/3}$ y x^{-3}. Pero fue en 1801 cuando Gauss adoptó x^2 para *xx*, que esta notación se convirtió en la usual. (Kline, 1972)

Finalmente, mediante cuadraturas, sumas de series y otras operaciones incluidas en el cálculo, surgieron y fueron estudiadas muchas funciones trascendentes. Como vimos en el desarrollo histórico de la función logarítmica, el centro de interés, en la primera mitad del siglo XVIII, cambió de la curva y de las relaciones entre las cantidades geométricas a las expresiones algebraicas que las relacionaban.

La definición de función da paso a otra etapa en la que Leonard Euler (1707-1783) define la función exponencial y la incluye dentro de las llamadas funciones trascendentes. La teoría de las funciones exponenciales fue completada al hallar en 1728 Daniel Bernoulli el limite que se designa con la letra *e* y, en 1743, cuando Euler consigue el valor de e^x.

Euler se plantea obtener el desarrollo de series infinitas para la función exponencial. Para ello, supone que ω sea un número infinitamente pequeño, o una fracción tan pequeña que, aunque no sea igual a cero, se verifique $a^\omega = 1 + \psi$, donde ψ es también un numero infinitamente pequeño. Para Euler, ω se aproxima a cero, de tal forma que $a^\omega \approx a^0 = 1$, siendo la diferencia la cantidad infinitesimal $\psi = a^\omega - 1$.

Considera $\psi = k\omega$ siendo " k es un número finito que depende del valor de la base a". Luego, utilizando el binomio generalizado de la serie de Newton, llega a:

$$a^{x} = 1 + kx + \frac{k^2x^2}{2.1} + \frac{k^3x^3}{3.2.1} + \frac{k^4x^4}{4.3.2.1} + \ldots$$

De aquí obtuvo dos resultados: el primero, haciendo x=1, fue generar una serie para la base a en función de k, es decir,

$$a = 1 + k + \frac{k^2}{2.1} + \frac{k^3}{3.2.1} + \frac{k^4}{4.3.2.1} + \ldots$$

El segundo fue escoger a como la base concreta para la que k=1 pues poco se había dicho hasta ahora sobre a, aparte de afirmar que era un número positivo mayor que 1. Ahora haciendo x=k=1 se obtiene la expresión para esa base concreta:

$$a = 1 + 1 + \frac{1}{2.1} + \frac{1}{3.2.1} + \frac{1}{4.3.2.1} + \ldots$$

Euler calculó que este número era aproximadamente 2,71828182845904523536028, una constante a la que designó, "en aras a la brevedad", por la ahora inmortal e. Aún más, haciendo k = 1 y a = e se tiene:

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2.1} + \frac{x^3}{3.2.1} + \frac{x^4}{4.3.2.1} + \ldots = \sum_{r=o}^{\infty} \frac{x^r}{r!}$$

De acuerdo con Martínez (2003) en su obra *Elements of Algebra* Euler (1894) utiliza las progresiones geométricas para referirse al significado de a^1, a^0, de los exponentes positivos y de los negativos, aunque «*lo significativamente distinto en el mecanismo que utiliza Euler se encuentra en el tratamiento de los exponentes fraccionarios, en donde abandona definitivamente el uso de las progresiones*.» (Martínez, 2003, p. 94). Esto supone un cambio de enfoque, que comienza en el siglo XVIII, hacia las consideraciones de índole algebraicas en detrimento de las geométricas «*entre cuyas consecuencias se pueden señalar la aparición de dos funciones*» (Martínez, 2003, p. 92) que hasta entonces eran la misma: la función logaritmo y la función exponencial (en donde la función logaritmo es considerada como inversa de la exponencial) y a la separación de éstas de su origen como relación entre dos progresiones: una aritmética y la otra geométrica.

A continuación se presenta una síntesis de las etapas descritas anteriormente:

<table>
<tr><th>ETAPAS</th><th colspan="10">CARACTERÍSTICAS DE LA EVOLUCIÓN</th><th>CRONOLOGÍA</th></tr>
<tr><td>Potencias</td><td colspan="10">El nacimiento del concepto de potencia, sobre elementos orientales con una fuerte conexión, impresa por los griegos, con la geometría.

Necesidad del desarrollo de una notación para algunas potencias ligadas a números grandes provenientes de cálculos astronómicos.

Uso sistemático de abreviaturas para las potencias de números así como para las relaciones y las operaciones.</td><td>Arquímedes (aprox. 287-212 a.C.) en su obra Arenario o Psammites.

Diofanto (ca. 150 d.C.), en su Aritmética.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Inicios de la generalización del concepto de potencia.</td><td colspan="10">Introducen exponentes fraccionarios, reglas de realización de las operaciones con ellos y una simbólica.

Ausencia de notación exponencial.

La adición en la parte superior de la serie aritmética corresponde a la multiplicación de la serie de abajo (geométrica)</td><td rowspan="4">Nicole Oresme (c.1323-1382) en De proportionibus proporionum, escrito hacia el 1360.

Nicolas Chuquet (1445-1488) en Le Triparty en la science des nombres (1484).

Stifel (1487-1567) en la Arithmética Integra (1544).</td></tr>
<tr><td>-3</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr>
<tr><td>1/8</td><td>¼</td><td>½</td><td>1</td><td>2</td><td>4</td><td>8</td><td>16</td><td>32</td><td>64</td></tr>
<tr><td colspan="10">Se introduce el término exponente; los números de arriba exponentes y a los de la parte inferior, números (progresión geométrica).</td></tr>
<tr><td>Ruptura con la tradición Griega.</td><td colspan="10">No considera, x^2 y x^3 como un área y un volumen respectivamente, sino que los interpreta como segmentos, lo cual hace el álgebra geométrica mucho más flexible.

Primer tratado que utiliza exponentes enteros positivos escritos como superíndices.</td><td>Descartes (1596 – 1650)

La Geometría de René Descartes, publicada en 1638.</td></tr>
<tr><td>Ampliación a Exponentes continuos y el estudio de curvas.</td><td colspan="10">Los exponentes no naturales emergen en dos escenarios:

En el pensamiento algebraico para dotar de uniformidad a las operaciones entre monomios y al seno del problema de cuadraturas, para dotar de uniformidad a las fórmulas de áreas de las curvas de la forma $x^n y^m = k$ o $x^p = ky^q$ (n, m, p, q enteros positivos).</td><td>John Wallis (1606-1703) en Arithmetica Infinitorum (1665)</td></tr>
</table>

Ampliación a Exponentes continuos y el estudio de curvas	Se muestra $x^0 = 1$ y establece la relación de $x^{-1} = 1/x$. Se interpreta a los números negativos como exponentes de la misma manera que lo hacemos nosotros. Esto es, define el índice de $1/x$ como - 1, el índice de $1/x^2$ como -2, etc. También extiende esta definición a las fracciones: por ejemplo, $\frac{1}{\sqrt{x}}$ tiene un índice de $-\frac{1}{2}$. Se adoptó x^2 para xx. La curva que tenía la propiedad de que una progresión aritmética en sus abscisas, le correspondía con una progresión geométrica en sus ordenadas no se le asociaba una fórmula y era llamada genéricamente una curva logarítmica. Aun cuando se contaba con la noción de exponente no natural, ésta no fue asociada con la fórmula para las curvas logarítmicas.	Newton (1642- 1727) Gauss (1801). Finales del siglo XVII
La función exponencial.	Las funciones trascendentes fueron estudiadas mediante cuadraturas y sumas de series. Las expresiones analíticas que involucraban números y letras, más que los objetos geométricos en los que se apoyaban, se convirtieron en el centro de atención. Lo concerniente al requerimiento de homogeneidad de las fórmulas fue perdiendo fuerza. El término variable era referido, por Euler como: una cantidad indeterminada, o universal, que comprende en sí misma a absolutamente todos los valores determinados... Define las funciones exponenciales; “potencias simples cuyos exponentes son variables”. Funciones exponenciales: “de sus inversas he llegado al concepto más sencillo y provechoso de logaritmo”, y complementa diciendo de las funciones de la forma $y = a^z$, donde $a>1$, “el grado en el que y depende de z, se comprende fácilmente a partir de la naturaleza de los exponentes”. Euler calculó, utilizando el binomio generalizado de la serie de Newton, la constante designada por *e*. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2.1} + \frac{x^3}{3.2.1} + \frac{x^4}{4.3.2.1} + ... = \sum_{r=o}^{\infty} \frac{x^r}{r!}$	Primera mitad del siglo XVIII Euler (1707-1783) escribió su *Introductio in analysin infinitorum* (1748) que está dedicada al estudio de las funciones. Euler (1743). *Elements of Algebra.* Euler (1765)
Cambio de enfoque, en el siglo XVIII, hacia las consideraciones de índole algebraicas en detrimento de las geométricas entre cuyas consecuencias está la aparición de dos funciones que hasta entonces eran la misma: la función logaritmo y la función exponencial. Así mismo, la separación de éstas de su origen como relación entre dos progresiones: una aritmética y la otra geométrica (Martínez, 2003).		

Tabla D. Evolución de los conceptos exponentes y funciones exponenciales.

La síntesis permite establecer características de la evolución del significado de los exponentes y concepto función exponencial que retomamos en la estructura de la propuesta de descomposición genética de la función exponencial (Sección 1.4).

1.3.4. La comprensión de los estudiantes de las funciones exponenciales

A través de la revisión de las investigaciones en educación matemática concerniente a las funciones exponenciales podemos obtener información valiosa respecto a construcciones mentales que los estudiantes deben desarrollar para adquirir el concepto de funciones exponenciales. Dichos resultados constituyen una parte de la información necesaria para construir una propuesta de descomposición genética. La lectura y revisión de estos documentos estuvo guiada por los siguientes interrogantes:

¿Cuáles son los conceptos previos necesarios para la comprensión de las funciones exponenciales?

¿Cómo construye o entiende un estudiante el concepto de función exponencial?

¿Cuáles son las estructuras mentales y las conexiones con otros conceptos matemáticos necesarios para la comprensión de las funciones exponenciales?

El desarrollo de las investigaciones y sus resultados, abarcan diferentes aspectos de las funciones exponenciales. Entre los documentos revisados se han encontrado algunas investigaciones centradas en los conceptos de exponentes y potencias; estas nos permiten establecer la comprensión de los estudiantes acerca del significado de los exponentes. Otras sobre el concepto de covariación en el estudio de la función y, algunas en las que la covariación está referida específicamente a la construcción de la función exponencial. También se han identificado estudios que tratan sobre la comprensión y los procesos mentales usados por los estudiantes al abordar las funciones exponenciales, en donde además de los conceptos de exponente y covariación, se identifica el concepto de la razón de cambio promedio, con propuestas concretas para la enseñanza de este tipo de funciones. En algunos de los documentos se encuentran aspectos relativos a la función logarítmica por lo que se hará también mención a ella.

Reseñamos brevemente a continuación, sin la pretensión de ser exhaustivos, algunos de los trabajos arriba mencionados y los elementos que nos han sido útiles, para esta investigación, de los resultados obtenidos y de los referentes teóricos manejados. Se ha organizado este primer apartado con algunas investigaciones que abordan la comprensión del concepto de exponente. Los resultados permiten establecer que, mediante el estudio de los exponentes en la escolaridad, se espera que los estudiantes reconozcan la relación entre los exponentes negativos y positivos y estén capacitados para dar una explicación del significado de los exponentes 1 y 0 (Díaz, 2006; Elstak, 2007; Martínez, 2000, 2003). Se considera también que los estudiantes a nivel superior deben haber encapsulado el concepto de exponentes, entendiendo por ello que sean capaces de expresar una idea generalizada de exponentes que se aplica a todos los números reales (Elstak, 2007) y, adicionalmente se espera que estén en capacidad de expresar argumentos formales para establecer el significado de una potencia con base real positiva y exponente numérico irracional (Díaz, 2006). Algunos resultados de estas investigaciones proponen abordar la enseñanza del exponente no natural desde el mecanismo de convención matemática (Martínez, 2000, 2003) y la construcción de exponentes racionales y negativos, mediante la comprensión de la razón de cambio de las funciones exponenciales.

En el segundo grupo, se centra la mirada en la necesidad del manejo de los estudiantes de la noción de covariación ligada a la noción de función (Confrey y Smith, 1995). De esta noción de covariación se desprende, en nuestra investigación, la necesidad de presentar una revisión de las investigaciones sobre los mecanismos de construcción de los conceptos de dominio y rango (Lage y Trigueros, 2006).

El tercer grupo, sobre propuestas de enseñanza de la función exponencial, se plantea que los estudiantes pueden llegar a comprender el objeto función exponencial conectada con la función logarítmica (Weber 2002a, 2002b). Además de establecer que los estudiantes sólo conocen la función exponencial como acción, se espera que realicen una generalización de b^x. En otras investigaciones se realizan propuestas de enseñanza de la función exponencial, que consideran que los estudiantes a través de construcciones geométricas llegan a la comprensión de la función $f(x)=2^x$ (Lezama, 1999, 2003) y las relativas a los mecanismos de construcción que posibilitan la comprensión del objeto transformación de una función (Baker, Hemenway y Trigueros, 2001)

Otras investigaciones plantean la necesidad de recuperar, con los estudiantes de precálculo, una de las características de la función exponencial, como lo es la proporcionalidad entre la razón de cambio promedio y el valor de la función en un punto (Bradie, 1988) o la modelación de un fenómeno físico que se traduce en una función exponencial (Hernández y Arrieta, 2005).

1.3.4.1. Potencias y exponentes.

Iniciamos la revisión sobre los procesos de los estudiantes para la comprensión de los exponentes, a través de la investigación cuyo marco de referencia es la teoría APOS y la noción de *dividir* (Confrey y Smith, 1994, 1995), luego abordamos los estudios desarrollados dentro del enfoque socio epistemológico. A lo largo del texto destacaremos aquellos aspectos útiles para nuestra investigación e iremos señalando las situaciones o resultados en los cuales se complementan o se diferencian los diversos aportes de cada autor. Se podrá observar que es bastante difícil escindir lo que corresponde a la noción de exponente de lo específico de la función exponencial.

Los estudiantes manifiestan dificultades para establecer vínculos entre las diferentes definiciones de exponentes según el tipo de números: naturales, enteros, racionales o reales (Elstak, 2007). Los estudiantes tienen una definición, que este autor denomina "*definición común de los exponentes (CDE)*" para los exponentes enteros positivos: el exponente representa el número de factores de una misma unidad o de una misma base multiplicada por si misma. Pero además tienen otra independiente para los enteros negativos y una diferente para los exponentes racionales. Señala Elstak (2007) que en la escolaridad habitualmente el concepto de exponente entero negativo y racional se define de forma independiente de la definición común e incluso cuando los estudiantes tratan de explicar el significado de una potencia con exponente cero o uno a partir de ella (CDE) se les presentan dificultades. Elstak introduce, a partir la teoría APOS entre otros referentes teóricos, la idea de encapsulación del concepto de exponente, bajo una consideración similar a la idea de la generalización (que se presenta más adelante) de Weber (2000a, 2000b) de lo exponencial como producto de factores. Sin embargo sugiere que esta definición de los exponentes se transforme y encapsule junto con los exponentes enteros negativos y los racionales y los conecte explícitamente mediante la noción de la razón o tasa de crecimiento. Si el exponente fuera un número real (no racional) requeriría de la noción de límite. Por esta razón no fue estudiado en la investigación en cuestión y sí en la de Díaz (2006) que se incluye al final.

Elstak (2007) como parte de la investigación en su estudio piloto, devela que los estudiantes no reconocen la relación entre los exponentes negativos y los positivos, y tienen conflicto al aplicar la noción de exponente común para explicar el significado del exponente cero. Para los exponentes negativos no hacen referencia a las leyes de los exponentes que podrían justificarlos. Así, solo un estudiante pudo evocar, sin ayuda, el significado del exponente entero negativo y hablar acerca de su relación con los enteros positivos, mientras que la mayoría indicó que era una definición establecida por convención. En definitiva, los estudiantes no contaban con un concepto general de exponentes que fuera aplicable a todo tipo de números incluyendo el cero, los racionales y los enteros negativos.

Profundizando en la idea expuesta en el párrafo anterior, Elstak (2007) afirma que en la enseñanza existe la práctica de definir los exponentes caso por caso y que la conexión entre los casos no es explorada, el vínculo entre cada uno de los casos y la multiplicación repetida se deja para que el estudiante lo descifre. Para su investigación el autor distingue dentro de los términos de su estudio 5 casos diferentes de definición de exponentes.

«Caso 1. $A^n = A*A*A....A$ *donde el número de factores es n, un número natural no igual a 1, y donde A puede ser cualquier número real. Es importante hacer notar que se asume que la multiplicación que se está realizando (n-1) veces.*

Caso 2. $A^1 = A$ *para cualquier número real A, cuando el exponente es igual a 1. No hay ninguna referencia a la multiplicación.*

Caso 3. $A^0 = 1$ *con A diferente de cero, cuando el exponente es cero (0). No hay referencia a la multiplicación ni se explica el porqué de esta definición ni cómo puede ser cero en el mundo de los exponentes cuanto tratamos con multiplicaciones.*

Caso 4. $A^{p/q} = \sqrt[q]{A^p}$ *para p un número entero, q un entero positivo y valores positivos de A. Se supone que si q es negativa, la fracción puede convertirse en una fracción equivalente* $r/s = p/q$ *siendo s positivo, y los números r y s primos relativos entre sí.*

Caso 5. $A^{-n} = 1/(A^n)$ *para valores enteros de n. » (Elstak, 2007, p.13)*

Ante este problema, el propósito de Elstak (2007) fue ayudar a los estudiantes a superar su imagen limitada de la definición común de los exponentes. El objetivo es la construcción de exponentes racionales y negativos mediante una propuesta didáctica que gira en torno a la razón de cambio. Elstak busca que los estudiantes relacionen las distintas definiciones que tienen de los exponentes con dicha definición, es decir, que las integraran con la idea de que el exponente representa el número de factores de una multiplicación reiterada.

Como marco para la experiencia de enseñanza que plantea Elstak (2007) se hace una revisión teórica de diferentes investigaciones (Confrey, 1991, 1994; Confrey &Smith, 1994, 1995; Confrey & Scarano, 1995; Confrey & Lachance, 2000) de lo que deduce la importancia del modelo de *división.* Este modelo provee un conjunto intuitivo de acciones que hacen la multiplicación más asequible que el método de la suma repetida. Por otro lado el modelo *división*, propuesto en las investigaciones de Confrey y su grupo, tiene aplicaciones directas en el campo de exponentes.

La noción de *dividir* que se considera en las investigaciones arriba citadas, en relación con las concepciones de los estudiantes de la función exponencial es un esquema cognoscitivo primitivo, definido como una acción de crear múltiples versiones de un original (Confrey, 1994). Esta acción es representada principalmente por un diagrama de árbol. Dividir un pedazo de papel en secciones equivalentes, o fraccionar una barra de dulce por la mitad y de nuevo por la mitad para repartir entre cuatro, o bien organizar un conjunto de objetos en una tabla, son todas formas de dividir. En todas se obtiene la producción de grupos iguales.

> *«Todas estas acciones dependen más de equivalencias geométricas entre las partes de una estructura, que en contar o en la creación de correspondencias uno-a-uno o correspondencias uno-a-muchos. El acto de dividir como compartir, o plegar, o del fraccionamiento real, es muy familiar para los niños y es un modelo de multiplicación diferente al de la suma repetida. Se crean copias similares de objetos para proveer una base de los conceptos de razón, multiplicación y división». (Elstak, 2007, p.52).*

> *«En la acción de dividir, cada paso de la división ramifica la unidad en N copias del original. Cada uno de tales pasos es concebido como una acción. Contando el número de pasos de la ramificación (para no ser confundido con las copias del original) se reproducirá el mundo aditivo de los exponentes. Asociando la sucesión geométrica de la exponencial con la sucesión aritmética de los exponentes, se introduce la noción de razón de cambio multiplicativa, siendo esta razón de cambio el cociente entre el número de copias en el paso N+1 y el número de copias en el paso N (* $MR_0C = \frac{F(N+1)}{F(N)}$ *)»(Elstak, 2007, p.53).*

Los conceptos y aspectos anteriormente citados son presentados en una propuesta que gira en torno a la razón de cambio multiplicativa y a la encapsulación de la noción de exponente. Elstak (2007), elabora e implementa esta propuesta con dos grupos de estudiantes; uno de ellos que ha cursado precálculo y el otro que ha concluido cursos superiores incluido cálculo.

Para valorar la eficacia del experimento de enseñanza, Elstak (2007) utiliza un cuestionario en el que solicita a los estudiantes que establezcan argumentos para responder a ejercicios específicos como resolver la ecuación $0.8^x = 10$ y argumentar por qué no se puede resolver usando exponentes positivos. Además incluye preguntas en donde les pide que expliquen por qué la división y la multiplicación están interconectadas en la función exponencial, y por qué el factor de multiplicación es importante para el estudio de crecimiento o decrecimiento de situaciones exponenciales. También solicita a los estudiantes que intenten formular una definición de exponentes que incluya los casos de los enteros y los racionales

Aunque a partir de la experimentación se concluye que lograron ciertos avances en la comprensión de cada una de las definiciones sobre exponente, solamente dos estudiantes trataron de encapsular los exponentes cero, uno, entero positivo, entero negativo, decimal y racional en una única definición de exponente. Otra de las conclusiones en este estudio es que la imagen más poderosa de todos los estudiantes que participaron en la investigación resultó ser la multiplicación reiterada, aun cuando los estudiantes incurran en errores al usarla. Un resultado similar es indicado en los estudios de Weber (2002a) y Martínez (2000).

Si bien los estudiantes participantes del diseño de enseñanza de Elstak (2007) amplían la noción de multiplicación reiterada, cuando manejan otro tipo de exponentes (distintos de los naturales) y su interpretación de la razón de cambio continúan tratando de conciliarla con las definiciones propuestas en los textos para los exponentes racionales, para el cero y para los negativos. Por otra parte, se concluye, al igual que en el estudio piloto, que las leyes de los exponentes no proporcionan a los estudiantes suficiente apoyo para construir una comprensión de los exponentes negativos, racionales o cero.

Además, se subraya en esta investigación (Elstak, 2007), que la naturaleza multiplicativa de la función exponencial necesita un trabajo profundo, dado que los estudiantes no llegaron a entender que el modelo de crecimiento de una función exponencial no es lineal y aditivo,

«*Todos los estudiantes en este experimento de enseñanza tuvieron problemas para comprender que no existe una conexión lineal y aditiva entre los factores y las razones. La no linealidad de la gráfica exponencial también planteó problemas para cada estudiante en el experimento de enseñanza, aunque en diferentes formas*» (p.134).

Mientras el principal énfasis de los cinco casos en las definiciones de exponentes se encuentra en la relación que el estudiante pueda establecer con la multiplicación reiterada (Elstak, 2007), otros análisis y resultados de investigaciones consisten en la detección de algunos fenómenos didácticos que giran alrededor de las respuestas de los estudiantes en el momento de establecer valores para la expresión 2^x (x número entero o racional), así como la falta de argumentos para justificar las respuestas consideradas correctas (Martínez, 2000). El estudio de Martínez (2000) indaga cuáles fueron los mecanismos que permitieron la construcción y la aceptación social de la noción de exponente no natural. Inicialmente presenta unas categorías acerca de las estrategias utilizadas por estudiantes de nivel secundario, medio y superior, para establecer los valores de la expresión a^x según los valores del exponente.

Las categorías presentadas por Martínez (2000) son: persistencia de operaciones simples (recurrir a suma, resta, multiplicación o división entre la base y el exponente); persistencia del modelo de multiplicación reiterada; ausencia de argumentos para establecer las igualdades correctas; evolución hacia respuestas correctas; el cero como representación de la nada; deslizamiento de la memoria (aquellas respuestas que son ocasionadas por recordar equivocadamente las convenciones relativas a los exponentes no negativos). A continuación mostramos algunos ejemplos de estas estrategias que fueron retomados de la investigación de Lezama (1999) autor a quien nos referimos más adelante:

- *«Algunos estudiantes afirman que a)* $2^0 = 0$*; b)* $2^0 = 2$*; c)* $2^{-3} = (-2)(-2)(-2)$ *y d)* $2^{-3} = -8$ *ya que* $2^3 = 8$ *y se le coloca el signo.*
- *Ausencia de argumentos para establecer que:* $2^0 = 1$*;* $2^{-3} = (1/2)^3$*;* $2^{1/2} = \sqrt{2}$.
- *Respuestas reiteradas como: a)* $2^{-3} = 0.002$*; b)* $2^{-\frac{3}{2}} = 2\left(-\frac{3}{2}\right) = -3$
- *Si x no es entero,* 2^x *es solamente una notación (* $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$*;* $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$*, etc.).*
- *Algunos estudiantes afirmaron que: A)* 2^1 *=2*2 ya que el dos se multiplica una vez, y B)* $2^1 = 2$ *ya que 2*1=2.» (Martínez, 2000, p.3)*

Dos resultados de las investigaciones de Martínez (2000, 2003) son relevantes para nuestros objetivos. Por un lado, Martínez (2000) argumenta que es necesario para los estudiantes adquirir totalmente la noción de exponente no natural para la construcción de la noción de función exponencial*, al menos en el sentido de Dirichlet-Bourbaki*[12], afirmando «*que el conocimiento de las convenciones matemáticas relativas a los exponentes no naturales no necesariamente lleva a los estudiantes a concebir la expresión* a^x *como una operación entre a y x*» (p. 55).

Otro de los resultados que surge de un análisis epistemológico del desarrollo del concepto de exponente no natural es la noción de convención matemática ya que *el significado de los exponentes no naturales es* ***convenido*** *para posibilitar la construcción de cuerpos unificados y coherentes de conocimiento* matemático (Martínez, 2003, p.50). Además, Martínez identifica como uno de los *activadores* de estas convenciones los métodos para efectuar las operaciones entre monomios y así sugiere que «*las convenciones matemáticas para los exponentes pueden ser formuladas a través de observar patrones algebraicos y después observar que son consistentes con una operatividad anterior*» (Martínez, 2003, p.129).

El caso de la comprensión de los exponentes irracionales no ha sido estudiado en las investigaciones citadas, sin embargo a partir de los resultados de dichas

[12] Utilizamos este término para especificar la definición de función que habitualmente está presente en la enseñanza, es decir, a través de la relación entre dos conjuntos. (Martínez, 2000, p.VIII)

investigaciones (Martínez 2000, 2003; Lezama, 1999; Dennis y Confrey, 1996) Díaz (2006) realiza una indagación sobre la comprensión de los exponentes irracionales que unida a los resultados sobre la comprensión de los exponentes racionales ofrece un esbozo de la noción de exponente.

En este estudio acerca del significado de los exponentes irracionales, el objetivo es describir qué concepciones tienen estudiantes de Nivel Superior de Educación acerca de la operación de potenciación cuando la base es un número real positivo y el exponente es un número irracional. Díaz (2006) manifiesta su interés sobre el concepto de potencia con exponente irracional, para poder construir el concepto de potencia con exponente real, necesario para definir el concepto de función exponencial real de variable real. En su estudio plantea como hipótesis, que

> «*los estudiantes de Nivel Superior, en significativa mayoría, que han cursado estudios de Álgebra o Cálculo, desconocen los significados formales de los conceptos de potencia con base en* $\mathbb{R}^+$ *y exponente en* $\mathbb{I}$ *y por ende en* $\mathbb{R}$*, y si tienen algunos de ellos ideas acerca del significado de potencia con base en* $\mathbb{R}^+$ *y exponente en* $\mathbb{I}$*, dichas ideas son concepciones alternativas*[13] *acerca del significado de tal tipo de potencia*». (p. 2)

El estudio de Díaz (2006) se realizó con estudiantes de dos grupos distintos, tercero y cuarto año de la Licenciatura en Matemáticas en las áreas Matemáticas Educativa y de Computación. Se diseñaron cuatro cuestionarios con preguntas relativas a potencias con base real positiva, en las que variaban los valores de los exponentes, pudiendo ser números racionales, enteros e irracionales incluyendo preguntas concernientes a los exponentes cero y uno. Las preguntas combinaban aspectos algorítmicos con otros de índole más conceptual en las que debían razonar el significado de dichas potencias.

Se esperaba que los estudiantes identificaran los convenios para $a^0 = 1,\ a^{-n} = 1/a^n,\ a^{m/n} = \sqrt[m]{a^n},\ a^{-m/n} = 1/\sqrt[m]{a^n}$, *donde* $n, m \in N$, y que comprendieran el significado de la operación de potenciación con exponente irracional definida como un limite[14].

---

[13] Concepción alternativa: "Es un conocimiento en forma de concepción, acerca del contenido específico de un conocimiento científicamente institucionalizado, pero distinto a éste y en contradicción con él.". (Díaz, 2006, p. IV).

[14] Si a es un número real positivo y ω es un número irracional, la operación de elevar el número a al exponente ω se define por medio de la relación $a^w = \lim_{x \longrightarrow w\ x \in Q} a^x$. (Diaz, 2006, p. 59).

La mayoría de los estudiantes demostraron poder realizar el cálculo numérico de potencias con base real positiva y exponente de cada uno de los tipos, aunque no hubo uniformidad en las formas de proceder y justificar sus respuestas. Ningún estudiante, del primer grupo, justificó respuesta alguna usando un razonamiento formal y, en el segundo grupo, pocos realizan esa justificación. El 50% de los estudiantes del primer grupo y 27% de los del segundo contestan de forma correcta (en forma precisa o relativamente muy aproximada) al cálculo numérico de una potencia positiva y exponente numérico irracional utilizando la calculadora científica.

Los estudiantes, en general, son capaces de reconocer el significado de un exponente entero positivo, pero pocos son capaces de reconocer el significado de potencia con exponente negativo. Las principales dificultades detectadas en los estudiantes son reconocer un significado de los exponentes numéricos racionales positivos y negativos y de los irracionales.

Dados los resultados, la conclusión de Díaz (2007) en esta indagación es que los estudiantes –ambos grupos- manifiestan desconocimiento absoluto del concepto de potencia con base real positiva y exponente irracional, por lo que es importante para nuestra investigación tener en cuenta la ausencia de un significado consolidado de los exponentes.

Al contrastar los resultados de estas investigaciones (Martínez, 2000, 2003, Díaz, 2006 y Elstak, 2007) se establece que, aun cuando, de acuerdo con los objetivos de la escolaridad, los estudiantes deberían adquirir el concepto de exponente antes de su ingreso en la universidad, en realidad, cuando acceden a los cursos de precálculo todavía se encuentran en el proceso de construcción de este concepto.

1.3.4.2. Covariación

La construcción de la función exponencial ha sido investigada en relación con la noción de covariación (Confrey y Smith, 1995) y en posteriores investigaciones concernientes a covariación y función se involucra la noción de razonamiento covariacional «*entendida como las actividades cognitivas involucradas en la coordinación de dos cantidades que varían una en relación a la otra.*» (Carlson, 2002, p. 124).

La función exponencial se torna en un concepto medular para la investigación debido a la intervención de su estructura modelando crecimiento de poblaciones, decaimiento radioactivo, interés compuesto, valor presente, escalas musicales, entre otros. Adicional a ello, la función exponencial cuenta con variedad en formas de representación (e.g., diagramas de árbol, espirales logarítmicas, junto con el habitual grupo de ecuación, tabla y gráfica). Respecto al uso de la multiplicación repetida para el aprendizaje de la función exponencial, se plantea la alternativa del uso de la división junto con el enfoque de covariación en contraste con el enfoque de correspondencia (Confrey y Smith, 1995). Concretando, encontramos una propuesta de aproximación a la función exponencial en Confrey y Smith, (1995), en la cual buscan reunir tres aspectos:

- La aproximación a la función a través de la noción de covariación en donde la función es comprendida como la yuxtaposición de dos secuencias, cada una de las cuales se genera independientemente a través de un patrón de valores de datos. Por ejemplo, plantean crear tablas de datos como un punto de partida del trabajo con estas funciones (Rizzuti, 1991). De esta forma, los estudiantes construyen la imagen de una función como la coordinación entre dos columnas y la subsiguiente interpolación para poder insertar valores entre datos previamente establecidos (Confrey y Smith, 1995). Por ejemplo, si una columna se incrementa aditivamente en 2 y la otra en 6, ellos podrán asociar un cambio e insertar apropiadamente valores.

  Con el enfoque de covariación los estudiantes tienen más facilidad para describir situaciones en términos de velocidad de cambio (ver Confrey y Smtih, 1991; Rizzuti, 1991).

  Esta aproximación de covariación de la función implica la construcción del dominio como una estructura matemática ordenada y la de un rango, a partir de la relación establecida entre los datos.

- La noción de "splitting" considera natural razonar los procesos de multiplicar repetidamente desde un punto de vista diferente del mundo aditivo, proponiendo la estructura multiplicativa vinculada con la división. (Confrey, 1994).

- La construcción de Napier del concepto de logaritmo por medio de dos puntos en movimiento; uno cuya posición va cambiando en progresión aritmética a lo largo de una línea y el otro cuya posición va cambiando en progresión geométrica a lo largo de una línea paralela (ver la sección 1.3.2). Esto implica la yuxtaposición de dos mundos, el aditivo (contar) y el multiplicativo (dividir), es decir, en un sentido más formal, se trata de establecer un isomorfismo (Confrey y Smith, 1995).

Respecto a la noción de covariación subyace la construcción del dominio y la del rango de la función y la relación entre ambos; la coordinación de la variación que conlleva el vínculo entre el dominio y el rango. Las nociones de dominio y rango fueron investigadas por Lage y Trigueros, (2006) a través de una experiencia con estudiantes de precálculo. Entre los resultados obtenidos resaltan que para que un estudiante reconozca el dominio de una función dada necesita, en primer lugar, estudiar o bien la expresión simbólica de la función o bien su gráfica e identificar para qué valores la función no está definida, es decir, cuándo no se puede sustituir en la expresión un determinado valor o no se puede representar un punto sobre el gráfico. Para ello (en este nivel) sólo se requiere realizar una acción, en el sentido APOS, de identificar esos valores.

Luego, de acuerdo con Lage y Trigueros (2006), desde el punto de vista algebraico, para que los estudiantes identifiquen el rango de una función necesitan aplicar la regla de dicha función a cada punto del dominio, e interiorizar esas acciones en un proceso para poder construir todo el conjunto de valores que constituyen ese rango. Desde el punto de vista gráfico, eso se traduce en reconocer qué puntos del eje *y* se corresponden con puntos de la gráfica, primero individualmente para cada valor del dominio y, posteriormente, interiorizando todo el conjunto de valores que corresponde a la proyección de la curva sobre el eje *y*.

1.3.4.3. Función exponencial, transformaciones y aplicaciones

Respecto al tercer grupo de estudios, es decir, las investigaciones relacionadas con la comprensión y enseñanza de las funciones exponenciales, hemos de mencionar, además de los resultados de las investigaciones descritas anteriormente, otras como las propuestas desde las acciones para la generalización de b^x (Weber, 2002a; Weber 2002b), o la comprensión de una función particular a través de construcciones geométricas (Lezama,1999, 2003), y aquellas que plantean propuestas para su contextualización (Bradie,1988; Hernández y Arrieta,2005).

Se ha organizado este apartado partiendo de dos investigaciones que giran en torno a un bosquejo de formas de conocer la función exponencial y logarítmica, que aporta consideraciones sobre las acciones a tener presente en la descomposición genética de la función exponencial, dado que estas investigaciones de Weber (2000a y 2000b) se realizaron contemplando las teorías de Sfard (1991) y Dubinsky (1991).

Un análisis del desarrollo de la comprensión de la función exponencial en los estudiantes de precálculo, se encuentra en la propuesta de Weber, (2002a), no solo teórica sino de implementación en el aula, sobre las acciones, procesos y generalización, como formas de conocer por las cuales debe transitar el estudiante. En dicha investigación se halló que la mayoría de estudiantes entiende la exponenciación sólo como acción sin llegar a una comprensión proceso, lo cual significa que el estudiante sólo es capaz de remplazar los exponentes, en la expresión simbólica de una función exponencial particular, por valores enteros positivos.

Otros de los hallazgos de Weber (2002a) es que los estudiantes, aunque son capaces de determinar que la función $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ es decreciente, no son capaces de explicar por qué lo es. Además, cuando se les pregunta, por ejemplo, si 5^{17} es un número par o impar, no disponen de argumentos, lo cual se atribuye a la no generalización de la exponenciación.

Con los resultados obtenidos, Weber (2002b) diseñó y aplicó una experiencia de enseñanza usando para ello un grupo experimental y otro de control con 15 estudiantes cada uno. La experiencia se realizó en dos momentos. En el primero se trabajó la exponenciación como multiplicación repetida, para lo cual se usa MAPLE, planteándoles un pequeño programa en el que se trata la multiplicación de enteros como adiciones repetidas (o substracción repetida, en el caso donde el factor es negativo) y les pide escribir un programa similar para interpretar la exponenciación como una multiplicación repetida (o división repetida).

En un paso posterior se realizan ejercicios con lápiz y papel para que los estudiantes apliquen las propiedades de los exponentes, exigiéndoles una explicación verbal, en la que utilicen la idea de que *b* a la *x* es el producto de *x* factores de *b*. En su investigación, esta idea está relacionada con la noción de que el logaritmo en base *b* de *m* es el número de factores de *b* que están en el número *m.*

Después de esta intervención, (Weber, 2002a), les realiza, a los estudiantes, una entrevista en torno a algunos cómputos básicos; con preguntas que incluyen exponentes y bases enteras positivas. También les cuestiona sobre ciertas reglas de simplificación de exponentes y sobre algunos elementos conceptuales tales como: la explicación de la monotonía de funciones decrecientes específicas, la explicación de la naturaleza par, impar, negativa o positiva de una potencia a partir de los valores de la base y según los exponentes enteros. En cada uno de los tres aspectos incluye también preguntas sobre los logaritmos.

En general, los resultados del grupo experimental fueron mejores en los tres aspectos: cómputos básicos, recuerdo de reglas y explicación del porqué son verdaderas las reglas de los exponentes, así como en los aspectos relativos a la comprensión conceptual de estos tópicos. Sin embargo, se encontraron algunas dificultades como la relativa al decrecimiento de la función $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ para la que sólo un estudiante da una explicación indicando que si se toma un medio y se multiplica por si mismo eso se va haciendo más y más pequeño cada vez, y sólo algunos estudiantes del grupo experimental utilizan como estrategia descomponer $(-3)^{10}$ en factores para argumentar sus respuestas acerca de si la potencia allí representada es un número positivo o negativo.

El principal hallazgo de esta investigación es lo que denomina Weber (2002b) “reconstruction of forgotten knowledge”. Es decir, mientras que en el grupo control las dificultades para explicar las leyes de los exponentes son persistentes, los estudiantes del grupo experimental, aunque no las recuerden, son capaces de reconstruirlas a partir de su comprensión del concepto. Pueden, por lo tanto, expresar $b^x b^y$, como una exponencial cuyo exponente es la suma de exponentes, y explicar este hecho con la idea de que si se multiplican *x* factores de *b*, e, *y* factores de *b*, se obtienen, en consecuencia, *x+y* factores de *b*. Para Weber (2002b) esto supone un avance ya que considera que el estudiante comprende la función exponencial cuando puede generalizar su conocimiento de b^x como el número que es “el producto de *x* factores de b” lo cual revierte en una mayor comprensión de las propiedades de los exponentes. A pesar de ello, Elstak (2007) señala que las leyes de los exponentes no proporcionan a los estudiantes suficiente apoyo para construir una comprensión de los exponentes negativos, racionales o cero.

Por otro lado, Weber (2002a), al evaluar a los estudiantes sobre la generalización de procesos de la comprensión de exponentes, considera que deben ser capaces de generalizar la noción de exponenciación, para comprender que $2^{1/2}$ es igual $\sqrt{2}$, lo que implica comprenderlo como medio factor de 2 y no como normalmente se presenta la igualdad como una regla arbitraria. La comprensión de los estudiantes del exponente racional derivada de Elstak (2007) y específicamente del exponente $1/2$ es uno de los casos que se estudia en la propuesta de Lezama (1999).

Sobre la función exponencial $f(x) = 2^x$, desde un punto de vista primordialmente geométrico, Lezama (1999, 2003) diseñó e implementó una ingeniería didáctica con el objetivo de confrontar la concepción espontánea de los estudiantes de que 2^x es evaluable sólo cuando *x* es entero. También se proponía el autor que analizaran las regularidades propias de la función 2^x identificando la naturaleza creciente de esta función. Para la construcción de dicha función intentó que los estudiantes interpretaran cantidades como: $2^{1/2} = \sqrt{2};\ 2^{1/4} = \sqrt[4]{2};\ 2^{3/4} = \sqrt[4]{2^3}$ como segmentos rectilíneos, a partir de la construcción geométrica de la raíz cuadrada de una cantidad.

En dicha ingeniería didáctica los estudiantes debían realizar *acciones* geométricas paso a paso; *localizando puntos en el plano, completando tablas de datos, identificando regularidades* para realizar posteriormente *las generalizaciones* pertinentes. (Lezama, 2003). Las actividades estaban organizadas teniendo en cuenta la siguiente progresión en las construcciones geométricas:

Primeramente, se usan ciertos elementos geométricos y gráficos indispensables para localizar puntos en un sistema coordenado rectangular. Se realiza a continuación una inducción de lo local a lo global a partir de actividades en las cuales los estudiantes deben argumentar la posibilidad de localizar más puntos a partir de otros puntos ya obtenidos, calculando cocientes y las diferencias entre esos datos previos. Finalmente se pretende inducir la generalización mediante actividades en las que se solicita a los estudiantes analizar las regularidades observadas para 2^x y a partir de ello extender estas cuestiones a otras funciones exponenciales con bases distintas de 2.

De los resultados de esta ingeniería consideramos esencial resaltar tres aspectos (Lezama, 2003). Por un lado la propuesta de inducir en los estudiantes la generalización de las regularidades observadas para 2^x y extenderla a otras bases distintas de dos. Por otro, que el concepto de potencia entera positiva es estable en la mayoría de estudiantes, pero los exponentes fraccionarios carecen de significado para la casi totalidad de los estudiantes. Y, finalmente, que la mayoría de los estudiantes aunque consideraban a la función creciente, fueron incapaces de reconocer la modalidad de crecimiento puesto que la mayoría lo representó mediante líneas rectas crecientes. Esta misma dificultad también fue señalada por Elstak (2007).

Cerramos esta descripción de estudios sobre la comprensión de las funciones exponenciales con otras investigaciones que afirman que, para dotar de sentido a la función exponencial, hay numerosas situaciones, tanto científicas como sociales, que permiten contextualizarla y caracterizarla a partir de la noción de tasa de cambio.

En el campo de las aplicaciones, las descripciones en las que interviene la función exponencial y el uso que se hace de ella, normalmente se realiza a través de una función transformada $f(x)=kb^{tx+s}$. Esta particularidad de transformación de funciones es importante, pues constituye otro aspecto que debe tenerse presente respecto a los procesos de comprensión de los estudiantes. Sobre esta noción de transformación de una función, en los trabajos de Baker, *et al.* (2001) y Lage y Trigueros, (2006), se plantea y utiliza una descomposición genética de la función transformada, para analizar el trabajo de estudiantes que han cursado precálculo con el fin de encontrar posibles causas de sus dificultades cuando se enfrentan con problemas particulares en donde las transformaciones están involucradas. Estos investigadores con el fin de diagnosticar la comprensión de los estudiantes del concepto de transformaciones de funciones, analizan y designan previamente las acciones, procesos y objetos que ellos consideran que se requieren para resolver las tareas de un cuestionario y luego comparan las construcciones que los estudiantes utilizan con las previamente pronosticadas por el grupo investigador. Los resultados muestran que pocos estudiantes trabajan con confianza con estos problemas porque no parecen haber interiorizado los procesos involucrados en transformaciones o encapsulado estos procesos en objetos.

Entre sus conclusiones, Lage y Trigueros (2006), consideran la necesidad de la comprensión de la función como objeto para posteriormente realizar acciones sobre ella, que finalmente lleven a comprender el nuevo objeto de función transformada. También Baker, *et al.* (2001) concluyen que cuando se trabaja con funciones las acciones se realizan con valores de las variables, mientras que cuando se trabaja con transformaciones los estudiantes necesitan concebir la función en sí misma como la variable y desarrollar acciones sobre la propia función como objeto. Por ello, si los estudiantes tienen dificultades relacionadas con la noción de variable, no pueden generalizar este concepto para incluir en él a las funciones.

Otras propuestas alrededor de la secuencia de enseñanza de las funciones exponenciales y el contexto desde el cual se plantea su aprendizaje señalan que, usualmente, se introduce la función exponencial sin explicar su aplicación a ciertos contextos (por ejemplo, en el crecimiento de una colonia de bacterias); se les pide a los estudiantes, simplemente que realicen cálculos básicos sustituyendo ciertos valores en la fórmula de la función. Como consecuencia, Bradie (1998) afirma que los estudiantes no desarrollan la habilidad de reconocer el uso de las funciones exponenciales en distintos contextos.

Para trabajar la modelización de los fenómenos, arriba mencionados, es necesario que los estudiantes consideren la función exponencial como aquella en la que la tasa de cambio es proporcional al valor de la función, para lo cual no es necesario que posean conocimientos del concepto de derivada, ya que se puede suplir mediante el uso de herramientas tecnológicas (Bradie, 1998).

En este mismo sentido, con el objetivo de construir un contexto donde los estudiantes de tercer semestre de Ingeniería Bioquímica y su profesor puedan construir el significado de la función exponencial se plantea una secuencia de enseñanza en la que se parte de una situación real. Esta situación real fue la toma de datos del enfriamiento del silicón para construir un modelo numérico (tabla de datos). A paritr de estos datos se plantean conjeturas y se realizan predicciones y se construye un modelo gráfico como una nube de puntos para argumentar acerca de las conjeturas realizadas (Hernández y Arrieta, 2005).

A continuación se presenta una tabla a manera de síntesis de las investigaciones. En esta tabla colocamos nuestras inferencias sobre la comprensión de los estudiantes a partir de los resultados de las investigaciones descritas anteriormente. En la columna central ubicamos nuestras inferencias y en la tercera columna se encuentra el nombre del autor de la investigación a la cual hacemos referencia.

Temas de Investigación	**Inferencias sobre la Comprensión de los estudiantes. Función Exponencial**	**Autores**
Exponentes y potencias	Los estudiantes poseen diferentes definiciones de exponentes según estos sean números naturales, enteros, racionales o reales y deben llegar a vincular las diversas definiciones de exponentes naturales, enteros, racionales.	Elstak (2007).
	Las leyes de los exponentes son únicamente uno de los apoyos para construir una comprensión de los exponentes negativos, racionales o cero.	Elstak (2007). Weber (2002a). Martinez (2000).
	La imagen más poderosa, del significado de exponente, es la multiplicación reiterada, aun cuando los estudiantes incurren en errores al usarla.	Lezama (1999). Diaz (2006)
	El concepto de potencia entera positiva es estable en la mayoría de estudiantes, pero los exponentes fraccionarios tienen significado para un número reducido estudiantes.	
	Las estrategias para establecer los valores de la expresión a^x según los valores del exponente son: persistencia de operaciones simples (recurrir a suma, resta, multiplicación o división entre la base y el exponente); persistencia del modelo de multiplicación reiterada; ausencia de argumentos para establecer las igualdades correctas; evolución hacia respuestas correctas; el cero como representación de la nada; deslizamiento de la memoria (aquellas respuestas que son ocasionadas por recordar equivocadamente las convenciones relativas a los exponentes no negativos).	Martínez (2000). Lezama (1999, 2003).
	Los estudiantes necesitan adquirir la noción de exponente no natural para la construcción de la noción de función exponencial, al menos en el sentido de Dirichlet-Bourbaki.	
	El conocimiento de las convenciones matemáticas relativas a los exponentes no naturales no necesariamente lleva a los estudiantes a concebir la expresión a^x como una operación entre a y x.	Martínez (2000, 2003).
	Las convenciones matemáticas para los exponentes pueden ser formuladas a través de observar patrones algebraicos y después observar que son consistentes con una operatividad anterior.	Martínez (2000, 2003).
	Se espera que los estudiantes puedan reconocer un significado de los exponentes numéricos racionales positivos, negativos e irracionales.	Díaz (2006).
	Los estudiantes deben expresar argumentos formales para establecer el significado de una potencia con base real positiva y exponente numérico irracional	

Covariación, Dominio y rango.	La operación "dividir" surge de manera natural en las mentes de los niños como una forma de estructuración de ciertos problemas y situaciones tales como ampliación, similitud, reducir a la mitad y duplicación. Esta operación es independiente del recuento y el mundo aditivo. Existe un enfoque diferente al de correspondencia para comprender las funciones y es el de covariación, entendido como la yuxtaposición de dos secuencias cada una de las cuales se genera independientemente a través de un patrón de valores de datos. Los estudiantes construyen la imagen de una función como la coordinación entre dos columnas y la subsiguiente interpolación para poder insertar valores entre datos previamente establecidos. La función exponencial se puede definir a partir de la yuxtaposición establecida por Napier entre los mundos aditivo (contar) y el multiplicativo (dividir), que en un sentido más formal, constituye un isomorfismo entre dichos mundos. Una aproximación de covariación, de la función, implica la construcción del dominio como una estructura matemática ordenada y la de un rango, a partir de la relación establecida entre los datos. La comprensión del dominio de una función dada, involucra el estudio de la expresión simbólica de la función o bien su gráfica e identificar para qué valores la función no está definida, es decir, cuando no se puede sustituir en la expresión un determinado valor o no se puede representar un punto sobre el gráfico. Desde el punto de vista algebraico, para que los estudiantes identifiquen el rango de una función necesitan aplicar la regla de dicha función a cada punto del dominio, e interiorizar esas acciones en un proceso para poder construir todo el conjunto de valores que constituyen ese rango. Desde el punto de vista gráfico, el estudiante necesita reconocer qué puntos del eje *y* se corresponden con puntos de la gráfica, primero individualmente para cada valor del dominio *y*, posteriormente, interiorizando todo el conjunto de valores que corresponde a la proyección de la curva sobre el eje *y*.	Confrey & Smith (1995). Confrey & Smith (1995). Lage & Trigueros, (2006)
Función exponencial y aplicaciones.	La mayoría de los estudiantes entiende la exponenciación como acción, y es indispensable una comprensión objeto. Los estudiantes son capaces de determinar que una función exponencial particular es decreciente y algunos también explican por qué lo es. Existen estudiantes que aunque no recuerdan las leyes de los exponentes, son capaces de reconstruirlas a partir de su comprensión del concepto. El estudiante comprende la función exponencial cuando puede generalizar su conocimiento de b^x como el número que es "el producto de *x* factores de *b*" lo cual revierte en una mayor comprensión de las propiedades de los exponentes. Por definición común de los exponentes se entiende: el exponente representa el número de factores de una misma unidad o de una misma base multiplicada por si misma.	Weber (2002a). Weber (2002a, 2002b). Weber (2002b). Weber (2002a, 2002b). Elstak (2007).

Función exponencial y aplicaciones.	La definición común de los exponentes, se puede transformar y encapsular junto con los exponentes enteros negativos y los racionales, conectándola explícitamente mediante la noción de la razón o tasa de crecimiento en la función exponencial.	Elstak (2007). Lezama (1999).
	A través de la comprensión de una función exponencial particular se puede inducir en los estudiantes la generalización de las regularidades observadas para 2^x y extenderla a otras bases distintas de dos.	Lezama (1999)
	Los estudiantes pueden entender que el modelo de crecimiento de una función exponencial no es lineal y aditivo.	
	La enseñanza de la función exponencial puede partir de la toma de datos en una situación real y luego proceder a la construcción del modelo numérico (tabla de datos), y planteamiento de conjeturas al analizar las características de la tabla de datos. A partir de predicciones construir un modelo gráfico como una nube de puntos y, poder argumentar acerca de las conjeturas realizadas.	Hernández y Arrieta (2005)
	La habilidad de los estudiantes para reconocer el uso de las funciones exponenciales está asociada a la comprensión de esta función a través de su tasa de cambio proporcional al valor de la función.	Bradie (1998).
	La tasa de cambio de una función exponencial puede ser enseñada acudiendo a herramientas tecnológicas, sin ser necesario que los estudiantes posean conocimientos del concepto de derivada.	

Tabla E. Investigaciones acerca de la comprensión de la función exponencial.

En la síntesis anterior, Tabla E, se indican los aportes que se identificaron a través de las investigaciones, acerca de aspectos de la comprensión alrededor de tres diferentes elementos del concepto función exponencial, que se retoman en la estructura de la propuesta de descomposición genética de este concepto.

1.4. DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

Los aspectos relativos al desarrollo histórico epistemológico de la función exponencial, la síntesis de los hallazgos sobre la comprensión de los estudiantes de estos conceptos, y los conocimientos que poseemos como profesores e investigadores son los que nos permiten construir una propuesta de descomposición genética de la función exponencial. Esta descomposición se establece a partir de los elementos matemáticos del concepto que enumeramos a continuación y los sistemas de representación del concepto.

1.4.1. Elementos matemáticos del concepto

Se entiende por elemento matemático *"el producto de una disociación o de una segregación del concepto vinculada al concepto y a sus propiedades"* (Piaget, 1963, 72). Para caracterizar los elementos matemáticos del concepto función exponencial vamos a clasificarlos en dos grupos, siguiendo la idea de Sánchez-Matamoros (2004), uno global y el otro puntual. El grupo global hará referencia los siguientes tres elementos matemáticos:

- Funciones exponenciales particulares, como por ejemplo $f(x) = 2^x$; $f(x) = 10^{-x}$
- La función exponencial genérica $f(x) = b^x$
- La generalización de la función exponencial $f(x) = kb^{tx+s}$

Los resultados de las investigaciones expuestas en la sección anterior revelan la importancia del estudio de funciones exponenciales particulares para comprender qué es lo que las caracteriza y, realizar posteriormente inferencias hacia toda una familia de funciones que, en nuestro caso, es la función exponencial genérica entendida como un *objeto.* Una vez construido el objeto función exponencial se construyen las transformaciones de esa función, así como la consideración de las diferentes aplicaciones de estas funciones exponenciales que corresponde al elemento global de tematización del esquema función exponencial.

Así el elemento matemático funciones exponenciales particulares tiene para nosotros la connotación de una función exponencial específica en la forma de conocer proceso, mientras que al hacer mención al elemento matemático función exponencial genérica nos referimos a la forma de conocer objeto de la función exponencial y el tercer elemento matemático corresponde a la tematización del esquema función exponencial.

Además de esta consideración de los elementos matemáticos globales se ha disociado el concepto de función exponencial en otros elementos denominados puntuales que representamos en la figura 4. Estos elementos forman parte de todas las funciones exponenciales y por lo tanto están presentes en todos los elementos globales.

Los elementos matemáticos que hemos llamado puntuales se han obtenido, de varias fuentes. Una de ellas es el estudio realizado de las funciones exponenciales en su desarrollo histórico epistemológico (Tabla C y 1.2) el estudio histórico nos permite atender al cambio de enfoque de la generación de esta función, que comienza en el siglo XVIII, al escindir dos funciones que hasta entonces eran la misma; las funciones exponenciales y las logarítmicas, una inversa de la otra. Por otro lado, nos centramos en recuperar algunas consideraciones de índole geométrica en cuanto a la relación entre progresiones geométricas y aritméticas, relación que está en la génesis de la noción de logaritmo.

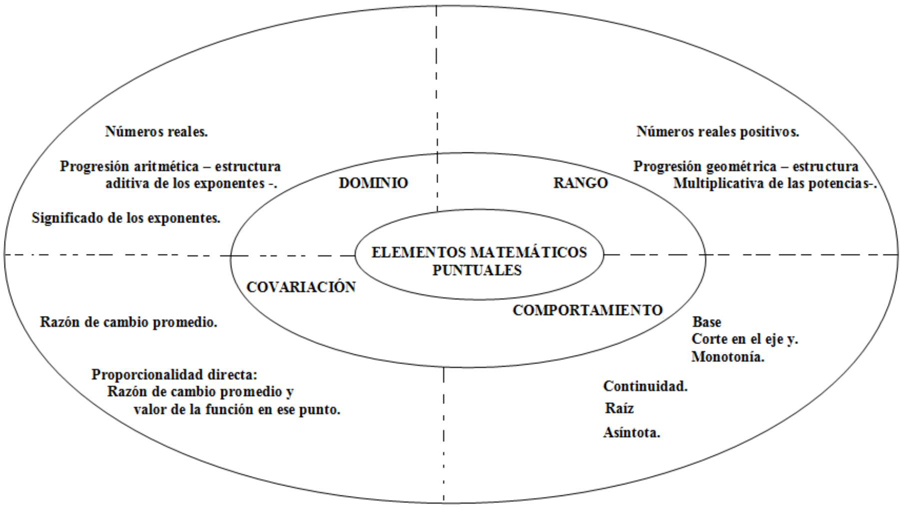


Figura 4. Elementos matemáticos puntuales.

Las otras fuentes son la definición del concepto, la revisión y consideración de los elementos matemáticos desde las investigaciones descritas en el apartado anterior (Tabla E) vinculadas con la comprensión de los exponentes, el aprendizaje de los estudiantes de las funciones exponenciales particulares, los procesos de inferencias de los estudiantes sobre la caracterización de estas funciones particulares y las consideraciones sobre el rol en la enseñanza y el aprendizaje de las diferentes aplicaciones de estas funciones exponenciales.

Todo lo anterior se concreta en los elementos matemáticos puntales: el concepto de exponente, la estructura aditiva de los exponentes, la estructura multiplicativa de las potencias, la noción de covariación, el dominio y rango, la razón de cambio de la función, continuidad, monotonía y asíntota.

Se han de tener en cuenta además el papel de los diferentes sistemas de representación para que los estudiantes construyan una adecuada imagen del concepto (Tall y Vinner, 1981) que conduzca a su comprensión (González, 2002). El papel de las conversiones y traslaciones entre los diferentes modos de representación apoya la generación y consolidación de los diferentes mecanismos cognitivos que deben ser generados para dotar de sentido a la función exponencial.

De esta forma, describimos cada uno de los mecanismos de construcción en dos registros de representación: el simbólico y el gráfico. Consideramos los aspectos aritméticos, algebraicos y analíticos dentro de lo simbólico y los geométricos y las representaciones en el plano cartesiano como el registro gráfico.

1.4.2. Propuesta de descomposición genética de la función exponencial

A partir de las consideraciones anteriores elaboramos una propuesta de descomposición genética de la función exponencial. En ella integramos los resultados de la revisión acerca del desarrollo histórico de los conceptos de logaritmo, función logarítmica, exponente y función exponencial, y tomamos decisiones para delimitar un planteamiento de la función exponencial que sea independiente del de la función logarítmica, atendiendo a los cambios realizados a finales del siglo XVIII en la definición de estas funciones trascendentes. Por otro lado, para abordar la relación entre progresiones geométricas y progresiones aritméticas –relación que está en la génesis de la noción de logaritmo (Napier, 1614) y que según Confrey y Smith (1995) dota de significado a la función exponencial– se hacen consideraciones de índole geométrica.

También se integran a la propuesta de descomposición genética de la función exponencial, resultados de investigaciones en educación matemática (1.3.4.1) relativas a la comprensión de los exponentes, el aprendizaje de funciones exponenciales particulares, los procesos de inferencias de los estudiantes sobre la caracterización de estas funciones particulares y las consideraciones sobre el rol en la enseñanza y el aprendizaje de las diferentes aplicaciones de estas funciones exponenciales.

En primer lugar se establecieron unos prerrequisitos para luego describir cada uno de los mecanismos de construcción en dos grupos de registros de representación: el simbólico y el gráfico. Estos prerrequisitos se concretan en:

- Representación gráfica de objetos matemáticos; puntos, rectas y curvas en un sistema de coordenadas cartesianas.
- La función como objeto matemático.
- El concepto de exponente natural mayor que uno. La existencia de la potencia que surge de la interacción entre base y exponente, como una acción de multiplicar de manera reiterada una misma cantidad atendiendo a los requerimientos de economía en la escritura y en la sintaxis aritmética y algebraica.
- La noción de exponente no natural como una convención matemática para uniformizar las operaciones entre monomios.
- Propiedades de los exponentes.
- Concepto de proporcionalidad directa.
- Análisis de monotonía de las funciones.
  Pendiente en funciones lineales y razón de cambio promedio en funciones potencia.
  Concavidad
- Continuidad

La construcción de las funciones exponenciales requiere que el estudiante acuda a otros esquemas, los cuales en esta propuesta se denominan esquemas vinculados y que son: la noción de límite, el número e y la noción de continuidad.

A continuación, iremos describiendo la descomposición genética a partir de: los elementos matemáticos que configuran el concepto de función exponencial y las relaciones matemáticas establecidas entre estos elementos donde se incluyen las construcciones mentales específicas que un estudiante realiza para comprenderlo.

Comienza la construcción de la función exponencial por medio de las llamadas acciones en la teoría APOS, transformaciones de objetos percibidas por el estudiante como externas. Se realiza en dos registros, el simbólico y el gráfico para los cuáles se realizan acciones con funciones exponenciales particulares con bases enteras y racionales. Los estudiantes deben ser conscientes de la monotonía de la función; tipo de crecimiento o decrecimiento de la función a través de la razón de cambio. También deben construir la noción de covariación entre las dos estructuras, la aditiva de la variable independiente y multiplicativa de la dependiente. En cuanto a los aspectos gráficos, hay que considerar la representación en el plano cartesiano de los puntos de la curva exponencial para lo que se requiere el uso de elementos geométricos como la media geométrica, la semejanza o el producto de segmentos.

Elemento matemático. Funciones exponenciales particulares.

- *Simbólico*
  - Acción de evaluar numéricamente la expresión de función exponencial con una base dada.
  - Acción de calcular las diferencias entre dos valores de la variable independiente y los valores correspondientes de la variable dependiente.
  - Acción de comparación de diferencias y cocientes de dos valores de la variable independiente y dependiente respectivamente.
- *Gráfico*
  - Acción de ubicar en el plano cartesiano puntos correspondientes a parejas de coordenadas donde la segunda componente es una potencia de exponente la primera componente, recurriendo a construcciones geométricas cuando la ubicación de puntos lo requiera.

El mecanismo de **interiorización** es la construcción mental de una forma de conocer como proceso a partir de una serie de acciones sobre objetos cognitivos, es decir, las formas de conocer como acciones se interiorizan en procesos.

Simbólico

- Interiorización de las iteraciones correspondientes a elevar una base fija cuando se varía el exponente, considerando de forma separada los casos en que la base es mayor que uno o cuando tiene un valor entre cero y uno.
- Interiorización de las acciones de comparación de diferencias y cocientes de dos valores de la variable dependiente e independiente respectivamente, para buscar las relaciones entre ellas $\frac{y_2}{y_1} = a^{x_2 - x_1}$.
- Interiorización de las acciones de aplicar valores muy "grandes" a *x* y la aproximación de los valores de *y* a cero en el caso de la función decreciente y para *valores de x* muy "pequeños" en el caso de la función creciente.

- *Gráfico*
  - Interiorización de las acciones de ubicar diferentes puntos en la curva función exponencial en el proceso de construcción de la gráfica de la función sin recurrir a realizar las acciones de remplazar en la fórmula diversos valores.
  - Representación del triángulo característico para diferentes puntos de la gráfica de una función.

Del elemento matemático Funciones exponenciales particulares a La función exponencial genérica $f(x) = b^x$

El mecanismo de **encapsulación** es la transformación mental de un proceso dinámico en un objeto cognitivo estático. Este objeto puede ser visto como una entidad total y puede ser transformado mentalmente por otras acciones o procesos. En este caso se dice que la comparación de diferentes funciones, en distintos modos de representación delimitando diferentes aspectos de la función exponencial desencadena la encapsulación cognitiva de la idea de función exponencial.

- Comparación entre diferentes funciones crecientes o decrecientes que permitan examinar razones de cambio para establecer la monotonía y rapidez de crecimiento o decrecimiento de la función exponencial según los valores de la base.
- Comparación entre diferentes curvas de funciones crecientes o decrecientes con curvas de funciones exponenciales que permitan examinar a través del triangulo característico la rapidez de crecimiento o decrecimiento de la función exponencial.

- Comparación de curvas exponenciales para establecer el eje *x* como asíntota, el corte de la función con el eje *y*, el dominio y el rango de las funciones exponenciales

Encapsulación del proceso función exponencial en el objeto función exponencial y su representación mediante una curva o representación simbólica $f(x)=b^{x}$ con b>0 y b≠1, estableciendo el dominio en el conjunto de los números reales y el rango en los número reales positivos, considerando como asíntota el eje *x*, que es una función creciente para b<1 y decreciente para 0<b<1, que tiene una raíz para *x*=1 y que existe relación de proporcionalidad entre la función y su razón de cambio.

La tematización del esquema función exponencial $f(x)=kb^{tx+s}$

Finalmente la **tematización** permite considerar la función exponencial en diferentes contextos tanto matemáticos como no matemáticos completando la imagen del concepto y su significado.

- Generalización de la función exponencial objeto $f(x)=b^{x}$ por diversas transformaciones relacionando los diferentes parámetros de la representación simbólica con sus efectos en la representación gráfica.
- Aplicación de las funciones exponenciales transformadas en los procesos de solución de ecuaciones logarítmicas.
- Utilización de la función exponencial en diferentes contextos: crecimiento de poblaciones, temperatura, interés compuesto, comportamiento radiactivo, entre otros.

Así, nuestra propuesta de descomposición genética para las funciones exponenciales abarca la interiorización, encapsulación y tematización haciendo referencia a elementos globales y los elementos puntuales.

CAPÍTULO 2: Metodología

Los instrumentos y procedimientos de recogida de datos nos permitieran llevar a término la descripción y análisis de la práctica de los docentes a través de lo que dicen y hacen tanto en las clases, como en las entrevistas. En el desarrollo de la investigación se distinguen tres momentos. En el primero, tras la apropiación de un marco teórico hemos construido una propuesta de *descomposición genética del concepto función exponencial* (sección 1.4) para usarla como el referente de la comprensión del concepto en los estudiantes que busca potenciar el profesor.

En el segundo, hemos recogido información directa de las sesiones de aula de los docentes de precálculo mientras enseñan la función exponencial e información directa sobre las intenciones de las acciones del profesor en cada una de las sesiones de clase a través de entrevistas semiestructuradas.

En el tercer momento, analizamos los datos recogidos tomando como referencia el constructo *modelación de la descomposición genética* e inferir las características subyacentes a esa práctica que determinarán lo que denominamos la *perspectiva de la práctica*.

Esta sección está dedicada a describir aspectos de la metodología empleada en la investigación. Describimos el análisis realizado a los datos relativos a las fases de planificación y de gestión en el aula. Los resultados de este análisis los presentamos como un estudio de casos. El estudio de casos está encaminado a conocer cómo modelan los mecanismos de construcción los profesores; cómo usan los instrumentos de la práctica y cuál es el propósito de su uso y cómo usan los elementos matemáticos del concepto y sus representaciones. A continuación procedemos a presentar los aspectos determinantes en cuanto a metodología en relación al análisis de la práctica de los docentes universitarios de precálculo en la enseñanza de la función exponencial.

2.1. SELECCIÓN DE LOS PROFESORES Y DESCRIPCIÓN DEL CONTEXTO

Los dos profesores (Ernesto y Arturo, pseudónimos) que participaron en esta investigación pertenecen a dos universidades colombianas, una de carácter privado y la otra de carácter público, ambas ubicadas en la ciudad de Bogotá. Se les propuso, colaborar en ella para poder analizar la enseñanza de las funciones exponenciales en la asignatura de Precálculo y ambos aceptaron participar en el estudio. No se realizó ningún tipo de selección, más bien, la proximidad con el investigador, las circunstancias laborales de cada uno y sus intereses personales favorecieron una disponibilidad de tiempo y disponibilidad de sus aulas, así como la colaboración respecto de las ideas concernientes a su labor diaria de impartir la enseñanza de las matemáticas.

Se trata de dos profesores con dedicación a tiempo completo que trabajan en un Departamento de Ciencias Básicas. Arturo, está adscrito a una universidad pública USI (seudónimo) que tiene entre sus programas de pregrado la formación profesional en Bacteriología y Laboratorio Clínico mientras que Ernesto está adscrito a una universidad privada UES (seudónimo). En dicha universidad se organización los programas de pregrado de forma que algunas de las asignaturas son comunes a diversas carreras, como Publicidad, Biología, Ingeniería de alimentos, y Administración y Mercadeo. Este es el caso de la asignatura de precálculo.

Ernesto tiene una formación inicial como licenciado en Matemáticas, ha cursado una Maestría en Docencia de la Matemática y ha participado en algunos cursos especializados de matemáticas. Procede de una familia con formación matemática cuya actividad principal ha sido la docencia. Es un profesor que manifiesta compromiso con la enseñanza y con sus estudiantes. Su principal interés reside tanto en el precálculo como el cálculo y las ecuaciones diferenciales. Enseña Precálculo a estudiantes de todos los programas de pregrado en donde está incluida esta asignatura en la que posee una experiencia docente de diez años y siete de permanencia en esta Universidad. En el momento de participar en nuestra investigación también impartía la asignatura de Cálculo. Es de gran interés para nuestro estudio al tratarse de un profesor con un amplio conocimiento de la matemática y con una dilatada trayectoria en la práctica docente, al que le gusta impartir clases de Precálculo ya que la temática es muy cercana a sus intereses profesionales tanto docentes como investigadores.

En la Universidad UES, además del aula de clase habitual, Ernesto tiene la posibilidad de solicitar uno de los salones con medios audiovisuales o las salas de informática, estas últimas, una vez por mes, dándole la posibilidad de planificar aproximadamente 4 sesiones cada semestre. Las salas de cómputo cuentan con un promedio de 30 computadores dotados de diversos programas de cálculo simbólico como Derive. La universidad también cuenta con una plataforma virtual que el profesor usa básicamente para realizar cuestionarios y preguntas o tareas para los estudiantes.

El profesor ha pedido a los estudiantes, desde el inicio del semestre adquirir un libro guía de Precálculo[15], que deben utilizar para realizar lecturas previas y trabajos en clase. Los estudiantes también han sido informados del plan de trabajo que seguirán durante todo el semestre y que Ernesto suele recordarles con cierta frecuencia, señalándoles por ejemplo los temas que irán estudiando semana tras semana.

La Universidad ha institucionalizado que todos los estudiantes que cursan Precálculo se presenten, en fecha única, a un mismo examen final independientemente del profesor con quien hayan cursado ese semestre la asignatura. Estas pruebas y, en general, los programas son estudiados por todos los docentes a cargo del curso en reuniones que se realizan una vez por semana.

Por su parte, Arturo es Ingeniero Químico, enseña Precálculo a estudiantes de Bacteriología y Laboratorio Clínico y tiene quince años de experiencia docente Universitario de Matemáticas al impartir precálculo, cálculo y ecuaciones diferenciales en diversas Universidades. Cuenta con estudios en una Maestría en Educación en la que no realizó la investigación que le permitiera culminar y conseguir el título correspondiente. Imparte además las asignaturas de Bioestadística a estudiantes de este mismo programa profesional. Arturo es un profesor que se manifiesta preocupado porque los estudiantes comprendan que el sentido de las Matemáticas es que son "organizadas, lógicas y precisas". Su interés, en nuestro estudio, reside en que no es licenciado en matemáticas sino ingeniero químico pero tiene 10 años de experiencia en esta Universidad al impartir docencia a nivel de precálculo, aunque también ha trabajado en estadística aplicada.

En la Universidad USI, Arturo cuenta con un salón de clase con televisor y en caso de necesitar otros recursos audiovisuales debe solicitarlos con una semana de antelación para que le sean trasladados a esa aula. En cuanto a las aulas de cómputo, según el profesor, es muy difícil lograr el acceso a ellas.

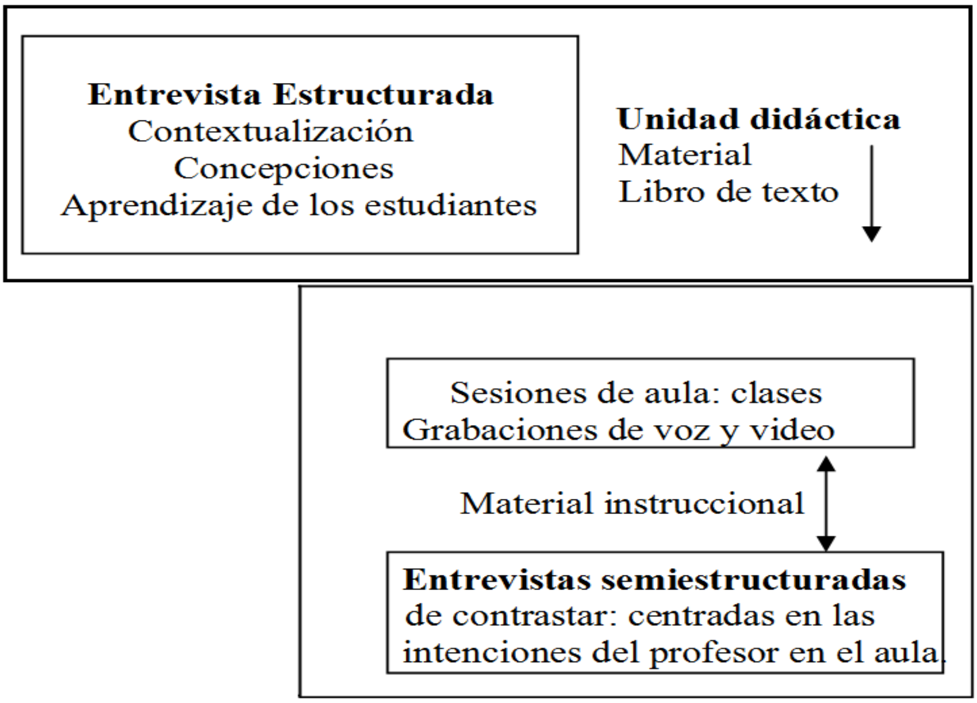
El profesor no pide a los estudiantes que adquieran un libro guía de Precálculo, aunque les solicita realizar lecturas previas y trabajos en clase de diversos libros de Precálculo. Los estudiantes también han sido informados del plan de trabajo que seguirán durante todo el semestre, pero el profesor decidió realizar una sesión extra de clase para abarcar el tema de funciones logarítmicas que es el último que corresponde en su programación.

Precálculo. James Stewart, Lothar Redin & Saleem Watson.

Los exámenes finales que realizan sus estudiantes en esta asignatura son responsabilidad única y exclusiva del docente que la ha impartido en ese semestre aunque, en ocasiones, los enunciados de dichas evaluaciones son examinados por pares en sesiones semanales.

2.2. INSTRUMENTOS DE RECOGIDA DE DATOS

La determinación de los referentes teóricos, la delimitación de problema y objetivos de nuestra investigación fueron precisando los instrumentos que se van a utilizar para recoger los datos que se transformarán en resultados. Se usará una entrevista inicial estructurada, entrevistas semiestructuradas - posteriores a las clases-, grabaciones de voz y video.



Cuadro A. Fuentes de datos.

Una vez que se contactó con los dos profesores, se procedió a informar a las respectivas universidades para que las autoridades correspondientes aprobaran la grabación de las sesiones de aula. A cada profesor se le explicaron las características del estudio, se señaló que el objetivo de investigación no era evaluar su enseñanza sino conocer cómo enseña las funciones exponenciales y que el estudio estaría centrado en el profesor y no en los estudiantes. A ellos también se les proporcionó está información.

2.2.1. Fase de Planeación

2.2.1.1. Entrevista estructurada

Inicialmente, con fines biográficos, de contextualizar nuestros casos, y con el objetivo de tener información complementaria frente a las observaciones que posteriormente se llevarían a término respecto a las acciones del profesor en el aula se recurrió a utilizar una entrevista estructurada, que fue propuesta y validada por Pinto (2010). Esta entrevista fue adaptada para nuestros propósitos manteniendo 31 de las 35 preguntas propuestas en la entrevista original. Se procedió a excluir preguntas directamente relacionadas con el conocimiento didáctico del contenido del profesor, y el razonamiento estadístico. Concretamente estas preguntas correspondían a los numerales 7, 13, 21 y 35 de la entrevista original. El guion de entrevista contextual, biográfica (ver Apéndice B) tenía por lo tanto 31 preguntas, clasificadas en ocho apartados: información general (1), descripción del contexto (3), antecedentes sobre la formación y enseñanza de la Matemática (3), salón de clase ideal (2), concepciones (4), programa de curso y enseñanza (12), aprendizaje de los estudiantes (3) y formación inicial y permanente (3).

Ejemplos de cada una de estas categorías de preguntas son:

- ¿Cómo podría describir su posición actual en la Universidad? (tipo de contrato, trabajo que realiza, asignaturas que imparte, satisfacción)
- ¿Cómo es que se interesó por enseñar y en ser profesor de Matemática? ¿Por qué enseñar matemáticas? ¿Se siente satisfecho enseñando Matemáticas?
- ¿Cómo debería ser la enseñanza ideal de un curso de Matemáticas aplicadas o precálculo? ¿Por qué? ¿Qué se conseguiría?
- Si tuviera que completar esta frase, ¿cómo lo completaría? “Mi método o estrategia de enseñanza del precálculo consiste en …”
- ¿Puede describir algunas de sus estrategias que han ayudado a formarse como profesor de precálculo?

La entrevista contextual y biográfica se dividió en dos partes debido a la extensión de las respuestas de los profesores; así, cuando ellos mismos indicaron se suspendió la entrevista y se continuó en una segunda sesión. En cualquier caso, la hora y los días elegidos fueron decisión de cada profesor y se realizaron, en el primer caso en su centro de trabajo y, con el segundo caso en un lugar elegido por el profesor. En ambos casos las dos partes de la entrevista fueron grabadas tanto audio como en video.

La información relativa a la fase de planificación se obtiene a través de una parte de la entrevista previa a la iniciación de las sesiones de aula. La idea es obtener información más específica, en un momento posterior a la recogida de la información general y la descripción del contexto. Se realizaron preguntas sobre los materiales que se planean utilizar, las metas y los presupuestos con que el profesor organizó su plan de aula, como:

- ¿Cuál es el rol que juega la tecnología en tu salón de clases?
- Y tú utilizas el libro, cómo; para que el estudiante lo consulte siempre, para los ejercicios…
- Con la función exponencial tendrías algo en especial que decir sobre qué evalúas, qué valoras o qué esperas encontrar en cuando a manejo de la exponencial.
- ¿Qué es lo que resulta difícil de aprender en función logarítmica y exponencial? ¿Cuáles son las dificultades qué esperas, puedan tener, de los estudiantes?

2.2.1.2 Unidad didáctica y libros de texto.

Los dos profesores tenían elaborado un documento con el plan de aula, correspondiente a los objetivos trazados alrededor de la enseñanza de la función exponencial y, nos facilitaron una copia de dicho documento en el momento de realizar la entrevista.

Para el caso de Ernesto el plan de aula detalla que iniciará con el interés compuesto para dirigir el concepto de función exponencial, luego crecimiento exponencial seguido de interés compuesto continuo, estudiado de manera simultánea con la noción de función exponencial natural. Como elementos específicos nombra que tendrá en cuenta el dominio, rango, intersección con el eje, monotonía, asíntota y transformaciones de la función. El elemento básico para el concepto de función exponencial es la estructura de los problemas de interés compuesto.

Este documento además contiene el conjunto de ejercicios recomendados por el profesor, a realizar por los estudiantes a partir del libro de texto guía, y los ejercicios que se deben solucionar haciendo uso del programa Derive, que en este caso corresponden a cuatro tareas específicas sobre funciones exponenciales. También incluye una clase que denomina práctica sala de cómputo. Esta práctica hace referencia a que el profesor tiene planeado un trabajo concreto con los estudiantes en el aula de computadores, tarea en la que utilizará en programa Derive, con el cual los estudiantes ya están familiarizados.

Arturo también tenía un documento escrito, relacionado con su plan de aula sin embargo la forma en que estaba desarrollado exigió recurrir a las preguntas de la entrevista para destacar que el énfasis en el estudio de la función se centra en la realización de gráficas de las funciones exponenciales y aplicar estas funciones a tópicos específicos en el área de la salud.

En el plan de aula de Arturo, se encuentra una tabla que incluye los ejercicios que concretamente deben desarrollar los estudiantes de uno de los textos recomendados y él complementa diciendo que tiene tres libros básicos que son de álgebra y trigonometría, matemáticas aplicadas a la administración y economía y el libro de texto de matemáticas para Administración y economía, ciencias sociales y de la vida. Sobre el libro de álgebra y trigonometría nos informa que lo selecciona porque tiene los temas organizados y ordenados más o menos como está el programa[16]. Los otros dos son complementarios y fueron elegidos por él, porque tienen aplicaciones en muchos campos y ha encontrado aplicaciones en el área de la salud que Arturo considera que es muy interesante que tengan aplicaciones en esas áreas.

La información que hemos obtenido nos permite conocer la organización prevista para el contenido y los objetivos que pretende cada profesor. Así, los datos obtenidos en esta entrevista, se adjuntan al conjunto de documentos que nos permitirán analizar la práctica de cada uno de los docentes.

2.2.2 Fase de Gestión

2.2.2.1. Sesiones de aula

Se procedió a ingresar al aula dónde se iban a grabar las clases de los docentes con los grupos de estudiantes con cierta antelación para que tanto profesor, como el investigador y los estudiantes se fueran acomodando a la situación.

En su debido momento, se grabaron todas las clases correspondientes a la enseñanza de las función exponencial. Se realizaron 5 grabaciones de 90 minutos cada una de las sesiones que realizó el caso uno y 3 grabaciones de las sesiones correspondientes al caso 2, siendo dos de ellas de 90 minutos y una de 60 minutos.

Cuando se grabaron cada una de las sesiones de aula en las que se impartió el tema de la función exponencial, se utilizó una grabadora de vídeo que tenía activo el modo de sonido ambiente. Además, el profesor siempre llevó una grabadora de voz que captaba su discurso y el de los estudiantes que estuvieran en un radio próximo.

[16] Algebra y Trigonometría. Raymond Barnett.

2.2.2.2. Entrevistas semi estructuradas

Una vez finalizadas todas las clases, de acuerdo con lo explicado y planeado, el investigador invita al docente a examinar las grabaciones. Esta actividad la lleva a cabo el docente independientemente del investigador y de forma previa a la entrevista que van a tener sobre cada clase.

El investigador, por su parte, también procedió a observar las grabaciones en video y a contrastarlas con las notas que había tomado en el discurso de cada una de ellas mientras se realizaba la grabación. Tanto su observación como las preguntas de la entrevista tenían por objetivo contrastar la percepción del investigador de los momentos en que el profesor propicia cada mecanismo de construcción, con lo que el profesor hace y expresa.

En fechas decididas de acuerdo con cada uno de los profesores se realizaron cada una de las entrevistas posteriores de las clases.

En ellas se procede nuevamente a observar el video - grabación con el profesor y se hace uso de las entrevistas semiestructuradas. De esta manera se llevó a término, una entrevista vinculada a cada clase; 5 entrevistas en el caso uno y 3 entrevistas correspondientes al caso 2 (Apéndice C en medio magnético). El guion de cada entrevista sobre estas sesiones se diseñó ad hoc para cada profesor y cada clase. Las preguntas planteadas por el investigador tenían como metas principales indagar sobre las intenciones del profesor en cada momento, establecer los elementos matemáticos del concepto que son identificados y las relaciones que el profesor pretende introducir entre ellos y obtener información que le permita contrastar su percepción como investigador de los momentos en que el profesor propicia cada mecanismo de construcción con lo que el profesor hace y expresa.

Las sesiones de las entrevistas fueron abiertas para permitir todos los comentarios, observaciones e intervenciones que el profesor considerara necesario hacer sobre su clase. A continuación se presenta, para cada caso, un cuadro con los objetivos expresados por el profesor en las entrevistas vinculadas a cada clase y, los objetivos que pretendía el investigador

Entrevista	**Objetivos explicitados por el profesor para la clase.**	**Objetivos pretendidos por el investigador.**
Clase 1.	Presentar el interés compuesto como motivación para crecimientos de tipo exponencial.	Detallar los objetivos que el profesor pretende en el desarrollo de los diferentes pasos del procedimiento en su presentación del interés compuesto. Establecer por qué y para qué el profesor deja pendiente el concepto de interés continuo. Indagar, en relación a la función exponencial, cuáles son las razones para que el profesor seleccione la tarea del doblez de papel. Lograr que el profesor haga explícitas sus intenciones acerca del trabajo que promueve en los estudiantes por medio de las tareas en pequeños grupos o la participación individual. Indagar sobre el rol, que en las clases, el docente delega a los estudiantes.
Clase 2.	Mirar el comportamiento gráfico de las funciones exponenciales, determinar propiedades de esas gráficas.	Identificar los objetivos que el profesor pretende, al desarrollar la clase, con la secuencia de tareas acerca de la representación gráfica de algunas funciones exponenciales. Indagar el uso que el profesor confiere el sistema de representación gráfico. Identificar cuál es la relación que el profesor busca establecer entre la función exponencial y las funciones cuadráticas y lineales, en su secuencia de enseñanza. Establecer la intención del profesor al presentar la función exponencial a través de la característica “variable en el exponente”. Conocer las razones por las cuales el profesor presenta en su secuencia de enseñanza, tareas que incluyen el estudio de la transformación de funciones exponenciales.

Clase 3.	Quería que la idea de interés compuesto continuo, quedara clara y que estuviera atada al objetivo general del capítulo que era mirar funciones exponenciales.	Detallar los objetivos que el profesor pretende al desarrollar los diferentes pasos del procedimiento en su presentación del interés continuo. Lograr que el profesor haga explicitas sus intenciones acerca del trabajo en grupo o la participación individual, de los estudiantes, que él promueve en sus clases. Conocer las razones por las cuales el profesor presenta en su secuencia de enseñanza, tareas que incluyen la idea intuitiva de límite e interés compuesto continuo. Indagar qué papel confiere el profesor al número *e*, en el estudio de la función exponencial Permitir que emerjan asuntos o ideas que no hubieran sido anticipadas por los investigadores. Indagar cómo y para qué se plantea el profesor el uso de las representaciones gráficas y simbólicas Examinar algunos de los elementos que el profesor tuvo en cuenta en la preparación de la secuencia de las tres clases que han transcurrido. Indagar las intenciones del profesor al guiar, a los estudiantes, en procesos de solución de problemas. Retratar el rol, de los estudiantes, que es fomentado por el profesor en sus clases.
Clase 4.	El objetivo es continuar viendo la utilidad de la función exponencial que no se restringe solo a los intereses.	Conocer las razones por las cuales el profesor presenta en su secuencia de enseñanza, tareas que incluyen las representaciones gráficas, sustituciones en fórmulas y comparación con datos del internet. Examinar las ideas que guiaron al profesor para seleccionar las preguntas que incluye en la evaluación escrita propuesta a los estudiantes. Retratar el rol, de los estudiantes, que es fomentado por el profesor en sus clases.

Clase 5.	El objetivo era tener la posibilidad de apreciar comportamientos de funciones que se construyen con las funciones exponenciales.	Detallar los objetivos que el profesor pretende al desarrollar las diferentes tareas con ayuda del programa Derive. Indagar acerca de las decisiones que el profesor estableció en la presentación de tareas que incluyeron funciones decrecientes y funciones decrecientes. Obtener del profesor, un "mapa" del recorrido y la estructura, que él considera una representación de la secuencia y desarrollo de sus clases en el aula. En el "mapa" el profesor, indica los conceptos y relaciones que buscó establecer entre estos conceptos.

Tabla F. Entrevistas semiestructuradas caso 1.

El cuadro con los objetivos correspondientes al caso 2, es el siguiente:

Entrevista	**Objetivos explicitados por el profesor para la clase.**	**Objetivos pretendidos por el investigador.**
Clase 1.	Afianzar la parte conceptual; qué es esa función, cuáles son sus características.	Establecer por qué y para qué el profesor inicia recordando el concepto de función e inversa de una función. Identificar los objetivos que el profesor pretende, al desarrollar la clase, con la secuencia de tareas acerca de la representación simbólica de las funciones exponenciales Lograr que el profesor haga explícitas sus intenciones acerca del trabajo que promueve en los estudiantes mediante la tarea de la lectura previa sobre los conceptos que se estudiarán en clase. Establecer el uso que el profesor confiere al sistema de representación gráfico y simbólico. Detallar si el profesor identifica los cambios que realiza en la gestión de la clase, respecto a la planificación previa. Indagar sobre el rol, que en las clases, el docente delega a los estudiantes.

Entrevista	Objetivos explicitados por el profesor para la clase.	Objetivos pretendidos por el investigador.
Clase 2.	Mirar el comportamiento gráfico de las funciones exponenciales, determinar propiedades de esas gráficas.	Indagar el uso que el profesor confiere el sistema de representación gráfico. Indagar acerca de las decisiones que el profesor estableció en la presentación de tarea que incluyeron funciones decrecientes y funciones decrecientes. Establecer la intención del profesor al presentar la función exponencial a través de la característica “variable en el exponente”. Conocer los objetivos por las cuales el profesor presenta, en su secuencia de enseñanza, tareas que incluyen la solución a problemas con funciones exponenciales. Indagar qué papel confiere el profesor al número *e*, en el estudio de la función exponencial. Lograr que el profesor haga explicitas sus intenciones acerca de la participación individual, de los estudiantes, que él promueve en sus clases. Permitir que emerjan asuntos o ideas que no hubieran sido anticipadas por los investigadores. Identificar la relación que el profesor busca establecer entre la función exponencial y las funciones cuadráticas y lineales, en su secuencia de enseñanza.

Entrevista	**Objetivos explicitados por el profesor para la clase.**	**Objetivos pretendidos por el investigador.**
Clase 3.	Cómo se aplica la función exponencial y una aplicación cercana.	Detallar los objetivos que el profesor pretende al guiar los diferentes pasos de la solución de "problemas de aplicación" mediante la elaboración de tablas. Establecer algunos de los parámetros que el profesor utiliza al seleccionar los problemas que plantea en su clase a los estudiantes. Indagar qué papel confiere el profesor al interés compuesto en el estudio de la función exponencial. Identificar cuál es la diferencia que el profesor establece entre la función exponencial y las funciones exponenciales transformadas. Conocer las razones por las cuales el profesor presenta en su secuencia de enseñanza, tareas que incluyen la idea de logaritmo en la solución a problemas de la función exponencial, antes de iniciar la unidad de función logarítmica. Indagar el cómo y para qué se plantea el profesor el uso de las representaciones gráficas y simbólicas. Retratar el rol, de los estudiantes , que es fomentado por el profesor en sus clases- Obtener del profesor, un "mapa" del recorrido y la estructura, que él considera una representación de la secuencia y desarrollo de sus clases en el aula. En el "mapa" el profesor, indica los conceptos y relaciones que buscó establecer entre estos conceptos.

Tabla G. Entrevistas semi estructuradas caso 2.

El profesor recibió previamente las indicaciones del investigador concernientes a la manera como debía examinar la grabación de su clase. Las indicaciones propuestas fueron las siguientes:

- Segmentar las clases en los momentos en los cuales considerara que existían cambios en el tema, los procesos, las intenciones o cualquier otro aspecto que implicara la introducción de algo nuevo.
- Identificar si tuvo la necesidad de hacer cambios, en el desarrollo de las clases, respecto a lo planeado y a qué se debieron dichos cambios.
- Escoger los momentos que consideraba más importantes en la clase y comentar el porqué.
- Explicitar, si no se había hecho previamente, el objetivo de una actividad o de la clase para comentarlo.
- Brindar al investigador sus explicaciones o ilustrar comentando, cuáles fueron sus intenciones sobre momentos de la clase, en los que aun cuando él no los había seleccionado como relevantes, para el investigador si generaban algún interés.

En la entrevista final – correspondiente a la última clase – los profesores debían trazar el mapa del recorrido y la estructura que había seguido al desarrollar sus clases en el aula, indicando los conceptos y relaciones que habían tratado sobre función exponencial.

2.3. ANÁLISIS DE DATOS

La clasificación, depuración y análisis de los datos tendrá en cuenta varios aspectos, algunos ya mencionados con anterioridad pero que resulta indispensable recordar en este momento:

- La *descomposición genética del concepto función exponencial* (sección 1.4) será el referente de la comprensión del concepto que busca potenciar el profesor en los estudiantes.
- Como una ayuda para la investigación hemos optado por utilizar el programa Atlas.ti en el análisis de los datos.

El programa ATLAS.ti fue desarrollado en Berlín mediante un proyecto de colaboración entre el departamento de Psicología de la Universidad Libre de Berlín y Thomas Muhr y se sigue perfeccionando en nuestros días. Se usa como medio de almacenamiento, categorización, codificación y estructuración de los datos obtenidos en una investigación a través del diseño de diagramas, mapas y redes. Permite el almacenamiento de los datos en un único lugar (*unidad hermenéutica*) a partir del que se va a hacer el análisis. Posteriormente, se segmentan, se asignan códigos a cada segmento incluyendo comentarios y anotaciones (*memos*) y se forma así una base relacional de datos a partir de los que el programa genera redes semánticas (*networks*) para que finalmente sean interpretados por el investigador.

Los objetos o elementos que constituyen el programa son:

- *Documentos primarios*: documentos de texto, gráficos, sonoros o visuales situados en el disco duro. El programa no los modifica ni los guarda sino que almacena referencias a ellos.
- *Citas*: fragmentos de los documentos primarios seleccionados por su significación en relación con la investigación. Puede ser una cadena de texto, un gráfico, una imagen, …
- *Códigos*: indicadores de conceptos o expresiones que se van asignando a las citas seleccionadas.
- *Notas (memos*) textos breves con ideas asociadas a algunos de los elementos.
- *Familias*: conjunto de objetos que comparten una cualidad, pueden ser familias de códigos, de documentos primarios, etc. Se suelen usar como filtros en la búsqueda de los miembros de algún objeto.
- *Redes*: están compuestas por nodos y relaciones creados a través de un editor específico. Los nodos pueden ser cualquiera de los objetos del programa y las relaciones son los nexos establecidos entre esos nodos.

Los videos junto con las grabaciones de voz tanto de las clases como de las entrevistas fueron transcritos en su totalidad e incorporados a una unidad hermenéutica del programa. Es importante señalar que el programa fue solamente una ayuda para el investigador, puesto que, en definitiva, es él mismo quien ingresa los documentos que requiere, los códigos y vínculos para establecer relaciones de acuerdo con los objetivos planteados.

En la transcripción se procuró ser fiel a las frases, diálogos y situaciones que se grabaron en voz y video, sin embargo, ya constituyen en sí mismas una cierta interpretación puesto que otros observadores podrían haber usado otros elementos, observaciones o comentarios; en ese sentido la trascripción en sí misma constituye un primer nivel interpretativo, hecho que consideramos favorable por cuanto nos permitió "comenzar" el análisis al tiempo que capturábamos la información.

Las características principales de esta transcripción se detallan a continuación:

- La transcripción de los registros de audio y video se hizo elaborando archivos en Word y luego se transformó a formato .rtf para poder ser editado.
- En los párrafos o frases de los diálogos se identifica al profesor mediante una P, a los estudiantes mediante una E y al investigador mediante una I. Así, por ejemplo, se encontrará:

P. ***a*** *a la* ***x****, donde a es una constante, la base decíamos que tiene que ser distinta de 1. ¿Qué más decíamos?*

E. Positiva

P. Que sea positiva. Y la gráfica de esas funciones exponenciales era de dos clases, ¿cierto? Mejor dicho la primera como.

E. Como un tobogán.

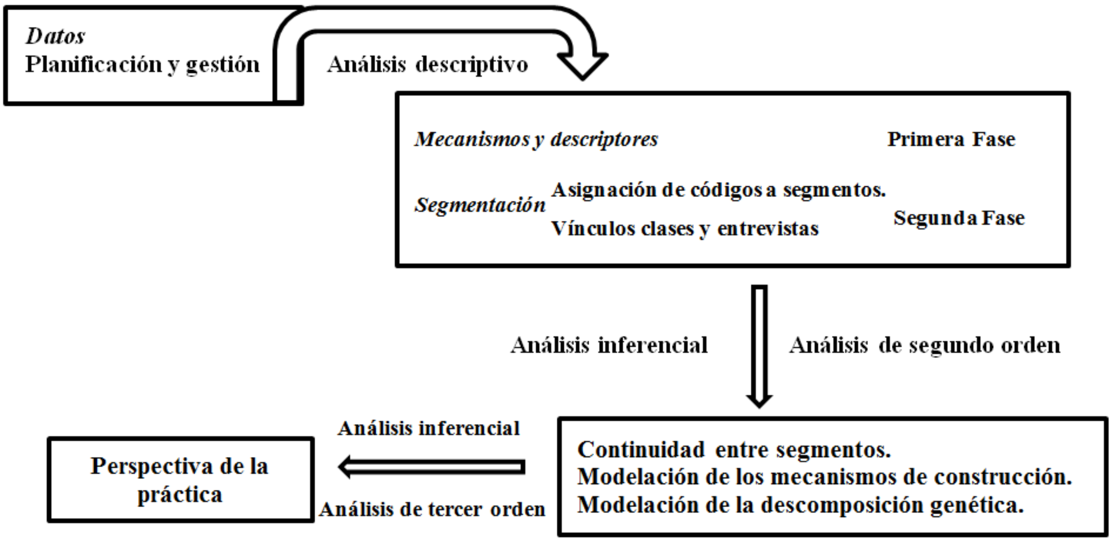
- Se añadieron signos de interrogación cuando la entonación los establece claramente o si en la situación era considerado necesario.
- Se usaron puntos suspensivos cuando el profesor no termina la oración o cuando realiza una pausa larga para después continuar su discurso. Ejemplo:

  P. Es remplazar más bien a ver cómo quedaría… pero ahí hay que tener cuidado. Recuerden el cuarenta por ciento.

- Se utilizaron los guiones (-), para añadir indicar una acción que estaba realizando el profesor mientras continuaba con su discurso, por ejemplo; -escribe en el tablero-. De manera similar se utilizaron los guiones (-) para algunas acciones que estaban realizando los estudiantes, por ejemplo; -siguen realizando los ejercicios- .
- Se realizaron fotografías del encerado que se tomaron cuando el profesor usaba algunos de los registros de representación como representaciones gráficas y algunas simbólicas.
- No se sustituyeron las representaciones gráficas, elaboradas por el profesor, por gráficas elaboradas por el investigador en software especializado, porque consideramos esto una distorsión significativa, de los reales registros utilizados en clase.
- Toda la transcripción fue realizada por el investigador que contó con otro profesional de la educación para revisa los diálogos transcritos. Los cuales fueron nuevamente revisados por otro investigador.

En el análisis de los datos, que se detalla a continuación, se realizará en tres etapas de descripción e inferencias, como se representa en el cuadro B.

La primera etapa tiene dos fases que consisten, en general, en el ingreso de la información a Atlas.ti. En la primera fase una vez los documentos han sido ingresados a la UH (unidad hermenéutica), se recurre al marco teórico en cuanto a la propuesta de descomposición genética de la función exponencial y se toman los descriptores de cada categoría – mecanismos de construcción. Se procede a diseñar códigos para los descriptores de esas categorías y la identificación de las relaciones entre categoría y descriptor. En la segunda fase se identificaron los segmentos de clase que serán nuestras unidades de análisis, de acuerdo con cada uno de los mecanismos que modela el profesor.



Cuadro B. Etapas del análisis de datos.

Los datos con los que queda identificado el segmento son: un número que establece el orden en la secuencia de clases, la línea del diálogo de esa clase en la actividad que se está realizando, el código que tiene inmerso el o los elementos matemáticos del concepto que el investigador identifica y el registro de representación utilizado en ese segmento.

En la segunda etapa, se parte de la segmentación de cada clase, que se ha obtenido previamente y se realiza la reconstrucción de las clases en función de los mecanismos de construcción identificados.

Esta etapa consta de tres fases, en la primera de ellas se busca identificar cada mecanismo, en cada clase conectando los diferentes segmentos de este mecanismo, dentro de la misma clase y tareas. Se puede entonces establecer el paso de un mecanismo a otro dentro de cada clase. En la segunda fase, la atención ya no se centra en las clases sino que se observa todo el conjunto de segmentos de un mecanismo sin importar en qué clase estén ubicados para poder establecer inferencias sobre la modelación de cada mecanismo que el docente realiza. Los resultados de este análisis van detallados en las viñetas. Para finalizar, en la tercera fase se elabora la síntesis y explicación de la modelación de la descomposición genética de la función exponencial haciendo uso para ello de la descripción que se tiene elaborada en las viñetas.

Tercera etapa: La modelación de la descomposición genética de la función exponencial, junto con aspectos relacionados con el uso del lenguaje, la entrevista biográfica y de contextualización y el marco teórico relacionado con las concepciones de los profesores sobre la enseñanza, el aprendizaje y las matemáticas escolares permiten al investigador elaborar las inferencias que conducen a la perspectiva que subyacen a la práctica de los docentes de los estudios de caso.

2.3.1. Primer análisis de las grabaciones

2.3.1.1. Primera Fase: ingreso de datos y categorías de análisis

Una vez que los documentos se han incluido en la UH, el programa genera una numeración de cada uno de ellos. Así tenemos:

- Las clases del caso 1, que denotaremos como c1, son los documentos del 1 al 5.
- Las clases del caso 2, c2 son los documentos del 11 12 13 y 15.
- Las sesiones de entrevistas posteriores a cada clase del c1 son los documentos del 16 al 20
- Las sesiones de entrevista para el caso c2 son los documentos del 26 al 28
- La entrevista inicial biográfica y de contexto del caso c1 es, el documento 31.
- La entrevista inicial biográfica y de contexto del caso c2 es el documento el 32.

Para proceder a incluir la información sobre las categorías que ayudarán a la clasificación de la información, una de las herramientas que va a utilizar el investigador es los mecanismos de construcción de la descomposición genética de la función exponencial. Sin embargo se necesitan elementos más específicos, que el nombre del correspondiente mecanismo de construcción, para ello se hace uso de los descriptores de cada mecanismo (sección 1.4). Los mecanismos de construcción y sus respectivos descriptores fueron establecidos desde el marco teórico, a través de la triangulación de información de diferentes fuentes e investigadores (ver procedimiento en 1.3).

Los descriptores son frases que, como su nombre nos indica, buscan definir el contenido. En nuestro caso con algunas acciones que denotan interiorización, encapsulación o tematización y que en aras de tornarlos como instrumentos de nuestro análisis se identificaron o integraron, al interior de ellos, tres aspectos: los elementos matemáticos del concepto, registro de representación y reflexión sobre acciones, procesos u objetos.

En este caso el establecimiento de los descriptores fue previo al estudio de los datos de los que se disponía y se usó como referente la *descomposición genética del concepto función exponencial,* estableciendo como supuesto que ayuda al investigador a examinar algunos aspectos de las acciones del profesor como evidencias de la comprensión del concepto que desea potenciar en los estudiantes.

En Atlas.ti para identificar cada categoría o mecanismo de construcción se procede a añadirle el comentario. Esos comentarios se corresponden con su descripción del significado de cada mecanismo de construcción en la descomposición genética (sección 1.4). Como se observa en la imagen (Imagen 3.2), estos comentarios se pueden desplegar en la columna de la derecha de la pantalla cada vez que el investigador lo solicite.

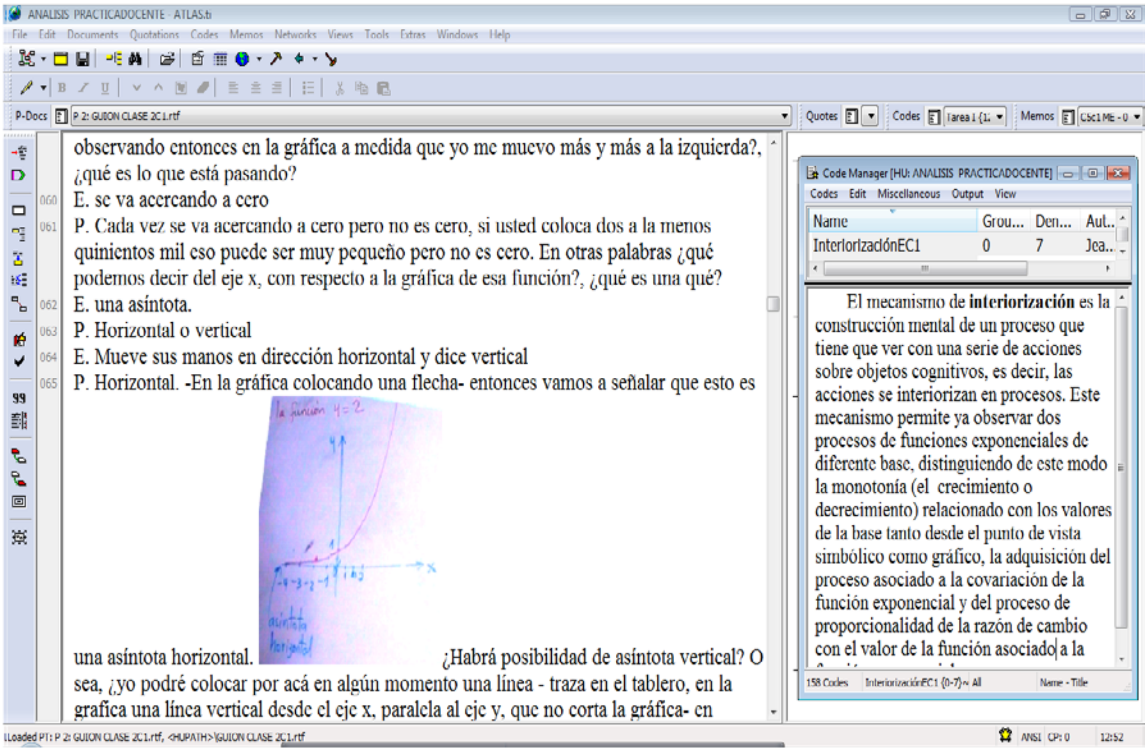


Imagen 3.2. Comentario de una categoría de análisis.

Las frases que conforman cada mecanismo de construcción tienen un papel de descriptores, así, a cada descriptor se le asigna un “código” que se puede relacionar con el mecanismo de construcción de conocimiento mediante un vínculo lógico: “es parte de”. Los códigos están formados por tres caracteres. Como se está analizando la función exponencial utilizaremos la letra *e* la cual irá antecedida de una letra mayúscula según corresponda a una acción A, Interiorización I, encapsulación E, y la tematización T. Al final del código se añade un literal para distinguir las diferentes opciones dentro de un mismo mecanismo. Así, por ejemplo *Ieb.*, hace referencia al mecanismo de interiorización de la función exponencial, concretamente con el aspecto b.

Este procedimiento se realiza para todos los descriptores de cada mecanismo de construcción, lo cual permitirá más adelante utilizar los códigos para clasificar los segmentos

Categorías: mecanismos de construcción	Códigos asignados a cada descriptor de la categoría.
• **Interiorización**	
Para la categoría *mecanismo de interiorización*, los descriptores que forman parte de ella son:	
Interiorización de las iteraciones correspondientes a elevar una base fija cuando se varía el exponente, considerando de forma separada los casos en que la base es mayor que uno o cuando tiene un valor entre cero y uno.	• **Iea**
Interiorización de las acciones de comparación de diferencias y cocientes de dos valores de la variable dependiente e independiente respectivamente, para buscar las relaciones entre ellas $y_2/y_1 = a^{x_2 - x_1}$.	• **Ieb**
Interiorización de las acciones de aplicar valores muy “grandes” a *x* y la aproximación de los valores de *y* a cero en el caso de la función decreciente y para *valores de x* muy “pequeños” en el caso de la función creciente.	• **Iec**
Interiorización de las acciones de ubicar diferentes puntos en la curva función exponencial en el proceso de construcción de la gráfica de la función sin recurrir a realizar las acciones de remplazar en la fórmula diversos valores.	• **Ied**
Representación del triángulo característico para diferentes puntos de la gráfica de una función	• **Iee**
• **Encapsulación**	
La categoría mecanismo de *encapsulación* tiene como descriptores:	
Comparación entre diferentes funciones crecientes o decrecientes que permitan examinar razones de cambio para establecer la monotonía y rapidez de crecimiento o decrecimiento de la función exponencial según los valores de la base.	• **Eea**
Comparación entre diferentes curvas de funciones crecientes o decrecientes con curvas de funciones exponenciales que permitan examinar a través del triangulo característico la rapidez de crecimiento o decrecimiento de la función exponencial.	• **Eeb**
Comparación de curvas exponenciales para establecer el eje *x* como asíntota, el corte de la función con el eje *y*, el dominio y el rango de las funciones exponenciales.	• **Eec**
Encapsulación del proceso función exponencial en el objeto función exponencial y su representación mediante una curva o representación simbólica $f(x) = b^x$con b>0 y b≠1, estableciendo el dominio en el conjunto de los números reales y el rango en los número reales positivos, considerando como asíntota el eje *x*, que es una función creciente para b<1 y decreciente para 0<b<1, que tiene una raíz para *x*=1 y que existe relación de proporcionalidad entre la función y su razón de cambio.	• **Eed**

Tematización	
Generalización de la función exponencial objeto $f(x)=b^x$ por diversas transformaciones relacionando los diferentes parámetros de la representación simbólica con sus efectos en la representación gráfica.	• **Tea**
Aplicación de las funciones exponenciales transformadas en los procesos de solución de ecuaciones logarítmicas.	• **T*eb***
Utilización de la función exponencial en diferentes contextos: crecimiento de poblaciones, temperatura, interés compuesto, comportamiento radiactivo, entre otros	• **Tec**

Tabla H. Mecanismos de construcción

Concluyendo, en esta fase el investigador ha incluido los documentos junto con las categorías ya mencionadas. Es importante tener presente que esta primera fase del análisis no estuvo definida de esta manera desde el principio. Inicialmente los investigadores, intentamos diseñar unos códigos para cada mecanismo de construcción, en general, que eran asignados a los segmentos, sin recurrir a los descriptores. Sin embargo, al llegar al segundo nivel de análisis se observó que estas categorías no eran lo suficientemente finas para permitir la selección y principalmente la codificación de segmentos y se hizo necesaria la deliberación, entre los investigadores sobre cómo usar los descriptores de los mecanismos de construcción. Así se determinó, tanto desde el punto de vista conceptual como del operativo, la generación de códigos que son “parte de” cada mecanismo, como ya se expuso en la tabla anterior.

En este momento se tiene cada mecanismo de construcción de conocimiento, como por ejemplo en el caso de la *tematización* con su comentario, y los tres códigos correspondientes a los descriptores que “son parte del” mecanismo tematización, y que en el ejemplo corresponden a *Tea, Teb, Tec*. Sin hacer uso de la función de filtrar del programa Atlas.ti, nosotros ingresamos por separado los mismos códigos para los dos casos objeto de estudio, por lo tanto en la pantalla se puede observar *Teac1* para el caso uno o *Teac2* para el segundo caso.

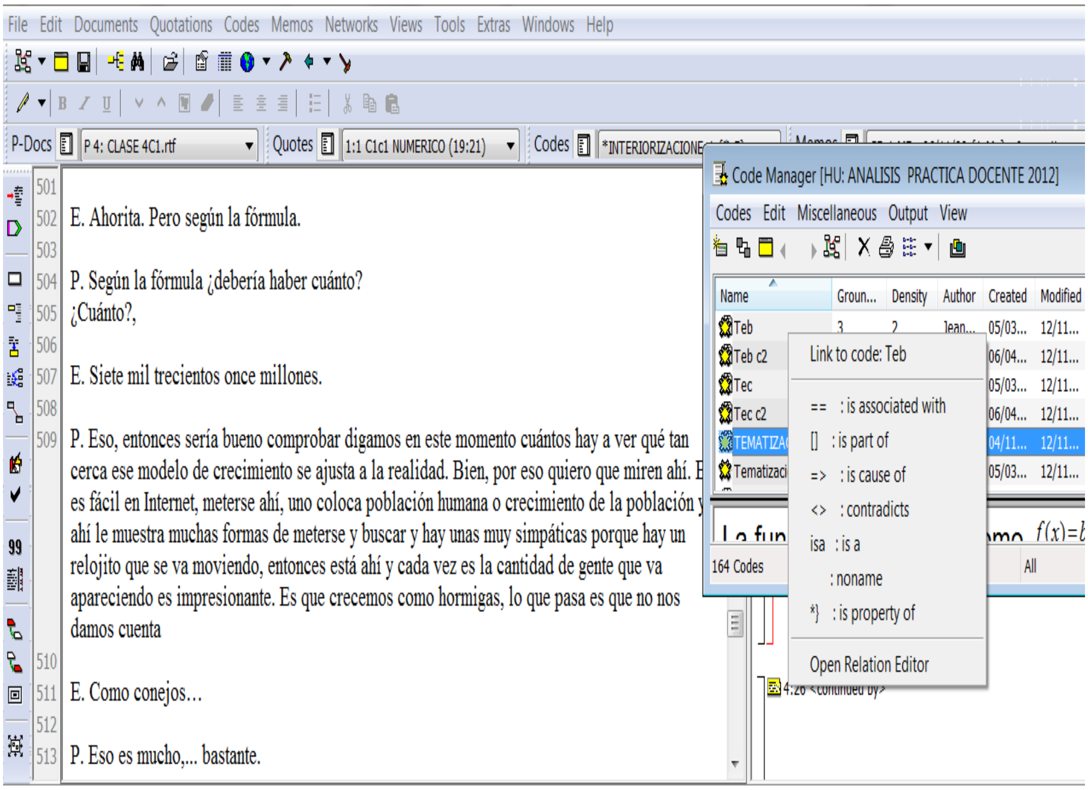


Imagen 3.3. Vínculos entre códigos de categorías y descriptores.

Para establecer la relación entre un mecanismo y sus descriptores se utilizó la relación “es parte de”, para lo cual se arrastró el código de cada descriptor hasta el mecanismo correspondiente y en el menú de relaciones se seleccionó y marcó la que se estableció. (Imagen 3.3). De esta manera si el investigador quiere visualizar alguna red entre la categoría – mecanismo de construcción – y descriptores de los mecanismos tendrá una red como se observa en la Imagen 3.4.

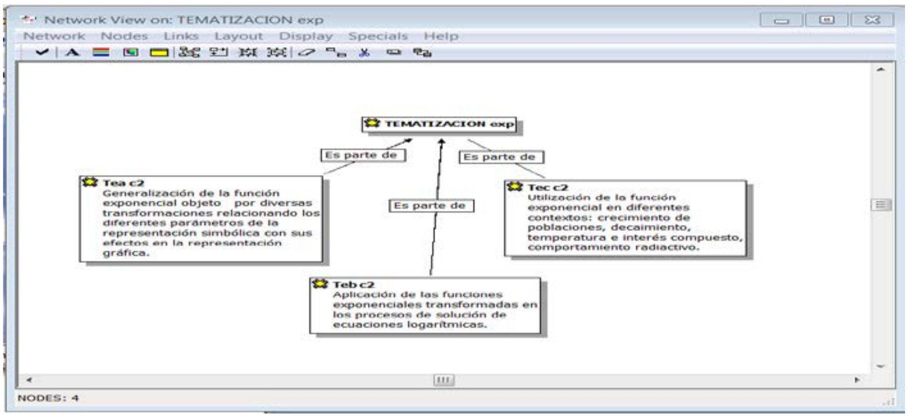


Imagen 3.4. Redes de vínculos entre los descriptores y el mecanismo de construcción.

Al finalizar la primera fase del análisis el investigador tiene en la unidad hermenéutica, tanto los documentos como las categorías de análisis; el comentario para cada mecanismo de construcción y el conjunto de códigos que identifican los descriptores para cada mecanismo.

2.3.1.2. Segunda Fase: Selección de los segmentos.

La segmentación de las clases y la asignación de códigos a estos segmentos tuvo dos componentes: por un lado el trabajo conceptual del investigador cuando asigna dichos códigos a trozos de evidencias de la clase y, por otra parte, el uso de las funciones de Atlas.ti que permite al investigador vincular segmentos de las entrevistas con los segmentos de las clases.

Atendiendo a la información suministrada por cada profesor en las entrevistas iniciales, de planificación y posteriores a las clases y, de acuerdo con los mecanismos de construcción y sus correspondientes descriptores ya codificados dentro de la UH, el investigador procede a identificar los segmentos - unidades de análisis- de cada una de las clases en donde el profesor esté propiciando, mediante una tarea, cada uno de los mecanismos de construcción de la función exponencial.

Examinemos la manera cómo se identifican los segmentos de clase. Para ello se utilizaron varios parámetros, que permiten además establecer cuál es la línea en donde inicia un segmento y la línea en que termina. Estos parámetros son:

1. Identificación por parte del investigador de una tarea, o parte de ella, en donde el profesor a través de sus acciones favorece un mecanismo de construcción del conocimiento: propicia la reflexión sobre acciones, sobre procesos o sobre objetos.

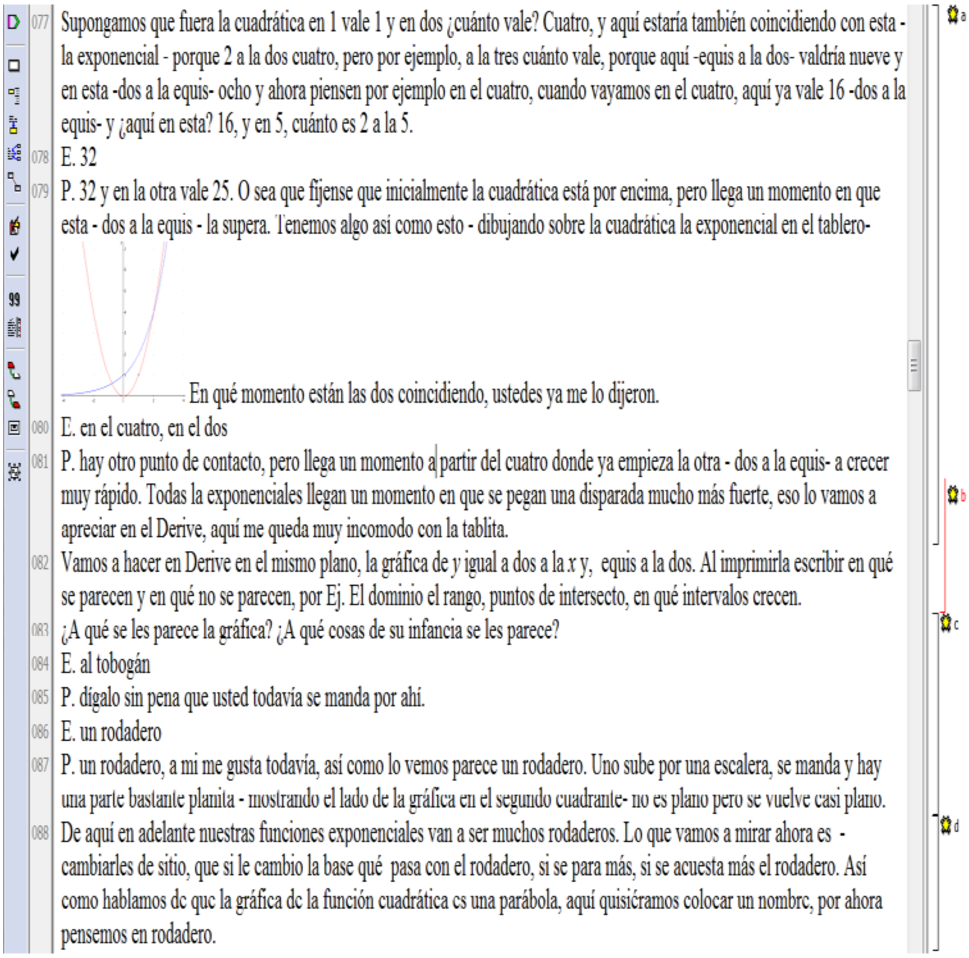
2. Identificación del investigador de la introducción de un elemento matemático puntual del concepto.

3. Identificación del registro de representación utilizado o cambio de registro.

4. División de las clases presentada por el profesor en las sesiones de entrevistas, en donde él denotaba un cambio de intenciones o cambio de tareas, entre otros.
5. Identificar el o los elementos globales sobre los cuales dirige sus acciones el profesor.

La identificación de los segmentos tomó mucho tiempo e involucró pasos de refinamiento y ajuste reiterados. Un ejemplo sobre la división de segmentos, con los tres primeros parámetros, se presenta a continuación, en unas líneas [2][77-89] de la clase dos, del caso uno.

En la imagen siguiente de la clase 2 del caso uno, el investigador identificó cuatro segmentos de clase, que se establecen a partir de los criterios expuestos, de la siguiente forma:


077 Supongamos que fuera la cuadrática en 1 vale 1 y en dos ¿cuánto vale? Cuatro, y aquí estaría también coincidiendo con esta - la exponencial - porque 2 a la dos cuatro, pero por ejemplo, a la tres cuánto vale, porque aquí -equis a la dos- valdría nueve y en esta -dos a la equis- ocho y ahora piensen por ejemplo en el cuatro, cuando vayamos en el cuatro, aquí ya vale 16 -dos a la equis- y ¿aquí en esta? 16, y en 5, cuánto es 2 a la 5.

078 E. 32

079 P. 32 y en la otra vale 25. O sea que fíjense que inicialmente la cuadrática está por encima, pero llega un momento en que esta - dos a la equis - la supera. Tenemos algo así como esto - dibujando sobre la cuadrática la exponencial en el tablero-

En qué momento están las dos coincidiendo, ustedes ya me lo dijeron.

080 E. en el cuatro, en el dos

081 P. hay otro punto de contacto, pero llega un momento a partir del cuatro donde ya empieza la otra - dos a la equis- a crecer muy rápido. Todas la exponenciales llegan un momento en que se pegan una disparada mucho más fuerte, eso lo vamos a apreciar en el Derive, aquí me queda muy incomodo con la tablita.

082 Vamos a hacer en Derive en el mismo plano, la gráfica de *y* igual a dos a la *x* y, equis a la dos. Al imprimirla escribir en qué se parecen y en qué no se parecen, por Ej. El dominio el rango, puntos de intersecto, en qué intervalos crecen.

083 ¿A qué se les parece la gráfica? ¿A qué cosas de su infancia se les parece?

084 E. al tobogán

085 P. dígalo sin pena que usted todavía se manda por ahí.

086 E. un rodadero

087 P. un rodadero, a mi me gusta todavía, así como lo vemos parece un rodadero. Uno sube por una escalera, se manda y hay una parte bastante planita - mostrando el lado de la gráfica en el segundo cuadrante- no es plano pero se vuelve casi plano.

088 De aquí en adelante nuestras funciones exponenciales van a ser muchos rodaderos. Lo que vamos a mirar ahora es - cambiarles de sitio, que si le cambio la base qué pasa con el rodadero, si se para más, si se acuesta más el rodadero. Así como hablamos de que la gráfica de la función cuadrática es una parábola, aquí quisiéramos colocar un nombre, por ahora pensemos en rodadero.

Imagen 3.5. Identificación de segmentos.

En el segmento a, el profesor está propiciando una comparación entre una función cuadrática particular y una función exponencial particular, y dicha comparación la realiza a través de un examen punto a punto utilizando cálculos numéricos y registro gráfico. A ese segmento se le asignan los elementos matemáticos globales *una función cuadrática* y *una función exponencial*; se identifican los registros de representación simbólica y gráfico usados por el profesor para propiciar esas comparaciones, y como el procedimiento utilizado por el profesor es una comparación punto a punto, lo cual cognitivamente se refiere a la función como proceso.

En el segmento b, las observaciones del profesor se realizan sobre el elemento global *función exponencial* haciendo uso de la representación gráfica y se dirigen a establecer un comportamiento del proceso función exponencial y a guiar la observación sobre el crecimiento rápido de este tipo de funciones y finaliza exponiendo una tarea en donde se supone que examinarán elementos puntuales de la función exponencial a partir de la función particular, dos a la equis. En el segmento c, el investigador identifica que el profesor centra la atención en la representación gráfica de *una función exponencial particular* con el fin de establecer una analogía entre la forma de cada curva de la función exponencial y la forma de un tobogán. En el segmento d, el profesor continua la secuencia de la clase haciendo uso de la representación gráfica, no establece una observación para esa única función, que tenía como ejemplo, sino que se refiere a la representación gráfica para *todas las funciones exponenciales,* lo cual cognitivamente va encaminado a la función como objeto.

Hubo segmentos que fueron seleccionados por el investigador dado que en ellos se identificó una característica de la gestión de la actividad en el aula por parte del profesor, ya sea porque fijaban el acento en su discurso o en estrategias para el desarrollo de las actividades. Estos segmentos inicialmente solo fueron identificados sin asignación de un código y luego a través del análisis tomaron un código. Ejemplo de ello fue el código que hace referencia a la estrategia del profesor de dejar actividades o conceptos pendientes y es denominado **asuntos pendientes**, así:

E. Profe ¿por qué este continuo?

P. Hay una palabra ahí que es continuo, después vamos a ver qué es, ***dejémosla pendiente.***

…

P. ¿Listo? Bueno, borremos esa gráfica de una vez también a ver y déjenla otra vez como estaba al comienzo, dejémosla así dos a la equis.

Bueno, ya hicimos una primera exploración que **había quedado pendiente**. Listo. Déjenla dos a la equis otra vez. ¿Ya? La gráfica, pasémonos a la ventana…eso…la gráfica, si, listo.
Eso, a la que teníamos al puro comienzo.

Y si quieren ya borren las otras expresiones allá en la ventana de Algebra dejen solo la de dos a la equis, ¿bueno? La gráfica, listo, eso, bien…

En cuanto a nuestra unidad hermenéutica en el programa Atlas.ti, la identificación de los segmentos, que son nuestras unidades de análisis, se realiza de la siguiente forma: se parte del documento denominado *clase,* se identifica un segmento, con los parámetros ya explicados, y se relaciona ese segmento con lo comentado en la entrevista por el profesor (Imagen 3.5; 3.6). Se procede a asignarle un código al segmento y de manera automática Atlas.ti le asigna, a ese código, una *cita* que consiste en el número del documento y número de la línea, junto con las palabras iniciales del dicho texto que ha sido señalado.

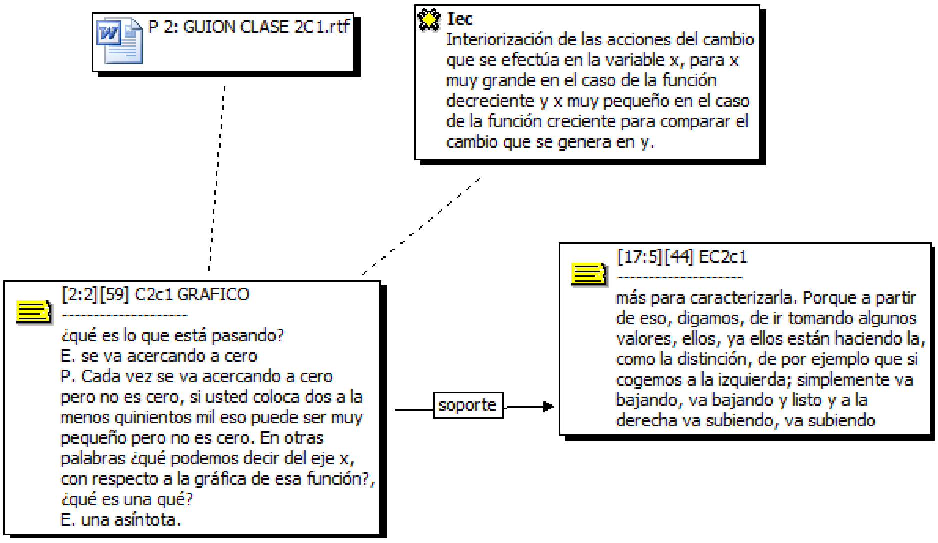


Imagen 3.6. Citación y encadenación de segmentos.

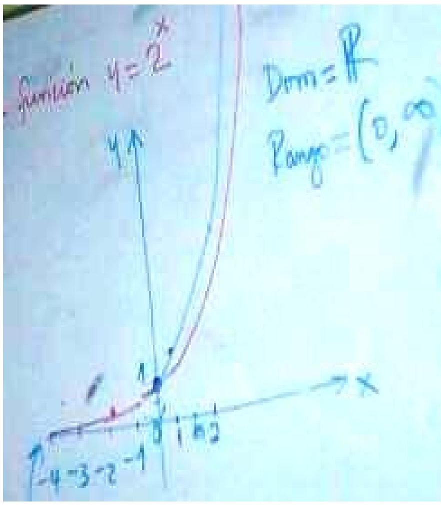
El programa automáticamente muestra esta cita, es decir, del texto correspondiente a cada segmento indica dónde se encuentra ese texto. Así [2:2][59] (imagen 3.6) significa que ese segmento pertenece al documento 2 (segunda clase), que es el segundo segmento identificado en el documento y que se encuentra en el renglón 59. De esta nomenclatura conservaremos [2][59] es decir el número de documento o *clase* y el renglón, porque nos apoya, más adelante, en el propósito de establecer la secuencia en la cual son propiciados los mecanismos de construcción; al interior de cada clase y en el transcurso de toda la enseñanza de la función exponencial. Además esa cita se puede completar, por ejemplo en nuestro análisis se cambian las palabras iniciales de la cita que el programa asume por defecto, para añadir información sobre el registro de representación que es usado en ese segmento por el profesor. En la imagen anterior, a la cita [2][59] C2c1 GRÁFICO, se le ha añadido una identificación del caso1 (c1) de la clase 2 (C2) y del registro de representación que se están trabajando, que en ese momento es el registro GRÁFICO.

Puede ocurrir que no se hayan seleccionado momentos de la clase, que en la entrevista fueron clasificados, por el profesor, como importantes. Es por ello que, con la intención de triangular toda la información dada por el profesor, se procede a revisar los segmentos también en sentido contrario, es decir, identificando segmentos, desde las entrevistas hacia la clase.

En otras oportunidades, se dejan algunos segmentos solamente señalados sin codificar y se procede a buscar nuevamente evidencias en las entrevistas sobre los propósitos del profesor para esa tarea, considerando además los elementos matemáticos puntuales o globales, el uso del registro de representación y las acciones, procesos u objetos sobre los que el profesor está centrando la reflexión en la tarea propuesta. Posteriormente se comparte la segmentación con los otros investigadores, y luego se concreta el código correspondiente al descriptor del mecanismo que se considera que el profesor está potenciando.

A continuación se presenta un ejemplo, del procedimiento seguido en la codificación del segmento [2][99-112], tarea sobre la cual el investigador indaga, con una pregunta que dirige al docente en la segunda entrevista, segmento [17][67-77]

[2][99-112]



Ahora vamos a empezar a mirar cómo varía la gráfica si cambiamos la base, si por ejemplo en lugar de 2 colocamos un 3. Abramos el libro porque aquí ya no nos vamos a demorar, y a gastar tiempo nuevamente haciendo tabla. Abramos el libro en la pagina 288.

Observen en la parte de abajo, distintos colores para distintas bases, por ejemplo ubiquemos la de 3 a la equis y compárenla con 2 a la equis, ¿Qué notan en especial? Cuando de la base 2 pasamos a la base 3 ¿cómo cambió?

E. crece más.

P. crece más rápido a partir de dónde.

E. de cero, de uno

P. A ver comencemos, cuando x vale 0 cuánto vale y, ¿cuánto es tres a la cero? Tres a la cero es uno. - lo ubica sobre la gráfica del tablero - por aquí también pasa dos a la x. Cuando x vale uno, ¿cuánto vale la y?

E. tres

P. tres a la uno es tres, ya no va a valer dos como el anterior. ¿Cuándo x vale dos?

E. Nueve

P. nueve, en fin ya no es 8 es 9, está por encima - sigue trazando la gráfica en el mismo plano anterior, en el tablero -mejor dicho, toda está por encima, y ahí se nota - señalando la gráfica del libro- ¿pero qué pasa antes del cero? Por ejemplo en menos uno. ¿Cuánto vale?

E. esa está por debajo.

P. Esta por debajo, ¿por qué va a estar por debajo? - Se dirige al tablero y escribe - porque cuando usted hace 3-1, ¿cuánto es uno sobre tres a la uno?

E. cero punto tres y tres, tres.

P. y antes ¿cuánto valía? - señala la gráfica del tablero - 05, entonces si está por debajo. Un comportamiento curioso, después del cero la gráfica está por encima pero antes del cero está por debajo.

El segmento es identificado por el investigador, al considerar que el profesor:

- Está proponiendo una tarea de comparación de dos funciones exponenciales particulares, $y = 2^x$ y $y = 3^x$.
- Se está centrando en examinar la rapidez del crecimiento cuando establece el cambio en la base.
- En la secuencia de la actividad hace uso del registro gráfico al simbólico y viceversa.
- Las representaciones gráficas son realizadas punto a punto y la comparación también se realiza punto a punto.
- El profesor guía mediante preguntas, hiladas una tras otra, para que los estudiantes examinen el procedimiento de análisis punto a punto

Este segmento es seleccionado y vinculado con el segmento de la entrevista [17][67-77] porque el profesor en esta parte de la entrevista explica al investigador sus objetivos al presentar estos ejercicios en su secuencia de clase; concernientes al cambio de base. La interpretación de esta respuesta, para el investigador, se relaciona con la intención del profesor de favorecer el mecanismo de encapsulación dado que él expresa: "*para poder después decir, en general una función exponencial es tal cosa.*"

I. Entonces, estamos graficando, cierto. Seguimos graficando. ¿Pero en esta parte hay algo nuevo que tú pretendías?

P. No, ya es empezar a mirar cómo la base al cambiar el valor, afecta fundamentalmente de dos maneras la gráfica. Que crece o decrece y quitar la base uno

I. ¿La intención?

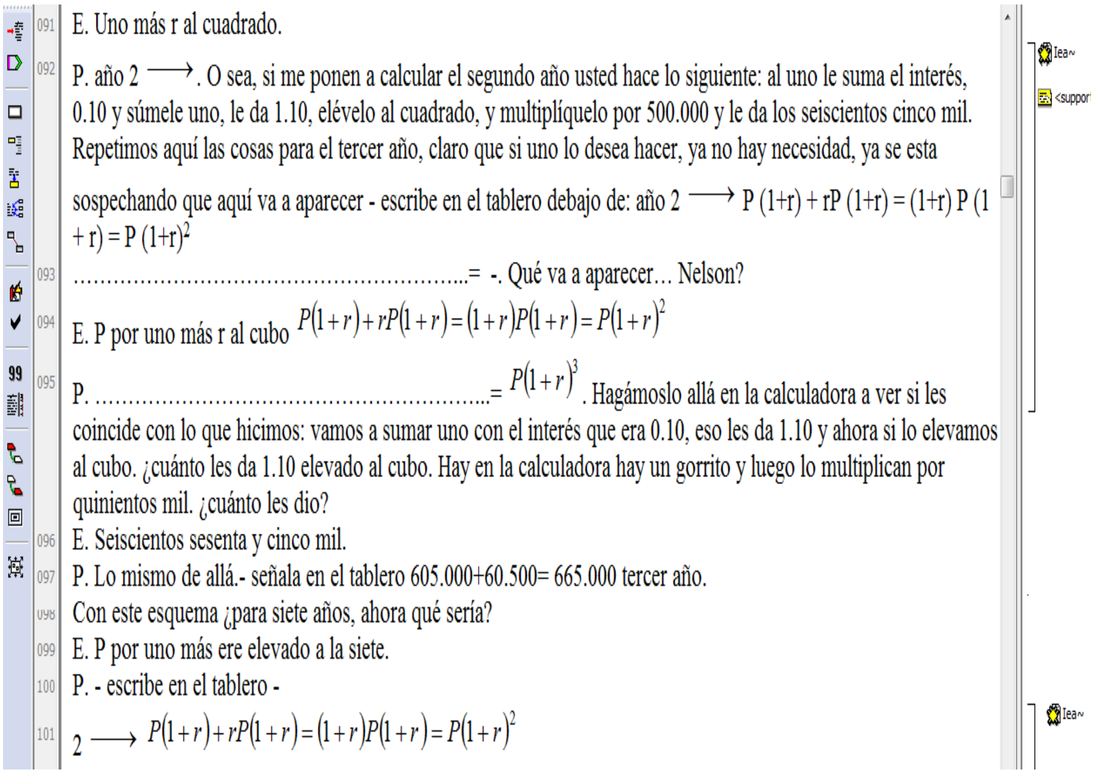
P. Es para poder después ya decir, en general una función exponencial es tal y tal cosa

I. O sea, caracterizarla ayudándote en la gráfica

P. De la gráfica

Estas observaciones son confrontadas con los descriptores de cada mecanismo. En este caso, desde el marco teórico se considera que *la comparación entre procesos de diferentes curvas crecientes o decrecientes que permitan examinar la razón de cambio en diferentes puntos de las gráficas para distinguir la monotonía y rapidez de crecimiento de la función exponencial* forma parte del mecanismo de encapsulación.

Finalmente, una vez se tiene codificada cada una de las clases y triangulada la codificación, el resultado que arroja esta fase son segmentos de las clases, es decir, de esta manera se llega a un primer análisis de datos que consiste en la identificación de diversos segmentos de la clase, a los que se le ha asignado un mecanismo de construcción con un descriptor específico y el registro de representación.


091 E. Uno más r al cuadrado.

092 P. año 2 $\longrightarrow$. O sea, si me ponen a calcular el segundo año usted hace lo siguiente: al uno le suma el interés, 0.10 y súmele uno, le da 1.10, élévelo al cuadrado, y multiplíquelo por 500.000 y le da los seiscientos cinco mil. Repetimos aquí las cosas para el tercer año, claro que si uno lo desea hacer, ya no hay necesidad, ya se esta sospechando que aquí va a aparecer - escribe en el tablero debajo de: año 2 $\longrightarrow$ P (1+r) + rP (1+r) = (1+r) P (1 + r) = P $(1+r)^2$

093 ....= -. Qué va a aparecer… Nelson?

094 E. P por uno más r al cubo $P(1+r)+rP(1+r)=(1+r)P(1+r)=P(1+r)^2$

095 P. ....= $P(1+r)^3$. Hagámoslo allá en la calculadora a ver si les coincide con lo que hicimos: vamos a sumar uno con el interés que era 0.10, eso les da 1.10 y ahora si lo elevamos al cubo. ¿cuánto les da 1.10 elevado al cubo. Hay en la calculadora hay un gorrito y luego lo multiplican por quinientos mil. ¿cuánto les dio?

096 E. Seiscientos sesenta y cinco mil.

097 P. Lo mismo de allá.- señala en el tablero 605.000+60.500= 665.000 tercer año.

098 Con este esquema ¿para siete años, ahora qué sería?

099 E. P por uno más ere elevado a la siete.

100 P. - escribe en el tablero -

101 2 $\longrightarrow$ $P(1+r)+rP(1+r)=(1+r)P(1+r)=P(1+r)^2$

Imagen 3.7. Guion de clases con segmentos, códigos y soportes asignados.

Un ejemplo de la información que se tiene, en ese momento, se puede observar en a la imagen 3.7. En ella vemos una sección de la primera clase del c1, en la que se pueden observar algunos de los segmentos identificados y clasificados. Concretamente, en este caso, se trata del mecanismo de interiorización. Junto con ellos se encuentran los nexos con las entrevistas y cuando se considera necesario, notas anexas incluidas por el investigador que sirven como guía para los análisis posteriormente.

Este primer conjunto de datos muestra un conjunto de segmentos distribuidos en todas y cada una de las clases sobre cada mecanismo, que es propiciado por el profesor. Esta clasificación se refiere a cada mecanismo e incluye implícitamente el elemento matemático del concepto y explícitamente un registro de representación. Además, se pueden observar los vínculos con la entrevista semiestructurada correspondiente a cada clase.

2.3.2. Análisis de segundo orden

En este momento ya tenemos cada una de las clases segmentadas y cada segmento corresponde a un mecanismo de construcción. Por lo tanto la tarea que emprendemos ahora es una reconstrucción de las clases, teniendo como objetivo cómo se modeliza cada mecanismo de construcción dentro de las clases.

2.3.2.1. Agrupación de cada mecanismo de construcción correspondiente a una misma clase.

En esta fase, a partir de la segmentación realizada se pasa a identificar cuándo se propicia un mismo mecanismo en cada clase. Se busca establecer continuidad de un segmento a otro u otros y generar enlaces entre segmentos. Lo anterior permite hacer más fino el análisis. El investigador trata que cada segmento tenga sentido, es decir, que corresponda a una unidad completa de significado. Para ello, en ocasiones, es necesario conectar varios segmentos uno a continuación de otro de tal manera que aparezca realmente ilustrada la tarea que se está desarrollando en la clase y sea evidente el mecanismo que de allí emerge.

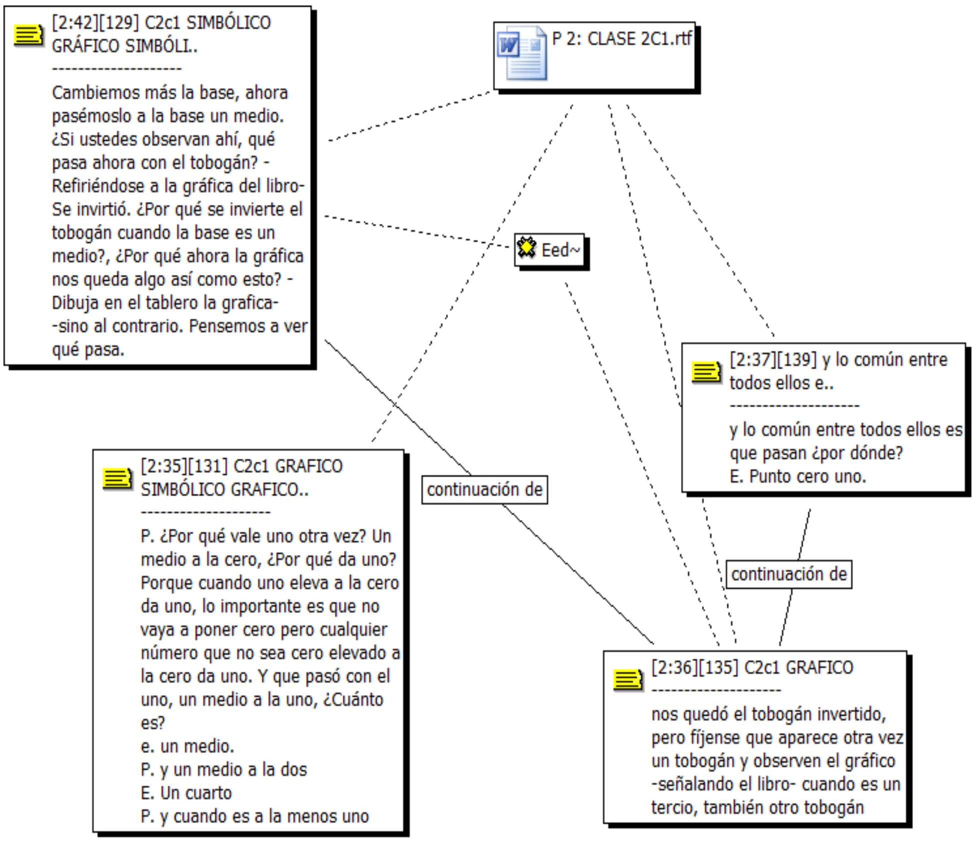


Imagen 3.8. Segmentos a través del vínculo "continuación de".

En esta continuidad de segmentos el investigador puede identificar el orden-secuencia en que el profesor presenta los elementos matemáticos del concepto, el uso del registro o los registros de representación, junto con la forma en qué propicia la presentación de estos elementos para encaminarla hacia la construcción de la función exponencial.

En la imagen anterior, se observa cómo se han seleccionado varios segmentos de la clase 2 del caso 1 que se encuentran conectados. Ellos han sido vinculados al mecanismo de encapsulación, concretamente al mecanismo ***Eed*** (Encapsulación del proceso función exponencial en el objeto función exponencial y su representación mediante una curva o representación simbólica $f(x) = b^x$con b>0 y b≠1, estableciendo el dominio en el conjunto de los números reales y el rango en los número reales positivos, considerando como asíntota el eje *x*, que es una función creciente para b<1 y decreciente para 0<b<1, que tiene una raíz para *x*=1 y que existe relación de proporcionalidad entre la función y su razón de cambio). Así se establecen conexiones entre los diferentes segmentos correspondientes a un mecanismo de una tarea.

En esta secuencia (imagen 3.8), el investigador examina las acciones que realiza el profesor, que consisten en dar valores a *x* y sustituir en $f(x) = (1/2)^x$, e ir guiando a los estudiantes a través de la representación gráfica de esta función exponencial particular, para establecer el punto de corte de la gráfica con el eje *y*. Los segmentos presentan una secuencia de una tarea en la que se propicia, mediante la comparación entre los procesos correspondientes a funciones decrecientes, el mecanismo de encapsulación, al mismo tiempo que se examina el punto de corte como una característica común a todas las gráficas y también se usa el término “imagen de tobogán”, para describir las representaciones gráficas de esas funciones.

En el caso dos, por ejemplo, se ha establecido una continuidad entre dos segmentos correspondientes al mecanismo de encapsulación sin embargo esta codificación exige de una aclaración que se presenta a continuación (Imagen 3.9).

El investigador determina la secuencia de dos segmentos en los cuales se aborda, la comparación entre funciones exponenciales de diferente base a través de la construcción de una tabla de datos con la que se examina el crecimiento de *f(x)*. El investigador realiza consideraciones sobre la representación tabular construida punto a punto para realizar una comparación de las gráficas también punto a punto. Da la impresión de que el profesor trata de modelar el mecanismo de interiorización intentando que los estudiantes construyan procesos, aunque hay que ser conscientes que el profesor está enunciando las propiedades de esas funciones sin permitir o facilitar que los estudiantes reflexionen sobre cualquier proceso.

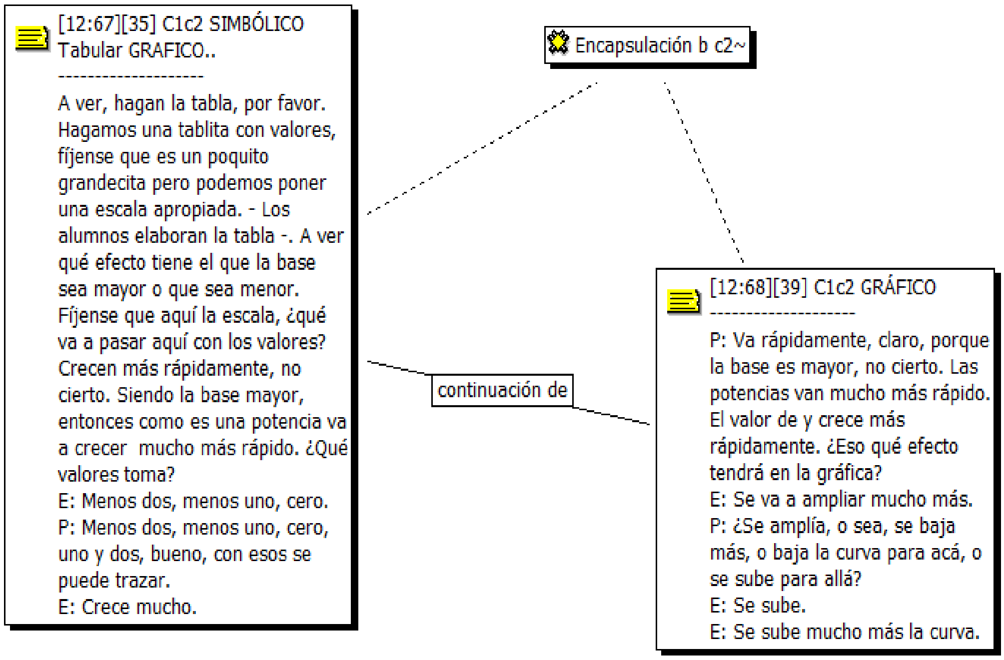


Imagen 3.9. Segmentos a través del vínculo "continuación de"c2.

Concluyendo esta sección, si anteriormente se segmentó cada clase de acuerdo a los mecanismos que se había propiciado, ahora se agrupa los diferentes segmentos en los que se modela un mismo mecanismo en cada clase.

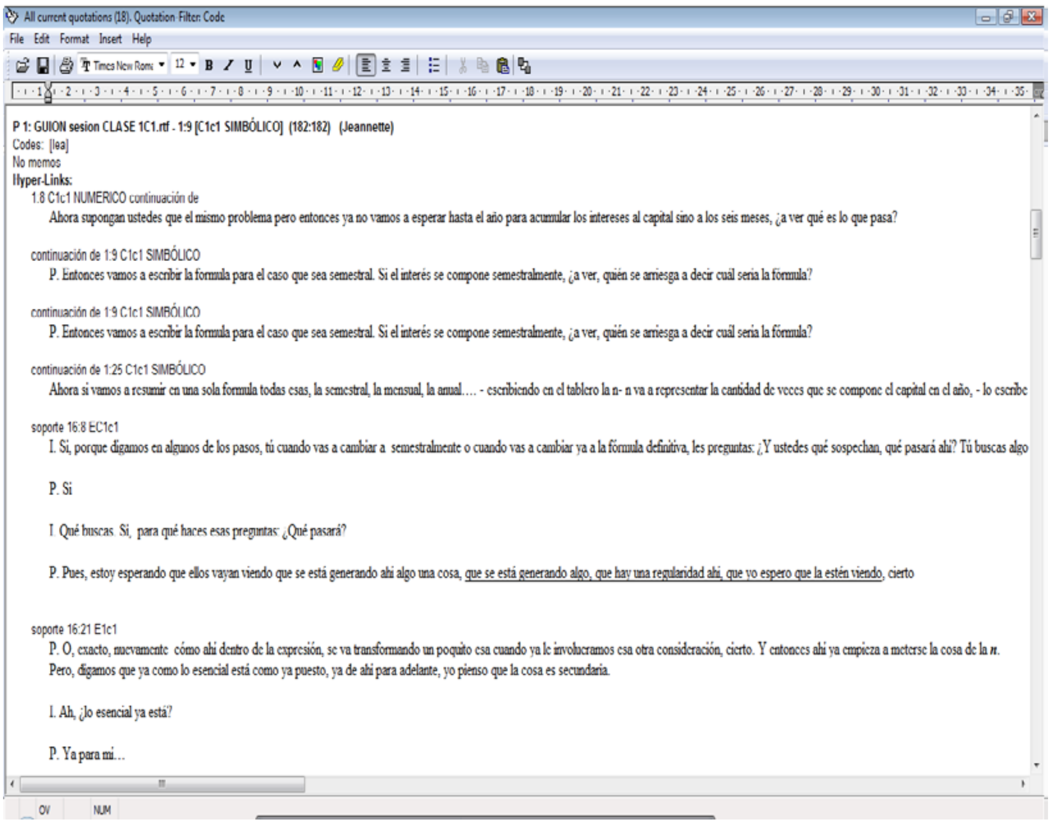


Imagen 3.10. Mecanismo de Interiorización y los soportes en las entrevistas.

En la imagen (3.10), aparecen algunos de los segmentos asociados con el mecanismo de interiorización, concretamente con el aspecto **Iea** (Interiorización de las iteraciones correspondientes a elevar una base fija cuando se varía el exponente, considerando de forma separada los casos en que la base es mayor que uno o cuando tiene un valor entre cero y uno), de la clase dos del caso 1, asociados a los segmentos de la entrevista en los que se apoya la codificación realizada.

Si analizamos en detalle la información que se presenta en la siguiente imagen, podemos comprobar que se inició la modelación de este mecanismo de construcción en el documento 1 momento 8 [1:8], que se continuó en [1:9] y [1:25], que esta modelación se está apoyando en los propósitos que el profesor manifestó durante la entrevista posterior a la clase que se corresponde con el documento 16, concretamente, en los momentos [16:8], [16:21]. Si se desea una mayor visión de conjunto se puede recurrir al documento inicial y así recuperar el momento correspondiente a esta información.

En este momento la investigadora puede observar la forma en que durante cada clase se pasa de propiciar un mecanismo hacia otro mecanismo así como la relación que el profesor establece o no establece, entre un elemento matemático y otro.

2.3.2.2. Modelación de Mecanismos de construcción de la función exponencial.

En esta fase, se trata de desligar la atención en cada clase para obtener una visión de conjunto, es decir, para cada caso se estudiará como se modela cada mecanismo en el conjunto de todas las clases en las que se trabajó la función exponencial, consideradas como un todo.

Así, se tiene una mirada longitudinal correspondiente a la modelación de cada mecanismo a través de las tareas que hizo cada profesor en sus clases. Si antes se examinaba cada clase y el paso de un mecanismo a otro, ahora se observa un único mecanismo en todo su recorrido por las clases y la investigadora procede a establecer las inferencias sobre la modelación de cada mecanismo de construcción. Para ello se procede, con criterios dados por el investigador, a extraer a través de las redes que genera el propio software (imagen 3.11), el conjunto de segmentos de clase o tareas que se han asociado con un único mecanismo de construcción para establecer cómo se realiza su modelación.

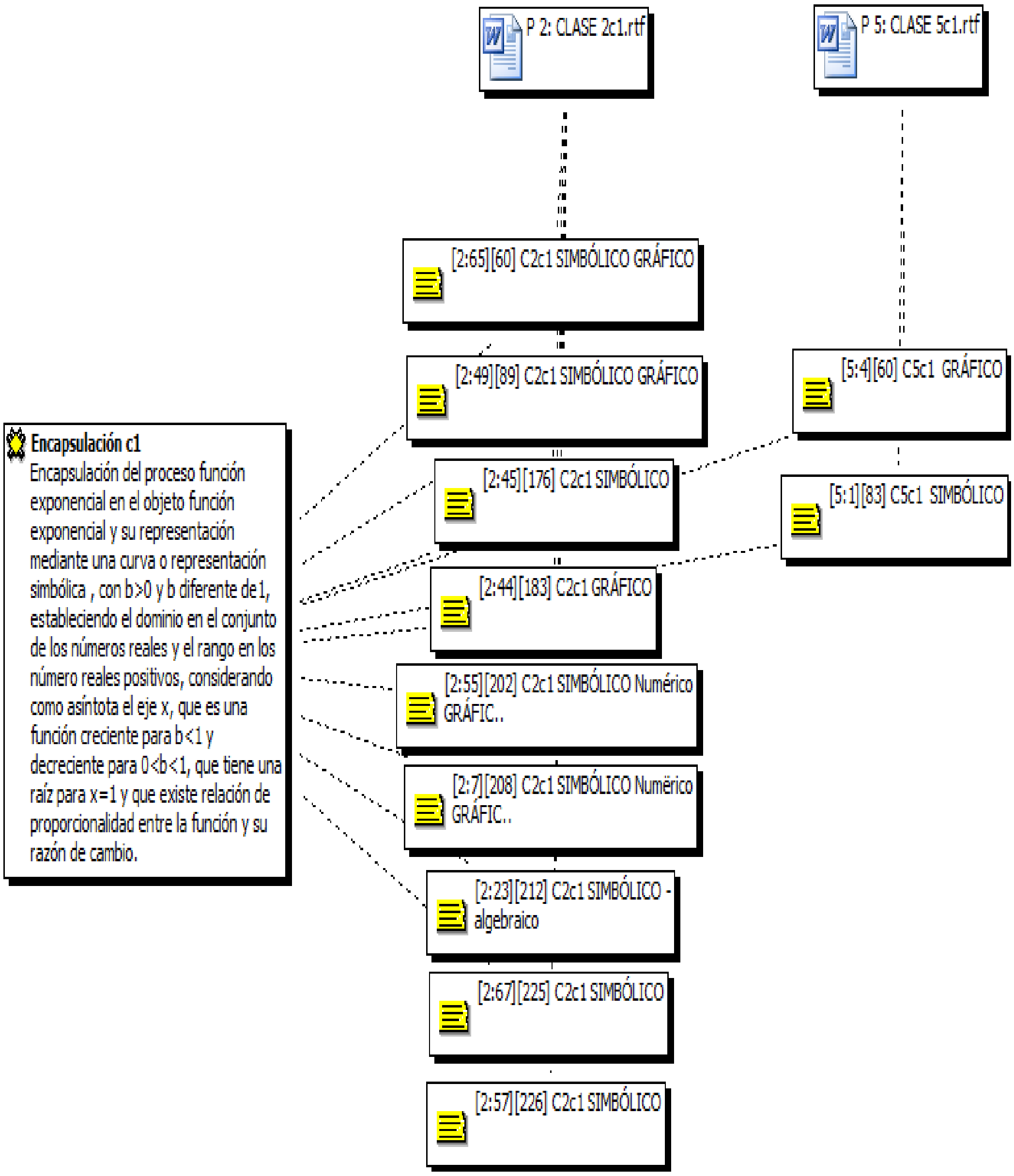


Imagen 3.11. Clases, segmentos y secuencia. Modelación del mecanismo de construcción de encapsulación c1.

El informe de las observaciones, análisis e inferencias sobre el conjunto de datos, se concreta mediante una organización, que ya ha sido utilizada por otros investigadores (Gavilán, *et al.* 2007a, 2007b) bajo la denominación de viñeta. Encontramos en la viñeta, el medio para organizar esa información y poder entrelazar, en un mismo documento las evidencias y el análisis de datos que permiten, al investigador, esbozar la modelación de cada mecanismo de construcción identificado en la práctica. Se presentan a continuación algunos de los aspectos que constituyen la viñeta.

- En la viñeta se incluyen fragmentos informativos que ubican tanto al investigador como al lector, acerca del origen de las evidencias que se utilizarán. Dicha información comprende la ubicación de las evidencias, dentro de cada una de las clases, dentro de un segmento de clase o entrevista, los argumentos y análisis que lleva a incluir el segmento como rastro de la intención del profesor de propiciar un mecanismo de construcción.

- En la viñeta se establece la tarea o tareas que el profesor propone a los estudiantes en su secuencia de enseñanza.

- Las viñetas, en su organización, presentan subtítulos que se trataron de unificar para ambos casos, a partir de los descriptores de los mecanismos de construcción. Es importante destacar que para el caso dos, en muchos de estos subtítulos, no se encontraron evidencias de modelización de esos mecanismos.

- Se establece una ilación de los aspectos mencionados anteriormente, en donde se detalla cómo usa el profesor los instrumentos de la práctica; definidos los instrumentos como los elementos del concepto y los registros de representación.

La forma cómo el investigador da cuenta de la práctica se encuentra plasmada en la viñeta por lo que su diseño se considera central en esta investigación dado que permitirá establecer y mostrar la modelación de mecanismos de construcción en la práctica de cada docente.

El procedimiento utilizado en esta investigación para el diseño de las viñetas tuvo en cuenta diferentes aspectos entre los cuales cabe destacar:

- Se consultó sucesivas veces la Unidad Hermenéutica (UH), para establecer, relaciones, agrupaciones y filtros, entre otros. Por ejemplo, accediendo a una lista de los segmentos que corresponden a cada mecanismo de construcción se obtiene el conjunto de clases asociadas a un mismo mecanismo y con esa información se organiza la parte inicial de las viñetas. Así, en la sección 3.1.1. se dice: *El mecanismo de interiorización se modela en diferentes clases y mediante diferentes tareas, concretamente en las clases 1, 2, 3 y 5.*

- De manera similar, se consideraron las tareas propuestas por el profesor. Para ello el investigador, conociendo los elementos que componen los descriptores de los mecanismos, en la UH filtra solamente los segmentos que corresponden a cada descriptor y examina el conjunto, identificando así las tareas propuestas.

- Con el análisis descrito en el párrafo anterior, se procede a elaborar inicialmente un breve resumen de las tareas, como por ejemplo: *“En la sesión de clase 1 dicho mecanismo se modela mediante dos tareas una relativa al cálculo del interés compuesto y otra relacionada con los dobleces de una hoja. En ambas tareas el profesor pretende que los estudiantes interioricen en un proceso, cuando se realizan iteraciones correspondientes a elevar una base fija mientras se varía el exponente. Inicialmente se trabaja en el registro aritmético realizando acciones de cálculo para construir la fórmula de la función exponencial considerando primero exponentes naturales, luego números fraccionarios y finalmente números enteros negativos”*. Posteriormente, en el cuerpo de la viñeta se desarrolla la presentación de dicha ilación correspondiente a la secuencia de la tarea.

- Para la presentación de la tarea, recurriendo a la cronología de los segmentos en la UH se obtiene el orden-secuencia de los elementos matemáticos que usa el profesor y el orden-secuencia en que se presentan los segmentos en donde se propicia cada mecanismo de construcción. En nuestro caso, esta información es un eje en el análisis y descripción de la modelación de la descomposición genética.

- El orden de los segmentos queda automáticamente explícito mediante *citas*, que por defecto establecen la línea de la clase en qué se inició cada segmento y la línea de la clase en que finaliza. Así, se puede tener un mapa global de todos los segmentos que han sido clasificados bajo un descriptor específico. Estos segmentos son la huella de los diferentes momentos de las clases en que fueron desarrolladas tareas alrededor del mecanismo en cuestión y que más exactamente están vinculadas con el elemento matemático que está implícito en el descriptor. Por ejemplo, en la imagen 3.12, se han obtenido todos los segmentos asociados al descriptor, cuyo código asignado fue **Iea**.

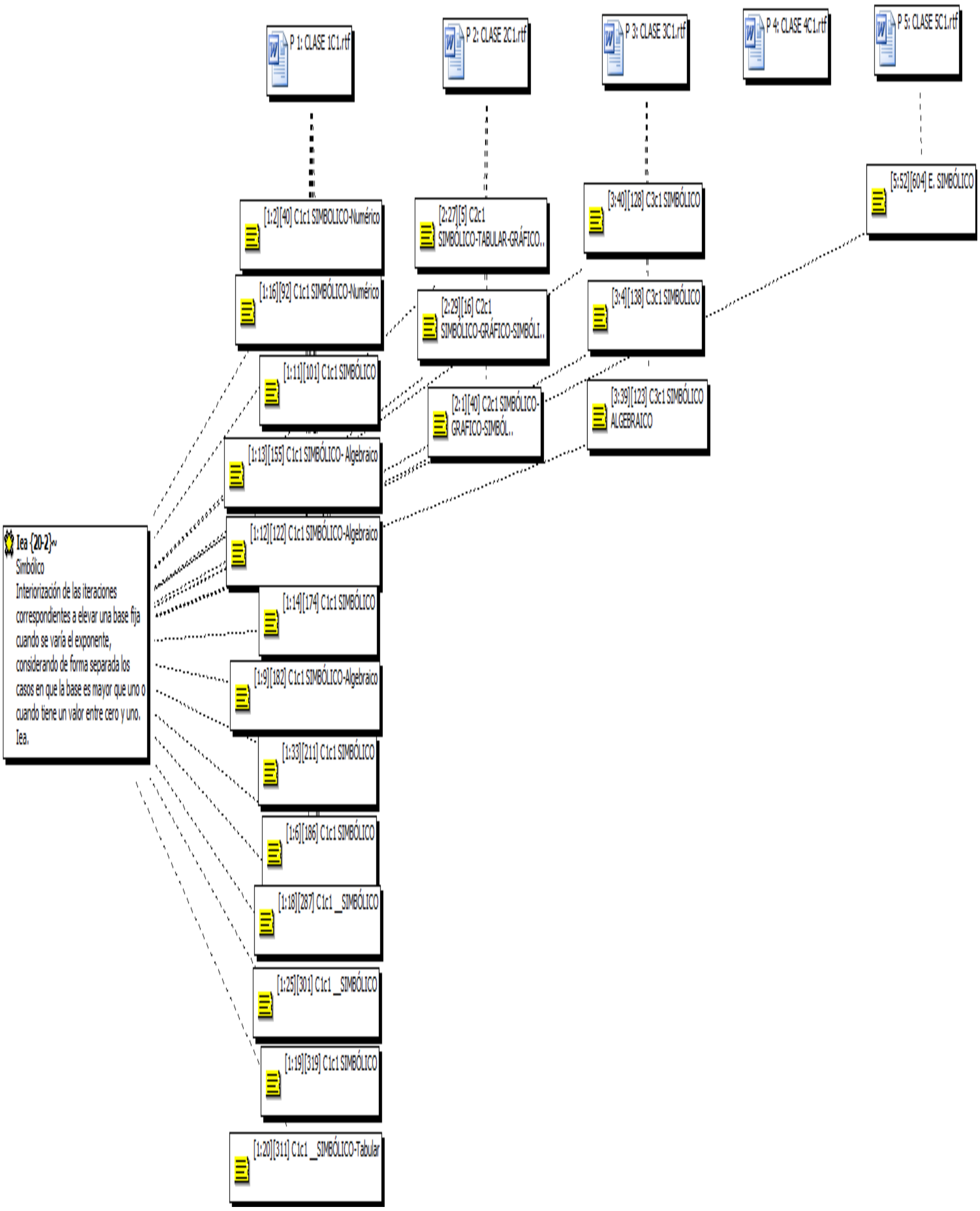


Imagen 3.12 Red de segmentos correspondientes a la interiorización de iteraciones, **Iea**. Caso1.

Al final de cada viñeta se presentan, a manera de síntesis, las redes de conexión entre segmentos (Imagen 3.12) que corresponden a cada clase. Estas redes permiten examinar el orden de los segmentos y pueden reagruparse para facilitar el análisis del investigador; ya sea por descriptores, por clase o por líneas. En el ejemplo anterior, se presenta la secuencia de los segmentos correspondientes al mecanismo de construcción de la interiorización, concretamente al descriptor **a** del mecanismo de interiorización, Iea, así como los registros de representación usados.

2.3.2.3. Modelación de la Descomposición genética de la función exponencial.

El informe de la modelación de la descomposición genética de la función exponencial se traduce en la integración de los análisis anteriores en cuanto a la modelación de cada mecanismo. Se aborda la forma en que el profesor potencia la construcción de la función exponencial y su independencia o no de los modos de representación, junto a las relaciones que establece con los elementos matemáticos del concepto.

A partir de los análisis correspondientes a la modelación de cada uno de los mecanismos, los investigadores proceden a establece la relación orden-secuencia tanto entre los elementos matemáticos del concepto como entre mecanismos de construcción. Finalmente, en esta fase los investigadores integran los resultados establecidos y se presenta la síntesis de estas modelaciones de la descomposición genética de la función exponencial, a través de dos diagramas. Cada uno de ellos, hace referencia al orden en que se modelan los mecanismos y las relaciones que se establecen entre ellos.

2.3.3. Análisis de tercer orden. Perspectiva de la práctica

Las reconstrucciones y análisis de las acciones del profesor, que se han llevado a término, nos deben permitir integrar los hallazgos en cuanto a la modelación de cada mecanismo e inferir algunas concepciones que sostienen los profesores y, que emergen en la programación y gestión de sus clases. En particular, siguiendo la propuesta de Gavilán (2005) concerniente al procedimiento para examinar la perspectiva de la práctica de los docentes que subyace a la modelación de la descomposición genética de un concepto y con las síntesis elaboradas se extrae la información que permita mostrar:

> - *«Cómo concibe el profesor el desarrollo de la comprensión: concepción sobre el aprendizaje de los conceptos observada a través de los mecanismos de construcción del conocimiento que potencia en el aula, su secuencia y relaciones y su justificación.*
>
> - *Su visión de las matemáticas: concepción de las matemáticas como objeto de enseñanza y aprendizaje extraída a partir de la forma cómo organiza el contenido matemático para enseñarlo»*. (*Gavilán, 2005, p. 227)*

Se pretende utilizar todos los hallazgos que sistemáticamente se han establecido en los procedimientos de análisis previos apoyando las inferencias obtenidas en las investigaciones similares realizadas por otros autores para sustentar el análisis actual. Para ello se recurre de nuevo a:

- Los resultados de investigación sobre concepciones y creencias de los profesores acerca del aprendizaje y enseñanza de las matemáticas y los modelos de enseñanza de las matemáticas reseñados en Thompson, (1992).
- La secuencia y los objetivos explicitados por el profesor para las tareas propuestas.
- La entrevista contextual y las entrevistas posteriores a las clases.
- Las viñetas de modelación de los mecanismos.
- Algunas características del discurso del profesor.
- La manera en que el profesor gestiona la participación de los estudiantes cuando intentan resolver un problema.

Ilustramos a través de algunos ejemplos como son usados los aspectos enunciados en el párrafo anterior:

- Se toma como punto de partida la modelación de la descomposición genética de la función exponencial, la cual brinda argumentos de la secuencia que el profesor fomenta a partir de las tareas propuestas.
- Se examinan las tareas, identificando aspectos sobre los cuales el profesor las programa y gestiona. Por ejemplo, el uso de tareas contextualizadas y/o el apoyo en la estructura matemática. En el desarrollo de las actividades se establece si la atención está focalizada hacia conversaciones que favorezcan la comprensión de los estudiantes o al discurso expositivo del profesor, entre otros.
- Se integran en el discurso las manifestaciones de los profesores, en las entrevistas, en las que expresan sus objetivos frente a la enseñanza del precálculo, o su idea acerca del papel de los estudiantes en el aula, sus procesos de aprendizaje, entre otros.
- A partir de las viñetas como una totalidad, se fueron entresacando evidencias que soportaran las inferencias que se establecen; por ejemplo, la manera en que el profesor gestiona la participación de los estudiantes.
- Se identificaron resultados de investigaciones previas sobre concepciones y creencias de los profesores que son usadas para caracterizar algunos de los hallazgos e inferencias que subyacen a las acciones de los dos profesores de los estudios de caso que nos conciernen.

La perspectiva de la práctica de cada profesor, es un entrelazado que surge una vez se han descrito las construcciones progresivas horizontal y vertical (Gavilán, 2007), que se develan en las modelaciones de los mecanismos de construcción e integrando en esta descripción: las inferencias del investigador acerca de las tareas propuestas por los profesores, del rol tanto de los estudiantes como del profesor en el aula de clase y sus explicaciones (objetivos, intereses, reflexiones) en las entrevistas.

En este análisis se procede desde la modelación de la descomposición genética en el que está inmerso el uso de los registros simbólico y gráfico, las relaciones entre los elementos matemáticos puntuales y globales del concepto y las formas de conocer que fueron potenciadas por el profesor. A partir de ahí y, a través de las inferencias determinadas por el investigador en las viñetas, se establece la presencia de una construcción progresiva, ya sea esta horizontal o vertical. Se identifica una construcción progresiva horizontal; acciones, interiorización, encapsulación y tematización, indicando con esto que la modelación de la descomposición genética parte de la modelación de acciones, prosigue con interiorización... y sigue el orden prescrito en el modelo APOS, referido al desarrollo del concepto.

Por otra parte, al identificar la función exponencial conformada por ciertos elementos matemáticos, esta construcción se denomina progresiva “vertical” cuando un concepto se construye a partir de otro; hace referencia a relaciones entre distintos elementos matemáticos puntales.

Del análisis anterior se desprende tanto la descripción como los resultados que se concretan en la perspectiva de la práctica de cada uno de los docentes y se presenta en el capítulo 3.

CAPÍTULO 3: Resultados

En este capítulo se detallan los resultados obtenidos de los dos profesores estudiados en dos apartados diferenciados para cada uno de los casos. Se presenta la modelación de la descomposición genética de las funciones exponenciales (en términos de mecanismos de construcción de las formas de conocer y su secuencia-relaciones) sustentada en las descripciones pormenorizadas de la modelación de cada uno de los mecanismos de construcción de la función exponencial a través de viñetas. Al finalizar cada caso se caracteriza la perspectiva de la práctica del docente, es decir, lo que subyace a su práctica.

3.1. MODELACIÓN DE LA DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL. CASO 1

Se presenta la modelación de la descomposición genética en términos de cada mecanismo y de su secuencia–relación que incluyen los elementos del concepto y los registros de representación utilizados por el profesor. Esto se concreta en tres viñetas, en cada una de las cuáles se identifican las clases a las que corresponde ese mecanismo, las tareas que se han desarrollado en estas clases, así como la forma en que esas tareas son propuestas por el profesor y desarrolladas en el aula. Al mismo tiempo se van describiendo las inferencias del investigador y las intenciones que el profesor explicitó en cada una de las entrevistas posteriores a las clases.

Las tres viñetas describen la modelación del mecanismo de interiorización, la modelación del mecanismo de encapsulación y la modelización del mecanismo de tematización. En este caso la relación entre un mecanismo y otro corresponde tanto a la propuesta desde la teoría APOS como al orden en el cual Ernesto propicia estos mecanismos de construcción con la intención de generar la comprensión de conceptos en sus estudiantes.

Cada una de las tres viñetas se subdivide de acuerdo con los descriptores establecidos en los referentes teóricos (sección 1.4) teniendo en cuenta los registros de representación, cuando la tarea y la modelación del mecanismo por parte del profesor lo hacen necesario. Al final de la exposición de la modelación de cada mecanismo se presenta una síntesis a través de un esquema general junto con su descripción.

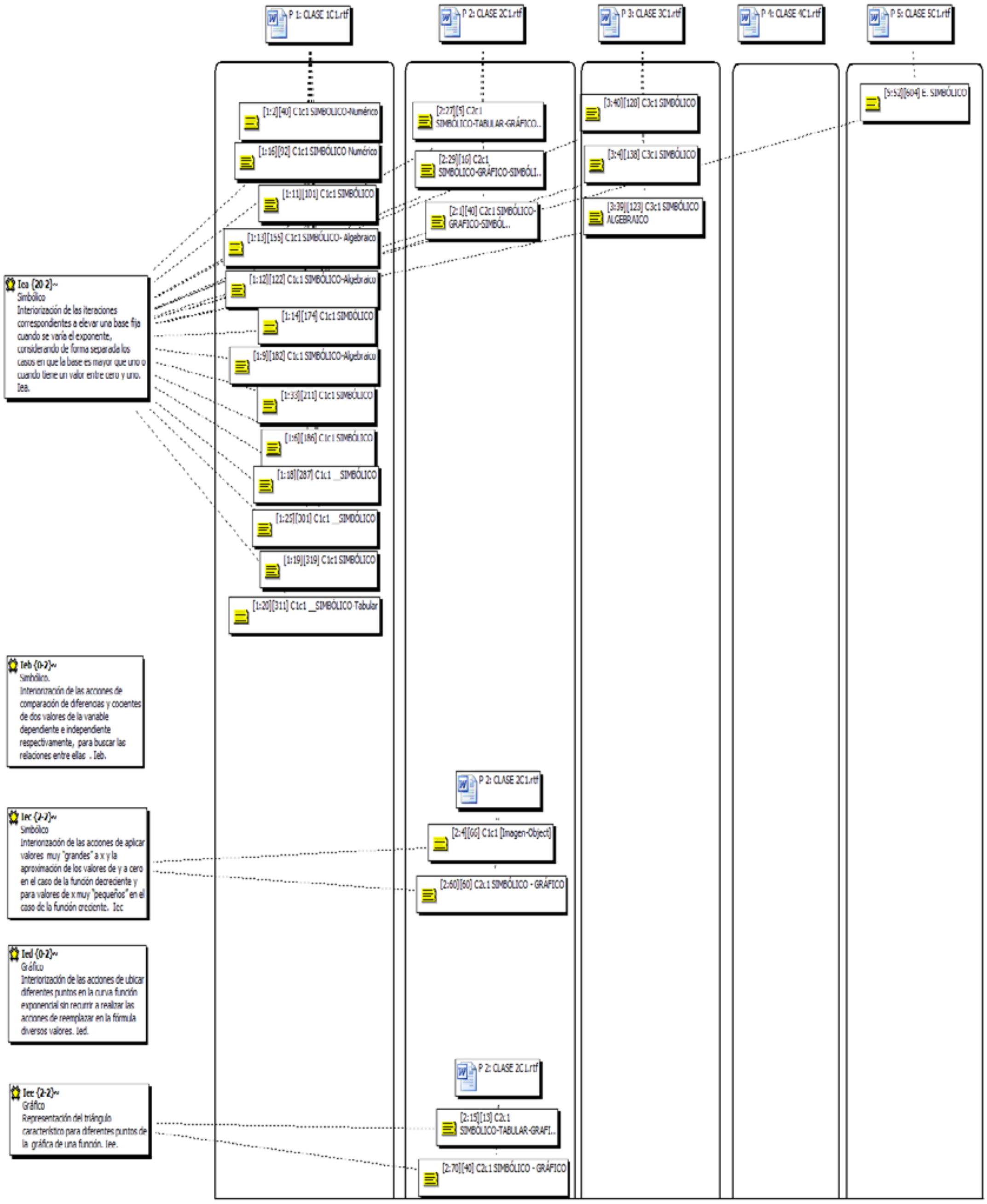
3.1.1. Viñeta Uno. Modelación del mecanismo de interiorización en la función exponencial

El mecanismo de interiorización de los diferentes elementos matemáticos se modela en las clases 1, 2, 3 y 5 y mediante diferentes tareas (esquema 1).

En la clase 1 el mecanismo de interiorización se modela mediante dos tareas relativas al cálculo del interés compuesto y otra relacionada con los dobleces de una hoja. En ambas tareas el profesor pretende que los estudiantes *interioricen las formas de conocer como acciones de los elementos matemáticos puntuales (ejemplos específicos de funciones exponenciales) en un proceso cuando se realizan iteraciones correspondientes a elevar una base fija mientras se varía el exponente.* Inicialmente se trabaja en el registro aritmético realizando acciones de cálculo para construir la fórmula de la función exponencial considerando primero exponentes naturales, luego números fraccionarios y finalmente números enteros negativos.

Además, a través de la manera en la que tarea es presentada por el profesor se modela la *interiorización de las acciones de comparación de diferencias y cocientes de dos valores de la variable independiente y dependiente respectivamente* pasando del caso en el que el exponente es cierto número natural al siguiente y asumiendo implícitamente que la razón entre los dos valores consecutivos de la variable dependiente es siempre la misma, lo que determina una progresión geométrica que permite factorizar para obtener la fórmula adecuada al interés compuesto.

En la clase 5 también se modela el mecanismo *de interiorización de acciones en un proceso cuando se realizan iteraciones* correspondientes a una tarea que demanda la escritura de una función base 2 multiplicada por la constante 100.

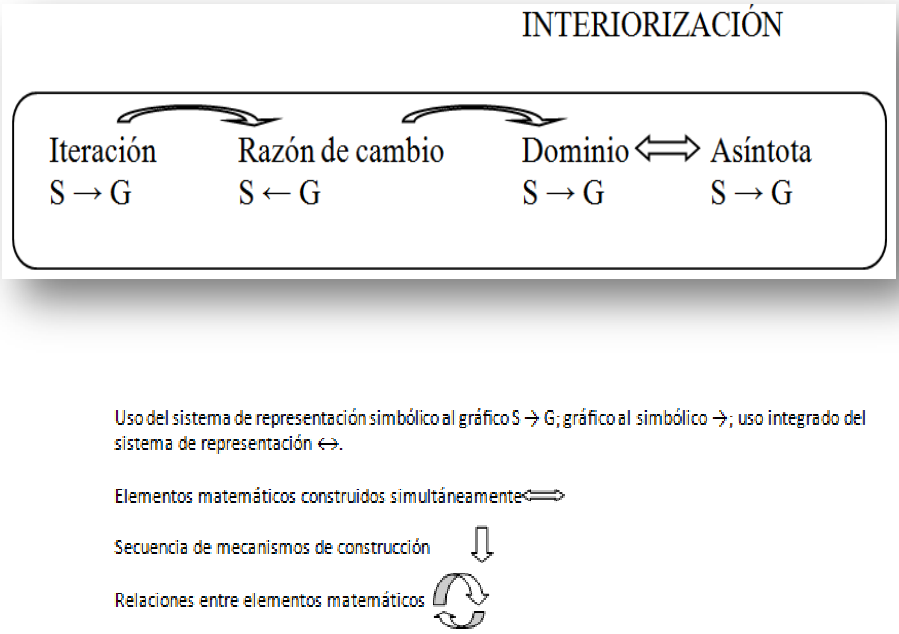


Esquema 1. Segmentos en las clases: mecanismo de interiorización en la función exponencial. Caso de Ernesto.

En la clase 2, la interiorización se realiza en el registro gráfico interpretando el tipo de crecimiento de la función exponencial a través de frases con implicaciones a los cambios en la variable independiente de una unidad y la forma "rápida" en que afecta este cambio a la variable dependiente, sin que explícitamente se realice en los gráficos *el triángulo característico.* Se trabaja la gráfica de la función $y = 2^x$ para modelar el mecanismo de *interiorización de las acciones de ubicar diferentes puntos para trazar la curva de la función exponencial*. Para ello se representan en el plano cartesiano los puntos de la función correspondientes a abscisas naturales y luego se generaliza con abscisas negativas y racionales. En esta clase también se examina la forma de la curva de la función $y = 2^x$ cuando se acerca al eje x sin cortarlo. Esta forma de proceder es una evidencia de la manera en la que Ernesto intenta modelar el mecanismo de *interiorización de las acciones de aplicar valores muy "grandes" a x y la aproximación de los valores de y a cero en el caso de la función decreciente y para valores de x muy "pequeños" en el caso de la función creciente.* Con estos ejemplos específicos Ernesto intenta que sus alumnos puedan pensar en el comportamiento de funciones exponenciales particulares pero sin tener que realizar los cálculos para puntos concretos.

En la clase 3 se construye la función e^x considerando para ello una situación de interés continuo con la que se pasa del registro algebraico al analítico mediante un procedimiento de paso al límite.

El profesor favorece el mecanismo de interiorización de las acciones en proceso recurriendo a procesos inductivos.



Síntesis A. Modelación del mecanismo de interiorización caso1.

El diagrama anterior esquematiza las relaciones establecidas entre elementos del concepto, identificadas por el investigador, en la modelación del mecanismo de interiorización. La iteración es el punto de partida para la reflexión que el profesor propicia con sus alumnos sobre la razón de cambio y el dominio de la función. El estudio del dominio de la función permite la observación guiada hacia la identificación de la asíntota. Estos elementos matemáticos puntuales son estudiados haciendo uso del registro simbólico y luego del gráfico, a excepción de la razón de cambio en donde se parte del uso del registro gráfico para llegar al simbólico. A continuación se describe la concreción del mecanismo de interiorización en cada una de esas clases y tareas.

3.1.1.1. Iteración. - Construcción de la función exponencial – interés compuesto.

La construcción de una función exponencial (interés compuesto) se inicia mediante un modelo numérico a partir del que se establece la fórmula de la función correspondiente. Ernesto modela el mecanismo de interiorización mediante ciertas acciones que denotan regularidades; acciones que se repiten cierto número de veces en un procedimiento de cálculo del interés compuesto consiguiendo, finalmente, la representación de esa repetición de factores por medio de un exponente.

En la clase 1, el profesor plantea una tarea relativa al cálculo del capital a un cierto interés durante un determinado periodo de tiempo. Dicha actividad se inicia suponiendo un interés simple para, posteriormente, estudiar el interés compuesto. El profesor dirige la tarea a través de diversos interrogantes que se van sucediendo en varios momentos de la clase. En ellos, se plantea el cálculo del capital si el interés es anual en años sucesivos para, posteriormente, pasar a considerar diferentes tipos de interés: semestral, mensual, diario,...

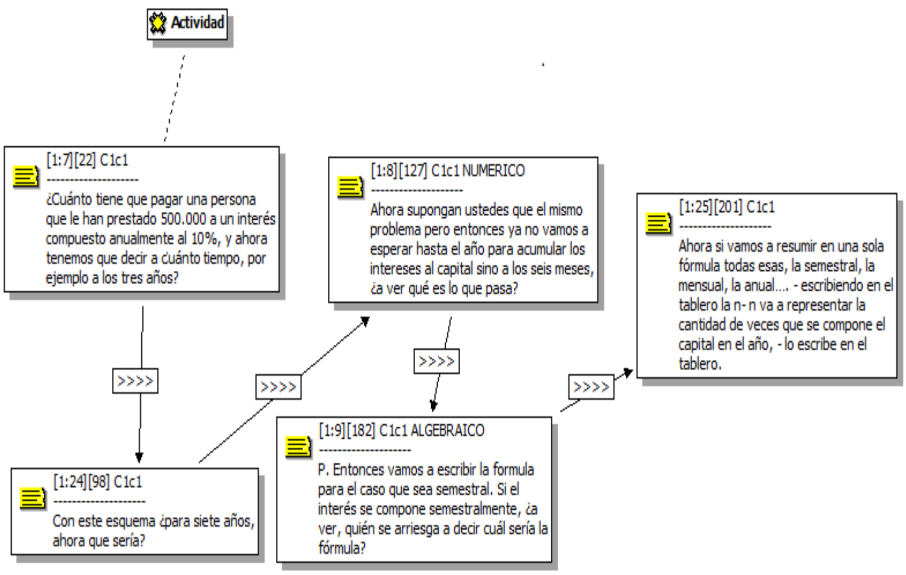


Diagrama 3.1. Interrogantes en la tarea de interés compuesto.

En el diagrama 3.1 se muestran los segmentos de la clase en los que Ernesto presenta la tarea de calcular un interés compuesto anual y, a medida que los estudiantes van solucionándola, va planteando nuevos interrogantes. Estos interrogantes sobre el capital que se obtiene al cabo de 1 año, 2 años,… permite pasar de cálculos numéricos puntuales a ciertos patrones para obtener una generalización con la que poder expresar el capital en función de los años mediante una fórmula con un exponente y, finalmente, considerar otras situaciones en las que el interés no es anual, sino semestral o mensual. Inicialmente, se realizan solamente operaciones numéricas básicas que constituyen acciones que se repiten para llegar a interiorizar la regularidad de esas acciones e interiorizarlas en un proceso.

La tarea inicialmente es poner un capital a una tasa de interés fija, anualmente o semestralmente. Las acciones consisten en tomar el capital y sumarle el interés y sobre el nuevo resultado volver a sumar el nuevo interés. A partir de ese momento, Ernesto invita a los estudiantes a buscar un patrón que les permita reducir cálculos. Mediante la observación de las relaciones y la repetición de una serie de pasos, cierto número de veces, se podrá establecer la expresión algebraica adecuada a la situación planteada.

En el siguiente extracto, correspondiente al inicio de la sesión de aula, se desarrolla el cálculo numérico del capital obtenido si el capital inicial son 500.000 pesos y el interés es de un 10% anual después de 3 años.

[1][40:51] SIMBÓLICO - Numérico

E. Ahora se suma el 550.000 con los 55.000 y da 605.000

P. En qué año vamos ya ahí.

E. En el segundo.

P. - Señala en lo escrito primer año y segundo. -

500.000+50.000 =550.000. Primer año

550.000 +55.000 =605.000. Segundo año.

E. Después se coloca 605.000 y se le busca el diez por ciento.

P. y ahora

E. Lo sumo

P. -Escribiendo en el tablero - 605.000+60.500= ¿eso da cuánto?

E. 665.500

P. 605.000+60.500= 665.000 tercer año.

Claro para siete años seria, muy largo. Entonces toca buscar procesos más cortos porque hay personas que tienen que hacer esas cuentas con frecuencia. Afortunadamente hay formas de reducir esto para hacer los cálculos mucho más rápido.

Entonces la pregunta es, ¿no habrá una forma de remplazar esto en una formulita?, ¿de hacer unas operaciones rápido?

Entonces vamos a mirar cómo conseguirla. Ustedes me van a ayudar.

Durante esta secuencia el profesor guía a los estudiantes mediante la reflexión sobre los pasos realizados para traducir los cálculos numéricos a expresiones en las que se utilicen literales para representar el capital inicial, el interés y la tasa de interés; esta situación permite empezar a visualizar un factor común que ligue un paso con el siguiente. En el siguiente extracto (Diagrama 3.2) se puede observar la traducción en el caso de interés anual.

En este sentido, el paso de la aritmética a las expresiones algebraicas puede ser entendido como el medio que utiliza el profesor para desarrollar la interiorización de la idea de función exponencial*; interiorización de las acciones en un proceso correspondiente a las iteraciones de elevar una base fija variando el exponente* (correspondiente a años sucesivos), en el caso del interés compuesto anual.

[1:2][43:51]

P. - Señala en lo escrito primer año y segundo. -
500.000+50.000 =550.000. Primer año
550.000 +55.000 =605.000. Segundo año.
E. Después se coloca 605.000 y se le busca el diez por ciento.
P. y ahora
E. Lo sumo
P. -Escribiendo en el tablero - 605.000+60.500= ¿eso da cuánto?
E. 665.500
P. 605.000+60.500= 665.000 tercer año.

[1:49][101:106]

$2 \longrightarrow P(1+r)+rP(1+r)=(1+r)P(1+r)=P(1+r)^2$

$3 \longrightarrow$ .... $= P(1+r)^3$

.

.

.

$7 \longrightarrow$ .... $= P(1+r)^7$

$t \longrightarrow$ .... $=$

[1:8][122:123]

P. - a medida que el estudiante dicta, el profesor escribe en el tablero - $A(t)=P(1+r)^t$

.

.

P. Para calcular el monto final cuando el interés se compone anualmente.

Diagrama 3.2. Uso de los exponentes para identificar el paso del contexto aritmético al contexto algebraico.

Lo mismo se hace para otros periodos de tiempo distintos de los anuales, como semestrales, trimestrales, mensuales,… Así, en un segundo procedimiento, correspondiente al caso semestral, el profesor conduce a los estudiantes a la identificación del factor común correspondiente.

[1][155:160] SIMBÓLICO ALGEBRAICO

P. ¿Y de nuevo, cómo organizamos las cosas?, recordemos que esta es la P, esta es la r pero ahora la divido por dos, ¿cuando yo factorice, qué me queda? Queda P

Semestre

$$1 \longrightarrow \quad \begin{array}{ccc} P & +\frac{r.P}{2} & = \\ 500.000 & +\frac{0.10}{2} & .500.000 \end{array}$$

E. Uno más ere sobre dos.

P. – Termina de escribir en el tablero- $P+\frac{rP}{2}=P(1+\frac{r}{2})$*, eso si me da lo que tengo acá.*

Inmerso en el mecanismo de interiorización es de resaltar el camino ([1][155:160]) que el profesor desarrolla para pasar de las expresiones aritméticas a las algebraicas como una manera de modelizar la interiorización de las acciones realizadas para el cálculo del interés compuesto cuando es del 10% semestral.

La secuencia de la clase comienza mediante la consideración de un factor común que al repetir la acción (para el siguiente semestre) se convierte en un factor de factor, lo cual es representado mediante un exponente. Esta manera de proceder le permite al profesor modelar la interiorización de las operaciones aritméticas realizadas, intentando mostrar lo común en cada reiteración.

[1][164:179] SIMBÓLICO - Numérico, algebraico -

P. -Escribe en el tablero.

Semestre $P+\frac{rP}{2}=P(1+\frac{r}{2})$

1 $\longrightarrow$ $500.000+\frac{0.10}{2}\,.\,500.000$

2 $\longrightarrow$ $525.000+\frac{0.10\,.\,525.000}{2}=$

Y de nuevo haciendo cuentas, eso me daría cierto valor. Lo que vamos a ir mirando es como se transformaría esta expresión - muestra en el tablero - $P+\frac{rP}{2}=P(1+\frac{r}{2})$*. Partimos de que se traía* $P+\frac{rP}{2}$ *la tasa de interés por lo que había antes es decir 525.000 que es* $P+\frac{rP}{2}$ *sobre dos. De nuevo ¿factor común es?*

E. P por uno más ere sobre dos.

P. Eso que multiplica a

E. uno más ere sobre dos

P. - Tiene escrito en el tablero - $P\left(1+\frac{r}{2}\right)+\frac{rP\left(1+\frac{r}{2}\right)}{2}=P\left(1+\frac{r}{2}\right)\left(1+\frac{r}{2}\right)$ *. Y esta parte ¿se puede escribir de qué manera?*

E. P que multiplica a uno más ere sobre dos al cuadrado.

P. - Escribe en el tablero - $P\left(1+\frac{r}{2}\right)^2$*. Y apenas vamos en el segundo semestre, pero ya uno de allí, en el tercer semestre ya una persona me podría decir cuánto sería para el tercer semestre, sin hacer todas estas cosas. A ver Nelson, cuál cree.*

E. P por uno más ere sobre dos a la tres.

P. -Va escribiendo - $P\left(1+\frac{r}{2}\right)^3$*. Y así continuamos hasta cuantos semestres.*

E. Seis

P. Entonces a los seis semestres - va diciendo y escribiendo - $P\left(1+\frac{r}{2}\right)^6$*. ¿Qué pasó Adriana?*

E. Es que ella me está diciendo que si fueran trimestres tendríamos que dividir por 4.

P. Muy bien, eso lo vamos a ver ahora. Si fueran trimestres se dividiría por 4. Muy bien. Con… hagamos las cuentas a ver cuánto nos daría - con el ejercicio semestral -

En el diálogo anterior [1][164:179] y en [1][182] (diagrama 1) Ernesto realiza preguntas a sus estudiantes para ayudarles a reflexionar sobre las acciones que permiten generar la fórmula del interés compuesto. En esta secuencia, se muestra cómo el profesor intenta, a través del discurso y de la interacción con sus estudiantes, la interiorización de las acciones realizadas en el registro aritmético en un proceso cuando dice: *vamos en el segundo semestre, pero ya uno de allí, en el tercer semestre ya una persona me podría decir cuánto sería para el tercer*. De hecho una de las estudiantes logra realizar esa interiorización y consigue formular la expresión correspondiente a los sucesivos semestres.

En definitiva, Ernesto presenta en la clase 1 una tarea correspondiente a la función para el cálculo del capital final cuya variable independiente *t* (inicialmente discreta) va variando como una progresión aritmética de diferencia 1, mientras el capital final varía de acuerdo con una progresión geométrica, cuya razón es $(1+r)$ en el caso de interés anual y $\left(1+\frac{r}{n}\right)$ en el caso general. Es de anotar que estas formas de comportamiento en cuanto a progresión aritmética y progresión geométrica no se hacen explícitas dentro de la presentación que el profesor realiza en la clase, él solamente va variando el valor de la t y examinando la expresión correspondiente que se obtiene del capital final.

[1:25] [164:166]

Semestre

$$1 \longrightarrow 500.000+\frac{0.10}{2}\,.\,500.000$$

$$2 \longrightarrow 525.000+\frac{0.10\,.\,525.000}{2}=$$

[1:11][186:193]

P. Cada año tiene dos semestres, entonces t por dos. - Escribe en el tablero -

$$A(t)=P\left(1+\frac{r}{2}\right)^{2t}$$

E. Entonces si es trimestral vamos a
P. Miremos, si el interés se compone trimestralmente, ¿cuál sería la fórmula?
E. P por uno más
P. Trimestral, pregúntate cuantos trimestres.
E. Cuatro. Más r sobre cuatro, elevado a la cuatro t.

P. - Escribe - Si el interés se compone trimestralmente $A(t)=P\left(1+\frac{r}{4}\right)^{4t}$

[1:13][211]

P. Muy bien. -el profesor ha ido escribiendo en el tablero- $A(t)=P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$
Entonces ya con esa fórmula uno lo puede calcular a cualquier cosa.

Diagrama 3.3. Uso de los exponentes para identificar el paso de aritmético a lo algebraico en un caso particular y finalmente realizar una generalización.

Este planteamiento del profesor de apoyarse en casos particulares (realización de operaciones aritméticas para procedimientos específicos) para ayudar a los estudiantes a que identifiquen la secuencia (Diagrama 3.3) viene sustentado por las justificaciones que expresa en la primera entrevista [16][69], en donde explica por qué presenta estas preguntas en su clase (Diagrama 3.4). Se puede observar que el profesor está modelando la interiorización de dichas acciones en procesos, así:

El profesor no deja que sus estudiantes realicen la actividad por la actividad sino que muestra en esta clase una forma de inducir al estudiante a observar y conjeturar tanto en el interés anual como en el semestral o el trimestral. Así se expresa en el segmento de la entrevista [16][69]. Cuando él pregunta: *¿Y ustedes qué sospechan, qué pasará ahí?,* esta pregunta es planteada porque él intenta promover "*que ellos vayan viendo que se está generando ahí una cosa, que se está generando algo, que hay una regularidad ahí que yo espero que la estén viendo*" [16][69]

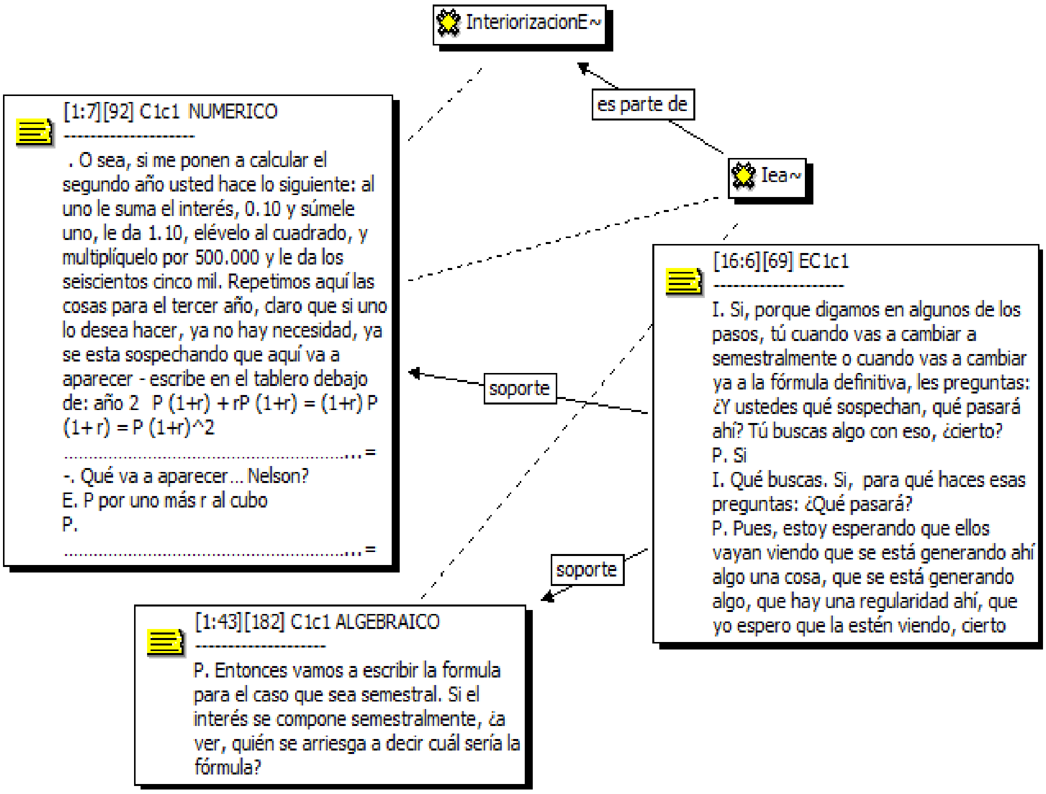


Diagrama 3.4. Reflexión sobre el uso de los exponentes para identificar el paso de lo particular (contexto aritmético) a lo general (contexto algebraico) en un segmento de entrevista.

Esta forma de proceder la justifica el profesor durante la primera entrevista [16][83:87] y [16][32:41] para señalar por qué plantea momentos como la línea [182] del diagrama 1:

> *[16][83:87]*
>
> *P. Tendríamos que mirarlo. Sí, porque es que yo siento, me da pesar pero este proceso, siento como que se siembra algo ahí, pero no sé en qué momento uno cómo que lo aprovecha a fondo.*
>
> *I. ¿Qué crees que se siembra?*
>
> *P. Pues que se siembra el hecho de que en esta función, hay una cosa ahí que se está iterando y que, de alguna manera, en el modelo matemático se refleja allá en el exponente.*
>
> *[16] [32:41]*
>
> *I. ¿Qué es lo esencial?*

P. Para mí lo esencial está es en que ya empezaron ellos a hacer un proceso de recursión ahí, de que esto se acumula a esto y esto se acumula esto y allá arriba empieza a aparecer algo que da cuenta de eso, y es el exponente.

La idea de iteración de las acciones se convierte en el medio usado por el profesor para que sus estudiantes interioricen este caso particular de la función exponencial. Esta idea de iteración se encuentra incluida dentro de la descomposición genética que se presenta en el marco teórico así: *Interiorización de las acciones en un proceso cuando se realizan iteraciones correspondientes a elevar una base fija cuando se varía el exponente, considerando los casos en que la base es mayor que uno o cuando tiene un valor entre cero y uno.*

3.1.1.2. El interés compuesto continúo.

En la clase 1, Ernesto deja pendientes los ejercicios que hacen mención al interés compuesto continuo así:

[1] [216:217]

P. Tomen nota de la página, uno sencillito, por ejemplo, página 301, el 9 y el 11. Hagamos lo siguiente, por ahora el 11. Comiencen.

E. Profe ¿por qué este continuo?

P. Hay una palabra ahí que es continuo, después vamos a ver qué es, dejémosla pendiente.

En la clase 3, Ernesto retoma el interés compuesto y la palabra continuo que dejó pendiente en la primera clase y plantea una tarea a los estudiantes correspondiente a un caso particular cuando el capital inicial es 1 y la tasa de interés compuesto es del cien por ciento durante un año, comentando sus intenciones al retomar esta idea en la entrevista [18][9] posterior a esta clase 3:

[18][9]

P. Bueno, pues el objetivo era que una vez establecida la fórmula para el interés compuesto, hacer las consideraciones para n muy grande y mostrarles que a pesar de que crecía, eso no crecía sin medida, eso tenía un tope y eso se iba aproximando a cierto valor, e, quería era que la idea esa de interés compuesto continuo, pues quedara clara y que estaba atada al objetivo general del capítulo que era mirar funciones exponenciales, ahí de nuevo aparece la variable del exponente y, la base es un número para ellos, es novedoso, digamos nuevo.

Ernesto se centra en la tarea propuesta y plantea preguntas o como en este caso ejercicios [1][216:217] que posiblemente los estudiantes aún no puedan responder. El profesor, lo hace de forma intencionada aunque les anuncia que este será un asunto “pendiente” que podrán analizar y utilizar más adelante con los conceptos que estudiaran en otra clase. Esto constituye un indicio de que el profesor establece vínculos entre diferentes tareas y elementos matemáticos durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

En la siguiente tarea, primero se calcula el capital final a un año, cuando el interés se compone anualmente, luego semestral, mensualmente, diariamente, y en cada paso se van examinando los resultados. El profesor, a través de su discurso, mantiene constante *t* e igual a 1, mientras se está variando

[3][50:58] - [63:64]

E. –escribe en el tablero $A(1) = 1\left(1+\frac{1}{1}\right)^{1.1} = 2$

P. Haz la parte b.

E. – Escribiendo en el tablero- $A(t) = 1\left(1+\frac{1}{2}\right)^{2.1}$*, escribo dos porque son dos semestres en el año*

E. ¿y la t?

E. Esto es el año – señalando el exponente 2.1 en el tablero- y el dos son los dos semestres que tiene el año.

E. Si fuera…

E. Si fuera mensual aquí seria doce y aquí doce- cambia en la formula- $A(t) = 1\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12.1}$*, -luego borra y deja la formula del ejercicio que se está solucionando-*

P. ¿y al hacer esas operaciones?

E. $A(t) = 1\left(1+\frac{1}{2}\right)^{2.1} = 2.25$

…

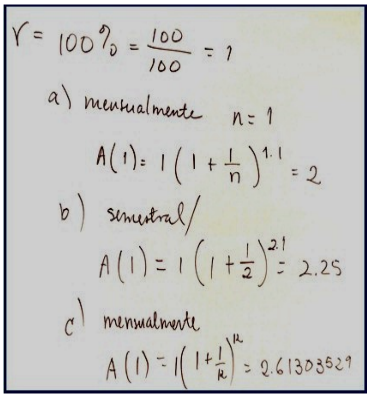
Fíjense que la tasa de interés permanece, el capital inicial es el mismo, ¿Qué es lo que está cambiando?

E. La n.

De esta forma se está modelando el mecanismo de interiorización de acciones numéricas ([3][50:58] - [63:64]; [64.86]) hacia un proceso límite para obtener el número ***e*** así:

[3][64…86] SIMBÓLICO

¿Qué es lo que está cambiando?



E. La n.

P. ¿Cuánto da cuando es mensual? Pasa Nelson y lo escribes.

E. $A(t) = 1\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12.1} = 2.61$

P. Tiene más decimales. Escríbelos

E. $A(t) = 1\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12.1} = 2.61303529$

P. Coloquen todos los decimales que arroja la calculadora. Comparen lo que dio semestral con lo mensual. Hubo un aumento allí de centavos, ¿Cómo cuántos centavos?

…

P. Diariamente la n vale cuánto, 365. – un estudiante pasa al tablero por solicitud del profesor-

E. $A(t) = 1\left(1 + \frac{1}{365}\right)^{365} = 2.714567475$

E. Esta calculadora solo lo hace paso por paso y si yo divido…

P. -Explica la forma de introducir los datos con esa calculadora-

P. Fíjense que no paso de tres pesos. Vamos en dos con setenta y pico de centavos. Vamos a seguir aumentando la n, ahora ya no es a aumentar de manera diaria, podemos cada hora, cada minuto, pensemos de una vez cada segundo. Cada segundo.

A partir de los datos anteriores obtenidos paso a paso, el profesor pide a los estudiantes que realicen una comparación numérica de los resultados conseguidos para dar sentido al número ***e***.

El profesor modela la interiorización de las acciones en el registro algebraico al proceso de paso al límite como aproximación intuitiva y numérica para la obtención del interés compuesto continuo con una tasa al cien por ciento. El uso de una expresión algebraica correspondiente a la fórmula de interés compuesto $A(t) = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n}$ e ir variando el valor de *n* mediante acciones sucesivas, se convierte en el medio adoptado por el profesor para modelar la interiorización de esas acciones y presentar una aproximación del número ***e.***

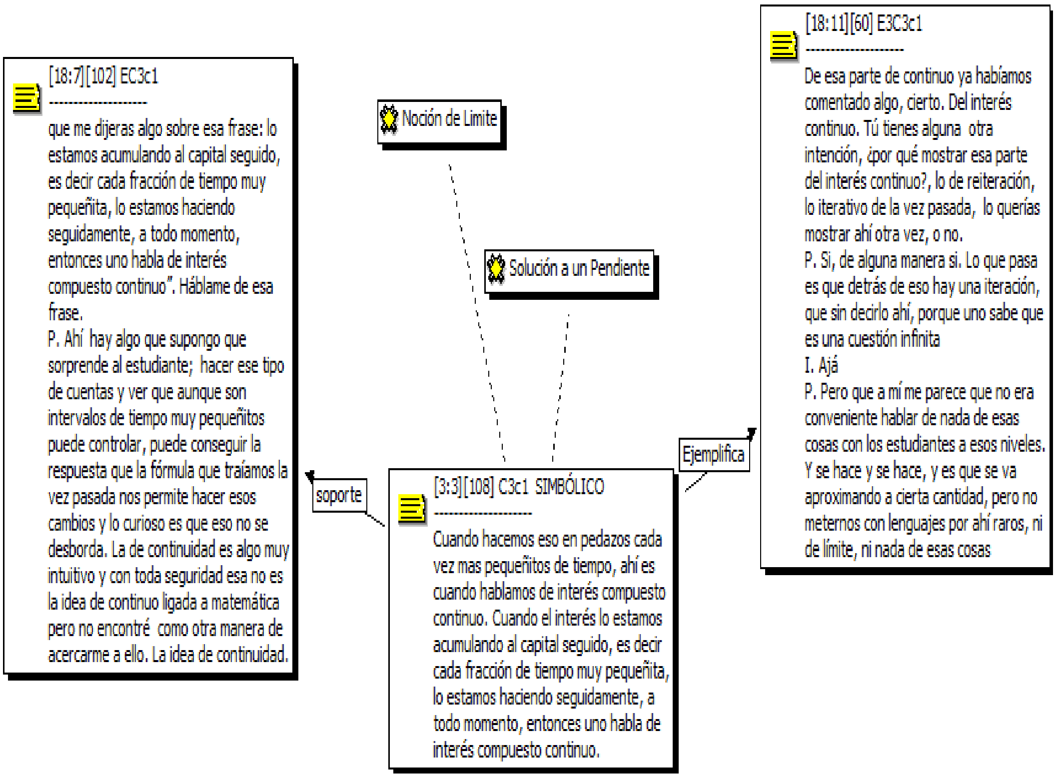


Diagrama 3.5. Entrevista sobre elementos en la secuencia de construcción de la fórmula de interés.

Ernesto justifica, durante la entrevista ([18][102] y [18][60]), el proceso relacionado con el concepto de límite que se desarrolló con sus estudiantes en la clase 3, [3][108] (Diagrama 3.5):

Como un paso previo para obtener la fórmula del interés continuo a partir de la fórmula de interés compuesto, les indica a los estudiantes cómo encontrar el número *e* en la calculadora.

[3][110:113] SIMBÓLICO

P. Ahora lo que queremos es mirar a ver cómo conseguimos una formulita que no tengamos que estar haciendo esa n grande y grande y ya. Lo que queremos es mirar una fórmula para calcular el interés compuesto continuo. Y el ejemplo que acabamos de hacer nos va a ayudar.

Ese número que acabamos de obtener allí, es un número que ustedes ya tienen en su calculadora. Busquen una tecla que tiene algo como esto: e.

Está para activar con la segunda función. Póngala y le ponen un 1, como si estuviéramos elevando e a la uno. ¿Y qué número aparece? Fíjense que les aparece este número - *indica en el tablero*- $A(1) = \cdots 2{,}7182818115$.

Mejor dicho de aquí en adelante ese número que acabamos de obtener con el peso cuando el interés se acumula continuamente, hemos conseguido una cantidad que corresponde a un número que vamos a llamar el número e.

Por medio de la sustitución del valor de ***e*** en la fórmula de interés compuesto y, haciendo uso de las propiedades de los exponentes, el profesor dirige el procedimiento para organizar desde la representación algebraica ([3][123:126]) una representación analítica del interés continuo ([3][128- 134]).

[3][123:126] SIMBÓLICO-Algebraico

Entonces cómo escribo r/n de manera que me aparezca un 1 en la parte de arriba. Cómo lo escribo.

E. Uno sobre n sobre r.

P. $= P[[(1+1/((n\ /\ r)\ ))\text{^}n\ ]\text{^}t\ ]$. *En esta parte de acá para que uno pueda pensar que se aproxima al número e, repito, este n es igual a este n – indica nuevamente en el tablero – 1* $\underbrace{\left(1+\frac{1}{\underset{\smile}{n}}\right)^{\underset{\smile}{n}}}_{e}$*, pero fíjense que aquí tengo n/r y no es el mismo que tengo acá, n,* - *señala en* $= P[[(1+1/((n\ /\ r)\ ))\text{^}n\ ]\text{^}t\ ]$. *Pero yo puedo buscar que me quede el mismo n/r* - *refiriéndose al exponente-, cómo hago para que me aparezca. Pues si yo lo coloco debo hacerlo* $= P[[(1+1/((n\ /\ r)\ ))\text{^}(n\ /\ r)\ ]\text{^}t\ ]$. *Pero debo tener cuidado de no ir a cambiar lo que tenia, si pongo eso ahí, qué más debo hacer?*

Mediante operaciones algebraicas, e incluyendo de manera muy intuitiva el paso al límite, el profesor construye la fórmula del interés compuesto continuo [3][128:134], un caso particular de la función $f(x) = e^x$.

[3][128: 134] SIMBÓLICO

Entonces que es lo que estoy diciendo aquí va a haber un número grande que es el mismo que está aquí y está acá – señalando en la expresión $= P[(1 + 1/((n / r)))\hat{}(n / r)]\hat{}(t.r)$ *la* n/r*- Esta parte de acá, eso que está encerrado en el rectángulo – el paréntesis – se va aproximando a qué número.*

E. e

P. Al número e. Entonces si se va aproximando al número e entonces uno dice, finalmente mi fórmula va a tomar, va a quedar de esta forma, la P, esto que es prácticamente el número e elevado a la ere por t. –escribe en el tablero – Pe^{rt} *, y esta es la fórmula que vamos a tener de ahora en adelante para trabajar el interés compuesto continuo.*

En este mismo contexto de interés compuesto continuo, el profesor solicita a los estudiantes que sustituyan diversos valores numéricos en la expresión simbólica anterior ([3][147…168])

[3][147…168] SIMBÓLICO

N. Si se invierte 3000 a una tasa de interés del 9 por ciento anual, determine el monto de la inversión al final de cinco años para cada uno de los siguientes modos de interés compuesto.

P. Pero cuál es el que quedó pendiente.

E. Cuando es continuo.

P. Continuo. Entonces dime a ver cómo para ese problema voy colocando las cosas particulares de ese problema. ¿Qué identifico, a ver, qué cosa?

E. Pues el capital

P. Cada variable la debo ir colocando. P, quién es P?

E. 3000

P. qué otra cosa

E. r

P. 0.09. ¿Qué más?

E. t

…

P. Y es continuo, se trata de interés compuesto continuo, entonces vamos a aplicar esta fórmula de acá. ¿Cuál es la pregunta? Debo preguntarme qué es lo que me preguntan ahí.

E. El capital

P. El capital

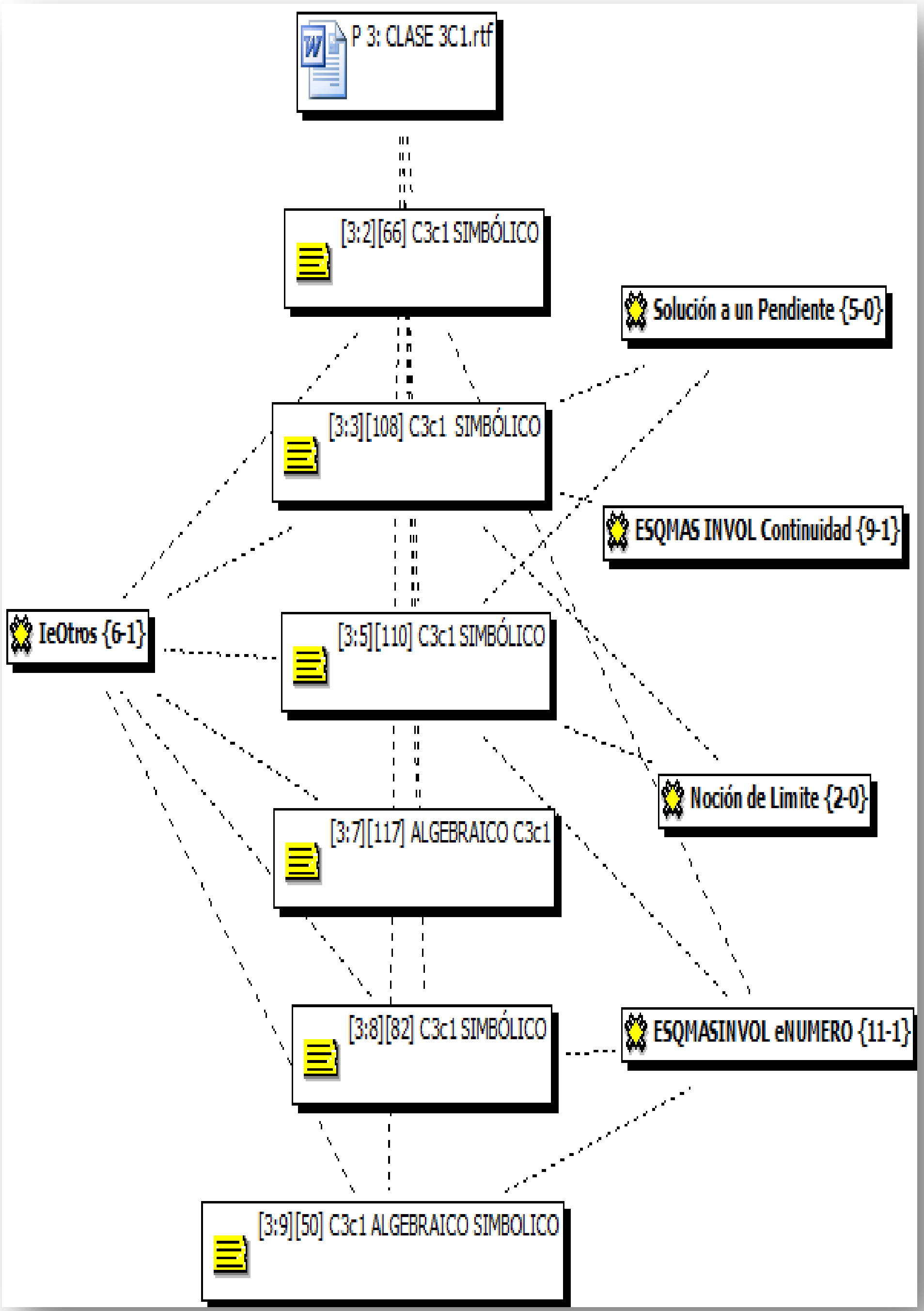
E. Final

P. A los que… el capital a los cinco años – va escribiendo – A(5) =. Reemplazamos. Entonces ¿cómo quedaría eso? $A(5) = ?$

E. Tres mil por e.

P. Elevado a la qué –escribe en el tablero$A(5) = 3000e^{0{,}09.5}$ *. Y cuando vayan a escribir en la calculadora hay que tener cuidado*

Encontramos así un desarrollo de la clase 3 en la que Ernesto modela el mecanismo de construcción de interiorización de una función exponencial para obtener la expresión correspondiente al interés continuo. Durante las actividades que propone a los estudiantes se trabajan otras nociones como la noción de continuidad [3:12] - [18:5], el límite [18:9] y el número *e*.



Síntesis B. Acciones de interiorización hacia número e.

La modelización del mecanismo de interiorización a través de esta tarea se hace explícita durante la entrevista posterior a esta sesión de aula [18][108 :111].

[18][108:111]

I. Después que tu les dices que busquen en la calculadora la tecla donde está el numero ***e*** *y hablas sobre ese número les dices vamos a mirar la fórmula para un capital cualquiera, un interés cualquiera, a los tantos años, ¿ese en paso más adelante?, ¿hay un salto?*

P. Ahí hay un salto fuerte.

I. ¿Algo importante, cierto?

P. Si, si pero ya te digo lo que yo sospecho es que no sé qué tan útil sea eso para ellos. Porque yo estoy seguro que si después les digo vamos borremos lo del tablero, alguien quiere pasar y reconstruir, yo creo que nadie lo hace, esa sospecha la puedo casi asegurar. Ver ese proceso es útil. Cada pasito es claro, lo que pasa es que todo el grupo de pasitos es el que hace compleja la cuestión, pero cada pasito yo lo puedo preguntar y comprobar que ese pasito de alguna forma no tiene dificultades sino que a veces ya viéndolo todo en conjunto, todos los pasos es que dicen pero este cómo hizo para conseguir eso.

En el contexto de interés continuo, el profesor hace explicitas las relaciones entre nociones matemáticas como una manera de dotar de significado los elementos matemáticos puntuales de la función exponencial propiciando así el mecanismo de interiorización. Es decir, en la práctica de Ernesto se hace visible la idea de construcción de conceptos a partir del uso de ideas previas para dotar de sentido a lo nuevo, no simplemente la acumulación de ideas adicionales.

El concepto de interés, ya sea simple, compuesto o continuo es transversal a toda la construcción que Ernesto utiliza para modelar el mecanismo de interiorización de la función exponencial. Tanto por la secuencia de pasos de estas dos clases, como las explicaciones que él ofrece sobre la forma de presentar el interés compuesto continuo para llegar a su fórmula, se considera que el profesor está modelando el mecanismo de interiorización.

3.1.1.3.- Iteración de acciones de cálculo correspondientes a elevar la base fija a diferentes exponentes

En la clase 1, Ernesto propone una situación de doblez de papel para que el estudiante reflexione sobre la iteración y su representación por medio de un exponente. Para ello pide a los estudiantes tomar una hoja, doblarla por la mitad y luego nuevamente doblarla y así sucesivamente hasta que la situación física lo permita.

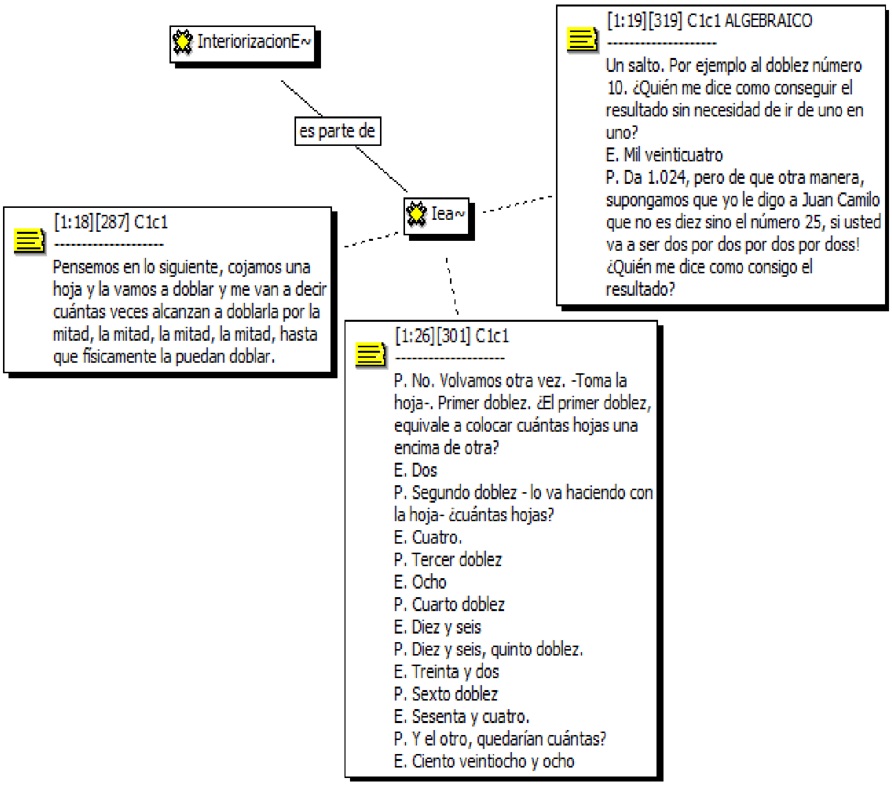


Diagrama 3.6. Preguntas referidas a iteración de acciones.

La tarea de dobleces del papel ([301], [319]) propicia ciertas preguntas que conducen a reflexionar sobre las acciones correspondientes a repetir una serie de pasos un cierto número de veces. En este caso se trata de la multiplicación de dos por dos, luego otro dos y así sucesivamente. Esta multiplicación de factores iguales se puede expresar mediante el uso de exponentes naturales para representar dicho fenómeno.

Ernesto organiza los datos en el tablero utilizando una representación tabular de la relación entre los dobleces y el grosor, mediante el siguiente diálogo:

[1][313:321]

P. Sexto doblez

E. Sesenta y cuatro.

P. Y el otro, ¿quedarían cuántas?

E. Ciento veintiocho y ocho

P. O sea, esta que ya no puedo doblar, sería 128. Hagamos una tablita donde se muestre eso - en el tablero dibuja y va hablando- a ver doblez número, equivale a que grosor dos el segundo cuatro, ¿el tercero cuánto fue?

E. Ocho

P. Cuarto diez y seis, quinto treinta y dos - escribe puntos sucesivos y dice - yo voy a pegar aquí un brinco, un salto.

Doblez (número)	*Grosor*
$1 \longrightarrow$	2
$2 \longrightarrow$	4
$3 \longrightarrow$	8
$4 \longrightarrow$	16
$5 \longrightarrow$	32
$\vdots$	$\vdots$

Un salto. Por ejemplo al doblez número 10. ¿Quién me dice cómo conseguir el resultado sin necesidad de ir de uno en uno?

E. Mil veinticuatro.

Haciendo uso de esta representación tabular [1][324:327], Ernesto expone a los estudiantes las potencias de dos que se han obtenido y los lleva a conjeturar sobre exponentes y potencias de pasos posteriores, que no se pueden obtener en la actividad física de dobleces del papel. Estas reflexiones, suscitadas alrededor de la acciones de iteración y uso de los exponentes, forman parte de la interiorización de una función exponencial con base mayor que uno identificada en la descomposición de la función exponencial.

[1][324:327] SIMBÓLICO-Tabular

P. esto que está acá viene siendo las potencias de dos, esto es dos a la cero, esto es dos a la uno, doblez tres dos a la tres, doblez cuatro dos a la cuatro, y así. – el profesor completa la tabla en el tablero-

Doblez (número)	*Grosor (en hojas)*
$1 \longrightarrow$	$2 = 2^1$
$2 \longrightarrow$	$4 = 2^2$
$3 \longrightarrow$	$8 = 2^3$
$4 \longrightarrow$	$16 = 2^4$
$5 \longrightarrow$	$32 = 2^5$
$\vdots$	$\vdots$
$10 \longrightarrow$	

De manera que en el doblez 10 ¿sería dos a la?

La secuencia en el uso de la iteración que el profesor utiliza en la clase 1, es nuevamente usada en la clase 4 donde Ernesto presenta una tarea como parte de una evaluación corta escrita. En ella, los estudiantes deben imaginar que son participantes de un "reality", que han ganado una prueba, y que se les da a elegir entre dos premios. El ganador puede decidir, de forma justificada, si prefiere que le entreguen un premio que consiste en recibir un millón de pesos anual desde el momento actual hasta su muerte – bajo el supuesto que vivirá hasta los 80 años – o un premio que consiste en que en el primer año le dan 100 pesos, el siguiente año el doble, 200, el siguiente el doble del anterior 400, etcétera.

Cada estudiante realiza su elección por escrito que entrega al profesor y, posteriormente, en la clase 5, se trata de trabajar a través de la iteración. A continuación se presenta el diálogo correspondiente a la segunda opción de premio:

[5][624:64]

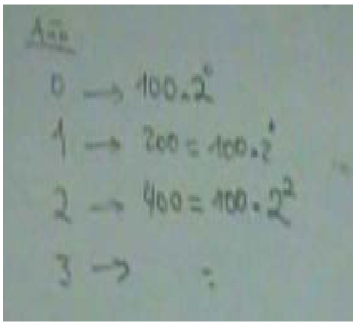
E. Cien pesos

P. Cien, después…

E. Después doscientos

P. Después doscientos, después…

P. Después cuatrocientos, etcétera. El doble cada vez del año anterior. ¿Con qué función represento yo eso? ¿Cómo hacemos?



Voy a colocar algunas para que ustedes me digan con cuál función podría ser. A ver

Año cero, o sea el año en que uno recibe el premio, supongamos que en el año cero recibe los cien pesos.

Año uno, ¿cuánto es?

E. doscientos

P. Doscientos, pero voy a escribir el doscientos de esta forma: como cien por dos. Ahorita vamos a ver por qué es conveniente escribirlo así.

Año dos, ¿cuánto recibiría la persona?

E. cuatrocientos

P. Cuatrocientos, el doble del año anterior. ¿Pero eso equivale a decir cien por cuanto?

E. Por cuatro

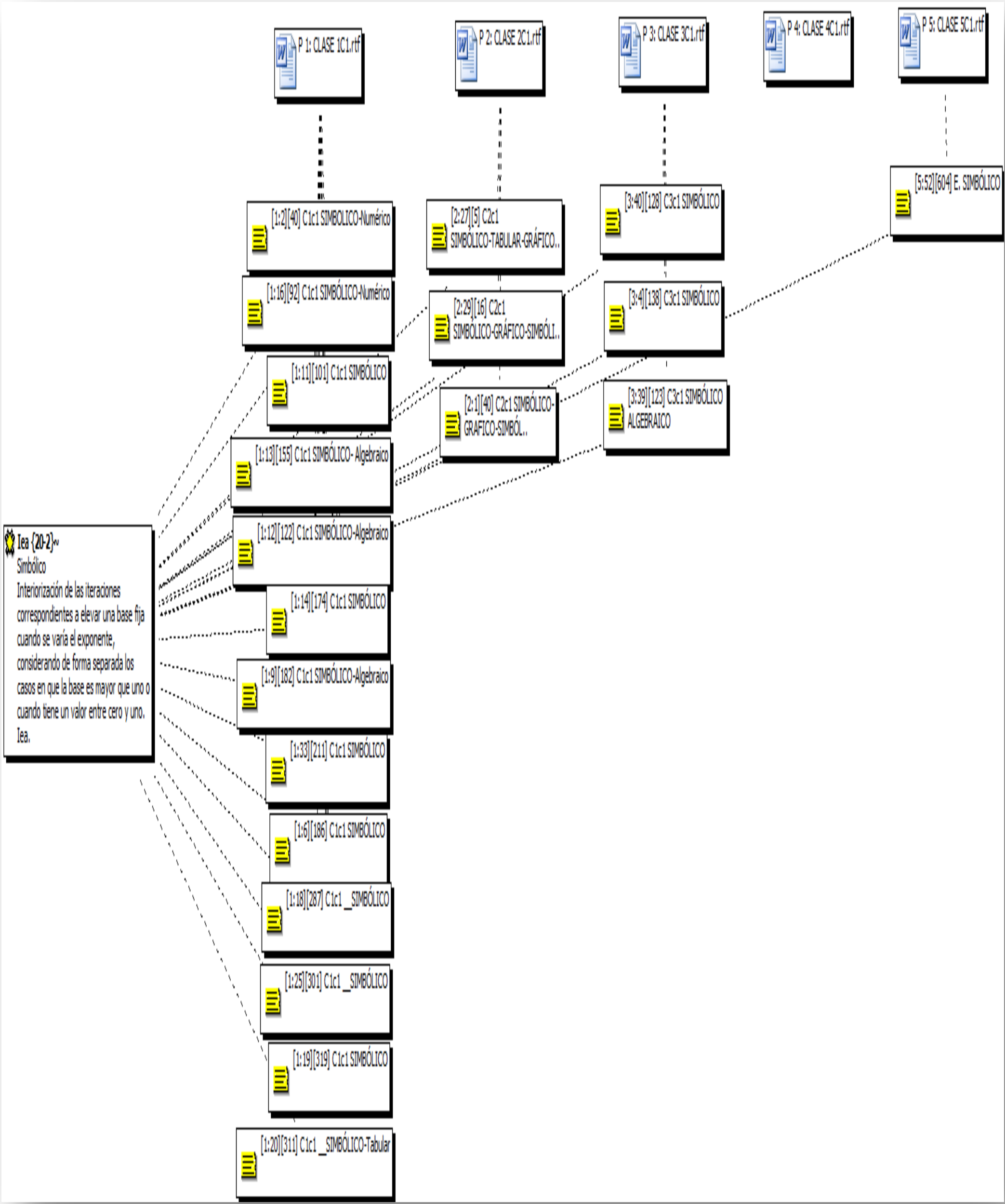
P. Por cuatro, o sea ¿cien por dos a la qué?

E. A la dos.

P. A la dos, ¿sí? Aquí yo voy colocando los exponentes y voy a colocar aquí también ¿por dos a la qué?

P. Bien, año tres, de una vez acá, quién me dice aquí cuánto es sin necesidad de…

Mediante la guía del profesor, los estudiantes realizan conjeturas sobre el uso de exponentes para representar acciones de iteración lo que indica que el profesor busca que los estudiantes se den cuenta de la potencialidad de uso de los exponentes con lo que se está modelando el mecanismo mediante la *interiorización de las acciones en un proceso cuando se realizan iteraciones correspondientes a elevar una base fija cuando se varía el exponente, considerando los casos en que la base es mayor que uno.* Se esquematiza esta modelación en cada una de las clase a través de la síntesis C.

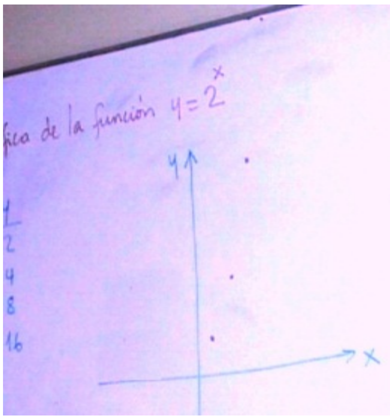


Síntesis C. Interiorización de acciones de iteración.

En cuanto al registro gráfico, en la clase 2, Ernesto retoma los datos numéricos y el registro tabular de la actividad de dobleces del papel y continúa con la modelación del mecanismo de interiorización proponiendo a los estudiantes la tarea de realizar la gráfica de la función $y = 2^x$. Dicha tarea parte de una representación tabular *mediante la repetición de acciones de cálculo correspondientes a elevar la base fija*, en este caso dos, e ir variando el exponente remplazándolo primero por sucesivos números enteros positivos para hallar el valor correspondiente. La tarea de representación gráfica [2][5:8] es propuesta en los siguientes términos:

[2][5:8]. SIMBÓLICO-tabular

P. - Escribe en el tablero a manera de título-. Gráfica de la función $y = 2^x$.



Bueno ya hemos visto algunos valores de esa función, para valores para esa función para valores entre 1, 2, 3, 4, 5,6 cuando x vale 1 vale 2 hasta el 6 creo, pero bueno ya en 6 estamos en qué numero, en 64 que es grande, hasta donde alcancemos estamos ubicando los puntos correspondientes a esos que tenemos ahí en la tabla de la vez pasada. Vamos a hacer la gráfica de esa función. -El profesor se dirige al tablero e inicia una tabla vertical escribiendo como nombre en cada columna x y y respectivamente – díctame algunos valores ahí Nelson

E1. Cuando x vale uno y vale 2, cuando equis vale 2 cuatro, equis 3 ocho, 4 diez y seis

P. Hasta ahí nada más, por ahora vamos colocando estos - el profesor ha ido escribiendo en la tabla a medida que el estudiante ha dictado- .

Se realiza así la representación gráfica de una serie de puntos en el plano correspondientes a las parejas de la tabla de valores, lo cual corresponde a la *acción de ubicar en el plano cartesiano puntos correspondientes a parejas de coordenadas donde la segunda componente es una potencia de exponente la primera componente.*

El profesor aclara que estos puntos no se pueden unir con líneas rectas y para ello expone la necesidad de realizar cálculos para valores de *x* que sean números racionales. Se retoma así el registro numérico para ayudarles a calcular, por ejemplo, dos a la 1.5.:

[2][16-29] SIMBÓLICO-GRÁFICO- SIMBÓLICO

P… por ejemplo entre el uno y el dos, un valor intermedio sería por ejemplo .5, y si uno fuera a reemplazar el 1.5 acá –muestra el eje y- la calculadora lo hace pero por ahora no coloquemos en la calculadora, sino entender ¿de dónde sale ese resultado de 2 a la 1.5?, Bueno, a alguien se le ocurre algo de cómo puedo asignar el valor de dos a la 1.5?

…

E. Dos por dos por la mitad de dos

P. Pero fíjate que no parece ser porque 2 a la 2 vale 4, es algo intermedio. Vamos a mirar eso, una pregunta, si yo les hubiera colocado por ejemplo una fracción en el exponente, eso sí lo podrían, podrían decir cómo calcular, por ejemplo, si yo colocara 2 a la un medio ¿qué significado tiene elevar a la un medio?

E3. Raíz

P. Raíz. Recuerden que cuando uno tiene exponente que son fracciones, eso nos lleva a raíces, ¿cuál sería esa raíz ahí Nelson?

E4, E3. Raíz cuadrada.

P. Raíz cuadrada de – señala en la escritura en el tablero, en el índice del radicando- recuerden que este dos pasa acá. ¿Dos a la qué?

E3. A la uno

P. -Nuevamente en la escritura del tablero señala el uno del numerador y dice- y este uno es el que pasa acá. Ya sabemos cómo elevar a una fracción. ¿Qué se les ocurre entonces para elevar dos a la uno punto cinco?

E3. Como un fraccionario.

P. Pasar ese número 1.5 a fraccionario, ¿cómo lo podríamos escribir en forma de fracción?

E5. Tres medios

P. Y esto si ya, como lo escribo como raíz.

E3, E4, E5, Raíz cuadrada de dos a la tres

P. – lo repite y lo va escribiendo con símbolos en el tablero- $2^{1.5}=2^{3/2}=\sqrt[2]{2^3}=\sqrt[2]{8}$*, raíz cuadrada de 8, porque 2 por 2 por 2, y la raíz cuadrada de 8 es 2 como algo. Busquémoslo ahí el la calculadora.*

E3. Dos punto ochenta y dos

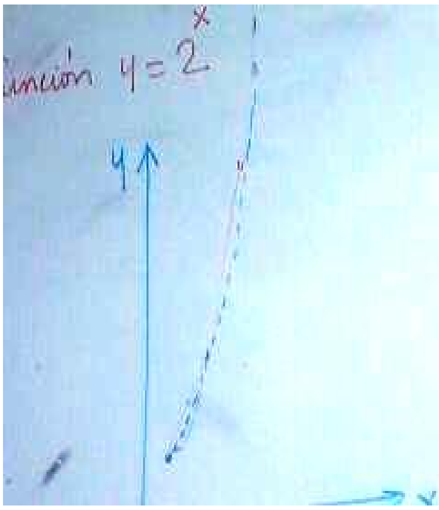
P. Dos punto ochenta y algo, o sea cuando estemos por acá en el 1.5 debemos colocar 2.82 –

Se retoma nuevamente, el punto de vista gráfico, [2][40:41] en el cual se incluye tácitamente como dominio de la función los números reales para justificar que la representación gráfica sea una curva continua.

[2][40] SIMBÓLICO -GRÁFICO-SIMBÓLICO

E. Dos punto ochenta y dos

P. Dos punto ochenta y algo, o sea cuando estemos por acá en el 1.5 debemos colocar 2.82 – se dirige al plano cartesiano e indica un punto – y no es ese valor el que le corresponde cuando uno une así derecho, es otro valor, mejor dicho, si uno fuera a colocar los valores intermedios, uno encontraría que los puntos al ir uniendo y uniendo – va ubicando puntos en la gráfica y traza una línea punteada – va creciendo muy rápido pero los puntos no es así uniéndolos con líneas rectas, van es como, -ahora se dirige al tablero y en la gráfica traza una curva, ya no con línea punteada- ¿algo parecido a qué?



Para los exponentes negativos Ernesto invita a realizar varias acciones de remplazar el exponente por (-1, -2, -3, -4) (Diagrama 3.7) de forma numérica para luego representarlos punto a punto en el plano cartesiano uniéndolos mediante una línea continua “que se extiende a la izquierda” de la siguiente manera:

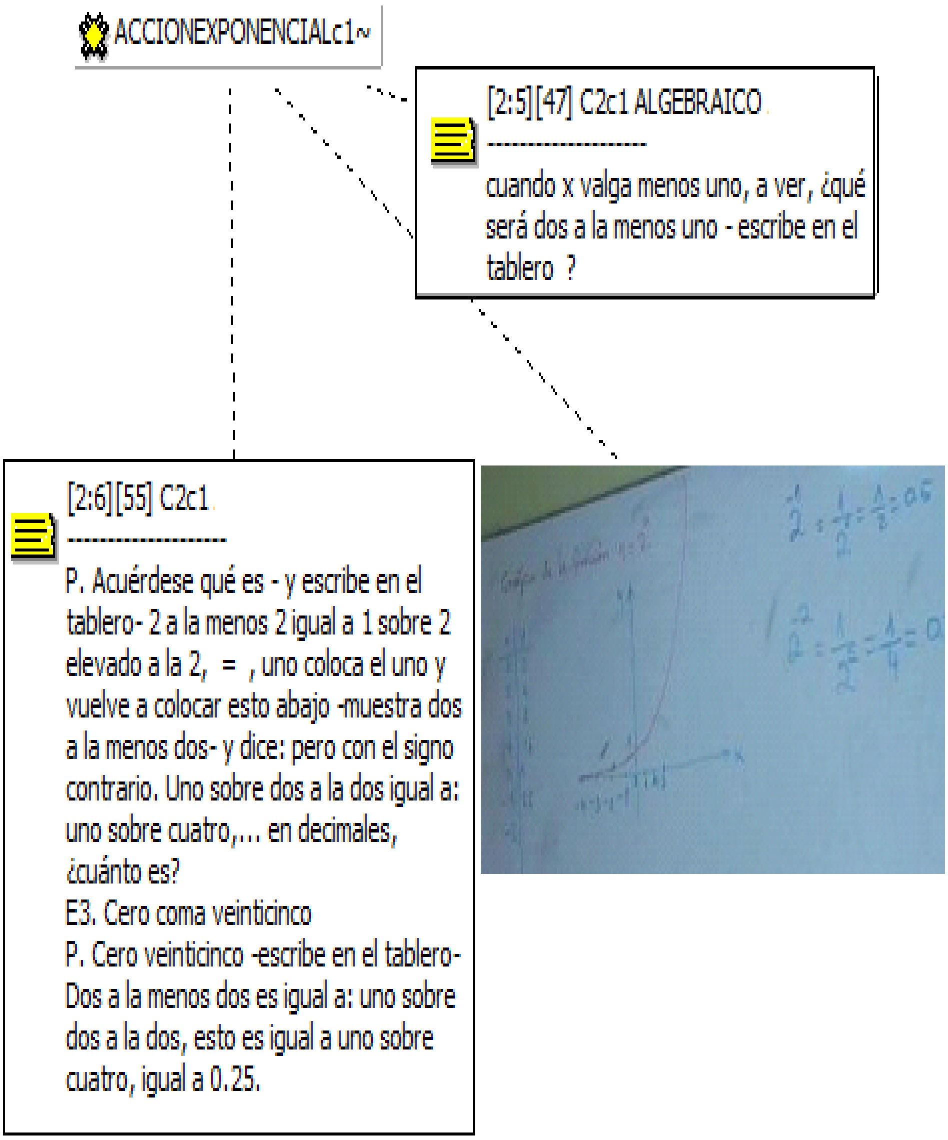


Diagrama 3.7. Cálculos para asignación de números negativos en la variable x.

Este desarrollo viene apoyado por las reflexiones del profesor (Diagrama 3.8) durante la entrevista correspondiente a la tarea de representación gráfica de la función $y = 2^x$.

En este diagrama 3.8 se incluyen las intervenciones correspondientes a la especificación del objetivo de la clase [17][5], las explicaciones sobre los procedimientos de graficación [17][22] y la entrevista inicial [31][99] que nos permiten afirmar que Ernesto, con esta tarea de representación gráfica, pretende que los estudiantes reflexionen sobre acciones vinculadas a la variación del exponente mediante la asignación de diferentes valores a la variable *x*: naturales, enteros y racionales. De esta forma se está modelando la interiorización del dominio, para luego intuitivamente incluir el dominio de los reales en la función exponencial.

[17:1][5] EC2c1

P. Bueno, ahí ya la intención era mirar el comportamiento gráfico de las funciones exponenciales

[17:17][22] EC2c1

I. Para qué buscas tú que ellos trabajen con los puntos intermedios, solamente para que se den cuenta que la gráfica no es una línea recta sino una curva, o...
P. Para qué...a ver, pues sí, quería era que quedara claro que esos no eran segmentos de recta, que eran suaves...que eran pues, curvos. Y que esos pues, mejor dicho que, cómo explicar...que eso no pega unos brincos por allá, entre el dos y el tres el punto no está, podrías pensar en la imaginación que está por allá arriba. Pero de todas manera el estudiante cuando traza una línea recta, está como imaginando, si lo hace, que es como por esos lados que está el otro valor

[31:33][99] E0c1

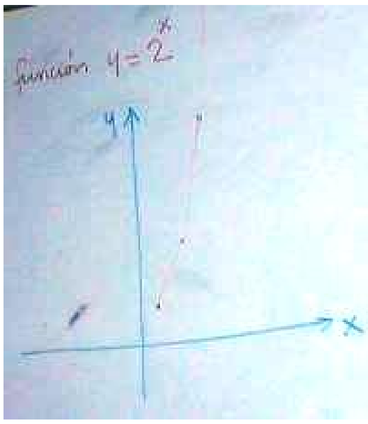
Me parecía muy bonito porque el estudiante partía de una situación física, algo que podía manipular y entonces veía la necesidad de empezar a escribir de empezar a organizar una tabla y empezar a mirar que pasa ahí y de allí pasábamos a la parte grafica y entonces era apenas unos puntitos que se tenían para unos valores enteros positivos, era un buen comienzo pero la parte que yo encontraba siempre en ese ejemplo era que no tenia sentido pensar en valores intermedios, en continuidad, entonces vi definitivamente que uno podía en ocasiones, uno se remuerde la conciencia porque uno pone unos puntitos y uno dice entonces para los demás valores y pum traza

Diagrama 3.8. Entrevistas del caso 1 sobre el registro gráfico.

Otro elemento matemático en este desarrollo de la clase 2, es el correspondiente al crecimiento de la función exponencial que se realiza en el registro gráfico. Este crecimiento se hace explícito mediante frases que expresan que un cambio leve en la variable independiente afecta de "forma rápida" al cambio de la variable dependiente. [2][13]

[2][13]

P. Bueno, entonces voy a colocar aquí aproximadamente los puntos, yo no tengo aquí la cuadricula, aproximadamente lo que ustedes tiene allá, uno dos como por acá, dos cuatro algo así, y cuatro diez y seis -ubica puntos en el plano dibujado en el tablero- bueno algo como por allá arriba, -ubica ese punto en el borde superior izquierdo del tablero- una de las características que veíamos es que eso crece muy rápidamente – hace mención con las manos de una curva creciente- la x aumenta de a poquito, sin embargo la y va subiendo mucho, ya en el 5 iríamos ¿en cuánto Carlos?



Ernesto utiliza la gráfica para dirigir sus argumentos sobre el tipo de crecimiento de la función exponencial indicando que "va creciendo muy rápido" sin construir explícitamente en el gráfico el triángulo característico [2][40].

3.1.1.4. Interiorización de las acciones de aplicar valores muy "grandes" en el caso de la función decreciente y para valores de x muy "pequeños" en el caso de la función creciente

Las representaciones gráficas realizadas por el profesor en la clase 2 se han hecho punto a punto mediante el cálculo numérico de valores para *x* observando los resultados obtenidos para *y*, que corresponden en la descomposición genética propuesta como la acción de ubicar en el plano cartesiano puntos correspondientes a parejas de coordenadas donde la segunda componente es una potencia de exponente la primera componente.

El segmento [2][60] permite ilustrar la manera cómo el profesor nuevamente hace uso de la representación gráfica de la función $y = 2^x$ para dirigir las preguntas (Diagrama 3.9) sobre acciones de cálculo numérico que permiten realizar las observaciones sobre la aproximación de la curva al eje *x*, en el registro gráfico.

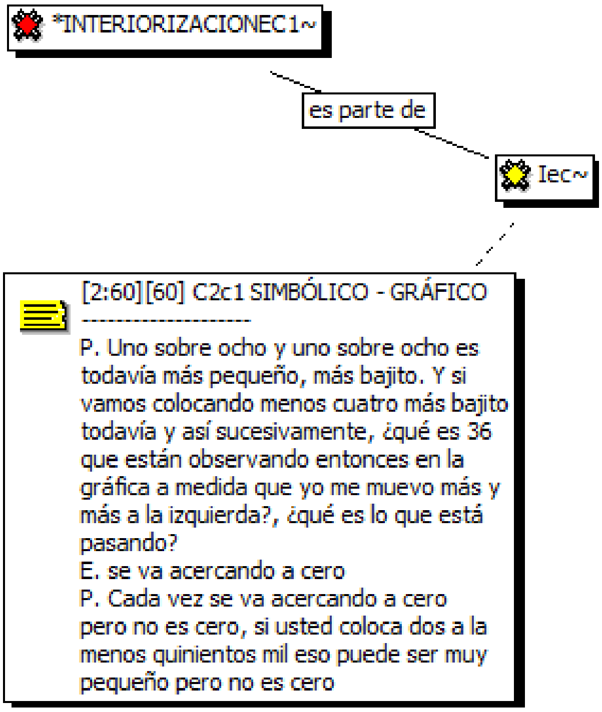
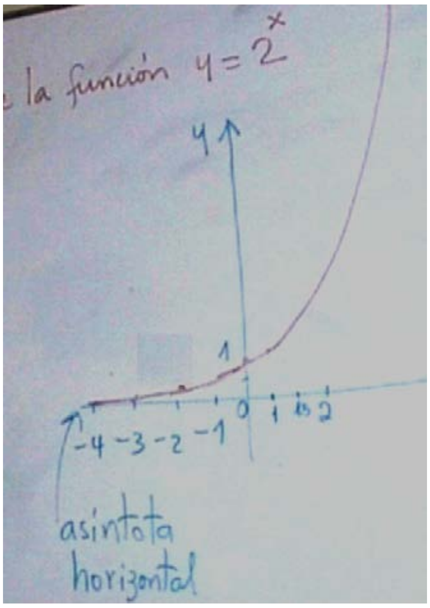


Diagrama 3. 9. Reflexiones sobre la asíntota

En este diálogo de la clase 2, en la representación de la curva de la función exponencial $y = 2^x$ se identifica como propicia el mecanismo de interiorización de acciones al variar los valores de *x* cada vez más pequeños acompañados de la reflexión sobre cómo la curva se acerca al eje *x*, como asíntota de la función, mediante el diálogo [2][60]. La representación resultante es (gráfica 1):



Gráfica 1. Asíntota horizontal de la función exponencial $y = 2^x$

Es en esta clase 2, cuando el profesor hace uso del registro gráfico de la función $y = 2^x$, cuando se modela la interiorización de las acciones de dar valores muy "pequeños" a *x* para ir obteniendo aproximaciones de los valores de *y* a cero en el caso de la función creciente y dar *valores a x* muy "grandes" en el caso de la función decreciente.

3.1.1.5. Síntesis

En este caso, la modelación del mecanismo de interiorización de la función exponencial privilegia la idea de iteración de las acciones como el medio usado por el profesor para que sus estudiantes construyan los procesos correspondientes a una función exponencial particular, bien en el registro numérico, bien en el algebraico o a través de una actividad manual concreta, que lleva a conjeturar sobre exponentes y potencias mediante una representación tabular, simbólica y gráfica.

Para construir la fórmula de una función exponencial particular se van considerando consecutivamente exponentes naturales, luego fracciones y finalmente enteros negativos. Para ello, a través de la tarea propuesta se modela la interiorización de las acciones de comparación de diferencias y cocientes de dos valores de la variable independiente y dependiente respectivamente. De esta manera, se pasa del caso en el que el exponente es un número natural al siguiente y asumiendo implícitamente la relación entre la razón entre los dos valores de la variable dependiente correspondientes es la misma. Esta forma de actuar genera una progresión geométrica que permite factorizar para obtener la fórmula adecuada. Con este procedimiento, a su vez se propicia, la interiorización del dominio y el rango de esta función exponencial.

En las tareas propuestas se propicia la interiorización de acciones para considerar el eje *x* como asíntota de la función exponencial privilegiando el registro gráfico.

La interiorización de acciones sobre la representación de la función exponencial en el plano cartesiano se realiza a través de ubicación de puntos cuyas parejas (*x*, *y*) han sido calculadas para valores enteros. Se extiende posteriormente para valores decimales ubicando algunos puntos intermedios para mostrar cómo se obtiene un trazo curvo.

El concepto de interés, ya sea simple, compuesto o continuo es transversal a toda la construcción que Ernesto utiliza para modelar la función exponencial. Así el profesor modela la interiorización de las acciones en el registro algebraico en el proceso de paso al límite de forma intuitiva y numérica, lo que permite obtener una expresión del interés compuesto continuo con una tasa al cien por ciento. En este caso, el profesor modela la interiorización de esas acciones y presenta una aproximación del número *e*, a través de otros esquemas como lo son la noción de continuidad, limite y el número ***e***. De acuerdo con la descomposición genética del concepto función exponencial, el profesor ha propiciado la modelación del mecanismo de interiorización, como se esboza en los esquemas (Síntesis A, B y C).

La modelación del mecanismo de interiorización de Ernesto se caracteriza porque priman aquellas acciones de interiorización relativas a la iteración, las cuales se promueven en la primera clase y se repiten en las clases 2, 3 y 5 en el registro simbólico. En este registro simbólico (también en la clase 1) se propicia interiorización de acciones correspondientes al elemento matemático razón de cambio promedio.

En el desarrollo de las clases del profesor no se encontraron tareas para interiorizar acciones relativas a la elaboración de la gráfica sin utilizar el recurso de punto a punto. La interiorización de acciones correspondientes al elemento matemático asíntota de la función exponencial, en el registro gráfico, se propicia únicamente en la clase dos, al igual que la interiorización de acciones asociadas al elemento matemático razón de cambio promedio con el uso implícito del triángulo característico.

Los esquemas de síntesis y el esquema 1 de segmentos de clases permiten determinar que la modelación de la descomposición genética de Ernesto se apoya en acciones de iteración para favorecer la interiorización de acciones en la forma de conocer proceso de los elementos matemáticos puntuales dominio, asíntota y razón de cambio promedio tanto en el registro simbólico como en el gráfico. En particular, la integración de los registros simbólicos y gráficos permite examinar elementos del concepto como la asíntota a través de la noción de "acercarse a" o "tendencia", junto con la interiorización de valores del dominio.

Por otra parte, el profesor hace explícitas las relaciones entre las nociones matemáticas de límite, continuidad y número e como una manera de dotar de significado los elementos matemáticos de la función exponencial. Es decir, en la práctica de Ernesto se hace visible la idea de construcción de conceptos a partir del uso de las ideas previas no simplemente la acumulación de ideas adicionales.

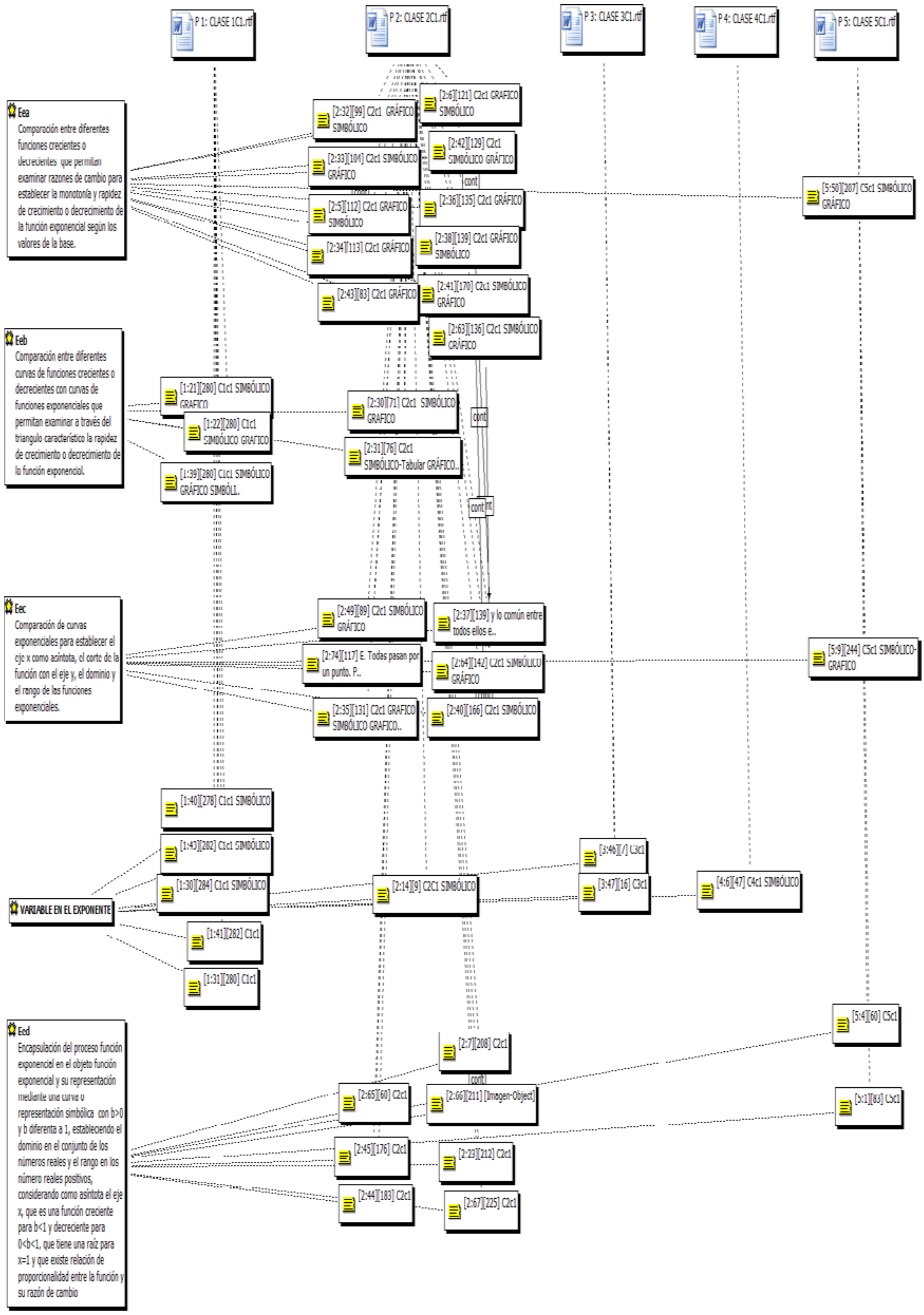
La práctica de Ernesto evidencia su interés por la presentación de los conceptos dentro de contextos proponiendo siempre tareas que no se desprenden, en un comienzo, únicamente de las estructuras matemáticas sino desde situaciones que permiten esbozar fórmulas a manera de modelos matemáticos.

3.1.2. Viñeta dos. Modelación del mecanismo de encapsulación de la función exponencial

El mecanismo de encapsulación se modela mediante diferentes tareas en las clases 1, 2, 3, 4 y 5. Las acciones del profesor encaminadas a comparar funciones exponenciales se identifican como intentos de que los estudiantes encapsulen el concepto función exponencial (Esquema 2).

En la clase 1 se utiliza el contexto de interés compuesto para modelar el mecanismo de encapsulación entre diferentes funciones exponenciales; $A(t) = 3000\left(1 + \frac{0.009}{1}\right)^t$, $A(t) = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ haciendo uso de su representación simbólica, señalando que lo que tienen en común estas funciones (asociadas a un cálculo de interés compuesto) es que la variable está en el exponente. Se vuelve a insistir en este mismo hecho en las clases, 2, 3 y 4.

Mientras que en la clase 1, se recuerda el tipo de crecimiento de la función lineal y la función cuadrática mediante el cálculo del cociente incremental, en la clase 2 se estudia gráficamente la monotonía de esta función; y se compara cómo es el crecimiento de esta función en relación con otros procesos - funciones exponenciales-. En ambas tareas la comparación, a través de los registros simbólico o gráfico, de los comportamientos entre diferentes funciones es una manifestación de la modelación del mecanismo de encapsulación. En el primer caso a nivel aritmético comparando para ciertos valores de x los valores que toma la función $y = x^2$ con los correspondientes valores de $y = 2^x$, observando qué significa esto en el registro gráfico y, en el segundo, exclusivamente en el registro gráfico. Es importante observar que, en el segundo caso, no se realiza el análisis a través del cociente incremental sino que se hace punto a punto. De manera implícita, se examina el proceso correspondiente a la variación aritmética en la variable independiente y el consecuente cambio geométrico que se está generando en la variable dependiente.



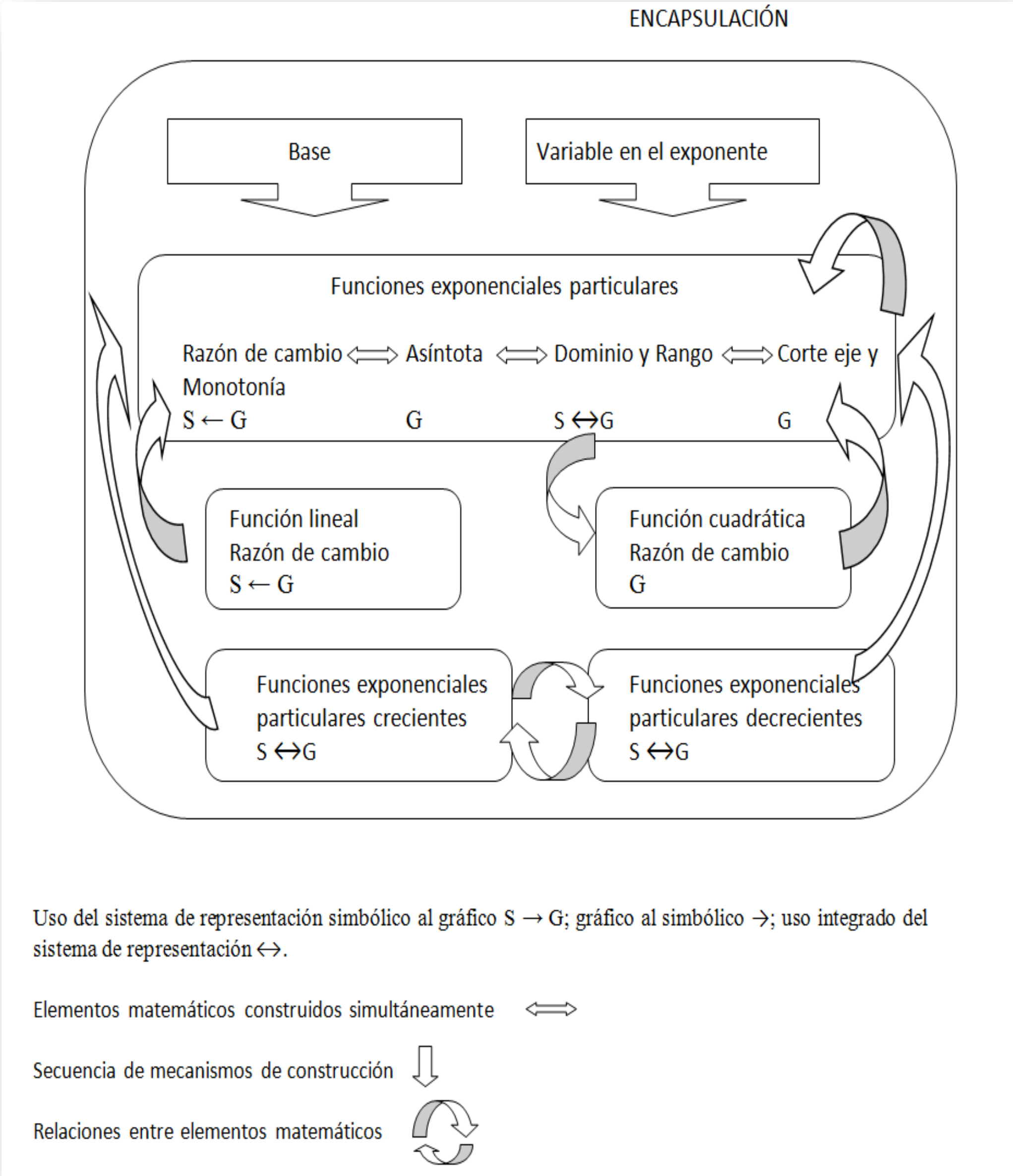
Esquema 2. Segmentos en las clases: mecanismo de encapsulación en la función exponencial. Caso de Ernesto.

En la clase 2 además de estudiar la gráfica de la función $y = 2^x$, se establecen comparaciones con las gráficas de otras funciones exponenciales y se consigue propiciar la comparación *entre procesos de curvas exponenciales para establecer la relación entre el tipo de crecimiento y el valor correspondiente a la base.* Esta manera de proceder permite considerar el eje *x* como asíntota, establecer el corte de la función con el eje *y,* y determinar el dominio y el rango de las funciones exponenciales. También se hace una comparación entre varias funciones exponenciales particulares a partir de su gráfica y se establece que pueden ser tanto crecientes como decrecientes, asociándola intuitivamente a un "tobogán".

En la clase 2 el profesor propicia determinar mediante conjuntos numéricos e intervalos el dominio y rango de la función exponencial. Además, una vez ha desarrollado con los estudiantes tareas relacionadas con establecer características comunes mediante comparaciones, realiza un resumen de la definición de funciones exponenciales utilizando la integración de registros. El resumen incluye tanto gráficas de funciones exponenciales genéricas crecientes como decrecientes y, en cuanto a la representación simbólica, se hace referencia a los diferentes valores que puede tomar la base. Para la modelación de este mecanismo, durante la clase 2, se plantea también la realización de ejercicios enunciados en el registro gráfico para encontrar la representación simbólica correspondiente de la función exponencial.

En la clase 5 se trabaja con la representación gráfica de la curva correspondiente $y = 2^x$, a través de su expresión simbólica recurriendo al programa Derive e identificando sus características como el dominio, el rango, la asíntota y corte con el eje y. Luego, se realiza la gráfica, en una misma pantalla, de las funciones exponenciales $y = 2^x$ e $y = 3^x$, para volver de nuevo a identificar la monotonía; el crecimiento de cada una de ellas. Además se establecen comparaciones entre las funciones $y = 2^x$, $y = 3^x$ y la función $y = e^x$ recurriendo a las tres curvas correspondientes a dichas funciones exponenciales.

Mediante diferentes tareas, en las clases 1, 2, 3, 4 y 5, la coordinación entre diferentes modos de representación cuando se muestran diferentes aspectos de la función exponencial es usada para modelar el mecanismo de encapsulación cognitiva del objeto función exponencial. Se realiza la descripción detallada de las clases respecto a las tareas enunciadas en los párrafos anteriores, con lo cual se pretende mostrar las evidencias de que Ernesto propicia la encapsulación de la función exponencial a través de tareas que conllevan comparaciones para determinar la asíntota, el dominio y el rango desde el registro gráfico al simbólico. En la identificación de la monotonía privilegia la integración de los dos registros y, a su vez modela la encapsulación de los procesos funciones exponenciales crecientes y funciones exponenciales decrecientes en el objeto función exponencial desde el registro simbólico hacia gráfico y viceversa, integrando el significado del concepto a través de estos registros.



Síntesis E. Modelación del mecanismo de encapsulación caso 1.

A continuación se describe la modelación del mecanismo de encapsulación en cada una de esas sesiones y tareas.

3.1.2.1. Comparación entre diferentes funciones exponenciales para establecer una característica común

En la clase 1 se construyen varias funciones surgidas a partir de una situación de cálculo del interés compuesto. El profesor identifica estas funciones, mediante un diálogo con los estudiantes, como aquéllas en las que “la variable está en el exponente”:

[1:27][278:280] SIMBÓLICO

P… y ahora observemos un poco, por ejemplo si yo aquí -señala la fórmula del tablero y borra - le pongo no 5 años sino t años.

$$A(t) = 3000\left(1 + \frac{0.009}{1}\right)^{t}$$

Observen dónde está la variable, la variable está en el exponente. Hasta el momento nosotros no hemos encontrado funciones donde la variable esté en el exponente. ¿Estas no son funciones como las lineales, ni como las cuadráticas, cierto? Recordemos cómo eran esas funciones…

En una entrevista posterior a la clase 5 [20][35], el profesor insiste en caracterizar las funciones exponenciales como aquellas funciones en las cuales “la variable está en el exponente”.

[20][35] SIMBÓLICO

P…Un elemento clave la variable en el exponente, eso era algo importante nuevo. Segundo, otro elemento era caracterizar las funciones que se forman con esas cosas, variable en el exponente…

Así, en el extracto anterior de la clase 1, se utiliza la fórmula de interés compuesto anual, dejando únicamente la *t* como variable [1][278:280] para señalar que van a estudiar funciones donde la variable está en el exponente. Luego, cuando se establece la fórmula general del interés compuesto [1] [282: 284], también se señala que la variable está en el exponente.

[1:28] [282- 284] SIMBÓLICO

P…ahora vamos a ver las funciones de esta clase – indica en el tablero - $A(t) = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$*. Donde la variable está en el exponente…Vamos a detenernos primero un poco a funciones que tienen la variable en el exponente y luego volveremos al ejercicio que estamos haciendo acá, y, vamos a considerar una función bien sencillita, una función exponencial bien sencillita. Se llaman funciones exponenciales porque la variable está en el exponente. Si quieren le escriben el titulo, desde donde comenzamos hoy, póngale funciones exponenciales. Entonces, se llaman funciones exponencial, ¿Por qué razón Camilo? Porque*

E. Porque la variable está en el exponente.

P. Porque la variable está en el exponente, listo. Vamos a comenzar con una función exponencial bien sencilla.

Se observa que, como hemos visto, en la clase 1, Ernesto plantea primero diversos acercamientos a estas funciones a través del interés simple y compuesto y sólo después es cuando las nomina (Diagrama 3.10).

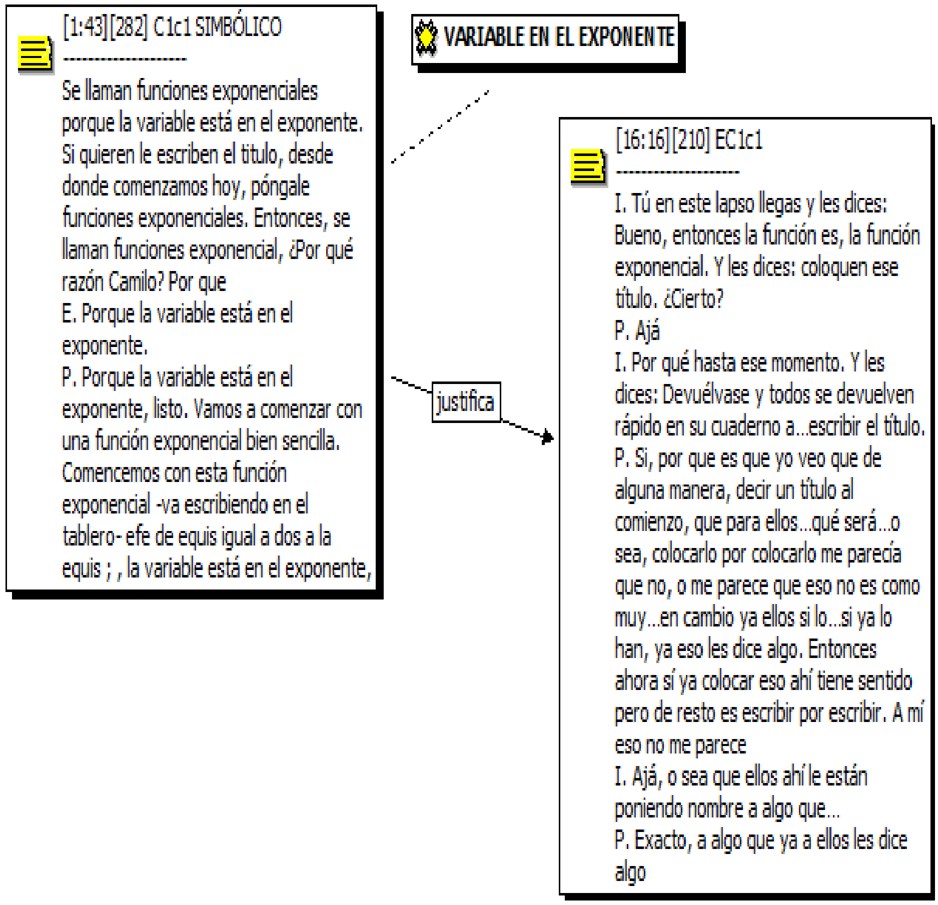


Diagrama 3.10. Argumentos en el aula y en la entrevista sobre la variable en el exponente.

En la clase 2 presenta la función $y = 2^x$ en el registro simbólico y la incluye dentro de las funciones exponenciales al utilizar el argumento: “la variable está en el exponente”

[2:39][5 - 9]

P. - Escribe en el tablero a manera de título-. Gráfica de la función $y = 2^x$

P. Carlos estamos en las funciones exponenciales, recordemos qué es una función exponencial, ¿Nicolás tu nos puedes decir qué es una función exponencial?

E. Que la incógnita está en el exponente.

P. Que la variable está en el exponente, la base es una constante.

En relación con la función de interés compuesto $A(t) = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ y luego con la función $y = 2^x$, Ernesto reflexiona en la entrevista 16, comparando (Diagrama 3.11) los registros con los cuáles trabajaron los estudiantes durante las dos clases con estas funciones.

El profesor compara las distintas funciones que han surgido en el aula, dándoles un nombre “función exponencial” y caracterizándolas mediante el elemento distintivo que sintetiza con la expresión “la variable está en el exponente”

[1][280]

Hasta el momento nosotros no hemos encontrado funciones donde la variable esté en el exponente. Estas no son funciones como las lineales, ni como las cuadráticas, ¿cierto? Recordemos cómo eran esas funciones…

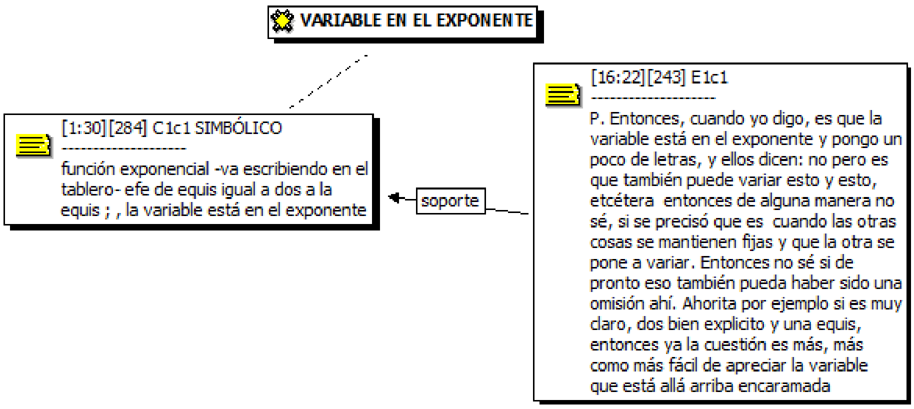


Diagrama 3.11. Caracterización mediante la variable en el exponente.

Esta misma idea se utiliza en otras sesiones para caracterizar a las funciones exponenciales ([2][9:11], [3][7:10], [3][16:17], [4][47])

[3][7:10]

P. ¿Qué es una función exponencial?

E. La que tiene la variable en el exponente.

P. Es una función ¿que tiene qué estilo, qué forma?

E. La forma y igual a a la x.

[3][16:17]

Los estudiantes van dictando y el profesor escribe en el tablero-; $A(t) = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$.

Observen que la variable está en el exponente, la variable la estamos considerando t.

[4][47]

P. Bueno, pare un segundito. Ahí lo que van a decir en esa parte es: si usted quiere tener una buena aproximación de una función que le diga cuántas partículas, cuántas bacterias le interesan mucho, puede usted decir que hay aproximadamente después de t horas le dice: mire esa forma en que está creciendo eso, observen que allá en el exponente está la variable es como un crecimiento exponencial $n(t) = n_o e^{rt}$ *¿Cierto? Entonces ahí lo que le dice es mire de esa forma de crecer así, ser así, usted puede emplear una fórmula similar a la que vimos en el interés compuesto continuo que es la que aparece ahí en el recuadro, la cual vamos a mirar con mucho cuidado.*

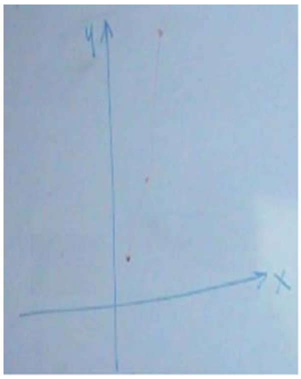
De esta manera en todas las clases en las que Ernesto hace uso del registro simbólico para identificar las funciones exponenciales indica que son aquellas funciones cuya variable está en el exponente.

3.1.2.2.- Comparación entre procesos relativos a diferentes funciones crecientes o decrecientes para distinguir la razón de cambio de la función exponencial.

En la clase 2, la tarea consiste en realizar la gráfica de la función exponencial $y = 2^x$. Esta actividad, como el profesor lo manifiesta en la entrevista posterior, tiene como objetivo *"que a partir de la función ´y igual a dos a la equis´ se empezara a apreciar detalles: asíntota horizontal, de que vertical no tiene, de que corta en uno en la y"*.

Para ello se realiza, a partir de la representación tabular de la función $y = 2^x$ y, mediante la ubicación de algunas parejas ordenadas en el plano cartesiano, la representación gráfica de esta función que le permite expresar cómo es el crecimiento de una manera intuitiva mediante la expresión *x "aumenta de a poquito" mientras en cambio en y "va subiendo mucho"*.

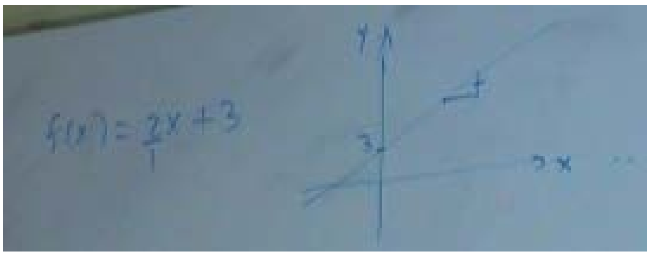
[2:34][13:14] Simbólico- Gráfico



Bueno, entonces voy a colocar aquí aproximadamente los puntos, yo no tengo aquí la cuadricula, aproximadamente lo que ustedes tiene allá, uno dos como por acá, dos cuatro algo así, y cuatro diez y seis -ubica puntos en el plano dibujado en el tablero- bueno algo como por allá arriba, -ubica ese punto en el borde superior izquierdo del tablero- una de las características que veíamos es que eso crece muy rápidamente - hace mención con las manos de una curva creciente- ***la x aumenta de a poquito, sin embargo la y va subiendo mucho****, ya en el 5 iríamos ¿en cuánto Carlos?*

Ernesto pretende comparar el crecimiento de las funciones exponenciales, con el de la función lineal y con el de la cuadrática. Para ello recuerda cómo se estudia el crecimiento de la función lineal en la clase 1 a través de la noción de pendiente como cociente incremental, lo que se observa en [1][282:283]

[1:22][282:283] Simbólico-Gráfico



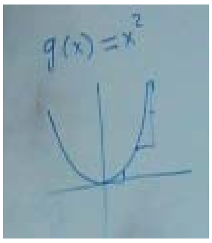
P. Recordemos cómo eran esas funciones, cuando yo tengo la función f de x igual a dos equis más tres. -escribe en el tablero -

$f(x) = 2x + 3$, es una función lineal y nosotros sabemos cómo es el crecimiento de las dos variables, ¿cierto?. Nosotros vemos que la gráfica es algo así como eso, pongamos 3 para que corresponda al corte. Ahí había una cosa que nosotros veíamos, si yo incrementaba la variable x, la variable y o f si lo quieren llamar, ¿cierto? Está diciendo como crecen las cosas, si crece esta en uno la otra crece dos, y eso se llama crecimiento lineal.

Además de recordar el concepto de pendiente de la línea recta [1][282:283] en la clase 1, Ernesto esboza la noción de razón de cambio de la función cuadrática [1][285:285].

[1:23][285:285] Simbólico- Gráfico

P. Funciones como esta, por ejemplo f(x) igual a equis al cuadrado, ya la gráfica cambió por completo. Cómo era la gráfica.



E. Una parábola

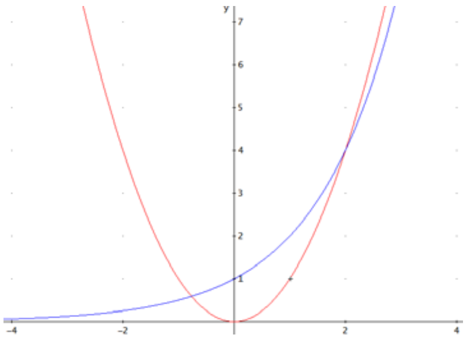
P. -realiza la gráfica en el plano cartesiano- Si usted se para en un sitio, e incrementa en uno ya no es como antes que se va incrementando igual, si incremento en uno la x, este es el incremento en la otra, pero si incremento aquí en uno, miren la otra como cambió. Cambió fuertemente. Y en cada sitio va a dar distinto, claro, cada vez va creciendo más.

En la clase 2, se retoma la función cuadrática y se invita a los estudiantes a comparar, para algunos valores de *x*, los correspondientes valores de la función $y = x^2$ y los de la función $y = 2^x$. Es importante observar que aquí ya no se realiza la comparación entre ambas funciones a través del cociente incremental sino que se hace sólo punto a punto. De manera implícita, en esta asignación de valores en la que se va incrementando una unidad la variable *x* y observa qué pasa con la variable *y*, se puede comprobar cómo la variación aritmética, en la variable independiente produce un cambio geométrico, en la variable dependiente, lo que liga con el origen histórico de la función exponencial y diferencia el crecimiento rápido de la función exponencial frente al de la cuadrática.

[2:64][71…82] SIMBÓLICO- Tabular GRÁFICO

P. ¿Qué otra diferencia con respecto a la función cuadrática?

Supongamos que fuera la cuadrática en 1 vale 1 y en dos ¿cuánto vale? Cuatro, y aquí estaría también coincidiendo con esta - la exponencial - porque 2 a la dos cuatro, pero por ejemplo, a la tres cuánto vale, porque aquí -cuadrática- valdría nueve y en esta -exponencial- ocho y ahora piensen por ejemplo en el cuatro, cuando vayamos en el cuatro, aquí ya vale 16 -exponencial- y ¿aquí en esta? 16, y en 5, cuánto es 2 a la 5.



E. 32

P. 32 y en la otra vale 25. O sea que fíjense *que inicialmente la cuadrática está por encima, pero llega un momento en que ésta - la exponencial - la supera. Tenemos algo así como esto - dibujando sobre la cuadrática la exponencial en el tablero- En qué momento están las dos coincidiendo, ustedes ya me lo dijeron.*

E. En el cuatro, en el dos

P. hay otro punto de contacto, pero llega un momento a partir del cuatro donde ya empieza la otra - la exponencial- a crecer muy rápido. Todas la exponenciales llegan un momento en que se pegan una disparada mucho más fuerte, eso lo vamos a apreciar en el derive, aquí me queda muy incomodo con la tablita.

Así, mediante estas acciones de cálculo de cómo varía la *x* y los correspondientes cambios en *y*, y con la ayuda de la representación gráfica, Ernesto propicia la *comparación tanto a través del registro gráfico como simbólico entre procesos relativos a diferentes funciones crecientes o decrecientes que permitan comparar razones de cambio para distinguir el tipo de crecimiento de la función exponencial*.

Se observa que el profesor establece diferencias primero comparando el crecimiento entre la función lineal y la función cuadrática y luego esta última con la función exponencial propiciando así el mecanismo de encapsulación para que los estudiantes sean conscientes del tipo de crecimiento de la función $y = 2^x$. Esto da lugar a determinar el tipo de crecimiento cuando el profesor indica que: "*todas las exponenciales llegan un momento en que se pegan una disparada mucho más fuerte*".

Llama la atención que el profesor realice el análisis del triángulo característico – lo dibuja – para la función lineal, proceda con un ejemplo a través de este triángulo para la función cuadrática y sin embargo explícitamente se omite esta herramienta de análisis de la razón, de la variación de *y* entre la variación de *x*, para la función exponencial. Para este último caso el profesor realiza una comparación punto a punto.

La modelación de este mecanismo se caracteriza por el uso integrado del registro simbólico con el gráfico. Esta modelación del mecanismo de encapsulación se distingue por la presencia del elemento matemático razón de cambio y el recurso a la comparación del comportamiento de funciones particulares tanto exponencial, como lineales y de cuadráticas. El profesor hace explicitas las relaciones entre objetos matemáticos como una manera de dotar de significado un elemento matemático puntual, la razón de cambio de la función exponencial.

Es importante señalar que, una vez el profesor ha impulsado la comparación entre la gráfica de la función cuadrática y una función exponencial, le asigna un nombre a las representaciones de las funciones exponenciales para que los estudiantes sepan distinguirlas de una forma totalmente intuitiva, así:

[2:61][83:88]

… ¿A qué se les parece la gráfica? ¿Qué cosas de su infancia se les parece?

E. Al tobogán.

P. Dígalo sin pena que usted todavía se manda por ahí.

E. Un rodadero.

P. Un rodadero a mí me gusta todavía, así como lo vemos parece un rodadero. Uno sube por una escalera, se manda y hay una parte bastante planita - mostrando el lado de la gráfica en el cuarto cuadrante- no es plano pero se vuelve casi plano.

De aquí en adelante nuestras funciones exponenciales van a ser muchos rodaderos. Lo que vamos a mirar ahora es -cambiarles de sitio, que si le cambio la base qué pasa con el rodadero, si se para más, si se acuesta más el rodadero. Así como hablamos de que la gráfica de la función cuadrática es una parábola aquí quisiéramos colocar un nombre, por ahora pensemos en rodadero.

3.1.2.3.- Comparación entre procesos relativos a diferentes funciones exponenciales y curvas de funciones exponenciales para establecer relaciones.

En la clase 2 el profesor indica a los estudiantes que observen, en el libro de texto varias gráficas de funciones exponenciales y ayuda a los estudiantes a comparar (Diagrama 3.12) esas gráficas a través de diversas preguntas.

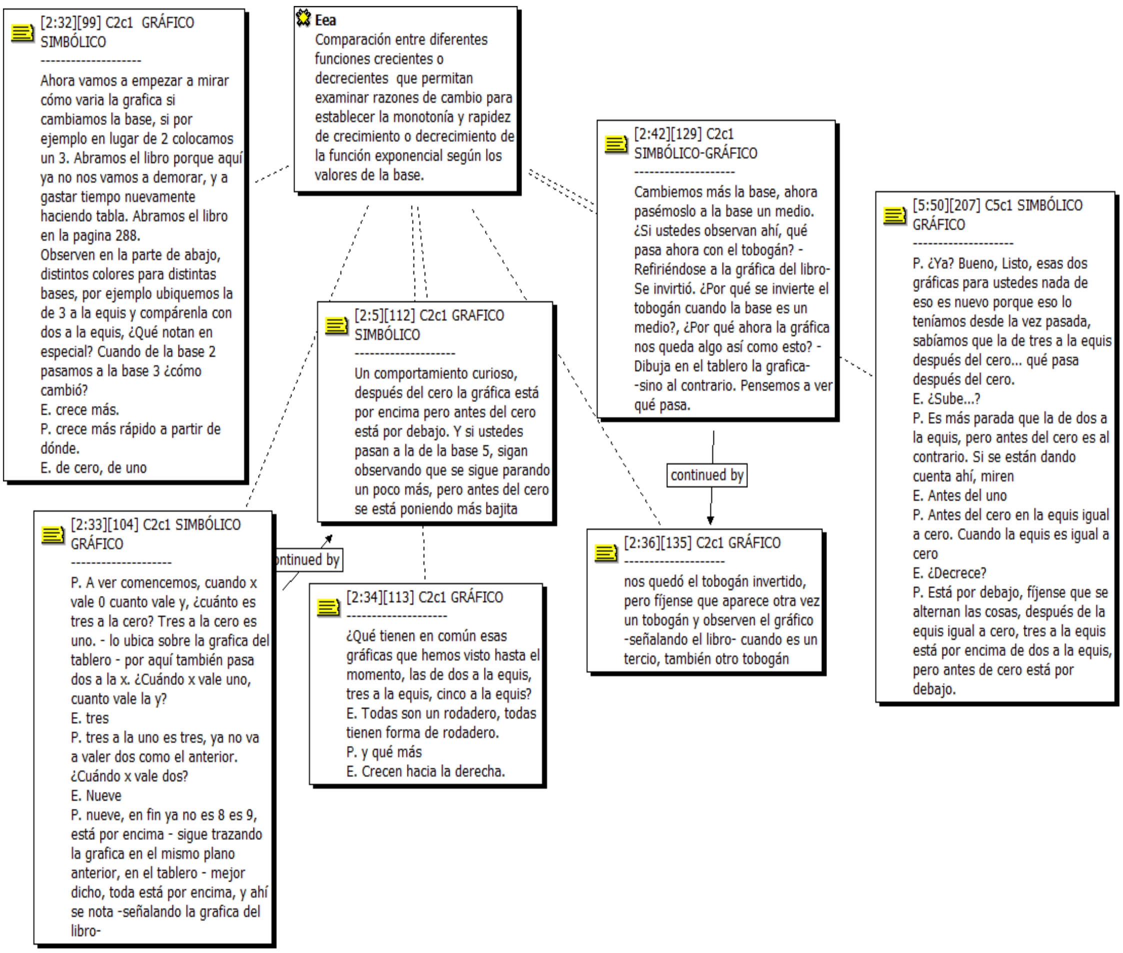


Diagrama 3.12.Crecimiento o decrecimiento de las funciones exponenciales.

El profesor quiere que los estudiantes reflexionen sobre la monotonía de la función exponencial; crecimiento o decrecimiento de la función de acuerdo con el valor de la *base* y, al mismo tiempo, establezcan condiciones que impone la base sobre la rapidez de crecimiento de una función exponencial. De esta manera incluye en el diálogo en la clase (Diagrama 3.12) preguntas relativas a: bases mayores que uno [2][99],[2][113] exclusión de 1 como base [2][121], cuando la base es menor que 1 y mayor que cero [2][129].

En esta misma línea de ideas, no se trata de observar de forma aislada la gráfica de estas funciones, sino que se propician las comparaciones entre ellas para analizar cómo es el crecimiento en función de los valores de la base. Por ejemplo, en el siguiente segmento se compara el crecimiento de la función $y = 2^x$, con el de $y = 3^x$ como sigue:

[2:47][99] SIMBÓLICO GRÁFICO

P. …ubiquemos la de 3 a la equis y compárenla con dos a la equis, ¿Qué notan en especial? Cuando de la base 2 pasamos a la base 3 ¿cómo cambió?

E. crece más.

P. crece más rápido a partir de dónde.

E. de cero, de uno.

Continúa induciendo observaciones acerca del crecimiento de la función y, para ello, además de utilizar representaciones gráficas del texto, hace uso del gráfico cartesiano que ha marcado en el tablero con la representación gráfica de la función $y = 2^x$, (Gráfica [2:47][99]) añadiendo puntos que le permiten trazar la curva de la función $y = 3^x$. De esta forma va realizando preguntas acerca del crecimiento de estas funciones tanto para valores enteros positivos como negativos de *x*, estableciendo diferencias entre el crecimiento antes y después de cero.

Atendiendo a la descomposición genética de la función exponencial se observa que Ernesto propicia la *comparación entre procesos de curvas exponenciales para establecer relaciones*, lo que le permite caracterizar la monotonía de las funciones con base mayor que uno, y establecer el punto de corte de estas funciones con el eje *y*:

[2:50][113] GRÁFICO

¿Qué tienen en común esas gráficas que hemos visto hasta el momento, las de dos a la equis, tres a la equis, cinco a la equis?

E. Todas son un rodadero, todas tienen forma de rodadero.

P. y qué más.

E. Crecen hacia la derecha

E. Todas pasan por un punto.

P. ¿por cuál?

E. por el uno.

P. por el cero uno. En la y todas pasan por el uno.

A continuación se pasa a realizar esta comparación para funciones exponenciales con bases entre cero y uno:

[2:60][129] SIMBÓLICO GRÁFICO SIMBÓLICO

Cambiemos más la base, ahora pasémoslo a la base un medio. ¿Si ustedes observan ahí, que pasa ahora con el tobogán? - Refiriéndose a la gráfica del libro- Se invirtió. ¿Por qué se invierte el tobogán cuando la base es un medio?, ¿Por qué ahora la gráfica nos queda algo así como esto? - Dibuja en el tablero la gráfica- -sino al contrario. Pensemos a ver qué pasa.

Se encuentra en esta parte del desarrollo de la clase la tarea con la cual el profesor enuncia la monotonía de una función exponencial con base entre cero y uno, y propicia la comparación a través del registro gráfico.

[253][139…]

P…nos quedó el tobogán invertido, pero fíjense que aparece otra vez un tobogán y observen el gráfico -señalando el libro- cuando es un tercio, también otro tobogán, ¿qué pasa con ese tobogán?

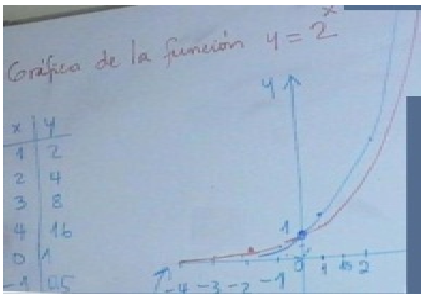
P. ¿cuándo la base es menor que uno? Por ejemplo un medio el tobogán se abre hacia la izquierda, un tercio, etc. Por ahora van dos tobogán, hacia la derecha y hacia la izquierda y lo común entre todos ellos es que pasan ¿por dónde?

E. Punto cero uno.

Para estas representaciones de funciones exponenciales con base entre cero y uno, el profesor decide no enunciar la relación entre el valor de la base y el decrecimiento de la función. En su lugar ayuda a los estudiantes a reflexionar, mediante la observación de las gráficas de esas funciones, lo que expresa en la entrevista posterior a la clase 2:

17: 17][83:93]

I. O sea, tú les dices: definitivamente podemos ver que hay dos tipos de toboganes, uno que abre a la derecha, otro que abre a la izquierda. El que ya habían analizado hasta el momento, pues era el creciente, cierto. Y les habías hecho énfasis en que era crecimiento y crecimiento exponencial, pero explícitamente no les dices: y entonces aquí tendríamos decrecimiento exponencial. ¿Eso no lo dices con intención para después decirlo o…?



P. No. Yo creo que ahí más, estaba jugando en ese momento era como con la imagen ahí del…

I. Ah, la imagen…

P. La imagen de que es así o se abre para acá. Pero creo que más adelante si se explicita que crece o decrece

I. Ajá

P. En algún momento donde hace un resumen uno dice: hay dos tipos de gráficas y en esta gráfica crece y en esta otra está decreciendo.

La estrategia que utiliza el profesor, en su discurso en la clase 2, para caracterizar las funciones exponenciales es a través de la forma de su gráfica, un "tobogán". Ese va a ser el argumento que va a utilizar (Diagrama 3.13) para dar una explicación de lo que pasa cuando la base es negativa, como se observa a continuación.

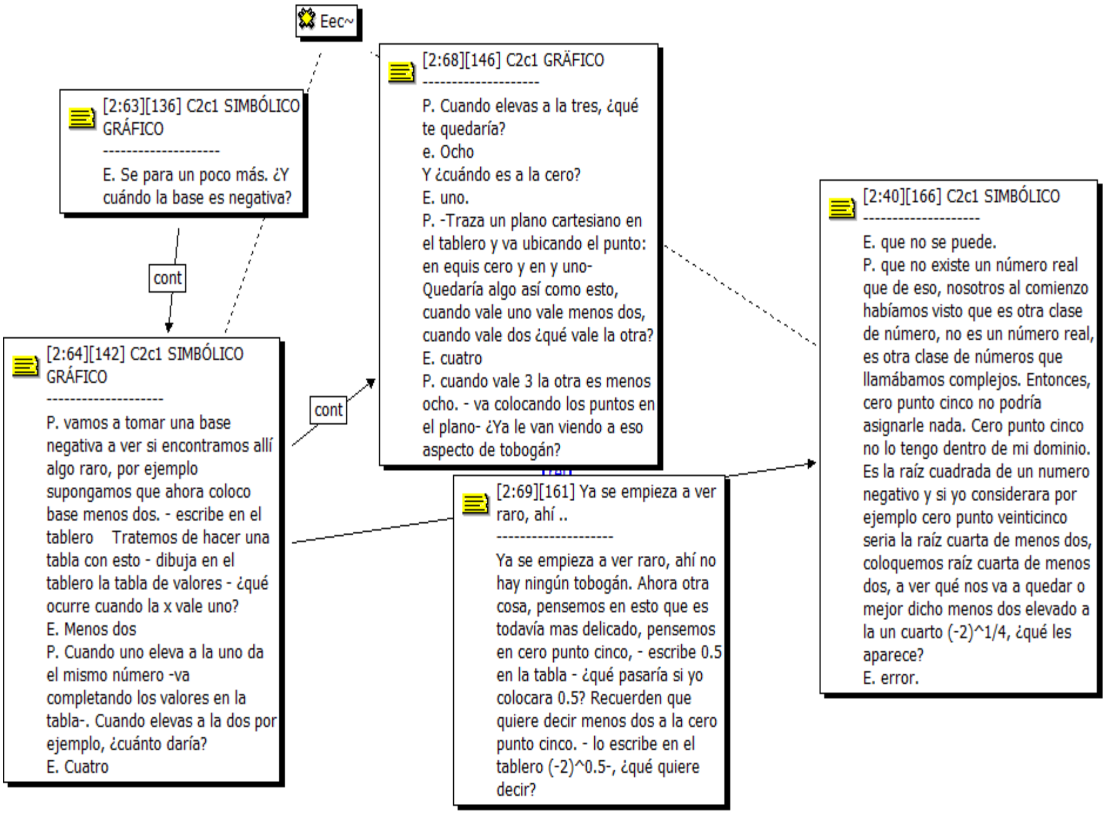


Diagrama 3.13. Explicación de la exclusión de bases negativas.

En la clase 5, al utilizar el programa Derive, se procede nuevamente a comparar funciones exponenciales crecientes y, en la entrevista posterior a esa clase, el profesor manifiesta que insiste en esta cuestión puesto que uno de sus objetivos era que de esta forma los estudiantes descubrieran el tipo de crecimiento que tienen estas funciones:

[20][5:11]

P. Pues ahí lo que quería era que tuvieran una representación gráfica mucho más amigable con una cantidad de detalles más apreciables que allá a mano es difícil ver y que cuando uno trata de comparar gráficas, ahí la fineza de los detalles si se puede apreciar.

I. Ah, sí porque les pones a comparar dos a la equis.

P. Tres a la equis y entonces ellos empiezan a describir cosas está por encima en este tramo… y la otra idea era meter ahí la función con la base e.

I. Y compararla con la de dos a la

P. equis y tres a la equis.

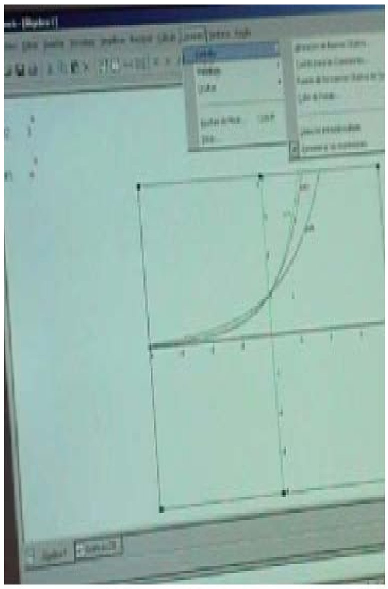
I. Tu dirías que uno de los trabajos que se hace ahí es como en un momento una generalización porque tu empiezas con dos a la equis, cinco a la equis, ¿lo que quieres es que concluyan de a a la equis?

P. De alguna manera eso ya en clase lo habíamos considerado y lo que quería mirar era la posibilidad de hacer por ejemplo movimientos de manera inmediata, con todo el cuidado, porque como la cuestión es una línea curva hacerlo a mano es… no… mirar la suavidad de la curva, el crecimiento.

Con el programa Derive, se realizan nuevamente las gráficas, en una misma pantalla, de dos curvas que representan las funciones exponenciales $y=2^x$ e $y=3^x$, para volver a comparar el crecimiento. Posteriormente introduce una nueva función, $y=e^x$ para realizar esta comparación.

[5:9][244] SIMBÓLICO GRÁFICO

P. Entonces por favor las tres gráficas, las tres gráficas que las tienen allá. Listo, copian eso y lo pasan a la ventana de Algebra, ¿ya? Y en un texto van a explicar ahí, miren al escribir las tres gráficas, yo observo tal y tal cosa. Qué observan ahí con relación a las tres gráficas.



Respecto a estas tareas la instrucción era:

[5:12][276-277]

P. Repito, deben colocar ahí al lado de cada gráfica, entonces si ésta es la de dos a la equis, entonces que aparezca ahí al ladito y igual a dos a la equis. ¿Cierto?, no por allá lejos sino ahí. Las tres. Y entonces ustedes van a describir lo que observan con relación a la posición relativa ahí de las gráficas.

En Editar dicen Copiar ventana y luego la insertan allá en la ventana de algebra, y añaden un texto comparando la gráfica de e a la equis con la gráfica dos a la equis y la de tres a la equis. Ahí se observan unos rasgos generales que uno rápidamente describe. E. Nosotros pusimos que pasa por uno.

P. Bueno, escríbelo. Pero cosas claves ahora. Ya sabemos que todas pasan por el uno, y eso lo puedes decir pero hay otras cosas que son importantes

E. Por ejemplo antes del uno…

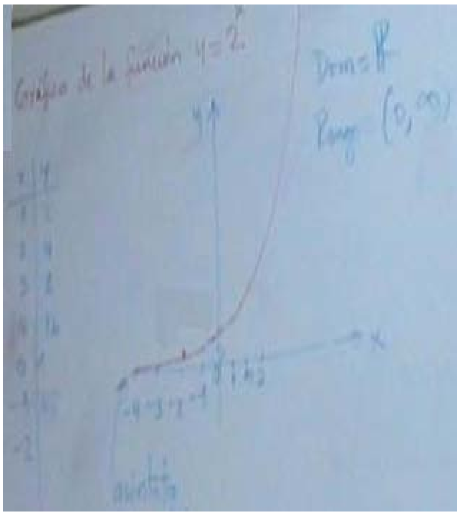
El enunciado de la tarea [5:9][244] y la entrevista con Ernesto [20][5:11] realizada después de observar la clase, nos permite confrontar la clasificación que hemos realizado de los segmentos sobre la modelización del mecanismo de encapsulación para identificar las características de las funciones exponenciales como, por ejemplo el crecimiento y el corte con el eje *y*.

En esta clase 2 el mecanismo de encapsulación se modela integrando el registro simbólico como en el gráfico. Una vez realizada la gráfica de la función $y=2^x$ se describe cómo la curva se va aproximando al eje x sin llegar a cortarlo para valores de x cada vez más pequeños. Esta aproximación [2][60:62] es utilizada por el profesor para obtener conclusiones [2][91:96] sobre el dominio y rango de la función exponencial.

[2][60:62] SIMBÓLICO-GRÁFICO

P. Uno sobre ocho y uno sobre ocho es todavía más pequeño, más bajito. Y si vamos colocando menos cuatro más bajito todavía y así sucesivamente, ¿qué es 1/16?, ¿qué están observando entonces en la gráfica a medida que yo me muevo más y más a la izquierda?, ¿qué es lo que está pasando?

E. se va acercando a cero



P. Cada vez se va acercando a cero pero no es cero, si usted coloca dos a la menos quinientos mil eso puede ser muy pequeño pero no es cero.

[2:4][91:96]

E. Los reales

P. ¿rango?

E. Los reales positivos.

P. muy bien los reales positivos. Si los escribimos con intervalo, ¿el intervalo cómo sería?

E. cero abierto

P. Si yo coloco aquí abierto, estoy diciendo que no hay ningún valor aquí en la x que le permita que el resultado sea cero, o en otras palabras, para cualquier valor de x dos elevado a ese valor nunca va a dar cero, va a dar muy próximo a cero.

El uso del registro simbólico, a través de notación de intervalos, para definir los conjuntos numéricos que conforman el dominio y el rango de la función se retoma en la entrevista posterior a la clase 2, cuando se le pregunta al profesor acerca de su intención al realizar estas actividades. La explicación que da es la siguiente:

[17:5][44]

P…más para caracterizarla. Porque a partir de eso, digamos, de ir tomando algunos valores, ellos, ya ellos están haciendo como la distinción, de por ejemplo que si cogemos a la izquierda; simplemente va bajando, va bajando y listo y a la derecha va subiendo, va subiendo y de alguna manera eso me va a ayudar luego a mirar cuál es el rango de la función. Entonces, si ya cogió para allá y esta sigue bajando hasta, pero no toca la cosa esa [el eje x]. Entonces uno dice: ah, pues el rango es de cero en adelante.

En este caso, el profesor no está únicamente examinando la asíntota de la función, sino que pretende que los estudiantes reflexionen para determinar el dominio y el rango de la función particular exponencial $y = 2^x$. Dominio que está definido como el conjunto de números reales. En seguida, en esta clase 2, también el profesor presenta un resumen de las funciones exponenciales y a partir de la representación simbólica de la función exponencial enuncia una definición en donde se establecen las restricciones para la base a de una función exponencial:

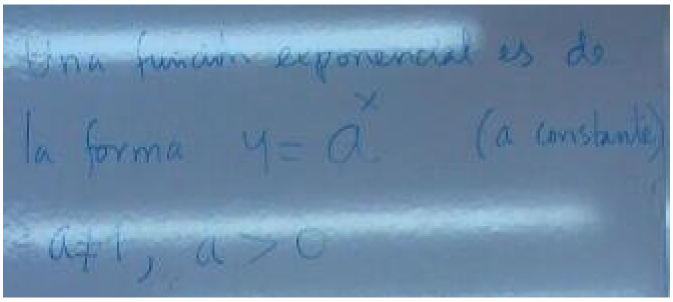
[2:46][175-181] SIMBÓLICO

P. -Escribe en el tablero- una función exponencial es de la forma y igual a a elevado a la x, en la parte de abajo hay un número, a es una constante. Y ustedes mismos me van a decir cuáles son los posibles valores que le podemos colocar a la a. Díganme ¿cuáles no se pueden?

E. uno

P. Vamos a decir, mire ahí, en la a, no me vaya a colocar un uno porque eso no lo vamos a considerar como una función exponencial, ¿Qué más no voy a considerar?

E. Cero.



P. Muy bien, cero no lo vamos a considerar porque habría muchas cosas que no se pueden hacer. Y tampoco se puede para que cosas.

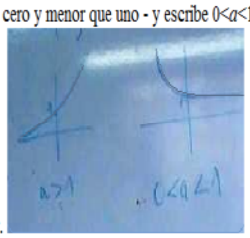
E. Para números negativos.

P. Los números negativos. Entonces como no se puede ni para cero, ni para números negativos, digamos que a sea mayor que cero, que no vaya a ser menor que cero ni el mismo cero, que sea positiva.

Luego, a partir de la representación gráfica distinguiendo los "dos tipos de toboganes" e integrando la distinción que se hace sobre distintos valores de la base para la representación, se establecen dos familias de funciones. Aquí Ernesto está modelando la encapsulación de la función exponencial haciendo uso de los elementos matemáticos globales en el paso de funciones particulares a la función genérica y con el uso explícito los elementos matemáticos puntuales, base de la función exponencial y la monotonía creciente o decreciente.

En el diálogo con los estudiantes, [2] [183] se puede observar cómo se hace referencia a los dos tipos de "toboganes" o representaciones gráficas que devienen de estas bases (Diagrama 3.14).

[2] [183]
Una función exponencial la base tiene que ser positiva y distinta de 1, y cuando uno hace las gráficas le aparecen dos tipos de toboganes. - Dibuja un plano cartesiano- el que aparece así (decreciente) pasando por el uno y ¿esos salen cuando la a es cómo?
E. Mayor que 1.
P. Mayor que 1. Esos salen cuando la base es mayor que uno. Y cuándo salen los toboganes que van para el otro lado.
E. Cuando la a es mayor que cero
P. La a mayor que cero y ¿qué más?
E. Y menor que uno.
P. Mayor que cero y menor que uno - y escribe 0<*a*<1. Muy bien ahí resumimos los dos tipos de graficas que



vamos a tener.

[17:16] [93] E2c1

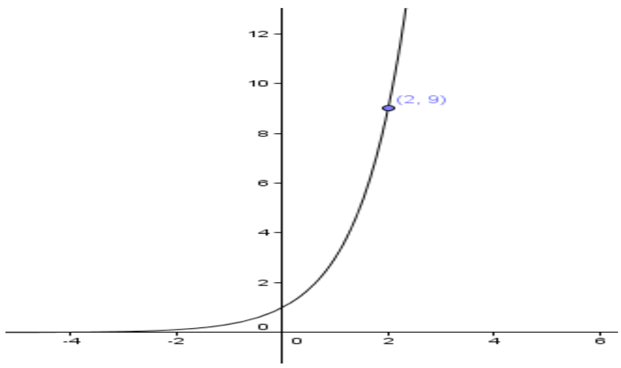
P. En algún momento donde hace un resumen uno dice: hay dos tipos de gráficas y en esta gráfica crece y en esta otra está decreciendo
I. Ajá
P. Creo que por ahí es la---
I. La idea de establecer un resumen de esos es...
P. Es simplemente como que el estudiante vea que ya no hay más posibilidades que ahí ya están como recogidas que cada vez que quiera hacer un grafico de una función exponencial le pinta algo así o asa.

Diagrama 3.14. Entrevista y segmento de clase sobre encapsulación en el registro gráfico.

Este discurso, en donde el profesor encapsula a la función exponencial haciendo uso del sistema simbólico y el gráfico, deja implícitos los otros elementos matemáticos; dominio, rango, razón de cambio, corte con el eje y asíntota, que fueron construidos mediante la comparación de procesos y el mecanismo de interiorización, propiciados por el profesor.

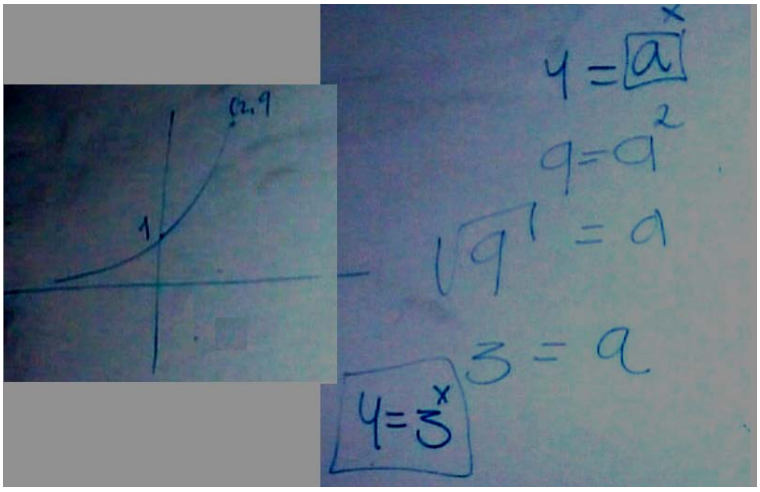
Una vez han realizado estas actividades, al finalizar la clase 2, el profesor plantea a los estudiantes una tarea que consiste en determinar la expresión simbólica de una función exponencial dada su gráfica. Esta tarea está organizada a partir de las gráficas de cuatro funciones, dos de ellas crecientes y dos decrecientes y la pareja de coordenadas de un punto de cada una de ellas. El enunciado en el libro de texto es:

Determine la función exponencial $f(x) = a^x$ *cuya gráfica es.*



Gráfica 2. Enunciado de la tarea.

La primera gráfica corresponde a una función creciente para la que se da como dato el punto (2,9) que pertenece a la curva. La solución en clase es:



Gráfica 3. Punto y gráfica para la función exponencial

El gráfico dado en el libro de texto implica que el estudiante no debe examinar la curva punto a punto sino que conociendo dos puntos sobre la curva que ya está trazada y partiendo de la expresión simbólica genérica para las funciones exponenciales $y = a^x$, busque la expresión simbólica para esta función en particular $y = 3^x$.

[2:56][201:204] SIMBÓLICO Numérico GRÁFICO

P. Si yo les preguntara qué número al elevarlo al cuadrado da nueve, lo escribo así $\sqrt[2]{9}$*. Claro, hay dos posibilidades pero como aquí las bases tienen que ser positivas, entonces es tres.*

Se observa [2:56][201:204] cómo el profesor explica por qué se excluye la solución -3 (Gráfica 3) recurriendo a la definición [2:46][175:181] de función exponencial establecida con anterioridad en la que se indica que la base " *sea positiva*". Se continúa realizando la tarea individualmente. El profesor revisa las soluciones, de los tres últimos ejercicios, tratando la función exponencial como si fuera un objeto:

[2:55][215:222] GRÁFICO SIMBÓLICO
P. Y en la 12 ¿cuánto le dio la base?
E. Cinco.
P. Y en el 13.
E. Un cuarto.
P: Fíjese que ese tobogán ya mira para el otro lado. Fíjense que los toboganes de la 11 y la 12 se abren hacia la derecha, pero el de la 13 se abre hacia la izquierda, la base me tiene que dar menor que uno. Y, un cuarto que me dijeron… sí, es razonable... y en el catorce cuánto les dio.
E. Un medio.

Este último ejercicio de la tarea corresponde a una función decreciente que pasa por el punto (-3,8) y la solución se realiza de forma numérica de la siguiente forma, una vez se ha realizado el ejercicio individualmente.

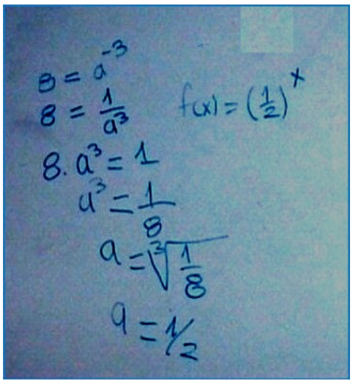
[2:58][225:228] SIMBÓLICO

E. Profe, ¿cómo hizo ahí para que desapareciera a^3*?*

P. Cada vez que es una potencia, por ejemplo 2^3 *es 8, si tú vas a preguntar por la base, estás preguntando por una raíz. La raíz cúbica de ocho.*

E. Profe, cuándo pregunté por la base.

P. Y eso es lo que ella está tratando de hacer acá, qué número elevado a la tres da un octavo. Entonces el número tiene que ser la raíz cúbica de un octavo.

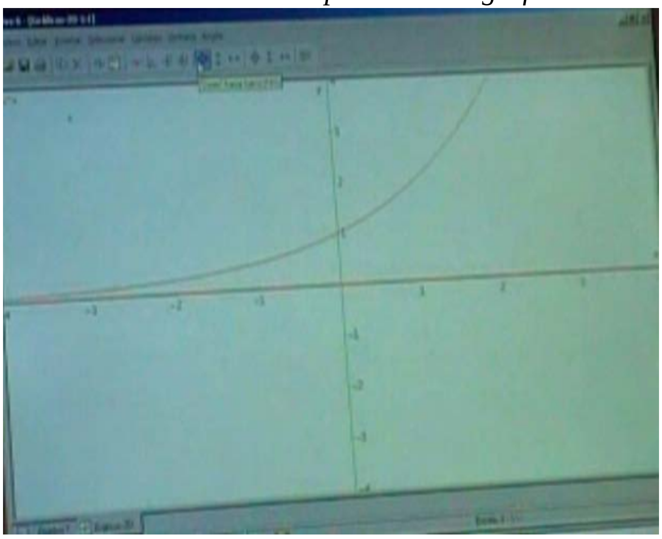


El ejercicio exige la sustitución de una pareja de valores para luego despejar y encontrar la base de la función exponencial. Se plantea una reflexión sobre la función como un proceso que implica elevar una base a un exponente dado para encapsularla en un objeto $f(x)=\left(1/2\right)^x$.

Más adelante, en la clase 5, el profesor hace uso del programa Derive para, a partir de la expresión simbólica de la función exponencial $y=2^x$, obtener la curva correspondiente, e identificar sus características como el corte en el eje *y*, el dominio, el rango y la asíntota de la función.

[5:4][60-66] GRÁFICO

P. Listo, bueno, muy bien. Ahí ya todos estamos entonces apreciando la gráfica de esa función exponencial, ¿verdad? Bueno, recordemos algunos detalles. A ver Nicolás, el dominio de esa función cuál es.



E. Son todos los reales, el rango

P. Rango…

E. eh, eh De cero a…

P. Si no hay necesidad de que uno haga esfuerzos fuertes de memoria. Ahí lo está viendo en la gráfica, de cero a infinito.

Bien, ¿dónde corta al eje y? Ingrid…

E. En uno.

P. En uno. Dónde corta al eje equis. Nelson

E. No lo corta

P. No lo corta. No corta al eje equis. Listo, estamos recordando algunos detallitos, ¿ya?

E. Esta es una asíntota, ¿cierto?

Las instrucciones del profesor [5][60:66] y [5][83] denotan su interés por indagar sobre procesos que ya se han construido. Por ello, en el diálogo, el profesor trata de que los estudiantes identifiquen los elementos matemáticos puntuales a partir de la representación gráfica.

[5][83]

P. ¿Cuándo equis es muy grande qué pasa con el valor de y? De acuerdo a lo que estás apreciando ahí en el gráfico.

E. ¿Va subiendo?

P. O sea…

E. Va creciendo…

P. También es muy grande ¿verdad? Cuando equis está muy a la izquierda, por ejemplo menos quinientos mil, ¿qué está pasando con la y, Carlos?

E. Se acerca más a cero

P. Es muy pequeñita, está muy próxima a cero, ¿verdad? Esos detalles de que cuando uno coge allá por la equis hacia la izquierda y ve que se están acercando ahí la gráfica y la línea esa del eje equis, nosotros decíamos que el eje equis es qué cosa. Una qué

E. una asíntota.

La descripción anterior corresponde a la modelación del mecanismo de encapsulación de la función exponencial que Ernesto establece en sus clases. Es interesante en esta construcción observar que en la entrevista posterior a las clases con Derive, Ernesto manifiesta que considera que le hizo falta propiciar tareas correspondientes a establecer la relación de proporcionalidad entre la tasa de cambio de la función y el valor de la función en un punto. La intervención de Ernesto es:

[20:2-3-10][11-14]

P. De alguna manera eso ya, en clase, lo habíamos considerado y lo que quería mirar era la posibilidad de hacer, por ejemplo, movimientos de manera inmediata, con todo el cuidado, porque como la cuestión es una línea curva, hacerlo a mano es… no… mirar la suavidad de la curva, el crecimiento.

De hecho ya después mirando las cosas… entonces yo quisiera preguntas más interesantes pero es que veo que también en las condiciones que están los estudiantes, preguntas más de fondo es como complicado si aun están unos todavía familiarizándose con el programa, a algunos les cuesta visualizar bien la pantalla, colocar el zoom,… , por lo tanto es muy difícil dar el salto a una cuestión más conceptual muchas veces se nos queda en sintaxis, en cómo introducir un valor, pero no son cosas muy de sustancia.

I. ¿Y algo de sustancia que tu hubieras querido trabajar y pienses que no se pudo… qué no se pudo preguntar o…?

P. En realidad es algo que después fue que vino, pero en ese momento yo sentía que no iba más allá de esos detalles, pero luego más adelante es que la característica más importante de esa función es que son proporcionales a la función la variación, la tasa de cambio es proporcional al valor de la función, esos detallitos si se pudieran explorar ahí muy bien. Pero entonces en ese momento yo no tenía esa percepción de esa cosa.

Esta afirmación de Ernesto es plenamente coincidente con el desarrollo de sus clases debido a la ausencia de tareas que propicien la idea de lo que Ernesto considera la característica más importante de la función exponencial: *"la tasa de cambio es proporcional al valor de la función"*.

3.1.2.4. Síntesis.

Se concluye que Ernesto modela el mecanismo de encapsulación construyendo la gráfica de las funciones exponenciales $y = 2^x$ $y = 3^x$, $y = (1/2)^x$ $y = (1/3)^x$ proponiendo la comparación mediante las representaciones simbólica y gráfica de los comportamientos entre diferentes funciones exponenciales y exponenciales con lineal y cuadrática.

El profesor utiliza el programa Derive para obtener una representación "*más amigable, con una cantidad de detalles más apreciables que allá a mano es difícil ver y que cuando uno trata de comparar gráficas, ahí la fineza de los detalles si se puede apreciar*". A partir de estas tareas y con las preguntas que el profesor realiza a los estudiantes se modela el mecanismo de encapsulación estableciendo las características de la función exponencial. Fundamentalmente, valiéndose del registro gráfico de las funciones exponenciales particulares anteriormente mencionadas, ayuda a los estudiantes a reflexionar sobre las condiciones que se imponen a la base para estudiar la monotonía, sin ser explícito en el decrecimiento. Además se estudian otras características de las funciones exponenciales como el corte con el eje y de la función exponencial.

La modelación del mecanismo de encapsulación se realiza a partir de la comparación de diversas funciones exponenciales entre sí y de las funciones exponenciales con otras funciones conocidas por los estudiantes. Se realiza el análisis con el triángulo característico tanto para la función lineal como para la función cuadrática y se usa tácitamente esta herramienta de análisis de la razón de cambio: la variación de *y* entre la variación de *x*, para comparar la función cuadrática con la función exponencial.

Por un lado el profesor recurre a relacionar las funciones exponenciales, estableciendo un nombre para los gráficos de las funciones exponenciales, "toboganes", asociado a su tipo de crecimiento y utilizando expresiones como *x "aumenta de a poquito" mientras en cambio en y "va subiendo mucho"* dando así una imagen intuitiva de la razón de cambio de esta función. La representación gráfica, el "tobogán", se utiliza como ayuda para que los estudiantes puedan visualizar el tipo de crecimiento/decrecimiento de las funciones exponenciales según que la base de la función sea mayor o menor que 1 y como argumento para excluir, de las funciones exponenciales, aquellas expresiones, que aun teniendo el exponente como variable, su base es negativa. Utiliza también los dos registros para comparar la representación de diversas funciones exponenciales con base mayor que uno y base mayor que cero y menor que uno.

Se insiste desde la primera clase hasta la clase 4 en la modelación del mecanismo de encapsulación y en la mención de una característica de la función exponencial que no estaba identificado por los investigadores en la descomposición genética para establecer una característica común de estas funciones, como que: “la variable está en el exponente”.

El otro aspecto que se evidencia, es la caracterización de algunos de los elementos matemáticos puntuales de las funciones exponenciales determinados a partir de ciertas funciones particulares, como son el punto de corte con el eje *y*, la asíntota, y el dominio. Además, Ernesto realiza tareas que propician la comparación entre el tipo de crecimiento lineal, el exponencial y el de las funciones cuadráticas a través de su razón de cambio promedio. Esta modelación del mecanismo de encapsulación se distingue por la presencia del elemento matemático razón de cambio y el recurso a la comparación del comportamiento de funciones particulares tanto exponencial, como lineales y de cuadráticas.

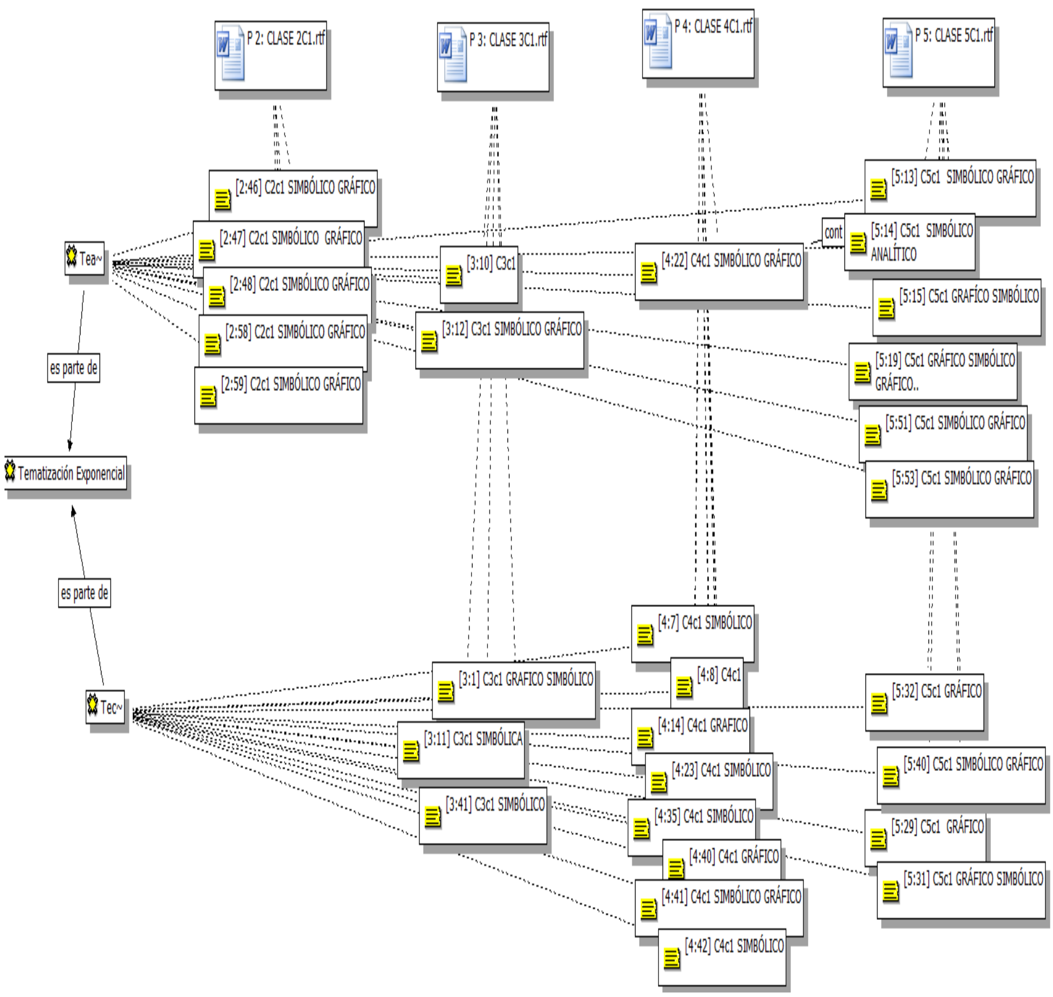
El profesor organiza la comparación entre las diferentes funciones, desde dos aspectos; con la caracterización de que la variable en estas funciones está en el exponente y de manera explícita a partir del elemento matemático puntual, base de la función. Para distinguir entre el crecimiento y el decrecimiento de las funciones exponenciales, recurre a la comparación de funciones, en donde permanecen inmersos los elementos matemáticos asíntota y el punto de corte con el eje *y*. De esta forma Ernesto está propiciando el paso en la comprensión de funciones particulares a una función general, al pretender que los estudiantes lleguen a construir las funciones exponenciales crecientes, correspondientes a las que tienen una base mayor que uno y, en el caso de base entre cero y uno, las funciones decrecientes, tanto a través de la representación simbólica como gráfica.

El esquema 2 (p. 146) permite apreciar que la modelación del mecanismo de encapsulación, se concentra en la clase 2, y algunas tareas en la clase 1 y 5. Ernesto parte del registro simbólico para trabajar también el registro gráfico, e integra los dos registros y así modela la encapsulación de la función exponencial; incluyendo los elementos matemáticos puntuales: rango, dominio, base, corte con el eje *y*, asíntota y crecimiento o decrecimiento.

Si bien el profesor modela la encapsulación en la misma clase dos, ésta se lleva a cabo inmediatamente después de las tareas realizadas para modelar el mecanismo de interiorización. La progresión en la construcción del conocimiento impulsada por el profesor sigue la estructura: acción – proceso – objeto.

3.1.3. Viñeta tres. Modelación del mecanismo de tematización del esquema función exponencial

La tematización del esquema de la función exponencial se modela en diferentes clases y mediante diferentes tareas, concretamente en las clases 2, 3, 4 y 5 (Esquema 3). Las tareas matemáticas de generalización y las tareas de contextualización son interpretadas como modelación de procesos de tematización.



Esquema 3. Segmentos en las clases: tematización de la función exponencial. Caso de Ernesto.

En la clase 2 el profesor modela la tematización *de la función exponencial objeto* $f(x)=b^x$ *por diversas transformaciones relacionando los diferentes parámetros de la representación simbólica con sus efectos en la representación gráfica,* mediante tres tareas. En las dos primeras se trata de identificar la gráfica correspondiente a una traslación de la función exponencial, para lo cual se maneja el objeto función exponencial tanto en su representación simbólica como gráfica. La tercera tarea corresponde a la transformación de la función $y=3^x$ mediante una reflexión respecto al eje *x* para obtener la función $y = -3^x$ y la reflexión respecto al eje *y* de la función $y = 10^x$ para obtener la función $y = 10^{-x}$.

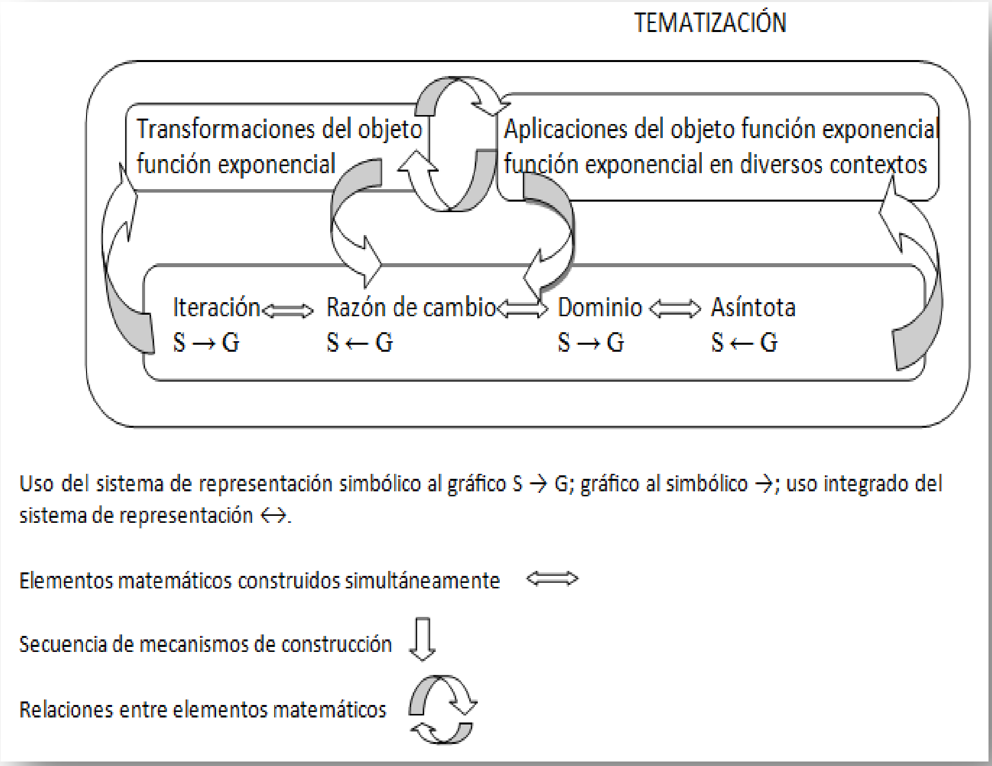
La clase 3 se inicia con la función $y = 2^{x+1}$ para explicar los efectos que genera sumar una unidad a la variable *x*. Se usa el registro gráfico, lo que se traduce en un desplazamiento horizontal de la gráfica de la función exponencial. A continuación se presenta un ejemplo de alargamiento vertical de la función $y = 2^x$ mediante el factor 3.

En la clase 5, en el aula de computadores, el profesor plantea una tarea que consiste en trazar la gráfica de una función exponencial transformada y averiguar el punto de intersección con el eje *y*. Antes de permitir a los estudiantes realizar la gráfica con el programa Derive, les pide que verbalicen cuáles son los cambios que sufre la función exponencial de acuerdo con la transformación dada. En el diálogo sobre dicha representación gráfica, se maneja la función exponencial como un objeto, indicando cómo afectan las trasformaciones a la gráfica de la función.

La modelación de la tematización, *utilización de la función exponencial en diferentes contextos: crecimiento de poblaciones, decaimiento, temperatura e interés compuesto, comportamiento radiactivo*, se realiza en la clase 4 cuando el profesor trata el *crecimiento exponencial* utilizando, para ello, contextos de poblaciones de bacterias y humanos planteados en tres tareas del libro de texto.

En la sesión 5, que se realiza en la sala de computadores utilizando el software DERIVE, se continúa la modelación aplicando la función exponencial en otros contextos. Se comparan dos situaciones con dos tipos de crecimiento, uno lineal y otro exponencial. Además, también se plantea la tarea de resolver un problema sobre el salto de un paracaidista asociado a una transformación de la función exponencial.

A continuación se detallan las clases, estableciendo las relaciones que el profesor propicia entre las transformaciones de la función exponencial y los nuevos contextos, y las relaciones que lo anterior implican sobre los elementos matemáticos puntuales que conforman el objeto función exponencial y el uso de elementos matemáticos globales. La modelación de la tematización presenta la siguiente estructura:



Síntesis F. Modelación del mecanismo de tematización del caso 1.

En la solución de tareas de aplicación de la función exponencial, Ernesto retoma la explicación de fenómenos a través de acciones de iteración, que usa nuevamente para establecer observaciones sobre la razón de cambio de la función. De manera simultánea dirige las preguntas para que los estudiantes determinen el dominio y propicia las reflexiones sobre la recta asíntota de cada función transformada.

A continuación se describe la concreción de esta modelación en cada una de esas sesiones y tareas.

3.1.3.1. Transformaciones de la función exponencial.

La modelación de la tematización del esquema de la función exponencial a través de *la generalización de la función exponencial objeto* $f(x)=b^x$ *por diversas transformaciones relacionando los diferentes parámetros de la representación analítica con sus efectos en la representación gráfica*, es sustentada por el profesor, como se muestra en el diagrama 3.15:

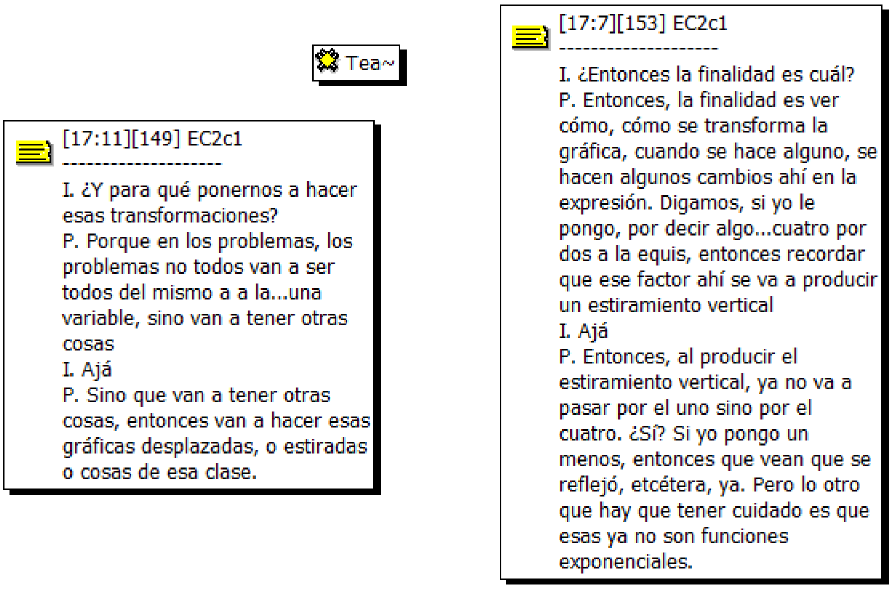


Diagrama 3.15. Explicaciones del profesor sobre su objetivo con las transformaciones de la función exponencial.

Las transformaciones que se realizan, en el registro gráfico, corresponden tanto a traslaciones horizontales como verticales, a reflexiones y a ampliaciones. El profesor, en la clase 3, retoma el objeto función exponencial, mediante el siguiente diálogo:

[3][7:16]

P. ¿Qué es una función exponencial?

E. La que tiene la variable en el exponente.

P. Es una función ¿qué tiene qué estilo, qué forma?

E. La forma y igual a a la x.

P. a a la x, donde a es una constante, la base decíamos que tiene que ser distinta de 1. ¿Qué más decíamos?

E. Positiva

P. Que sea positiva. Y la gráfica de esas funciones exponenciales era de dos clases, ¿cierto?

E. Como un tobogán

P. Y se abren hacia la derecha o hacia la izquierda. Y en los ejercicios que ustedes hicieron la vez pasada lo que hacíamos era correr ese rodadero. Hacerle las transformaciones que se le hacen a cualquier función ¿cierto?

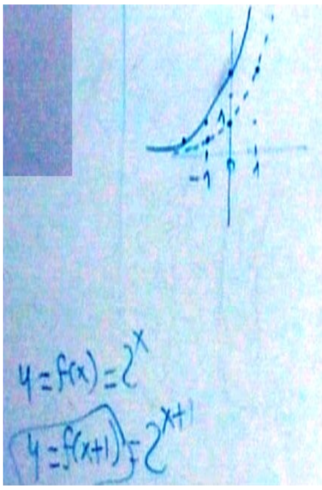
Los ejercicios mencionados en el diálogo [17][149],[17][153] se han extraído del libro de texto y forman parte de una tarea propuesta por el profesor hacia el final de la clase 2 para identificar la gráfica de la función correspondiente a una determinada expresión simbólica.

Se presentan tres ejercicios de traslación de las funciones exponenciales; se parte de $y = 2^x$ y se presenta gráficamente la función $y = 2^{x+1}$ realizando una traslación horizontal de una unidad a la izquierda. En el siguiente ejercicio se traslada horizontalmente la función $y = 5^x$ tres unidades a la izquierda, obteniendo la función $y = 5^{x+3}$. Finalmente se realiza una traslación vertical de 3 unidades positivas para obtener la gráfica de la función $y = 5^x + 3$.

El profesor modela mediante esta actividad la tematización, proponiendo a los estudiantes manejar al mismo tiempo el registro simbólico y el registro gráfico, partiendo de una gráfica de la función exponencial del tipo $y = a^x$ y realizando las trasformaciones necesarias para obtener la gráfica de la función considerada en cada caso.

[2:47][190:192] SIMBÓLICO GRÁFICO

P…vamos a mirar qué pasa cuando yo le hago modificaciones a la función, por ejemplo…$y = 2^{x+1}$ *. ¿Qué le hace a la gráfica y igual a dos a la x?, ¿la corre hacia dónde?*



E. Hacia la izquierda.

P. Hacia la izquierda, cuántas unidades. Una. Se acuerdan. Entonces cuando yo vaya a pintar. - Traza un plano cartesiano- Primero vamos a ver de dónde vamos a partir. Vamos a partir de y igual a dos a la x. Escribamos siquiera tres puntos, con tres puntos tenemos una buena aproximación. ¿Cuáles son los tres puntos que nos convienen? Haga lo siguiente - los ubica en el plano - cuando vale cero, cuando vale uno, cuando vale menos uno. Cuando vale cero pues aquí vale uno y cuando vale dos cuánto vale la y, dos cierto - va ubicando en el plano - y cuando vale menos uno vale un medio y la gráfica aproximadamente la inicial es esta, - la traza con líneas punteadas - y qué es lo que va a hacer, la va a mover la otra una unidad, hacia dónde. Hacia la izquierda, entonces pues corramos estos tres puntos hacia la izquierda, ya tenemos una idea más o menos de cómo es la gráfica, entonces - lo va haciendo en la gráfica - un puntito hacia la izquierda se va para acá, este otro para acá, y este otro acá, y, queda así más o menos, - traza la línea en el mismo plano uniendo los tres puntos - se tiene una idea, no hay necesidad de ponernos a pintar todos los puntos, con tres más o menos se tiene una idea.

Este diálogo se lleva a cabo mientras el profesor realiza el siguiente procedimiento [2][194:199] en el tablero:

[2:49][194:199] SIMBÓLICO GRÁFICO

P. qué pasa con todas las transformaciones que vimos, por ejemplo si yo tengo y = f(x), como función inicial, y después formo esta otra función y = f(x+1)

E. Se mueve horizontalmente

P. Se mueve horizontalmente una unidad pero hacia la izquierda.

E. ¿Pasa lo mismo?

P. mira acá $y = f(x) = 2^x$ *, entonces me queda,*

$y = f(x+1) = 2^{x+1}$. *Pero cada vez que hagamos estas cosas - señala en el tablero a* $y = f(x+1)$ *- la movemos una unidad a la izquierda. ¿Cómo la va a mover? Pues mueve algunos puntos. Yo lo estoy invitando a que muevan esos tres.*

¿La asíntota horizontal, cambio? No.

El profesor [2][194:199] parte del objeto función exponencial $y = 2^x$, utiliza el conocimiento que se tiene sobre la representación gráfica de la función y de las transformaciones que se han hecho con otro tipo de funciones. La clase continúa (diagrama 3.16) observando, en el registro simbólico, cómo el cambio en la expresión simbólica repercute en el registro gráfico distinguiendo cuando se realiza un desplazamiento horizontal o vertical.

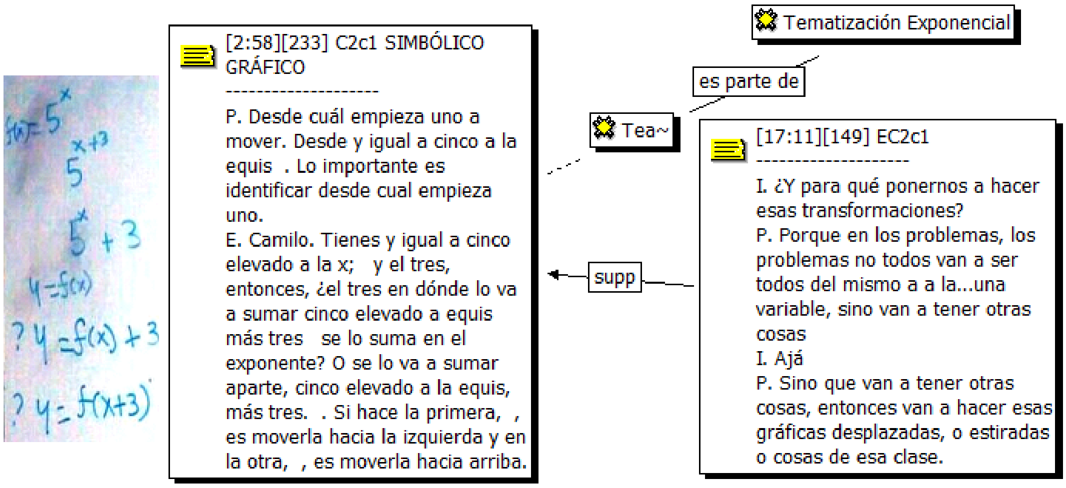


Diagrama 3.16. Transformaciones horizontales y verticales y la entrevista con el profesor

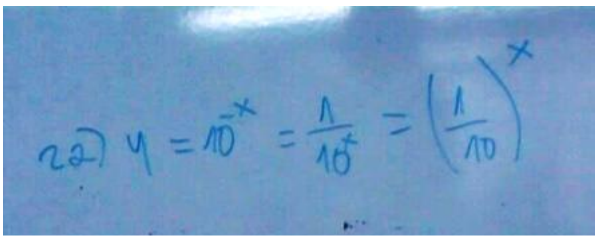
En la clase 2, además, se realizan ejercicios correspondientes a reflexiones sobre el eje x y sobre el eje y de las funciones $y = 3^x$ para obtener $y = -3^x$ y de la función $y = 10^x$ para obtener $y = 10^{-x}$. Los estudiantes deben realizar las gráficas de las funciones trasformadas a partir de las gráficas de las funciones de partida sin hacerlo punto a punto. Además, deben indicar el dominio, el rango y las asíntotas de cada una de las funciones.

[2:27][240:245] SIMBÓLICO GRÁFICO

P. Vienen unos ejercicios que no me dan gráfica.

Por ejemplo el 21. $y = -3^x$

Para hacer la gráfica, entonces yo sé que es $y = 3^x$ *– La gráfica está en la figura 4 del texto - y se refleja, ¿qué refleja?, los tres*



puntos.

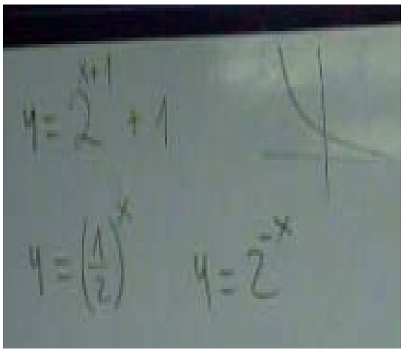
P. El 22. Tiene un aspecto más raro, porque aparece elevado a la menos x -escribe en el tablero $y = 10^{-x}$*- Esto es.*

Entonces cómo hago para que esa x no me quede por allá abajo. ¿De qué otra forma lo puedo escribir? $y = 10^{-x} = \frac{1}{10^x} = \left(\frac{1}{10}\right)^x$*, para que quede en la forma estándar.*

¿Para dónde va ese tobogán?

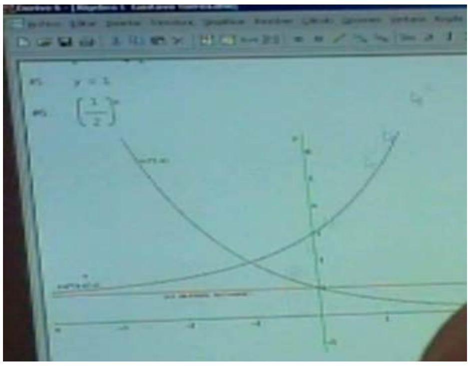
E. Para la izquierda.

La transformación de las funciones exponenciales por reflexión se analiza también en la clase 5 a partir de la función $y = 2^x$ *. El profesor responde a la duda de algunos estudiantes para identificar si las funciones* $y = 2^{-x}$ *ó* $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ *son o no diferentes estableciendo la equivalencia entre las dos expresiones, [5][465:471] primero con argumentos algebraicos y, luego, en el registro gráfico en donde realizan la reflexión correspondiente.*



[5:19][465-471] GRÁFICO SIMBÓLICO GRÁFICO

A ver, hagamos la gráfica de esa otra función, un medio a la equis.



Vayan borrando las que…vayan pegando, copiando allá eso… ¿Listos?

Muy bien los paréntesis, los paréntesis son importantes, ¿no?

Bueno, ya han visto ahí entonces el tobogán mirando para el otro lado, ahora para acá. Ahora hagan lo siguiente, miremos a ver qué pasa con esta función.

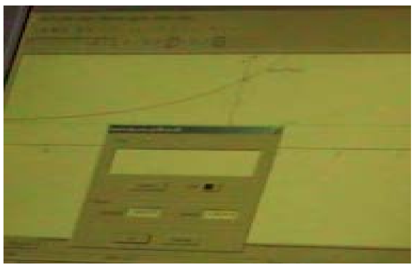
Tiene el aspecto de no ser una de las funciones exponenciales como las habíamos definido.

E. Es la misma…

P. ¿Pero, será la misma? ¿Por qué razón? ¿Qué quiere decir dos elevado a la menos equis?

E. - silencio-

P. Es uno, sobre dos a la equis. Esa es la forma en que se definieron los exponentes negativos. Pero, eso que está aquí, se podría haber escrito también así: un medio a la equis.



De manera que si yo allá le digo, hágame la gráfica de dos a la menos equis, qué creen que va a pasar.

E. La misma.

E.

P. Que les va a dar la misma. Hagámoslo ahí como por… y le agregamos ahí el, esa otra posible forma de haber escrito las cosas. Un medio a la equis, es el mismo dos a la menos equis. Y ahí es válido lo que acaba de decir Jessica, y es que esto se refleja en el eje y, entonces fíjense que cuando uno cambia la equis por menos equis, hay reflejo en el eje y. Bueno, ¿listo? Agreguen ahí los dos, que eso es la misma forma de decir las cosas.

La tematización de la función exponencial se hace explícita cuando el profesor, mediante el diálogo con el estudiante [5][426:451], le induce a considerar la transformación adecuada que expresa como: *"se va a reflejar"*. El tratamiento que le está dando a esta representación es la de un objeto; no se está reflexionando sobre ella como un proceso, ni como acciones punto a punto, sino que se está construyendo su representación gráfica a partir de su expresión simbólica como la reflexión de un objeto previamente construido.

[5:51][426:451] SIMBÓLICO GRÁFICO

P. Bien, hagamos esta otra ahora $f(x) = (1/2)^x$. *Antes de mirar allá qué es lo que va a suceder quién me dice cómo va a quedar ahora la gráfica.*

Mmmm? Antes de que allá nos pida, antes de que nos de el Derive la gráfica. ¿Qué pasa?

E. Nada…

E. Se va a reflejar.

P. ¿Es como si se reflejara en el eje y pero eso lo sabíamos por qué razón?

E. Porque es menor de uno

P. Porque la base es menor que uno. Acuérdense el tobogán apunta para el otro lado.

También en la clase de la clase 3, antes de realizar las transformaciones de la función exponencial, el profesor primero propiciando, el recuerdo de la caracterización del objeto de función exponencial [3][7:16], así.

[3][7:16] SIMBÓLICO-GRÁFICO

P. ¿Qué es una función exponencial?

E. La que tiene la variable en el exponente.

P. Es una función ¿qué tiene qué estilo, qué forma?

E. La forma y igual a a la x.

P. a a la x, donde a es una constante, la base decíamos que tiene que ser distinta de 1. ¿Qué más decíamos?

E. Positiva

P. Que sea positiva. Y la gráfica de esas funciones exponenciales era de dos clases, ¿cierto?

E. Como un tobogán

P. Y se abren hacia la derecha o hacia la izquierda. Y en los ejercicios que ustedes hicieron la vez pasada lo que hacíamos era correr ese rodadero. Hacerle las transformaciones que se le hacen a cualquier función ¿cierto?

Luego Ernesto prosigue con un ejemplo de transformación [3][17] de la función, que consiste en un alargamiento:

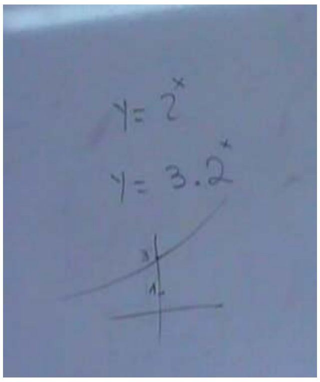
[3:14][17] SIMBÓLICO GRÁFICO

P…esta función y igual a dos a la equis - escribe - $y = 2^x$ *. Esa sí es de la forma a a la x, y esa pasa por el uno, pero si yo digo por ejemplo - escribe-* $y = 3.2^x$*, entonces esa lo que vamos a hacer es pegarle una estirada a las y así, -realiza con sus brazos un movimiento en forma vertical- y entonces cuando vayamos a ver la gráfica ya no va a pasar por el uno, por qué razón no va a pasar, porque a esa coordenada la estira y va a quedar por acá pasando por tres. -Ubica el punto de corte en el eje y; (0,3) y dibuja la gráfica en el plano cartesiano-*

A fin de cuentas es un tobogán. Sin embargo, en la definición que tenemos allí $y = 3.2^x$*, esto no seria propiamente una función exponencial.*

El profesor modela la tematización transformando la función exponencial multiplicando en la expresión simbólica por un factor mayor que uno que implica un alargamiento vertical y el cambio del corte con el eje y, en el registro gráfico.

En la clase 5, en el aula de computadores, el profesor propone revisar una tarea de la evaluación escrita de la clase 4 que consistía en encontrar el punto de corte con el eje y de la función $y = 2^{x+1}$. Para ello el profesor propone a los estudiantes hacer uso del programa Derive y a partir de la función $y = 2^x$, y además pide realizar en lugar de un desplazamiento horizontal $y = 2^{x+1}$, uno vertical $y = 2^x + 1$, aprovechando la situación para pedir también a los estudiantes que identifiquen el punto de corte con el eje *y* y que tracen la asíntota de la nueva función.



La secuencia que sigue el profesor (diagrama 3.17) antes de permitir a los estudiantes realizar la gráfica con el programa Derive, es solicitarles que verbalicen cuáles son los cambios que sufre la función en cuanto a la desplazamiento vertical y por ende los cambios en cuanto a la asíntota.

En el diálogo que guía el profesor (diagrama 17) conversa, sobre la representación en el gráfico, señalando un objeto que están trasladando, la función exponencial, e insiste sobre la exigencia de ingresar, a través de la ventana de álgebra la ecuación de la recta $y = 1$como la asíntota de esta nueva función. De esta manera Ernesto indica como la traslación de la función conlleva también una traslación en la asíntota.

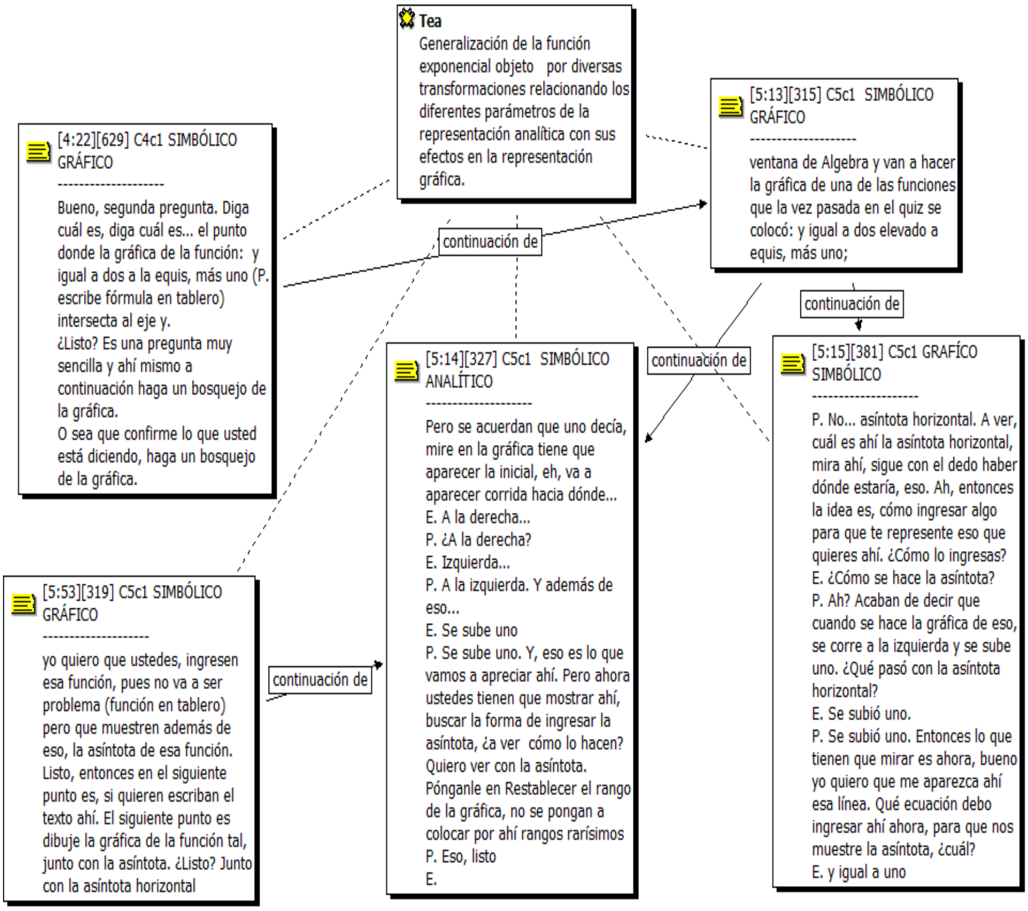


Diagrama 3.17. Desplazamiento horizontal y asíntota.

En conclusión, el profesor, en las clases 2, 3 y 5, hace uso del registro gráfico y el simbólico transitando de un registro al otro para analizar cómo repercuten en ambos registros las transformaciones de la función exponencial, traslaciones horizontales, verticales y alargamiento vertical.

3.1.3.2. Aplicación de la función exponencial en diferentes contextos

En la clase 4, el profesor utiliza el contexto del crecimiento de poblaciones de bacterias y humanos para tratar el uso de ciertas transformaciones de la función exponencial. Esto se concreta en la realización de tres tareas del libro de texto (Diagrama 3.18).

La tarea a, incluye el uso de la exponencial construida a partir de la repetición de un factor y su correspondiente representación mediante un exponente, elemento que ya ha sido utilizado con anterioridad por el profesor en las clases 1 y 2. Se presenta como un problema de crecimiento bacteriano, concretado en el caso particular de la duplicación del tamaño de la muestra cada tres horas.

Tarea a. Los biólogos

Los biólogos han observado que la población de una especie siempre duplica su tamaño en un periodo fijo. Por ejemplo bajo condiciones ideales una cierta población de bacterias duplica su tamaño cada 3 horas. Si el cultivo se inicia con 1000 bacterias, entonces después de tres horas habrá 2.000 bacterias, después de otras tres horas habrá 4000 y así sucesivamente. Si **n** igual a n de **t**, es el número de bacterias después de t horas, entonces:

$n(0) = 1000$
$n(3) = 1000.2$
$n(6) = (1000.2).2 = 1000.2^2$
$n(9) = (1000.2^2).2 = 1000.2^3$
$n(12) = (1000.2^3).2 = 1000.2^4$

A partir de este patrón se concluye que el número de bacterias después de t horas es $n(t) = 1000.2^{\frac{t}{3}}$

Tarea b. Conteo inicial

El conteo inicial de bacterias en un cultivo es de 500. Posteriormente un biólogo hace un conteo de muestra y encuentra que la tasa relativa de crecimiento es de 40% por hora.

a. Obtenga una fórmula para el número $n(t)$ de bacterias después de t horas.
b. ¿Cuál es el conteo estimado después de 10 horas?
c. Trace la gráfica de la función $n(t)$.

Tarea c. La población

La población en la tierra en 1987 era de 5.000 millones y la tasa de crecimiento relativo se estimó en 2% anual. Suponiendo que la población mundial sigue un modelo de crecimiento exponencial, determine la población mundial proyectada en 1995. (Compare lo anterior con la población real de 5.700 millones en 1995).

Diagrama 3.18. Enunciados de las tareas en el contexto de crecimiento.

La tarea b, requiere de la comprensión de la formula $n(t) = n_o.e^{rt}$ como ampliación del estudio de la función exponencial a aquellas funciones con crecimiento exponencial a partir de un valor inicial n_o. Se examina el significado de estas situaciones tanto a nivel simbólico como gráfico en contextos diferentes al utilizado para la construcción del objeto función exponencial, que en el caso del profesor Ernesto, fue el contexto de interés compuesto.

La tarea c sobre el crecimiento de la población humana es utilizada por el profesor para trabajar con los estudiantes el uso de la función exponencial como modelo matemático. Esto implica que los estudiantes comenten algunas comparaciones que sustentan el ajustar la fórmula a los datos sobre la población mundial.

El procedimiento utilizado por el profesor (Diagrama 3.19) para abordar cada una de las actividades es similar y consiste en la lectura, en voz alta, por parte de uno de los estudiantes del enunciado de la situación, seguido de un diálogo entre el profesor y los estudiantes para analizar el enunciado.

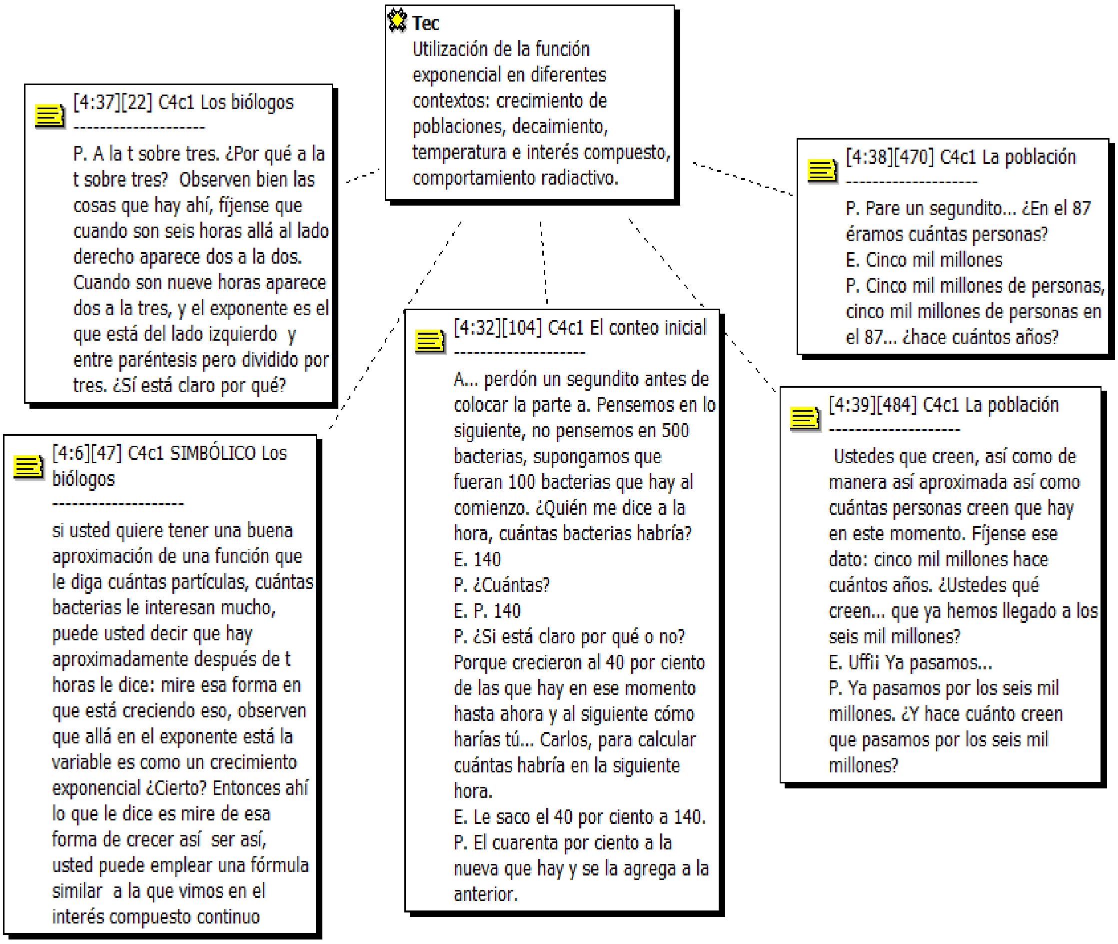


Diagrama 3.19. Diálogos para analizar las tres tareas.

El profesor, en la *tarea a -los biólogos-* utiliza expresiones que hacen referencia a las construcciones realizadas en clases anteriores como: "*si usted quiere tener una buena aproximación de una función que le diga cuántas bacterias*"…"*puede emplear una fórmula similar a la que vimos en interés compuesto continuo*"… "*observen que allá en el exponente está la variable*".

El orden que el profesor sigue para abordar esta tarea es: analizar la fórmula con un valor inicial de 1.000 bacterias y comprender el significado de duplicar la población inicial después de tres horas; $n(t)=1000*2^{\frac{t}{3}}$. Luego se reemplaza n_0 por este valor inicial, y sustituyen $\frac{1}{3}$ por una constante, de tal manera que obtiene la expresión $n(t)=n_o.2^{ct}$. A continuación hace alusión a la tarea desarrollada en la clase 3 sobre interés compuesto continuo sustituyendo la base por el valor *e* con lo que se obtiene $n(t)=n_o.e^{rt}$. De esta forma, el tipo de crecimiento que han estudiado para el interés compuesto continuo se aplica al crecimiento de bacterias y se extiende a cualquier crecimiento poblacional.

Se continúa con la lectura del enunciado de la -*tarea a. -los biólogos-* y luego explica en el tablero la fórmula mostrada, en el texto, para crecimiento exponencial de la población.

[4:33][58:72] SIMBÓLICO

E: n de t es igual a la población al tiempo t

P: - Escribiendo en el tablero- ¿Esta es la población final cierto? La población al tiempo t, o sea la población final.

Lee…

E: n sub cero es el tamaño inicial de la población.

P. Esta es la población inicial. Sigue…

E. r es la tasa relativa de crecimiento, expresada como una proporción de la población

P. r es una tasa relativa de crecimiento. Entonces ahí van a decir: mire es que es ahí donde la población está creciendo un tanto por ciento cada tanto tiempo, como en el ejemplo de las bacterias, que están creciendo un tanto por ciento cada tantas horas. Por ejemplo en este caso cómo lo diríamos.

¿Está creciendo al qué?

E. Al doble.

P. ¿O sea qué porcentaje?

Una vez han examinado el significado de cada uno de los términos que conforman la fórmula dada, un estudiante lleva a cabo la lectura del problema sobre *Conteo inicial* y el profesor propone hacer uso de la fórmula recién construida $n(t) = n_o.e^{rt}$en esta tarea guiando el procedimiento de resolución del ejercicio (diagrama 19) de forma similar al trabajo realizado en las primeras sesiones, sobre el interés compuesto. Para ello pide a los estudiantes que realicen cálculos, inicialmente para el caso de 100 bacterias con frases como; "*Carlos, para calcular cuántas habría en la siguiente hora…* ".

A continuación se centra en la representación gráfica de la función obtenida:

[4:43][257:334] GRÁFICO

E. Trace la gráfica de la función n(t), es una gráfica aproximada. -plano en tablero-

P. ¿Qué se coloca aquí en los ejes? A ver díganme qué se coloca

E. El tiempo.

P. Aquí el tiempo. ¿Y acá?

E. La cantidad de bacterias

P. n la cantidad de bacterias

P. Y aquí entonces son horas. Entonces pensemos por ejemplo cero, uno… listo. Entonces traten de completar el resto haber cómo. Cómo se las ingenian para organizar ahí la escala y todas esas cosas, más o menos cómo sería la cuestión.

P. ¿Cómo se hace la gráfica de una función?

E. ¿Reemplazando x e y?…

P. Reemplazando valores, ¿cierto? En este caso pues remplaza algunos… ¿ya tú sabes que ese tipo de gráficas te van a dar cómo? ¿Qué clase de gráficas van a aparecer? Van a aparecer así, claro. Van a aparecer ¿qué? Los tobogancitos que hemos vistos. ¿Ya?

P. Hay que escoger una escala apropiada. Qué escala se les ocurre escoger ahí para la vertical… a ver.

E. De a 500

P. De a quinientos puede ser. ¿Quinientos cada cuántos cuadros?

E. Cada cuatro.

E. Cada dos....

P. Bueno, puede ser cada cuadro o cada dos cuadros. Por ejemplo, como les quede más cómodo.

Cada dos cuadros supongan que hay 500, o sea, cada cuatro cuadros es mil…no hay necesidad de ir colocando… todos los valores sino apenas algunos que ilustren…

Y entonces su gráfica arrancaría ¿de qué punto?

E. De cero

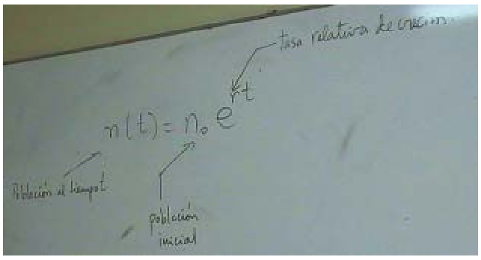
P. no…

E. De quinientos…

P. ¿De cuál, Nelson?

E. De quinientos.

P. De quinientos. ¿Por qué de quinientos?



Porque es la población inicial, es cuando t vale cero, la población… es 500. Pues, arrancaría de por acá. Entonces uno tiene que empezar ahora a mirar cuál es la población a la hora. Entonces eso ahí rápidamente en la calculadora, no hay necesidad de escribirlo sino ahí…

Fíjense que la calculadora le guarda la línea, entonces usted cambie nada más en esa línea el número que le interesa cambiar

E. Sería 500 por e a la cero cuatro…

P. Por e a la cero cuatro por uno… y así lo que van es cambiando nada más, el uno, luego ponen el dos, etc.

Por ejemplo, cuando es…

E. ¿Y esa no va a aplanarse?

P. No así no, porque van creciendo cada vez más.

No, no porque estamos imaginando que eso sigue y sigue por ahora no estamos poniéndole condiciones como las que mencionábamos antes, dejémoslas así. En la realidad sí van a aparecer ese tipo de cosas pero por ahora pensemos que se ajusta a eso.

El profesor pide a los estudiantes recurrir al objeto función exponencial en el registro gráfico a través de la imagen de los “toboganes” y, a partir de allí, analizar las particularidades para la gráfica, de la *-tarea b. Conteo inicial-*, del fenómeno de crecimiento de las 500 bacterias.

La última parte del diálogo [4][257:334] *“¿Y esa no va a aplanarse?”* lleva al profesor a comentar cómo se modela generalmente el crecimiento de una población, que suele ajustarse mediante una función logística, aunque no se utilice, en ningún momento del diálogo este término [4][79:85].

[4:9][79:85]

P. ¿Entonces al 100 por ciento cada cuántas horas?

Cada tres horas, claro pero eso no siempre va a ser así. Pensemos, por ejemplo, en la población de humanos, nosotros, nosotros somos un ejemplo de población y también la forma como crece la humanidad. Allí en un país, ustedes han visto por ejemplo un crecimiento de población y eso es así como en los toboganes, a veces despacio y estamos creciendo así, y estamos alarmados porque estamos en una parte donde está es creciendo muy rápido.

E. Pero aquí, y en otros países se ha estancado.

P. En otros países se ha estancado, cierto. No y a veces las poblaciones normales también llegan un momento en que van creciendo así. Y entonces empieza por ejemplo los recursos del ambiente a disminuir, etc., etc., entonces empiezan como a estabilizarse.

Hay partes donde el modelo exponencial funciona y en otras partes ya tiene que hacerse ajustes.

En el gráfico resultante se observa que, para este caso, el crecimiento de la población exige seleccionar una escala para el eje vertical de 500 en 500 mientras que en el eje horizontal, el profesor y los estudiantes utilizan una escala de uno en uno, sin que el profesor realice ninguna explicación adicional sobre la necesidad de esta escala. Además, dado el tipo de contexto, se excluyen del dominio los valores negativos y se considera un valor inicial en el diálogo [4][257:334] *“…Porque es la población inicial, es cuando **t** vale cero, la población… es 500*” y de manera similar en el diálogo [4][378-379]

[4:13][378-379] SIMBÓLICO GRÁFICO

P. ¿Para el cinco cuánto vale?

E. Tres mil seiscientos noventa y cuatro.

P. Tres mil seiscientos, por aquí a ver, tres mil seiscientos, es un poquito más arriba…etc. ya creo que con eso nos animamos a hacer algo como esto.

Y ese sería… en este caso nuestro… nuestra gráfica; un crecimiento exponencial. El tobogán ¿recuerda? Pero no el tobogán completo porque del lado izquierdo no estamos haciendo ninguna consideración, ¿bueno?...

Continúa el profesor la clase 4, con un diálogo iniciado a partir de la lectura de la tarea c sobre la población humana:

[4][468:494]

E. La población de la tierra en 1987 era de cinco mil millones y la tasa de crecimiento relativo se estimó en dos por ciento anual.

P. Pare un segundito… ¿En el 87 éramos cuántas personas?

E. Cinco mil millones

P. Cinco mil millones de personas, cinco mil millones de personas en el 87… ¿hace cuántos años?

…

P… Ustedes que creen, así como de manera así aproximada así como cuántas personas creen que hay en este momento. Fíjense ese dato: cinco mil millones hace cuántos años. ¿Ustedes qué creen… que ya hemos llegado a los seis mil millones?

E. Uff¡¡ Ya pasamos...

P. Ya pasamos por los seis mil millones. ¿Y hace cuánto creen que pasamos por los seis mil millones?

E. Uff¡¡

P. ¿Eso fue una noticia que dieron hace cuántos años?.. ¿Eso fue antes del dos mil o después del dos mil?

E. Antes del dos mil…

De los comentarios sobre el cálculo aproximado de la cantidad de la población mundial actual, se genera la siguiente sugerencia del profesor.

[4][496: 509]

P. ¿O por esos lados? Bueno, precisamente la tarea es… por favor, en Internet vamos a consultar el crecimiento de la población humana en los últimos veinte años. Quiero ver, lo que llevan, porque van a comparar con el modelo que ustedes van a encontrar allá. Entonces miren el modelo que teníamos es este, y lo que está pasando es esto y se aproxima o no se aproxima a…

E. según la fórmula sería, siete mil trescientos once millones

P. ¿Pero en qué año?

E. Ahorita. Pero según la fórmula.

P. Según la fórmula ¿debería haber cuánto?

¿Cuánto?

E. Siete mil trescientos once millones.

P. Eso, entonces sería bueno comprobar digamos en este momento cuántos hay a ver qué tan cerca ese modelo de crecimiento se ajusta a la realidad. Bien, por eso quiero que miren ahí. Eso es fácil en Internet, meterse ahí, uno coloca población humana o crecimiento de la población y ahí le muestra muchas formas de meterse y buscar y hay unas muy simpáticas porque hay un relojito que se va moviendo, entonces está ahí y cada vez es la cantidad de gente que va apareciendo es impresionante. Es que crecemos como hormigas, lo que pasa es que no nos damos cuenta.

De acuerdo con la descomposición genética, *la tematización* que modeliza el profesor para el *uso de la función exponencial como modelo para* el crecimiento de poblaciones humanas se materializa utilizando las fórmulas vistas en las actividades anteriores y solicitando a los estudiantes que consulten y comparen con los datos sobre la población mundial (Diagrama 3.20. [4][483]).

En la entrevista posterior a la clase 4, el profesor explica su objetivo [19][6] y también hace mención a su intenciones al consultar en Internet sobre los modelos de crecimiento de la población mundial [19][21]. Al final de la clase 4, Ernesto presenta una tarea como parte de una evaluación corta escrita. En ella, los estudiantes deben imaginar que son participantes de un "reality", que han ganado una prueba, y que se les da a elegir entre dos premios. El ganador puede decidir, de forma justificada, si prefiere que le entreguen un premio que consiste en recibir un millón de pesos anual desde el momento actual hasta su muerte – bajo el supuesto que vivirá hasta los 80 años – o un premio que consiste en que en el primer año le dan 100 pesos, el siguiente año el doble, 200, el siguiente el doble del anterior 400, etcétera. Cada estudiante realiza su elección por escrito y se la entrega al profesor. Posteriormente, en la clase 5, que se desarrolla en la sala de computadores utilizando el software Derive, Ernesto retoma esta tarea. Se trata de comparar una función lineal constante con la función exponencial de la forma $f(x) = k.b^x$.

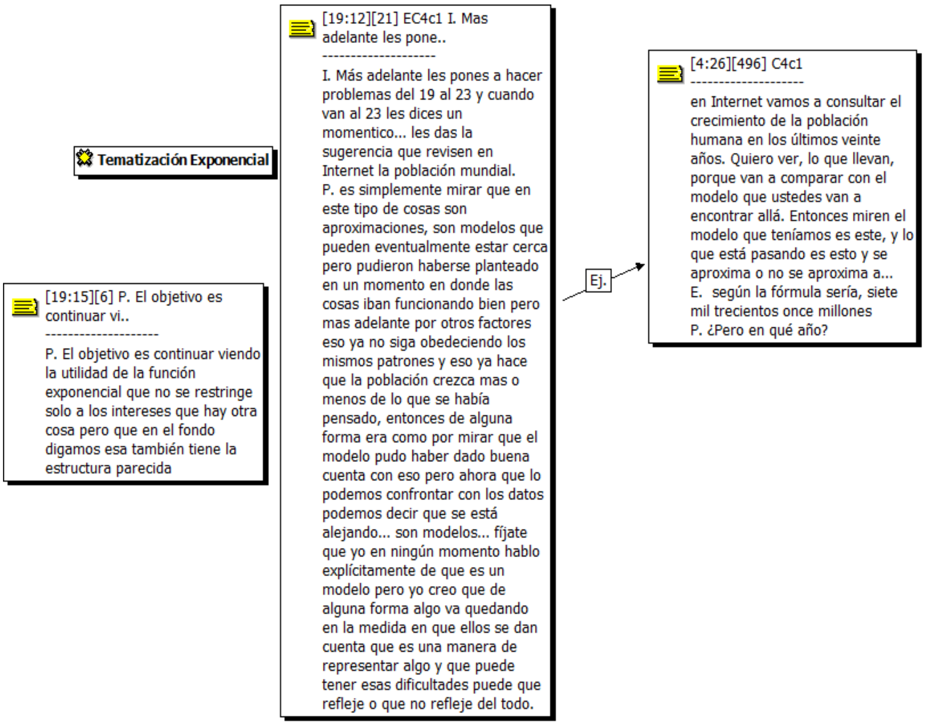
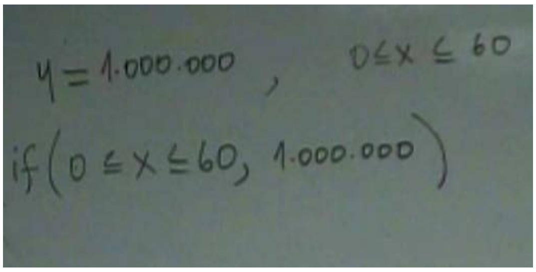


Diagrama 3.20. Explicación del objetivo e intenciones.

Además de comparar el crecimiento de una función lineal y una exponencial, se está utilizando una transformada de la función exponencial básica inmersa en un contexto que le da sentido. Ya no se trata sólo de las modificaciones en la representación simbólica sino que la atención se centra en el contexto de un problema para el cuál es necesario ajustar la función que exprese su crecimiento, para luego identificar para qué valores una función es mayor que la otra. A continuación se presenta el diálogo correspondiente a las instrucciones que da el profesor para escribir, en la ventana de álgebra, las funciones que ajustan las dos opciones correspondientes a sendos premios. En el diálogo para la primera opción, la función lineal, se establece una variación de los valores de *x* desde cero hasta sesenta y el valor del premio igual a un millón:

[5:40][550…710] SIMBÓLICO GRÁFICO SIMBÓLICO

P. Menor o igual a equis. Exacto, si la equis está entre esos valores, qué es lo que le decimos. Que la y vale cuánto. Un millón. Entonces, le ponemos aquí un millón y cerramos



P. Perdón un segundito, cuándo pasen a la ventana Gráfica, ¿entre qué valores está la y?

E. Diez a la seis

P. Diez a la seis. Entonces traten de organizar las cosas, allá le va a colocar el gorrito del exponente, pero bueno, no importa. Diez a la seis, algo así como eso.

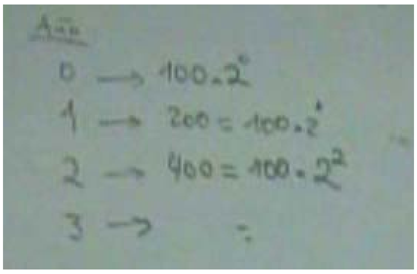
P…Bien, ya tenemos entonces una de las cosas del quiz.

Una función que me representa lo que recibe cada año, es una función constante: un millón, un millón, un millón.

P. Entonces. Todavía no, entonces vamos a mirar las dos y al tener las dos, tú vas a tener la posibilidad de comparar ahí. Entonces ahora la otra como la, con qué función represento la otra alternativa, recordemos cuál era la otra César, ¿cómo es?

E. Cien pesos

P. Cien, después…



E. Después doscientos

P. Bien, año tres, de una vez acá, quién me dice aquí cuánto es sin necesidad de…

E. Ochocientos.

P. Sabemos que es ochocientos, si pero, ¿cuál es la otra forma?, ¿Cien por dos a la qué?

P. Por dos a la equis. Esa es su función, esa es la que va a colocar ahora. Cien por dos a la equis ¿en el intervalo cuál? ¿De cero a… a qué?

E. A sesenta

P. A sesenta. ¿Listo? Bien. Ingrésenla, ya ustedes deben mirar cómo la ingresan

E. ¿Borramos la anterior?

P. ¡No! las tenemos ahí las dos porque queremos compararlas. La de un millón la tenemos que dejar quietica ahí, quiero mirar la otra

Colócale la otra, y igual, no hay necesidad por ahora de efes ni nada de eso. Ahora la otra función es y igual a cien por dos a la equis

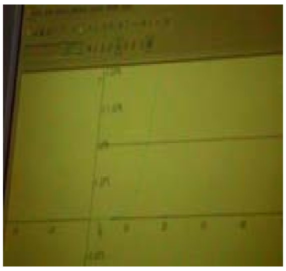
P. ¿Qué pasó con las dos gráficas?

E.

P. ¿Cuál pusiste? ¿Y es a la dos? No…falta la equis?

E. No, pero no…

P. ¿Qué pasó?



E. No está

P. Si, si está. A ver, es que ustedes observen la escala ahora, miren la y antes en la y da un millón, ahora observen los números que aparecen ahí, son muy grandes. Entonces, qué quiere decir ahí. Que esa función de cero a sesenta nos va a tomar valores muy, muy grandes, cuando ya estemos, eh, después de, por ejemplo desde cuando empieza a ser eso muy grande ¿Carlos, ahí desde cuándo lo observas grande?

Para introducir los datos en el programa Derive el profesor exige escribir el dominio de la función lineal, y examinar en ese mismo dominio, $0 \le x \le 60$, la función $f(x) = k.b^x$. Una vez obtienen la representación de las dos opciones en el registro gráfico, Ernesto pregunta a los estudiantes aproximadamente en qué momento una opción empieza a superar a la otra.

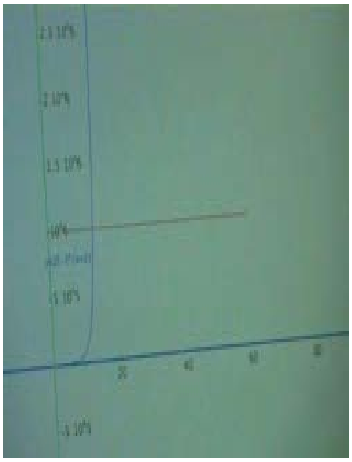
[5][740:750] GRÁFICO

P. Bueno, entonces en la y vamos a colocar desde menos diez hasta dos por diez a la seis y ahí si vamos a apreciar mejor las cosas.

P. Ahora si. ¿En qué momento la segunda opción empieza a superar a la primera?

E. En diez.

P. A los qué



E. A los trece.

P. Y fíjense la manera tan drástica, por eso es que no alcanzamos a ver desde el cero al sesenta y las dos porque la otra es demasiado grande.

¿Es a partir de los catorce años, Carlos?

E. A los catorce años le dan un millón seiscientos.

P. Ya va por encima. Cómo hacemos para pararnos en ese gráfico cuando las dos gráficas se encuentran.

E. Con el cuadrito rojo. Acerquen el cuadrito.

P. A partir de los catorce años ya la segunda opción está por encima de la primera, ahora claro al comienzo uno va acumulando varios millones con la primera pero después de que pasen los años los acumulados de la segunda van a empezar a ser mayores.

Esta tarea, planteada por el profesor, retoma el contexto de interés compuesto y se modela el mecanismo de tematización de una función exponencial que ha sufrido cierta transformación, inmersa en un contexto específico donde adquiere sentido, y que se usa para comparar su crecimiento con el de una función lineal. Al finalizar la clase 5 el profesor propone una tarea que consiste en determinar la velocidad inicial de un paracaidista y trazar la gráfica de la función velocidad que resulta ser una función exponencial.

Un paracaidista deportivo salta desde una altura razonable. La resistencia del aire que experimenta es proporcional a su velocidad, y la constante de proporcionalidad es 0.2. Se demuestra que la velocidad del paracaidista en el tiempo t está dada por $v(t) = 80(e^{-0.2t} - 1)$ donde t se mide en segundos y v(t) se miden en pies por segundo.

a. Determine la velocidad inicial del paracaidista.
b. Trace la gráfica de la función de la velocidad v(t).
c. La velocidad máxima de un objeto en caída con resistencia del viento se conoce como velocidad terminal. A partir de (b) determine la velocidad terminal del paracaidista.

Imagen 3.13 Enunciado de la situación problema.

Para que los estudiantes realicen la gráfica con el programa Derive, el profesor va guiándoles para que se den cuenta de los diversos elementos matemáticos que han de tener presentes en esta situación:

[5:35][767:778] SIMBÓLICO GRÁFICO

P. ¿Cuál es la restricción? El paracaidista va ahí en su avión, horizontalmente el avión y verticalmente el aún no ha caído, o sea cuando él se va a lanzar no ha caído todavía, cuando el tiempo es cero su velocidad es cero y, a partir de allí, comenzamos a averiguar qué están pasando con las velocidades, es decir, tu función debe decir: si paréntesis t mayor o igual que cero, y ahí si viene la función porque antes que eso no nos interesa.

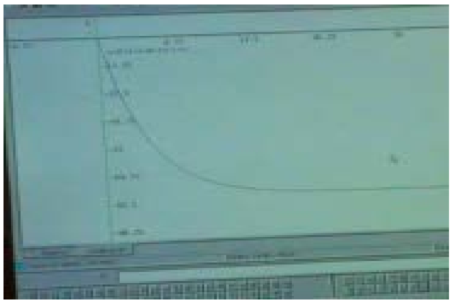
E. Profe

P. - conversando con un estudiante -Ingresaste mal la función, esa no es la función que aparece en la hoja-. Ahora miremos la asíntota.

P. Una pregunta, cómo van a dar esas velocidades, positivas o negativas.

E. Positivas

E. Negativas



P. Negativas, cuando reemplace la t igual a uno, por ejemplo, lo del paréntesis le queda negativo, le van a dar negativas, él está asumiendo que las velocidades en esa dirección ese modelo son negativas, entonces cuando vayan a hacer la gráfica el rango colóquenlo en la horizontal desde cero hasta sesenta segundos y en la vertical desde menos uno hasta menos 100 perdón, desde menos cien que es el inferior hasta uno.

- conversando con un estudiante - donde está la variable en esa función, la t por 0.2.

- conversando con un estudiante - bien, hacia donde se está aproximando la velocidad, muy bien. Hay que interpretar esa gráfica a ver que nos dice.

E.

P. Ahora con ese vas a mirar la asíntota.

E. - señala en el computador- menos ochenta.

P. Muy bien, ese gráfico lo insertan y ahora viene la parte de la interpretación. Las otras preguntas.

El paracaidista va cayendo, él va ganando velocidad el signo lo que nos está diciendo es que es hacia abajo, cuando yo diga menos cuarenta, él va ganando velocidad, en qué unidades está eso.

E. En pies.

P. Pies sobre segundo. El menos lo que nos indica es que va hacia abajo. Hasta donde gana velocidad. No pasa de qué velocidad.

E. Ochenta.

P. Lo que nos indica eso es qué con el paso de tiempo qué va a pasar.

E. Que la velocidad se mantiene constante con el tiempo.

P. Muy bien que la velocidad del paracaidista cada vez se va acercando a 80 y no pasa de ahí. A qué creen que se deberá eso. Porque empieza a ganar velocidad pero llega un momento en que no aumenta más. ¿En el vacío eso pasará?

E. Al aire.

P. A la resistencia del aire, el aire no lo deja bajar y se empiezan a equilibrar las cosas.

Claro que en la realidad ya llega un punto en donde uno sabe que le toca abrir su paracaídas.

El profesor procede a solicitar que examinen condiciones iniciales, que permiten observar las diferencias entre dominio, rango, asíntota correspondientes a la función exponencial genérica y las restricciones de estos elementos matemáticos puntuales en una función exponencial transformada, en un contexto específico.

En la entrevista posterior a la clase 5, el profesor manifiesta sus intenciones en esta clase:

[20][25:32]

I. ¿Cuál era el objetivo de esta sesión?

P. El objetivo era tener la posibilidad de apreciar comportamientos de funciones que se construyen con las funciones exponenciales porque, de acuerdo a la definición, esa no serian funciones exponenciales, que cuando se hacen con lápiz y papel queda muy difícil de verlo.

I. ¿Por qué el énfasis en funciones exponenciales creciente en donde quedó la decreciente?

P. La del paracaidista es decreciente.

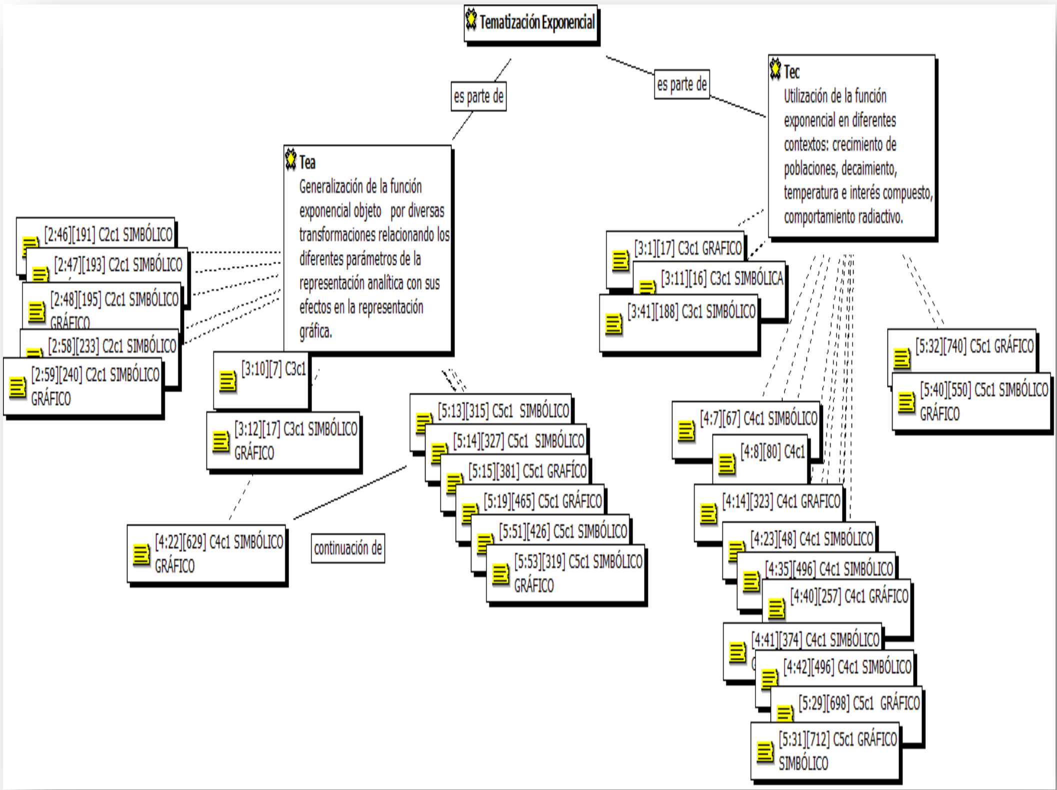
I. Bueno.

P. Lo que pasa es que fenómenos asociados con las decrecientes en los ejemplos que uno encuentra de aplicación están más bien en la parte final en donde uno encuentra decaimiento radiactivo. En realidad no se le dio mucho énfasis a eso.

I. ¿Existe la posibilidad que ellos queden con la idea?

P. de que todo lo exponencial es para todo lo que crece. Si, ese riesgo se corre ahí.

La síntesis G nos permite apreciar en qué segmentos se realiza la modelación del mecanismo de tematización, concretados en el paso de la función exponencial genérica $f(x) = b^x$, en la tematización de la función exponencial transformada y, sus aplicaciones en diferentes contextos.



Síntesis G. Sesiones y secuencia de la construcción en el mecanismo de tematización c1.

3.1.3.3. Síntesis

La tematización de la función exponencial, modelada por el profesor, se caracteriza por la integración de los registros gráfico y simbólico de tal manera que es el único mecanismo en el cual el profesor de manera reiterada propone tareas en las que se realiza indistintamente una traducción entre los registros para el estudio de las diferentes transformaciones de funciones: desplazamientos horizontales, verticales, ampliaciones y reflexiones.

El profesor recurre al programa Derive que le permite un tratamiento de la función como objeto pues a partir de la expresión simbólica se obtiene fácilmente la representación gráfica, pudiendo estudiar su comportamiento según la variación de los parámetros. De acuerdo con la descomposición genética, *la tematización* que propicia el profesor del *uso de la función exponencial en diferentes contextos*, se materializa utilizando las fórmulas como un modelo que se ajusta a los datos referentes a diversas situaciones como el crecimiento de la población mundial. Las tareas contextualizadas son una característica de la modelación de todos los mecanismos de la descomposición genética. La práctica de este profesor evidencia su intención de que los estudiantes doten de sentido a esta función proponiendo tareas en las que se hace referencia a diversos contextos de la ciencia o cotidianos.

En cuanto a la organización y secuencia, la clase cuatro se dedicó exclusivamente a propiciar tareas de tematización del concepto función exponencial, es entonces factible establecer que el profesor fomenta las formas de conocer en el orden de: acción – proceso – objeto -, finalizando con la tematización.

Para concluir con esta modelación de la descomposición genética de la función exponencial, nos detendremos en la descripción que el profesor hace sobre los elementos del concepto matemático que tenía intención de incluir en la construcción de este concepto en el aula de clase.

[20:13][33:35]

I. Tú ¿me podrías hacer un esquema o bosquejo de los elementos que has abordado para entender la función exponencial, desde que comenzaste con interés simple, interés compuesto hasta aquí?, ¿Qué elementos, cómo los conectaste?

Si dijeras este es mi mapa de la función exponencial de lo que les enseñe a los estudiantes.

P. Um, que interesante. Un elemento clave, la variable en el exponente, eso era algo importante, nuevo. Segundo, otro elemento era caracterizar las funciones que se forman con esas cosas, variable en el exponente, mirar cómo son… cómo son sus gráficas, describirlas con los elementos que ya traen de antes dominio, rango, cómo crecen, ese era otro elemento. Otro elemento que tenía presente era conectar con las transformaciones de funciones, de hecho en las aplicaciones no aparecían con la definición que se tenía, puramente funciones exponenciales, sino transformaciones de la función exponencial entonces tocaba también tener en cuenta eso porque eso va a afectar por supuesto la gráfica y su comportamiento, eso era un tercer elemento; las trasformaciones. Había una cosa que es un crecimiento en realidad mucho más fuerte que las otras, pero la manera cómo crece ésta es mucho más rápida, pero es una cuestión más visual que una descripción matemática, ¿qué tanto más?, ¿cómo es ese más que crece? Eso ahí lo descuidé, después fue que me di cuenta que cómo cambia, eso no quedó ahí. Otro elemento clave ahí es el hecho que da cuenta de cosas en donde los cambios se dan de manera continua; interés compuesto continuo, el crecimiento casi continuo.

En este resumen, se señala la importancia que se otorga a la caracterización de la función exponencial a partir de que la “variable en el exponente”, al elemento matemático correspondiente al crecimiento de la función y a la tematización de la función exponencial. Los dos primeros elementos han estado presentes de manera continuada en la modelización de los mecanismos de interiorización y encapsulación. En cuanto a la modelación del mecanismo de tematización se privilegia durante toda la clase 4 y parte de la clase 5.

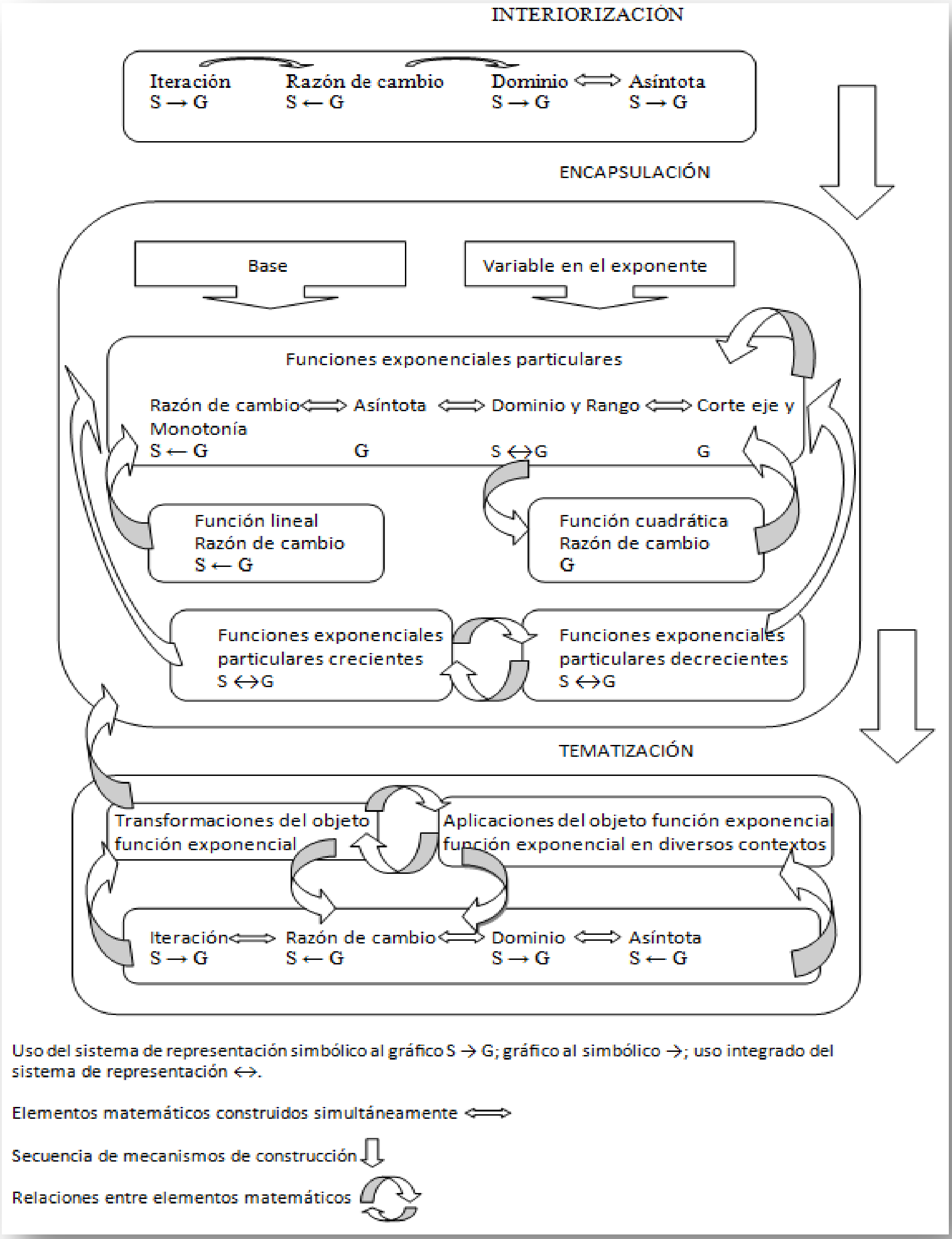
El resumen que Ernesto realizó en la última entrevista enriquece la clasificación de los datos realizada durante el análisis. En la siguiente tabla se identifican los segmentos de clase correspondientes a los mecanismos de construcción:

CODIGOS	1	2	3	4	5	Totales
Iea	13	3	3	0	1	20
Ieb	0	0	0	0	0	0
Iec	0	2	0	0	0	2
Ied	0	0	0	0	0	0
Iee	0	2	0	0	0	2
Eea	0	11	0	0	1	12
Eeb	3	2	0	0	0	5
Eec	0	6	0	0	1	7
Eed	0	7	0	0	2	9
Tea	0	5	2	1	6	14
Teb	0	0	0	0	0	0
Tec	0	0	3	19	5	27
Totales	16	38	8	20	16	98

- Interiorización de las iteraciones correspondientes a elevar una base fija cuando se varía el exponente, considerando de forma separada los casos en que la base es mayor que uno o cuando tiene un valor entre cero y uno. **Iea**
- Interiorización de las acciones de comparación de diferencias y cocientes de dos valores de la variable dependiente e independiente respectivamente, para buscar las relaciones entre ellas $y_2/y_1 = a^{x_2-x_1}$. **Ieb**
- Interiorización de las acciones de aplicar valores muy "grandes" a *x* y la aproximación de los valores de *y* a cero en el caso de la función decreciente y para *valores de x* muy "pequeños" en el caso de la función creciente. **Iec**
- Interiorización de las acciones de ubicar diferentes puntos en la curva función exponencial en el proceso de construcción de la gráfica de la función sin recurrir a realizar las acciones de remplazar en la fórmula diversos valores. **Ied**
- Representación del triángulo característico para diferentes puntos de la gráfica de una función. **Iee**
- Comparación entre diferentes funciones crecientes o decrecientes que permitan examinar razones de cambio para establecer la monotonía y rapidez de crecimiento o decrecimiento de la función exponencial según los valores de la base. **Eea**
- Comparación entre diferentes curvas de funciones crecientes o decrecientes con curvas de funciones exponenciales que permitan examinar a través del triangulo característico la rapidez de crecimiento o decrecimiento de la función exponencial. **Eeb**
- Comparación de curvas exponenciales para establecer el eje *x* como asíntota, el corte de la función con el eje *y*, el dominio y el rango de las funciones exponenciales. **Eec**
- Encapsulación del proceso función exponencial en el Encapsulación del proceso función exponencial en el objeto función exponencial y su representación mediante una curva o representación simbólica $f(x) = b^x$ con $b>0$ y $b\neq1$, estableciendo el dominio en el conjunto de los números reales y el rango en los número reales positivos, considerando como asíntota el eje *x*, que es una función creciente para $b<1$ y decreciente para $0<b<1$, que tiene una raíz para *x*=1 y que existe relación de proporcionalidad entre la función y su razón de cambio. **Eed**
- Generalización de la función exponencial objeto $f(x) = b^x$ por diversas transformaciones relacionando los diferentes parámetros de la representación simbólica con sus efectos en la representación gráfica. **Tea**
- Aplicación de las funciones exponenciales transformadas en los procesos de solución de ecuaciones logarítmicas. **Teb**
- Utilización de la función exponencial en diferentes contextos: crecimiento de poblaciones, temperatura, interés compuesto, comportamiento radiactivo, entre otros. **Tec**

Tabla 3.1. Resumen de los mecanismos de construcción. Caso 1.

La tabla 3.1 indica que mientras en la clase uno Ernesto modela principalmente el mecanismo de interiorización, en la clase dos se modelan prácticamente todos los mecanismos de construcción, con énfasis en la encapsulación. En la clase tres se privilegia la tematización e interiorización, la clase cuatro está totalmente dedicada al mecanismo de tematización y en la última clase se reflexiona sobre algunas acciones y procesos, sin embargo está principalmente centrada en la modelación del mecanismo de tematización de la función exponencial.



Cuadro C. Relación del orden de modelación de los mecanismos de construcción. Caso 1.

La descripción pormenorizada de los mecanismos de construcción que Ernesto propicia en su práctica en el aula, nos permitió establecer la modelación de la descomposición genética, mediante: los mecanismos de construcción, los registros de representación y los elementos matemáticos puntuales del concepto. Respecto al uso de los registros de representación como instrumento de la práctica, Ernesto procura integrar los significados gráficos y simbólicos de los elementos matemáticos puntuales del concepto. Esta integración le permite explicitar nociones subyacentes como son la iteración, aproximación y continuidad. El profesor pretende así potenciar en sus estudiantes la construcción del significado del concepto independientemente del modo de representación usado; sin embargo, el recurso de identificar la función exponencial como aquella cuya variable está en el exponente genera cierta dependencia de su representación simbólica.

Ernesto enfatiza explícitamente las relaciones entre los elementos matemáticos puntuales como una manera de dotar de significado al concepto lo que se traduce en su práctica a una construcción progresiva de los conceptos. La práctica de Ernesto, se caracteriza por potenciar significados de los elementos matemáticos puntuales y globales, mediante las relaciones que establece entre las formas de conocer, apoyándose en una para potenciar la siguiente (acción-proceso-objeto).

La estructura de la modelación de la descomposición genética de Ernesto (Cuadro C), muestra los mecanismos de construcción junto con las relaciones-secuencia que el profesor establece entre ellos.

En el cuadro C también se ubican los elementos matemáticos puntuales que conforman el concepto función exponencial. Se representan mediante flechas sus relaciones y el orden en que las propicia el profesor para dotar de significado al concepto de función exponencial. La lectura en el cuadro C, respecto a los elementos puntuales es la siguiente:

La iteración, con la cual se gesta la noción de función exponencial, es característica de la práctica de Ernesto. La base de la función exponencial se construye a partir de la reflexión sobre acciones de iteración. Las restricciones sobre la base se determinan con ayuda de la representación gráfica vinculadas a la monotonía y rapidez de crecimiento-decrecimiento de las funciones exponenciales. El dominio, el rango y la asíntota son elementos matemáticos de la función exponencial que se construyen de manera integrada mediante la interiorización de acciones de iteración y, más concretamente, asociadas con la variación del exponente siendo la base constante. En cuanto al dominio y el rango las acciones van dirigidas a sustituir valores de x y examinar el resultado en $f(x)$, luego estos elementos matemáticos son definidos mediante la escritura de intervalos o de conjuntos numéricos en los registros simbólico y gráfico.

En el registro de representación gráfico se identifica el punto (0,1) como punto de corte de la función con el eje y mediante la comparación de diversas funciones exponenciales crecientes y decrecientes. Se usa la noción monótonamente creciente o decreciente mediante una imagen de “tobogán” como la curva de la función exponencial, para mediante la observación de curvas de funciones crecientes - para bases mayores que uno - y curvas de funciones decrecientes - con base entre cero y uno- , encapsular la función exponencial. Los elementos de la función exponencial; rapidez de crecimiento-decrecimiento y monotonía se construyen a partir de la noción iteración. La rapidez de crecimiento-decrecimiento se establece que no está ligada a una constante como en la función lineal, sino que es variable como en la función cuadrática, pero “más rápida” que en este último caso.

A partir de la transformación de funciones exponenciales y su aplicación en diferentes contextos se propician acciones tanto sobre el dominio, como en el rango, corte con el eje y, y la asíntota que permite la generalización de estos elementos implicando una re-construcción; nuevas restricciones y transformaciones, considerando la función exponencial como un objeto. El estudio de las transformaciones de la función exponencial implica partir del objeto función exponencial e iniciar un nuevo ciclo de mecanismos de construcción para constituir el objeto función transformada.

3.2. PERSPECTIVA DE LA PRÁCTICA. HOLÍSTICA. CASO 1

En la modelación de la descomposición genética del concepto función exponencial descrita en el apartado anterior están integradas: las tareas propuestas por el profesor, su discurso y las formas en que el profesor usa los registros de representación; cómo organiza y establece relaciones entre los elementos matemáticos globales y puntuales, las formas de conocer que parece potenciar y los objetivos expuestos por el profesor, tanto en el aula de clase como en las entrevistas. Lo anterior nos permite identificar, extraer y acercarnos a:

> - *Cómo concibe el profesor el desarrollo de la comprensión: concepción sobre el aprendizaje de los conceptos observada a través de los mecanismos de construcción del conocimiento que potencia en el aula, su secuencia y relaciones y su justificación.*
>
> - *Su visión de las matemáticas: concepción de las matemáticas como objeto de enseñanza y aprendizaje extraída a partir de la forma cómo organiza el contenido matemático para enseñarlo*. (*Gavilán, 2005, p. 227).*

La secuencia de las clases de Ernesto se inicia planteando tareas a los estudiantes y guiándoles hasta hacer explícito el concepto o el elemento que están construyendo en esa clase. Por ejemplo, en la clase 1, en donde Ernesto inicia la modelación del mecanismo de interiorización, a partir de la iteración de la fórmula de interés simple, se construye la fórmula de interés compuesto. Cuando esa fórmula está ya construida se examinan sus componentes y solamente, en ese momento, es cuando manifiesta que el tema de estudio al que se están dedicando ese día son las funciones exponenciales.

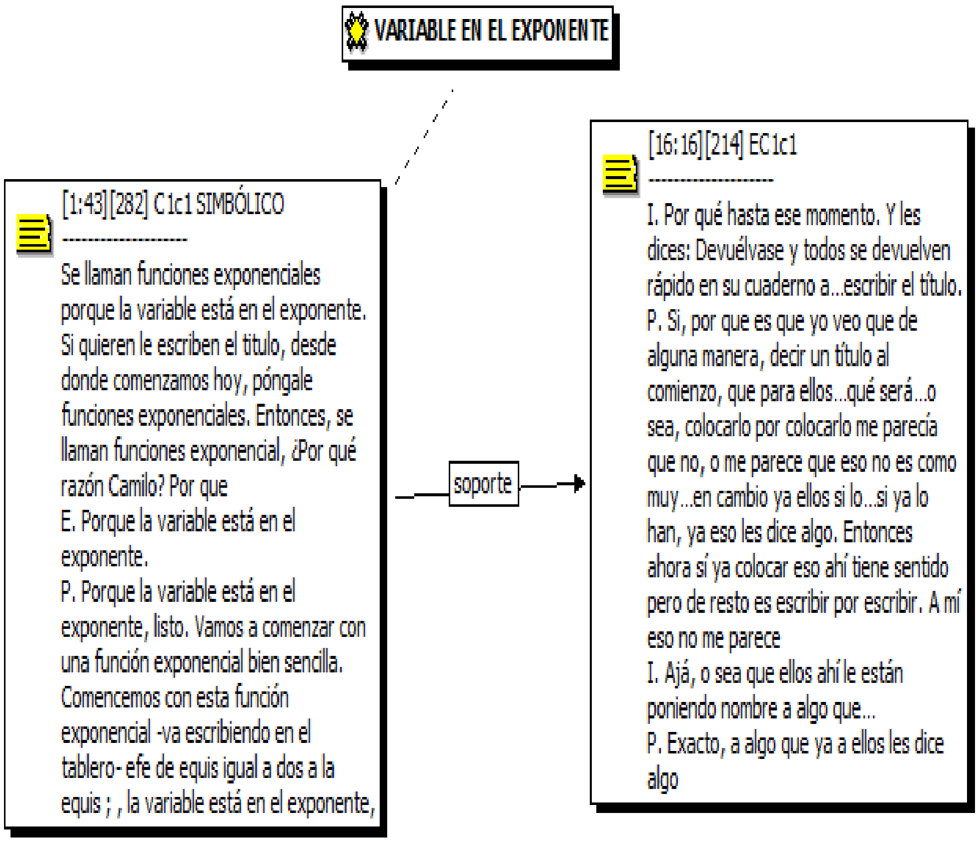
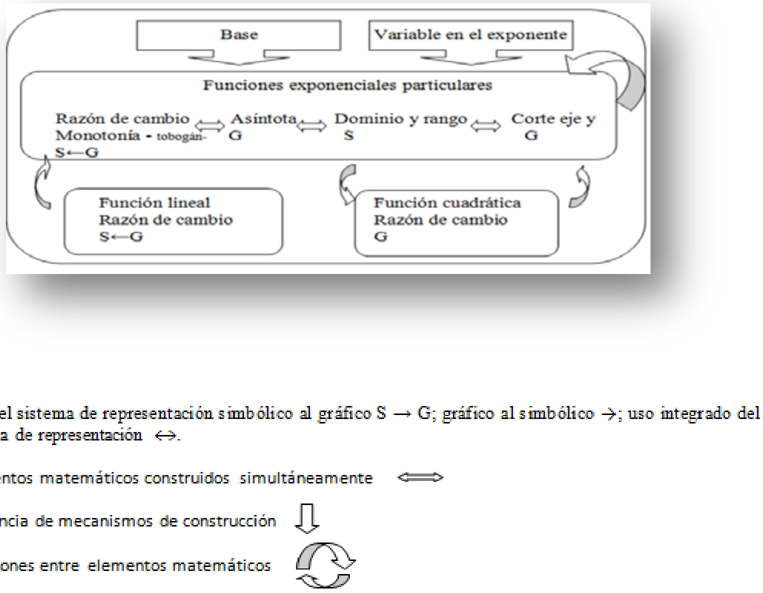


Diagrama perspectiva. 1. Presentación del contenido a estudiar.

Cuando Ernesto expresa, en la entrevista [16][214] su intención de dirigir a los estudiantes, para que le asignaran nombre "*a algo que ya a ellos les dice algo*" se hace explícito que el profesor considera que para que se produzca un aprendizaje es necesario que el estudiante otorgue significado a aquello que debe aprender. De manera similar procede Ernesto para la modelación del mecanismo de encapsulación (Síntesis E, H), recurriendo a conceptos que ya han sido estudiados como la pendiente de las funciones lineales (viñeta dos) y la variación promedio de la función cuadrática [2][71:82] para lograr la caracterización del crecimiento-decrecimiento de las funciones exponenciales.

Ernesto concibe la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas como un proceso de transformación de conocimiento y de las formas de actuar, es decir, considera que el aprendizaje involucra el uso de las ideas previas para dotar de sentido lo nuevo, no simplemente la acumulación de ideas adicionales. Por ejemplo, Ernesto, trata el número *e* ligado a la fórmula de interés compuesto continuo, es decir, a un contexto específico, que los estudiantes ya conocen y mediante el cual plantea nuevas preguntas que faciliten la construcción de ciertas acciones y procesos. Esto se refleja también en la modelación del mecanismo de interiorización por ejemplo en el caso del ejercicio del doblez de papel.



Síntesis H. Extracto modelación del mecanismo de encapsulación del caso 1.

Para la construcción de funciones exponenciales particulares, Ernesto trata de presentar las tareas escolares dentro de contextos, e introducir los elementos matemáticos como *e* y otros elementos del concepto utilizando el contexto del interés continuo de forma transversal a toda su construcción de las funciones exponenciales. Las tareas contextualizadas son su forma de acercamiento a las matemáticas, alejándose de una presentación de los conceptos basada exclusivamente en las estructuras matemáticas. Ernesto concibe las matemáticas como campo en continuo crecimiento e invención, en el cual hay patrones que son generados para producir conocimiento (Ernest, 1988).

I. ¿Qué hace hoy en día evolucionar al conocimiento matemático?

P. Hoy en día, como antes, el conocimiento matemático avanza por las preguntas que se hacen dentro de la misma matemática, esto es algo que se hacen las preguntas y se responden. Empiezan a aparecer otras y empiezo a crecer. Dentro de la matemática hay esa dinámica, pero esas preguntas también muchas veces enriquecen cuando vienen de otras ciencias, llamémoslas aplicadas, ahí muchas cosas y como la matemática tiene mucho que ver, entonces la matemática también empieza a mirar cómo con lo que hay, se puede y si no se puede toca empezar a buscar que tipo de formulaciones podría ser útiles para eso. Entonces hay necesidad, a veces, de crear nuevas ramas dentro de la matemática. Por ejemplo, una de las cosas que más, es ahora por el lado de la computación, hay ahí una relación muy fuerte y las demás las de siempre, pero a nivel de los sabios yo pienso que esa es la cuestión porque pienso que a nivel de los estudiantes es otra cosa.

Una característica de esta práctica es el recurso al lenguaje coloquial ([2][79],[3][17],[4][95]) el discurso de Ernesto se distingue por expresiones como: “se va pegando una estirada", el "tobogán", tienen "unos bichitos", le dan "comidita", con las cuales intenta presentar y caracterizar los elementos del concepto función exponencial e irlos formalizando en el desarrollo de cada una de las tareas.

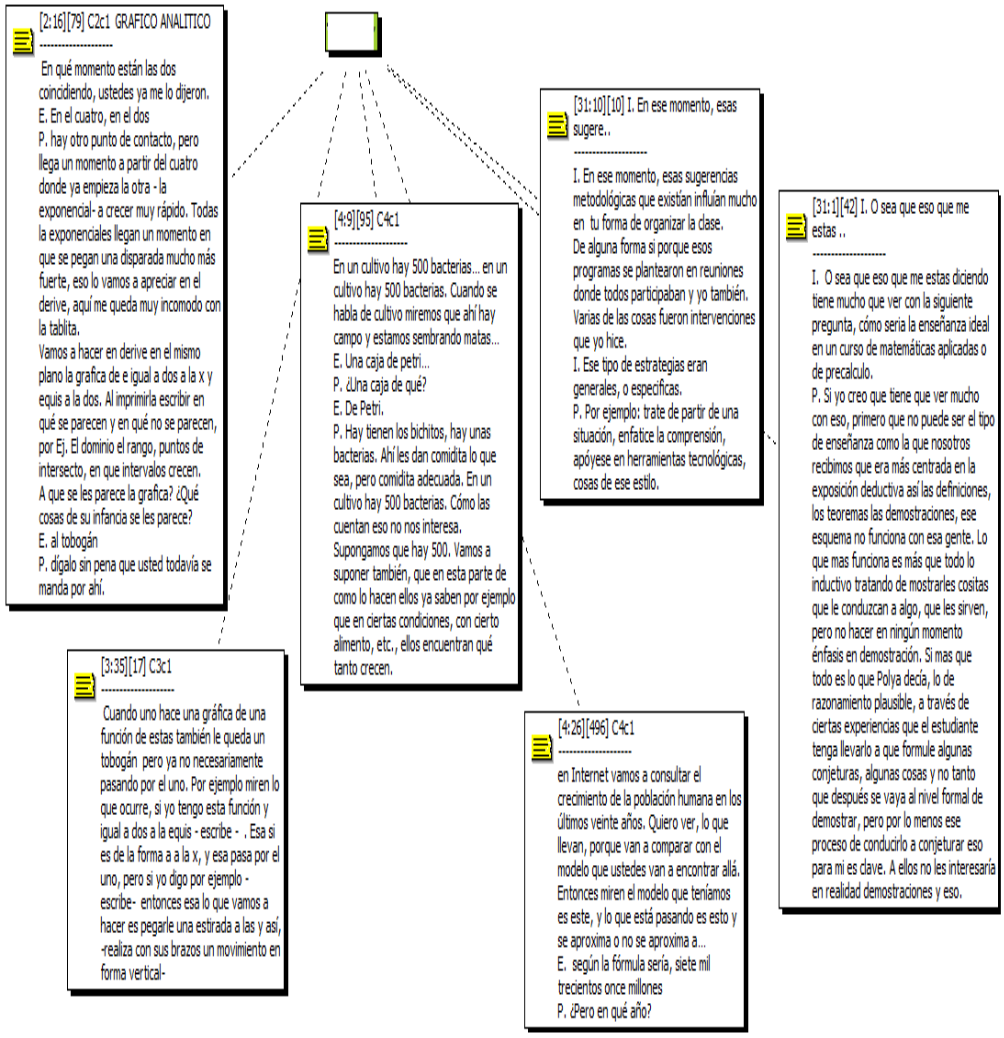


Diagrama perspectiva. 2. Uso de lenguaje coloquial para elementos matemáticos del concepto.

Además procura, a través de preguntas y diálogos, que los estudiantes establezcan conjeturas ([31][10], [31][42]). Ernesto utiliza en expresiones coloquiales como "asuntos pendientes" o "temas en remojo" como medio para enlazar cuestiones ya estudiadas con otras nuevas. En algunas de las tareas, plantea preguntas que posiblemente, con los conocimientos que tienen los estudiantes aún no pueden responder. Sin embargo, el profesor hace esto de forma intencionada y, ante la dificultad, les anuncia que este será un asunto "pendiente" que podrán analizar y utilizar más adelante con los conceptos que estudiaran en esta clase. Esto constituye un indicio de los vínculos entre conceptos que el profesor considera que debe realizar durante la secuencia de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

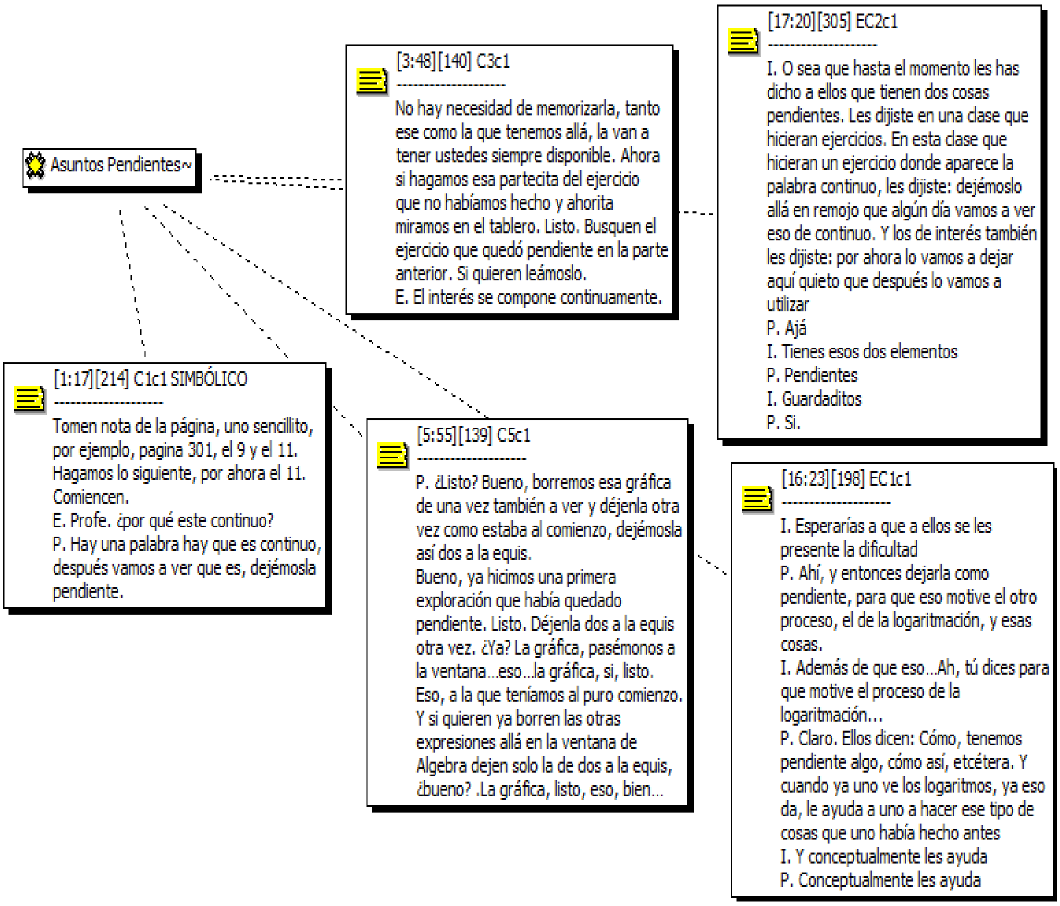


Diagrama perspectiva. 3. Asuntos pendientes como estrategia de construcción.

Ernesto se interesa tanto por la adquisición de conceptos, como el desarrollo de procedimientos y el fomento de actitudes positivas hacia la propia materia y el trabajo académico en general. Ya en la primera entrevista manifiesta estas ideas [31][33:36] que luego se muestran en su práctica docente. [31][33:36]

> *I. ¿O sea que la experiencia de dictar precálculo es agradable?*
>
> *P. Para mí, si. Y eso depende de uno, uno puede hacer que el estudiante no se sienta bien presentando una cosa toda fea, pero si uno logra de alguna manera estimular al estudiante con las cosas que le presenta para que él tenga alguna satisfacción, o sea, hay ahí una cuestión muy humana y es que tú ves a una persona contenta haciendo algo, que te manifiesta con tranquilidad las dudas, hay una relación muy buena, que no solamente se limita al contenido sino que la parte de los afectos, de las emociones uno las tiene en cuenta. Si uno no tuviera en cuenta eso, para mí eso sería una cosa terrible, porque uno cada semestre hace lo mismo. Pero entonces claro las generaciones van cambiando y uno tiene que ir ajustando cosas, la tecnología le hace también a uno modificar cosas, entonces uno se va moviendo.*

Esto mismo que declara Ernesto durante la entrevista [31][33:36] sobre las actitudes se identifica también en su práctica docente. Por ejemplo en la clase 4, cuando dedica varios minutos de la clase a dar indicaciones a los estudiantes sobre algunas pautas para realizar la lectura de un problema [4][34], señala:

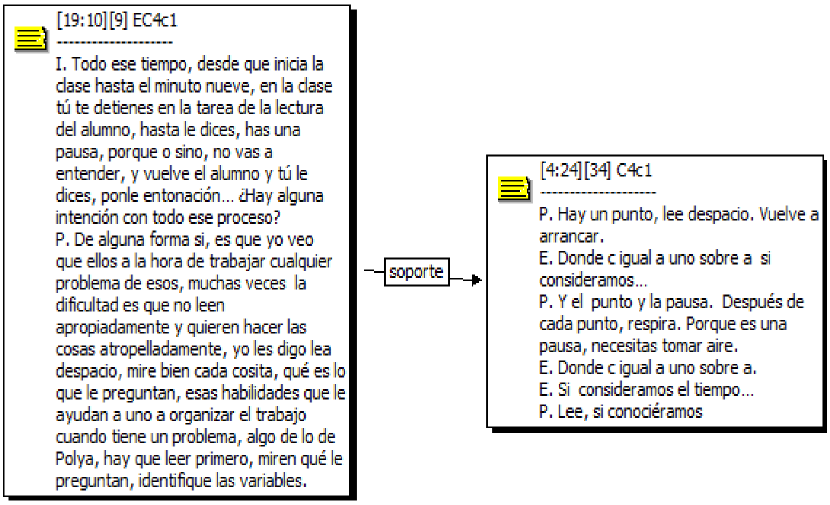


Diagrama perspectiva. 4. Actitudes.

La organización de sus clases tiene en cuenta este aspecto afectivo. Ernesto considera relevante comenzar por elementos del contenido que le permitan al estudiante tener algún éxito y luego le plantea tareas guiadas para que pueda ahondar en otras construcciones.

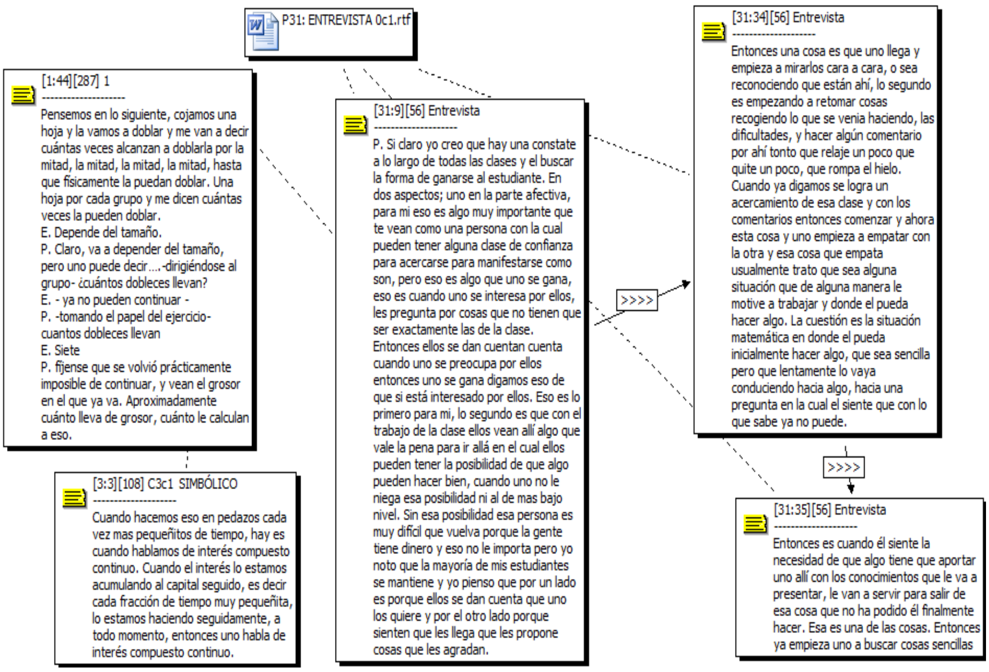
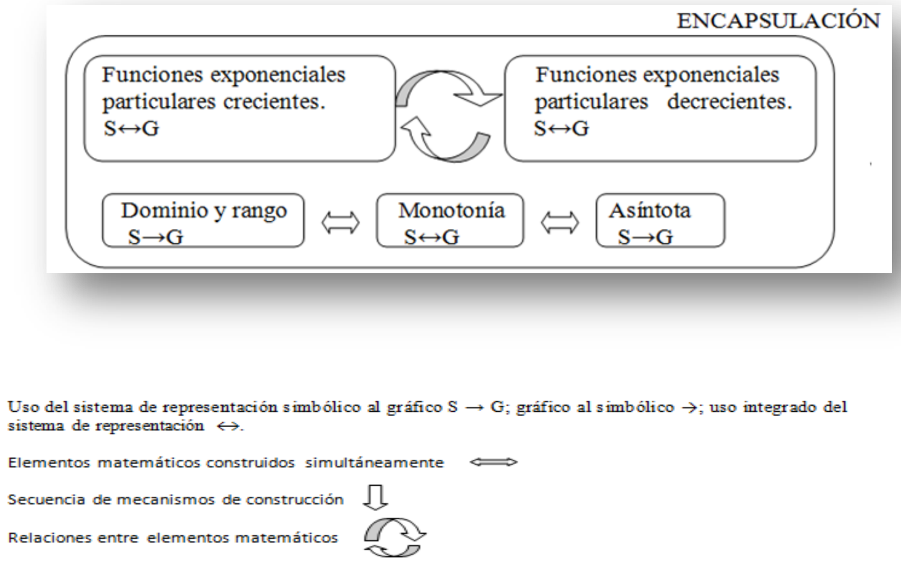


Diagrama perspectiva. 5. Presentación del contenido a estudiar.

Los aspectos anteriores muestran un modelo de la enseñanza de las matemáticas centrada en el estudiante. Es una visión constructivista del aprendizaje de las matemáticas. Se centra en el estudiante, a quien se le involucra activamente para hacer matemáticas. El profesor es visto como facilitador y estimulador del aprendizaje del estudiante, planteando interesantes preguntas y situaciones de investigación, desafíos que hagan pensar al estudiante y le ayuden a descubrir sus propios pensamientos erróneos.

La práctica de Ernesto además se caracteriza por el uso de los diferentes registros de representación para propiciar los mecanismos de construcción de la función exponencial. Usa tanto representaciones simbólicas como representaciones gráficas de las funciones en el plano cartesiano. En el diagrama siguiente, se ilustra por ejemplo el uso integrado de dos sistemas de representación en la modelación del mecanismo de encapsulación, de forma similar a la modelación de los restantes mecanismos.



Síntesis I. Extracto modelación del mecanismo de encapsulación caso 1.

Ernesto establece explícitamente las relaciones entre los elementos matemáticos puntuales como una manera de dotar de significado al concepto, lo que de acuerdo con Gavilán (2005) se traduce en una construcción progresiva vertical de los conceptos durante su práctica. El profesor manifiesta la intención que sus estudiantes construyan significados para cada elemento matemático teniendo en cuenta de manera implícita la descomposición genética del concepto.

La práctica de Ernesto se caracteriza por potenciar los significados de los elementos matemáticos globales del concepto mediante las relaciones que establece entre las formas de conocer mediante una construcción progresiva vertical (sección 1.4.1): desde las funciones exponenciales particulares, como por ejemplo $f(x)=2^{x}$; $f(x)=10^{-x}$; a la función exponencial genérica $f(x)=b^{x}$; y finalmente las funciones exponenciales transformadas $f(x)=kb^{tx+s}$. Esta forma de proceder, pone de manifiesto una concepción de las matemáticas como objeto de enseñanza y aprendizaje en la que las matemáticas están formadas por conceptos relacionados entre sí, formando una red integrada. Las relaciones entre conceptos ayudan a vincular determinados significados a los conceptos. La idea de "relación" en la práctica de Ernesto aparece ahora vinculada a los distintos conceptos: los objetos de un nivel (de un elemento matemático) se relacionan con las acciones de un nivel superior (otro elemento matemático). Se establece a su vez la construcción progresiva horizontal al potenciar los mecanismos de construcción de acuerdo a como fueron descritos en cada una de las viñetas, conformando implícitamente el mismo orden en el que se organizó la descomposición genética de la función exponencial; acciones, interiorizaciones, encapsulación y tematización (ver cuadro C).

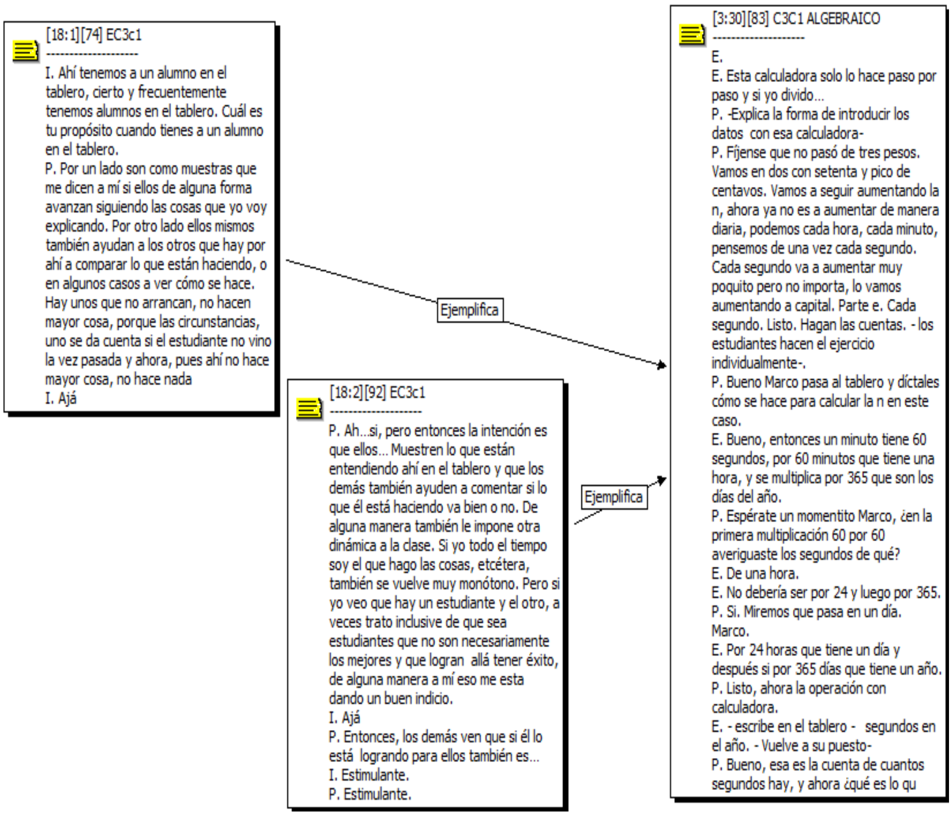


Diagrama perspectiva. 6. Papel del estudiante.

El papel que Ernesto incentiva en sus estudiantes exige su participación activa. La concepción sobre el aprendizaje-enseñanza de las matemáticas que subyace a esta práctica es la relativa a una construcción que se gesta en la comunidad del aula de clase. Las intervenciones de Ernesto para involucrar a los estudiantes en las acciones de iteración, son un ejemplo de ello. El profesor les pregunta a los estudiantes y ¿ustedes que sospechan?, ¿qué pasará? En la entrevista correspondiente el profesor comenta: “estoy esperando que ellos vayan viendo que se está generando ahí algo una cosa, que se está generando algo, que hay una regularidad ahí, que yo espero que la estén viendo.” De manera similar el profesor solicita a los estudiantes que realicen los ejercicios en el tablero o que expliquen a todo el grupo sus preguntas. Por ejemplo en la clase 3, en la modelación del mecanismo de interiorización de la función exponencial:

En los esquemas anteriores inferimos una concepción de la naturaleza de las matemáticas falible (cuasi-experimental) que se desarrolla a través de conjeturas, pruebas y refutaciones (Lerman, 1983). Al mismo tiempo se observa que el papel del estudiante en las clases de Ernesto, de alguna manera, está relacionado con el papel del profesor como una persona que guía la construcción del conocimiento a partir de una organización previa pero flexible que tiene del contenido matemático frente a las inquietudes que vayan manifestando los estudiantes en cada clase.

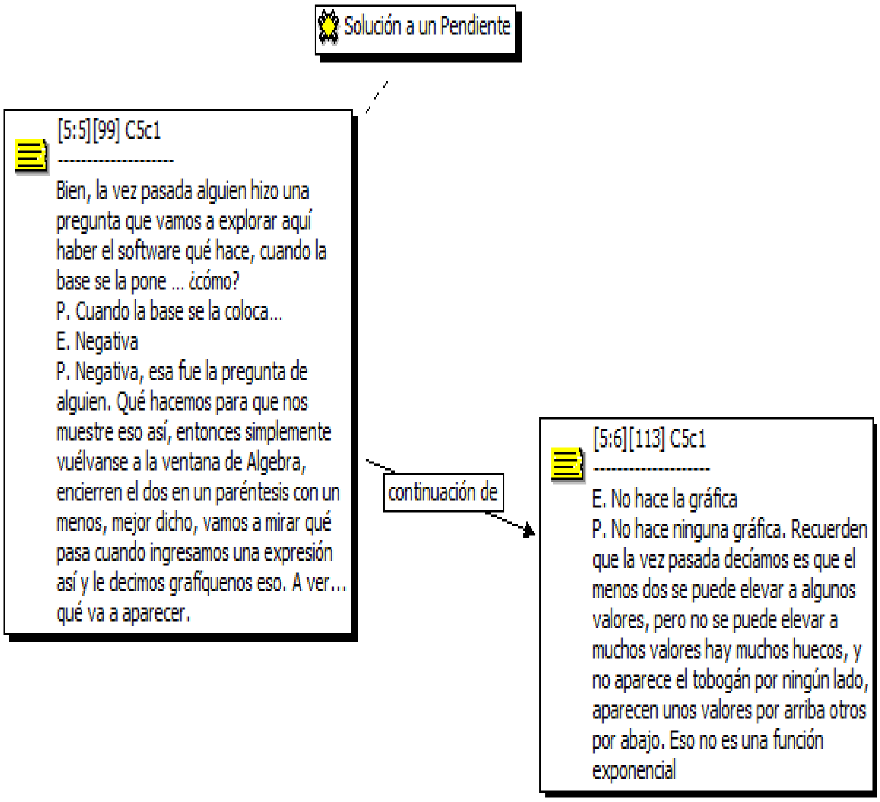


Diagrama Perspectiva. 7. Papel del estudiante y del profesor.

Sintetizando, desde nuestro marco teórico, en las clases de Ernesto se puede intuir que subyace la idea de un profesor que provoca la curiosidad del estudiante mediante preguntas que conduzcan a la consecución de aprendizajes. Un profesor con carácter de experimentador interactivo del contenido y de los métodos. Aunado a ello el aprendizaje de las matemáticas es visto como un proceso de transformación del conocimiento y de las formas de actuar y se considera que las matemáticas escolares son construidas a través de la actividad humana. La modelación es su forma de acercamiento a las matemáticas, alejándose de una presentación de los conceptos basada exclusivamente en las estructuras matemáticas. En su práctica son relevantes no sólo los modos de representación, los elementos matemáticos y las formas de conocer que intenta potenciar, sino que son esenciales las relaciones entre dichos elementos.

Concluimos de esta forma, que la práctica de Ernesto se puede caracterizar con una perspectiva basada en las concepciones (Tzur *et al*., 2001) o, a través de la modelación de la descomposición genética de la función exponencial de Ernesto, nos lleva a identificar que en su práctica priman aspectos de una perspectiva holística.

3.3. MODELACIÓN DE LA DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL. CASO 2

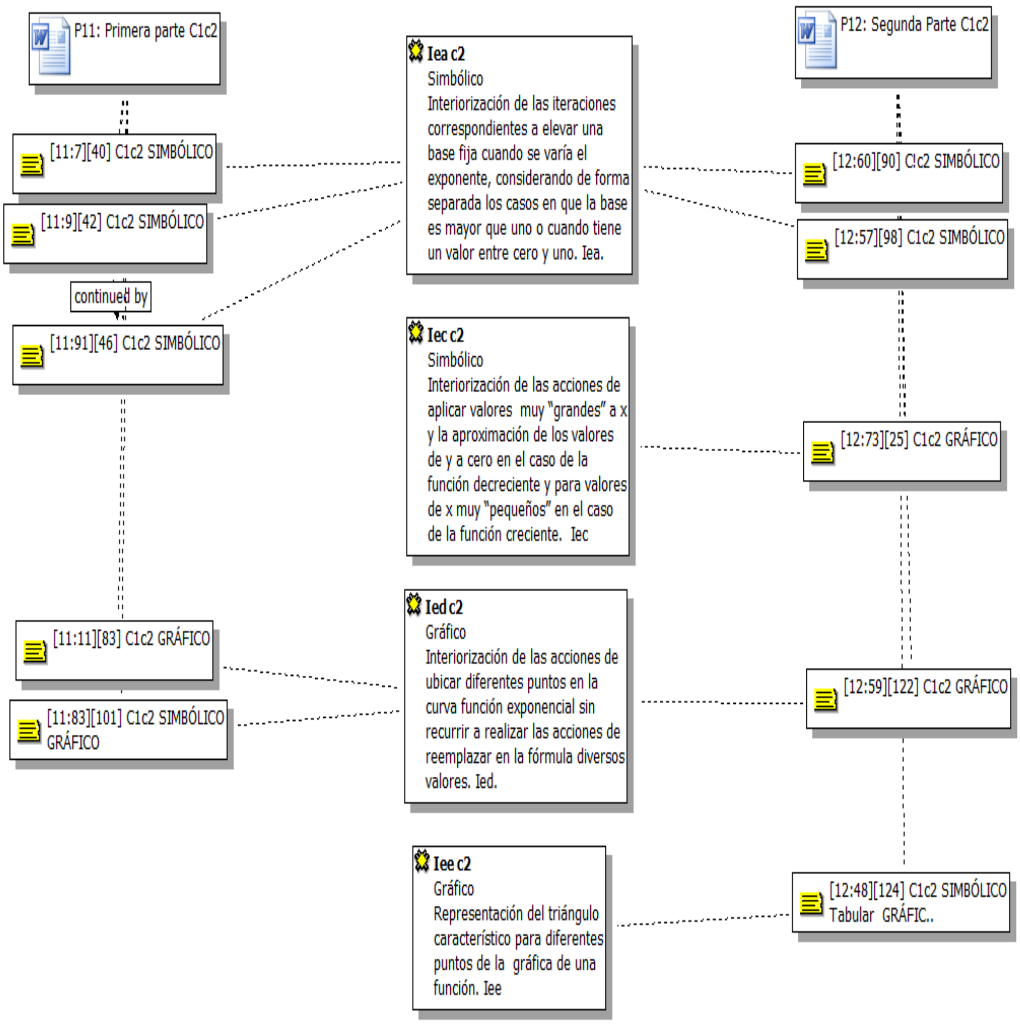
La modelación de la descomposición genética de Arturo se presenta en términos de cada mecanismo y de su secuencia–relación que incluyen los elementos del concepto y los registros de representación utilizados por el profesor. Esto se concreta en tres viñetas, una para cada mecanismo, en las cuáles se identifican las clases correspondientes, las tareas que se han desarrollado en estas clases, así como la forma en que esas tareas son propuestas por el profesor y desarrolladas en el aula. Al mismo tiempo se van describiendo las inferencias del investigador y las intenciones que el profesor explicitó en cada una de las entrevistas posteriores a las clases.

La secuencia de viñetas se inicia con la modelación del mecanismo de interiorización pasando luego a desarrollar la modelación del mecanismo de encapsulación y finaliza con la tematización de la función exponencial. En este caso específico, la relación-orden entre un mecanismo y otro se hace a la luz de la teoría APOS, sin embargo, el orden en el cual Arturo propicia la presentación de los objetos y las acciones con la intención de generar la comprensión de conceptos en sus estudiantes se desarrollan en una secuencia diferente.

Cada una de las viñetas se subdivide de acuerdo a los descriptores establecidos en los referentes teóricos (sección 1.3) teniendo en cuenta que en las observaciones al interior de las subdivisiones se describe si se encontraron evidencias de la modelación del mecanismo. Al iniciar la exposición de la modelación de cada mecanismo se presenta un esquema general y al finalizar una síntesis de su descripción.

3.3.1. Viñeta uno. Modelación del mecanismo de interiorización en la función exponencial

El profesor introduce durante la clase 1 la definición de la función exponencial genérica $f(x) = b^x$ para bases mayores que 0 y distintas a 1 (Esquema 4).

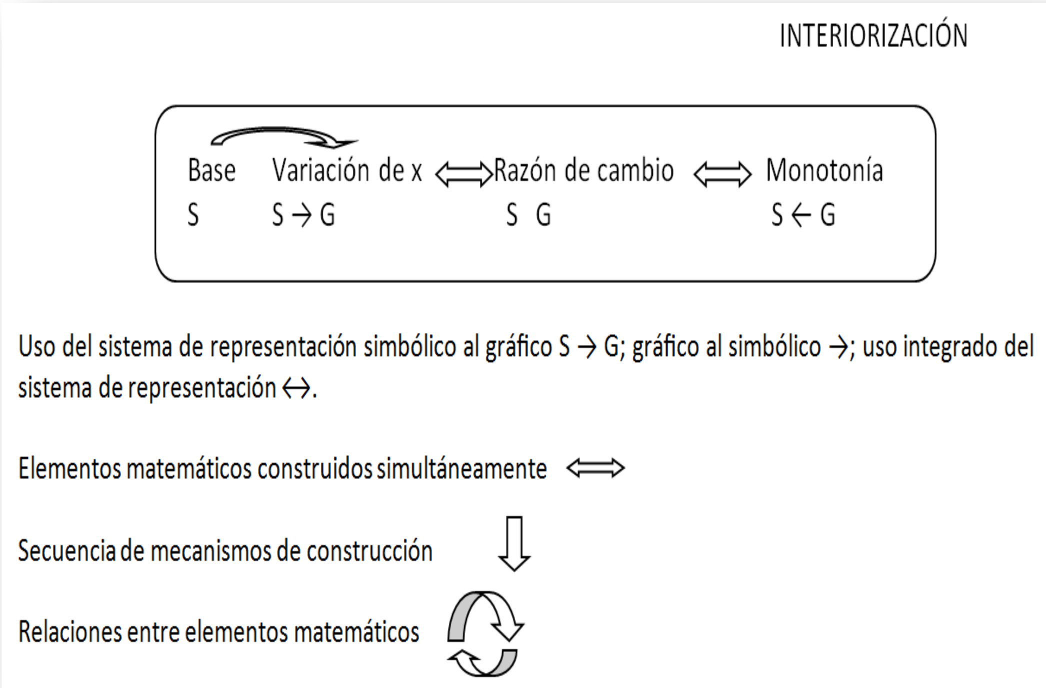


Esquema 4. Segmentos en las clases: mecanismo de interiorización en la función exponencial. Caso de Arturo.

Lo primero que se hace en el aula es justificar el porqué de las restricciones para la base de una función exponencial, para ello el profesor plantea considerar la función exponencial genérica $f(x) = b^x$ y a partir de ella estudiar qué pasaría cuando la base es 1 o un número negativo, haciendo énfasis en los posibles resultados de la operación consistente en elevar la base a algún exponente. Una vez realizada esa justificación, se pasa a estudiar la monotonía de las funciones. El profesor les ha indicado a los estudiantes cuando una función exponencial es creciente o decreciente en función de los valores de la base dibujando las dos gráficas de la función exponencial que él ha llamado formas *básicas*. También les ha indicado previamente antes de realizar ninguna tarea algunos otros elementos matemáticos como es el caso de la asíntota.

A partir de esa información, se realizan gráficos de funciones con el objetivo de que los alumnos asocien ciertos valores de la base con la gráfica correspondiente; creciente o decreciente. Las funciones que se representan gráficamente son $f(x) = 2^x$; $f(x) = \left({}^1\!/_2\right)^x$. Dichas representaciones se realizan a partir de su representación tabular. El profesor busca que los estudiantes indiquen cuál es creciente y cuál decreciente. Como la representación se hace punto a punto, estas situaciones propician la *interiorización de acciones en un proceso, cuando se realizan iteraciones correspondientes a elevar una base fija mientras se varía el exponente*. En las tareas de representación gráfica se hace notar que *"la variación en el eje x"* es diferente a *"la variación en el eje y"*. El profesor guía el procedimiento indicando a los estudiantes que debe identificar que en el rango existen valores muy grandes y muy pequeños que se encuentran bastante lejanos unos de otros y, con esta idea, sustenta la realización de cambios en la escala de los ejes.

Arturo plantea tareas que propician la interiorización de acciones, después de la presentación que hace a los estudiantes del objeto función exponencial y a la vez que propone la comparación entre funciones exponenciales particulares, exhibiendo así un orden diferente al supuesto en el marco teórico (sección 1.4.1) en donde se describió la descomposición genética de la función exponencial. El profesor no identifica este mecanismo como el inicio de los procesos de construcción de conceptos.



Síntesis J. Modelación del mecanismo de Interiorización. El caso de Arturo.

A continuación se describe la concreción de la modelación del mecanismo de interiorización en el desarrollo de la práctica de Arturo. De esta modelación se presenta inicialmente una síntesis, que incluye los elementos matemáticos del concepto función exponencial indicando su relación-orden.

3.3.1.1. Justificación de las restricciones sobre la base

En las siguientes preguntas, el profesor pide a los estudiantes que reflexionen por qué la base debe ser mayor que cero y qué pasa cuando la base es uno. El mismo profesor va justificando las respuestas seleccionando (Diagrama 3.21), valores numéricos particulares, en la base o en los exponentes sin realizar la sustitución de dichos valores.

Cuando la base es negativa, se recurre a la función exponencial genérica $f(x) = b^x$, y se argumenta sobre los posibles resultados, al sustituir la base por un entero negativo y en el caso de la base uno. Concluye en [11][46] acerca de las bases negativas que la restricción de estas bases se debe a la exigencia de encontrar una imagen para cada valor del rango y para la base uno [11][40], la restricción obedece a que se obtiene una función constante.

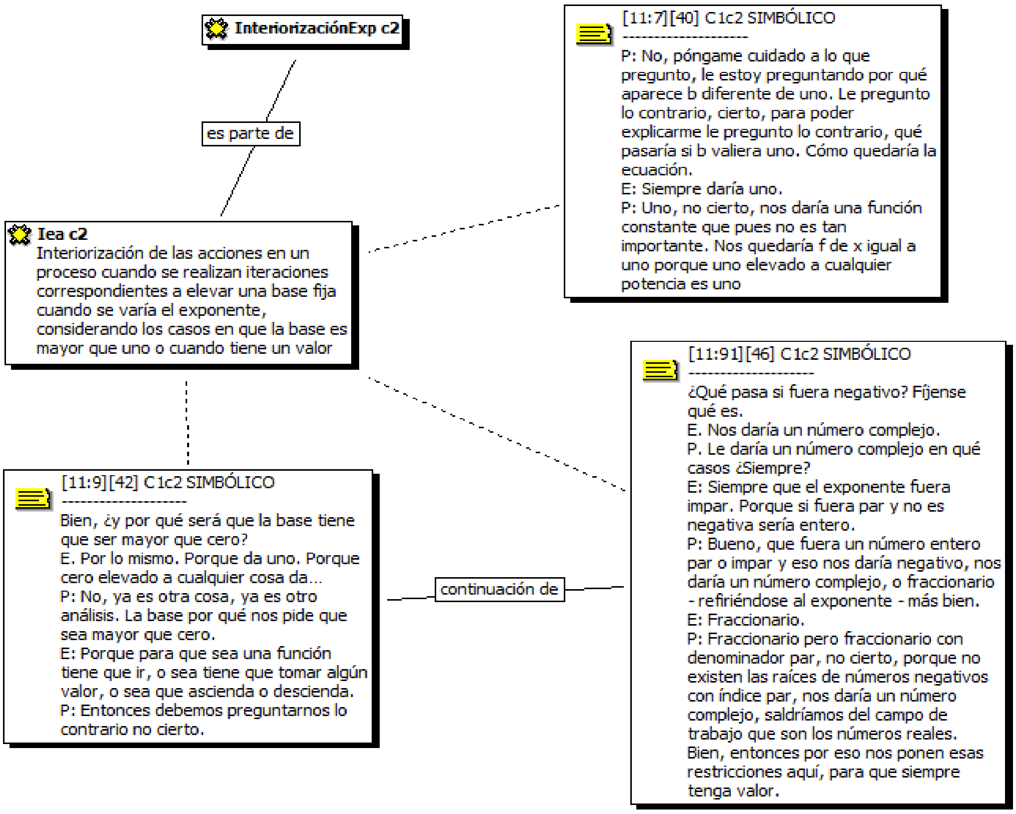


Diagrama 3.21. Exclusión de valores para las bases de funciones exponenciales.

A lo largo de esta construcción para establecer restricciones para la base. Arturo menciona diversos conceptos matemáticos, por ejemplo "no existen raíces de números negativos con índice par", "siempre que el exponente fuera impar".

Hay que tener en cuenta que esta modelación del mecanismo de interiorización se está desarrollando después de la presentación que el profesor ha realizado sobre la función exponencial genérica $f(x) = b^x$ exhibiendo así un orden diferente al supuesto en el marco teórico (sección 1.4.1) en donde se describió la descomposición genética de la función exponencial.

3.3.1.2. Particularización de la monotonía de las funciones exponenciales en dos casos: el de una función creciente y otra decreciente

El profesor modela el mecanismo de interiorización al plantear una tarea de representación en el plano cartesiano de la función $f(x) = 2^x$. Para el desarrollo de esta tarea, Arturo pide a sus estudiantes que construyan la "*tabla de valores*" sustituyendo valores de x para encontrar el valor que toma, en cada caso la y. Este procedimiento de sustitución y cálculos numéricos llevados a cabo, paso a paso, lo llama el profesor una *muestra de cálculos.*

[11][101:104]

P. Primero vamos a hacer la de dos a la x y luego hacemos la de cinco a la x. Bien. Entonces hacemos una tablita de valores, ¿no cierto? Donde ponemos x y f de x. Entre más puntos pues mejor nos queda la gráfica. Bien. ¿Qué valores le damos a x?

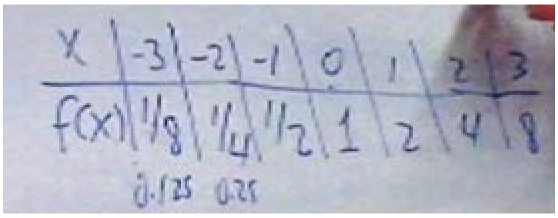
E: Tres, menos dos.

P: Podemos darle valores negativos y positivos, ¿no? cierto, porque la gráfica puede tener una parte en el lado negativo y otra en la parte positiva. Bueno, entonces pongámosle menos tres, menos dos, menos uno, cero, uno y dos. Y hacemos los cálculos para cada uno.

El primer punto es menos tres, un octavo. ¿Un octavo es qué decimal?

E: Cero coma ciento veinticinco.

...



E: Dos.

P: Dos. ¿Para dos?

E: Cuatro.

P: Cuatro. Pongámosle para tres también.

E: Ocho.

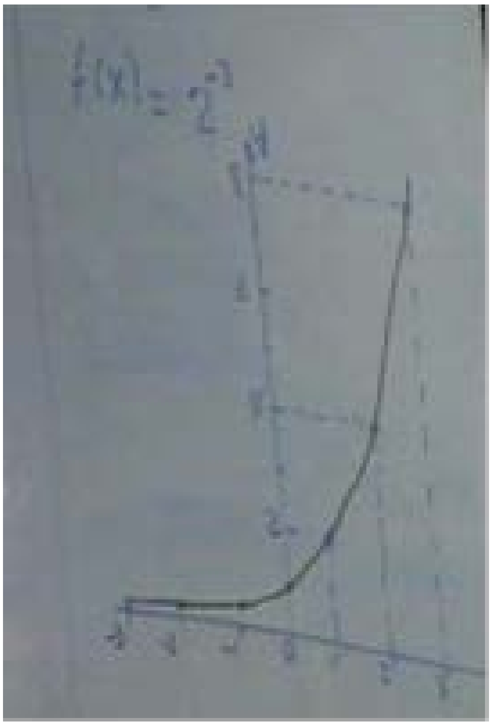
P: Ocho. Entonces fíjense que con eso ya tenemos una buena cantidad de puntos con los cuales hacer la gráfica.

El énfasis que Arturo imprime en su práctica en el aula al mostrar paso a paso los procedimientos de cálculo permite inferir una concepción de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas según la cual el estudiante aprende si el profesor hace explícito cada uno de los pasos de un procedimiento. Para él, el hecho de mostrar un concepto o procedimiento es el medio para que el estudiante lo asimile.

Para proceder a realizar la representación en el plano cartesiano de los puntos correspondientes a las parejas ordenadas, el profesor realiza preguntas a sus estudiantes para ayudarles a establecer la escala de los ejes cartesianos [11] [118:122].

[11][118:122]

P. Bien, primero miramos la variación, acuérdense que cuando uno va a hacer una gráfica siempre planea primero las escalas y luego sí empieza a situar los puntos. Entonces en x, ¿cuál es la variación en x? ¿De dónde a dónde varía la x?



E: De menos tres a tres.

P: De menos tres hasta tres. Entonces la escala es muy sencilla, lo podemos hacer de uno en uno, ¿cierto? Utilizamos aquí el espacio que tenemos. Uno, dos y tres. Como no es muy grande la variación, podemos utilizar el eje que tenemos ahí. Es decir, ampliar el espacio. Cero, uno, dos y tres, menos uno, menos dos y menos tres. Bien. ¿Y verticalmente, de dónde a dónde varía?

E: De un octavo a ocho.

P: De un octavo a ocho. Entonces fíjense que la escala vertical no puede ser idéntica a la horizontal. Porque entonces si la hacemos igual ya no cabe en el tablero, aumentaría muy rápidamente. Comenzaría aquí y terminaría hasta por aquí. Bien, y además tenemos unos pedazos donde hay un valor muy pequeñito.

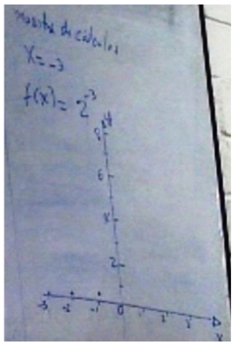
En el paso de la representación tabular de los datos a la representación gráfica y la selección de la escala adecuada se observa implícitamente el reconocimiento de una variación más rápida en *f(x)* respecto a la variación en *x*. En esta tarea se percibe cierta aproximación a efectuar *acciones de comparación de diferencias de dos valores de la variable independiente e dependiente respectivamente*, sin llegar a establecer comparaciones entre cocientes de dos valores de la variable dependiente.

A continuación, se representa gráficamente la función $f(x) = 2^x$ punto a punto, a partir de la tabla de valores obtenida:

[12][73]

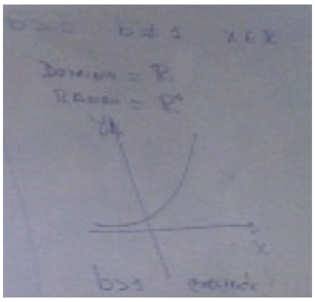
P. El primer punto es menos tres, un octavo. ¿Un octavo es qué decimal?

E: Cero coma ciento veinticinco.



P: Entonces fíjense que para la escala que tenemos aquí prácticamente pegado al eje, no cierto. Para menos tres, un octavo sería un punto como por aquí, bien pegadito, cero ciento veinticinco. Un cuarto es cero veinticinco, el que sigue. Bien, si aquí es cinco, cero cinco es en la mitad, cero veinticinco es la cuarta parte por aquí. Entonces nos da un punto por acá. El primero da prácticamente pegado al eje. Para menos uno, un medio. Entonces en toda la mitad, aquí es uno entonces por acá. Para cero, uno, entonces aquí. Cero, uno. Para uno, dos. Entonces nos da por aquí. Para dos, cuatro. Entonces nos da *por acá. Y para tres, ocho. Eso sería por aquí. Entonces ya se ve ahí la forma de la función, es creciente y eso lo sabíamos desde antes de graficarla porque la base era mayor que uno, ¿no? cierto. Cuando la base es mayor que uno, es creciente. Entonces aquí ya sabemos que es creciente desde antes de graficarla. Ya podemos trazar la gráfica. Unimos esos puntos con una curva suave. Bueno, entonces ahí está la gráfica.*

La modelación del mecanismo de interiorización se caracteriza porque Arturo parte del registro tabular para representar gráficamente un caso particular de función exponencial creciente. Al finalizar la sesión recuerda lo que presentó en su primera sesión de clase, las dos gráficas de la función exponencial que él ha llamado formas *básicas*.



El profesor propicia acciones de sustitución [12][73] de los valores de *x* para obtener los valores correspondientes a *f(x)* en una tabla de valores para luego realizar su representación gráfica, en un caso concreto de una función exponencial creciente.

Después de hacer la representación gráfica de funciones crecientes, el profesor plantea realizar la representación gráfica de la función $f(x) = (1/2)^x$. El estudio de esta función se inicia analizando la expresión simbólica de esta función para lo que el profesor les pregunta a los estudiantes ¿de qué otra forma podría estar escrita esta misma función $f(x) = (1/2)^x$? tratando de explicar que $f(x) = (1/2)^x$ es equivalente a $f(x) = 2^{-x}$. Para establecer esta equivalencia aplica un procedimiento aritmético basado en las propiedades de los exponentes.

[11][186:189]

P: A ver, no. En forma de exponente negativo, ¿cómo sería? Porque fíjense que esa se puede escribir como un exponente negativo.

E: Dos a la menos uno.

E: Dos a la menos x.

E: Dos a la menos uno.

P: ¿A la menos uno?

E: A la menos x.

P: Fíjense que si yo la dejo a la x qué me queda. Uno a la x es uno, no cierto. Y dos a la x es dos a la x. Y esta se puede escribir como dos a la menos x, entonces fíjense que es otra forma que puede presentar, a veces no puede aparecer así la ecuación. La base era una constante pero el exponente puede aparecer negativo, cuando es negativo significa que es una fracción, ya lo habíamos visto, cierto. Esto y esto - el profesor señala en el tablero dos ecuaciones donde aparece exponente negativo y fracción -. ¿Qué pasaba cuando teníamos un exponente negativo? Era una fracción, lo que hemos estado haciendo aquí para hacer los cálculos, por ejemplo en esta parte. Bueno entonces fíjense que es la misma: esto $f(x) = (1/2)^x$ y esto $f(x) = 2^{-x}$ son iguales. Puede aparecer con esas dos formas. Con exponente negativo o como fracción. Bien, hagamos entonces una tablita de valores nuevamente: x y f de x. ¿Quién quiere pasar a hacerlo?

E. - Va al tablero -.

P. Bueno, ¿qué valores le vamos a dar? Bueno, pongamos menos tres, menos dos, menos uno, cero, uno y dos. Hagamos una muestra de cálculos ahí. O sea, para x igual a menos tres. Con cuál va a trabajar: ¿con esta $f(x) = 2^{-x}$ *o con esta* $f(x) = (1/2)^x$*? ¿Con cuál será más fácil?*

Esta explicación de los exponentes negativos, realizada por el profesor en el aula de clase, se retoma durante la entrevista en donde, justifica el uso de los exponentes y sus propiedades considerando este elemento matemático como un prerrequisito para la construcción de la función exponencial.

[26][42:46]

P: Pues hay que saber las leyes de los exponentes, cómo se operan los exponentes, cómo se operan las potencias.

I: Cuando tú les haces este pedacito, es como para recordar una convención que hay, que si hay un exponente negativo, por convención…

P: Es decir, ya esto es el efecto final. Aquí no están los pasos intermedios, ¿cierto? Porque para que esto se obtenga, no es así. No es una cosa mágica que apareció ahí. Que se pasó abajo y quedó con positivo, ¿pero por qué? No, tiene que haber, previamente ya se vio potenciación, ¿cierto? Es un tema anterior y entonces en potenciación ya miramos qué pasaba cuando un exponente aparecía allá negativo, qué hacía uno para que quedara abajo, ¿cierto? Eso era hacer un producto, es decir multiplicar por uno, yo lo explico así. Multiplicar por uno. Multiplicar por dos a la tres sobre dos a la tres. Si yo multiplico por dos a la tres arriba, entonces ahí es que aparece. Arriba me queda dos a la cero que es uno, entonces de ahí salió el uno, y abajo me queda el dos a la tres. Esa es la forma de operar para que eso salga así.

I: Y el hecho de que los muchachos entiendan, manejen esas convenciones, ¿cómo qué papel juega en la exponencial, en que entiendan la función exponencial? ¿O no es relevante?

P: No, sí. Las potencias, claro. El manejo de las potencias tiene que ser… pues ya lo tienen que conocer y manejar bien, o sea es un requisito para que puedan entender la función exponencial. Tienen que ya haberla manejado, saber qué es una potencia, cómo se desarrolla una potencia, qué significa que la potencia tenga un exponente negativo o positivo. Ese es un concepto previo que deben tener para poder entender la función exponencial, porque sin ese concepto sí les queda muy difícil que puedan entenderla.

Tanto el desarrollo presentado por el profesor en el aula como sus explicaciones en la entrevista posterior muestran una concepción que supone que el aprendizaje es lineal, en el sentido de “añadir” un concepto a otro anterior sin necesidad de realizar alguna transformación del concepto previamente aprendido.

Para realizar la representación gráfica, el profesor propone la sustitución de valores de x en la función $f(x) = 2^{-x}$ construyendo así la representación tabular de forma similar a como lo hizo con la función $f(x) = 2^x$.

[12][98:117]

E: A la menos, menos tres.

P: Una cosa es el menos y otra cosa es la x, no cierto. Menos, menos tres.

E: Los dos negativos dan uno positivo.

P: Sí, correcto, entonces qué me queda, igual a qué. Primero hagámosle el signo arriba porque de pronto no tiene que ser fracción. Entonces dos a la qué.

E: Dos a la tres.

P: Dos a la tres, no cierto, porque menos por menos nos da más, ley de signos.

E: Y esto me da ocho.

P: Ocho. Entonces para menos tres, ocho. Bueno. ¿Entonces qué pasa con menos dos?

E: Lo mismo.

P: ¿Qué es lo mismo? ¿Da ocho también?

E: No, da positivo.

E: Da cuatro.

P: Bueno. ¿Para menos uno?

E: Dos.

P: ¿Para cero?

E: Uno.

P: Uno. ¿Para uno?

E: Un medio.

P: ¿Y para dos?

E: Un cuarto.

P: Bueno, hagamos un momentico con uno aquí, $f(x) = (1 / 2)^x$ *para que nos demos cuenta que contiene una fracción.*

E: Dos a la uno.

P: Acuérdese que es menos x, tiene un menos, entonces queda a la menos uno. ¿Sí ven? Una cosa es el menos que tiene el exponente y otra cosa es el valor de la variable, que en este caso es uno, por eso queda un medio. Es para que nos demos cuenta por qué da un medio aquí. En el otro daría un cuarto porque quedaría dos a la menos dos. Y dos a la menos dos es un cuarto. Bueno.

En esta secuencia de clase, se [12][98-117] el profesor está generando una tabla de valores paso a paso. Luego se van a representar cada par de coordenadas en el plano cartesiano (Diagrama 3.22).

[26:10][47] E1c2

I: Todo es de la gráfica, ¿cierto?
P: Sí, estamos trazando los... poniendo los valores.
I: ¿Tú me decías que para qué es que haces la gráfica?
P: La gráfica pienso yo que tiene dos objetivos: uno, es mostrar la forma en que están relacionadas las dos variables, digamos, como visualmente qué es lo que representa esa función, cómo se representa, entonces qué forma tiene, si es una línea recta, si es una curva, qué es, identificar cómo es. Porque, digamos, la sola ecuación, pues sí, tiene unas características, unas partes, pero como que es demasiado abstracta y no entiendo qué es eso. No me imagino ni siquiera qué es. Entonces, con la gráfica como que concretamos que la representación de esa ecuación, allá, tiene esa forma, tiene una forma que es curva. Y es así: es creciente o es decreciente y tiene unas características. Entonces eso como que ya pasa de lo abstracto que es la ecuación, a una cosa más concreta que es una gráfica, que es algo visual y fácil de entender.

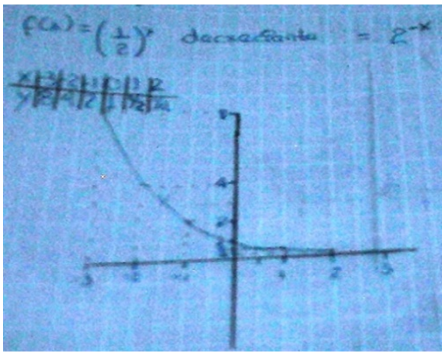
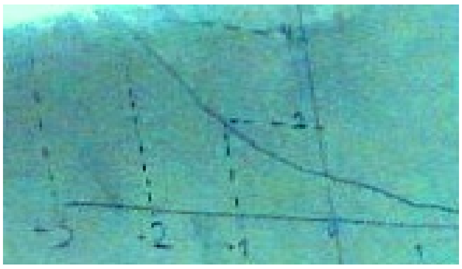


Diagrama 3.22. Uso del registro simbólico al tabular y luego al gráfico.

En las tareas propuestas, Arturo es quien decide cuáles son los valores enteros que se pueden sustituir en la variable independiente. Una vez realizada la *“muestra de cálculos” y tabla de datos*, su discurso [12][124:132] se dirige a realizar cambios aritméticos en la escala del eje vertical.

[12][124:132]

P: Tracemos el otro eje primero. Luego planeamos las escalas, por favor. Bueno. Entonces primero el x, no cierto. ¿Cuál es la variación en x según la tabla que tenemos ahí? De menos tres a dos, bueno, entonces podemos hacer divisiones grandecitas, no. Fíjense que ahí no sería conveniente que él hiciera uno pegadito al 2 y 3, entonces la gráfica queda desproporcionada. Ahí aprovechamos que tenemos una variación pequeña y entonces ampliamos la escala. Marquemos el eje aquí x y y, tenemos dos variables diferentes, variable dependiente y variable independiente, la dependiente va en el eje y. El eje de dónde a dónde varía.



E: De uno a ocho. De uno.

P: Yo diría que es más que eso.

E: - Traza los ejes para elaborar gráfica en el tablero. -

P: Ahí está bien. Bueno.

E: Entonces tenemos que para menos, tres ocho. - Ubica este punto en el plano-.

P: Menos tres, ocho. Un punto allá arriba, ¿no cierto? - Señala en dónde debe ir el punto -.

P: Muy bien, para cero, uno.

E: Acá está. - Ubica este punto en el plano -.

P: ¿Para uno?

E: Un medio

P: Entonces la mitad de esto, ¿no cierto? - el profesor le indica al estudiante dónde debe ir el punto de la gráfica -. Y para dos, un cuarto, sí da en la mitad de esto - el profesor señala el punto en la gráfica -. Y ya la podemos trazar, entonces nos da decreciente. A medida que la x aumenta, la y disminuye, son inversamente proporcionales.[17]

En este diálogo el profesor expresa "Ahí aprovechamos que tenemos una variación pequeña y entonces ampliamos la escala", de esta forma Arturo implícitamente hace uso de la noción del triángulo característico con su apreciación acerca de la variación pequeña en *x*. Él guía al estudiante en la decisión de las escalas utilizadas para la variable dependiente e independiente a partir de la observación de la variación de los datos para cada una de las variables.

3.3.1.3 Ejemplificación de otros elementos matemáticos puntuales

En la entrevista relacionada con la primera sesión de clase [26][61] Arturo manifiesta que entre sus objetivos está la intención de exponer las características de la función exponencial, entre ellas la asíntota horizontal. Y como observamos en el diálogo [12][25] en su secuencia de clase, propone para un caso particular $f(x) = 2^x$ la tarea de elaborar la gráfica de esta función punto a punto. El profesor guía la observación hacia cómo se van acercando los puntos de la gráfica al eje *x*, propiciando así la *interiorización de las acciones del cambio que se efectúa en la variable x, para x muy pequeño en este caso de una función creciente para comparar el cambio que se genera en y*.

La explicación de Arturo durante la entrevista [26][61] permite identificar al investigador que en las actividades propuestas por el profesor se parte de elementos matemáticos globales como las funciones crecientes y decrecientes con el objetivo de usar la representación gráfica en el caso de algunas funciones concretas para que los alumnos puedan visualizar algunos elementos matemáticos puntuales; asíntota, corte con el eje y, dominio y rango de las funciones exponenciales y de esta forma asociar la gráfica con una determinada expresión simbólica.

[17] Es persistente en el discurso del profesor, el referirse erróneamente a la proporcionalidad.

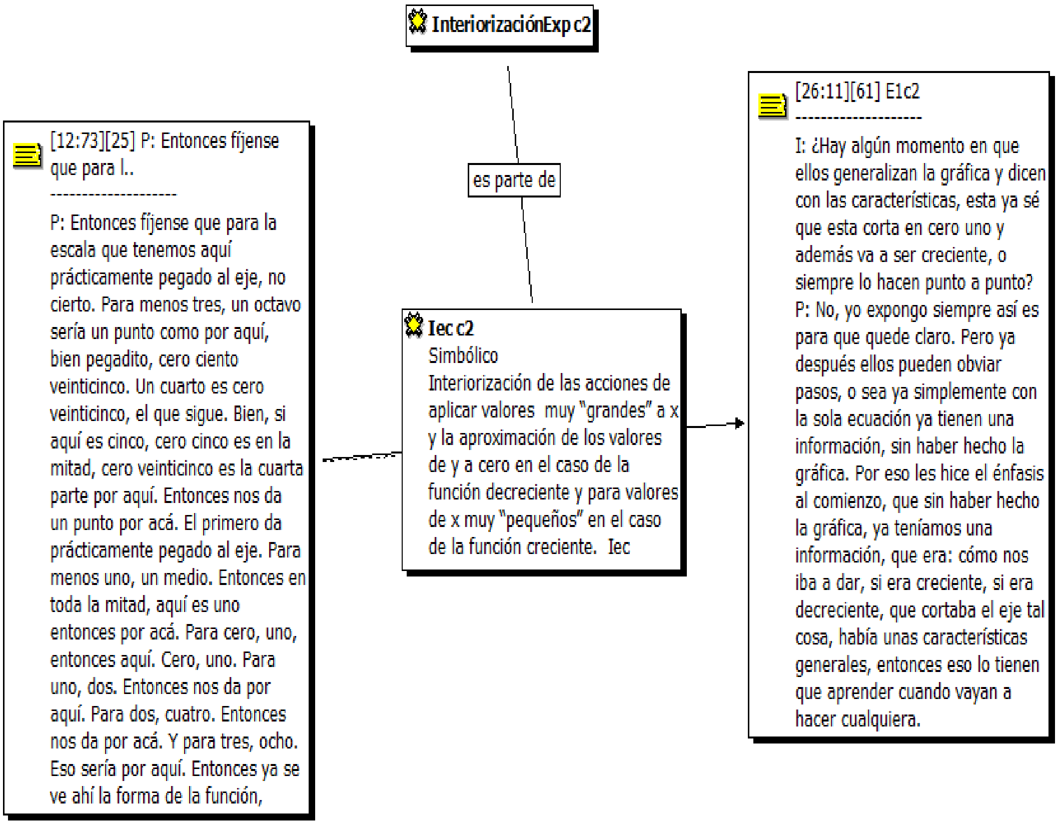


Diagrama 3.23. Representación gráfica a partir de los parámetros.

[11][101]

P: Hacer una tabla de valores, no cierto. Pero además nos sirve todo eso que hemos dicho acá - muestra los datos del tablero - . Todas estas características que vemos acá nos sirven porque ya de antemano tenemos una información antes de hacer la gráfica. O sea que antes de hacer la gráfica ya sabemos si nos va a dar creciente o si nos va a dar decreciente, cierto. Ya eso es una información importante. Con sólo mirar la ecuación ya sabemos si es una función lineal, o si es cuadrática, o si es exponencial, por eso tiene una forma, ¿no? Tiene una forma. Esta forma. Y sabemos también de las intersecciones. Todo esto nos va a ayudar a hacer la gráfica.

Arturo potencia, implícitamente, la *interiorización de las acciones de ubicar diferentes puntos en la curva función exponencial sin recurrir a realizar las acciones de reemplazar en la fórmula diversos valores*, dado que en su discurso expone un conjunto de parámetros con los que se puede graficar; el punto de corte de cualquier función exponencial con el eje y, la asíntota [11][101]y las característica de la base [11][83].

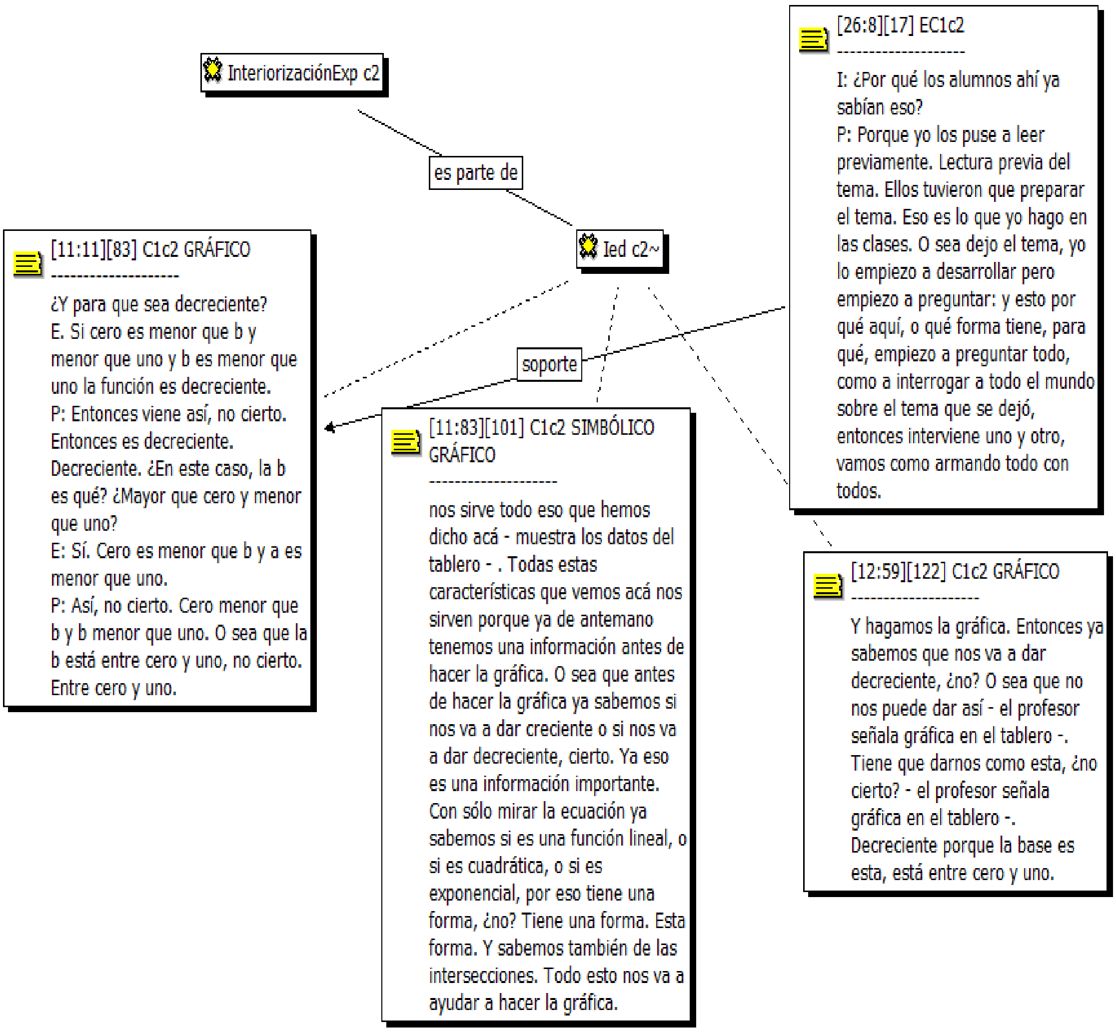
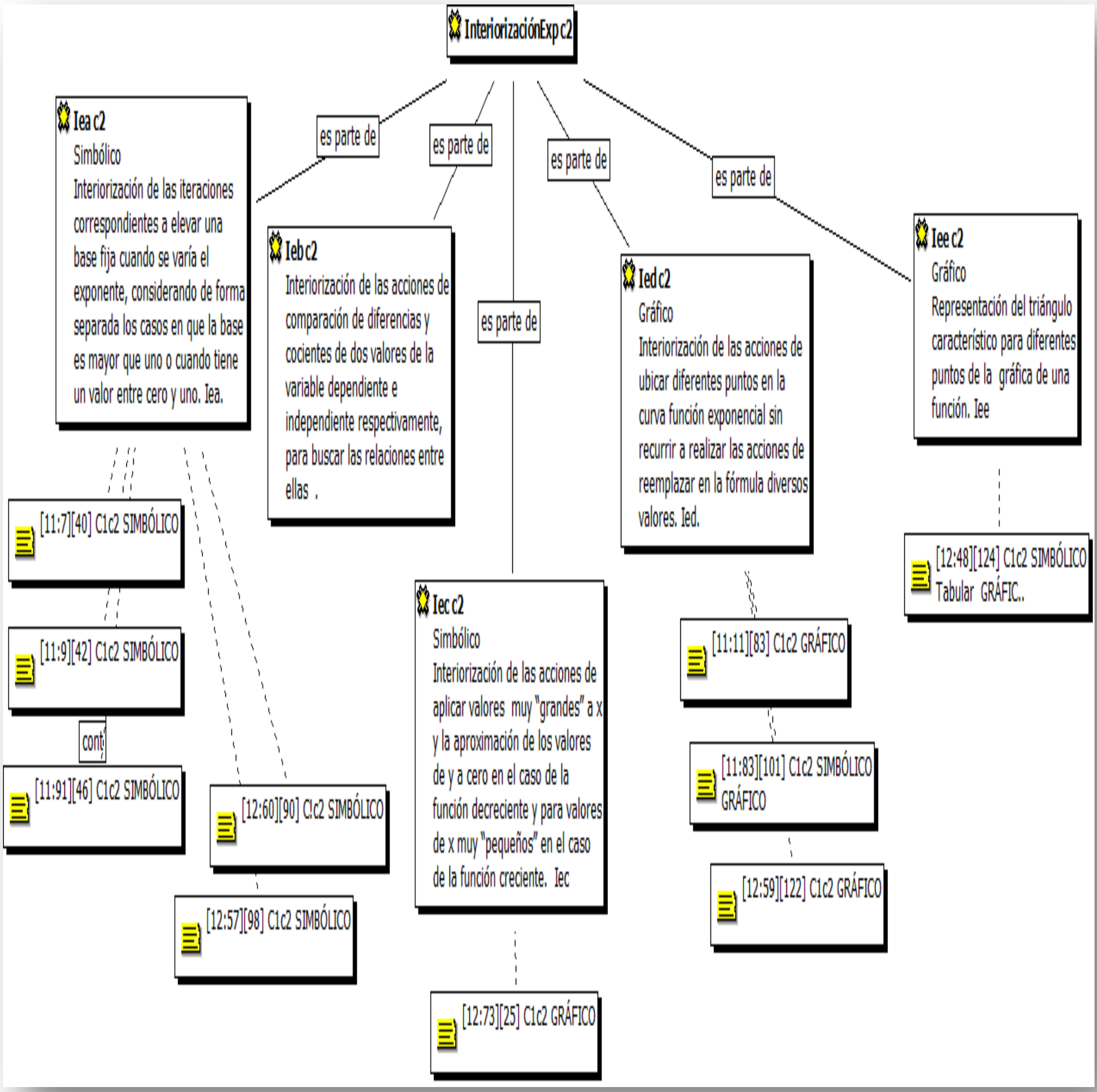


Diagrama 3.24. Representación gráfica punto a punto y a partir de los parámetros.

3.3.1.4 Síntesis

La modelización del mecanismo de interiorización de Arturo se desenvuelve iniciando su secuencia de clase con la exposición de las propiedades generales de la función $f(x) = b^x$ y luego intenta particularizar en los elementos matemáticos puntuales de la función exponencial, a través de funciones concretas. Elabora para ello representaciones gráficas a partir de la representación tabular, propiciando que los estudiantes "examinen ejemplos" en los cuales se identifican elementos matemáticos como la asíntota, la monotonía y el corte con el eje *y*.

En la siguiente síntesis se presentan los diferentes momentos correspondientes a la modelación del mecanismo de interiorización:

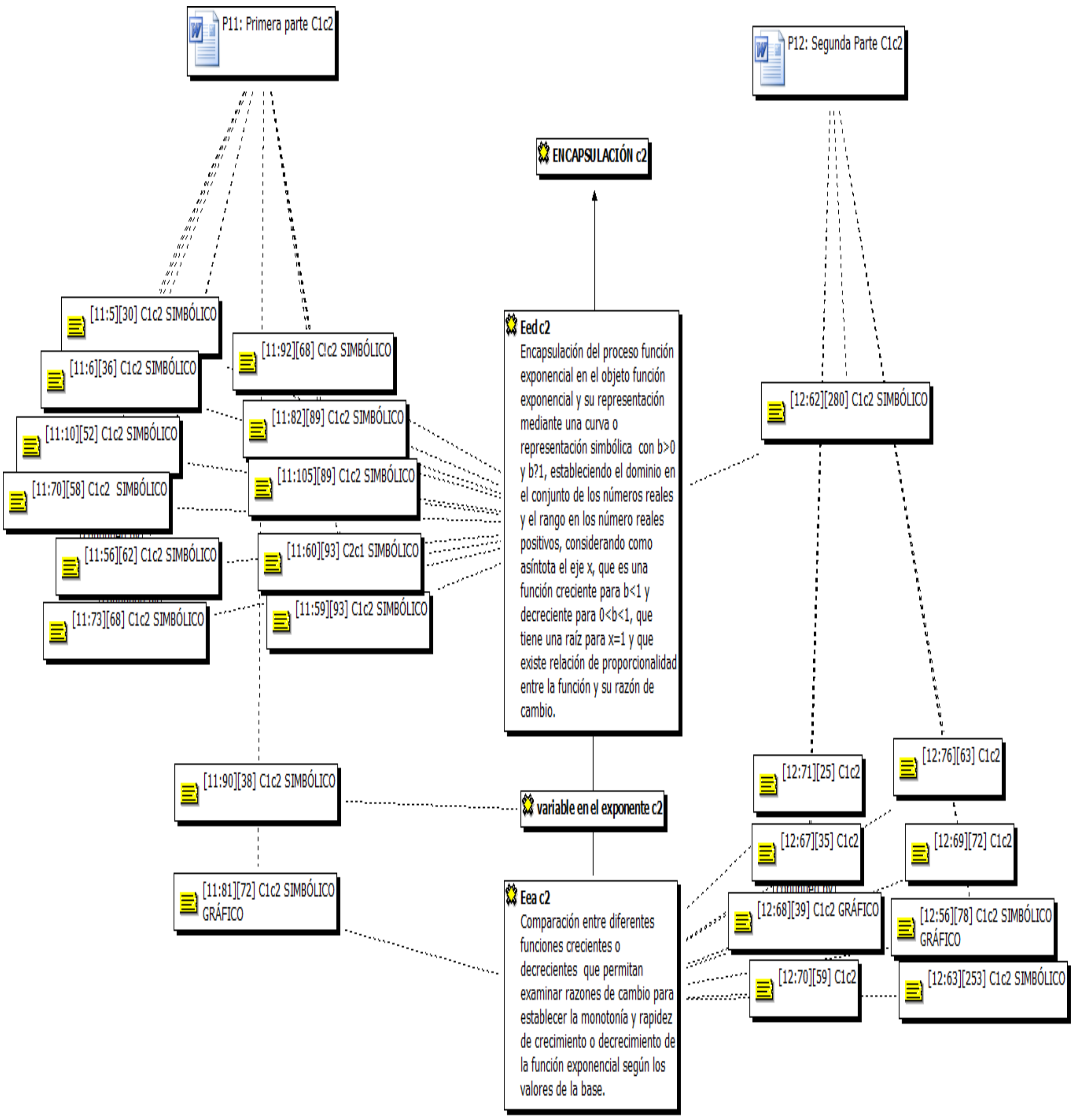


Síntesis L. Modelación del Mecanismo de Interiorización de la función exponencial. Caso 2.

La síntesis L. nos permite ilustrar el uso constante del sistema simbólico; registro tabular y la focalización de tareas de interiorización de acciones cuando se varía el exponente. Sin embargo, hay ausencia de interiorización de acciones en los casos de comparación de diferencias y cocientes entre los valores de la variable dependiente e independiente respectivamente. De la misma forma existe un escaso acercamiento fomentado por el profesor a la interiorización de acciones a través del registro gráfico usando el triángulo característico o a las relacionadas con los elementos matemáticos asíntota, dominio y rango. La presentación que Arturo hace en su discurso en el aula, enuncia acciones para predecir la gráfica de la función exponencial recurriendo a la base y punto de corte, antes de acudir a graficar punto a punto.

3.3.2. Viñeta dos. Modelación del mecanismo de encapsulación en la función exponencial

Las acciones[18] del profesor encaminadas a comparar funciones exponenciales consideradas como objeto tienen como objetivo que los estudiantes encapsulen el concepto función exponencial (Esquema 5).



Esquema 5. Segmentos en las clases: mecanismo de encapsulación en la función exponencial. Caso de Arturo.

---

[18] Las “acciones” del profesor en esta investigación, al igual que en Gavilán (2005), «*tienen un sentido amplio incluyendo tareas, la secuencia de tareas y lo que “hace” el profesor*» (p. 78).

En la clase 1, el profesor después de indicar que el tema que se estudiará en esta clase corresponde a las funciones exponenciales plantea algunas preguntas acerca de esta función. Escribe en la pizarra una definición de función exponencial que incluye el dominio y rango de la función, su corte con el eje y y la asíntota.

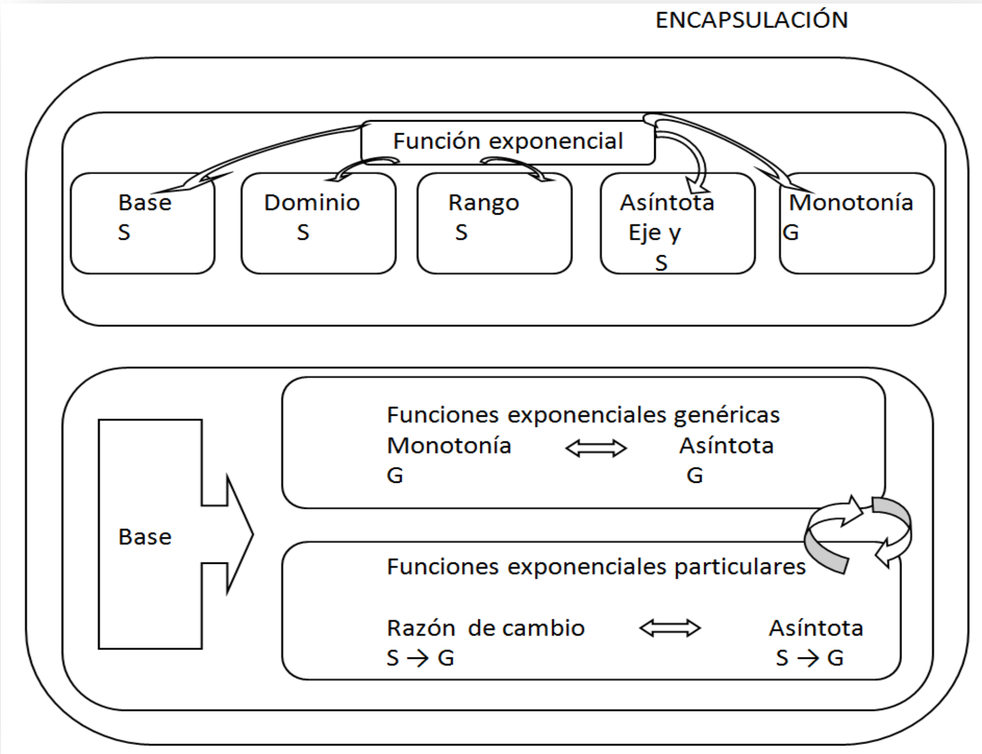
Arturo establece comparaciones entre funciones exponenciales de base mayor que uno, de forma genérica, para indicar que todas esas funciones son crecientes.

Se continúa con una tarea que consiste en establecer comparaciones entre el crecimiento de dos funciones exponenciales, mediante la gráfica de las funciones $f(x) = 2^x$ y $f(x) = 5^x$. Arturo plantea la necesidad de generar escalas diferentes para el eje horizontal y el vertical. Prosigue con la función $f(x) = (3/2)^x$ para determinar que es una función creciente, al tener base mayor que uno. En la siguiente tarea presenta las funciones decrecientes a partir de la función exponencial $f(x) = (1/2)^x$.

Los segmentos identificados en la clase uno relacionados con el mecanismo de encapsulación están situados al inicio de la primera clase y en la segunda parte de la misma y se encuentran en el esquema 5. Se estableció esta división de la clase en dos partes, dado que en medio de estos dos momentos, se identificaron actividades propuestas para favorecer la forma de conocer proceso a través de la ejemplificación de casos particulares de la función genérica.

A continuación se describe la modelación de la encapsulación y los indicadores que la sustentan en la práctica de Arturo. En el siguiente gráfico se presenta una síntesis que incluye los elementos matemáticos globales que son usados en esa modelación indicando su relación-orden.

La síntesis M esquematiza cómo Arturo expone la función exponencial como objeto a través de su definición apoyándose en el registro simbólico y cómo procede a identificar los elementos matemáticos del concepto: base, dominio, rango, asíntota, corte con el eje y monotonía. Presenta dos funciones exponenciales, una creciente y otra decreciente, que discrimina a partir de los valores de la base de cada una de ellas. Igualmente, a partir de la base se examina la razón de cambio de algunas funciones exponenciales particulares y realiza comparaciones entre las funciones genéricas expuestas por él y las funciones particulares que han representado gráficamente en clase.



Uso del sistema de representación simbólico al gráfico S → G; gráfico al simbólico →; uso integrado del sistema de representación ↔.

Elementos matemáticos construidos simultáneamente ⟺

Secuencia de mecanismos de construcción ⇩

Relaciones entre elementos matemáticos

Síntesis M. Presentación de la forma de conocer objeto. El caso de Arturo.

3.3.2.1. Exposición de las características relativas a la función exponencial genérica

Arturo inicia la clase 1 con la frase *"hoy vamos a ver el tema que tiene que ver con la función exponencial"* y plantea a los estudiantes preguntas sobre conceptos tratados en clases anteriores como ¿qué es una función?, ¿qué es el dominio y el rango de una función?, ¿cuál es la condición para que una función tenga función inversa? y ¿cuándo una función es uno a uno?

Al preguntarle al profesor sobre su objetivo al iniciar la clase con estas preguntas, él explica:

[26][12:16]

P…Estos son todos conceptos previos que requieren o que es importante recordar para poder entrar en el tema. Pues se supone que ellos ya los tenían, pero eso no puede uno confiarse.

I: ¿O sea que tú considerabas que para poder trabajar esas dos funciones necesitan recordar función inversa?

P: Sí. Recordar primero qué es una función y qué es una inversa. Qué es una inversa y cómo se calcula la inversa. Para que después puedan relacionar que la función exponencial y la logarítmica son inversas. Estamos viendo la metodología, bueno, para cómo se obtiene la inversa.

Continúa la clase 1, y el profesor se centra en el concepto de funciones exponenciales indicando a los estudiantes la forma en que se realizará el desarrollo del tema: *primero saber cómo es, cuál es su ecuación, cuáles son sus características, cómo se gráfica y las aplicaciones, que son muy importantes.*

El profesor, plantea preguntas a los estudiantes sobre una lectura previa que llevaron a término, independientemente de la clase en el aula, sobre la función exponencial. En la entrevista correspondiente a esta clase, Arturo comenta las intenciones de esta consulta y la forma como usa esta estrategia.

[26][17]

I: ¿Por qué los estudiantes ahí ya sabían eso?

P: Porque yo los puse a leer previamente. Lectura previa del tema. Ellos tuvieron que preparar el tema. Eso es lo que yo hago en las clases. O sea dejo el tema, yo lo empiezo a desarrollar pero empiezo a preguntar: y esto por qué aquí, o qué forma tiene, para qué, empiezo a preguntar todo, como a interrogar a todo el mundo sobre el tema que se dejó, entonces interviene uno y otro, vamos como armando todo con todos.

En el desarrollo de la clase 1 el profesor [11] [30:35] induce a los estudiantes a verbalizar algunas características de esta función.

[11][30:35] SIMBÓLICO

E: f de x.

P: - lo va diciendo y escribiendo en el tablero- $f(x) =$.

E: es igual a b a la x.

P: A b a la x.

E: Donde b es mayor que cero y b no puede ser igual a uno. $f(x) = b^x \quad b > 0,\ b \neq 1$

Arturo propicia la identificación del objeto función exponencial con su representación simbólica $f(x) = b^x$ indicando cuál es su dominio y rango y expresándolos mediante intervalos y señalando las restricciones sobre la base a través de igualdades y desigualdades.

El profesor continúa preguntando a los estudiantes sobre los valores que puede tomar la *x* y con la respuesta que recibe de ellos, él afirma: "o sea que el exponente es la variable", "aquí la variable está en el exponente". Esta manera de actuar puede ser considerada una evidencia de cómo la práctica de Arturo se caracteriza por el recurso al discurso expositivo. Presenta el concepto función exponencial, como un objeto representado en su registro simbólico. Desde estos datos podemos inferir que su concepción de enseñanza y aprendizaje implica que el estudiante toma un papel pasivo en el que debe observar y memorizar, mientras el profesor le muestra los elementos matemáticos del concepto.

[11][36:38] SIMBÓLICO

Bueno, entonces vamos a mirar. ¿Y qué pasa con la x?, y ¿la x qué, qué es?

E: Es cualquier número real.

P: Cualquier número real, entonces x pertenece a los números reales. $f(x) = b^x$ $b > 0 \;\; b \neq 1 \;\; x \in R$ *O sea, que el exponente es la variable. Fíjense que aquí la variable está en el exponente.*

Las declaraciones del profesor sobre la función exponencial que ha sido presentada como un objeto, continúan con la lectura de los cuadernos de los estudiantes sobre la tarea que realizaron previamente [11][52].

[11][52]

P. ¿cuál es del dominio de esta función?

E. Los números reales.

P. Los números reales. ¿Y cómo sabe uno?

E. Porque todos los valores que puede tomar…

P. ¿Quién?

E. Que puede tomar x.

P. x. Y aquí nos está diciendo que x es cualquier número real, no cierto. Por lo tanto el dominio, este exponente es cualquier número real, puede ser positivo, puede ser negativo, puede ser cero, puede ser fraccionario, puede ser decimal, cualquier número real.

Prosiguen las preguntas del profesor y la lectura de los estudiantes alrededor del elemento matemático rango de la función exponencial, (Diagrama 3.25) así:

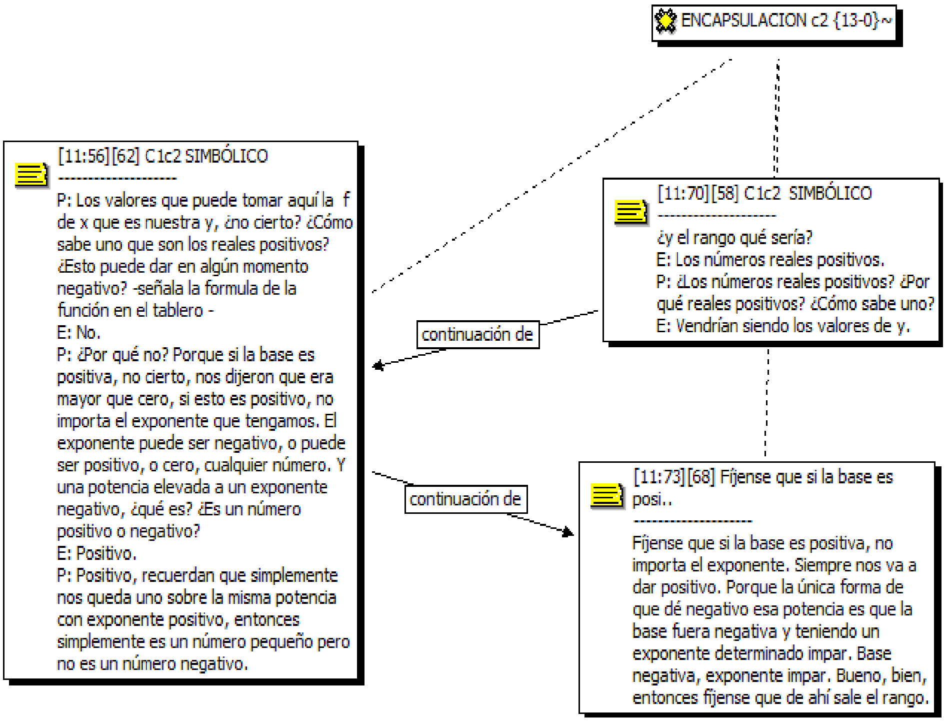


Diagrama 3.25. Dominio y rango de una función exponencial

Mediante sustituciones de la *x* por diferentes tipos de números examinando, en cada caso, el valor que se obtendría de *y* Arturo propicia la determinación del rango de la función exponencial. En la entrevista posterior a la clase, los comentarios del profesor sobre los procedimientos y la secuencia de su clase, son los siguientes:

[26][19:24]

I. ¿Y cuando tú iniciaste la clase por qué decidiste comenzarla por la ecuación... así analítica, en lugar de comenzarla por gráficas?

P. ¿Por hacer la gráfica?

I. ¿Por qué la ecuación y no la gráfica, o un problema?

P. No, yo de una vez comencé porque pues me parece que ese es como el orden lógico. Empezar de una vez con la función. Ya hacer la gráfica de la función sería como otra cosa, otra característica que yo quiero mostrar y mostrar…

I. ¿Por ejemplo comenzar con un ejercicio, un problemita?

P. No, yo pienso que primero hay que afianzar la parte conceptual: qué es, qué es esa función, cuáles son sus características y cuando yo ya tenga claro eso y haya mostrado qué forma tiene, entonces yo pienso que ahí es más fácil inducir a hacer la aplicación. Directo me parece como difícil, que puedan captar de una vez todo, es como pedirle el todo sin haberle dado las partes, me parece a mí, ¿no? Sí, esa sería la razón. Ah, estamos mirando el dominio, el rango, características, todo esto es la característica. Esto creo que es fundamental para que quede claro qué, cuáles son las condiciones que debe tener…

Atendiendo a las intenciones del profesor de *utilizar un orden lógico* para la presentación de la función exponencial y por el uso que hace de los registros de representación y que el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas gira en torno a exponer la definiciones, elementos y relaciones para que el estudiante las perciba se puede inferir que la concepción del profesor sobre las matemáticas escolares es la de una Matemática formal. Arturo no persigue explícitamente una integración entre los diferentes registros de representación dado que él mismo expresa, que *empieza de una vez con la función. Ya hacer la gráfica de la función sería como otra cosa, otra característica que yo quiero mostrar…* relega a un segundo plano el trabajo en los registros gráficos, así como el significado que dichos registros ofrecen del concepto. Usando el registro simbólico se menciona el corte de la curva de la función exponencial en el eje *y* y a la asíntota, considerada la función como objeto (Diagrama 3.26).

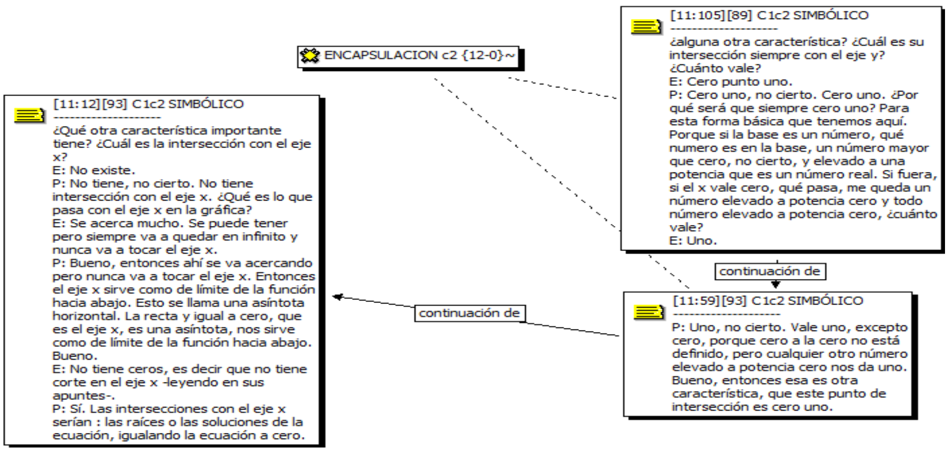


Diagrama 3.26. Corte con el eje y en una función exponencial

Sin cambiar de registro de representación el profesor dirige el discurso hacia la monotonía de las funciones exponenciales en los segmentos [11][68] y [11][89], afirmando que la función exponencial puede ser creciente o decreciente.

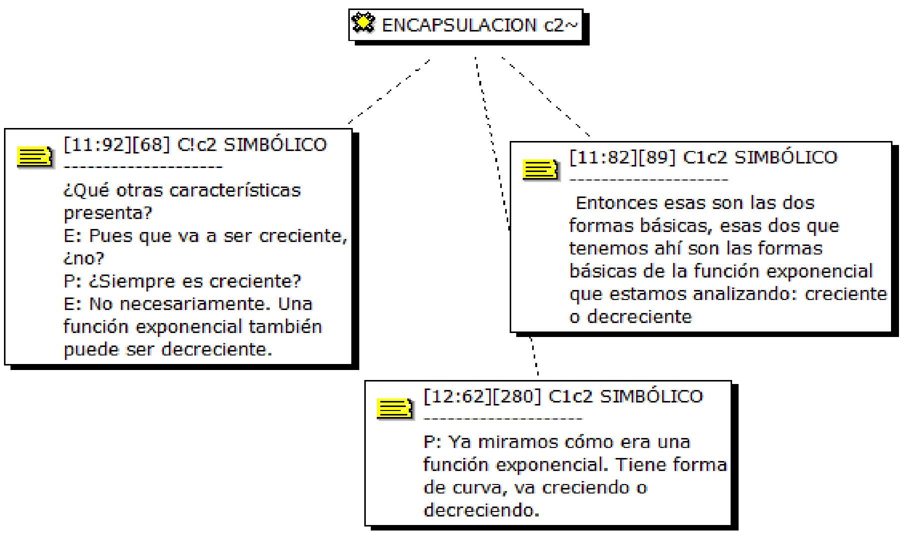
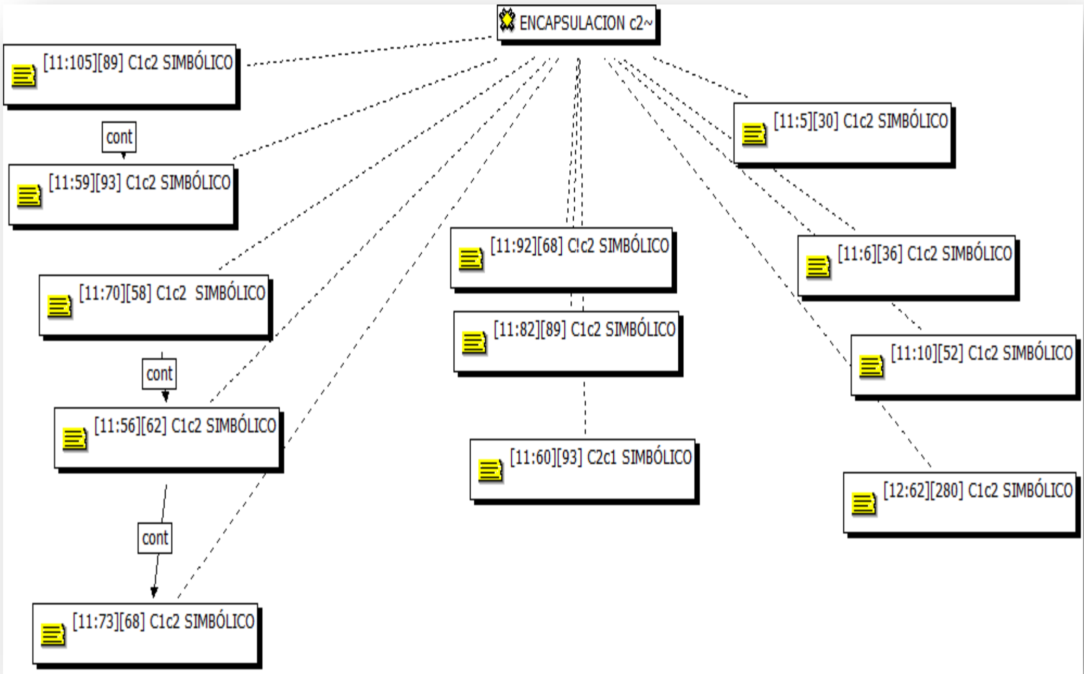


Diagrama 3.27. Formas Básicas de una función exponencial en el caso 2.

Al finalizar la clase uno [11][379] el profesor utiliza el discurso para recordar que la función exponencial "Tiene forma de curva, va creciendo o decreciendo".



Síntesis N. Modelación del Mecanismo de Encapsulación de la Función Exponencial. Caso 2.

En la síntesis anterior, hay que señalar que en las actividades, más que una encapsulación, en los segmentos correspondientes al inicio de la clase uno, se lleva a cabo una presentación de definiciones en el registro simbólico. Se privilegia la forma de conocer objeto de la función exponencial, al igual que la caracterización de la asíntota, corte en el eje *y*, dominio y rango de la función y las restricciones para la base son presentadas como objetos sin que se modele el mecanismo de encapsulación de la función exponencial.

En la clase, después de la definición dada para función exponencial, Arturo procede a intentar "mostrar" mediante algunas actividades de comparación entre funciones exponenciales, que analizamos como intentos del profesor de justificar, para los estudiantes, que todos estos casos de funciones se encuentran incluidos en la definición dada.

3.3.2.2. Comparación entre procesos relativos a diferentes funciones exponenciales crecientes o decrecientes

El profesor inicialmente, en la clase, se refiere a la monotonía de las funciones exponenciales genéricas sin que se haya propiciado la comparación entre funciones exponenciales particulares, y recurre a la explicación de funciones crecientes o decrecientes, como se ilustra en el Diagrama siguiente:

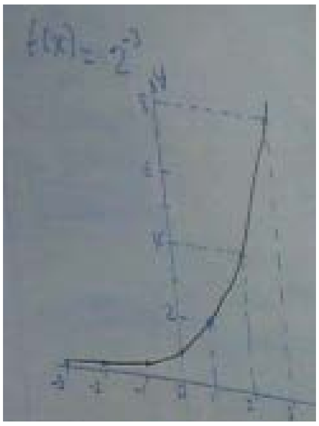
[11:81][72] C1c2 SIMBÓLICO GRÁFICO

P: Ah, bueno. Entonces no todas, es decir, ¿qué se requiere para que sea creciente?
E: Que la base sea positiva.
E: Si b es mayor que uno, la función es creciente.
P: Entonces miremos. Vamos a hacer un esquemita aquí. Tenemos x y y aquí. Bien, entonces cómo sería la forma, ¿es una curva, no cierto?
E: Sí.
P: ¿Así será creciente?
E: Sí señor.
P: ¿Cómo sabe uno que es creciente o no es creciente?
E: Cuando los valores de x y de y van incrementando.
P: Cuando a medida que aumenta x, la y también aumenta o a medida que x disminuya, la y también disminuye, esa es una función creciente.

Diagrama 3.28. Exposición de la caracterización del crecimiento de la función exponencial genérica.

El profesor plantea comparar las funciones $f(x) = 2^x$ y $f(x) = 5^x$ realizando su tabla de valores y la representación gráfica de la función $f(x) = 2^x$. Arturo guía las respuestas de los estudiantes acerca de las preguntas [11][124:132] para que ellos conjeturen cuáles son las diferencias con relación al crecimiento, entre la curva de la función $f(x) = 2^x$ y la función $f(x) = 5^x$.

[12][25:34]



Unimos esos puntos con una curva suave. Bueno, entonces ahí está la gráfica. Bien, ¿en qué se diferencia – señala en el tablero a $f(x) = 5^x$ – de la otra – señala la gráfica de $f(x) = 2^x$- que tengo planteada aquí?

E: En que va a ser decreciente.

P: ¿Decreciente? ¿Seguro?

E: No, es creciente.

P: ¿Esta cómo es?

E: Es creciente también.

P: Es creciente también, ¿pero en qué se diferencia de la anterior?

La base es mayor, no cierto, ¿entonces qué va a pasar, estará más a la derecha, más a la izquierda, o estará dónde, o qué pasará con eso?

E: Más hacia arriba.

E: Más hacia la derecha.

P: ¿Cómo sabe uno? A ver, hagan la tabla, por favor. Hagamos una tablita con valores, fíjense que es un poquito grandecita pero podemos poner una escala apropiada.

A continuación, para explicar el elemento matemático rapidez del crecimiento de la función exponencial, el profesor plantea preguntas [12][35-38] y los estudiantes deben evaluar la función para algunos valores del dominio. Sin embargo, ante las conjeturas de algunos estudiantes, el profesor [12][35-38] señala que en este caso hay que *obtener una potencia* que al tener una base mayor, 5 en lugar de 2, va a crecer más rápido lo que se va a reflejar en la representación gráfica:

[12][35-38] GRÁFICO SIMBÓLICO

A ver qué efecto tiene el que la base sea mayor o que sea menor. Fíjense que aquí la escala, ¿qué va a pasar aquí con los valores? Crecen más rápidamente, no cierto. Siendo la base mayor, entonces como es una potencia va a crecer mucho más rápido. ¿Qué valores toma?

E: Menos dos, menos uno, cero.

P: Menos dos, menos uno, cero, uno y dos, bueno, con esos se puede trazar.

E: Crece mucho.

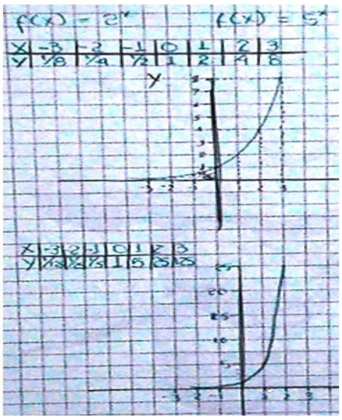
P: Va rápidamente, claro, porque la base es mayor, no cierto. Las potencias van mucho más rápido. El valor de y crece más rápidamente. ¿Eso qué efecto tendrá en la gráfica?

El profesor indica a los estudiantes que construyan una tabla de valores para la función $f(x) = 5^x$, y haciendo uso de la representación tabular dirige las preguntas [11] [134:144] hacia el análisis de dicha gráfica.

[12][39:43]

P: Va rápidamente, claro, porque la base es mayor, no cierto. Las potencias van mucho más rápido. El valor de ***y*** *crece más rápidamente. ¿Eso qué efecto tendrá en la gráfica?*
E: Se va a ampliar mucho más.
P: ¿Se amplía, o sea, se baja más, o baja la curva para acá, o se sube para allá?
E: Se sube.

E: Se sube mucho más la curva.



Luego, la tarea de representación gráfica de la función exponencial $f(x) = 5^x$ la realiza cada estudiante en sus apuntes usando planos cartesianos diferentes. Para realizar la representación tabular se consideran los mismos valores de *x*, en la función $f(x) = 2^x$ y en $f(x) = 5^x$ y se cambia la escala en *y*.

El profesor va realizando una comparación entre la función de base 2, que está en el tablero para todos los estudiantes, con la de base 5 representada en las hojas de los estudiantes haciendo uso del registro tabular y gráfico. En esta comparación Arturo expresa, refiriéndose a la variable independiente; *"por ser una potencia va a crecer mucho más rápido. El valor de y crece más rápidamente"*. Además, comenta, en la entrevista posterior [26][35:36] que su intención era propiciar en los estudiantes la comparación del crecimiento de dos funciones con diferente base; primero realizando conjeturas y luego constatándolas a través de las dos gráficas:

> *[26][35:36]*
>
> *I: Esas dos, ¿pones esas dos simplemente para que practiquen, o porque una es más difícil que la otra?*
>
> *P: No. El objetivo de esas dos es que vean que como la base aumenta, entonces eso tiene un efecto en la curva, que es más cerrada. Básicamente es eso. Las dos son iguales. Exactamente iguales, pero la diferencia que se va a ver es que una crece más rápidamente que la otra. O sea el efecto que tiene la base de ser más grande, hace que crezca más rápidamente.*

En el diálogo se percibe cómo Arturo trata de "mostrar" los conceptos a partir de las gráficas de las funciones para que los estudiantes "vean" que valores más grandes de la base de una función exponencial implican un crecimiento de la función más rápido. Las comparaciones se establecen entre objetos; $f(x) = 2^x\,; f(x) = 5^x$ representados simbólica o gráficamente y el profesor dirige la explicación relacionando los valores de la base con la gráfica de la función.

El objetivo del profesor cuando plantea esta tarea a los estudiantes es que perciban el papel de la base en la velocidad del crecimiento de una función exponencial: "*el efecto que tiene la base más grande, hace que crezca más rápidamente*" [26][35].

Se observa que el profesor propicia la reflexión sobre la escala idónea en el eje *y*, para poder realizar la gráficas de $f(x) = 2^x\,; f(x) = 5^x$. Al mismo tiempo va presentando preguntas [11] [135] para relacionar el valor de la base con la característica de ser creciente y comparaciones sobre su rapidez de crecimiento (Diagrama 3.29).

Arturo finaliza la comparación entre estas dos funciones por medio de las dos gráficas haciendo mención explícita del concepto de pendiente relacionado con la rapidez del crecimiento, pero solamente se expresa verbalmente, sin utilizar ningún registro numérico, algebraico o gráfico. De esta manera, la única mención a la pendiente se hace cuando los estudiantes van terminando de realizar la gráfica $f(x) = 5^x$ y el profesor les dice: *"Fíjense que la pendiente es mucho mayor, va cambiando rápidamente."*

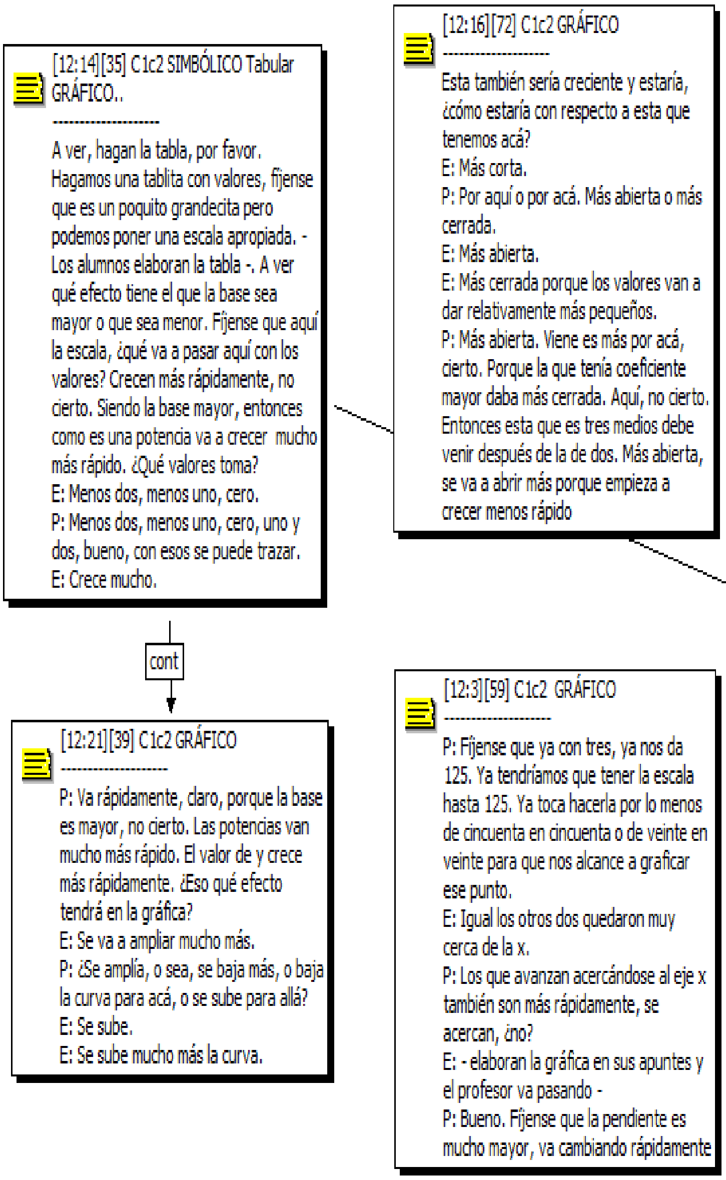


Diagrama 3.29. Relación entre la base y la rapidez del crecimiento.

El profesor describe su intención al tratar el tema de las escalas en los ejes para adaptarla al crecimiento de la función.

P: Bueno sí, eso lo hago por ejemplo cuando van a graficar entonces yo siempre hago mucho énfasis en las escalas. Entonces para mirar la escala horizontal, entonces vamos a mirar qué variación tuvo la equis, cuál es el valor mínimo y cuál es el máximo y con eso yo planeo mi escala, hasta dónde debe ir. Y lo mismo hago aquí, en la otra. Entonces les hago énfasis en que no necesariamente esta escala tiene que ser idéntica a la de aquí, puede ser en algún ejercicio. Pero si uno se da cuenta en esta, esta tiene que usar una escala más rápida, tiene que crecer más rápido.

I: Pero nunca haces explícito en la clase…

P: De pronto no lo hago ahí, sino que tendría que ser como una cosa previa, porque eso lo hago es más cuando veo el plano cartesiano, veo cómo son las escalas y les digo que puede haber funciones en las que una crece más rápido que la otra.

I: ¿Y en la exponencial no es importante o no buscas hacer énfasis en eso, en cómo crece una variable y cómo crece la otra variable?

P: Bueno, de pronto eso sí creo que me haría falta. Creo que sería importante. Eso no lo dije por ninguna parte. Pero sí pienso que sí es importante porque es una característica, que una crece más rápido que la otra.

En la entrevista se menciona nuevamente la razón o tasa de cambio de las funciones exponenciales; expresando únicamente que una de las variables *crece más rápido que la otra*. Tampoco se evidencia un diálogo sobre la proporción entre la razón de cambio promedio y el valor de la función en ese punto.

Se analiza la función $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$, para tratar [11] [162:176] nuevamente la monotonía de las funciones exponenciales con base mayor que uno, recurriendo a recordarles que cuando la base es mayor que uno la función es creciente. Así, Arturo por medio de las preguntas lleva a los estudiantes a que observen si la base $3/2$ permite un crecimiento más rápido o más lento de la función exponencial, comparado con las anteriores bases 2 y 5.

[12][63:77]

P. Quería que miráramos el efecto que tenía. Si fuera por ejemplo f de x igual a tres medios a la x $f(x) = (3/2)^x$*¿esa será creciente o decreciente?*

E: Decreciente.

P: ¿Cómo sabemos? Ya dijimos cómo se sabía. ¿Cómo es la base?

E: La base es mayor que cero pero es menor que uno.

P: ¿Seguro?

E: No, es creciente.

P: ¿Cuánto son tres medios?

E: Uno punto cinco.

E: Es creciente.

P: También es creciente, porque tres medios cuánto vale, uno con cinco, entonces es mayor que uno, no cierto. Entonces esta también es creciente. El hecho de que yo escriba una fracción no quiere decir que eso tiene que ser un número menor que uno. Hay fracciones mayores que uno. Esta también sería creciente y estaría, ¿cómo estaría con respecto a esta que tenemos acá?

E: Más corta.

P: Por aquí o por acá. Más abierta o más cerrada.

E: Más abierta.

E: Más cerrada porque los valores van a dar relativamente más pequeños.

P: Más abierta. Viene es más por acá, cierto. Porque la que tenía coeficiente mayor daba más cerrada. Aquí, no cierto. Entonces esta que es tres medios debe venir después de la de dos. Más abierta, se va a abrir más porque empieza a crecer menos rápido ¿Sí? Bueno.

En la secuencia de las tareas propuesta por Arturo están ausentes los procesos de reflexión sobre la monotonía y rapidez de crecimiento. Situaciones que permiten establecer que la práctica de Arturo se caracteriza por construir aisladamente algunos ejemplos de elementos del concepto función exponencial. La práctica del profesor sugiere una concepción de la matemática escolar ligada a la presentación de una matemática formal pero sin conexión. Su concepción de enseñanza de las matemáticas escolares se traduce en separar los elementos del concepto como unidades a ser estudiadas de forma aislada sin estar necesariamente relacionadas. La presentación del concepto parte de la definición de un concepto matemático, la ecuación de la función y luego el procedimiento de graficación.

3.3.2.3. Comparación entre diferentes funciones crecientes o decrecientes para distinguir el tipo de crecimiento de la función exponencial

En la entrevista posterior a la clase 1 se pregunta [26] [150:157] por qué no recurre a las tareas que realizó con las funciones potenciales para comparar su crecimiento con el de las funciones exponenciales. Mediante el diálogo se evidencia que a pesar haber mencionado a las funciones lineales en clase no ha considerado proponer tareas a los estudiantes que les permitan comparar diferentes funciones crecientes o decrecientes para distinguir el crecimiento de las lineales respecto al de la función exponencial.

[26][150:157]

I: ¿Qué la diferencien por ejemplo de un crecimiento lineal o de un crecimiento de las otras: de equis a la dos, equis a la tres, las funciones potencia, o no?

P: Bueno, en esa parte específicamente yo no lo hice así.

I: No lo buscas.

P: No, no lo busco ahí. Realmente uno, creo que uno hace primero esas funciones. Antes, trató la función lineal y vio cómo era, trató la cuadrática, vio cómo era, de pronto también trató alguna función potencia, entonces tienen un comportamiento. De pronto sí, sería bueno que uno hiciera de pronto la diferencia entre la función potencia y la exponencial, porque se parecen, ¿no? Esa sí sería una cosa que uno debiera hacer. Que yo de pronto no la hice, pero sí la debiera hacer. Demostrar que hay una parecida en la cual es la variable es la que está en la base y no en el exponente. Entonces son diferentes, se parecen en su estructura, pero son diferentes.

I: ¿Son diferentes en…?

P: Son diferentes en que la una tiene un exponente que es la variable y la otra tiene la base que es la variable. Ambas tienen una potencia, pero la variable de la una está en el exponente y la de la otra está en la base. Sí eso de pronto sí, pienso que eso sí les ayudaría como a que no les parezca que todas, es decir, como para diferenciar especialmente con una parábola, ¿no?

En la práctica de Arturo se evidencia la ausencia de relaciones entre conceptos. Como él lo expresa en la entrevista: “creo que uno hace primero esas funciones. Antes trató la función lineal y vio cómo era”.

La secuencia de enseñanza de Arturo no da cuenta de la *comparación entre procesos relativos a diferentes funciones crecientes o decrecientes que permitan explícitamente comparar razones de cambio para establecer el tipo de crecimiento de la función exponencial*.

3.3.2.4. Síntesis

Como resumen, se trata el asunto de la escala que se utiliza en cada uno de los ejes en la elaboración de la gráficas $f(x) = 2^x$ como en $f(x) = 5^x$ y se identifica un cambio aritmético en le eje *x* pero sin determinar el geométrico en el eje *y* a pesar de usar la tabla de valores de las funciones. Esto se engarza con la comparación del crecimiento de esas dos funciones estableciendo una relación entre la escala en el eje *y*, respecto a la escala el eje *x*, porque esta *variable y crece mucho más rápido*. En este procedimiento de representación gráfica se establece comparación entre los cambios que se producen en *y* para diversas funciones exponenciales crecientes con los valores de la base.

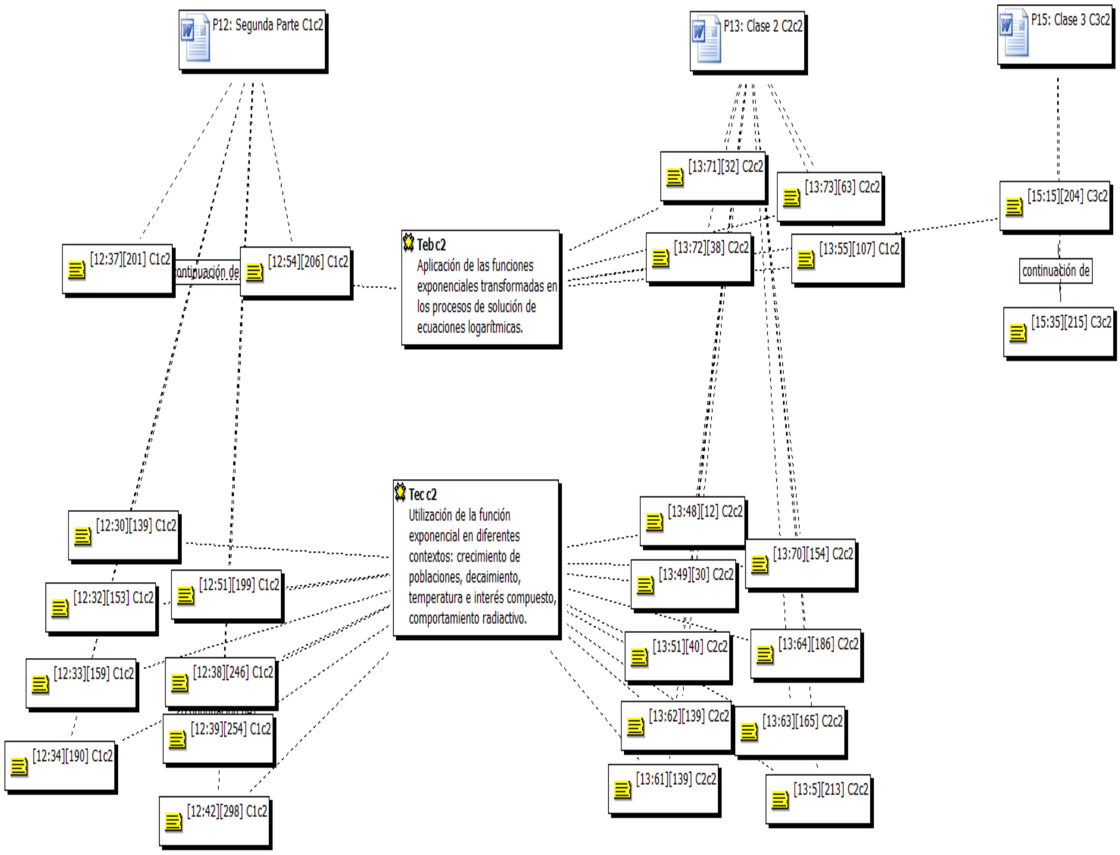
Si bien el profesor en clase hace mención, en su discurso, a la pendiente de las funciones, mediante expresiones como: a *la pendiente es mucho mayor, va cambiando rápidamente*, no profundiza en este concepto durante el desarrollo de las tareas, quedando ausente, el potenciar su construcción.

Se concluye que es característica de la secuencia de enseñanza de Arturo la ausencia de la modelación del mecanismo de encapsulación y el privilegio a las tareas sobre objetos matemáticos.

3.3.3. Viñeta tres. Modelación de la tematización del esquema de función exponencial

La tematización de la función exponencial se modela en diferentes clases (Esquema 6) y mediante diferentes tareas, concretamente en las clases 1, 2 y 3. Las tareas matemáticas de generalización y las tareas de contextualización son interpretadas como modelación de procesos de tematización.

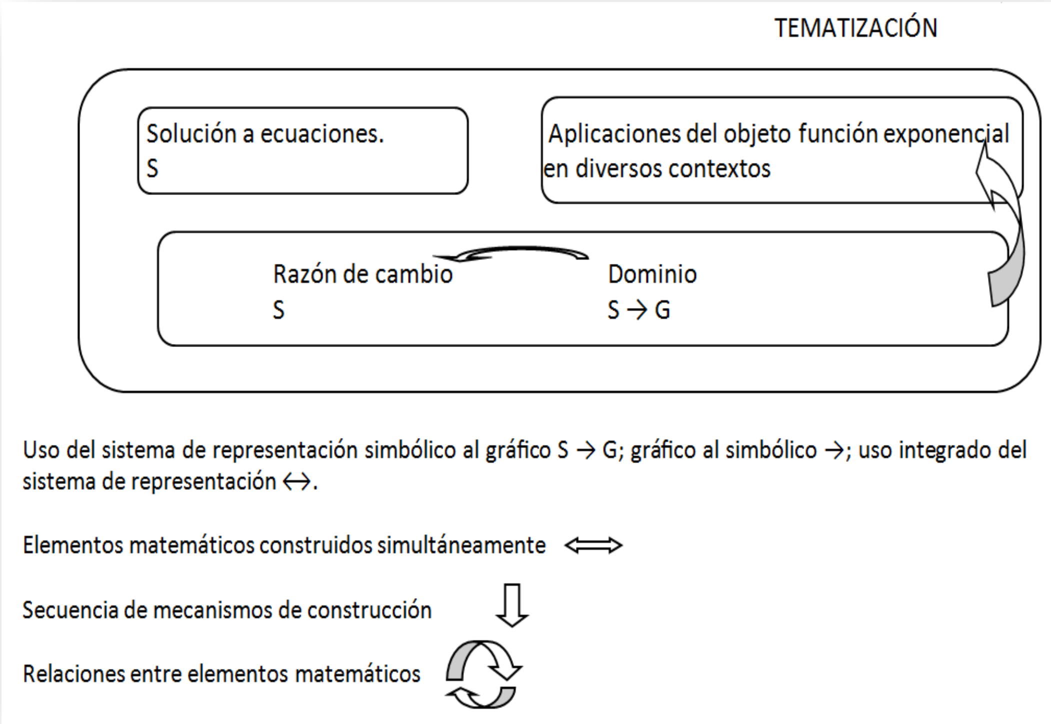
Para la tematización de la función exponencial: el *uso de la función exponencial en diferentes contextos*, se modeliza en la clases 1 y 2 con ejercicios de aplicación ligados a contextos como el crecimiento de bacterias, el decrecimiento radiactivo y el crecimiento poblacional, mediante cuatro tareas de diferentes libros de texto. En la clase 2 Arturo propicia la tematización de las funciones exponenciales mediante *la solución de ecuaciones exponenciales* en el registro simbólico con una tarea de crecimiento exponencial, en la cual ya empieza a hacer uso del concepto de logaritmo. En la clase 3 se resuelven ecuaciones exponenciales mediante la aplicación de la equivalencia de potencias igualando bases o exponentes.



Esquema 6. Segmentos en las clases: tematización de la función exponencial. Caso de Arturo.

La modelación de la tematización *a través de la generalización de la función exponencial objeto* $f(x) = b^x$ *por diversas transformaciones relacionando los diferentes parámetros de la representación analítica con sus efectos en la representación gráfica* no forma parte del desarrollo que el profesor realiza para este concepto.

A continuación se realiza la descripción detallada de las clases respecto a las tareas enunciadas en los párrafos anteriores. De allí se desprende la siguiente estructura sobre el análisis efectuado al mecanismo de tematización que Arturo favorece para sus estudiantes:



Síntesis O. Modelación de la tematización. El caso de Arturo.

La modelación de la tematización del esquema función exponencial (Síntesis N), se describe a través del análisis de las tareas de aplicación, de la función exponencial en diferentes contextos, en donde Arturo pide a los estudiantes que construyan tablas de valores a partir de la expresión simbólica, para guiarlos luego a la elaboración de la representación gráfica. Para resolver los ejercicios de ecuaciones exponenciales o aplicaciones de la función exponencial en diferentes contextos, en los que se solicita un valor numérico, el profesor propicia la técnica de sustitución de valores en *x* en la ecuación de la función, para obtener el resultado final con el uso de la calculadora.

3.3.3.1. Usos en diferentes contextos

El profesor propone 4 tareas a los estudiantes, a través de ejercicios extraídos de diferentes textos de precálculo. El procedimiento para abordar estas tareas es similar en todos los casos: el profesor dicta el enunciado de la tarea, copia la expresión simbólica o tabla de datos correspondiente, dirige algunas preguntas a los estudiantes para guiar algunos aspectos del enunciado de la tarea y luego permite que trabajen individualmente o en grupos en la solución de las tareas.

En el contexto que el profesor llama *crecimiento de bacterias*, después de presentar la tarea a. dirige su discurso para que los estudiantes observen que la *ecuación* que se está utilizando es una función exponencial porque es una constante elevada a una variable [12] [159-166]. Luego, pregunta por la base y él mismo concluye que corresponde a una función creciente.

Tarea a. Número de bacterias

El número de bacterias presentes en un cultivo después de t minutos está dado por $N(t) = 300\left(\frac{4}{3}\right)^{t}$.

a. Cuántas bacterias están presentes al inicio.
b. Cuántas pasados 3 minutos.

Diagrama 3.31. Enunciado de la tarea a.

[12][159-166] SIMBÓLICO

P: ¿Qué tipo de ecuación es? ¿Es una función qué?

E: Creciente.

P: Exponencial, ¿cierto?

E: Ah, sí, es exponencial.

P: Primero que todo, es exponencial, porque es una constante - señala la constante de la ecuación escrita en el tablero -, elevada a una variable. Y la constante es mayor que cero, ¿no cierto? ¿Y la base cómo es?

E: Es mayor que cero.

E: Es mayor que uno.

P: La base es mayor que uno. Por lo tanto, si yo graficara eso, debe darme creciente, o sea que ya tengo una idea. Claro, a medida que pasa el tiempo, hay más bacterias. Va creciendo.

La rutina que se lleva a cabo después de estas observaciones consiste en sustituir en la ecuación los valores correspondientes al momento inicial, esto es, cuando t es 0 y el momento correspondiente a cuando han transcurrido 3 minutos para obtener los resultados pedidos.

[12][168-177]

P: Cuando el tiempo es cero, ¿no cierto? O sea cuánto vale, ¿cuál es el número de bacterias?, esto no es n por t sino n de t - Señala n de t en la ecuación escrita en el tablero -, n como una función de t. Así como el f de x, aquí en lugar de llamarse x, se llama t.

E: ¿Pero es una función?

P: Sí, claro. Es una función de t. Bien, entonces aquí la condición de inicio es te igual a cero - Lo escribe en el tablero -. Entonces simplemente es reemplazar en la ecuación, la t por cero y hallamos el valor. Entonces, n de cero es igual a trescientos por cuatro tercios elevado a la cero - Lo escribe en el tablero -. ¿Entonces n de cero cuánto vale?

E: Tres millones.

E: Trescientos.

P: Trescientos. Trescientas bacterias - Lo escribe en el tablero. Y escribe también b) -. Trescientas bacterias. Bien, la segunda parte.

E: O sea que la t valdría tres minutos.

P: Cuando t son tres minutos. Entonces ahora la condición es que t son tres minutos.

E: Entonces…

P: Sería n de tres igual a trescientos por cuatro tercios elevado a la tres - Lo escribe en el tablero y al mismo tiempo lo dice un estudiante -. ¿Entonces ene de tres cuánto nos da? Trescientos por…

La *tarea b. decrecimiento radiactivo* hace mención al concepto de vida media, lo cual exige que Arturo explique dicho concepto a los estudiantes. Luego, a través de la tabla de valores, explica cómo a medida que la variable tiempo aumenta de 140 en 140 días, la otra variable, correspondiente a la cantidad de masa, se va reduciendo a la mitad [12][190-191].

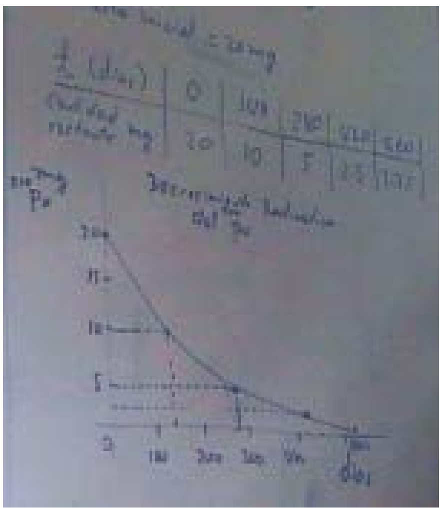
Diagrama 3.32. Enunciado de la tarea b.

Tarea b. Decrecimiento radiactivo

El isótopo de polonio210 tiene una semivida de 140 días aproximadamente. Si la muestra inicial es de 20 miligramos, entonces la siguiente tabla indica la cantidad restante después de varios intervalos de tiempo.

t días	0	140	280	420	560
mg. restantes	20	10	5	2.5	1.25

[12][190-191] SIMBÓLICO-tabular GRÁFICO



Entonces vamos a hacer la gráfica que corresponde a esto para que miremos que ahí es una función exponencial decreciente. Bien, esta es la semivida, ahorita estaban preguntando qué era - Señala la semivida en el tablero -. Ya dijimos qué era la semivida…

E: La vida media.

P: El tiempo que tarda ese elemento en convertirse su masa en la mitad. Semi - vida, semi: sobre dos. Tiempo que tarda en reducirse la masa de ese elemento radiactivo a la mitad. Como es radiactivo, se va convirtiendo en energía, la masa va pasando a energía, va perdiendo masa. La masa, la masa del isótopo de polonio, es radiactivo el polonio, el polonio 210 es radiactivo, entonces se va reduciendo a la mitad, ¿cada cuánto? Cada ciento cuarenta días. Eso es lo que se llama la semi vida. ¿Ven? Va disminuyendo la masa. Entonces fíjense por qué aparece la tabla así, ¿no? La muestra inicial es de veinte miligramos, en ese momento el tiempo es cero, ¿no? - Señala 20 miligramos y tiempo cero en la tabla -. A partir de ahí vamos a tomar, en *ese momento. A los 140 días, fíjense que se reduce a la mitad: ya es diez miligramos - Lo señala en la tabla -. Ya no hay sino diez miligramos. A los 280, que es el doble de esto, ya va siendo la mitad de lo anterior, y así sucesivamente, siempre va siendo la mitad del anterior - Va señalando en la tabla -.*

Aun cuando el profesor no manifiesta en la entrevista posterior a la clase su intención de profundizar en los elementos matemáticos de la función exponencial, esta tarea corresponde a una función decreciente que permite examinar en detalle el cambio aritmético de la variable *x* (siendo 140 la diferencia de esta progresión) mientras se registra un cambio geométrico en la variable *y* de razón un medio.

Para realizar la gráfica de esta función se utiliza el mismo procedimiento que para cualquier otra función exponencial, es decir, parten de la representación tabular, para poder ubicar las parejas como puntos en el plano y unen dichos puntos por medio de una línea curva.

La tarea c. *crecimiento poblacional* corresponde a una función exponencial transformada, que tiene como base en número *e*. Sobre el número *e* el profesor recuerda a los estudiantes que es un número irracional y cuál es su representación numérica aproximada, para que puedan concluir que al tener una base positiva la función es creciente (Diagrama 34).

> La población proyectada ***P*** de una ciudad está dada por $P = 100000\,e^{0.05t}$, donde t es el número de años después de 1990. Se pide pronosticar la población para el año 2010.

Diagrama 3.33. Enunciado de la tarea c.

[12][201-211] SIMBÓLICO

P. Fíjense que ahí apareció una función exponencial muy especial. ¿Cuál es esa? La de base e, ¿no cierto? Entonces esa es la función exponencial natural. ¿Qué es ese e? Ya lo vimos. ¿Qué era e?

E: Como si fuera por diez elevado a la…

P: No, no es ningún diez.

E: No es una base definida.

P: Tomemos como ejemplo los números irracionales. Y también aparece en dónde más, en los logaritmos naturales, ¿verdad? Base, la base de los logaritmos naturales, e, tiene un determinado valor, dos punto setenta y uno ochenta y uno ochenta y dos, aproximadamente, infinitas cifras tiene.

E: Es un número irracional.

P: Es un número irracional, e. La base de los logaritmos naturales. Entonces esta es una función, vamos a encontrar bastantes aplicaciones con e. Bien, si nosotros fuéramos a hacer la gráfica de eso, ¿eso nos da creciente o no?

E: Creciente.

E: Exponencial.

P: Creciente, ¿no cierto?, porque la e vale, es positiva, dos punto setenta y uno ochenta y uno ochenta y dos, aproximadamente. Entonces en ese caso, sería creciente. Y estamos hablando de una población humana, de una ciudad. Por lo tanto también tiene que por lógica ser creciente. Bien, entonces aquí nos dicen que esta sería la proyección de la población de una ciudad - Señala la fórmula en el tablero -. Está escrita en forma de esa ecuación y es una función exponencial. Y simplemente nos están pidiendo pronosticar la población en el año 2010. ¿Qué tenemos que hacer ahí?

E: Reemplazar t por el número de años.

Una vez han tomado nota de la situación-problema dictada por el profesor, se señalan algunos aspectos del enunciado y se indican los pasos (la sustitución) que los estudiantes deben seguir para encontrar una respuesta numérica al ejercicio.

[12][206-213]

Bien, entonces aquí nos dicen que ésta sería la proyección de la población de una ciudad - Señala la fórmula en el tablero -. Está escrita en forma de esa ecuación y es una función exponencial. Y simplemente nos están pidiendo pronosticar la población en el año 2010. ¿Qué tenemos que hacer ahí?

E: Remplazar t por el número de años.

P: ¿Cuántos?

E: t número de años

P: Fíjense que t son los años después de 1990, ¿cuántos años hay ahí? ¿Después de 1990, hasta el 2010, cuántos años hay?

E: Veinte años.

P: Ah bueno, entonces calculémosla, por favor. Calculemos esa población.

La tarea finaliza con la sustitución del valor de *t* y el manejo de la calculadora para evaluar la función con *t* igual a 20.

La realización de estas situaciones contextualizadas en el aula indica que las concepciones de Arturo sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, le llevan a excluir la realización de actividades sobre la función exponencial trasformada, mientras que los nuevos contextos, solo se usan para aplicar el concepto. En la entrevista posterior a la clase, Arturo manifiesta sus intenciones al programar esta clase de tareas:

[26][70-75]

I: ¿Cuando tú pasas a estas aplicaciones es porque qué quieres?

P: Quiero mostrar que eso que vimos teórico y que dibujamos allá sirve para algo, ¿no? Que tiene alguna utilidad, que no es una cosa simplemente siempre abstracta, *sino que eso tiene aplicación en muchas áreas. Entonces, qué rico mostrar que en el área de ellos se aplica y de pronto en otras, ¿no?*

I: ¿O sea que es un paso más allá?

P: Sí.

I: ¿No es para entender más esta, sino es un paso más allá?

P: No. Pues sí es para aplicarla, porque una cosa es teórica y no es tan fácil pasar de una vez a una aplicación. No es lo mismo. Yo puedo saber muy bien trabajar la parte teórica y entender qué es la base, qué es el exponente, la gráfica, todos esos elementos teóricos los puedo saber. Pero eso mismo, cómo lo aplico a algo concreto, pues cambia. Cambia, es decir, los conceptos se siguen aplicando, pero hay que entenderlos, hay que hacer como una… Hay que relacionarlos con lo anterior y aplicarlos allí. Entonces, ahí es donde a veces es difícil para ellos. Cómo se pasa de esto que es puramente teórico a otra cosa. Allá, qué es lo que representa… Allá ya no es equis e y, sino la equis aquí es una cosa concreta, el número de horas, el otro es el número de bacterias, entonces ya las variables dejaron de ser teóricas y se convirtieron en algo concreto. Entonces hay que como hacer analogía.

En el enunciado de la tarea d., correspondiente al *crecimiento bacteriano*, interviene el estudio de una función exponencial donde el exponente es $t/2$ En esta tarea el profesor explica que el exponente puede estar multiplicado por una constante como en este caso que está multiplicado por un medio.

> El número de bacterias de cierto cultivo se incrementó de seiscientas a mil ochocientas entre las siete de la mañana y las nueve de la mañana. Suponiendo que el crecimiento es exponencial, se puede mostrar, usando métodos de cálculo, que ***t*** horas después de las siete a. m. el número de bacterias está dado por $f(t) = 600(3)^{t/2}$.
>
> a. Primero, calcule el número de bacterias en el cultivo a las ocho a.m. a las diez y a las once a.m.
> b. Trace la gráfica de ***f*** de ***t*** desde t igual cero hasta t igual a cuatro.

Diagrama 3.34. Enunciado de la tarea d.

[12][254-258]

P: Nos piden calcular otros puntos y luego hacer la gráfica.

E: - Hacen los cálculos en sus cuadernos -.

P: - Pasa por los puestos mirando el trabajo de los estudiantes -. Tienen que hacer una tablita, ¿no cierto? Los valores. Básicamente es eso. Ya nos dan dos. Entonces nos están diciendo dos de los puntos de la gráfica. De las siete a las nueve, ¿no cierto? Ya sabemos cuántas bacterias había a las siete y cuántas había a las nueve. Para eso nos dan la función. Hay que calcularla. Para eso nos dan la función, porque eso no es lineal, ¿no? No es simplemente lineal. Ahí dice que el comportamiento es exponencial, entonces hay que tener en cuenta la ecuación que nos dieron.

E: - Siguen trabajando en sus cuadernos -.

P: - Sigue revisando el trabajo de los estudiantes -. No, el tiempo, el tiempo. De las siete a las ocho, ¿qué tiempo es? Una hora. Fíjense que no es diez, no es remplazar por diez ni por once. Es el tiempo que hay desde las siete hasta las ocho, desde las siete hasta las diez, desde las siete hasta las once. ¿Cuántas horas transcurren? Teníamos una función de tiempo. ¿Para qué nos dan la ecuación?

E: Para remplazar el tiempo.

P: Con la ecuación yo puedo calcular para cualquier tiempo cuántas bacterias hay. La ecuación tiene que funcionar para cualquier tiempo: para una hora, para dos horas, para tres horas, para cinco horas.

E: - Siguen trabajando en sus cuadernos -.

P: - Hace operaciones con la calculadora -. Fíjense que ustedes no pueden simplemente suponer que a la hora son mil doscientas. No. ¿Entonces para qué nos dieron la ecuación? Para calcular, para cualquier tiempo, calcular el número de bacterias. El crecimiento no es lineal, ahí nos están diciendo que el crecimiento es exponencial. Hay que calcular para cada tiempo. Para las ocho, ¿cuánto tiempo ha transcurrido?

E: Una hora.

En el desarrollo de esta tarea el profesor insiste en la necesidad de usar la fórmula dada en el enunciado porque este es un *crecimiento exponencial.* Sin embargo, los estudiantes dejan de lado la fórmula dada, toman el valor inicial de 600 y suponen que pasada una hora hay 1.200 bacterias, considerando este fenómeno como si correspondiera a un crecimiento lineal. En la entrevista posterior el profesor señala que:

[26][136-139]

I: Este es genial porque tiene mucho problema con el tiempo al tratar de resolverlo. Cuando tú por ejemplo les dictas ese ejercicio y les dices "suponiendo que el crecimiento es exponencial", ¿qué esperas que ellos entiendan?

P: Entiendan por eso. Bueno, pues si ya vimos una función que se llama exponencial, que tiene una forma y vimos unos ejercicios donde ya habíamos aplicado, que hemos graficado número de bacterias contra tiempo y nos damos cuenta de que tiene la forma, pues eso está representando el crecimiento exponencial de una bacteria, ¿cierto? Entonces cuando yo hablo en un ejercicio así, pues ya ellos tienen que relacionar que si ese crecimiento es exponencial, entonces qué forma tiene y es una aplicación de la función exponencial.

I: Bueno, pero qué diferencia tendría… ¿por qué tendrían ellos que pensar en una curva y no en una línea? Cuando les dices crecimiento exponencial. ¿O por qué no en una parábola, en uno de los brazos de una parábola?

P: Bueno, digamos crecimiento exponencial, pues ya vimos una…. Digamos, tenemos unos antecedentes de trabajo, ¿cierto? Vimos una función que tenía una forma, cómo eran sus características y todo eso y luego la aplicamos a algo concreto como es el crecimiento de las bacterias. Entonces al graficar ese crecimiento de las bacterias, vemos que los puntos no se alinean, no quedan todos alrededor de una tendencia lineal, sino que tienen otra tendencia que es una curva, que se llama exponencial. Entonces, eso es lo que yo espero que ellos entiendan, que si ya vimos ese comportamiento y una de las aplicaciones de esa función es el crecimiento *exponencial de las bacterias, pues cuando yo les hable de crecimiento exponencial, es porque tiene una forma como esa.*

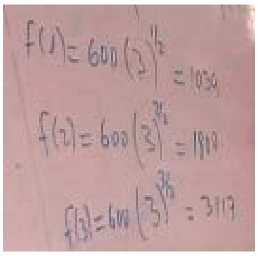
Para redirigir el razonamiento sobre esta tarea d. el profesor recurre a uno de los elementos que conforma al objeto función exponencial y de esta manera integra explícitamente en el discurso la pendiente como característica de esta función [12][298:301]. Sin embargo, como se observa en la entrevista [26][170-175] al no ser un objetivo planeado por el profesor solamente lo menciona sin desarrollarlo para profundizar en el problema que se resuelve sustituyendo en la ecuación.

[12][298:301]

P: Tres mil ciento diecisiete. Y f de cuatro sería seiscientos por tres a la cuatro medios, o sea a la dos.

E: Nueve mil seiscientos.

E: No, cinco mil cuatrocientos.



P: Sería tres a la dos. Es nueve, por seis, cincuenta y cuatro. Cinco mil cuatrocientos. Ahí está. Y graficamos eso, y ya. Entonces ojo, no confundir. El crecimiento aquí no es lineal, no es constante, cada vez aumenta más rápido. Cuando es lineal, siempre aumenta en la misma proporción. Aquí no. Porque nos están diciendo que el crecimiento es exponencial, entonces exponencial es distinto a lineal. Lineal es que siempre aumenta en la misma proporción, la pendiente es la misma siempre. Aquí no, aquí la pendiente va cambiando, va aumentando, cada vez aumenta más rápido.

En el diálogo, que se presenta a continuación se analiza la decisión del profesor; al intervenir, con el concepto de pendiente, para propiciar que los estudiantes interpreten la situación, permite indicar que el profesor asume que al mostrarle al estudiante los conceptos matemáticos, directamente los percibe y aprende.

[26][170-175]

I: Yo diría que una de las cosas llamativas de este ejercicio es que a pesar de que tenían la ecuación, tú tenías que decirles: "caramba, pero no es lineal". Pero la tenían. En un momento dado lo que les dices es: "es exponencial, distinto a lineal. La pendiente va cambiando." Les dices eso. Y si tú les dices: "la pendiente va cambiando", ¿en qué momento de todo el proceso buscabas que ellos se dieran cuenta que la pendiente iba cambiando?

P: No, eso sí fue, digamos que yo pienso que es más circunstancial que pensado, yo no lo pensé así. Surgió en el momento, y si alguien se le ocurre que es lineal, pues yo simplemente hice el énfasis para mostrar la diferencia entre las dos, en que eran dos funciones bien diferentes. En la una, en la línea recta, pues la pendiente es constante, es la misma todo el tiempo. En una curva va variando.

I: ¿Tú pretendes que ellos se den cuenta de eso, de que la pendiente va cambiando? ¿Das por hecho que ellos se dan cuenta de eso?

P: Ahí sí no sé. Yo supuse que entendían que una curva tiene diferentes pendientes. Que en cada punto cambian. Y que está representada por una tangente a la curva en ese punto.

I: Lo que pasa es que acabas de decir tú mismo algo muy interesante, cuando me estabas explicando me dices a mí, que esa es la característica más importante que las diferencia. Entonces cuando me dices que es la característica más importante, por eso te digo que si buscabas que ellos se dieran cuenta de esa característica.

P: No, porque ese no era el objetivo en ese momento. En ese momento estábamos trabajando en una aplicación, pero surgió que a alguien se le ocurriera, a pesar de que estábamos en un ejercicio de exponencial, se suponía que era exponencial, sin embargo alguien por allá dijo que lineal, se le ocurrió decir que lineal, está desubicado.

La rutina de sustituir valores en la expresión simbólica se lleva a cabo con la aclaración que hace el profesor para que no sustituyan en la fórmula la t por 9 o por 10, sino que, en lugar de ello, trabajen con el incremento de tiempo, es decir, se trata de contar cuántas horas han transcurrido de las siete a las ocho, luego de las 7 a las nueve etc. Nuevamente el profesor menciona a los estudiantes que en el crecimiento exponencial *la pendiente va cambiando, va aumentando, cada vez más rápido.*

Al iniciar la clase 2 el profesor informa a los estudiantes *hoy lo que vamos a hacer son unos ejercicios un poquito diferentes a los que vimos la vez anterior, aplicaciones también de la función exponencial, pero que tienen otras cosas distintas a lo que ya vimos*. Enseguida plantea la tarea e. en donde presenta una función asociada la función exponencial, la función logística inmersa en un contexto de crecimiento de una enfermedad.

Tarea e. Función logística

Los registros de salud pública indican que **t** días después del brote de una enfermedad, Q (**t**) es igual a $Q(t)=\dfrac{200}{1+39e^{-1.2t}}$, es el número de personas que han contraído la enfermedad.	Primero: ¿cuántas personas tenían la enfermedad inicialmente? Segundo: ¿cuántas personas han contraído la enfermedad al final de la segunda semana? Y tercero: si la tendencia continúa, ¿aproximadamente cuántas personas contraerán la enfermedad?

Diagrama 3.35. Enunciado de la tarea e.

12][139-143]

P. Bien, esa ecuación se llama o tiene la forma de ecuación logística. Vamos a anotarla aquí. Se llama función logística. Está escrita en la siguiente forma: Función logística: Tiene la forma f de t igual a B sobre uno más a por e a la menos B k t - Lo escribe en el tablero - $f(t)=\frac{B}{1+Ae^{-btk}}$ *en donde B, A y k son constantes positivas. Es un modelo, es una ecuación que nos permite determinar el crecimiento de una población. Es uno de los tantos modelos que existen, modelos matemáticos, para determinar el crecimiento de una población. Entonces fíjense que tiene esta forma que tenemos acá - Señalando en el tablero: Q de t es igual a doscientos sobre uno más* *treinta y nueve por e a la menos uno punto dos t;* $Q(t) = \frac{200}{1+39e^{-1.2t}}$ *-, lo que estamos dando tiene exactamente esa forma. Bien, y eso es una función exponencial. Es una función exponencial un poquito extraña a las que habíamos visto pero es una función exponencial. Bien, entonces ya pueden hacer ese ejemplo, está muy fácil. a, b, c. ¿Cuánto da la parte a?*

E: ¿Se espera, profe?

E: Los registros de salud pública indican que t días después del brote de una enfermedad…

P: - revisa su libro y después de unos minutos - Q de este es igual a esto - Señalando en el tablero: Q de t es igual a doscientos sobre uno más treinta y nueve por e a la menos uno punto dos t $Q(t) = \frac{200}{1+39e^{-1.2t}}$ *- ¿Y esto qué es? La cantidad de personas que han contraído la enfermedad. Esa ecuación me está dando la cantidad de personas que han contraído la enfermedad para cualquier tiempo.*

E: Podríamos colocar el valor que yo quiera en t.

El profesor explica qué se entiende por función logística y les plantea preguntas para que se den cuenta que $Q(t)$ es la cantidad de personas que han contraído la enfermedad. La presentación que hace el profesor de la función logística como una función exponencial, no le permite remarcar las diferencias que existen entre estas dos funciones; como en relación al límite del crecimiento, lo cual no tiene sentido en una función exponencial, pero es una de las características de la función logística. Dicho límite es evaluado [13][154:160] cuando el profesor pregunta ¿aproximadamente cuántas personas contraerán la enfermedad?

[13][154:160]

E: Profe, ¿por qué con cualquier número siempre da doscientos?

P: ¿Con cualquier número da cuánto?

E: Doscientos.

P: El último punto es más interesante ¿Qué pasa? ¿El último punto qué pregunta? Si la tendencia continúa, ¿cuántas personas contraerán la enfermedad?

E: Doscientas.

P: Entonces uno podría ensayar, ¿no cierto? Uno podría ensayar a ver qué pasa. ¿Qué pasa cuando el tiempo aumenta?

E: Se mantiene el número de personas.

El profesor continúa con la explicación utilizando la representación simbólica $Q(t) = \frac{200}{1+39e^{-1.2t}}$

P: Lo máximo que puede llegar a tener la enfermedad son doscientas personas.

E: Sin importar el tiempo que transcurra.

P: Sí. Ya analizamos por qué. Porque esta parte…

E: Porque el exponente es negativo.

P: Es un exponente negativo, entonces si lo bajo aquí, me queda: doscientos sobre uno más treinta y nueve sobre e a la uno punto dos t, ¿no cierto? - Escribiéndolo en el tablero -. Queda positivo si lo pongo en el denominador, porque es uno sobre, queda *abajo. Entonces al aumentar este valor de t, este número cada vez se hace más grande: e a la tres, e a la seis, e a la nueve, cada vez más grande. Al dividir este número entre uno más grande, cada vez dividirlo por uno más grande, esto tiende a cero. Por lo tanto queda uno, casi con cero. Entonces queda doscientos sobre uno.*

E: Sí, porque yo le di a las cuatro semanas y no cambia el valor.

De la práctica de Arturo podemos inferir que su forma de propiciar la tematización del esquema función exponencial es similar a las secuencias de enseñanza al propiciar las formas de conocer acción y objeto. Es decir, a través cálculos numéricos, Arturo guía a los estudiantes a elaborar la representación tabular a partir de la expresión simbólica para obtener la representación gráfica. En los casos en que el ejercicio solicita un valor numérico final, generalmente, propicia la sustitución en la función inicial y obtener el resultado con el uso de la calculadora.

El uso de los contextos le permite a Arturo:

- A través de la tarea a., referida a crecimiento de bacterias recordar a los estudiantes que la expresión simbólica de estas funciones tiene la forma de una base que es una constante y que está elevada a una variable, y en ese contexto observar que como la base mayor que uno esto indica un crecimiento del número de bacterias.

- La tarea b. ilustra el decaimiento radiactivo a través de una función exponencial decreciente que además utiliza para examinar en detalle el cambio aritmético de la variable independiente, mientras se registra un cambio geométrico que no se hace explícito en la variable dependiente.

- En la tarea c., se utiliza la función exponencial con base $\boldsymbol{e}$.

- La tarea d. permite “diferenciar” el crecimiento lineal con el crecimiento exponencial.

- Termina las aplicaciones con la tarea e. en donde presenta un *modelo matemático* para el crecimiento de una población a través de la función logística en el cual se analiza a través de la representación simbólica por qué la población que ha contraído la enfermedad alcanza el límite.

Las tareas propuestas por el profesor son aisladas; los análisis realizados en cada una de ellas no son retomados en otra a pesar de que su naturaleza lo permite. La tematización del esquema de la función exponencial modelada por Arturo no incluye un desarrollo sobre las transformaciones de la función y, a pesar de que él define la función exponencial como $f(x) = b^x$, no considera ninguna diferencia entre tener esa expresión simbólica o tener una de sus transformaciones por traslación, reflexión o ampliación que surgen al utilizar esta función en diferentes contextos.

3.3.3.2. Aplicación en la solución de ecuaciones exponenciales

La tematización correspondiente a una aplicación de las funciones exponenciales en la solución de ecuaciones exponenciales se encuentra en la tercera clase donde el profesor presenta la siguiente propiedad:

$$\text{Si } b^m = b^n \longrightarrow m = n$$

Esta propiedad es la que se aplica para la resolución de las ecuaciones exponenciales que se plantean en el aula:

[15][204:213]

Bueno, miremos ahora una exponencial. - Escribe en el tablero y va dictando- Determinar el valor de x si veinticinco elevado a la equis más dos es igual a cinco elevado a la tres equis menos cuatro.

E. ¿Determinar el valor de x?

P. Si. Determinar equis en esa ecuación exponencial.

Entonces dijimos que cuando era exponencial la idea es que nos quede a ambos lados la misma base y entonces yo puedo igualar los exponentes. Ahí está muy fácil, ¿qué tenemos que hacer?

E. Cinco a la dos elevado a la dos elevado…

P. -va repitiendo y escribiendo en el tablero - $(5^2)^{x+2} = 5^{3x-4}$ *- Todavía no son iguales las bases, ¿ahora qué hacemos?*

E. Multiplicamos dos por equis más dos.

P. Es una potencia elevada a otra potencia. Queda cinco en la base y arriba

E. Tres equis más cuatro

P. - va escribiendo en el tablero- $\begin{array}{l}(5^2)^{x+2} = 5^{3x-4} \\ (5)^{2x+4} = 5^{3x-4}\end{array}$ *Igual a cinco elevado a la tres equis menos cuatro. -Señala en el tablero - ya estamos aquí.*

E. Igualamos dos equis más cuatro

El profesor en la entrevista posterior a esta clase 3 explica por qué presenta una estrategia para resolver ecuaciones exponenciales, sin necesidad de recurrir al concepto de logaritmo.

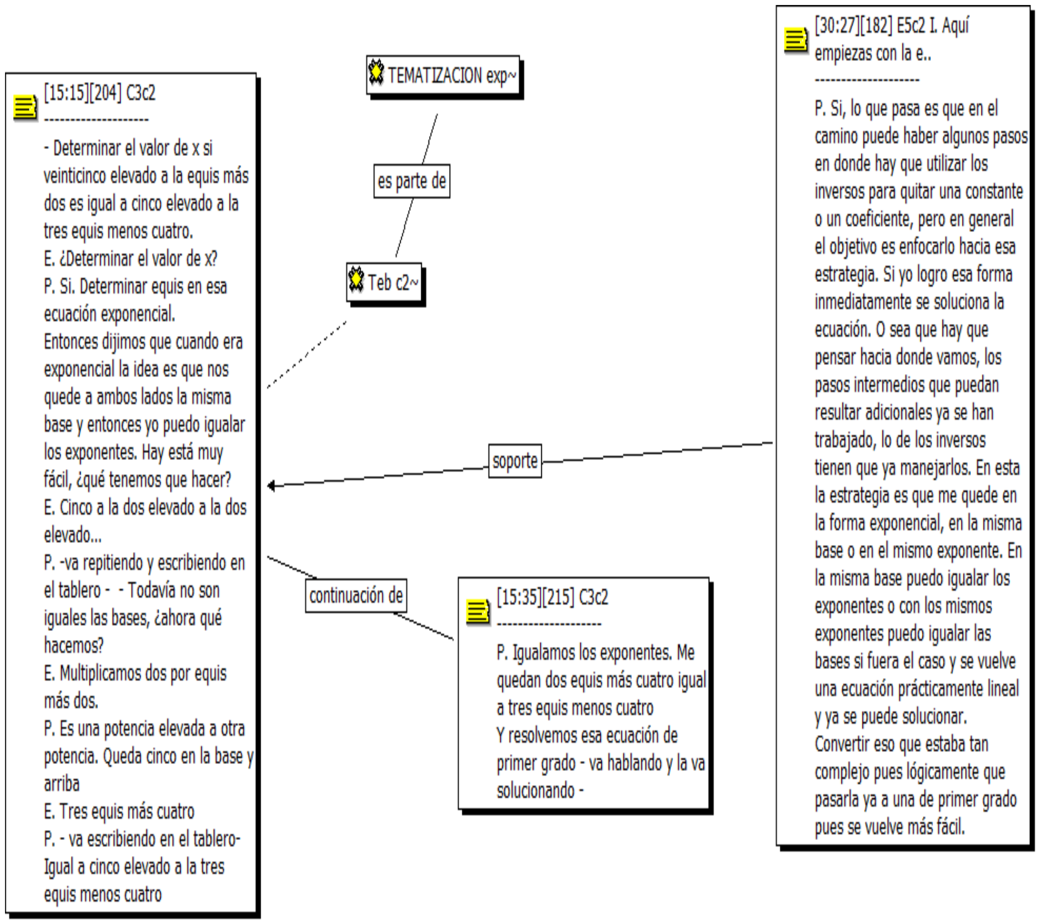


Diagrama 3.36. Entrevista sobre intenciones al plantear la tarea de solución a ecuaciones.

En este ejercicio el profesor recurre a resolverla mediante la estrategia de igualar las bases. Una vez que se consigue se igualan los exponentes y se obtiene una ecuación lineal.

[15][215:216]

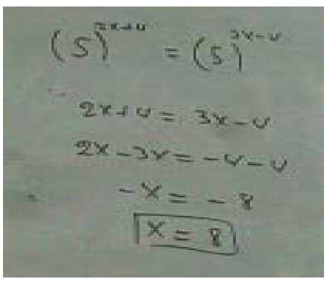
P. Igualamos los exponentes. Me quedan dos equis más cuatro iguales a tres equis menos cuatro

$(5^2)^{x+2} = 5^{3x-4}$

$(5)^{2x+4} = 5^{3x-4}$

$2x + 4 = 3x - 4$

Y resolvemos esa ecuación de primer grado - va hablando y la va solucionando -



Ahora, no todas las veces se puede igualar una base con la otra entonces hay ahí que usar otro método pero mientras uno vea la posibilidad de tener la misma potencia, entonces es inmediato.

En la clase 2 propicia la tematización del esquema de la función exponencial con los procedimientos de solución de ecuaciones exponenciales a través del registro simbólico en una tarea de crecimiento exponencial en donde utiliza la representación simbólica de logaritmo para despejar la constante k.

Tarea f. Constante de proporcionalidad

El número de bacterias en un cultivo crece exponencialmente. $Q(t)=50000e^{kt}$. Si inicialmente están presentes en un cierto cultivo cinco mil bacterias y treinta minutos después están presentes veinte mil, ¿cuántas bacterias estarán presentes al final de una hora?

Diagrama 3.37. Enunciado de la tarea f.

[13][12-18]

P: k es una constante específica ahí, ¿no cierto? O sea que no la conocemos. Pero la forma sí nos da, fíjense que en el caso en que tengamos inicialmente un tiempo cero, ¿qué pasaría aquí? - Señala la función en el tablero -.

E: Que da lo mismo.

P: No. ¿Da cuánto? ¿Cuántas bacterias?

E: Cinco mil.

P: Cinco mil, es el dato que nos están dando ahí, ¿no cierto? Bueno. O sea que esa ecuación es coherente con un dato. Si uno no tuviera la ecuación, plantearía una ecuación como esta, ¿no? - Señala la ecuación en el tablero -. Fíjense que cuando es crecimiento exponencial, pues tenemos un exponente positivo. e elevado a un exponente positivo en el que siempre va a aparecer una constante de proporcionalidad. Bien. ¿Quién quiere pasar a desarrollarlo? Cualquiera. Sin miedo. - Designa a uno de los estudiantes -. Sí. Usted siempre levanta la mano.

Arturo va guiando a los estudiantes en la solución de esta, al igual que en el resto de las tareas, explicando que si remplazan directamente el valor de la variable, se encontrarán con el problema que no saben el valor de *k*. Por lo tanto el primer paso a de ser calcular *k*.

[13][32:39]

P. Fíjense que si yo tratara de calcular aquí, - señala la ecuación en el tablero - ¿qué dificultad tengo si trato de calcular directamente?

E: La k.

P: La k, no la tenemos, ¿no cierto? No la tenemos. El valor de k no lo tenemos. ¿Pero será que lo podemos sacar? Despejarlo, se dice despejarlo. ¿Cómo lo despejamos?

E: - En el tablero - Pasándolos al otro lado.

P: ¿Lo pasamos así no más?

E: - En el tablero -.

P: Bueno, ¿cómo se despejaría ahí el valor de k?

Fíjense que esta es una ecuación exponencial. ¿Entonces requiere qué? Requiere que nos acordemos cómo era la definición de logaritmo. Entonces la definición de *logaritmo vamos a ponerla por aquí. Para que asociemos eso, porque necesitamos determinar el valor de k. Sin el valor de k no podemos calcular el número de bacterias.*

El profesor identifica que al remplazar la función para ***t*** igual a treinta, se tiene una ecuación exponencial. Por lo tanto la tarea ahora se ha transformado en resolver una ecuación exponencial y, para ello indica a los estudiantes la necesidad de recurrir a la definición de logaritmo[19].

[13][38:40]

P: Bueno, ¿cómo se despejaría ahí el valor de k?

Fíjense que esta es una ecuación exponencial. ¿Entonces requiere qué? Requiere que nos acordemos cómo era la definición de logaritmo. Entonces la definición de logaritmo vamos a ponerla por aquí. Para que asociemos eso, porque necesitamos determinar el valor de k. Sin el valor de k no podemos calcular el número de bacterias.

Entonces, logaritmo en base a de b es igual a c, si y sólo si, a elevado a la c es igual a b -$log_a b = c$*. Lo va escribiendo en el tablero -. Esta era nuestra definición de un logaritmo, un logaritmo es una potencia, en donde la base elevada a ese número nos da el número al cual se está sacando el logaritmo. Bueno, eso ya lo habíamos visto cuando miramos lo de las operaciones con números. Bien, entonces fíjense que yo lo que tengo es esto, ¿no cierto? Tengo esto a este lado - Señala la fórmula de definición del logaritmo -. Aparece aquí una constante pero tengo una parte exponencial - Señala esto en la ecuación correspondiente al ejercicio que se está realizando - y tengo otra parte al otro lado - Señala la expresión del logaritmo -. Entonces, ¿qué sería lo primero que le haríamos a la ecuación para que se pareciera más a esto, a esta parte* $log_b = c$*?*

El profesor, [13][63:67] ayuda al estudiante que está en el tablero a despejar el valor de *k*, haciendo uso del logaritmo. Se evocan conceptos que alguna vez fueron estudiados para aplicarlos bajo la suposición que basta con recordarlos para que estén disponibles para ser aplicados.

[13][63:67]

P: k. Porque a este lado tengo el valor, el número de bacterias cuando es treinta, es veinte mil - Señala en el tablero, en donde dice Q de treinta igual a veinte mil -. Entonces ahora lo que me interesa es este pedazo - Señala en el tablero, en donde dice veinte mil igual a cinco mil por e a la k por treinta -, cómo despejo k de ahí. Ahí es donde tenemos que aplicar esto - Señala la ecuación logaritmo en base a de b es igual a c, si y sólo si, a elevado a la t es igual a b -, para poder bajar la k. ¿Entonces cómo sería? Pasemos primero este término para allá - Indica a la alumna en el

[19] En la clase tres Arturo retoma este ejercicio para recordar a los estudiantes "que no les debe ser extraño el uso del logaritmo" porque al iniciar el semestre él les explicó las operaciones entre números: suma, resta, multiplicación, potencias y logaritmos. Después de ello inicia su discurso de funciones logarítmicas.

tablero, que pase el cinco mil a la izquierda -. Veinte mil sobre, sobre cinco mil, ¿no cierto? Esto lo vamos a hacer también para que quede la potencia solita.

E: - Escribe en el tablero: veinte mil sobre cinco mil igual a e a la treinta k -.

P: A la treinta k, muy bien. Bien, ahora sí, ¿eso qué nos daría ahí? Cuatro. ¿Cuatro igual a qué? A e a la treinta k.

E: - Escribe en el tablero: cuatro igual a e a la treinta k -.

P: Entonces, ya fíjense que ahora sí esto - Señala donde dice: cuatro igual a e a la treinta k - es este lado - señala donde dice logaritmo en base a de b es igual a c, si y sólo si, a elevado a la t es igual a b -. Y esto - señala donde dice logaritmo en base a de b es igual a c, si y sólo si, a elevado a la t es igual a b - es este lado - Señala donde dice: cuatro igual a e a la treinta k -. Entonces ahora sí pasemos a la forma logarítmica. ¿Qué logaritmo me conviene aquí? ¿O debe ser qué logaritmo, de base qué?

Una vez han despejado la k, les propone continuar la tarea para encontrar otros valores y ubicarlos en la tabla.

P: La k ya lo sabemos, ¿no cierto? Ya la tenemos - Señalando en el tablero: cero punto cero cuarenta y seis igual a k -.

E: - Sentada -. Cero punto cero cuarenta y seis.

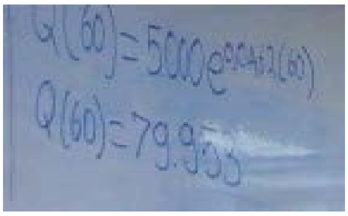
E: - En el tablero. Escribe: Q de x igual a cinco mil por e a la k por treinta -.

P: Bueno. Y eso ya todos lo podemos hacer en la calculadora. Elevar e a cualquier potencia. Tenemos la función allá, ¿no cierto? Donde está e a la x en la calculadora, podemos calcularlo.

E: - En el tablero. Realiza operaciones con la calculadora. Escribe en la tabla de valores lo siguiente: en la casilla para el tiempo, sesenta minutos y en la casilla para el número de bacterias, setenta y nueve mil novecientas cincuenta y tres - ¿Lo aproximo?

P: Sí, claro porque las bacterias no puede ser un pedazo de bacteria, ¿cierto? Es completa. ¿Setenta y nueve mil?

*E: - En el tablero - Sí. Voy a desarrollar este también - Señalando donde ha escrito anteriormente, Q de x igual a cinco mil por **e** a la k por treinta -.*



P: Q de sesenta igual a… Escribe el valor ya directamente.

E: - En el tablero. Borra la operación que estaba empezando a escribir y deja directamente: Q de sesenta igual a setenta y tres mil novecientas cincuenta y tres - Ah, bueno

3.3.3.3 Síntesis

La tematización del esquema de las funciones exponenciales que Arturo propicia con los procedimientos de solución de ecuaciones exponenciales a través del registro simbólico subraya una alternativa puramente algebraica que esconde la riqueza de tratamientos centrales de la función exponencial como la iteración, la caracterización que se puede realizar al tomar su monotonía y profundizar en la descripción del crecimiento que la identifica, al igual que determinar el dominio, el rango y la asíntota para esta función específica en este contexto.

En cuanto a la organización y secuencia, la segunda clase estuvo exclusivamente dedicada a propiciar tareas de tematización del concepto función exponencial y se destaca el uso de la noción del logaritmo utilizada por Arturo a modo de una equivalencia de escritura a partir de la definición de una potencia, como la estrategia para resolver la tarea propuesta, en la cuál una incógnita está en el exponente. Sin embargo, la oportunidad de propiciar un examen detallado de las conexiones entre el exponente y el logaritmo, o la imagen de las funciones exponenciales y logarítmicas como inversas, no se desarrolla en esta tarea.

Al realizar un recuento de la secuencia de enseñanza en las clases de Arturo, se determina que con las tareas propuestas fomenta las formas de conocer siguiendo la secuencia objeto – acción – objeto. Como cierre de la descomposición genética de la función exponencial modelada por Arturo, nos detenemos indicando las intenciones del profesor en cuanto a la inclusión de los elementos del concepto matemático para la construcción de este concepto:

> *[26][198]*
>
> *P: Bueno. Los conceptos previos. Uno tiene que partir de que hay unas cosas que no puede uno suponer. Que si no las tienen, pues me toca devolverme, porque cómo voy a seguir. Ese es un momento importante. La parte previa que deben tener, con la que deben venir preparados, para poder empezar a ver otra cosa más compleja. Bueno, después el segundo momento es cuando ya empezamos a mirar teóricamente o conceptualmente la función: qué es esa función, matemáticamente cómo se escribe, cómo se representa gráficamente y qué características tiene. Ese es otro momento importante. Y el tercer momento son las aplicaciones. Creo que son como tres pedazos grandes.*

En la entrevista Arturo establece la estructura general que tuvo en cuenta para la organización del contenido que presentó a los estudiantes en el aula. En cuanto a lo que él llama mirar teóricamente lo traduce en tres preguntas ¿cómo se escribe?, ¿cómo se representa gráficamente?, ¿qué características tiene?

El resumen que Arturo facilita en la última entrevista, coincide con la clasificación de los datos que se efectúa a través de la identificación de segmentos de clase correspondientes a cada mecanismo de construcción.

En la tabla 3.2, se organiza la información sobre los segmentos que establecen evidencias, de la siguiente manera: en la primera clase se inicia la presentación de la función exponencial propiciando la forma de conocer objeto, sin que medie el mecanismo de encapsulación. En la segunda parte de la clase uno, el profesor genera una actividad de comparación entre funciones exponenciales crecientes y decrecientes; centrando la atención en el examen de la base.

Las actividades que favorecen el mecanismo de interiorización son planteadas por Arturo, en la clase uno, después de haber presentado las funciones exponenciales a través de una definición. Luego son dirigidas las tareas de tematización del esquema de la función exponencial, en el transcurso de las tres clases, las cuales están centradas en tareas de solución a ecuaciones exponenciales y otras situaciones que se resuelven recurriendo a tabulación y gráficas.

La descripción pormenorizada de los mecanismos de construcción que Arturo propicia en su práctica en el aula, nos permitió establecer la modelación de la descomposición genética, mediante: los mecanismos de construcción, los registros de representación y los elementos matemáticos puntuales y globales usados en la presentación que el profesor expone en el aula de clase.

Respecto al uso de los registros de representación como instrumento de la práctica, Arturo generalmente construye independientemente los significados gráficos y simbólicos de los elementos matemáticos del concepto. Esta independencia limita la posibilidad de recurrir y explicitar algunas nociones subyacentes como son la iteración, la aproximación y la continuidad. De esta forma no se potencia la construcción del significado del concepto estableciendo relaciones entre los diferentes registros de representación. En las entrevistas Arturo hace notar diferencias e independencia entre los registros simbólicos y los gráficos. Para él la presentación formal de un objeto matemático se hace mediante el registro simbólico y los registros gráficos son relegados a un segundo orden tanto en secuencia, como a su poder de contener todo el significado del concepto.

A través del discurso del profesor se potencia el uso del registro simbólico, así las tareas inician con la expresión simbólica luego se sustituye en ella para organizar una representación tabular y se finaliza el procedimiento a través de la tarea de representación gráfica.

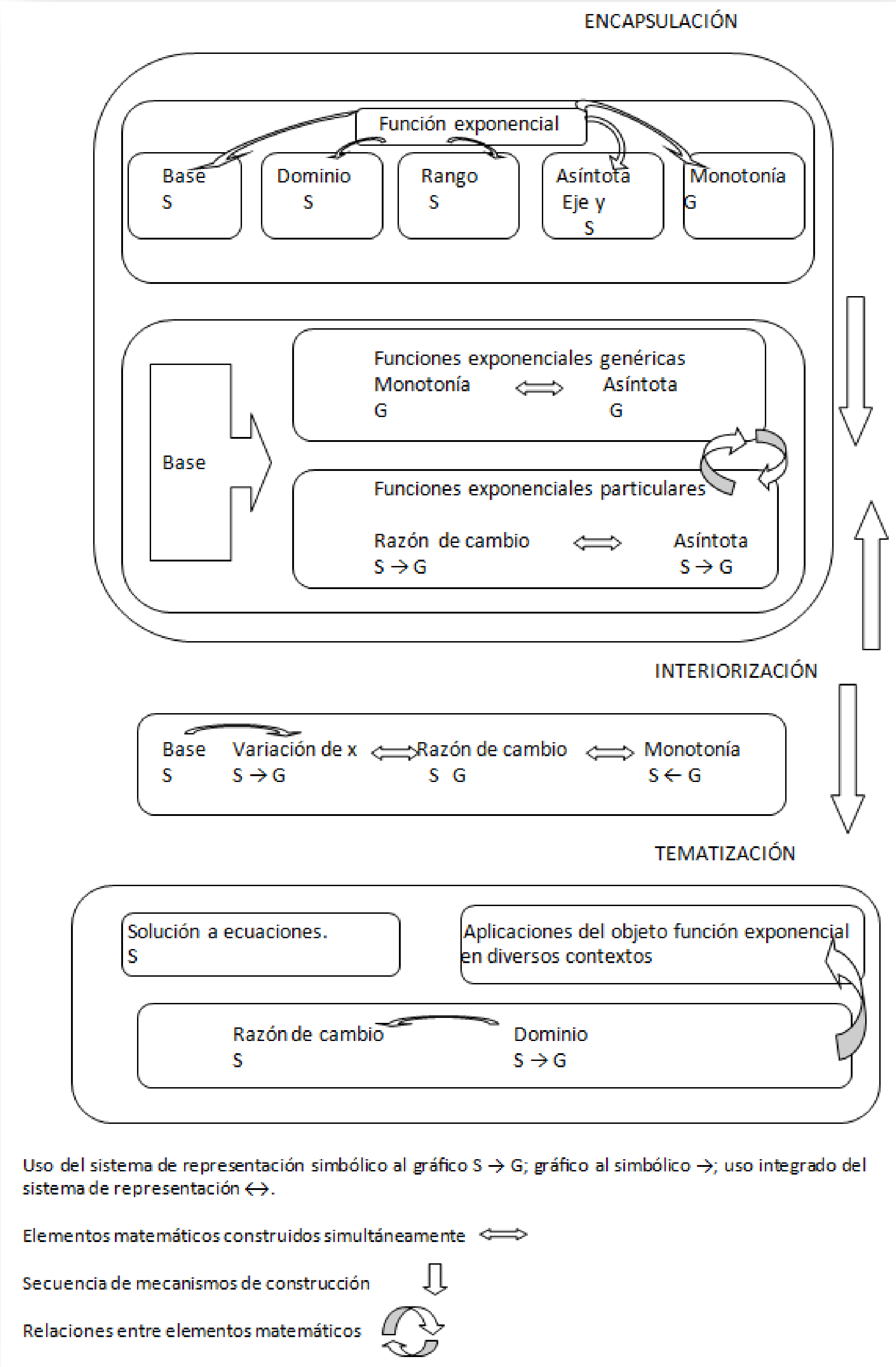
Arturo no establece relaciones entre los elementos matemáticos puntuales, como una manera de dotar de significado al concepto. En la secuencia de su enseñanza para la presentación de los conceptos recurre especialmente al uso de elementos matemáticos globales como funciones exponenciales particulares y genéricas en donde se destaca el uso de acciones de sustitución del exponente y la clasificación de las funciones de acuerdo con el valor de la base. Además se caracteriza por establecer relaciones a partir de las formas de conocer objeto, apoyándose eventualmente en la forma de conocer acción. Su práctica en el aula marca una relación-orden de las formas de conocer que siguen la secuencia objeto-proceso-objeto.

CÓDIGOS	1a.C1	2da.C1	C2	C3	T
Eed c2	11	1	0	0	12
Eea c2	1	7	0	0	8
Eeb c2	0	0	0	0	0
Eec c2	0	0	0	0	0
Iea c2	3	2	0	0	5
Ieb c2	0	0	0	0	0
Iec c2	0	1	0	0	1
Ied c2	2	1	0	0	3
Iee c2	0	1	0	0	1
Tea c2	0	0	0	0	0
Teb c2	0	1	4	1	6
Tec c2	0	8	9	0	17
Totales	17	22	13	1	53

- Interiorización de las iteraciones correspondientes a elevar una base fija cuando se varía el exponente, considerando de forma separada los casos en que la base es mayor que uno o cuando tiene un valor entre cero y uno. **Iea**
- Interiorización de las acciones de comparación de diferencias y cocientes de dos valores de la variable dependiente e independiente respectivamente, para buscar las relaciones entre ellas $y_2/y_1 = a^{x_2-x_1}$. **Ieb**
- Interiorización de las acciones de aplicar valores muy "grandes" a *x* y la aproximación de los valores de *y* a cero en el caso de la función decreciente y para *valores de x* muy "pequeños" en el caso de la función creciente. **Iec**
- Interiorización de las acciones de ubicar diferentes puntos en la curva función exponencial en el proceso de construcción de la gráfica de la función sin recurrir a realizar las acciones de remplazar en la fórmula diversos valores. **Ied**
- Representación del triángulo característico para diferentes puntos de la gráfica de una función. **Iee**
- Comparación entre diferentes funciones crecientes o decrecientes que permitan examinar razones de cambio para establecer la monotonía y rapidez de crecimiento o decrecimiento de la función exponencial según los valores de la base. **Eea**
- Comparación entre diferentes curvas de funciones crecientes o decrecientes con curvas de funciones exponenciales que permitan examinar a través del triangulo característico la rapidez de crecimiento o decrecimiento de la función exponencial. **Eeb**
- Comparación de curvas exponenciales para establecer el eje *x* como asíntota, el corte de la función con el eje *y*, el dominio y el rango de las funciones exponenciales. **Eec**
- Encapsulación del proceso función exponencial en el Encapsulación del proceso función exponencial en el objeto función exponencial y su representación mediante una curva o representación simbólica $f(x) = b^x$ con b>0 y b≠1, estableciendo el dominio en el conjunto de los números reales y el rango en los número reales positivos, considerando como asíntota el eje *x*, que es una función creciente para b<1 y decreciente para 0<b<1, que tiene una raíz para *x*=1 y que existe relación de proporcionalidad entre la función y su razón de cambio. **Eed**
- Generalización de la función exponencial objeto $f(x) = b^x$ por diversas transformaciones relacionando los diferentes parámetros de la representación simbólica con sus efectos en la representación gráfica. **Tea**
- Aplicación de las funciones exponenciales transformadas en los procesos de solución de ecuaciones logarítmicas. **Teb**
- Utilización de la función exponencial en diferentes contextos: crecimiento de poblaciones, temperatura, interés compuesto, comportamiento radiactivo, entre otros. **Tec**

Tabla 3.2. Resumen a través de Atlas.ti de los mecanismos de construcción caso 2.

El siguiente esquema sobre la práctica de Arturo, acentúa cómo se modelan los mecanismos de construcción junto con las relaciones-secuencia que el profesor establece entre ellos.



Cuadro D. Relación del orden de modelación de los mecanismos de construcción. Caso 2.

En el esquema anterior (Cuadro D) también se presentan los elementos matemáticos puntuales que conforman el concepto función exponencial junto con los mecanismos de construcción y la relación-orden con que Arturo propició las formas de conocer de estos elementos, con la intención de dotar de significado el concepto función exponencial.

Esta modelación del concepto función exponencial se caracteriza por comenzar desde el elemento global función exponencial genérica a partir una definición del concepto, usando la representación simbólica de la función e ir identificando, los elementos matemáticos puntuales que conforman el concepto: base, dominio, rango, monotonía, asíntota y corte con el eje *y*.

La noción de función monótonamente creciente o decreciente se presenta como un objeto a través de la curva de la función exponencial y sólo después de eso se propician comparaciones entre funciones mediante la representación gráfica de funciones crecientes correspondientes a bases mayores que uno y funciones decrecientes con base entre cero y uno.

El elemento matemático rapidez de crecimiento-decrecimiento se propicia cuando se comparan diversas funciones exponenciales con la función exponencial genérica fijándose en sus bases. Se finaliza modelando la tematización en situaciones de contextos particulares. Hay una ausencia de funciones transformadas, dado que Arturo considerar que no se necesita estudiar y hacer explícita la transformación de funciones para aplicar estas funciones transformadas a contextos específicos.

Concluyendo, las relaciones entre elementos matemáticos del concepto, los usos de los registros de representación y las formas de conocer potenciadas en la práctica de Arturo permitieron al investigador establecer el esquema del cuadro D y en la tabla 3.2. para describir la modelación de la descomposición genética del caso de Arturo.

3.4. PERSPECTIVA DE LA PRÁCTICA. TRADICIONAL. CASO 2

En la modelación de la descomposición genética del concepto función exponencial descrita en el apartado anterior están integradas: las tareas propuestas por el profesor, su discurso y las formas en que el profesor usa los registros de representación; cómo organiza y establece relaciones entre los elementos matemáticos globales y puntuales, las formas de conocer que parece potenciar y los objetivos expuestos por el profesor, tanto en el aula de clase como en las entrevistas. Lo anterior nos permite identificar, extraer y acercarnos a:

- Cómo concibe el profesor el desarrollo de la comprensión: concepción sobre el aprendizaje de los conceptos observada a través de los mecanismos de construcción del conocimiento que potencia en el aula, su secuencia y relaciones y su justificación.

- Su visión de las matemáticas: concepción de las matemáticas como objeto de enseñanza y aprendizaje extraída a partir de la forma cómo organiza el contenido matemático para enseñarlo. (*Gavilán, 2005, p. 227*

Al inicio de las clases Arturo presenta los objetos matemáticos a los estudiantes, el "título" del tema que se va a estudiar, y solicita la participación de los estudiantes; a través de lectura de partes de un resumen que han realizado previo a la clase, sobre el concepto. Por ejemplo, en la clase 1, Arturo manifiesta que el tema de estudio al que se van a dedicar ese día son las funciones exponenciales (diagrama 8).

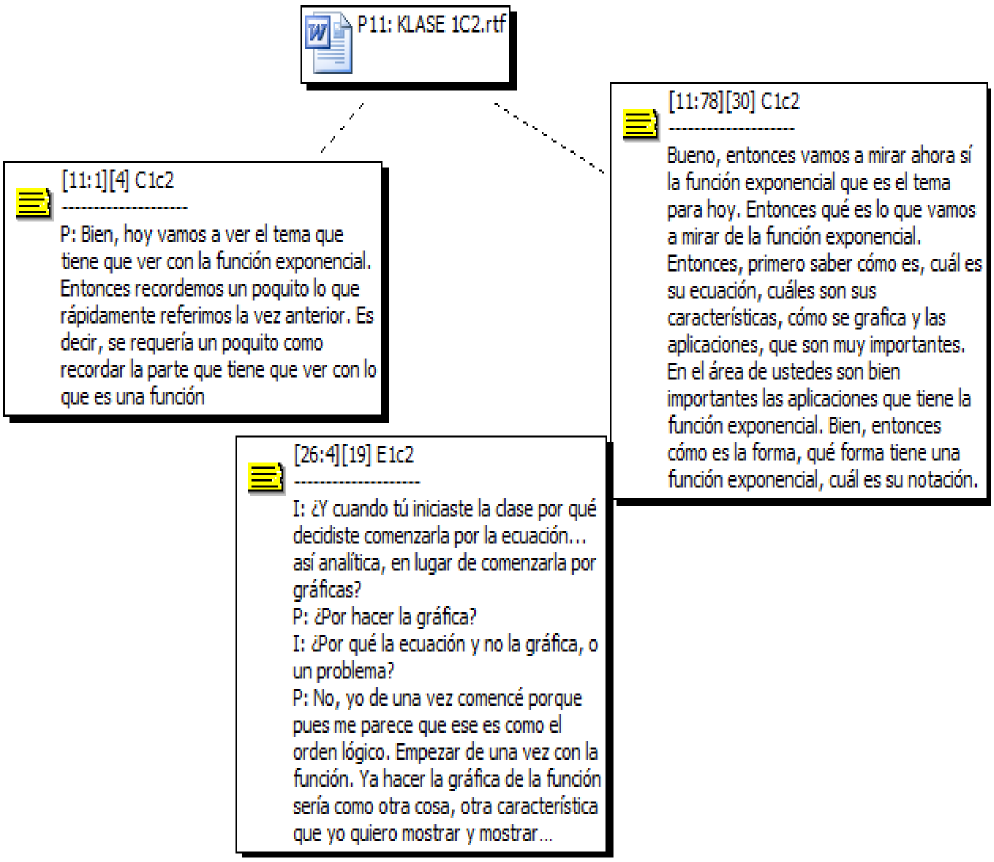
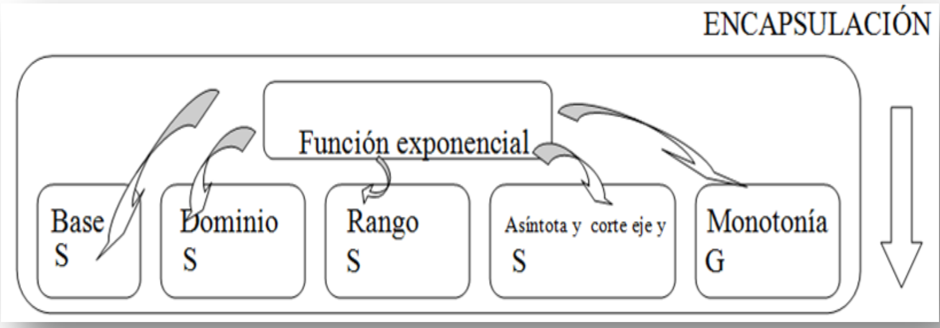


Diagrama perspectiva. 8. Situación inicial caso 2.

Arturo expresa [26][19] que su presentación del concepto corresponde a "*utilizar un orden lógico*". Se puede inferir que la concepción del profesor sobre las matemáticas escolares es la de una Matemática formal, puesto que la enseñanza de las matemáticas gira en torno a la exposición de definiciones, elementos y relaciones para que el estudiante las perciba. Esto se comprueba en la forma en que el profesor usa los conceptos como objeto al iniciar el estudio de la exponencial.



Uso del sistema de representación simbólico al gráfico S → G; gráfico al simbólico →; uso integrado del sistema de representación ↔.

Elementos matemáticos construidos simultáneamente ⟺

Secuencia de mecanismos de construcción ⇩

Relaciones entre elementos matemáticos

Síntesis M. Presentación de la forma de conocer objeto. El caso de Arturo.

Arturo procura que los estudiantes observen los conceptos como objetos para lo cual el tipo de actividad que realizan los estudiantes se restringen a la lectura y la observación de algunas gráficas. Ya en la primera entrevista manifiesta estas ideas [32][57][65][103] que luego se muestran en su práctica profesional. Por ejemplo, para estudiar el crecimiento de estas funciones, parte de funciones genéricas sin establecer comparaciones con otras funciones que los estudiantes ya han estudiado como las funciones lineales o las cuadráticas.

Las actividades propuestas en clase y la forma en que Arturo las orienta, otorgan un papel preponderante a los apuntes. El estudiante se esfuerza en recoger en sus papeles todo aquello que dice el profesor. En general las actividades giran en torno a diálogos profesor–estudiantes basados en "ostensión disfrazada" «*les da un problema para introducir el tema, pero no les da tiempo, realmente, para encontrar una solución* » (Hersant, y Perrin-Glorian, 2005, p. 138). Así por ejemplo, se tiene el diagrama 9 y el siguiente diálogo:

P: O sea que el exponente es la variable. Fíjense que aquí la variable está en el exponente. ¿La base qué es? Una constante. Una constante mayor que cero. ¿Por qué será que nos dicen que diferente de uno? ¿Qué pasa si fuera uno?
E: Porque como se multiplica por él mismo, entonces o sea si el exponente sería dos, entonces uno por dos…
P: No, póngame cuidado a lo que pregunto, le estoy preguntando por qué aparece b diferente de uno. Le pregunto lo contrario, cierto, para poder explicarme me pregunto lo contrario, qué pasaría si b valiera uno. Cómo quedaría la ecuación.
E: Siempre daría uno.

P: Uno, no cierto, nos daría una función constante que pues no es tan importante. Nos quedaría f de x igual a uno porque uno elevado a cualquier potencia es uno. Por lo tanto esa no es muy interesante porque es una línea recta y igual a uno paralela al eje x. Bueno, entonces por eso nos ponen estas restricciones. Bien, ¿y por qué será que la base tiene que ser mayor que cero?
E: Por lo mismo. Porque da uno. Porque cero elevado a cualquier cosa da…
P: No, ya es otra cosa, ya es otro análisis. La base por qué nos pide que sea mayor que cero.
E: Porque para que sea una función tiene que ir, o sea tiene que tomar algún valor, o sea que ascienda o descienda.
P: Entonces debemos preguntarnos lo contrario no cierto. ¿Qué pasa si fuera negativo? Fíjense qué es.

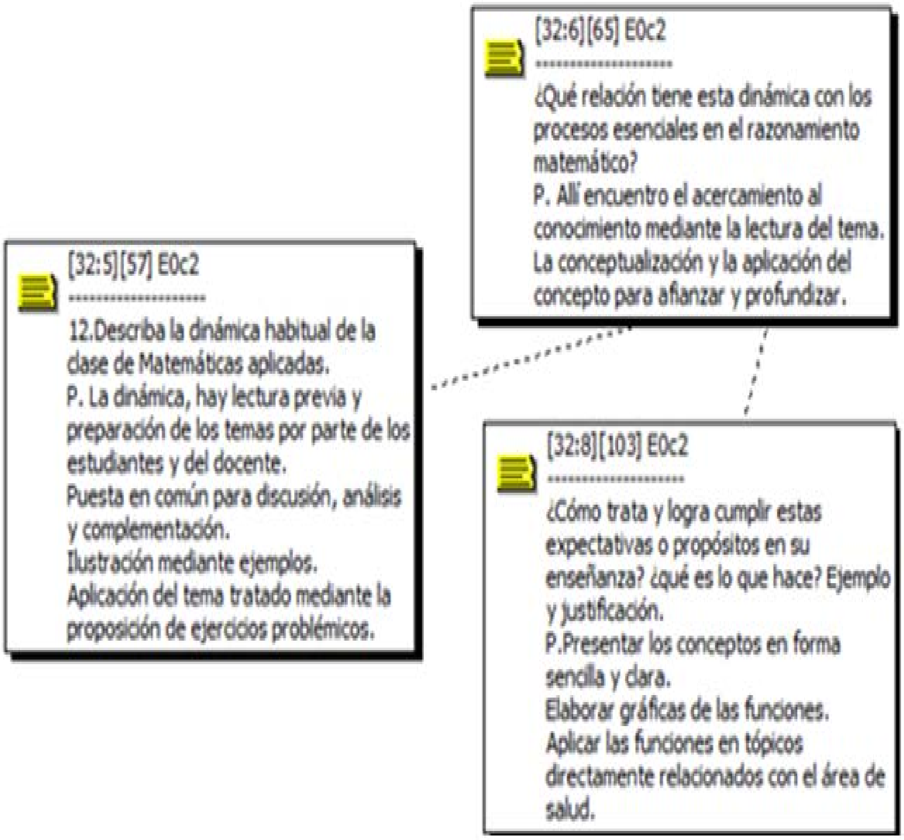
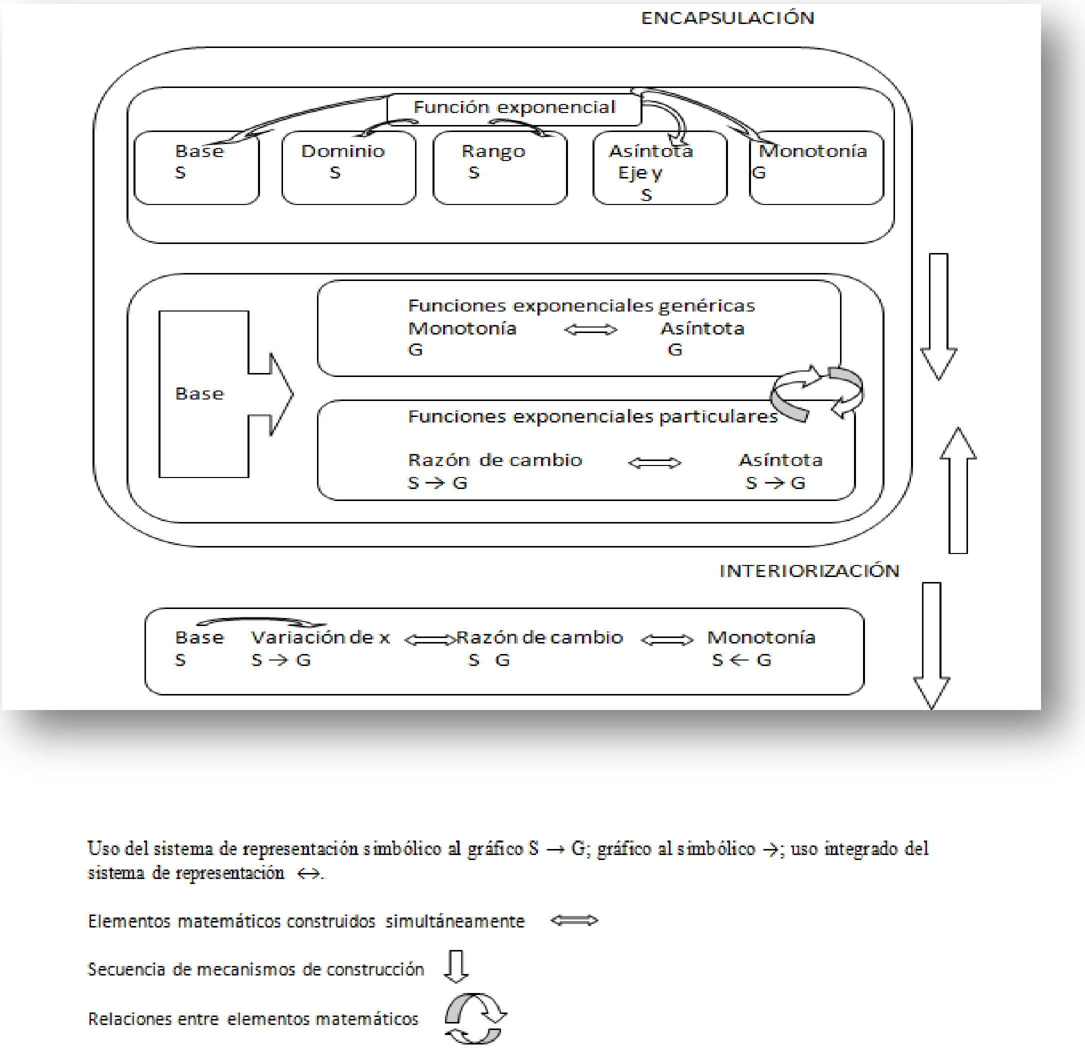


Diagrama perspectiva. 9. Adquisición de conceptos caso 2.

La secuencia en las clases de Arturo se inicia a partir de las formas de conocer objeto, induciendo en momentos ocasionales a los estudiantes a realizar algunas acciones. Su práctica en el aula marca una relación-orden de las formas de conocer bajo la secuencia objeto-acción, o en ocasiones objeto-proceso-objeto, siendo estas secuencias diferentes a la propuesta de comprensión de un concepto en la teoría APOS, que permite inferir por parte del investigador una construcción que no es progresiva ni vertical entre mecanismos de construcción y elementos puntuales.



Extracto de Cuadro D. Relación del orden de modelación de los mecanismos de construcción.

Esta relación-orden de los elementos matemáticos se desarrolla en una secuencia que no es constructiva. Por ejemplo, sobre el elemento matemático rapidez de crecimiento, en su discurso el profesor propone algunas actividades con funciones exponenciales crecientes, dirigiendo la comparación entre ellas al cambiar la base y luego recurre a algunas acciones de sustitución; solo cuando está modelando el mecanismo de tematización hace referencia a la pendiente en la función exponencial.

La práctica de Arturo se caracteriza por partir de los elementos matemáticos globales del concepto estableciendo esporádicamente relaciones entre los elementos matemáticos aunque no de forma progresiva vertical (sección 1.4.1), con el siguiente orden: primero se presenta la función exponencial genérica $f(x) = b^x$, enseguida algunas funciones exponenciales particulares, como por ejemplo $f(x) = 2^x$; $f(x) = 5^x$ y finalmente se establece la tematización, vinculada con la aplicación en ecuaciones o diferentes contextos, de las funciones exponenciales $f(x) = kb^{tx+s}$, sin relacionarla con las transformaciones, es decir, se intenta aplicar la función exponencial generalizada en diversos contextos, sin haber propiciado su generalización.

El corte con el eje y, la asíntota, el rango y el dominio son presentados como objetos sin establecer relaciones entre todos los elementos matemáticos del concepto; por ejemplo entre el rango y la asíntota. Tanto el desarrollo presentado por el profesor en el aula como sus explicaciones en la entrevista posterior son muestra de una concepción que supone que el aprendizaje es lineal en el sentido de “añadir” un concepto a otro anterior. No se plantea la necesidad de establecer relaciones entre conceptos nuevos y otros ya existentes para completar el significado de estos conceptos. Basta con enunciar los elementos matemáticos para aprenderlos.

La construcción que presenta Arturo dependiente de la definición desvela una concepción de la Matemática escolar ligada a la propia estructura de la Matemática formal y en la que se trata de aplicar los conceptos tratados a algunas situaciones provenientes de la problemática real (Contreras y Carrillo, 1995). Por otro lado, el énfasis que Arturo imprime, en su práctica en el aula, al mostrar paso a paso los procedimientos de cálculo, permite inferir una concepción de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas según la cual el estudiante aprende si el profesor hace explícito cada uno de los pasos de un procedimiento. Para él, el hecho de mostrar un concepto o procedimiento, es el medio para que el estudiante lo asimile.

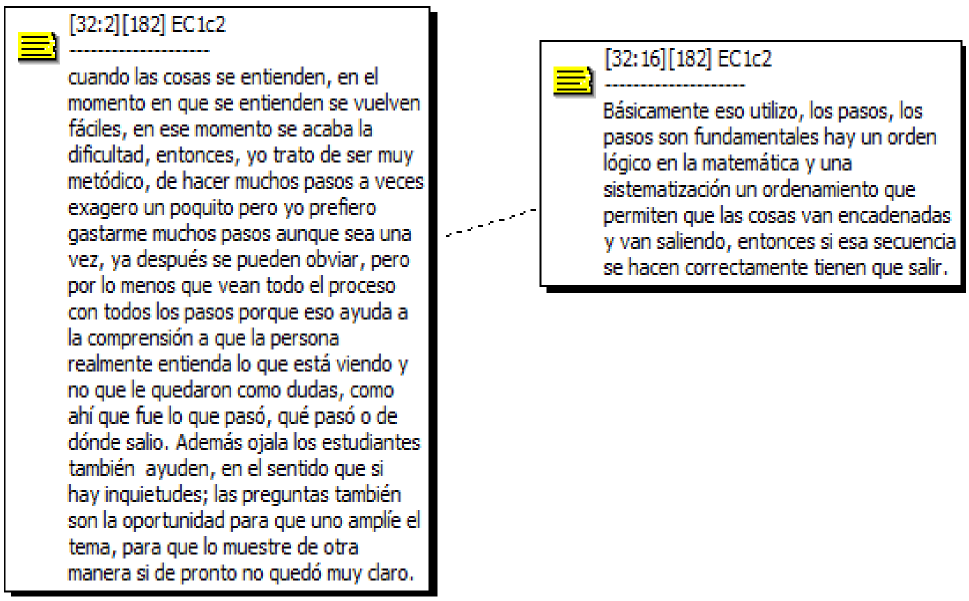


Diagrama perspectiva. 10. Pasos y orden lógico caso 2.

Muchas de las tareas planteadas por Arturo muestran una visión instrumental de las matemáticas, que se manifiesta, por ejemplo, en la modelación del mecanismo de interiorización y la tematización de la función exponencial (viñeta 3). Así, el desarrollo de las tareas siguen siempre los pasos: expresión simbólica, tabla de datos y gráfica, con pocos acercamientos a una comprensión relacional. Promueve ciertas mecánicas para el desempeño exitoso de los estudiantes, ofreciéndoles la descripción de los procedimientos paso a paso.

Los aspectos que determinan la perspectiva de la práctica de Arturo son: i) propicia tareas en las que no necesariamente se modela la encapsulación de los procesos (objetos); ii) atribuye un papel independiente (en las entrevistas) a los registros simbólicos y los registros gráficos; iii) adjudica un papel secundario al registro gráfico, al relegarlo a un segundo orden tanto en secuencia, como a su poder de contener parte del significado del concepto iv) inicia la secuencia de enseñanza con el objeto matemático función exponencial sin haber propiciado la encapsulación, v) considera innecesario el estudio de la función transformada, sin embargo aplica estas funciones transformadas en contextos específicos.

Arturo, en las entrevistas manifiesta su interés en el contenido procurando la comprensión conceptual. Por ello se esperaría que una parte de su acento, en las secuencias de enseñanza, estuviese en la comprensión del estudiante tanto de ideas como procesos estableciendo relaciones entre varias ideas matemáticas, los conceptos y los procedimientos lógicos que subyacen. Sin embargo, el análisis de los desarrollos que potencia en sus clases por medio de los mecanismos de construcción permite inferir que su enseñanza está más centrada en el contenido con énfasis en el rendimiento (Kuhs y Ball, 1986). El contenido es organizado de acuerdo con una jerarquía de técnicas (habilidades) y conceptos presentados secuencialmente a toda la clase a partir de las técnicas que el profesor ofrece al estudiante. El rol del profesor es definir y explicar. Desprendiéndose de ello que, el rol del estudiante es escuchar y hacer los ejercicios o problemas usando procedimientos que han sido expuestos por el profesor o el texto.

Sintetizando, desde nuestro marco teórico, en las clases de Arturo, a través de su modelación de descomposición genética de la función exponencial se puede intuir que subyace la idea de un profesor que organiza los contenidos de aprendizaje y los transmite utilizando estrategias expositivas que procuran ser atractivas que buscan provocar la actuación del estudiante mediante preguntas conducentes a utilizar los procedimientos modelados por el profesor o el texto.

De la descripción de la práctica de Arturo podemos inferir que el aprendizaje de las matemáticas es considerado como un proceso en el cual para comprender es suficiente con observar y asimilar el conocimiento que proviene del exterior. Se concibe que las matemáticas escolares traten de dar una explicación a las situaciones provenientes de la problemática real basadas en la matemática formal. La formalización es su acercamiento a la enseñanza de las matemáticas manteniendo una presentación de los conceptos focalizada en las estructuras matemáticas. Concluimos que nuestro análisis de la práctica de Arturo, a través de la modelación de la descomposición genética de la función exponencial, nos permite identificar una práctica con aspectos de una fuerte tendencia de perspectiva tradicional.

CAPÍTULO 4: Discusión y conclusiones

La modelación de la descomposición genética de la función exponencial y la perspectiva de la práctica de los docentes de precálculo que surgen a partir de este estudio están constituidas por tres componentes integrados: la forma en que el profesor usa los instrumentos de la práctica (las tareas que propone a sus alumnos, los sistemas de representación usados, y el discurso matemático generado en el aula) y cómo el profesor organiza los distintos elementos matemáticos del concepto y establece relaciones entre ellos.

El análisis de la práctica profesional del profesor de precálculo se ha realizado a partir de un enfoque sociocultural en el cual la actividad del profesor viene dada por la manera en la que éste crea las condiciones para que los estudiantes comprendan la función exponencial. Desde este punto de vista, resultó de interés identificar la manera en la que los profesores usaron y justificaron las tareas, los registros de representación y su discurso (instrumentos de la práctica), para conseguir su objetivo. En ese sentido, nuestro análisis de la práctica de los docentes en la fase de planeación y la de gestión en el aula tuvo como foco de interés los elementos matemáticos, puntuales y globales, que conforman el concepto función exponencial y los registros de representación simbólico y gráfico. Por otra parte, al igual que en Gavilán (2005) desde el modelo APOS, utilizamos la noción "mecanismo de construcción de conocimiento" y la idea de descomposición genética de un concepto. A partir de la consideración conjunta de la idea de instrumento de la práctica y de la descomposición genética, caracterizamos la "modelación de la descomposición genética del concepto función exponencial" como una idea que nos permite explicar la práctica del profesor, pero no necesariamente la relación entre la práctica y un determinado nivel de éxito en los estudiantes (Gavilán, *et al*., 2007).

En este capítulo se discuten los resultados más relevantes de la investigación, se analiza y discute acerca de la modelación de la descomposición genética de la función exponencial junto con la perspectiva de la práctica de los docentes, la consecución de los objetivos de investigación, las limitaciones identificadas, para después describir la contribución de este estudio. Hemos organizado la discusión de los resultados del análisis en las siguientes secciones.

Primero, retomamos nuestra propuesta de la descomposición genética, aportando información para el uso de la descomposición genética de la función exponencial como referente en el análisis de la práctica docente. Segundo, sintetizamos el análisis presentando lo que constituye desde nuestro punto de vista una mirada sociocultural a la práctica del docente desde la modelación de la descomposición genética. Tercero, nos referimos al procedimiento de identificación del constructo “Perspectiva de la práctica del docente” a través de la modelación de la descomposición genética de las funciones exponenciales y valoramos formas en que esta herramienta favorece y limita el análisis de dicho constructo. Cuarto hacemos un planteamiento sobre la pertinencia de usar la modelación de la descomposición genética de Gavilán (2005) como instrumento teórico para documentar la práctica y la perspectiva de la práctica de los profesores. Quinto, nos referimos a los objetivos de la disertación y analizamos en qué grado se cumplieron.

4.1. DISCUSIÓN

4.1.1. Sobre la descomposición genética como referente en el análisis de la práctica del docente.

Para la descomposición genética que hemos propuesto en nuestro estudio, tuvimos en cuenta, entre otros aspectos, desde una revisión histórico epistemológica, el cambio de enfoque de la generación de esta función, que comienza en el siglo XVIII, hacia consideraciones de índole más algebraica en detrimento de las geométricas que tuvo, entre otras consecuencias, la aparición de dos funciones que hasta entonces eran la misma; las funciones exponenciales y las logarítmicas, una inversa de la otra.

Por lo expuesto anteriormente, en nuestro estudio, tomamos dos decisiones. Por un lado establecer una descomposición genética de la función exponencial independiente de la función logarítmica, lo cual la distingue de los planteamientos de Weber (2002a) quien las presenta integradas (sección 1.3.4.3), y por otro lado, nos centramos en recuperar algunas consideraciones de índole geométrico en cuanto a la relación entre progresiones geométricas y aritméticas, relación que está en la génesis de la noción de logaritmo (Napier (1614)) (sección 1.3.2), situación que de acuerdo con Confrey y Smith (1995) imprime a la función exponencial una caracterización que la dota de significado.

Sugerimos que si se usa la descomposición genética para examinar la práctica de los docentes, estos dos aspectos se deben conservar dado que en la enseñanza actual de los cursos de precálculo se evidencia que se construye primero la función exponencial y luego la función logarítmica, en ocasiones apartadas de la relación entre la progresión geométrica y la aritmética. Aunado a lo anterior, consideramos que se deben conservar en una propuesta de descomposición genética los aportes (Tabla E) de los resultados de investigaciones sobre la comprensión de los exponentes y del aprendizaje de las funciones exponenciales particulares como en Lezama (1999); Elstak (2007) y Weber (2002b) para comprender qué es lo que las caracteriza y, realizar posteriormente inferencias como las propuestas por Lezama (2003), así como la consideración de las diferentes aplicaciones de estas funciones exponenciales (Bradie, 1998; Hernández y Arrieta, 2005), que corresponde al elemento global de tematización del esquema de la función exponencial. Estas referencias permitirían una mirada más fina a la práctica del profesor a partir de la modelación que realiza de los mecanismos cognitivos vinculados a estos elementos matemáticos.

Dado que el conocimiento del profesor es una de las fuentes en la creación de una descomposición genética (Dubinsky y Harel, 1992; Vidakovic, 1997) creemos que a esta descomposición propuesta se pueden integrar algunos elementos que han surgido del análisis de la práctica de los profesores que participaron en nuestro estudio. Nos referimos, por ejemplo, a cómo modela el mecanismo de encapsulación el profesor Ernesto, a partir de la comparación entre varias funciones exponenciales, para establecer que una característica de estas funciones es tener la variable en el exponente. Al asumir que la descomposición genética de la función exponencial proporciona una trayectoria posible del estudiante para la comprensión del concepto y, en nuestra investigación, los dos profesores incluyen la variación de la base de la función exponencial considerando los casos en que la base es 0, 1, número negativo, mayor que uno y la base entre cero y uno; aspectos que están contenidos implícitamente en nuestra descomposición genética. La implicación de esos aspectos relativos a la enseñanza sobre el aprendizaje de los estudiantes abre nuevas cuestiones de investigación

4.1.2. Sobre la modelación de la descomposición genética del concepto función exponencial

Con el objeto de comprender la práctica de los profesores jugaron un papel importante el estudio de casos considerados a partir del enfoque teórico de Stake,

(1998) y Walker, (1989), en los que se sugiere tener siempre presente la observación de Schoenfeld (2000) en cuanto a que el propósito de la investigación con estudio de casos es dar “una prueba de existencia”.

Al igual que en otras investigaciones centradas en la práctica del docente desarrolladas con el enfoque sociocultural (Gavilán, 2005), o desde otros enfoques e intentos de caracterizar la práctica (Robert y Rogalski, 2005), (Escudero y Sánchez, 2007, 2008) hemos intentado llevar a término un análisis de una práctica ordinaria, como la denominan (Hersant y Perrin-Glorian, 2005) establecimos estrategias obteniendo información directa tanto respecto a la planificación como a la gestión de las clases. Utilizamos estrategias similares a las suyas, en cuanto a grabaciones de las sesiones en el aula de los docentes de precálculo cuando enseñan la función exponencial y a través de entrevistas. Coincidimos en reconocer la complejidad de las decisiones del docente y de la forma de desentrañar aspectos que las definan y sustenten.

De conformidad con Farias y Montero (2005), en el análisis de la información que realizamos con Atlas.ti fue evidente que al acudir a un programa de análisis de datos cualitativos se agiliza el manejo de los datos sin embargo hay que tener en cuenta que quien decide cómo y qué se analiza es el investigador.

No existen investigaciones previas que reporten resultados de análisis de las prácticas de profesores universitarios en cuanto a la enseñanza de las funciones exponenciales, sin embargo si existe el precedente de una investigación sobre la enseñanza de la derivada en el que se analiza la práctica con el constructo modelación de la descomposición genética de Gavilán (2005). Por ello centramos nuestra discusión en el uso de esta noción estableciendo que los mecanismos que propicia el profesor en el desarrollo de sus clases nos permitieron determinar las modelaciones de la descomposición genética de los profesores para la enseñanza de la función exponencial a estudiantes de precálculo. Los resultados obtenidos indican que se enfatiza en uno de los casos el recurso de la iteración y el uso transversal del interés compuesto y se recurre además a nociones intuitivas de límite, continuidad y el número *e*. En tanto que en el otro caso se recurre a la presentación mediante la definición de concepto y la aplicación en algunos ejemplos con lo que no existe una modelación de los mecanismos constructivos al presentar siempre las nociones matemáticas como objetos (o pseudo-objetos).

En nuestro estudio existió una codificación emergente llevada a término en los análisis de los datos que nos permitió identificar algunas acciones puntuales que se convierten en rutinas a lo largo de las clases en el caso de Ernesto, como lo fueron los “asuntos pendientes”, la alusión a los temas a tratar después de la realización de tareas que “les dicen algo a los estudiantes” y la caracterización de “la variable en el exponente” como una característica común de las funciones exponenciales.

Las modelaciones de la descomposición genética de la función exponencial respecto al uso de los registros de representación que hemos descrito en el caso de Ernesto indican que procura integrar los significados gráficos y simbólicos de los elementos matemáticos del concepto. Esta integración le permite explicitar nociones subyacentes como son la iteración, la aproximación y la continuidad. Apoyándose además en el uso de programas de cálculo simbólico como Derive, el profesor pretende potenciar en sus estudiantes la construcción del significado del concepto independiente del modo de representación empleado Sin embargo, el recurso de identificar la función exponencial como aquella cuya variable está en el exponente genera cierta dependencia de su representación simbólica.

La descripción de la práctica de Ernesto a través de la modelación que hace de los mecanismos constructivos nos ha permitido identificar que Ernesto enfatiza explícitamente las relaciones entre los elementos matemáticos como una manera de dotar de significado el concepto, lo que se traduce en su práctica en una construcción progresiva de los conceptos. Es decir, no solo establece relaciones entre las formas de conocer, apoyándose en una para potenciar la siguiente (acción-proceso-objeto), sino que además, la secuencia que imprime a su enseñanza procura favorecer los mecanismos de interiorización y encapsulación valiéndose inicialmente de iteraciones, el examen y la acción sobre funciones particulares para así encapsular la función exponencial genérica y terminar con la tematización de ésta.

En contraste, es característica de la modelación de Arturo la construcción independiente de los significados gráficos y simbólicos de los elementos matemáticos del concepto lo que muestra un uso de las nociones matemáticas como objetos (o pseudo-objetos). Arturo hace notar diferencias y la independencia entre ambos registros. Considera que la presentación formal de un objeto matemático se debe hacer mediante el registro simbólico y que los registros gráficos se deben relegar a un segundo plano tanto en la secuencia de enseñanza como en su capacidad de contener el significado del concepto.

Desde la modelación de la descomposición genética de la función exponencial del caso de Ernesto cuyo eje transversal es la construcción y comprensión del interés compuesto y continuo y, haciendo eco a la propuesta de Elstak (2007), quien recomienda que el significado de los exponentes se debe construir de manera simultánea con el de la función exponencial, a través de su razón de cambio, consideramos que esta modelación, descrita en nuestra investigación, puede ser un punto de partida para una propuesta de enseñanza de los exponentes.

En consonancia con algunas de las sugerencias de Adler *et al*, (2005), los resultados de la investigación (capítulo 3) fueron detallados mediante una descripción pormenorizada a través de viñetas similares a los “relatos”, identificados por estos autores, como una forma de dar una visión auténtica de la práctica que nos da una idea de la complejidad de la práctica docente.

Desde la modelación de la descomposición genética de la función exponencial del caso uno vista como una radiografía de la práctica de Ernesto, cuyo eje transversal es la construcción y comprensión del interés compuesto y continuo y, con la propuesta de Elstak (2007), quien interpreta que el significado de los exponentes se debe hacer simultáneo a la construcción de la función exponencial a través de su razón de cambio, consideramos que la práctica de Ernesto muestra las diferentes características que favorecen los mecanismos de construcción cognitivo por los estudiantes

En las tareas referidas a la tematización de la función exponencial se evidencia que los estudiantes acuden al modelo lineal para resolverlas, dificultad ligada con la naturaleza multiplicativa de la función exponencial identificada en investigaciones anteriores (Elstak, 2007; Lezama 1999; Confrey y Smith 1995.). Estos resultados indican que una determinada práctica del profesor puede crear los contextos para superar las dificultades de comprensión identificadas en las investigaciones sobre el aprendizaje ya que es necesario hacer con los estudiantes un trabajo profundo para entender que el modelo de crecimiento de una función exponencial no es lineal y aditivo.

4.1.3. Sobre la perspectiva de la práctica

Se han caracterizado las prácticas de dos docentes universitarios de precálculo cuando enseñan la función exponencial a través de las dimensiones expuestas en Gavilán (2005) tratando de integrar a ellas algunas características del discurso del profesor y la manera en la cual el profesor gestiona la participación de los estudiantes cuando intentan resolver un problema (Franke, et al 2007).

En el caso 1, la práctica de Ernesto es conceptuada bajo una perspectiva holística y consideramos que también puede ser caracterizada como una perspectiva basada en las concepciones procediendo para ello un sentido similar al planteamiento de Even y Schwartz (2002) quienes analizan una misma lección con dos enfoques: el de la ciencia cognitiva y desde un enfoque socio-cultural.

Tenemos así dos configuraciones teóricas que nos permiten hablar de la perspectiva que subyace a la práctica de Ernesto. Sin embargo, es la modelación de la descomposición genética la que nos permitió determinar la perspectiva de la práctica de Ernesto como holística con lo cual se está haciendo mención a cómo el profesor intenta favorecer a través de su práctica la comprensión potencial propiciando una construcción progresiva a través los mecanismos cognitivos.

En nuestro estudio, de manera similar a Escudero y Sánchez (2007), se muestra en el caso de Ernesto que las tareas que plantea son coherentes con sus declaraciones en las entrevistas respecto a sus concepciones sobre la enseñanza de la matemática, el aprendizaje de la matemática y las matemáticas escolares. Esta coherencia puede ser interpretada como consecuencia de sus concepciones, el profesor plantea tareas con las que pretende enlazar con las ideas previas de los estudiantes para mostrarles la utilidad de las matemáticas.

Caracterizamos la práctica de los docentes mediante un examen sistemático que incluye el análisis de las clases a través de segmentación, procedimiento también llevado a término por Escudero y Sánchez (2008), quienes a través de la arquitectura relacional indagan sobre las perspectivas de la práctica y, su aporte lo consideran como una caracterización al constructo de la perspectiva basada en la percepción.

En nuestro estudio, se realiza una validación de la *herramienta modelación de la descomposición de un concepto* como medio para inferir la perspectiva de la práctica de un docente y nos encontramos con la necesidad de integrar algunas características del discurso en el aula en cuanto a la manera en la cual el profesor gestiona la participación de los estudiantes, que no estuvieron explícitamente integradas en la propuesta de Gavilán (2005) en el uso este constructo.

El principal aspecto que se añade, en cuanto al examen del discurso del profesor, consiste en utilizar las evidencias acerca de la manera en que el profesor gestiona la participación de los estudiantes cuando intentan resolver un problema; inferir la idea del profesor acerca del papel de los estudiantes en el aula. Por lo tanto sugerimos para futuros estudios integrar un análisis sistemático de este aspecto; fijar un examen al discurso del profesor en lo referente a las preguntas que él dirige a sus estudiantes, las cuales además de ser un indicador de la intención de propiciar un mecanismo de construcción, son evidencias para el investigador de algunas concepciones de los docentes.

En nuestro caso las preguntas planeadas por los profesores poseían diferentes matices, que fueron señalados mediante características de su discurso, tales como: involucrar a los estudiantes en la dinámica de dejar asuntos pendientes, ayudarlos a encontrar analogías, o establecer pausas en el discurso del profesor, tendientes a “dar tiempo” para que los estudiantes construyan respuestas elaborando conjeturas, o la dinámica del docente de preguntar y rápidamente él mismo responder. De manera similar que la promoción de ciertas mecánicas para el desempeño exitoso de los estudiantes, ofreciéndoles, en el discurso, la descripción de los procedimientos paso a paso, o la solicitud de lecturas previas que son gestionadas en un discurso que puede o no delegar en el profesor el rol de definir y explicar. Concediendo, un rol del estudiante que se puede restringir a escuchar y hacer los ejercicios o problemas usando procedimientos que han sido expuestos por el profesor o el texto.

Aun cuando no fue un resultado que se buscara, uno de los profesores, Ernesto, una vez finalizada la investigación, se mostró interesado por los resultados de otras investigaciones acerca de la función exponencial. Después de un periodo de estudio continuo y compartido con la investigadora, se conformó un equipo de profesores de ciencias básicas que han participaron como ponentes, en eventos de educación matemática, entre ellos, el noveno Encuentro Nacional de Educación Matemática, de la Sociedad Colombiana de Educadores Matemáticos ASOCOLME en Valledupar, Colombia, con una conferencia sobre la razón de cambio promedio de la función exponencial.

Las entrevistas previas a las grabaciones de aula, las propias grabaciones y las entrevistas posteriores permitieron contrastar las prácticas y las creencias de los profesores para establecer no sólo las decisiones que sobre la instrucción hacen los maestros sino también hallazgos sobre lo que ellos mismos están dispuestos a aprender. La relevancia de la intersección entre la experiencia y la creencia analizada en nuestra investigación coincide con lo expuesto por Rath, (2001) y Richardson (1996).

4.1.4. Pertinencia de la modelación de la descomposición genética en el análisis de la práctica profesional de los profesores

Adler *et al.* (2005) señalan que a diferencia de las ciencias naturales, donde habitualmente se replican los estudios experimentales, en la investigación en Educación Matemáticas no suelen realizarse estudios de “replicación” puesto que dichos estudios cuentan con una mínima posibilidad de ser publicados en revista de impacto. En nuestro estudio, consideramos que utilizar la noción de modelación de la descomposición genética de un concepto planteada por Gavilán (2005) y extenderla al análisis de la práctica en el nivel universitario, con un concepto matemático diferente al que inicialmente dio su origen, es un valor agregado para el mismo.

Nuestro estudio ejerce un valor de validación del instrumento modelación de la descomposición genética de un concepto para el análisis de las prácticas de los docentes de matemáticas, siendo esta una necesidad de la investigación en educación matemática donde la unificación de herramientas, teorías y definiciones enriquece el campo de manera tan significativa como las nuevas propuestas.

Esto nos permitió no sólo mostrar la solidez que esta noción tiene, sino la posibilidad de incorporar aspectos como los que señalamos en la sección anterior. En el caso de Ernesto, en su discurso, el uso de un lenguaje “coloquial” e “informal” del docente como un instrumento para acercar a los estudiantes a conjeturas y luego a la formalización, al igual que el uso de ciertas prácticas como la de dejar “asuntos pendientes” o la forma sistemática de no presentar el tema a los estudiantes desde el inicio de las clases sino denominarlo mucho más adelante cuando la construcción ya “les dice algo” a los estudiantes. Esto requiere del investigador desvelar en estas acciones sistemáticas y recurrentes de la práctica profesional del profesor en el aula el carácter constructivo o la ausencia de dicho carácter que llevan inmersas estas estrategias de los docentes.

Por otro lado, el establecimiento de procesos constructivos en una práctica que desvele una perspectiva holística a través de las relaciones-orden de la modelación de los mecanismos de construcción de cada elemento matemático del concepto función exponencial puede ser utilizada como instrumento para planificar unidades didácticas.

La modelación de la descomposición genética de la función exponencial, nos permitió realizar una investigación a través de un estudio de dos casos que brinda elementos para conjeturar y proponer nuevas preguntas sobre la enseñanza de la función exponencial relativas a un posible vacío en cuanto a la reflexión, individual e institucional. En este sentido es imprescindible determinar qué es lo característico de la función exponencial, qué se debe enseñar en un curso de precálculo sobre esta función y, si se considera la razón de cambio promedio un elemento matemático importante en esta construcción, de los cursos de precálculo, cómo abordar esta enseñanza y el estudio de la proporcionalidad entre la razón de cambio promedio y el valor de la función en un punto.

4.2 CONSECUCIÓN DE LOS OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

En este apartado analizaremos en qué medida se han alcanzado los objetivos que nos habíamos planteado al iniciar este estudio:

OBJETIVO 1. Realizar un aporte en el campo de la teoría APOS a través de una propuesta de descomposición genética de la función exponencial

En el capítulo uno, como resultado de un desarrollo de indagación y síntesis, se presentó una propuesta de descomposición genética de la función exponencial, sección 1.4. Para ello en la sección 1.3.4 se realizó una revisión y se presentaron los resultados relevantes de las investigaciones en educación matemática (sintetizados en la tabla E) concerniente a las construcciones mentales que los estudiantes deben desarrollar para adquirir el concepto de funciones exponenciales.

Nuestra propuesta de descomposición genética de la función exponencial cumplió su objetivo en este estudio; ser soporte para el análisis de la práctica del docente al considerar los mecanismos de construcción que el profesor modela en la enseñanza de dichas funciones. La estructura descriptiva, de la descomposición genética de este concepto, que se obtuvo (sección 1.4) fue uno de los referentes en el análisis de la práctica de docentes de precálculo, a través de la modelación de la descomposición genética de la función exponencial en el estudio de dos casos.

Esta propuesta, de descomposición genética de la función exponencial fue presentada a la comunidad académica en la décimo segunda Conferencia de Educación Matemática CIAEM y publicada en las memorias del evento bajo el título *Descomposición Genética de la Función Exponencial y mecanismos de construcción* (Vargas *et al.*, 2011b). También se presentó la revisión de los resultados de investigaciones sobre la enseñanza de la función exponencial, mediante una conferencia en el Noveno Encuentro de la Sociedad Colombiana de Educación Matemática ASOCOLME, en Valledupar, Colombia, publicada en las memorias del evento como *Función Exponencial. Resultados de investigación al servicio de la planeación y gestión en el aula* (Vargas y Pérez, 2008).

Nuestra propuesta de descomposición genética también incluye una mirada histórica-epistemológica del concepto, asociada al segundo objetivo de la investigación que especificaremos a continuación.

OBJETIVO 2. Revisar el desarrollo histórico–epistemológico de los conceptos exponente, logaritmo, funciones logarítmicas y funciones exponenciales

Con la revisión del desarrollo histórico epistemológico que se presenta en la memoria de la tesis se cumplió el objetivo de tener una fuente adicional de información. En el caso de la función exponencial se identificaron cinco etapas de la evolución del concepto (Tabla D) que nos permitió tomar decisiones en nuestro planteamiento de descomposición genética de la función exponencial (1.3.4) y se consolidó como un aporte a la comunidad de educadores a través de publicaciones y conferencias.

Los resultados de la revisión del desarrollo histórico epistemológico del concepto de logaritmo y la función logarítmica son sintetizados en la sección (1.3.2) y fueron publicados en el artículo Segmentos de la Historia: La función logarítmica (González y Vargas, 2007) (Apéndice A). Sobre esta revisión se presentó una Conferencia Plenaria en el marco del Octavo encuentro de matemática educativa bajo el título *Desarrollo histórico del concepto de función logarítmica* publicado en las memorias del evento. Alrededor de los referentes históricos del desarrollo de la función exponencial se participó con la conferencia *Historia de la Función exponencial en un Proceso de elaboración de descomposición genética* (Vargas, *et al.*, 2010) en la Tercera Escuela Nacional de Historia y Educación Matemática ENHEM. Universidad del Valle.

De esta manera, juzgamos que nuestro estudio realizó un aporte importante al grupo de investigación existente sobre el desarrollo histórico de los conceptos y a la comunidad de profesores e investigadores en Educación Matemática, a través de diversos eventos especializados.

OBJETIVO 3. Describir y analizar la gestión de las actividades docentes, a través del estudio de dos casos mediante la herramienta teórica de la modelación de la descomposición genética del concepto funciones exponenciales

Según Camacho (2011), el estudio de los problemas de enseñanza y aprendizaje en conceptos tales como límite, derivada, integral, han sido suficientemente estudiados y debemos pensar en abrir nuevos campos de investigación con nuevos enfoques, de tal manera que consideramos que nuestro estudio al abordar el contenido de las funciones exponenciales nos permite obtener y presentar nuevos resultados.

El capítulo tres de esta memoria, contiene descripción, análisis y resultados de nuestra investigación. Allí, se presenta una descripción pormenorizada de la modelación de cada uno de los mecanismos de construcción de cada profesor. Esta descripción y análisis se presenta a través del diseño de viñetas en la sección 3.1 para el caso de Ernesto y 3.3 en el caso de Arturo.

En ese capítulo se muestra cómo Ernesto modela los mecanismos de construcción que permiten crear los contextos para fomentar las formas de conocer en el orden: acción – proceso – objeto, finalizando con la tematización del esquema de la función exponencial. Por otra parte, se establece que la modelación de Arturo favorece las formas de conocer siguiendo la secuencia objeto – proceso – acción.

Los resultados, en cuanto a este tercer objetivo de nuestro estudio se presentan de forma conjunta al finalizar todas las viñetas. En el caso de Ernesto el Cuadro C esboza la relación del orden de la modelación de los mecanismos de construcción y la relación entre la modelación de los mecanismos de construcción con los elementos matemáticos que configuran la Modelación de la descomposición genética. En el caso de Arturo se hace de la misma manera en el cuadro D.

El análisis de la modelación de la descomposición genética de la función exponencial y algunos de los resultados han sido presentados en eventos académicos como en el grupo de Didáctica del Análisis durante el XIV Simposio de la SEIEM, *Atlas.ti como herramienta de análisis de la práctica docente: el caso de la función exponencial* (Vargas *et al*., 2011a), publicado en las comunicaciones de los Grupos de Investigación. Se realizó una Conferencia titulada *"Una experiencia de investigación: analizando la práctica del docente desde la modelación de la descomposición genética en la enseñanza de las funciones exponenciales"* (Vargas, 2010) para estudiantes de Maestría en docencia de la matemática de la Universidad Pedagógica

Nacional de Bogotá; la conferencia *"Una experiencia de Investigación. Analizando la práctica del docente"* que se impartió a los estudiantes del Doctorado en Didáctica de la Matemática en la Universidade da Beira Interior (Vargas *et al*., 2012a). También, fue presentada en el X Encuentro Nacional de Educación Matemática y Estadística una Conferencia Plenaria, publicada en las memorias del evento titulada *Atlas.ti y una descomposición genética como herramientas de análisis de la práctica docente: La función exponencial* (Vargas, 2011).

Finalmente, precisamos que, esta investigación, al igual que los estudios de Tzur *et al.* (2001) y Gavilán (2005), trató que los datos nos dieran evidencias de cómo el profesor trabaja para promover el aprendizaje de un contenido específico matemático. Mediante el análisis de los datos se obtuvo *«prueba de existencia»* (Schoenfeld, 2000) de unas determinadas características de la práctica profesional de docentes universitarios de precálculo, acerca de la enseñanza de la función exponencial, campo en el que no se ha realizado ninguna investigación previa.

Esta *«prueba de existencia»* de diferentes perspectivas que fundamentan las prácticas nos permite sugerir, atendiendo a Franke *et al*. (2007), algunas *«rutinas centrales»* para las prácticas de los docentes de precálculo. Las características y tópicos que constituyen estas rutinas son las tareas de iteración, interés compuesto, número *e* y razón de cambio promedio que son tratadas en un aula de clase mediante un diálogo, profesor-estudiantes. Este diálogo es el que en algunos casos intenta favorecer la elaboración de conjeturas (descripción detallada en las viñetas de iteración, dobleces de papel y comparación entre las funciones lineal, cuadrática y exponencial) en la secuencia de enseñanza de la función exponencial.

OBJETIVO 4. Plantear la perspectiva que subyace a la práctica de los docentes a través de la caracterización de su concepción sobre cómo se conciben las matemáticas escolares y cómo se produce el aprendizaje de conceptos matemáticos.

Esta investigación se ha realizado en el nivel Universitario, en el cual la investigación es escasa (Moreno, 2011). Además, al examinar la perspectiva que subyace a la práctica de los docentes universitarios cuando enseñan la función exponencial a nivel de precálculo, se pretende comprender la actuación del profesor a la luz de las concepciones de los profesores (Thompson, 1992) aunque sean difíciles de estudiar, puesto que son normalmente; subconscientes y bastante huidizas (da Ponte y Chapman, 2006).

En esa línea de ideas, como resultado de nuestro análisis de la práctica de los profesores Ernesto y Arturo, podemos afirmar que a través de las fases de planificación y gestión ellos modelaron una descomposición genética de la función exponencial que nos permitió evidenciar aspectos constructivos y justificaciones en el uso de los elementos matemáticos del concepto y los instrumentos; discurso, tareas, representaciones, que permiten inferir características que subyacen a su práctica.

Concluimos (sección 3.2) que la práctica de Ernesto puede interpretarse sobre una perspectiva holística e identificamos una perspectiva de la práctica tradicional en el caso de Arturo (sección 3.4).

Concretamos la forma de abordar la perspectiva de la práctica de los docentes universitarios de precálculo, a través de nuestra participación con una exposición; por medio del taller *La enseñanza de la función exponencial en precálculo: una estrategia para el análisis de la práctica* (Vargas *et al*., 2012b) que presentamos en un encuentro del grupo de investigación de Didáctica del Análisis SEIEM celebrado en febrero de 2012 y de manera similar en marzo de 2012 en el encuentro del Grupo de investigación de Conocimiento y Desarrollo Profesional del Profesorado de Matemáticas SEIEM, en la Universidad de Huelva se presentó la comunicación *Análisis de la práctica: estudios de caso en la función exponencial* (Vargas, *et al.*, 2012c).

Con la discusión de los resultados expuesta en este capítulo creemos haber mostrado elementos para poder afirmar que hemos dado respuesta a las preguntas de nuestra investigación, pues describimos y analizamos la modelación de los mecanismos de construcción, junto con la perspectiva que subyace a la práctica profesional, a través de estudios de caso de la práctica de los profesores de precálculo en la enseñanza de la función exponencial para la educación universitaria, en Bogotá (Colombia). Se han cumplido cada uno de los objetivos pues ellos se constituyeron en peldaños para dar soluciones a las preguntas planteadas.

4.3. IMPLICACIONES PARA FUTURAS INVESTIGACIONES Y PARA LA ENSEÑANZA

Este trabajo nos ha permitido avanzar en la comprensión de las prácticas docentes de profesores Universitarios para la enseñanza de un concepto específico de precálculo. A continuación indicamos algunas posibles implicaciones que surgen a partir de los resultados del estudio, las cuales hemos clasificado en futuras investigaciones e implicaciones para la enseñanza.

4.3.1. Futuras investigaciones

Para ampliar y profundizar el estudio que presentamos sobre la práctica en la enseñanza de las funciones exponenciales, sugerimos algunas futuras investigaciones:

a. Investigaciones que a partir de nuestros resultados y los planteamientos de Franke *et al.* (2007), se encaminen y a indagar «*rutinas de práctica*» (en la enseñanza universitaria de precálculo) y estudiar cómo las tres características de la práctica del aula; el discurso, las normas y las relaciones construidas, funcionan juntas en dichas rutinas.

b. Investigaciones encaminadas a estudiar el conocimiento que tiene el profesor del estudiante de precálculo; sus concepciones, creencias, errores y dificultades a partir de preguntas específicas sobre la comprensión de la función exponencial, explicarlas y cómo se pueden utilizar para corregir las respuestas inapropiadas de estos.

c. Estudios que enriquezcan la propuesta de descomposición genética de la función exponencial.

d. Estudios que generen propuestas de la descomposición genética de la función exponencial, incorporando la derivada e integral de esta función, utilizando la observación de las clases durante la enseñanza y aprendizaje de la función exponencial. Esto nos permitirá ampliar, profundizar y comprender más sobre los caminos en la comprensión de las funciones exponenciales.

e. Elaborar y usar una descomposición genética de la función logarítmica ya sea para realizar estudios sobre las prácticas docentes o bien para realizar propuestas de enseñanza y aprendizaje de dichas funciones.

f. Investigaciones del análisis de la práctica de los docentes de precálculo en la enseñanza de la función logarítmica, cuyos planteamientos puedan aprovechar los resultados que están reportados en nuestro estudio.

g. Análisis longitudinal de la enseñanza de la función exponencial en precálculo, en cálculo diferencial, cálculo integral y ecuaciones diferenciales.

h. Estudios que, a partir de nuestros resultados, planteen hipótesis y establezcan investigaciones cuantitativas a gran escala sobre la enseñanza de la función exponencial en precálculo.

i. Estudios longitudinales de transformación de concepciones de los docentes, sobre la enseñanza, el aprendizaje y la comprensión de las matemáticas escolares, haciendo uso de las modelaciones de la descomposición genética.

4.3.2. Enseñanza de la función exponencial

El examen y discusión de los resultados obtenidos en esta investigación nos permitió reflexionar sobre las implicaciones de dicho estudio, que al ser un análisis de la práctica, aporta configuraciones de las formas de construcción de un concepto y otras maneras de acercarse a la enseñanza no solo como investigadores sino como profesores y formadores de profesores. Así, presentamos las siguientes extensiones:

Primero: dados los grandes desafíos que se plantean en la enseñanza de la matemática a nivel universitario, el estudio e implementación de los resultados de esta investigación para la formación de profesores muestra la existencia de profesores, que tienen distintas maneras de planificar sus clases y de potenciar la comprensión de un concepto, en cada una de las que subyace una perspectiva sobre su práctica. Es decir, el conocimiento de que no todo es unívoco; para un mismo concepto, hay distintas formas de modelar las acciones de construcción del concepto, por ello también puede ser que para cada caso, se deba intervenir sobre un mismo aspecto, como lo es, la perspectiva de la práctica, que a su vez demandaría diversidad en la intervención.

Si hay formas distintas de potenciar la construcción de un concepto se deben crear entornos para que los profesores puedan discutir estas particularidades lo que implica que deben existir formas distintas de abordar la formación de los profesores, lo cuál debe repercutir en el diseño de los cursos de formación.

Segundo, en la investigación aportamos una descomposición genética de la función exponencial y dos modelaciones de descomposición genética de este concepto, que pueden ser usadas para la elaboración de material didáctico que enriquezca el trabajo de los estudiantes de precálculo, y que puede servir como reflexión y programación de cursos para la formación de profesores.

Como consideración final, el estudio que se presenta en esta tesis nos proporciona una comprensión de la práctica del profesor sobre la función exponencial con particular atención al uso de los instrumentos de la práctica. Aunque nos permite realizar un aporte en cuanto a la práctica de la enseñanza a nivel universitario, más concretamente, atendiendo a Franke *et al.* (2007), nos faculta a sugerir algunas «*rutinas centrales*» para las prácticas de los docentes de precálculo, cuyas características y tópicos son las tareas de iteración, interés compuesto y razón de cambio promedio, desarrolladas en un aula de clase en la cual el profesor propicie el diálogo, profesor-estudiantes, caracterizado por preguntas que favorezcan la elaboración de conjeturas y justificaciones, en la secuencia de enseñanza de la función exponencial.

Referencias

Adler, J. (1995). Participatory inquiry pedagogy, communicative competence and mathematical knowledge in a multilingual classroom: A vignette. En L. Meira y D. Carraher (Eds.), *Proceedings of the 19th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 3, pp. 208-215). Recife, Brasil: Universidade Federal de Pernambuco.

Adler, J. (2000). Conceptualising resources as a theme for teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education, 3*(3), 205-224

Adler, J., Ball, D., Krainer, K., Lin, F. L. y Novotna, J. (2005). Reflections on an emerging field: Researching mathematics teacher education. *Educational Studies in Mathematics*, *60*(3), 359-381.

Andelfinger, B. (1981). Provocative texts and spontaneous reactions of teachers: A method for recognizing teaching and learning of mathematics. En Equipe de Recherche Pédagogique (Eds.), *Proceedings of the 5th PME International Conference*, (vol. 1, pp. 381-386). Grenoble, Francia.

Anghileri, J. (2002). Scaffolding practices that enhance mathematics learning. En A. Cockburn y E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 49-56). Norwich, UK: University of East-Anglia.

Artigue, M.; Batanero, C. y Kent, Ph. (2007). Mathematics Thinking and Learning at Post-Secondary Level. En F. K. Lester (Ed.) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 1011-1049). NCTM-IAP: Reston, VA- Charlotte, NC

Asiala, M., Brown, A., Devries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. *Research in Collegiate Mathematics Education*, 1, 1-32.

Azcárate, C. (2000). El precálculo, un eslabón necesario entre las funciones y el análisis. *Números*, 43-44, 259-262.

Baker, B., Hemenway, C. y Trigueros, M. (2001). On transformations of basic functions. En H. Chick, K. Stacey, J. Vincent y J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference: The future of the teaching and learning of algebra* (vol. 1, 41-47). Melbourne, Australia: University of Melbourne.

Barbosa, K. (2003). La enseñanza de inecuaciones desde el punto de vista de la teoría APOE. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa, 6*(3), 199-219.

Barkai, R., Tsamir, P., Tirosh, D., & Dreyfus, T. (2002). Proving or refuting arithmetic claims: The case of elementary school teachers. En A.D. Cokburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th PME International Conference, 2*, 57-64. Norwich.

Bernal, G. y Lleras, G. (1995). Algunos factores relevantes en el desempeño académico en matemáticas de estudiantes de primer semestre de la E.C.I. *Revista EMA*, *1*(1), 28-33.

Boaler, J. (2003). Studying and capturing the complexity of practice: The case of the dance of agency. En N. A. Pateman, B. J. Dougherty y J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education held jointly with the 25th Conference of PME-NA* (vol. 1, pp. 3-16). Honolulu: University of Hawai.

Boigues, F. J. (2010). El desarrollo de un esquema sobre la integral definida en universitarios de ingeniería y medio ambiente. Tesis doctoral no publicada, Universidad de Alicante, España.

Boyer, C. (2003). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Editorial.

Braconne, A., & Dionne, J.J. (1987). Secondary school students' and teachers' understanding of demonstration in geometry. En J. Bergeron, N. Herscovics & C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the 11th PME International Conference*, (vol. 3, pp. 109-116). Montreal, Canada.

Bradie, B. (1998). Rate of change of exponential functions: A precalculus perspective. *Mathematics Teacher*, *91*(3), 224-237.

Bright, G.W., Bowman, A.H., & Vacc, N.N. (1997). Teachers' frameworks for understanding children's mathematical thinking. En H. Pekhonen (Ed.), *Proceedings of the 21st PME International Conference*, (vol. 2, pp. 105-112). Lahti, Finlandia.

Brissiaud, R., Moreau, J.P., Perrot, G., Valentin, D., & Vaudy, J. (1982). Representation des problèmes par le maître et par l'élève a l'école elementaire. En A. Vermandel (Ed.), *Proceedings of the 6th PME International Conference*, (vol. 2, pp. 84-90). Antwerpen, Bélgica.

Camacho, M. (2011). Investigación en didáctica de las matemáticas en el bachillerato y primeros cursos de universidad. En M. Marín, G. Fernández, L. J. Blanco y M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 195 – 226). Ciudad Real, España: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática & Servicio de publicaciones de la Universidad de Castilla-La Mancha.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. y Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco conceptual y un estudio. *Revista EMA*, *8*(2), 121-156. Traducido del inglés por Patricia Perry y Hernando Alfonso.

Carrillo, J. (1998). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la Matemática y su enseñanza: metodología de la investigación y relaciones*. Huelva: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Huelva.

Chapman, O. (2004). Facilitating peer interactions in learning mathematics: Teachers' practical knowledge. En M.J. Hoines & A.B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th PME International Conference*, (vol. 2, pp. 191-198). Gergen, Noruega.

Chazan, D., Larriva, C., & Sandow, D. (1999). What kind of mathematical knowledge supports teaching for "conceptual understanding"? Preservice teachers and the solving of equations. En O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd PME International Conference*, (vol. 2, pp.193-200). Haifa, Israel.

Chica, A. (2001). *Descartes Geometría y método*. Madrid: Nivola.

Codes, M. (2010). *Análisis de la comprensión de los conceptos de serie numérica y su convergencia en estudiantes de primer curso de universidad utilizando un entorno computacional*. Tesis doctoral no publicada, Universidad de Salamanca, España.

Colerus, E. (1972). *Breve historia de las matemáticas*. Madrid. Editorial Alianza.

Colestock, A. (2009). A case study of one secondary mathematics teacher's in-the-moment noticing of student thinking while teaching. En S. L. Swars, D. W. Stinson y S. Lemons-Smith (Eds.), *Proceedings of the 31st Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 5, pp. 1459-1466). Atlanta, USA: Georgia State University.

Colestock, A. y Sherin, M. (2009). Teachers' sense-making strategies while watching video of mathematics instruction. *Journal of Technology and Teacher Education*, *17*(1), 7-29.

Confrey, J. y Smith, E. (1991). A framework for functions: Prototypes, multiple representations, and transformations. En R. Underhill y C. Brown (Eds.), Proceedings of the 13th *Annual Meeting* of the *North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 57-63). Blacksburg, USA: Virginia Polytechnic Institute y State University.

Confrey, J. y Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics*, *26*(2, 3), 135-164.

Confrey, J. y Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(1), 66-86.

Contreras, L. y Carrillo, J. (1995). Un modelo de categorías e indicadores para el análisis de las concepciones del profesor sobre la matemática y su enseñanza. *Educación de Matemática, 7* (3), 26-37.

Cordero, F. y Miranda, E. (2002). El entendimiento de la transformada de Laplace: Una epistemología como base de una descomposición genética. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *5*(2), 133-168.

da Ponte, J. P. y Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 461-494). Rotterdam, the Netherlands: Sense Publishers.

Dahlof, U. y Lundgren, U. P. (1970). *Macro and micro approaches combined for curriculum process analysis: A Swedish educational field proyect*. Gutemburgo: Universidad de Gutemburgo.

Dennis, D. y Confrey, J. (1996). The creation of continuous exponents: A study of the methods and epistemology of John Wallis. En J. Kaput y E. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education II* (vol. 6, pp.33-60).Providence, American Mathematical Society.

Díaz, V. (2006). *Concepciones que estudiantes de nivel superior tienen acerca del significado de potencia con exponente numérico irracional. Un estudio de caso.* Tesis de maestría no publicada, Universidad Autónoma de Guerrero, México.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática*, *8*(3), 24-41.

Dubinsky, E. (2000). De la investigación en matemática teórica a la investigación en matemática educativa: un viaje personal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Educación Matemática, 3*(1), 47-70.

Dubinsky, E. y Lewin, P. (1992). Reflexive abstraction in mathematics education: The genetic decomposition of induction and compactness. *Journal of Mathematical Behavior,* 5, 55-92.

Dubinsky, E. y Mcdonald, M. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergrad mathematics education research. En D. Holton (Ed.), *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI Study* (pp. 273-280). New York: Kluwer Academic Publishers.

Edwards, C. H. (1979). *The historical development of the calculus*. New York: Springer.

Elbaz, F. (1983). *Teacher thinking: A study of practical knowledge*. London: Croom Helm.

Elstak, I. (2007). *College students' understanding of rational exponents: A teaching*. Tesis doctoral no publicada, The Ohio State University, USA.

Ernest, P. (1988). The impact of beliefs on the teaching of mathematics. En A. Hirst y K. Hirst (Eds.), *Proceedings of the Sixth International Congress on Mathematical Education* (pp. 249-254). Budapest, Hungría: János Bolyai Mathematical Society.

Escudero, I. y Sánchez, V. (1999a). The relationship between professional knowledge and teaching practice: The case of similarity. En O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 305-312). Haifa, Israel: Israel Institute of Technology.

Escudero, I. y Sánchez, V. (1999b). Una aproximación al conocimiento profesional del profesor de Matemáticas en la práctica: la semejanza como objeto de enseñanza aprendizaje. *Quadrante. Revista Teórica e de Investigação,* 8, 85-110.

Escudero, I. y Sánchez, V. (2002). Integration of domains of knowledge in mathematics teachers' practice. En **A.** Cockburn y E. Nardi (Eds.) *Proceedings of the 26th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 177-184). Norwich, UK: University of East-Anglia.

Escudero, I. y Sánchez, V. (2007). How do domains of knowledge integrate into mathematics teachers' practice? *Journal of Mathematical Behavior*, *26*(4), 312-327.

Escudero, I. y Sánchez, V. (2008). A mathematics teachers' perspective and its relationship to practice. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *6*(1), 87-106.

Espinoza, L. y Azcarate, C. (2000). Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto "limite de función". Una propuesta metodológica para el análisis. *Enseñanza de las Ciencias*, *18*(3), pp.355-368.

Euler, L. (1748). *Introductio in analysin infinitorum.* Lausanne: Marcum Michaelem Bousquet y socios. Edición facsímil editada por SAEM: Thales y la Real Sociedad Matemática española.

Even, R. (1990). The two faces of the inverse function: Prospective teachers' use of undoing. En G. Booker, P. Cobb & T. Mendicuti (Eds), *Proceedings of the 14th PME International Conference,* (vol. ***1***, pp. 37-44). Oaxtepex, México.

Even, R. y Schwarz, B. B. (2002). Implications of competing interpretations of practice to research and theory in mathematics education. En **A.** Cockburn y E. Nardi (Eds.) *Proceedings of the 26th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 337-344). Norwich, UK: University of East-Anglia.

Even, R., & Markovits, Z. (1991). Teachers' pedagogical knowledge: The case of functions. En F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the 15th PME International Conference*, (vol. 2, pp. 40-47). Assisi, Italia.

Farias, L. y Montero, M. (2005). De la transcripción y otros aspectos artesanales de la investigación cualitativa. *International Journal of Qualitative Methods, 4*(1), 7.

Ferrara, F., Pratt, D. y Robutti, O. (2006). En A. Gutiérrez y Boero, P. (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education. Past, present and future* (pp. 237-273). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Franke, M. L., Kazemi, E. y Battey, D. (2007). Understanding teaching and classroom practice in mathematics. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 225-256). Charlotte, USA: IAP-NCTM.

Gage, N. L. (1975). *National Conference on Studies in teaching*. Panel 6. Teaching as Clinical Information processing

Gal, H. (1998). What do they really think? What students think about the median and bisector of an angle in the triangle, what they say and what their teachers know about it. En A. Olivier & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd PME International Conference,* (vol. 2, pp. 321-328). Stellenbosh, Sur Africa.

Gal, H., & Vinner, S. (1997). Perpendicular lines: What is the problem? Pre-service teachers lack of knowledge on how to cope with students' difficulties. En H. Pekhonen (Ed.), *Proceedings of the 21st PME International Conference,* (vol. 2, pp. 281-288). Lahti, Finland.

García, M., Gavilán, J. M. y Llinares, S. (en prensa). Perspectiva de la práctica del profesor de matemáticas de secundaria sobre la enseñanza de la derivada. Relaciones entre la práctica y la perspectiva del profesor. *Enseñanza de las Ciencias*.

Gavilán, J. M. (2005). *El papel del profesor en la enseñanza de la derivada. Análisis desde una perspectiva cognitiva*. Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Sevilla. Publicada en 2010 por Edición Digital @tres, S.L.L

Gavilán, J. M., García, M. y Llinares, S. (2007a). La modelación de la descomposición genética de una noción matemática. Explicando la práctica del profesor desde el punto de vista del aprendizaje potencial de los estudiantes. *Educación matemática, 19*(2), 5-39.

Gavilán, J. M., García, M. y Llinares, S. (2007b). Una perspectiva para el análisis de la práctica del profesor de matemáticas. Implicaciones metodológicas. *Enseñanza de las Ciencias*. *25*(2), 157-170.

Gómez, C. y Valero, P. (1995). Calculadoras Gráficas y Precálculo: El impacto en las creencias del profesor. En Una empresa docente. Universidad de los Antes. Bogotá. Colombia. 141- 161.

Gómez, P. y Carulla, C. (1998). Calculadoras gráficas y precálculo: ¿el imperio de lo gráfico? En I. UCV (Ed.), *Memorias - III Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (p. 710). Caracas: UCV.

Gómez, P. y Mesa, V. (1996). *Situaciones problemáticas de precálculo. El estudio de funciones a través de la exploración con calculadoras gráficas*. Bogotá, Colombia: una empresa docente.

González, M. T. (2002). Sistemas simbólicos de representación en la enseñanza del Análisis Matemático: Perspectiva histórica acerca de los puntos críticos. Tesis doctoral no publicada, Universidad de Salamanca, España.

González, M. T. y Vargas, J. (2007). Segmentos de la historia: la función logarítmica. *Matemática: Enseñanza Universitaria, 15*(2), 129-144.

González, P. (1992). Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo VII. Alianza Editorial, Madrid.

González, P. (2001). *Pitágoras. El filósofo del número*, 9. Madrid: Nivola.

Goos, M. (2004). Learning mathematics in a classroom community of inquiry. *Journal for Research in Mathematics Education*, *35*(4), 258-291.

Greer, B. y Mangan, C. (1986). Choice of operations: From 10-year-olds to student teachers. En Univ. of London Inst. of Educ. (Eds.), *Proceedings of the 10th PME International Conference*, (vol.1, pp. 25-30). Londes, Inglaterra.

Guardián-Fernández, A. (2007). *El paradigma cualitativo de la investigación socio-educativa*. Costa Rica: EUCR.

Gueudet, G. y Trouche, L. (2009). Towards new documentation systems for mathematics teachers? *Educational Studies in Mathematics*, *71*(3), 199-218.

Gutiérrez, A. y Boero, P. (Eds.) (2006). *Handbook of research on the psychology of mathematics education. Past, present and future.* Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Hansson, O. (2005). Preservice teachers' view on y = x + 5 and y = x^2 expressed through the utilization of concept maps: A study of the concept of function. En H.L. Chick & J.L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th PME International Conference,* (vol. 3, pp. 97-104).

Harel, G. y Dubinsky, E. (1991). The development of the concept of function by preservice secondary teachers: From action conception to process conception. En F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the15th PME International Conference*, (vol. 2, pp. 133-140). Assisi, Italia.

Harel, G. y Dubinsky, E. (Eds.) (1992). *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*. Washington, USA: Mathematical Association of America.

Harel, G., Selden, A. y Selden J. (2006). Advanced mathematical thinking. Some PME perspectives. En A. Gutiérrez y Boero, P. (Eds.) *Handbook of research on the* psychology of mathematics education. Past, present and future (pp. 147-172). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Hernández, M. y Arrieta, J. (2005). Las prácticas sociales de modelación y la emergencia de lo exponencial. En J. Lezama, M. Sánchez y J. G. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 18 (pp. 537-542). México: CLAME A.C.

Hersant, M. y Perrin-Glorian, M. J. (2005). Characterization of an ordinary teaching practice with the help of the Theory of Didactics Situations. *Educational Studies in Mathematics*, *59*(1-3), 113-151.

Hershkowitz , R. y Vinner, S. (1984). Children's concepts in elementary geometry. A reflection of teacher's concepts? En B. Southwell (Eds.), *Proceedings of the 8th PME International Conference,* (pp. 63-69). Sidney, Australia.

Hoyles, C. (1992). Mathematics teaching and mathematics teachers: A meta-case study. *For the Learning of Mathematics, 12*(3): 32-44.

Jackson, Ph. W. (1968). *La vida en las aulas*. Madrid, España: Morata.

Jacobs, V., Lamb, L., Philipp, R., Schappelle, B. y Burke, A. (2007*).* Professional noticing by elementary school teachers of mathematics. En A. Ellis (coordinador), Missing links in the implementation of mathematics education reforms: “Attention-focusing” and “noticing” de Annual Meeting of the American Educational Research Association, Chicago, IL.

Khisty, L. L. (2001). Effective teachers of second language learners in mathematics. En M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* (vol. 3, pp. 225-232). Utrecht, The Netherlands: Universidad de Utrecht.

Klein, R., y Tirosh, D. (1997). Teachers’ pedagogical content knowledge of multiplication and division of rational numbers. En H. Pekhonen (Ed.), *Proceedings of the 21st PME International Conference*, (vol. 3, pp. 144-152). Lahti, Finlandia.

Kline, M. (1990). *Mathematical thought from ancient to modern times* (vol. 1). New York, USA: Oxford University Press.

Koelher, M. y Grouws, D. (1992). Mathematics teaching practices and their effects. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of research of mathematics teaching and learning* (pp. 115-126). Nueva York, USA: Mac Millan.

Kú, D., Trigueros, M. y Oktaç, A. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE. *Educación Matemática, 20*(2), 65-89.

Kuhs, T. M. y Ball, D. L. (1986). *Approaches to teaching mathematics: Mapping the domains of knowledge, skills, and dispositions*. Informe de investigación no publicado, Michigan State University & National Center for Research on Teacher Education, East Lansing, USA. Recuperado 3 de octubre de 2012 de: http://staff.lib.msu.edu/corby/education/Approaches_to_Teaching_Mathematics.pdf

Laborde, C. y Perrin-Glorian, M. J. (2005). Introduction: Teaching situations as object of research: Empirical studies within theoretical perspectives. *Educational Studies in Mathematics, 59*(1-3), 1-12.

Lage, A. E. y Trigueros, M. (2006). An analysis of students’ ideas about transformations of functions. En S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz y A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* 2 (23 - 29). Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional.

Lave, J., y Wenger, E. (1991). *Situated learning. Legitimate Peripherals participation*. Cambridge: University Press.

Leinhardt, G., McCarthy Young, K. y Merriman, J. (1995). Commentary: Integrating professional knowledge: The theory of practice and the practice of theory. *Learning and Instruction*, 5, 401-408.

Lerman, S. (1983). Problem solving or knowledge centred: The influence of philosophy on mathematics teaching. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 14*(1), 59-66.

Lerman, S. (1996). Socio-cultural approaches to mathematics teaching and learning. *Educational Studies in Mathematics, 31*(1-2), 1-9.

Lezama, J. (1999). *Un estudio de reproducibilidad: El caso de la función exponencial*. Tesis de maestría no publicada, Cinvestav, México.

Lezama, J. (2003). Un estudio de reproducibilidad de situaciones didácticas”. Tesis doctoral no publicada, Cinvestav, México.

Linchevsky, L. y Vinner, S. (1989). Canonical representations of fractions as cognitive obstacles in elementary teachers. En G. Vergnaud, J. Rogalski & M. Artigue (Eds.), *Proceedings of the 13th PME. International Conference*, (vol. *2*, pp. 242-249). Paris, Francia.

Llinares, S. (1998). La investigación "sobre" el profesor de matemáticas: aprendizaje del profesor y práctica profesional. *AULA. Revista de Enseñanza e Investigación Educativa*, 10, 153-179.

Llinares, S. (2000). Comprendiendo la práctica del profesor de matemáticas. En J. P. da Ponte y L. Sarrazina (Eds.), *Educaçao Matemática em Portugal, Espanha e Italia Lisboa. Actas da Escola de Verao-1999* (pp. 109-132). Lisboa, Portugal: SEM-SPCE.

Llinares, S. (2002). La práctica de enseñar y aprender a enseñar matemáticas. La generación y uso de instrumentos de la práctica. *Revista de Enseñanza Universitaria*, 19, 115-124.

Llinares, S. (2008). Agendas de investigación en educación matemática en España. Una aproximación desde "ISI-web of knowledge" y ERIH. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho, y L. Blanco (Eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 25-54). Badajoz, España: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Llinares, S. y Sánchez, M.V. (1991). The knowledge about unity in fractions tasks of prospective elementary teachers. En F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the 15th PME International Conference*, (vol. 2, pp. 334-341). Assisi, Italia.

Mariotti, M. A. (2000). Introduction to proof: The mediation of a dynamic software environment. *Educational Studies in Mathematics*, *44*(1-3): 25-53.

Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in Mathematics Education. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education*: Past, present and future (pp. 173-204). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Martínez, G. (2000). Hacia una explicación sistémica de los fenómenos didácticos. El caso de las convenciones en el tratamiento de los exponentes no naturales. Tesis de maestría no publicada, Cinvestav, México.

Martínez, G. (2003). Caracterización de la convención matemática como mecanismo de construcción de conocimiento. El caso de su funcionamiento en los exponentes. Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada de IPN, CICATA-IPN, México.

Mason, J. (2002). *Researching your own practice: The discipline of noticing*. London: Routledge.

Mastorides, E. y Zachariades, T. (2004). Secondary mathematics teachers' knowledge concerning the concept of limit and continuity. En M.J. HØines & A.B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th PME International Conference*, *4*, 481-488.

Medley, D. (1979). The effectiveness of teachers. En P. Peterson y H. Walberg (Eds.), *Research on teaching: Concepts, findings and implications* (11 - 27). Berkeley, California: McCutchan.

Meira, L. (1998). Making sense of instructional devices: The emergence of transparency in mathematical activity. *Journal for Research in Mathematics Education*, *29*(2), 121-142.

Mesa, V. M. y Gómez, P. (1996). Graphing calculators and precalculus: An exploration of some aspects of students' understanding. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 3, pp. 391-399). Valencia, España: Universidad de Valencia.

Millán, A. (2004). *Euclides: La fuerza del razonamiento matemático*. Madrid, España: Nivola Libros y Ediciones, S.L.

Moreno, M. M. (2011). Introducción al Seminario II sobre investigación en didáctica de las matemáticas por niveles educativos. En M. Marín, G. Fernández, L. Blanco y M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 119-123). Ciudad Real, España: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática & Servicio de publicaciones de la Universidad de Castilla-La Mancha.

Perafán, G. (2002). La investigación acerca de los procesos de pensamiento de los docentes. En G. Perafán y A. Aduriz (Eds.). *Pensamiento y conocimiento de los profesores: debate y perspectivas* (pp. 11-27). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional y Colciencias.

Philipp, R. A. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (vol. 1, pp. 257-315). Charlotte, USA: Information Age Publishing.

Philippou, G., & Christou, C. (1994). Prospective elementary teachers' conceptual and procedural knowledge of fractions. En J.P. Ponte & J.F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th PME International Conference*, (vol. 4, pp. 33-40). Lisboa, Portugal.

Piaget, J. (1963). L*as estructuras matemáticas y las estructuras operatorias de la inteligencia, en la colección Psicología y Educación. La enseñanza de las matemáticas*. Madrid, España: Aguilar.

Piaget, J. (1977). *Recherches sur l'abstraction réfléchissante. La abstracción de las relaciones lógico-aritméticas*. Buenos Aires, Argentina: Paidós.

Pinto, J. (2010). *Conocimiento didáctico del contenido pedagógico sobre la representación de datos estadísticos: Estudios de casos con profesores de estadística en carreras de psicología y educación*. Tesis doctoral no publicada, Universidad de Salamanca, España.

Pinto, M. y Tall, D. (1996). Student teachers' conceptions of the rational number. En L. Puig & A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME International Conference*, (vol.4, pp, 139-146). Valencia, España.

Ponte, J.P. (1985). Geometrical and numerical strategies in students' functional reasoning. En L. Streefland (Ed.), *Proceedings of the 9th PME International Conference*, (vol.1, pp. 413-418). Noordwijkerhout. Netherlands

Ponte, J.P. (1994). Mathematics teachers' professional knowledge. En J.P. Ponte & J.F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th PME International Conference*, (vol.1, pp. 195-210). Lisboa, Portugal.

Presmeg, N. y Nenduradu, R. (2005). An investigation of a preservice teacher's use of representations in solving algebraic problems involving exponential relationships. En H.L. Chick & J.L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th PME International Conference*, (vol. 4, pp.105-112).

Rees, R. (1982). The teacher and diagnosis: Too much Piaget? En A. Vermandel (Ed.). *Proceedings of the 6th PME International Conference*, (vol. 2, pp. 91-96). Antwerpen, Bélgica.

Ribnikov, K. (1991). *Historia de las matemáticas*. Moscú, Rusia: Mir.

Rizzuti, J. (1991). *High school students' uses of multiple representations in the conceptualization of linear and exponential functions.* Tesis doctoral no publicada, Cornell University, USA.

Robert, A. y Rogalski, J. (2005). Cross-analysis of the mathematics teacher's activity. An example in a French 10th-Grade class. *Educational Studies in Mathematics*, *59*(1-3), 269-298.

Robinson, N., Even, R. y Tirosh, D. (1992). Connectedness in teaching algebra: A novice-expert contrast. En W. Geeslin & K. Graham (Eds.), *Proceedings of the 16th PME International Conference*, (vol. 2, pp. 258-263). Durham, Estados Unidos de América.

Robinson, N., Even, R. y Tirosh, D. (1994). How teachers deal with their students' conceptions of algebraic expressions as incomplete. En J.P. Ponte & J.F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18thPME International Conference*, (vol. 4, pp. 129-136). Lisboa, Portugal.

Rosebery, A., Warren, B., Ballenger, C. y Ogonowski, M. (2005). The generative potential of students' everyday knowledge in learning science. En T. Romberg, T. Carpenter y F. Dremock (Eds.), *Understanding mathematics and science matters* (pp. 55-80). Mahwah, USA: Lawrence Erlbaum Associates.

Rosenshine, B. (1979). Content, time and direct instruction. En P. L. Peterson y H. J. Walberg (Eds.), *Research on teaching: Concepts, findings and implications* (pp. 28-56).McCutchan Publishing Company.

Rossouw, L. y Smith, E. (1998). Teachers' pedagogical content knowledge of geometry. En A. Olivier & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of 22nd PME International Conference*, (vol. 4, pp. 57-63). Stellenbosh, Sur Africa.

Sánchez, C. y Valdés, C. (2001). *Los Bernoulli: geómetras y viajeros*. Madrid, España: Nívola Libros y Ediciones, S.L.

Sánchez, M. (2010). *How to stimulate rich interactions and reflections in online mathematics teacher education?* Roskilde, Dinamarca: Roskilde Universitet.

Sánchez, M. (2011). *A review of research trends in mathematics teacher education. PNA, 5*(4): 129-145.

Sánchez-Matamoros, G. M. (2004). Análisis de la comprensión en los alumnos de bachillerato y primer año de universidad sobre la noción de derivada (desarrollo del concepto). Tesis doctoral no publicada, Universidad de Sevilla, España.

Sánchez-Matamoros, G. M., García, M. y Llinares, S. (2006). El desarrollo del esquema de derivada. *Enseñanza de las Ciencias*, *24*(1), 85-98.

Saxe, G. B. (1999). *Professional development, classroom practices, and students' mathematics learning: A cultural perspective.* En O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 25-39). Haifa, Israel: Israel Institute of Technology.

Schoenfeld, A. H. (1998). Toward a theory of teaching-in-context. *Issues in Education*, *4*(1), 1-94.

Schoenfeld, A. H. (2000). Purposes and methods of research in mathematics education. *Notices of the American Mathematical Society*, *47*(3), 641-649.

Schön, D. A. (1983). *The reflective practitioner: How professionals think in action*. New York, United States of America: Basic Books.

Schön, D. A. (1987). *Educating the reflective practitioner*. San Francisco, USA: Josey Bass.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 1-36.

Sherin, M. G. (2007). The development of teachers' professional vision in video clubs. En R. Goldman, R. Pea, B. Barron y S. Derry (Eds.), *Video research in the learning sciences* (pp. 383-395). Hillsdale, USA: Lawrence Erlbaum Associates.

Shriki, A. y David, H. (2001). How do mathematics teachers (inservice and preservice) perceive the concept of parabola? En M. Van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th PME International Conference*, (vol. 4, pp. 169-176). Utrecht, Netherlands.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(2), 114-145.

Simon, M. A. y Tzur, R. (1999). Explicating the teachers' perspective from the researchers' perspectives: Generating accounts of mathematics teachers' practice. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(3), 252-264.

Simon, M. A., Tzur, R., Heinz, K., Kinzel, M. y Smith, M. S. (2000). Characterizing a perspective underlying the practice of mathematics teachers in transition. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*(5), 579-601.

Simon, M. y Tzur, R. (1997). Generalizing theoretical accounts of mathematics teachers' practices. En H. Pekhonen (Ed.), *Proceedings of the 21st Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, pp. 160-167). Helsinki, Finlandia: Department of Teacher Education, Universidad de Helsinki.

Simon, M.A. (1990). Prospective elementary teachers' knowledge of division. En G. Booker, P. Cobb & T. Mendicuti (Eds), *Proceedings of the 14th PME International Conference*, (vol.3, pp. 313-320). Oaxtepex. Mexico.

Simon, M.A. (1991). Initial development of prospective elementary teachers' conceptions of mathematics pedagogy. En F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the 15th PME International Conference,* (vol. 2, pp. 40-47). Assisi, Italia.

Skott, J. (1999). The multiple motives of teaching activity and the role of the teacher's school mathematical images. En O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, pp. 209-216). Haifa, Israel: Israel Institute of Technology.

Skott, J. (2001). The emerging practices of a novice teacher: The roles of his school mathematics images. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *4*(1), 3-28.

Skott, J. (2004). The forced autonomy of mathematics teachers. *Educational Studies in Mathematics*, 55(1-3), 227–257.

Skott, J. (2009). Contextualising the notion of 'belief enactment'. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *12*(1), 27-46.

Stake, R. (1994). Case Studies. En N. K. Denzin y Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of Qualitative Research* (pp. 236-247). London, UK: SAGE Publications.

Stake, R. (1998). *Investigación con estudio de casos.* 2a. ed. Madrid: Morata.

Sztajn, P. (2003). Adapting reform ideas in different mathematics classrooms: Beliefs beyond mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *6*(1), 53-75

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 151-169.

Tall, D. (1991). The psychology of advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 3-21). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers

Tanner, H. y Jones, S. (1999). Dynamic scaffolding and reflective discourse: The impact of teaching style on the development of mathematical thinking. En O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, pp. 257-264). Haifa, Israel: Israel Institute of Technology.

Thomas, M. (2003). The role of representation in teacher understanding of function. En N. Pateman, B.J. Dougherty & J.T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th PME International Conference*, (vol. 4, pp. 291-298).

Thompson, A. G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of research of mathematics teaching and learning* (pp. 127-146). Nueva York, USA: Mac Millan.

Tirosh, D., Graeber A., & Glover R. (1986). Pre-service teachers' choice of operation for multiplication and division word problems. En Univ. of London Inst. of Educ. (Eds.), *Proceedings of the 10th PME International Conference*, (vol. *1*, pp. 57-62. Londres, Inglaterra.

Tzur, R., Simon, M. A., Heinz, K. y Kinzel, M. (2001). An account of a teacher's perspective on learning and teaching mathematics: Implications for teacher development. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *4*(3), 227-254.

van Dooren, W., Verschaffel, L., & Onghena, P. (2001). Arithmetic or algebra? Pre-service teachers' preferential strategies for solving arithmetic and algebra word problems. En M. Van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th PME International Conference, 4*, 359-366. Utrecht University, Paises Bajos.

Vargas, J. (2007). Desarrollo histórico del concepto función logarítmica. En *Memorias del 8º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa.*, Santiago de Cali, Colombia: Universidad del Valle y ASOCOLME. Recuperado el 4/10/12, de: http://asocolme.org/index.php?option=com_content&view=category&layout=blog&id=45&Itemid=88

Vargas, J. (2011). Atlas.ti y una descomposición genética como herramientas de análisis de la práctica docente: la función exponencial*. En Espacios de reflexión e intercambio de saberes* (pp. 16-26). Escuela de matemática, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Duitama, Colombia.

Vargas, J. y Pérez, E. (2008). Función exponencial. Resultados de investigaciones al servicio de la planeación y gestión del trabajo de aula. En *Memorias del 9º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*, Valledupar, Colombia: Universidad del Valle y ASOCOLME. Recuperado el 4/10/12, de: http://asocolme.org/index.php?option=com_content&view=category&layout=blog&id=45&Itemid=88

Vargas, J., González, M. T. y Llinares, S. (2010). Historia de la función exponencial en un proceso de elaboración de descomposición genética*. Conferencia presentada en la Tercera Escuela Nacional de Historia y Educación Matemática ENHEM*, Universidad del Valle, Colombia.

Vargas, J., González, M. T. y Llinares, S. (2011a). Atlas.ti como herramienta de análisis de la práctica docente: el caso de la función exponencial. En M. M. Moreno y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática*. *Comunicaciones de los grupos de investigación de la SEIEM. XIV Simposio de la SEIEM* (pp. 187-199). Lleida, España: Edicions de la Universitat de Lleida. Recuperado el 4/10/12, de: http://www.seiem.es/publicaciones/archivospublicaciones/comunicacionesgrupos/GruposXIVSimposio.pdf

Vargas, J., González, M. T. y Llinares, S. (2011b). Descomposición genética de la función exponencial: mecanismos de construcción. *Comunicación presentada en XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática. Tecnológica Universidade Federal de Pernambuco,* Recife, Brasil. Recuperado el 4/10/12, de: http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/1292/154

Vargas, J., González, M. T. y Llinares, S. (2012b). La enseñanza de la función exponencial en precálculo: una estrategia para el análisis de la práctica. *Taller presentado en el Encuentro del Grupo de Investigación Didáctica del Análisis GIDA*, Universidad Pontificia de Salamanca, España. Recuperado el 6/10/12 de: http://bioma-funciones.blogspot.com/

Vargas, J., González, M. T. y Llinares, S. (2012c). Análisis de la práctica: estudios de caso en la función exponencial. *Comunicación presentada en el Encuentro del Grupo de investigación Conocimiento y Desarrollo Profesional del Profesorado de Matemáticas SEIEM*. Universidad de Huelva, España. Recuperado el 6/10/12 de: http://bioma-funciones.blogspot.com/

Vidakovic, D. (1997). Learning the concept of inverse function in a group versus individual environment. En E. Dubinsky, D. Mathews y B. Reynolds, (Eds.), *Readings in cooperative learning for undergraduate mathematics,* 44, 173-195.

Walker, R. (1989). *Métodos de investigación para el profesorado*. Madrid, España: Morata.

Weber, K. (2002a). Students' understanding of exponential and logarithmic functions. En D. Mewborn, P. Sztajn, D. White, H. Wiegel, R. Bryant y K. Nooney (Eds.), *Proceedings of the 24th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Columbus, USA: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Weber, K. (2002b). Developing students' understanding of exponents and logarithms. En D. Mewborn, P. Sztajn, D. White, H. Wiegel, R. Bryant y K. Nooney (Eds.), *Proceedings of the 24th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 1019-1027). Columbus, USA: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Wieleitner, H. (1932). *Historia de las matemáticas*. Barcelona, España: Editorial Labor.

Wussing, H. (1989). *Lecciones de historia de las matemáticas.* Zaragoza, España: Siglo XXI Editores.

Zazkis, R. y Campbell, S. (1994). Divisibility and division: Procedural attachments and conceptual understanding. En J.P. Ponte & J.F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th PME International Conference*, (vol. 4, pp. 423-430). Lisboa, Portugal.

APÉNDICES

APÉNDICE A.

Segmentos de la historia: la función logarítmica

María Teresa González Astudillo
Universidad de Salamanca

Jeannette Vargas Hernández
Universidad Colegio Mayor de Cundinamarca

Resumen
El nacimiento, desarrollo y consolidación del concepto de función logarítmica, que ha sido estudiado desde diferentes puntos de vista por distintos historiadores, puede ser dividido en diferentes etapas. A lo largo de este artículo, se muestran las diferentes concepciones que han tenido los matemáticos a través de la historia. Así, inicialmente, se muestran las concepciones aritmético-geométricas que tuvieron Napier y Bürgi alrededor del concepto de logaritmo. Posteriormente, se relaciona este concepto con curvas y series para poco a poco ir formando parte del mundo de las funciones transcendentes y finalmente relacionarlo con la función exponencial.

Palabras clave: logaritmo, progresión, exponente, función logarítmica, historia.

Summary
Historians have studied the origin, development and consolidation of the logarithmic function from different approach that may be classified in stages. This article exhibits some of the mathematician conceptions thought the history. It starts with Napier and Bürgi arithmetic-geometry approach; follow by showing how the logarithm relates to series and curves, in order to incorporate it into the transcendental functions world and bridge it with the exponential function.

Key words: logarithm, progression, logarithmic function, exponent, history

Introducción

La invención de los logaritmos se data a principios del siglo XVII y se considera hija de la preocupación de los matemáticos del siglo XVI por las técnicas prácticas de cálculo, siendo un fruto tardío de éstas [1]. En relación con dicha invención, Bell (2000), destaca el papel que ésta ejerció en aquel momento, las aplicaciones que tuvo y las facilidades que concedió a los matemáticos:

> La invención de los logaritmos, contemporánea a Kepler (1571-1630), habría de reducir su labor sobrehumana a proporciones más manejables. La historia de los logaritmos es otra epopeya de la perseverancia que no cede más que ante la de Kepler. El barón Napier o Neper de Merchistorum (escocés, 1550-1617), en los ratos

> de ocio que le dejaban sus deberes de terrateniente y su vana preocupación de demostrar que el Papa reinante era el Anticristo, inventó los logaritmos.
>
> Si recordamos que Napier murió antes de que Descartes (1596 - 1650) introdujera la notación, n, nn, n^3, ... para las potencias ([9], p.14), no nos maravillaremos tanto de que le costara no menos de veinte años razonar las propiedades y la existencia de los logaritmos [2].

Los pasos anteriores y posteriores a esta invención, se pueden organizar en etapas, establecidas con el fin de centrar la mirada en los cambios significativos que determinan cada nuevo "escalón"en su evolución.

1. Antecedentes: las relaciones entre las progresiones aritméticas y geométricas

El germen sobre el que se construye el concepto de logaritmo, se puede encontrar en un trabajo de Arquímedes (aprox. 287-212 a.C.) relativo a los números gigantescos, donde se menciona que la suma de los «órdenes» de varios números (equivalentes a sus exponentes tomando la base $100_1000{,}000$) corresponde al «orden» del producto de dichos números [25]. En su obra titulada *Psammites* (más conocida como «El Arenario») Arquímedes llegó a la conclusión que para llenar el Universo Aristarco no serían necesarios más de 10^{63} granos de arena.

> Cuando varios números están en proporción continua a partir de la unidad, y algunos de estos números se multiplican entre si, el producto estará en la misma progresión, alejado del más grande de los números multiplicados tantos números como el más pequeño de los números multiplicados lo está de la unidad en la progresión, y alejado de la unidad la suma menos uno de los números de lugares que los números multiplicados están alejados de la unidad. (Arenario, citado por [19], p.1)

Posteriormente, en la *Arithmética Integra* (1544) de Stifel (1487-1567), se establece que los términos de la progresión geométrica[1]:

$$1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, \ldots$$

se corresponden con los términos de la progresión aritmética formada por los exponentes $0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots,$

La multiplicación de dos términos de la progresión geométrica produce un término, cuyo exponente es la suma de los términos correspondientes en la progresión aritmética[2], y la

[1]Por comodidad para el lector se va a utilizar en el texto la notación actual relativa a los diferentes conceptos matemáticos.

[2]Esta propiedad de los exponentes fue expuesta para números naturales en el libro IX de los Elementos de Euclides [20], para fracciones positivas se empieza a usar en el siglo XIV a partir de Nicolas de Oresme; en los siglos XV, XVI y XVII comienzan a usarse con exponentes negativos y fraccionarios en general; y finalmente, Euler es quien los va a extender a los irracionales.

división de dos términos de la progresión geométrica produce un término, cuyo exponente es la diferencia de los correspondientes términos en la progresión aritmética. [18], [27]. Esta observación aunque había sido hecha anteriormente por Nicolas Chuquet (1445-1488) en *Le Triparty en la science des nombres* (1484), establece estas reglas sólo para las potencias de 2 con exponentes de 0 a 20. Stifel sigue trabajando con potencias de dos pero amplia a los exponentes fraccionarios y negativos [11]. Así, la división de r^2 por r^3 produce r^{-1} qué corresponde al término -1. A pesar de advertir las posibilidades de estos hallazgos, Stifel manifestaba: "se podría escribir un libro totalmente nuevo sobre las maravillosas propiedades de estos números, pero he de resignarme y pasar por él con ojos cerrados". (Citado por [5], p. 177).

Esta propiedad fue importante en la época, puesto que simplificaba los cálculos que tenían que hacerse con números grandes, fundamentalmente en relación con la astronomía, rebajando de esta forma en un grado cada una de las operaciones aritméticas.

Además, en el siglo XVI, comenzaron a popularizarse diversos tipos de identidades trigonométricas por toda Europa para simplificar los cálculos astronómicos. Entre ellas estaba el grupo de fórmulas conocidas como «Reglas de Prosthaphaeresis[3]», es decir, permitían convertir el producto de funciones circulares en una suma o diferencia y, como se describe más adelante, tuvieron repercusión en el desarrollo de los logaritmos. Al menos una de las reglas de Prosthaphaeresis, era ya conocida por los árabes. Concretamente se le adjudica a Ibn-Yunus (aprox. 1008) la introducción de la fórmula $2\cos x \cos y = \cos(x+y)+\cos(x-y)$ ([3], p. 311), ([22], p.140).

2. Los inicios del concepto: una base aritmética con un fundamente geométrico

La invención de Napier (1550-1617) del logaritmo fue más que el fruto de una elaboración aritmética del estilo de las de Stifel, el resultado del estudio de un problema de mecánica, para el que se construyó un modelo adecuado que permitiera conjugar ([8], p. 341) ideas del mundo aditivo y el multiplicativo.

Cabe anotar el interés de Napier por resolver los problemas astronómicos de la época, para lo que utilizó las recién descubiertas Reglas de Prosthaphaeresis. Estas reglas se habían adoptado en los observatorios astronómicos, incluido el de Tycho Brahe (1546-1601) en Dinamarca, de donde llegó la noticia a Napier en Escocia, que al parecer le animó a redoblar esfuerzos y a publicar en 1614 su obra *Mirifici logarithmorum*[4] *canonis descriptio* («Descripción de la maravillosa regla de los logaritmos») en la que utiliza por primera vez el término logaritmo y que contenía solamente una introducción y una guía para el cálculo de los logaritmos.

[3]Palabra griega que significa suma y resta.

[4]El término logaritmo acuñado por Napier proviene de « logos », razón y "aritmos", número, y hace referencia al "número de la razón", es una medida del "numero"de veces que la "acción razón"ha ocurrido.

Más tarde se publicó una obra póstuma de Napier titulada *Mirifici logarithmorum canonis constructio* (1619) en la que aparecen las tablas de Napier que fueron recibidas con entusiasmo por astrónomos[5] y navegantes ya que convertía los tediosos cálculos de multiplicaciones y divisiones en simples sumas y restas. Hay que señalar que en la época de Napier todavía no se había desarrollado las potencias con exponente fraccionario ni la notación exponencial. Tampoco estaba extendido el uso del punto decimal para separar las cifras decimales, de hecho fue Napier, y su uso sistemático del punto decimal, el responsable de la generalización de su uso ([12], p.143).

Napier realizaba los cálculos astronómicos utilizando la trigonometría esférica por lo que trató con los logaritmos de senos y, como era costumbre en la época, siguiendo a Regiomontanus[6] (1436-1476) usó semicuerdas de un círculo cuyo radio contenía 10^7 unidades. La idea clave de la obra de Napier era que para conseguir que los términos de una progresión geométrica formada por las potencias enteras de un número dado estuvieran muy próximas unas a otras, era necesario tomar esta razón muy próxima a uno; así, los huecos entre los sucesivos términos de la progresión se mantenían pequeños. Napier decidió tomar como razón el número $1 - 10^{-7} = 0{,}9999999$; los términos de la progresión de potencias enteras crecientes así formada, están ciertamente muy próximos entre sí, de hecho, demasiado próximos. Para conseguir un cierto equilibrio y evitar el uso de decimales, multiplicó Napier todas las potencias por 10^7.

Entonces, si $N = 10^7\left(1-\dfrac{1}{10^7}\right)^L$, L será el «logaritmo» de Napier del número N. Edwards (1979, 144) denota este logaritmo (para distinguirlo del logaritmo actual) como Nog, por lo tanto, $L = \mathrm{Nog}\ N$. De acuerdo con esta definición, se cumple que, el logaritmo de 10^7 será 0, el logaritmo de $10^7\left(1-\dfrac{1}{10^7}\right) = 9999999$ será 1, etc y Nog N decrece a medida que N crece en contraposición con lo que ocurre con los logaritmos actuales. Además si $N' = 10^7\left(1-\dfrac{1}{10^7}\right)^{L'}$, se cumple que:

$$\frac{N}{N'} = \left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{L-L'}$$

luego la diferencia entre los logaritmos de L y de L' sólo depende de la razón entre L y L' y se puede concluir que si $N_1, N_2, \ldots, N_n$ es una progresión geométrica entonces la sucesión de logaritmos correspondiente es una progresión geométrica.

Además, si se dividen tanto los números como los logaritmos por 10^7, se tiene práctica-

[5] Kepler utilizó las tablas de Napier para el descubrimiento de su tercera ley de los planetas.

[6] Regiomontanus, como el resto de los astrónomos del siglo XV, realizó tablas de funciones trigonométricas, concretamente de tangentes. Para evitar el uso de fracciones, se acostumbraba a utilizar un círculo básico de valor muy grande que recibía el nombre de sinus totus, concretamente él utilizaba uno de radio de 10^7.

mente un sistema de logaritmos de base $\frac{1}{e}$, puesto que $\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^L$ no se diferencia[7] ya demasiado del $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$ ([3], p. 396).

Estudiemos detenidamente esta visión aritmética del logaritmo:

- Se elige un número, $1-10^{-7}$, "próximo"a 1
- Se construye la progresión geométrica de razón $1-10^{-7}$:

$$(1-10^{-7})^0,\ (1-10^{-7})^1,\ (1-10^{-7})^2,\ldots,\ (1-10^{-7})^L,\ldots$$

  que es una progresión decreciente de términos "próximos"a 1.

- Para reducir la aparición de decimales en la progresión anterior, se multiplica cada término de la sucesión por 10^7 (a los términos de la nueva progresión geométrica se les llama números de Napier: N)

$$10^7(1-10^{-7})^0,\ 10^7(1-10^{-7})^1,\ 10^7(1-10^{-7})^2,\ldots,\ \underbrace{10^7(1-10^{-7})^L,\ldots}_{N}$$

- Se hace la asignación:

$$N \to \operatorname{Nog} N = L$$

- Así:

$$0 = \operatorname{Nog} 10^7,\quad 1 = \operatorname{Nog} 10^7(1-10^{-7});\quad \ldots; L = \operatorname{Nog} 10^7(1-10^{-7})^L$$

- Si se dividen N y L por 10^7, la correspondencia:

$$\frac{N}{10^7} \to \frac{\operatorname{Nog} N}{10^7} = \frac{L}{10^7}$$

  es una correspondencia similar a la correspondencia:

$$\frac{N}{10^7} \to \operatorname{Log}_{\frac{1}{e}}\left(\frac{N}{10^7}\right)$$

[7]En realidad, Euler hizo el razonamiento en sentido inverso. La primera vez que utilizó el número e fue en un manuscrito datado en 1727-28 cuando contaba 20 o 21 años de edad ([4], p.3), y publicado póstumamente en 1862 en el que escribía: "El número cuyo logaritmo es la unidad será escrito como e, cuyo valor es 2'7182817. . ."([24], 95). Una vez definido el número e entonces demuestra en su *Introductio in Analysin Infinitorum* (1748) que, en general, el $e^x = \lim\limits_{i\to\infty}\left(1+\frac{z}{i}\right)^i$ "Erit enim $e^x = \left(1+\frac{z}{i}\right)^i$", y que, en particular, $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

ya que:

$$\operatorname{Log}_{\frac{1}{e}}\left(\frac{N}{10^7}\right)=\frac{10^7\operatorname{Log}_{\frac{1}{e}}\left(\frac{N}{10^7}\right)}{10^7}=\frac{\operatorname{Log}_{\frac{1}{e}}\left(\frac{10^7(1-10^7)^L}{10^7}\right)^{10^7}}{10^7}=\frac{L\cdot\operatorname{Log}_{\frac{1}{e}}\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{10^7}}{10^7}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{e}\to\frac{L\cdot\operatorname{Log}_{\frac{1}{e}}\left(\frac{1}{e}\right)}{10^7}=\frac{L}{10^7}$$

En cuanto a la versión geométrica del concepto de logaritmo, Napier lo explica de la siguiente manera:

> Sea el segmento AB y una semirrecta CDE dados en la figura 1. Sea un punto P que parte de A y se mueve a lo largo de AB con velocidad variable que decrece en proporción a su distancia B; supongamos que un punto Q parte al mismo tiempo de C y se mueve a lo largo de la semirrecta CDE con velocidad uniforme igual a la velocidad inicial del punto P; entonces Napier llama a la distancia variable CQ el logaritmo de la distancia PB ([3], p. 397).

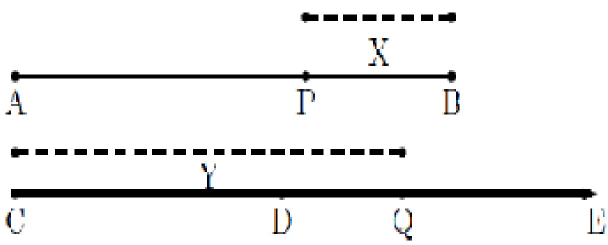


Figura: 1

Veamos que esta definición geométrica es acorde con la numérica. Para ello, consideremos, según nuestra notación actual, que $y=\log x$ y además utilicemos nuestros conocimientos actuales para realizar dicha comprobación. Supongamos que AB $=10^7$, que la velocidad inicial (en A) es 10^7 y que la constante de proporcionalidad es 1.
Por la definición del movimiento realizada por Napier, tendremos las siguientes igualdades relativas a la velocidad:

$$\frac{dx}{dt}=-x \qquad \text{y} \qquad \frac{dy}{dt}=10^7$$

Entonces:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{10^7}{-x}=-\frac{10^7}{x},\ \text{ o lo que es lo mismo, }\ \frac{dy}{-10^7}=\frac{dx}{x}$$

Integrando (respecto a x):

$$\frac{y}{-10^7} = \ln x + \ln c = \ln cx$$

Y despejando la variable y:

$$y = -10^7 \ln (cx)$$

Utilicemos ahora las condiciones iniciales, cuando $x = 10^7$, $y = 0$, luego,

$$0 = -10^7 \ln (c \cdot 10^7),\ 0 = \ln (c \cdot 10^7),\ 1 = (c \cdot 10^7),\ \frac{1}{10^7} = c$$

Así,

$$y = -10^7 \ln \left(\frac{x}{10^7}\right)$$

con lo cual la igualdad anterior establece la relación entre el logaritmo de Napier y el logaritmo natural.
Utilizando la relación entre logaritmos de diferentes bases, obtenemos que:

$$y = \frac{-10^7 \log_{\frac{1}{e}} \left(\frac{x}{10^7}\right)}{-1},\ y = 10^7 \log_{\frac{1}{e}} \left(\frac{x}{10^7}\right)$$

en definitiva:

$$\frac{y}{10^7} = \log_{\frac{1}{e}} \left(\frac{x}{10^7}\right),\ \text{siendo } y = \mathrm{Nog}\, x$$

Esto es, si las distancias PB y CQ se dividen por 10^7, la definición geométrica del logaritmo de Napier conduce al sistema de logaritmos[8] de base $\frac{1}{e}$.

> No es necesario decir que Napier calculó sus tablas numéricamente y no geométricamente, desde luego, tal como indica la palabra «logaritmo» inventada por él. Al principio Napier llamó a sus índices de potencias o exponentes «números artificiales», pero más tarde se decidió por la palabra compuesta de las dos palabras griegas *logos* (o razón) y *arithmos* (o número). Napier no pensaba, en una base para su sistema, pero no obstante sus tablas venían calculadas por medio de multiplicaciones repetidas, equivalentes a elevar a potencias el número 0.9999999. Obviamente la potencia (o número) disminuye según el índice (o logaritmo) aumenta, lo cual era de esperar ya que estaba utilizando implícitamente como base $\frac{1}{e}$ que es menor que 1 ([3], p. 397).

[8] En el libro de Edwards ([12], p.153) se propone como ejercicio demostrar que si se divide x por 10^7, el sistema de logaritmos que propone Napier es un sistema de logaritmos de base $1/e$.

Además de que Napier no utilizaba una base para su sistema de logaritmos, una de las diferencias más notable entre sus logaritmos y los nuestros consiste en el hecho de que su logaritmo de un producto (o de un cociente) no es igual, en general, a la suma (o la diferencia) de los logaritmos [8]. A pesar de esto, Napier consiguió construir su sistema con ciertas propiedades que permitieron la simplificación de los cálculos, especialmente en el caso de los productos y cocientes.

Con motivo del tricentenario de la invención de Napier, se publicó un volumen [17] de artículos que discutían este hecho y cómo se había evolucionado en el lapso de 300 años. Entre los artículos está el escrito por Moulton [21], quien propuso tres fases en la invención de logaritmos: primero, Napier identificó la correspondencia entre una sucesión geométrica y aritmética. Segundo, introdujo "una representación geométrica de los manejos aritméticos originales". Tercero, Napier se dio cuenta que si los pares de términos de la progresión geométrica tienen la misma razón, entonces los términos correspondientes en la aritmética se encontraban igualmente distanciados.[9]

Casi al mismo tiempo que Napier, en Suiza Jobst Bürgi (1552-1632) desarrollaba ideas muy parecidas. Existen referencias de que a Bürgi la idea de logaritmo se le ocurría seis años antes; sin embargo, no publicó sus resultados hasta 1620, en Praga, en su obra titulada *Arithmetishe und geometrische Progress-Tabulen*.

Las motivaciones que impulsaron su obra (Boyer, 2003) fueron muy parecidas a las de Napier. Ambos partieron de las propiedades de las progresiones aritméticas y geométricas impulsados probablemente por las reglas de prostafairesis. La noción de «base» no existió tampoco en el sistema de Bürgi, y $\log 1 = 0$ era inadmisible en el sistema de los coinventores de los logaritmos.
Bürgi era maestro de reparaciones de relojes y de instrumentos astronómicos, trabajó en Praga en el observatorio astronómico con Kepler (1571-1630) ayudándole en las observaciones y cálculos. Para la simplificación de cálculos, durante ocho años (1603-1611) confeccionó su tabla de logaritmos sobre la base de una tabla del tipo[10] de Stevin (1548-1620).

Para obtener un paso lo suficientemente pequeño en la tabla, Bürgi tomó como razón para su progresión geométrica un número mayor que 1, el número $r = 1 + \dfrac{1}{10^4}$. La tendencia a no encontrarse, en lo posible, fracciones le obligó a introducir un factor complementario; $a = 10^8$. Los valores de la progresión geométrica obtenida $g_k = 10^8\left(1 + \dfrac{1}{10^4}\right)^k$ $(k = 0, 1, 2, 3 \ldots)$ los puso en correspondencia con los términos de la progresión aritmética:

[9] Se puede consultar una ilustración de este acercamiento que introdujo Katz [16].

[10] En estas tablas se comparan las sucesiones de potencias de un número con la sucesión de exponentes. Las tablas de Stevin eran de tantos por ciento, o sea, calculaba el valor de los números $a(1+r)^n$ usando diferentes tablas para diversos valores de r (tantos por ciento) : $r = 0{,}05$, $r = 0{,}04$, etc. Cuanto menor es r, tanto menor es la desproporción entre los valores obtenidos. ([3], p.141).

$0, 10, 20, 30, \ldots$ y obtuvo dos series de valores:

$$10^8,\ 10^8(1+10^{-4}),\ 10^8(1+10^{-4})^2,\ 10^8(1+10^{-4})^3,\ \ldots$$

$$0 \qquad\qquad 10 \qquad\qquad 20 \qquad\qquad 30$$

Los números de la serie de abajo fueron impresos en pintura roja y se denominaban rojos; los números de la serie de arriba, en pintura negra, se denominaban negros. De esta forma, en la tabla de Bürgi los números rojos constituían los logaritmos de los negros divididos entre 10^8 con base $\sqrt[10]{1,0001}$. Como Bürgi orienta su tabla a los números rojos, será una tabla de antilogaritmos, lo que no cambia la esencia de la cuestión.
Entre las diferencias de los dos acercamientos al concepto de logaritmo, hemos visto que Napier eligió al principio $\log 10^7 = 0$, mientras que Bürgi parte de $\log 10^8 = 0$. Además, la relación $\log m < \log n$ si $m > n$, es cierta en el sistema de Napier, mientras en el de Bürgi se verifica $\log m > \log n$si $m > n$, lo que permite afirmar que el sistema del relojero Bürgi estaba más cerca del nuestro que el de Napier [7].

3. Generalización del logaritmo como exponente de las potencias

La publicación en 1614 del sistema logarítmico fue acogida y aceptada con rapidez. Uno de los admiradores más entusiastas fue Henry Briggs (1561-1639), primer Savilian Profesor de Geometría en Oxford, que al año siguiente de esta publicación, durante una visita a Napier, discutió con éste sobre posibles modificaciones del método de logaritmos. Briggs propuso utilizar potencias de diez, y Napier confirmó que ya había pensado en ello y estaba de acuerdo. Napier, en cierto momento, había sugerido una tabla basada en las igualdades $\log 1 = 0$ y $\log 10 = 10^{10}$, para evitar las fracciones, pero al final estos dos personajes llegaron a concluir que lo más conveniente sería que el logaritmo de uno fuese cero y que el logaritmo de diez fuese uno. Sin embargo, Napier fallece en 1617, sin llevar a la práctica estas ideas.

Así pues, Briggs construye la primera tabla de logaritmos llamados logaritmos vulgares o de Briggs y en 1617 publicó su obra *Logarithmorum chilias prima*, de los logaritmos de 1 hasta 1.000, extendiendo luego sus tablas en su *Aritmética logarítmica* hasta 100.000 siempre con catorce cifras decimales. En lugar de tomar potencias de un número próximo a 1, como había hecho Napier, Briggs parte de la igualdad $\log 10 = 1$ y después va calculando logaritmos tomando raíces y haciendo uso de la igualdad $\log 10^n x = n + \log x$. De esta forma apareció la primera tabla de logaritmos decimales o logaritmos vulgares. Es importante hacer notar que, a partir de ese momento, ya se podía trabajar con los logaritmos exactamente como lo hacemos hoy, puesto que las tablas de Briggs tenían todas las propiedades usuales de los logaritmos, además, los nombres «característica» y «mantisa» se derivan del libro la *Arithmetica Logarítmica* de Briggs (1624).

Mientras Briggs realizaba sus tablas, el profesor de matemáticas inglés John Speidell, reajusta los logaritmos de Napier introduciendo, a partir de las funciones trigonométricas, los logaritmos naturales (o neperianos), publicados en su obra *New Logarithmes* (1619).

Como complemento a las tablas, el inventor de la «regla de cálculo», William Oughtred (1574 -1660) enunció de forma explicita, hacia 1650, las siguientes propiedades de los logaritmos:

- $\log mn = \log m + \log n$,
- $\log \dfrac{m}{n} = \log m - \log n$
- $\log x^n = n\log x$

Si bien la definición de logaritmos entendidos como los exponentes de las potencias que representan los números con una base fija, como en el esquema de Briggs, se convirtió en un acercamiento común, esta definición no se utilizó en los inicios del siglo XVII porque no se usaban los exponentes fraccionarios e irracionales. La primera exposición sistemática de definición se presentó en 1742, cuando William Jones (1675-1749) la incluye en la introducción de *Table of Logarithms* de William Gardiner. Sin embargo, es importante tener en cuenta que Euler (1707-1783) ya había definido logaritmos como exponentes en 1728.

En su manuscrito inédito (*Opera Póstuma*, II, 800-804), introduce por primera vez la definición de logaritmo de un número positivo como el exponente al cual hay que elevar la potencia, cuya base es la elegida para que dé el número prefijado [18]. Euler utiliza esta definición para la resolución de problemas relativos a la variación de interés compuesto y de crecimiento de la población que incluye al final del capítulo VI de su *Introductio*. De esta forma resuelve el problema propuesto por Descartes en su *Géométrie* (1637) [6], en torno a las curvas cuyas ordenadas $y\left(1+\dfrac{b}{a}\right)^n$ crecen con las abscisas $x+nb$ [14, p.189]. Euler fue el primero que vio en la logaritmación una de las dos operaciones inversas de la elevación de potencias, con lo cual se hizo posible aplicar a los logaritmos procedimientos algebraicos [26]. Su contribución no se limitó a su definición en términos de exponentes, sino que en 1747 escribió a D'Alembert (1717-1783) explicando el status de los logaritmos de números negativos[11].

4. Relación del logaritmo con curvas y series

4.1. El logaritmo como área bajo una curva

En referencia a los logaritmos, gradualmente se introdujeron variaciones ([18], p.345) sobre la idea de Napier siendo identificada, como etapa esencial del desarrollo matemático del concepto, su relación con la hipérbola [19]. Para llegar a esta relación hay que tener en cuenta el trabajo del jesuita Gregoire de Saint-Vincent (1584-1667), quien había acabado

[11] Esto se verá con más detalle en los apartados 4 y 5.

la redacción de un *"Opus geometricorum quadrature circuli et sectionum coni"* (1630), en el cual pretendía haber resuelto los problemas de la cuadratura del círculo y de la hipérbola. Esta obra no fue publicada hasta 1647, y aunque fue un fracaso en cuanto a la cuadratura del círculo, puso en evidencia que las áreas bajo la hipérbola se parecen a los logaritmos.

Fermat (1601-1665) había calculado en 1629 el área bajo la curva $y = x^n$ entre dos valores $x = 0$ y $x = a$ subdividiendo el subintervalo $[0, a]$ en una cantidad infinita de subintervalos tomando como abscisas los puntos correspondientes a la progresión geométrica a, aE, aE^2, $\ldots$ siendo E un número menor que 1. En estos puntos considera las ordenadas correspondientes y aproxima el área de la curva mediante rectángulos circunscritos. Las áreas de estos rectángulos forman una progresión geométrica: $a^n(a\,E - a)$, $a^nE^n(aE^2 - aE), \ldots$ La suma de los infinitos términos de esta progresión es:

$$\frac{a^{n+1}(1+E)}{1-E^{n+1}} \text{ o, } \frac{a^{n+1}}{1+E+E^2+\cdots+E^n}$$

a medida que los rectángulos se hacen más pequeños, es decir, E tiende a 1, la cantidad anterior nos da $\dfrac{a^{n+1}}{n+1}$.

Fermat había demostrado ésto para exponentes de x naturales, fraccionarios y negativos, excepto cuando $n = -1$ que es el caso de la hipérbola. Gregory de Saint Vincent resolvió este problema. Él se apoya sobre el hecho de que, cuando se toman abscisas tales que los intervalos que se forman crecen en progresión geométrica y se levantan las ordenadas correspondientes, entonces él área bajo la curva de dos abscisas sucesivas son iguales. Luego a medida que crece la abscisa geométricamente, el área bajo la curva crece aritméticamente[12]. Por lo tanto, la función área bajo la hipérbola cumple la propiedad aditiva característica de los logaritmos $(L(xy) = L(x) + L(y))$ ya que:

$$A_{1,xy} = A_{1,x} + A_{x,xy} = A_{1,x} + A_{1,y}$$

por ser iguales las áreas entre abscisas en progresión geométrica, y se puede considerar que "se parece" a los logaritmos.

La relación del cálculo del área bajo la hipérbola con los logaritmos no se puede considerar estrictamente de Gregoire de Saint - Vincent; al parecer, es uno de sus defensores, el jesuita Sarassa (1618-1687), quien mencionará en su *Solutio Problematis a Mercenno Propositi* (1649), que "las áreas hiperbólicas pueden tener relación con los logaritmos" [10].

El descubrimiento del carácter logarítmico de las áreas hiperbólicas provocó una promoción de los logaritmos al rango de valor analítico, adquiriendo así un carácter universal, en contraposición a lo local de los logaritmos de Briggs y motivó nuevos trabajos sobre áreas

[12]Si les abscisses d'une hyperbole équilatère croissent en progression géométrique, les aires des surfaces découpées entre l'hyperbole et son asymptote par les lignes ordonnées correspondantes croissent en progression arithmétique.

hiperbólicas, lo que a su vez preparó el camino para la introducción de algunos desarrollos en serie ([15], p.223).

4.2. El logaritmo a partir de las series

El cálculo de logaritmos por medio de series infinitas, se hizo más tarde gracias a James Gregory (1638-1675), Lord Brouncker (1620-1684), Nicholas Mercator (1620-1687), Wallis (1616-1703), Newton (1642-1727) y Edmond Halley (1656-1742). La primera parte de la *Logarithmotechnia* de Mercator, trata del cálculo de los logaritmos por métodos que se derivan de los que utilizaron Napier y Briggs; la segunda parte contiene varias fórmulas de aproximación para el cálculo de logaritmos, una de las cuales es esencialmente la que conocemos hoy como "serie de Mercator". Al utilizar de nuevo los conocimientos actuales, la idea de Mercator derivaba de que el área bajo la hipérbola $y = \dfrac{1}{1+x}$ desde $x = 0$ hasta $x = x$ es igual a $\ln(1+x)$, por lo tanto:

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x} = \int_0^x (1 - x + x^2 - x^3 + \cdots)dx = \ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

Mercator dio el nombre de logaritmos naturales a los valores que se obtenían a partir de esta serie. Aunque la serie lleve el nombre de Mercator, parece que la conocían ya antes que él, tanto Hudde (1629-1704) como Newton (1642-1727), pero no la publicaron. Brouckner y Gregory descubrieron también series infinitas para los logaritmos, pero éstas se vieron eclipsadas por la mayor simplicidad de la serie de Mercator.

La serie de Mercator es divergente para $x = -1$, lo que dio lugar a una polémica entre Bernoulli y Leibniz acerca de la naturaleza de los logaritmos de los números negativos. Para Bernoulli, creyendo que la curva logarítmica debía ser simétrica con respecto del eje de ordenadas, debía cumplirse que $\log(-x) = \log(x)$, punto de vista que parecía confirmado puesto que $\dfrac{d}{dx}\ln(-x) = \dfrac{d}{dx}\ln(x) = \dfrac{1}{x}$. Leibniz, en cambio, consideraba que los logaritmos de los números negativos debían ser imaginarios.

5. El logaritmo como función

Es importante tener presente que muchas de las funciones estudiadas en el siglo XVII fueron primero examinadas como curvas, antes de que el concepto de función estuviera totalmente determinado. Esto ocurrió también en el caso de las funciones trascendentes elementales tales como $\log x$, $\operatorname{sen} x$ y a^x.

En 1646, entre los problemas que ocupaban a Torricelli (1608-1647), estaba uno en el que representa la curva cuya ecuación escribiríamos nosotros como $x = \log y$, en la que es quizás la primera representación gráfica de una función logarítmica; Torricelli calculó el área limitada por la curva, su asíntota y una ordenada, así como el volumen del sólido obtenido al girar esta área alrededor del eje OX (Boyer, 2003). Sin embargo, su muerte en

1647 retrasa la difusión de la gráfica. Será Huygens (1629-1695) a quien corresponderá exponer sus propiedades en el *"Discurso sobre la causa de la gravedad"*, (1690). Huygens estaba interesado, desde 1651, por los logaritmos y su cálculo, en particular, la cuadratura de la hipérbola y retomó el problema mucho más tarde (1666), cuando participaba en los trabajos de la nueva Academia Real de Ciencias de París utilizando esta noción en cuestiones de probabilidad y de combinatoria.

La dificultad más importante con la que se encontró el desarrollo del Análisis Infinitesimal fue una idea de dependencia funcional, que permitiera aplicar a las distintas funciones las operaciones del nuevo cálculo. Por ello resultaba cada vez más necesario investigar el significado del concepto de función, dar una clasificación de todas las funciones conocidas y encontrar los medios para operar con ellas.

Ya Bernoulli (1667-1748) propone en 1718[13], considerar que una función es una expresión analítica [23]. Posteriormente, Euler (1707-1783) escribió su *Introductio in analysin infinitorum* (1748) que está dedicada al estudio de las funciones, a su clasificación, propiedades, métodos de desarrollo de funciones en series y productos infinitos, en fracciones continuas y en suma de fracciones simples. Así, Euler da la siguiente definición de función: "Functio quantitatis variabilis, est esspressio analytica quomodocunque composita ex illa quantitate variabili, et numeris seu quantitatibus constantibus"[14] ([13], p. 4).

Euler admite tanto valores reales como imaginarios del argumento. Una función conceptuada simplemente como una expresión analítica, se forma, según Euler, mediante una clase de operaciones admisibles en la cual entran las operaciones aritméticas, las potencias, las raíces y las soluciones de ecuaciones algebraicas. A ellas, Euler adjuntó las funciones trascendentes elementales: e^z, $\ln z$ y las funciones trigonométricas ([13], p.5). Así mismo, Euler, definió las funciones polinómicas, las trigonométricas y las exponenciales: *"Potestas quantitatis constantes a, Exponentem haben variabilem z"*[15] ([13], p. 70).

Para añadir, a continuación, refiriéndose a las funciones exponenciales:

> dato valorem quocunque afirmativo ipsius y, conveniens datibur valor pisius z, ut fit $a^z = y$; iste autem valor ipsius z, quatenud tanquam Functio ipsiys y spectatur, ocari solet LOGARITHMUS ipsius y[16] ([13], p. 73).

En su obra, Euler introduce así el logaritmo como función inversa de la exponencial. También enuncia Euler su "regla de oro para los logaritmos", la cual afirma que si hemos calculado $\log_a y$, entonces se puede calcular $\log_b y$, siendo b cualquier otra base mediante

[13] Esta idea aparece impresa en un trabajo sobre el problema isoperimétrico en la Academia Real de Ciencias de París

[14] Es función de una cantidad variable cualquier expresión analítica compuesta comoquiera que sea por esa cantidad y números o cantidades constantes

[15] Potencia de la cantidad constante a, que tiene por exponente la variable z.

[16] Dado un valor afirmativo cualquiera de y vendrá dado el valor de z conveniente para que sea $a^z = y$; este valor de z contemplado en cuanto función de y, suele llamarse LOGARITMO de y.

la fórmula:

$$\log_b y = \frac{\log_a y}{\log_a b}$$

Además, establece que los logaritmos de los números negativos no son reales, sino imaginarios y que tendrán un número infinito de éstos. Partiendo de la fórmula $e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$ y sustituyendo θ por π, resulta que $e^{i\pi} = -1$, con lo que $\ln(-1) = i\pi$. Además, cualquier número positivo o negativo tiene no sólo un logaritmo sino infinitos.

6. Conclusión

La revisión de la evolución del concepto de logaritmo y función logarítmica, nos ha permitido caracterizar diferentes etapas en el desarrollo matemático del concepto. Así, en un primer momento se plantea la relación entre los términos de una progresión geométrica y los correspondientes términos en la progresión aritmética, sin que emerja aún ningún concepto. Se presenta luego la etapa en donde se nomina el nuevo concepto y, desprendiéndose de la mirada en las progresiones discretas, se elabora un modelo que involucra variabilidad, covariación y una búsqueda de continuidad, generando una definición geométrica y la elaboración de tablas de cálculo.

El no cumplimiento, en todos los casos, de la equivalencia del logaritmo de un cociente y producto, a la diferencia o suma de los logaritmos, se encuentra superado en la etapa siguiente que se caracteriza por cambios que conllevan la aceptación de las igualdades $\log 1 = 0$; $\log 10 = 1$, y la utilización de 10 como base de los logaritmos, situación que se traduce en un esquema de logaritmo con propiedades explícitas como las actuales. Se generaliza la idea y se define el concepto de logaritmo como exponente, viendo en la logaritmación una de las dos operaciones inversas de la elevación de potencias, lo cual hace posible aplicar a los logaritmos procedimientos algebraicos.

Finalmente, se llega a una de las principales etapas del desarrollo matemático del concepto, puesto que el estudio del logaritmo como área bajo la curva y, a través de series, elevó el concepto de logaritmo al rango de valor analítico. Esta etapa y el desarrollo del Análisis, dan paso a la introducción de los logaritmos en el ámbito de las funciones trascendentes como última etapa en la que nos detenemos en este recorrido.

Reconocimientos

Este trabajo se enmarca en el proyecto de investigación "Análisis de la Práctica del Docente Universitario de Matemáticas Aplicadas. Estudios de casos en la enseñanza de la función logarítmica y exponencial" de la Universidad Colegio Mayor Cundinamarca, Colombia y en el programa de doctorado "Educación Matemática" de la Universidad de Salamanca, España.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Ausejo, E.: Historia de la Ciencia y de la Tecnica 17, Las matemáticas en el siglo XVII, Ediciones Akal, S.A., Torrejón de Ardoz. Madrid, (1992), 29-31.

[2] Bell, E. T.: Historia de las Matemáticas, Traducción de R. Ortiz, Fondo de Cultura Económica. México, D. F., 2000.

[3] Boyer, C.: Historia de la matemática, Versión de Mariano Martínez Pérez, Alianza Editorial, Madrid, 2003.

[4] Cajori, F.: A history of Mathematical Notations, Two volumes Bound as one, Dover Publications, New York, (1993), 105-115.

[5] Colerus, E.: Breve historia de las matemáticas, Vols. 1 y.2. Madrid: Altamira Rotopress, S.A., 1972.

[6] Chica, A.: Descartes Geometría y método, Colección: La matemática en sus personajes, Nívola, Madrid, 2001.

[7] Collette, J. P.: Historia de las matemáticas, Siglo XXI Editores S. A., Madrid, 1985.

[8] Confrey, J. y Smith, E.: Multiplicative Structures and the Development of Logarithms: What Was Lost by the Invention of Function? En Harel, G y Confrey, J. The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics. (1994), 331-360.

[9] Dennis, D. y Confrey, J.: La creación de exponentes continuos: un estudio sobre los métodos y la epistemología de John Wallis, Relime, 3, 1, (2000), 5-31.

[10] Dunham, W.: Euler. El maestro de todos los matemáticos 6, La matemática en sus personajes, Nivela, Madrid, 2000.

[11] Durán, A.: Historia, con personajes de los conceptos del cálculo, Alianza Editorial, Madrid, (1996), 235-280

[12] Edwards, C.H.: The historical development of the calculus, Springer, New York, 1979.

[13] Euler, L.: Introductio in Analysin infinitorum Lausanne: Marcum Michaelem Bousquet y socios, (Edición facsimil editada por SAEM: Thales y la Real Sociedad Matemática española), 1748.

[14] González, P.: Pitágoras. El filósofo del número, 9. La matemática en sus personajes, Nivela, Madrid, 2001, 189

[15] González, P.: Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo VII, Alianza Editorial, Madrid, 1992.

[16] Katz, V.: Napier's logarithms adapted for today' s classroom. En F. Swetz, J. Fauvel, O. Bekken, B. Johansson, & V. Katz (eds.), Mathematical Association of America, Learn from the masters Washington, D C:, (1995), 49-56.

[17] Knott, (ed.): Napier tercentenary memorial volume, Longmans, London, (1915), 1-32.

[18] Kline, M.: Mathematical Thought form ancient to modern times, V. 1, Oxford University Press, Oxford, 1990.

[19] Lefort, X.: Historia de los logaritmos. Un ejemplo del desarrollo de un concepto en matemáticas. Les Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques. Doc. Web disponible en:

http://64.233.167.104/search?q=cache:wMffANE2WSsJ:nti.educa.rcanaria.es/penelope/es_conflefort.htm+logaritmo+funcion+OR+exponencial+%22Xavier+Lefort%22&hl=es&gl=co&ct=clnk&cd=1&lr=lang_esEnero. 16 de enero de 2007

[20] Millán, A.: Euclides. La fuerza del razonamiento matemático. 19, La matemática en sus personajes, Nívola, Madrid, 2004.

[21] Moulton, L.: The invention of logarithms, its genesis and growth. In C. Knott (ed.), Napier tercentenary memorial volume, Longmans, London, (1915), 1-32.

[22] Ribnikov, K.: Historia de las Matemáticas, Editorial Mir, Moscú, 1991.

[23] Sánchez, C, y Valdés, C.: Los Bernoulli. Geómetras viajeros, Colección: La matemática en sus personajes, Nívola, Madrid, 2001.

[24] Smith, D.E.: A source book in mathematics, reimpresión de la edición de 1929, 2 tomos, Dover, Nueva Cork, 1959.

[25] Torija, R.: Arquímedes Alrededor del círculo, Colección: La matemática en sus personajes, Segunda Edición, Nívola, Madrid, 2003.

[26] Wieleitner, H.: Historia de las Matemáticas, Editorial Labor, S.A., Barcelona, 1932

[27] Wussing, H.: Lecciones de Historia de las Matemáticas. Siglo XXI Editores, S. A., Zaragoza, (1989), 108-114.

APÉNDICE B. Entrevista contextual y biográfica

Preguntas	***Tomado de***	***Objetivo / Propósito***
Información general		
1. Dígame algo sobre usted (ej. la persona, el profesor, como miembro de familia, generales)	Miller (2000)	Crear una atmósfera agradable y establece confianza con el profesor.
Percepción de la posición		
2. ¿Cómo podría describir su posición actual en la Universidad? (ej. tipo de contrato, trabajo que realiza, asignaturas que imparte, satisfacción).	Miller (2000)	Caracterizar la situación laboral del profesor como profesor y completar información demográfica de su historial académico.
3. En su institución ¿existe algún modelo o enfoque teórico que señale la forma como se debe enseñar una asignatura? Si es así, ¿cuál es? Puede describirlo por favor ¿cómo afecta en su estilo de enseñar?	---	Explorar el contexto escolar y pedagógico que prevalece en la institución educativa y su relación con el enfoque pedagógico del profesor.
4. ¿Cómo podría describir su posición actual con la comunidad de la educación matemática? (ej. conocimiento, vínculo)	Miller (2000)	Explorar su conocimiento y valoración sobre su formación, actualización y contacto con grupos de enseñanza de la matemática.
Antecedentes de enseñanza y formación sobre Matemática		
5. ¿Cómo es que se interesó por enseñar y en ser profesor de Matemática? ¿por qué enseñar matemáticas? ¿Se siente satisfecho enseñando matemáticas?	Modificada de Miller (2000)	Explorar las motivaciones intrínsecas del profesor, su vocación de ser profesor y la relación de ésta con el propósito de la matemática.
6. ¿Cuánto tiempo ha enseñado matemáticas y matemáticas aplicadas o precálculo en primeros semestres?	Modificada de Gordon (1998)	Pregunta complementaria sobre la experiencia del profesor.
7. ¿Podría describir su experiencia en enseñanza de las matemáticas aplicadas o precálculo en primeros semestres?	Modificada de Miller (2000)	Experiencia.

Salón de clases ideal		
8. ¿Cuál sería su salón de clases ideal para un curso de Matemáticas aplicadas o precálculo a nivel universitario? (ej. ambiente, tamaño de clases, didáctica, adquisición de conocimiento, interacción, uso de tecnología?	Miller (2000)	Explora la primera aproximación a su concepción sobre los escenarios de enseñanza y aprendizaje de la matemática. Permitirá corroborar tanto aspectos pedagógicos genéricos como específicos de la enseñanza y aprendizaje de la matemática.
9. ¿Cómo debería ser la enseñanza ideal de un curso de matemáticas aplicadas o precálculo? ¿Por qué? ¿Qué se conseguiría?	---	Explora la primera aproximación sobre su concepción de enseñanza de la matemática.
Concepciones		
10. Seis cosas que le vienen a su mente cuando piensa acerca de la matemática	Gordon (1998)	Analiza su concepción de la matemática.
11. Ahora si piensa en la matemática aplicada o precálculo de primer semestre universitario. Viene a su mente algo diferente, por favor ¿qué es?	Gordon (1998)	Analiza su concepción de la matemática y lo contrasta con la pregunta #10.
12. Describa la dinámica habitual de la clase de matemática. ¿Qué relación tiene esta dinámica con los procesos esenciales en el razonamiento matemático? ¿Qué aspectos del contenido matemático enfatiza en su programa?, ¿por qué?	Modificada de Carrillo (1998) y García (1994)	Se pretende que el profesor explicite su concepción sobre los repartos de tarea en una clase de matemática. Explora también su conocimiento didáctico de la matemática. Relaciona con la respuesta #16
13. Si tuviera que completar esta frase, ¿cómo lo completaría? “Mi método o estrategia de enseñanza de la matemática consiste en …”	---	Pregunta de síntesis y confrontación sobre su concepción de la enseñanza de la matemática.
Programa de curso y enseñanza		
14. ¿Cuál es el propósito e importancia de la matemática en bacteriología, publicidad, biología, etc.?	Modificada de Gordon (1998) y García (1994)	Indaga su concepción sobre la matemática en el área de pregrados sin énfasis en matemáticas y el conocimiento del contexto de su enseñanza.
15. ¿Qué objetivos se plantea al enseñar matemáticas aplicadas o precálculo a los estudiantes de pregrados sin énfasis en matemáticas?	Modificada de Carrillo (1998)	Indaga sobre el conocimiento que tiene de los objetivos centrales de un programa de curso de matemática para pregrados de bacteriología, publicidad, biología,..

16. ¿Qué contenidos son los más importantes en la E-A Enseñanza y Aprendizaje de la matemática?	Gil y Rico (2003)	Explora de nuevamente su concepción sobre la enseñanza y aprendizaje de la matemática, su postura sobre los contenidos que enfatiza. Complemento de la #12.
17. ¿Cómo determina qué conceptos son importantes para el curso de matemáticas aplicadas o precálculo? ¿qué criterios establece para modificar el temario de la asignatura?	Modificada de Carrillo (1998)	Analiza la concepción de la matemática del profesor en la toma de decisiones sobre el currículo escolar de matemática, como es la selección y modificación de contenidos.
18. ¿Cuáles son sus expectativas del logro de los estudiantes en cuanto a la función exponencial y logarítmica?	---	Pretende encaminar al profesor para la pregunta #19.
19. ¿Cómo trata y logra cumplir estas expectativas o propósitos en su enseñanza? ¿qué es lo que hace? Ejemplo y justificación.	Gordon (1998) y Gil (2000)	Explora de otra forma su concepción sobre la enseñanza y aprendizaje de la matemática y su relación y congruencia con sus propósitos. Así mismo, es un acercamiento al conocimiento de la didáctica de la matemática (planeación, estrategias y materiales)
20. ¿Qué materiales y libros de texto utiliza? ¿por qué? ¿Cuáles son los criterios para seleccionarlos? ¿Para qué los utiliza?	Modificada de Carrillo (1998)	Analiza el conocimiento que tiene el profesor de los materiales y recursos de apoyo para la enseñanza y aprendizaje de la matemática.
21. Cuándo preparas material de trabajo para los estudiantes, si es su caso, ¿qué proceso sigues habitualmente? ¿qué características busca que tengan? Ponga ejemplos y justifíquelos.	Modificada de Carrillo (1998), Gil (2000) y Gil y Rico (2003)	Sirve de contraste con la pregunta #19 en cuanto a concepción de enseñanza y aprendizaje de la matemática.
22. ¿Qué actividades específicas utiliza para evaluar el aprendizaje de sus estudiantes? ¿qué valora en los estudiantes?, ¿en la función exponencial y logarítmica? Ejemplos y justificación ¿Cómo evalúa las dificultades que tiene su estudiante?	Modificada de García (1994), Carrillo (1998) y Miller (2000)	Analiza sus conocimientos sobre la evaluación de los aprendizajes en matemática, sus criterios en general de la matemática y sobre la función logarítmica y exponencial.

23. ¿A qué son debidas las dificultades de la enseñanza de la matemática?	Gil y Rico (2003)	Explora el conocimiento que tiene sobre las preconcepciones, concepciones y dificultades del estudiante en matemática y sobre los problemas en la enseñanza de la disciplina.
24. ¿Qué cosa sería más difícil de aprender en matemática?, ¿en la función logarítmica y exponencial? Ejemplo	---	Pregunta complementaria de la #23. Explora además la concepción del profesor del aprendizaje de la matemática y de la función logarítmica y exponencial.
25. Hábleme acerca de la tecnología en sus clases ¿cuál es el rol que juega la tecnología en su salón de clases? Ejemplos y justificación	Miller (2000)	Pretende indagar el conocimiento que tiene el profesor sobre el papel de la tecnología en la matemática y su relación con la enseñanza en clases.
Aprendizaje de los estudiantes		
Háblame acerca del aprendizaje del estudiante,		
26. ¿Qué significa aprender matemáticas?	García (1994)	Tiene como objetivo saber su concepción sobre el aprendizaje de la matemática. Explora si considera los niveles cognitivos del pensamiento matemático.
27. ¿Cómo sabe si los estudiantes han comprendido algo? Por ejemplo, ¿cómo sabe si los estudiantes han comprendido la función exponencial? Ejemplo y justificación	Modificada de Miller (2000) y Carrillo (1998)	Que el profesor exprese su opinión ante el aprendizaje. Complemento de la pregunta #26.

Original de Pinto (2010), Modificada.

APÉNDICE C. Entrevistas semiestructuradas.

1. ENTREVISTA CLASE 1. CASO 1

I. ¿El objetivo entonces en esa primera sesión?

P. El objetivo es presentar el interés compuesto como motivación para crecimientos de tipo exponencial. Pero lo primero que hice, fue interés simple y después el interés compuesto.
I. ¿Segmentos de la clase?

P. Sí, hay dos momentos: uno en el que yo no tengo interés en la fórmula, sino, que ellos inclusive retomen cositas, como por ejemplo, cálculo de un interés de un porcentaje.
Al comienzo pregunto: ¿cómo calculamos tal…? Yo sé, que eso de todas maneras para ellos siempre toca seguirlo ahí trabajando. Y pues sí, entonces una primera parte, es más una cosa, como concreta, más que algebraica. La segunda parte es la que ya considero, cuando ya, bueno, tratamos de conseguir una expresión que recoja todo ese proceso que ustedes acaban de decir, etcétera. Ese sería el segundo segmento.

I. Con uno que te diga algo, tú…

P. Yo sigo, ¿sí me entiendes? Yo pienso hoy en día… yo me pongo a mirar si esa cuestión sería como la más apropiada, pero es que no se me ocurre de qué otra manera, cómo llevo yo a un poco de gente. ¿Cómo? Pero bueno, digamos yo me tranquilizo un poco de que…

I. Sí, porque en un momento dado tú les dices: ¿Cuál sería la fórmula? Te apoyas en un estudiante, pero ese estudiante…

P. Pero puede ser de pronto uno de los más brillantes, supongamos. ¿Y el resto? Qué tal que de pronto los otros no tengan ni idea de lo que está pasando ahí, y estén en un plan muy vacío haciendo así, -asiente con la cabeza- pero bueno, yo pienso que es eso, el riesgo que se corre siempre, ¿y cómo hace uno?

I. Tú llegas a esa parte de la fórmula y les dices: “ahora vamos a trabajar con el interés semestralmente”.

P. Ajá.

I. Ahí, ¿que buscas?

P. Pues el, ahora…

I. Nuevamente regularidades o…

P. O, exacto, nuevamente cómo ahí dentro de la expresión, se va transformando un poquito esa, cuando ya le involucramos esa otra consideración, ¿cierto? Y entonces ahí ya empieza a meterse la cosa de la ***n***. Pero, digamos que ya como lo esencial está como ya puesto, ya de ahí para adelante, yo pienso que la cosa es secundaria.

I. Ah, ¿lo esencial ya está?

P. Ya para mí…

I. ¿Qué es lo esencial?

P. Para mí lo esencial está es en que ya empezaron ellos a hacer un proceso de recursión ahí, de que esto se acumula a esto y esto se acumula a esto y allá arriba empieza a aparecer algo que da cuenta de eso, y es el exponente.

I. Ah, perfecto.

P. Ya de ahí en adelante, las cosas me parece que son secundarias; la expresión, pues sí, cambia un poquito pero, ya. Digamos que como que ya lo duro pasó.

P. Ya no es tan complicado que ellos pues, acompañen la otra partecita.

I. Si la siguieron hasta ahí.

P. Si ellos entendieron bien hasta ahí, ya la otra parte, no me parece tan complicada, de volver a hacer lo mismo, sólo que ya con más períodos de tiempo.

I. Un nuevo segmento, ¿cierto? Se cierra ahí un nuevo segmento, cuéntame sobre eso. Porque llegas ahí a esa parte, ahora vamos a resumir en una sola fórmula todas esas fórmulas.

P. Sí, ahí en esa parte sentía yo que aun cuando para mí digamos la parte más importante estaba antes, y que si la seguían era pues digamos, la otra parte, ya era de todas maneras, yo sentía que para ellos le estaba dando ya más dificultad pasar a la otra parte.

I. Ajá. ¿O sea que hay un nivel de dificultad más grande?

P. Ahí ya, claro.

I. Cuando vas a hacer la última fórmula.

P. La última fórmula se volvía un poquito más, pero…

I. ¿Por qué esa última se vuelve más…?

P. Porque, porque, creo yo, ya incorporan más cositas, más detalles. Es que la del comienzo pueden desarmar, armar y miro aquí y tal, pero ahora ya hay más cosas y entonces ellos ya tienen que decir: miren es que también hay que dividir acá y multiplicar allá arriba, entonces ya son más elementos, en cambio si de pronto paso a paso lo pueden ir siguiendo, pero ya a la hora de resumir ahí en las fórmulas, entonces sí más, de hecho creo que yo hago ahí la mención; me siento un poco incómodo cuando les digo: pero ustedes están como muy callados, yo siento que en el fondo creo que se están es colgando, algo así. Y de todas maneras yo siento que ya empiezan a cansarse, ellos no están acostumbrados a eso. O sea, yo lo que estoy haciendo, siento que es algo como un poco particular, tengo la impresión de que eso no es lo que usualmente se hace con esos estudiantes. No están acostumbrados a veces a ese tipo de exposiciones. Pero me parece que algo se puede estar ganando ahí, lo que pasa es que no sé cómo…

I. Sí, porque digamos en algunos de los pasos, tú cuando vas a cambiar a lo semestral o cuando vas a cambiar ya a la fórmula definitiva de la preguntas: ¿Y ustedes qué sospechan, qué pasará ahí? Tú buscas algo con eso, ¿cierto?

P. Sí.

I. ¿Qué buscas? Sí, cómo para qué haces esas preguntas: ¿Qué pasará?

P. Pues, estoy esperando que ellos vayan viendo que se está generando ahí algo una cosa, que se está generando algo, que hay una regularidad ahí, que yo espero que la estén viendo, ¿cierto?

I. O sea, que buscas ayudarles a verla o a ver tú que ellos la están viendo. Ambas cosas de pronto, ¿cierto?

P. A ver, yo quiero que, que ellos vean que sí está ahí saliendo algo que, el cual, ya después uno pues igual, cuando va a hacerla, va a aplicar así digamos entre comillas a unos problemitas, ya ellos ven eso y saben que hubo un momento en que se llegó a eso. Pero siento que de alguna manera eso quedó ahí y no se volvió a hacer algo como por el estilo, ¿sí me entiendes? O sea, ese proceso, por eso digo yo, no sé…

I. Ah, y en cambio a mí me parece que lo que es clase una, clase dos y clase tres, están totalmente armadas. Y en la tres vuelves a hacer esto de la uno de una manera… hermosa, o sea tendríamos que ahora… que mirarlo.

P. Tendríamos que mirarlo. Sí, porque es que yo siento, me da pesar pero este proceso, siento como que se siembra algo ahí, pero no sé en qué momento uno como que lo aprovecha a fondo.

I. ¿Qué crees que se siembra?

P. Pues que se siembra el hecho de que en esta función, hay una cosa ahí que se está iterando y que de alguna manera en el modelo matemático se refleja allá en el exponente. Pero yo no sé en qué momento, o sea es que yo, lo que yo veo es…

I. Ya te entiendo.

P. Que por ejemplo que ellos, después simplemente se les da la fórmula y ellos van, la remplazan, etcétera. Pero si yo no hiciera eso de darles la fórmula, ya después que dijera, bueno es que ellos van a hacer como la cuestión de la… y ahí si ya no creo.

I. Ajá, entiendo.

P. Es como, por eso te decía, es como tranquilizar un poco la conciencia de que sí se hizo algo… por allá, pero no sé que tan efectivo digamos haya sido, de que ayude a ver bien…

I. La esencia de ese…

P. <u>La esencia de un, de un crecimiento exponencial</u>. No sé.

I. Ajá. Espérate y miramos el minuto cuarenta y siete y comentamos sobre eso.

P. Bueno.

I. Bueno, entonces aquí tú les dices: “vamos a hacer ejercicios donde van a afianzar”. Y les propones el nueve y el once. Cuando tú les dices, “van a afianzar”, ¿qué se supone que van a afianzar?

P. Lo que pasa es que en realidad… lo que van es a identificar, primero pues que estamos en una situación como la anterior. Que nos están preguntando que después de tantos años, con un interés compuesto, cuánta plata hay, pues es lo mismo. Lo único que tienen es que mirar cuáles son los valores ahí de las variables, que están ahí implícitas en el problema, que las identifiquen, que aprendan a expresarlas por ejemplo, si le dicen un cierto porcentaje, si le dicen no sé un dieciséis por ciento, lo que sea, que lo expresen en la forma decimal, etcétera, todos los detallitos y que hagan las operaciones. Y yo he encontrado que en eso, hay un, estoy seguro que ellos se desempeñan bien en eso, eso ahí no hay problema, eso de sustituir ahí, eso no tiene ningún inconveniente, la calculadora da buena cuenta de las operaciones, no hay problema.

I. Eh, Ernesto. Y cuando tú les propones inicialmente, tú les dices, “vamos a hacer el nueve y el once” y después te decides, solamente por el once.

P. Porque, es que en el nueve, en el nueve solamente es semestral, entonces en el once ya hay de distintas maneras para que la ***n*** pueda variar.

I. Hay tantas, que hasta está lo de continuo, ¿cierto?

P. Sí, creo que yo les digo que la g no, no sé si…

I. Sí, tú les dices, que ese lo dejemos.

P. Para otra.

I. Que lo vamos a hacer en otra cosa. ¿Eso lo tenías planeado?

P. Sí.

I. ¿Para después hilarlo con otras cosas?

P. Sí, sí, sí. Por supuesto, porque allí no podrían... no sabrían.

I. Y los pones a trabajar en grupo, ¿cierto? ¿Qué pretendes tú con ponerlos a trabajar en grupo?

P. Yo espero que entre ellos se colaboren a colocar adecuadamente las cosas. Por ejemplo, yo sé que no todo el mundo escribe apropiadamente los porcentajes, por ejemplo, si el porcentaje es de nueve coma cinco por ciento por decir algo, que creo que viene por ahí en alguno, escribirlo en forma decimal tiene sus detallitos y entonces espero que ahí se ayuden por ejemplo. Ah, que por ejemplo detallitos: que si uno les dice que es mensual, entonces ellos, a veces al comienzo por la agilidad, o perdón donde más se presenta es trimestral, si es trimestral entonces ponen tres, pero se les olvida que son cuatro períodos en el año.

I. Correcto.

P. Sí, cosas de esa clase. Ahí entre, cuando son varios pues entonces, alguno como que lo tiene más presente que otro, entonces…

I. Y tú los dejas que trabajen ahí solitos como unos cinco minutos y después ya ahí, sí te vas al tablero y empiezas a ayudarles.

P. Y empezamos a mirar a ver como…

I. ¿Por qué lo haces así o para qué?

P. Pues es como para de alguna manera validar lo que están haciendo, o algo así. Para confirmar, no sé. Para que estén seguros que ya quedó bien hecho. O sea, si yo les dejo allá que hagan y ya no revisamos, tocaría puesto por puesto, en cambio en el tablero, allá de alguna manera todos se enteran de, cómo era lo correcto, digámoslo así.

I. Cuando están haciendo en el tablero, cuando tú ya estás haciendo ese ejercicio con ellos en el tablero, varios de los que están sentados de los estudiantes empiezan a participar. Tú por lo general, les dices, Camilo, Rodrigo o Martha, en algún momento tú pides que un estudiante participe y no, empieza a contestar el otro y no lo dejas, o sea, dices: no yo dije fue… fulanito, eh, ¿para qué eliges a uno o al otro, es…?

P. Lo que pasa es que quiero de alguna manera, mm, eh, cómo se dice, no es, la palabra no es obligar, pero de alguna manera es como hacer que algunas personas que han estado o que yo pienso que es su manera de ser, son muy callados y muy poco participativos… eh…

I. ¿Invitarlos de alguna forma?

P. Invitarlos a que participen, para yo de alguna manera tener alguna información de que sí están siguiendo lo que se está haciendo, o sea, es más por eso. Porque si me pongo yo a escuchar al otro que está casi siempre participando, pues yo sé que ese va como bien, pero yo quiero ver qué pasa con los otros, por eso me voy a… fulanita. Entonces, ella como que se obliga también a despertar porque a veces no se sienten algunos, es su naturaleza, no sé, no les gusta ni pasar al tablero, ni hablar, ni nada, les da como miedo. Y es que por eso te digo, usualmente no es ese el estilo que yo noto que se utiliza… en las clases…

I. ¿En la universidad?

P. En la universidad, porque el estilo es más expositivo, entonces no es tanto que interactuar ahí con el estudiante. Yo siento que es muy importante en la medida en que de alguna manera uno hace como un paneo más de que la mayoría, por lo menos va como logrando las cositas que uno quiere.

I. Ellos siguen trabajando en los ejercicios y en un momento dado tú les dices: y revisen las respuestas en el libro, confirmen lo que ustedes han hecho, échenle una miradita a las respuestas. ¿Qué pretendes con eso?

P. Pues de alguna manera, ya entonces, primero lo habíamos hecho en el tablero, luego ahora ya de alguna forma ellos tienen que empezar como a hacer un control de lo que están haciendo, es probable que hallan metido alguna cantidad mal o se hayan equivocado en algún detallito, y como esto es un proceso, ya se vuelve un poco mecánico. La cuestión de comparar la respuesta, es algo que les ayuda de alguna manera a mirar si las cosas que hicieron pues, como que las hicieron bien o no.

I. Tú pasas después por cada grupo, ¿cierto? Y vas conversando con cada grupo.

P. Ajá.

I. ¿Para qué esa conversación con cada grupo?

P. Es para que sientan de alguna forma que yo sigo ahí con ellos, que no me aislé por allá de ellos, y que no me interesa lo que pasa de ahí en adelante. Y de alguna manera cuando yo voy pasando por los puestos estoy mirando que continúan trabajando en lo que se espera que trabajen. Si yo no hago eso, pues de pronto los muchachos se ponen a hacer otra cosa. Sí, muy fácilmente, entonces yo digo, pues ahí se puede perder un trabajo que pues para él es importante, que continúe ya trabajando en lo que se hace. A veces ellos dicen: ah, eso yo ya lo entendí, y entonces se ponen a hacer otra cosa de otra clase. Eso es muy fácil que uno a veces lo pueda confirmar. Te sientas, tú allá en tu escritorio y te quedas allá sentada y después pasas así rápido, y pum está un estudiante haciendo otra cosa de otra asignatura muy fácilmente.

I. Ernesto, y…

P. Como también algo de control también…Y de, y yo sé que ellos sienten como la cercanía de uno ahí, que ellos sienten que uno está con ellos, como en el parto de la cuestión.

I. Sí, sí, sí.

P. En el trabajo de conseguir algo.

I. Muchos de los estudiantes, cuando pasas ahí por los grupos te preguntan: y bueno, cómo introduzco esto en la calculadora, y pero el paréntesis, pero y tal. Entonces tú les das instrucciones de, de manejo de la calculadora. Qué papel juega ahí la calculadora en todo el proceso que tú estás siguiendo para que, para que armen ese concepto.

P. ¿Qué papel juega la calculadora?

I. Sí…

P. Pues, por ahora, con la calculadora simplemente que es para hacer operaciones, es simplemente para agilizar algunos cálculos. Por ahora no tenía más intención, como no son calculadoras graficadoras, ni nada de esas cosas, entonces simplemente facilitar los cálculos, pero no tenía otra intención. Ahora, de hecho esos cálculos a mano, no sé cómo hace uno eso.

I. Bueno, entonces pasemos ahora a otro segmento de clase.

P. Sí.

I. Listo.

P. Es que, ahí yo dije una cosa que ahorita me estoy fijando. Que he debido es ponerlos en aprietos con el mismo ejercicio, o sea, simplemente les hubiera podido decir: cuál es el tiempo que debió transcurrir para que el capital sea tal, y que ellos se dieran cuenta. Profe, pero es que no puedo despejar, cómo despejo de acá y no sé qué. O sea, esperar a que se generara la dificultad. Y yo lo que hice fue adelantarla ahí y la dije. Entonces, ahí yo no… hoy en día no, no pienso que ese no sería el camino como más…

I. No lo harías así.

P. No, no.

I. Esperarías a que a ellos se les presente la dificultad.

P. Ahí, y entonces dejarla como pendiente, para que eso motive el otro proceso, el de la logaritmación, y esas cosas.

I. Además de que eso… Ah, tú dices para que motive el proceso de la logaritmación...

P. Claro. Ellos dicen: Cómo, tenemos pendiente algo, cómo así, etcétera. Y cuando ya uno ve los logaritmos, ya eso da, le ayuda a uno a hacer ese tipo de cosas que uno había hecho antes.

I. Y conceptualmente les ayuda.

P. Conceptualmente les ayuda.

I. Tú en este lapso llegas y les dices: "Bueno, entonces la función es, la función exponencial". Y les dices: "coloquen ese título". ¿Cierto?

P. Ajá.

I. ¿Por qué hasta ese momento? Y les dices: Devuélvanse y todos se devuelven rápido en su cuaderno a… escribir el título.

P. Sí, porque es que yo veo que de alguna manera, decir un título al comienzo, que para ellos… qué será… o sea, colocarlo por colocarlo me parecía que no, o me parece que eso no es como muy… en cambio ya ellos si lo… si ya lo han, <u>ya eso les dice algo. Entonces ahora sí ya colocar eso ahí tiene sentido</u> pero de resto es escribir por escribir. A mí eso no me parece.

I. Ajá, o sea que ellos ahí le están poniendo nombre a algo que…

P. Exacto, <u>a algo que ya a ellos les dice algo.</u>

I. Bueno miremos la otra parte y comentamos.

I. Ahí hablas de modelos, cierto y les hablas de la lineal y dices: entonces, quisiéramos algo que nos sirva de modelo. ¿Cómo es ese… ese ejemplo?

P. Pues yo pienso que ahí la cuestión es, <u>algo que le ayude a representar con matemáticas otra cosa</u>. Por ejemplo en el caso que menciono ahí.

I. En el caso que mencionas, sí.

P. Del residuo y pues ellos, pues pero pues es algo como muy familiar para ellos y cuando utilizo la función lineal de alguna manera, tengo un instrumento matemático que me ayuda a contestar muchas cosas, puedo calcular cuánto, cuánto sería la facturación si el consumo es tanto o al contrario, etcétera. Entonces, de alguna manera el concepto de modelo que en ese momento, aun cuando yo creo que en ningún momento en el curso lo he hecho muy explícito, <u>es algo que le ayuda a uno en este momento a representar otra cosa, pero en este caso el modelo es matemático.</u>

I. Ajá. Y escogiste el ejercicio de la hoja, ¿cierto?

P. De la hoja.

I. De doblarla. ¿Por qué ese?

P. Porque quería que de alguna manera ese dos a la equis no quedara como también suelto, que uno dice, bueno, ahora usted pone una cosa que en apariencia es como muy sencilla, se ve como dos símbolos ahí chiquitos, el dos y la equis y ya, en cambio la otra se veía con muchas más cosas ahí, ¿cierto? Inclusive en este momento siento que en la otra aun cuando, si tú miras hay un poco de letras y es muy probable que ellos vean variables por todos lados.

I. Sí.

P. Entonces, cuando yo digo, no es que la variable está en el exponente y pongo un poco de letras, y ellos dicen: no pero es que también puede variar esto y esto, etcétera entonces de alguna manera no sé, si se precisó que es cuando las otras cosas se mantienen fijas y que la otra se pone a variar. Entonces no sé si de pronto eso también pueda haber sido una omisión ahí. Ahorita por ejemplo sí es muy claro, dos bien explícito y una equis, entonces ya la cuestión es más, más como más fácil de apreciar la variable que está allá arriba encaramada en ese, pero no quería dejarla como una cuestión puramente de que pongo aquí, pongo acá, sino que estuviera ligada también a algo para ellos familiar, y el de la hojita de alguna manera tiene relación, aun cuando la relación ahora es un poco diferente porque es que allá en el caso de los tiempos, uno puede considerar tiempos intermedios, etcétera y puede pensar en cosas como de alguna manera continuas, esas cosas, en cambio en el de la hojita, no.

I. Pero también sigue siendo recursivo.

P. Pero también es recursivo, pero entonces si tú miras la gráfica, es un punto aislado, es una cosa discreta.

I. Ajá.

P. Yo creo que ahí los estudiantes no, no. O sea lo que yo he encontrado, no se ponen a meterse en muchos detallitos que uno después ya a nivel más, como ya más formal y todo, uno sabe que ahí no todo, hay un poco de cosas que uno no está dando cuenta y que no está justificando.

I. Ajá.

P. Por ejemplo, cuando la, uno pone dos a la equis y uno dice: esto y tal, pero es que ellos no saben elevar a cualquier equis, y esa cosa por ejemplo, yo la estoy asumiendo que sí lo hacen porque la calculadora lo hace. Pero el significado de elevar dos a un número como raíz de dos, etcétera, a lo mejor eso para ellos no dice nada, y ellos saben que sí se puede porque la calculadora lo hace, pero no creo que signifique algo para ellos.

I. Bueno, ¿qué me estabas diciendo de esta última parte de la clase, Ernesto?

P. No, que hay una expresión que yo dije que las funciones exponenciales crecen muy rápido. Esa expresión así, puede que se tome tan a pecho, que después puede bloquear el otro tipo de funciones exponenciales donde se da lo contrario.

I. Ajá.

P. Que decrecen muy rápido. Entonces, yo creo que hubiera sido más preciso si hubiera dicho: pueden eventualmente crecer muy rápido.

I. Ajá.

P. Pueden… como para no decir siempre.

I. O, hay algunas que crecen muy rápido…

P. Algunas…pero lo que pasa es que no le he mostrado de otra clase.

I. De otra clase. Entonces, sería más bien, estas funciones.

P. Esta, esta crece muy rápido. Algo así más bien.

I. Ajá. Las que estamos viendo hasta ahora.

P. Sí, esa generalización ahí fue un poco peligrosa.

I. Y para eso mismo era que tú escogías el número de cincuenta. Para que se dieran cuenta que daba un número grandísimo…

P. Que daba un número grande, era para eso.

I. Era para eso.

P. Lo que pasa es que ya físicamente de pronto ahí la cuestión la tuve, la debí haber como organizado un poco porque yo dije pero cómo hago esto, y llegar a… no, más bien es como si, en eso estaba pensando que la situación de doblar hasta cierto punto era, pero es que llega un momento en que ya no hay papel prácticamente. Entonces más bien era como si, ahí he debido cambiar un poco la imagen, de que más bien, que consigamos hojas y hagan la cuestión ahí si no hay problema, tu puedes ir acomodando hojas y hojas y hojas.

I. Ajá.

P. ¿Sí me explico? O sea, no sé como…

I. Y se van dando cuenta del paquete tan grande que se…

P. Exacto.

I. Que se acomoda a la siguiente y en la siguiente es mucho más…

P. Exacto, algo así.

I. Mucho mayor. No, es que va una por una, ¿cierto?

P. Ajá. Sí, ahí la imagen física, yo sé que a ellos pudo también causarles problemas.

I. Pero esa imagen lo que tú querías era la recursividad o…

P. Era sí, la recursividad, llegar a…

I. Como lo expresaron con base dos y dos a la uno, dos a la dos. Esa era, ese era el…

P. Sí, sí. Porque hubiera podido en vez de doblar, hubiera podido, pensemos que recortamos la hoja y colocamos sobre la otra. El hecho de recortar, es que la cuestión de eso y de doblar, eso manteniendo el papel es más cómodo si yo digo recortemos y coloquemos encima.

I. Ajá, sí. A mí…

P. O sea, es por la cuestión física, porque ellos dicen: pero es que ya no puedo doblar más.

I. Ajá.

P. En cambio recortar todavía puede ser como más, más… pero bueno, son cosas secundarias.

I. Yo pensaba que tú habías elegido el ejercicio porque llegaba un momento en el cual a ellos ya les tocaba esforzarse y no solamente de quedarse en lo físico, sino esforzarse y decir: bueno qué es lo que está pasando aquí, para poder decir más allá qué que pasaría. Porque tú les dices: “redondeemos”.

P. Ajá.

I. Vamos a redondear, ahora entonces cómo sería con cincuenta hojas. Entonces, a mí me parece que esa sería, pensé que lo habías planeado como una exigencia mayor, ya no los voy a dejar que manipulen, ahora muestre a ver qué fue lo que elaboraron y si pueden pensar qué pasaría con esto.

P. Sí, claro, por ejemplo, uno o yo, esperaba, que bueno, que hicieran la cuestión del doblez unas poquitas veces, pero que detrás de eso estuviera presente el hecho de que cada vez estoy por dos, por dos, por dos añadiendo gruesos de hojas. Llega un momento en que ya no se puede, entonces espero eso, ahora espero que sea una cantidad grande. Dos a la cincuenta, la calculadora ya no me va a decir cuál es… el resultado. Pero lo otro, también ponerlo le ayuda a uno a ver que es una cantidad muy grande.

I. Y tú empiezas a preguntarles cuántas cifras tiene el número dos a la cincuenta. Y bueno, y luego les dices que más adelante por ejemplo se van a poder dar cuenta cuántas cifras tiene el número dos a la cuatrocientos.

P. Ajá.

I. Y… hay alguno que te pregunta y también podríamos saber cuáles son… pero bueno para qué eso de decirles que cuántas cifras tiene el número dos a la cincuenta, o…

P. Bueno, el hecho es que, que uno de momento pudiera, bueno, qué tan importante pudiera ser para él decir cuántas cifras tiene, a cambio simplemente: no es un número muy grande y ya. Pero resulta que una de las utilidades precisamente de los logaritmos, va a ser, es que precisamente le va a ayudar a uno a contestar eso. Entonces de alguna manera ellos también ven ahí otra cosa relacionada con esa actividad.

I. Ajá. Bueno, y ahí se termina la clase y les dices que continúan el próximo lunes, que traigan libro o fotocopias y, y calculadora.

2. ENTREVISTA CLASE 2. CASO 1

I. Bueno, Ernesto entonces, clase dos o sesión dos más bien. Igual, me gustaría que me hablaras de cuál es el objetivo de esa sesión, si tuviste que hacer algún cambio a lo que tenías planeado y cuáles son los momentos que consideras como importantes en esa clase.

P. Bueno, ahí ya la intención era mirar el comportamiento gráfico de las funciones exponenciales. Entonces, mi intención era que a partir de la función *y* igual a dos a la equis se empezara a apreciar detalles: asíntota horizontal, de que vertical no tiene, de que corta en uno en la *y*, eh, no me puse a detenerme mucho en otros detalles, por ejemplo de definiciones de exponentes irracionales ni nada de esas cosas porque yo pensaba que eso alarga mucho las cosas, que los estudiantes no, y de hecho ninguno se pregunta nada de eso: qué pasa si yo elevo dos a la raíz de… cosas de esa clase. Entonces yo prefiero evitar eso, empezando porque eso siempre es una cosa complicada, ponerse a mirar cómo es que se define eso ahí.

I. Ajá, Ernesto, terminaste la sesión anterior trabajando con dos a la equis ¿cierto? Con el ejercicio del papel y esto. Comenzaste aquí nuevamente con dos a la equis.

P. Con dos a la equis.

I. ¿Es solamente para que eso tenga una secuencia o hay una razón especial para que hayas escogido dos a la equis?

P. No, no. Es la misma, porque por un lado es muy sencilla la cuestión de la gráfica y segundo, porque digamos es como ver el otro aspecto ya de la gráfica, de lo que estaban haciendo la vez pasada. Ya cositas que ellos habían visto, que eso crece muy rápido cuando yo pongo los papeles, etcétera; ahora lo estamos apreciando ahí en un gráfico, sólo que por ejemplo y nadie se pregunta, bueno ahí ya por ejemplo pensar en cosas negativas, pues ya de la situación anterior, eso ya no.

I. Bueno, cuando tú estás retomando lo de la clase, le preguntas a un estudiante: "bueno, ¿qué es una función exponencial?", y él te responde: "función exponencial, la que tiene variable el exponente", tú agregas: "y la base es constante".

P. Constante.

I. Eso no lo habías dicho hasta ese momento sino es la primera vez que…

P. Es la primera vez, a mí me parece que es que todavía no hemos como formalizado la definición de alguna manera o sea, como poco a poco ir agregando ingredientes a la definición.

I. Lo que tú, o, ¿para qué buscas tú que ellos trabajen con los puntos intermedios, solamente para que se den cuenta que la gráfica no es una línea recta sino una curva, o…?

P. Para que… a ver, pues sí, quería era que quedara claro que esos no eran segmentos de recta, que eran suaves…que eran pues, curvos. Y que esos pues, mejor dicho que, cómo explicar… que eso no pega unos brincos por allá, entre el dos y el tres el punto no está, podrías pensar en la imaginación que está por allá arriba. Pero de todas maneras, el estudiante cuando traza una línea recta, está como imaginando, si lo hace, que es como por esos lados que está el otro valor.

I. Ajá, ajá. Entonces ahí cuando quieren trazar esos puntos intermedios, empiezan a jugar con los exponentes, ¿cierto? ¿Y se hace como un recorderis del significado de los exponentes? ¿O de la mecánica como entender los exponentes…?

P. Pues en los, sí el exponente es entero positivo, pues ya dijimos, ya se vio ahí que ellos no tienen dificultades.

I. Ajá.

P. Cuando el caso de uno punto cinco, por ejemplo, que yo me di cuenta que claro, eso aun cuando se ve el curso anterior, ahí de nuevo ya eso toca recuperarlo, eso no es algo muy frecuente para ellos. Pensarlo como una fracción y la fracción como una raíz. Y yo pienso que con ese ejemplito ahí, era como por mostrar cómo es la cosa y decirles que algo parecido ocurre con los demás, pero no hacer más hincapié en eso porque yo sé que eso no. Ellos, eh, ahí digamos para los efectos de lo que uno pretende que es que tengan su gráfica, que la asocien con cierto tipo de situaciones, eh, ya hacer unas discusiones más detalladas de las, de esos exponentes, me parecía que no. Por el tiempo también que no teníamos, es que es muy poco. Entonces, no. Si le dedicábamos tiempo a eso, no.

I. Ajá, ¿y por qué o para qué haces esa comparación con la parábola?

P. Para mirar por ejemplo otros aspectos. Digamos, eh, descripciones así del comportamiento de la función. Decía por ejemplo: hay simetría respecto a un cierto eje, si es par o no es par, si hay… si hay qué, dónde crece, dónde decrece, cositas de esa naturaleza.

I. O sea que es más para caracterizar a la…

P. Para caracterizar la gráfica y ya.

I. Que para diferenciarla de la otra.

P. Más, exacto, más para eso… más para caracterizarla. Porque a partir de eso, digamos, de ir tomando algunos valores, ellos, ya ellos están haciendo la, como la distinción, de por ejemplo que si cogemos a la izquierda; simplemente va bajando, va bajando y listo y a la derecha va subiendo, va subiendo y de alguna manera eso me va a ayudar luego a mirar cuál es el rango de la función. Entonces, si ya cogió para allá y ésta sigue bajando hasta, pero no toca la cosa esa. Entonces uno dice: ah, pues el rango es de cero en adelante.

I. O sea, que ahí ya estás buscando también trabajar… el dominio.

P. Trabajar… sí claro, claro de alguna manera y más adelante creo que ahí se hace explícito.

I. Ajá. Entonces vamos a mirar el otro pedacito. Lo que habías dicho de los medios tecnológicos. Lo de las aplicaciones…

P. Lo de los medios tecnológicos, yo reconozco que ahí se trabajó con las uñas. Esas gráficas; un poco de tiempo que desperdicia uno ahí haciendo esfuerzos para hacer esas descripciones ahí. Eso mejor con una graficadora, mil veces. Y las comparaciones y todo sería mejor, aun cuando yo veo también que el hecho de que los estudiantes vayan haciendo algunos cálculos y toda esa cosa como que los, les ayuda también a encontrar cosas que simplemente si yo digo: esta es la gráfica y ya, en cambio si ellos van consiguiendo algunos puntitos y más o menos este es el comportamiento, etcétera, la van como construyendo de alguna forma.

I. Ajá.

P. O sea, yo también veo ahí algo de ello. O sea, que él mismo se da cuenta que sí son esos los puntos y no que la gráfica, esa es la que da el programa y ya uno, como con fe ciega ahí, pero no, no tiene claridad de qué pasó ahí.

P. Y yo preferiría que hiciera primero el trabajo ahí un poco, eh, un poco…

I. Rústico.

P. Rústico, pero muy poco aproximado de, de, un poco aproximado de hacer con puntitos a mano las cosas y más bien después recurrir a una cosa que le ayude a encontrar algo muy bien hecho, como una graficadora, pero ya él sabe, que sí es así que se comporta.

I. Entonces, estamos graficando, cierto. Seguimos graficando. ¿Pero en esta parte hay algo nuevo que tú pretendías?

P. No, ya es empezar a mirar cómo la base al cambiar el valor, afecta fundamentalmente de dos maneras la gráfica. Que crece o decrece y quitar la base uno.

I. Ajá. ¿La intención?

P. Es para poder después ya decir, en general una función exponencial es tal y tal cosa.

I. Ajá. O sea, caracterizarla ayudándote en la gráfica.

P. De la gráfica.

I. Ajá. Pero cuando hablas del tobogán, todo el tiempo te escuché haciendo énfasis en un tobogán que abre uno a la derecha y otro a la izquierda, y todas las otras veces les habías dicho de lo creciente pero no tengo claro que en algún momento les hayas hablado de decreciente. ¿Era con intención, o...?

P. ¿Dónde? ¿Cómo así?

I. O sea, tú les dices: definitivamente podemos ver que hay dos tipos de toboganes, uno que abre a la derecha, otro que abre a la izquierda. El que ya habían analizado hasta el momento, pues era el creciente, ¿cierto? Y les habías hecho énfasis en que era crecimiento y crecimiento exponencial, pero explícitamente no les dices: y entonces aquí tendríamos decrecimiento exponencial. ¿Eso no lo dices con intención para después decirlo o…?

P. No. Yo creo que ahí más, estaba jugando en ese momento era como con la imagen ahí del…

I. Ah, la imagen…

P. La imagen de que es así o se abre para acá. Pero creo que más adelante sí se explicita que crece o decrece.

I. Ajá.

P. En algún momento donde hace un resumen, uno dice: hay dos tipos de gráficas y en esta gráfica crece y en esta otra está decreciendo.

I. Ajá.

P. Creo que por ahí es la---

I. La idea de establecer un resumen de esos es…

P. Es simplemente como que el estudiante vea que ya no hay más posibilidades, que ahí ya están como recogidas, que cada vez que quiera hacer un grafico de una función exponencial, le pinta algo así o asá.

P. Que a veces los profesores como que no sabemos dar cuenta, y es cuando como por ejemplo estoy diciendo, que menos dos a la un medio, por ejemplo no está definido (escribe en un cuaderno), porque es la raíz cuadrada de dos. Pero mira los pasitos que vienen a continuación, no sé si tú te acuerdas que, y dices, bueno, yo voy a escribir: n un medio.

I. Sí, me acuerdo que me comentaste, pero no me acuerdo en específico

P. Bueno, el un medio lo voy a escribir como dos cuartos. Entonces, si yo le preguntara a un profesor: ¿Esto es exactamente lo mismo que está aquí arriba?

I. Él diría que sí.

P. Diría que sí porque dos cuartos… Bueno, ahora si yo escribiera eso como menos dos elevado a la dos por un cuarto, diría: ¿es lo mismo? Pues es lo mismo porque dos por un cuarto es dos cuartos. Entonces ahí vamos bien. Ahora dicen, bueno y entonces hay una propiedad de los exponentes que te permite escribir eso así. Porque es la propiedad que dice: potencia de potencias… (¿No?) Multiplica los exponentes.

I. Ajá.

P. Ahora elevas el menos dos a la dos y queda cuatro, pero resulta que ahora sí ya se puede. Queda la raíz cuarta de cuatro que es… uno y pico. Entonces, en dónde, en qué momento del proceso hubo algo raro…

I. ¿Qué más íbamos a decir hasta ahí?

P. Que como qué otra pregunta de esa parte. Ahí lo que se pone uno a mirar ahora, es que el estudiante no vaya a confundir, que uno sí puede hacer, calcular potencias, algunas potencias con base negativa, pero es muy distinto a decir que la función esté definida: función exponencial con base negativa. Puede, uno ver que menos dos elevado a la dos lo puede ser.

I. Ajá.

P. Pero…

I. Pero otra cosa es la función.

P. Pero menos dos elevado a la equis. Ya de eso no es una función exponencial. Yo podría definir menos dos a la equis para aquellos valores de equis, en donde esto tenga sentido. Pero el dominio ya no sería lo mismo, reales. Sería un tobogán con una cantidad muy grande de huecos.

I. Tú lo dices ahí.

P. ¿Sí?

I. Sí, tú lo dices ahí. No dices todo eso que se podría definir, pero si hablas de que quedaría un tobogán con muchísimos huecos.

P. Sí. Ahora, eso sí ya se hace en los complejos.

I. Cierto.

P. Ahí ya vienen los ejercicios de esa sección.

I. Sí, tú pones ejercicios ahí de la once a la catorce.

P. Y creo que lo hay de alguna forma ahí, lo que se busca… si quieres grabar ese pedacito. ¿Está grabando? Creo que los ejercicios que tengo ahí, más que dirigidos a la función exponencial, yo pienso que están más dirigidos es hacia las transformaciones de las funciones.

I. Exacto, sí.

P. Es eso. Lo que pasa con la gráfica cuando…

I. ¿Y para qué ponernos a hacer esas transformaciones?

P. Porque en los problemas, los problemas no todos van a ser todos del mismo **a** a la… una variable, sino van a tener otras cosas.

I. Ajá.

P. Sino que van a tener otras cosas, entonces van a hacer esas gráficas desplazadas, o estiradas o cosas de esa clase.

I. ¿Entonces la finalidad, es cuál?

P. Entonces, la finalidad es ver cómo, cómo se transforma la gráfica, cuando se hace alguno, se hacen algunos cambios ahí en la expresión. Digamos, si yo le pongo, por decir algo… cuatro por dos a la equis, entonces recordar que ese factor ahí se va a producir un estiramiento vertical.

I. Ajá.

P. Entonces, al producir el estiramiento vertical, ya no va a pasar por el uno sino por el cuatro, ¿sí? Si yo pongo un menos, entonces que vean que se reflejó, etcétera, ya. Pero lo otro que hay que tener cuidado es que esas ya no son funciones exponenciales.

I. Sí…

P. Sencillamente, ya no. Se construyeron con eso, pero ya no son.

I. Me gustaría que miremos los ejercicios que les colocas porque me parece que vienen por grupitos y son muy interesantes. Tú les dices: trabajemos del once al catorce, ¿cierto?

P. Sí, del once al catorce, los cuatro lo que hacen es buscar la pareja que corresponde a la, a la, perdón…

I. La gráfica.

P. Es la gráfica, y es buscar la base.

I. Ajá.

P. Pero, entonces la base la consiguen, espero que la consigan mirando, mirando el puntico que le dan. Entonces, ellos dicen: **a** a la equis, entonces, eh, el resultado por ejemplo del primero que da nueve, ¿cierto?

I. ¿Quieres que miremos un pedacito de ese cómo lo solucionan?

P. Bueno.

I. Bueno, entonces estos últimos más o menos cuarenta minutos los gastan resolviendo los ejercicios del once al treinta y dos. Y entonces hablábamos que del once al catorce había una intención, ¿cierto?

P. La intención es efectuar transformaciones con funciones exponenciales.

I. Me estás diciendo mentiras…

P. Ah, no, no, no… Ese es buscar la base.

I. Ah… buscar la base.

P. Buscar la base, que implica buscar una raíz, todavía no el exponente.

I. A partir de la gráfica, veo que hay un punto que les da en esa gráfica, ¿cierto?

P. Sí.

I. ¿O sea que siguen con énfasis en la gráfica?

P. Todavía.

I. ¿Y del quince al veinte?

P. Ahí sí ya son las transformaciones.

I. Tú les das como ciertas indicaciones. ¿Qué es lo que les indicas a ellos?

P. Pues que hay que mirar cuál es la que se va a mover. Entonces, hay que identificar de las que están ahí, cuál es la que está en la forma **a** a la equis. Entonces por ejemplo si tú miras las del cinco, habría que buscar la que esté cinco a la equis.

I. Ahí no tiene nada que ver directamente la primera escritura de la presentación de la gráfica.

P. No, y una vez que la identifiquen, entonces esa es la que va a empezar a transformar.

I. Y empezarla a transformar, pero buscar esa presentación en la gráfica.

P. Ajá.

I. ¿Te parece esa mucho más elaborada, respecto a las exigencias que le hacen de la once a la catorce?

P. Yo sí creo, claro, involucran más cosas. Porque de las del once al catorce ya tú sabes hacer el primero y luego se repite la misma cosa.

I. En cambio este…

P. Y en cambio en este ya tú tienes que mirar a cuál de esas transformaciones que ya vimos que son varias corresponde eso. Que si la horizontal, vertical, que si la estiro, todas esas cosas, ahí si ya son más detallitos.

I. Y de la veintinueve a la treinta y seis, dice: “grafique la función sin usar el procedimiento de trazar puntos, sino partiendo de las gráficas de la figura cuatro”.

P. Entonces, ahora sí ya la cosa será todavía más exigente porque ya no te dan las pistas, sino tú tienes que hacer todo el trabajo solo. Entonces si te dan cinco a la equis más uno, menos tres. Entonces tú dices, bueno, entonces tienes primero que decir cuál es tu punto de partida, entonces, ya tengo que hacer cinco a la equis pero cómo es la gráfica de cinco a la equis. Entonces él te ayuda de alguna manera, te dice: vaya a buscar en la parte donde están todas esas gráficas, para que te hagas una idea cómo es, por lo menos que tengas si quiera tres puntitos o algo así. Y empiezas entonces ahora sí, ahí en esa expresión algebraica; qué tengo que ir haciendo yo para que eso pase. Ah, pues que lo muevo uno a la derecha, que después la bajo, tal cosa. Entonces si uno lo hace así a mano pues lógico que hay más, una tarea más compleja que la anterior.

I. Si te dicen: sin usar puntos, ¿por qué dice: haga la gráfica sin usar puntos?

P. Sin usar puntos quiere decir: no se ponga a hacer tablas, o sea, no se ponga a poner este vale tanto, este vale tanto, sino unir los puntos.

I. Sino que ya tiene que saber que como ya tiene más tres, quiere decir que se trasladó en tal sentido…

P. Exacto, pero o sea, tú sí tienes que hacer, que utilizar unos puntos de partida que luego los mueves. Pero eso es muy distinto a lo que quieren decir ahí sin utilizar puntos es: sin coger simplemente y hacer una tabla de valores y mirar todos esos puntos y luego unirlos y no eso no, eso no es lo que pretenden ahí.

I. No, lo que pretenden es una elaboración mayor.

P. Exacto, eso es.

I. ¿Y tú los escogiste en ese orden porque querías eso: un orden de complejidad cada vez más alto?

P. Claro, un orden más alto. Ahora, en la de ahí, en ese momento, la cuestión ya más que a la función exponencial en sí, va más es hacia la habilidad de hacer adecuadamente la transformación. Ya prácticamente uno está es evaluando que transformar una función se hace de tal manera.

I. Ajá. O sea, que en esta sesión empezaron con dos a la equis, cierto, hicieron tablita de valores. O sea, empezaron con un tipo de representación, usaron otro tipo de representación que es la tabular, pasaron a una representación gráfica, eh, caracterizaron mucho la función con esa representación, miraron la base; cómo tiene que ser, qué cosas no pueden estar en la base. Nuevamente resumiendo, ¿cuál era el objetivo de, cuál fue entonces el objetivo de esa clase?

P. ¿De la segunda clase?

I. Sí, de esta sesión, toda la sesión.

P. ¿En toda la sesión?

I. Desde dos a la equis hasta aquí, cuando terminamos con el ejercicio treinta y dos.

P. <u>Es mirar el aspecto gráfico de la función exponencial, determinar propiedades de esas gráficas.</u>

I. ¿Te parece que es enriquecedor, o para qué utilizas todo eso: tablas, gráficas, tal? ¿Por qué no te quedas solamente con una representación?

P. Lo que pasa es que cada una va como diciendo algo.

I. Ajá.

P. Algo en lo que de pronto la otra cojea. <u>Si por ejemplo no tuviera la gráfica, sólo la tabla por ejemplo eh, aspectos como la asíntota</u> y cosas de esa clase, <u>no son fáciles de apreciar ahí</u>, lo importante de esa clase es que ellos ya dominan. No sé, ahí aparecen detallitos que en una no se aprecian y en la otra sí.

I. Hace un rato me ibas a decir algo y te dije que esperaras a que estuviera la grabación.

P. Ah, no que en el libro, en el libro definen una función exponencial en la forma ***a*** a la equis con la base de tal manera, en otros lo hacen de la forma c por ***a*** a la equis. Me parece más apropiada la forma **c** por ***a*** a la equis, porque la mayoría de las aplicaciones son de ese estilo.

I. Ajá.

P. Y esas… llamarlas así: funciones exponenciales, me parece más apropiado porque es que la otra c por ***a*** a la equis, perdón la otra ***a*** a la equis. Entonces si yo tengo por ejemplo quinientos por no sé, por algo ***a*** a la equis, entonces esa ya no sería exponencial. Y resulta que por ejemplo en lo que yo tengo al comienzo de la, de lo del interés compuesto…

I. Sí.

P.…Es de ese tipo.

I. Sí.

P. Sí, acuérdate que es p por…

I. Ajá.

P.…Uno más r a la no sé qué cosa. Entonces esa ya no sería, según eso, sino el resultado de una transformación que se haga a la otra.

I. Sí, sí, sí.

P. A una que sí es exponencial. Me parece que cobijarla como exponencial es más saludable, para referirnos a ella propiamente como una función exponencial. O sea, <u>la cuestión de la variable en el exponente es como una primera…</u>

I. ¿Mirada?

P. Mirada de que la variable está por allá.

I. Ajá.

P. Pero hacen falta otros detalles. Por ejemplo, mirar qué pasa con la base que es lo otro que está acá. Entonces fíjate que si yo pongo aquí quinientos por dos a la equis, la variable sigue estando en el exponente, pero ese quinientos ya se tiró todo, entonces ya no es exponencial.

I. Jaaaajaaaa-

P. ¿Sí me entiendes?

I. Sí.

P. Entonces, por esa razón me parece que es darle más amplitud a la denominación dándole esa posibilidad, esa cabida.

I. Ajá. ¿En el transcurso de esta clase, tuviste que cambiar algo de lo que tenías planeado? O la situación…

P. Cambiar algo… que yo recuerde, no.

I. ¿No? De pronto entrar en más detalles de los que pensabas o… ¿tampoco?

P. De pronto entrar en más detalles…

I. Sobre algo de mecánica, ¿no?

P. De pronto sí, de pronto en la cuestión de precisar la asíntota horizontal cómo se va moviendo. Esa partecita no la había, no me fijé que la trabajé mucho.

I. O sea que hasta el momento les has dicho a ellos que tienen dos cosas pendientes. Les dijiste en una clase que hicieran ejercicios. En esta clase que hicieran un ejercicio donde aparece la palabra continuo, les dijiste: dejémoslo allá en remojo que algún día vamos a ver eso de continuo. Y los de interés también les dijiste: por ahora lo vamos a dejar aquí quieto que después lo vamos a utilizar.

P. Ajá.

I. Tienes esos dos elementos.

P. Pendientes.

I. Guardaditos.

P. Sí.

I. Bueno, se terminó esta sesión.

3. ENTREVISTA CLASE 3. CASO 1

I. Es la sesión tres, cierto

P. Si.

I. La sesión tres. Entonces, lo que te estaba diciendo. Si quieres comenzamos con cuál es el objetivo de esa sesión tres.

P. Bueno, pues el objetivo era que una vez establecida la fórmula para el interés compuesto, hacer las consideraciones para $\boldsymbol{n}$ muy grande y mostrarles que a pesar de que crecía, eso no crecía sin medida, eso tenía un tope y eso se iba aproximando a cierto valor, *e*. Quería era, que la idea esa de interés compuesto continuo, pues quedara clara y que estaba atada al objetivo general del capítulo que era mirar funciones exponenciales, ahí de nuevo aparece la variable del exponente y, la base es un número para ellos, es novedoso, digamos nuevo. Y la otra parte era mirar que de nuevo pudieran hacer cálculos de cantidades relacionadas con esas cosas, una vez que se tuviera la formula, la variable, etcétera cosas que yo vi que ellos hicieron

I. Si tuvieras que dividir la clase en varias secciones; qué partes, qué segmentos dirías tú que tiene la clase

P. Segmentos, entonces, primero es el esfuerzo por llegar a la fórmula, que aun cuando yo después, como le contaba la vez pasada, no, no hago algo por el estilo, no ninguna otra cosa para revisar si esos pasitos de alguna forma los pudieran aprovechar para otra cosa parecida, pero parecía que era formativo de todas manera que ellos pudieran seguir ese razonamiento de llegar a la fórmula…

I. De qué fórmula me hablas Ernesto

P. De

I. De la fórmula del interés continuo o la del número ***e***

P. La del interés continuo. La del número ***e*** y la del continuo para mi son muy formativas

I. ¿Pero todas esas dos fórmulas van en el mismo paquete, o van en segmentos separados en la clase?

P. No, van segmentos separados. Primero es la del ***e*** y luego ahí ya es la otra. Pero la otra es mucho más exigente, me parece que la primera la captan mucho más. La segunda, a mí me parece que todavía a mí me faltó, yo creo que hice un esfuerzo en mirar los detallitos y que se van colocando ahí hasta llegar allá quedan como claro, pero en el fondo yo sé que no, yo sé que eso no me lo siguieron así como…

I. Mucho

P. Ajá, yo sentí que era un poco más un monólogo. Pero de alguna manera estaba como tranquilizándome, pero bueno yo sé que de ese grupo que sigan ahí bien, bien todo el razonamiento, muy pocos, ellos no, porque también creo que en el fondo piensan que como eso después no es, de lo que yo voy a pedir cuentas, entonces tampoco es que se esfuercen mucho, o sea, no hay como una inquietud intelectual fuerte de ver cómo es que se llegó ahí. Yo creo que es más mía que de ellos.

I. Entonces, los segmentos por un lado, es la fórmula de ***e***, cierto. Por otro lado la fórmula del interés. Hay algún otro segmento de la clase, que quisieras…

P. Y el otro segmento es la de, si el de los problemas particulares de aplicación de esas cosas

I. Ajá. Esos segmentos en los que los divides, son los mismos momentos en los que tú consideras importantes de la construcción, en la clase, o hay algunos momentos en los que tú digas mira Jeannette es que para mí era clave este momento, este momento…

P. ¿Considerar clave?...la construcción de la fórmula…yo en el fondo pensando en ella, no lo consideraría como clave. Porque de alguna manera yo no me meto a mirar qué tanto siguen ellos eso, ¿si? Yo casi no interactúo con ellos sino más bien tal y entienden y etcétera…pero es un monólogo, no, no siento, yo pienso que la parte para mí más importante

I. Ajá

P. Es cuando él, el estudiante, pues de alguna forma yo que llego ahí y <u>entonces con esa formulita, cada cosita, ya le encuentra su sentido, de esto es tal cosa, esto es tal otra y ahora hay que adecuadamente remplazarlo</u>. Y la variable, todos esos detallitos que los distingan, Pero desafortunadamente lo otro como que no se aprovecha para otra cosa después, entonces ahí se queda…

I. Cuando dices lo otro, me estás hablando del proceso de…

P. Del proceso de construcción de la fórmulas. Si, no sé si eso forme parte como de la, no sé de, para ser un poco honestos tal vez como que las cosas no salen de la nada, sino que tienen un proceso, pero que ya yo tampoco puedo responder por esos otros detalles de que al estudiante le interese o no le interese cómo es que lleguen. A mí, me parece por ejemplo, que mi deber es de mostrarles cómo se llega

I. Ajá

P. En la medida de lo posible que esté al alcance de ellos. Pero si ya ellos no hacen el esfuerzo, y eso de seguir y preguntar y esas cosas, a mí me parece que es una cosa cultural que ellos no están acostumbrados a eso. De hecho, eso que yo hago, estoy casi seguro que son muy pocos profesores que se ponen en ese esfuerzo. Que es más fácil darles la fórmula y se acabó, remplacen y al final acaban haciendo lo mismo los estudiantes con lo que yo hago.

I. Acaban haciendo lo mismo, pero será que lo acaban haciendo de la misma forma o…

P. Yo no sé o por lo menos ellos sintieron que de alguna manera participaron en la construcción de la fórmula; no salió de la nada, eso tiene una razón de ser,

I. Vamos a mirar pedacitos específicos de la clase. Vamos a mirar del minuto uno al minuto seis. Para que tú de pronto me digas cuál era la intención ahí en ese, en ese lapso.
Ahí comienza la clase.

(Observan una parte de una clase)

I. Bueno, eso ya lo tenemos, ¿cierto? Listo. De esa parte de continuo ya habíamos comentado algo, cierto. Del interés continuo. Tú tienes algún otro interés para, por qué mostrar esa parte del interés continuo, lo de iteración, lo de la vez pasada, lo querías mostrar ahí otra vez, o no.

P. Si, de alguna manera si. Lo que pasa es que detrás de eso hay una iteración, que sin decirlo ahí, porque uno sabe que es una cuestión infinita.

I. Ajá

P. Pero que a mí me parece que no era conveniente hablar de nada de esas cosas con los estudiantes a esos niveles. Y se hace y se hace, y es que se va aproximando a cierta cantidad, pero no meternos con lenguajes por ahí raros, ni de límite, ni nada de esas cosas.

I. Ajá.

P. También por lo que de alguna manera uno sabe que esos son temas que para la mayoría de los estudiantes de las carreras así Económico - Administrativas son de interés porque ellos eso más adelante lo van a tener que encontrar en Matemática Financiera, entonces de alguna manera ya nosotros en lo que al comienzo del curso pretendemos es que esos detallitos de aparición del número ***e***, etcétera, todo eso, de alguna forma como que ya se hallan familiarizado con eso al terminar el curso pensando que más adelante van a encontrar eso, van a escuchar eso.

I. Vamos a irnos para el momento quince.

I. Ahí tenemos a un estudiante en el tablero, cierto y frecuentemente tenemos estudiantes en el tablero. Cuál es tu propósito cuando tienes a un estudiante en el tablero.

P. Por un lado son como muestras que me dicen a mí si ellos de alguna forma avanzan siguiendo las cosas que yo voy explicando. Por otro lado ellos mismos también ayudan a los otros que hay por ahí a comparar lo que están haciendo, o en algunos casos a ver cómo se hace. Hay unos que no arrancan, no hacen mayor cosa, porque las circunstancias, uno se da cuenta si el estudiante no vino la vez pasada y ahora, pues ahí no hace mayor cosa, no hace nada.

I. Ajá

P. Sin embargo, este estudiante por ejemplo, es muy curioso porque logra superar la inasistencia de la vez pasada, él no vino.

I. Ajá. Sin embargo, es que él tenía la ventaja que no se estaba retomando lo de la segunda sesión sino más exactamente lo de la primera.

P. Lo de la primera

I. Ajá, entonces él no concatena

P. Ah, ya este no vino fue la segunda

I. El no estuvo en la segunda. Estuvo en la primera, en la segunda no y en la tercera si

P. Ah…si, pero entonces la intención es que ellos… Muestren lo que están entendiendo ahí en el tablero y que los demás también ayuden a comentar si lo que él está haciendo va bien o no. De alguna manera también le impone otra dinámica a la clase. Si yo todo el tiempo soy el que hago las cosas, etcétera, también se vuelve muy monótono. Pero si yo veo que hay un estudiante y el otro, a veces trato inclusive de que sea estudiantes que no son necesariamente los mejores y que logran allá tener éxito, de alguna manera a mí eso me esta dando un buen indicio.

I. Ajá

P. Entonces, los demás ven que si él lo está logrando para ellos también es…

I. Estimulante

P. Estimulante

I. Vamos a ir a otro minuto. El minuto ocho veinte, pero de la segunda parte que yo tengo ahí. Lo que yo quisiera es que me dijeras algo sobre esa frase: <u>lo estamos acumulando al capital seguido, es decir cada fracción de tiempo muy pequeñita, lo estamos haciendo seguidamente, a todo momento, entonces uno habla de interés compuesto continuo</u>. Háblame de esa frase.

P. Ahí hay algo que supongo que sorprende al estudiante hacer ese tipo de cuentas y ver que aunque son intervalos de tiempo muy pequeñitos puede controlar, puede conseguir la respuesta que la formula que traíamos la vez pasada nos permite hacer esos cambios y lo curioso es que eso no se desborda. La de continuidad es algo muy intuitivo y con toda seguridad esa no es la idea de continuo ligada a matemática pero no encontré como otra manera de acercarme a ello. La idea de continuidad.

P. Mira te voy a mostrar en el video, cuando trato de hacer participar a un estudiante o de escuchar sus respuestas, tengo varias opciones. Por ejemplo este estudiante, con toda seguridad contestaría muy bien y yo podía cometer el error de guiarme por él, de continuar a partir de las respuestas de él, de que ya los demás están por el estilo y eso no puede ser. Este el problema es que lo pone a uno en aprietos porque se sienten incómodos a la hora de decir algo entonces uno siente la situación tensa entonces tampoco conviene ese tipo de personas. Tengo que acudir a algunos que participen con cierta tranquilidad, que no se les vuelva tortura, que inclusive permita que algún comentario sea motivo de relax, que nos podamos reír. Yo me pongo a pensar si yo los ignoro, pero no, con ellos yo los tengo en cuenta me voy a su puesto. En el momento de la construcción del concepto. Esas personas no me convienen para que me ayuden en poner en movimiento las cosas.

I. Hay les estás presentando el número ***e,*** ¿porqué esa manera de presentarlo?

P. Me pareció muy bonito que en el contexto del interés compuesto aparezca un número que en realidad es exótico. La primera vez que yo me encontré con eso a mi me sorprendió muchísimo, en cambio no me sorprenden presentaciones como las que uno encuentra en el Cálculo de Apóstol; el n; el número ***e*** es el límite…a mi eso no , yo podía inclusive ponerlos miren esta expresión, vean que se aproxima un número, al número lo vamos a llamar el número ***e*** , pero buscarle un contexto a eso para el tipo de intereses que tienen los estudiantes eso me parecía maravilloso, que ellos me digan en alguna ocasión cuando vean el numero ***e*, ¡**uy!, eso me lo encontré por ahí cuando tenia el interés de un dólar, eso me parece más útil para ellos que la cuestión puramente matemática, no se si habrá otra cosa mas sencilla de llegar a eso.

I. Después que tú les dices que busquen en la calculadora la tecla donde está el numero ***e*** y hablas sobre ese número les dices vamos a mirar la fórmula para un capital cualquiera un interés cualquiera a los tantos años, ¿ese en paso más adelante? ¿Hay un salto?

P. Ahí hay un salto fuerte.

I. ¿Algo importante, cierto?

P. Si, si pero ya te digo lo que yo sospecho es que no sé que tan útil sea eso para ellos. Porque yo estoy seguro que si después les digo vamos borremos lo del tablero, alguien quiere pasar y reconstruir, yo creo que nadie lo hace, esa sospecha la puedo casi asegurar. Ver ese proceso es útil. Cada pasito es claro, lo que pasa es que todo el grupo de pasitos es el que hace compleja la cuestión, pero cada pasito yo lo puedo preguntar y comprobar que ese pasito de alguna forma no tiene dificultades sino que a veces ya viéndolo todo en conjunto, todos los pasos es que dicen pero este como hizo para conseguir eso.

I. De acuerdo, vamos a ir al minuto veinticinco.

P. Esas letras que uno utiliza para capital, interés, respondiendo a la escritura del libro porque son palabras en inglés, me parece que el estudiante tiene que hacer un esfuerzo adicional, si yo utilizara C de 5, el capital a los cinco años, etc., podría ser como mas inmediata la cuestión de qué es lo que está haciendo, en algún momento retomarlo ve una A, y después de mucho trabajar es que dice ¡ah bueno, es que este es el capital!

I. Ese proceso que hiciste para ayudarles en la solución de ese problema. Qué me dirías de ese proceso en este caso específico.

P. Es como de alguna manera mirar que ellos cuando vayan a hacer un problema por el estilo tener en cuenta cada cosa y hacerla explícita, pues le va a ayudar a hacer la sustitución de forma adecuada. Lo hago al comienzo en el tablero y espero que después ya en el siguiente paso de alguna forma imiten. A mi me parece que algo de imitación tiene que haber en todo esto, que uno diga bueno esto, luego esto etc., hay como un esquema una manera, un orden de trabajar que uno quisiera que el estudiante la imitara, pues de todas maneras yo respeto al estudiante cuando no lo escribe necesariamente así. Creo que al comienzo toca hacer algo luego hacer varias cosas como parecidas, luego ir empezando a variar cosas a poner en juego el concepto pero no incluir tanta variación porque es que todavía, hasta que uno no se agarre de unas poquitas cosa y empiece a sentir como que ya se siente alguito seguro en algo, ahí si empieza uno a mover el piso, yo sé que ahí ellos repetirán las cosas, calculan, comparan respuestas y no ese el nivel al que uno quisiera llegar, pero toca pasar por ahí.

I. Cuando les colocas los ejercicios de 11 al 15 esa sigue siendo la intención-

P. Si, sin embargo ya empieza uno a notar unas preguntitas bien curiosas, en el doce es este parámetro, es tanto este otro es tanto y voy remplazando y se acabó, en el trece ya hay una pregunta de más complejidad, dice cuál esa tasa interés que produce una mejor inversión, entonces no se trata de mirar cuál es la más grande sino que también el tiempo está jugando, tienen que combinar las dos cosas tienen que mirar eso. En el 14 es algo parecido al 13 y en el 15 si me pareció una cosa muy interesante porque es que valor presente es una expresión que puede confundir pero si uno les hace ver que significa, sin embargo en las evaluaciones si una persona no ha estado ahí es difícil que coja eso. O de pronto, no pero ese es el nombre comercial entonces uno no puede ponerse a hacer uso de expresiones que evite que el estudiante se pueda confundir…no… porque toca ponerlo en ese contexto, que lo maneje.

I. Tu finalizas esa clase diciendo que habrá evaluación la próxima sesión y también los invitas a leer la pagina 297, para que te digan que entendieron, que no entendieron y les dices que esa lectura es sobre crecimiento exponencial y además que al otro día van a mirar esos modelos.
Yo tenía una inquietud pensando en todas estas clases, tú estas sesiones cada una la preparabas por separado o tú preparas un paquete de clases.

P. Yo tengo preparado un paquete de clases, si llega a ocurrir algo no hay inconveniente, yo ya tengo como la ilación de las cosas y no creo que me desvié mucho, de pronto alguna inquietud de un estudiante me hace detenerme en algo que no había preparado pero…

I. O sea no es sesión por sesión tu digamos hiciste la clase uno y después decidiste que en la dos ibas a utilizar el ejemplo de dos a la equis.

P. Ah, no claro. Si, si. Si, o sea yo por ejemplo, actividad que haga en alguna sesión intento de alguna manera conectarla con alguna otra cosa.
Yo pienso en toda la secuencia general y esta me sirve para esto y para esto y si en algún momento no alcance a hacer alguna de las cosas no importa en algún momento la retomo o de pronto ya no la hago pero cada cosa tiene su posición dentro de ese esquema general.
Terminó una sesión, supongamos, y antes de venir a la siguiente observo qué hice yo la vez pasada y en el esquema general que me conviene hacer y qué ejercicios conviene que yo seleccione, etc. De alguna forma también busco que el material que ellos tienen a la mano se utilice de la mejor manera, algunos han hecho la inversión de comprar el libro de tal manera busco que tampoco se vaya a presentar un enfoque tan personal que después el hecho de conectar con el libro se vuelva un problema serio, por ejemplo la nomenclatura, el hecho de respetar la que esta en el libro ya después mirando uno dice que bobada pero entonces tendría uno que tener sus propias notas

porque o sino tiene que tener permanentemente un diccionario que le diga como ir de lo que hace el libro a la que uno hace, entonces para evitar esa vuelta… pero si hay como un esquema general primero y cada clase reviso que se hizo que actividades se pueden seguir haciendo, estimo los tiempos también que se puedan gastar en cada actividad y cada vez he venido como reduciendo más mi participación buscando la forma que ellos hagan más. Porque es que en realidad a veces no sirve de mucho o yo no se si es que yo no controlo lo que yo hago con respecto al trabajo de ellos después porque yo siento que puede que mi exposición sea clara para ellos pero eso no me permite a mi tener como la seguridad de que ellos si están captando bien el concepto, entonces últimamente estoy como reduciendo mi exposición y poniéndolos a que ellos pasen más, hablen mas. Lo que pasa es que entonces los alcances en cuanto a contenidos no son pocos, entonces ahí ese equilibrio no es fácil porque en cuanto a contenidos uno tiene que cumplir con la Institución y también preocuparse que el estudiante se meta en el cuento.

4. ENTREVISTA CLASE 4. CASO 1

I. Estamos en la sesión 4.Tú en la clase anterior les habías dicho que realizaran una lectura para que te dijeran que habían entendido y que no habían entendido y cuando inician la clase les dices, vamos a ver quienes fueron los que leyeron pero nunca les preguntas nada. ¿Por qué?, ¿fue intencional?

P. Pues es que yo sospechaba que no lo habían hecho porque ellos el material no lo tenían y fuera de eso si me ponía a mirar a alguno que otro que si entendía y la mayoría no, entonces quería asegurarme que todos… pues el que lo leyó tenia algo a su favor, una idea, pero pensando en aquellos que no habían leído decidí que todos leyéramos algo , pero si hubiera sido mas estricto con respecto a lo que dije si he debido preguntar para ver… me hubiera dado cuenta que eran muy poquitos los que habían leído.

I. En esta clase el objetivo…

P. El objetivo es continuar viendo la utilidad de la función exponencial que no se restringe solo a los intereses, que hay otra cosa pero que en el fondo digamos esa también tiene la estructura parecida pero ya después me doy cuenta que en el fondo hay unos vacíos que pienso que son mas como del libro, en esa lectura yo no quise mirar y detenerme mucho en eso, cuando dicen y la manera de encontrar la población es esta, hay una expresión ahí, que ahora yo me pongo a mirar tasa de crecimiento relativo y digo eso tan raro, en el fondo también es lo mismo que había antes con la plata es una tasa de crecimiento relativo. De acuerdo a la que hay, esa se incrementa en un porcentaje y en el nuevo aumento esa nueva otra vez en un porcentaje, pero aplicado a esa nueva, entonces yo no sé que de nuevo le aportaría decirle crecimiento relativo, una tasa de crecimiento y se acabó, no se esa expresión hasta yo mismo estaba como enredándome, pero no pasa de ir a cambiar unos nombres y utilizar el esquema igual, el mismo modelo y luego volver a hacer las operaciones de siempre.

I. ¿O sea que tu tenias otras intenciones con ese proceso, tu querías otra cosa diferente?

P. No, sino que ahí había como una cosa rara que yo mismo estaba confundido con la lectura también porque cuando dicen y a la media hora hay tantas bacterias, uno cómo va a asumir que ellas se están reproduciendo continuamente, puede que se esperen y a la media hora se reproduzcan todas y produzca un crecimiento de tanto, pero entonces yo me ponía a mirar que la cuestión hay no esta como muy clara, en el interés si era cada instante el interés se acumula pero con la cosa del crecimiento de las bacterias y poblaciones yo veo que hay esa explicación no es muy buena refiriéndose a por qué el modelo funciona para el crecimiento de poblaciones, si. Es que yo en ningún momento estoy haciendo uso de…, inclusive pensando en las poblaciones uno sabe que no continuamente se están reproduciendo, si están creciendo continuamente pero por ejemplo una pareja no produce hay el hijo hay mismo sino hay que esperar un poco de años, mientras que en cada peso en cada centavo si no hay problema, yo tenia también ese vacío y no se. Pero parece que las cosas si funcionan ahí también. Definitivamente también en algunos casos uno también se queda corto en la comprensión de los modelos.

I. Todo ese tiempo, desde que inicia la clase hasta el minuto nueve, en la clase tú te detienes a que el estudiante lea, hasta le dices, has una pausa porque o sino no vas a entender, y vuelve el estudiante y tú le dices ponle entonación… ¿Hay alguna intención con todo ese proceso?

P. De alguna forma si, es que yo veo que ellos a la hora de trabajar cualquier problema de esos muchas veces la dificultad es que no leen apropiadamente y quieren hacer las cosas atropelladamente, yo les digo lea despacio, mire bien cada cosita, qué es lo que le preguntan, esas habilidades que le ayudan a uno a organizar el trabajo cuando tiene un problema, algo de lo de Polya, hay que leer primero, miren que le preguntan, identifique las variables.

I. En esa clase también hay algunos segmentos importantes.

P. Un segmento es la lectura hasta que tenemos la formulita e identificamos cada cosa. Segundo, es el problema particular que se trabaja ahí, y el otro ya es cuando ellos trabajan aparte y la evaluación.

I. Entonces miremos la parte después de la lectura del estudiante en donde viene un problemita. Un problema con tres partes a. b. c., cada una diferente, ¿objetivo? ¿Por qué la gráfica?

P. Si, ahí la cuestión es de poner ya en una situación particular esos parámetros, que los identifiquen.

I. ¿Hay algún nivel de dificultad diferente en la parte a, b, c?

P. En la parte a preguntan la fórmula. Si ya tienen el esquema anterior es simplemente ubicar y poner ahí.
En la parte b, si tengo el modelo es mirar para un tiempo t, calcular un valor funcional, más difícil me parece la primera.
En la primera hay otros elementos que la tasa de crecimiento la tienes que expresar en la forma adecuada.

I. Se toman su tiempo haciendo la gráfica.

P. La gráfica de alguna forma se hizo antes y de alguna forma no hay nada nuevo.

I. Mas adelante les pones a hacer problemas del 19 al 23 y cuando van al 23 les dices un momentico… les das la sugerencia que revisen en Internet la población mundial.

P. Es simplemente mirar que en este tipo de cosas son aproximaciones, son modelos que pueden eventualmente estar cerca pero pudieron haberse planteado en un momento en donde las cosas iban funcionando bien pero más adelante por otros factores eso ya no siga obedeciendo los mismos patrones y eso ya hace que la población crezca mas o menos de lo que se había pensado, entonces de alguna forma era como por mirar que el modelo pudo haber dado buena cuenta con eso pero ahora, que lo podemos confrontar con los datos podemos decir que se está alejando… son modelos… Fíjate que yo en ningún momento hablo explícitamente de que es un modelo, pero yo creo que de alguna forma algo va quedando en la medida en que ellos se dan cuenta que es una manera de representar algo y que puede tener esas dificultades, puede que refleje o que no refleje del todo.

I. Llegan al momento de la evaluación y les dictas tres puntos.

P. En esa primera pregunta yo creo que incorpora un poco en lo anterior a las funciones exponenciales, entonces lo podemos ver de dos maneras o bien pienso en esa cantidad constante que está ahí y me imagino una función que tengo por un lado lo que voy recibiendo el tiempo que esta transcurriendo, pero podría pensar también en lo acumulado, eso depende del criterio, por eso va un poco como abierto para que el estudiante con un poco de libertad establezca el criterio con el cual, él va a comparar. Si él va a acumular pues en la parte lineal le sale otra vez una función lineal pero en el caso del exponencial lo acumulable ahí ya no es tan fácil porque no tenemos herramienta para decir como vamos a ir sumando, lo tendría que hacer un poco manual pero en la otra si tiene la posibilidad de hacer la expresión. Pero, cualquiera de los criterios que el estudiante hubiera utilizado para mi era algo valioso, para mi era lo importante, espero que incorpore propiedades de las funciones exponenciales que le ayuden en esa justificación que haga. Viéndolo bien la cuestión de la ponderación de la respuesta es un poco difícil porque era una pregunta abierta y tenia la posibilidad de muchas cosas. No es lo usual.

I. Les dejas además que ellos redacten el problema, fíjate que alguno dice, entonces toca por obligación escribirlo. Se pensaría que tiene un grado algo de dificultad. El segundo el de la gráfica. Mirémoslo.

P. Es de alguna forma la que relaciona a ese grupo de ejercicios que atienden a transformar la función exponencial, entonces los elementos básicos de en dónde corta al eje y, la gráfica

I. ¿O sea que lo que tú quieres evaluar es?

P. Lo que yo quiero evaluar en el fondo es que sepan hacer una transformación bien hecha con una exponencial. No es tanto la propiedad intrínseca de la función, sino ver si la saben mover.

I. ¿Cuál es la propiedad intrínseca de la función?

P. Pues la forma como crece la forma relacionan las variables.

I. ¿O sea que en alguno de esos tres puntos estas evaluando esa propiedad?

P. En el primero, mas en el primero, ver el comportamiento.

I. Y en el del valor presente, ¿Por qué ese ejercicio?

P. Es más de resolver una ecuación, de identificar qué es lo que están preguntando y hacer los pasos. Pero también requiere el hecho de que él hubiera pasado por ese proceso, el que estuvo ahí se espera que pueda el que no vino lo mas seguro es que no pueda hacerlo, que confunda las cosas. En particular el concepto de valor presente enreda mucho, aun habiendo estado en clase esos pueden creer que la pregunta es el final.

I. Hay algo que no te haya preguntado de esas cuatro clases y tú me quieras comentar, algo que pasé por alto.

P. Ahí por ejemplo, no quedó hasta ese momento claro, por qué no he preguntado por el tiempo, he debido hacerlo para que el estudiante note que en ese momento aun no podía…dejarlos intrigados… porque en los problemas usualmente, uno qué es lo que hace, tiene unos poquitos modelos y empieza a dar unas cosas y otras no, que tal si yo hubiera dado otra cosa y hubiera preguntado por el tiempo… pero bueno.

I. Viene una práctica con el computador que es la clase cinco… bueno, te agradezco mucho.

5. ENTREVISTA CLASE 5. CASO 1

I. Vamos a hablar de la sesión número cinco. Esta es una sesión diferente en sala de computadores. Vamos hablar de todo el primer corte, hasta el minuto 52. Inicias con la función dos a la equis y dices que van a recordar detalles de la función y luego a través de una estudiante haces que recuerden qué pasa con la x cuando y es muy grade. Y haces que retomen la inquietud de un estudiante, que decía que qué pasaba cuando la base era negativa. Hasta ahí, ¿qué pretendías?

P. Pues ahí lo que quería era que tuvieran una representación gráfica mucho más amigable, con una cantidad de detalles más apreciables que allá a mano es difícil ver y que cuando uno trata de comparar gráficas, ahí la fineza de los detalles sí se puede apreciar.

I. Ah sí, porque les pones a comparar dos a la equis.

P. Tres a la equis y entonces ellos empiezan a describir cosas: está por encima en este tramo… y la otra idea era meter ahí la función con la base e.

I. Y compararla con la de dos a la…

P. Equis y tres a la equis.

I. Tú dirías que uno de los trabajos que se hace ahí, es como en un momento, una generalización porque tú empiezas con dos a la equis, cinco a la equis, ¿lo que quieres es que concluyan de ***a*** a la equis?

P. De alguna manera eso ya en clase lo habíamos considerado y lo que quería mirar era la posibilidad de hacer por ejemplo movimientos de manera inmediata, con todo el cuidado, porque como la cuestión es una línea curva hacerlo a mano es… no… mirar la suavidad de la curva, el crecimiento.
De hecho ya después mirando las cosas, lo que pasa es que es una persona que hasta ahora está empezando a mirar en la pantalla la función, entonces yo quisiera preguntas más interesantes, pero es que veo que también en las condiciones que están los estudiantes, preguntas más de fondo es como complicado, si aún están unos todavía familiarizándose con el programa. A algunos les cuesta visualizar bien la pantalla, colocar el zoom, entonces el tiempo se va en detallitos de esa clase porque uno en realidad la asistencia a esas salas de cómputo son muy esporádicas. Entonces cuando eso ocurre, la cuestión es la novedad de estar ahí en esa sala, por lo tanto es muy difícil dar el salto a una cuestión más conceptual, muchas veces se nos queda en sintaxis, en cómo introducir un valor, pero no son cosas muy de sustancia.

I. ¿Y algo de sustancia que hubieras querido trabajar y pienses que no se pudo… que no se pudo preguntar o…?

P. En realidad es algo que después fue que vino, pero en ese momento yo sentía que no iba mas allá de esos detalles, pero luego más adelante, es que la característica más importante de esa función es que son proporcionales a la función la variación, la tasa de cambio es proporcional al valor de la función, esos detallitos sí se pudieran explorar ahí muy bien. Pero entonces en ese momento yo no tenía esa percepción de esa cosa.

I. En el minuto treinta o algo así, tú empiezas a trabajar con ellos los ejercicios que les habías puesto en el quies.

P. En esa parte sí me pareció bonita la ayuda esa, porque hay la posibilidad de organizar bien esa presentación para que se vea el comportamiento de las dos cosas y ellos puedan tomar una decisión como más fundamentada, en el quies yo sé que eso no era muy de esperar que pudieran hacer una comparación bien elaborada, porque las cantidades son grandes, fíjate los valores que quedan, eso no era fácil, la única manera que yo esperaría que compararan era haciendo cuentas.

La intención era también esa, en el quies yo sabía que eso no se podía rematar bien ahí y que un ambiente apropiado era este, entonces la práctica tenía esa intención, algo que había quedado inconcluso había que retomarlo.
El hecho de, a mí no me satisface mucho, dele enter y mire esas dos cosas, a mí me parece que la ida a la sala de computo tiene que ser todavía mucho más productiva.

I. En la práctica cuando están haciendo el ejercicio del quies, en algún momento toman la función cien por dos a la equis y se van dando cuenta cómo se repite el dos, por dos, por dos y terminan colocando dos a la equis. ¿En toda esa parte hasta ese pedacito de la clase, tú crees que han ganado algo en ideas fuertes del concepto de función exponencial?

P. Pues es que en clase nosotros tuvimos la posibilidad de hacer unos cálculos, pero muy limitados. Pero ahí hemos visto que con cantidades muy enormes que inclusive se las muestran en notación científica podemos ver que eso crece de una manera enorme después de ciertos valores, entonces eso de alguna manera refuerza esa cuestión, pero que sea una cosa distinta, nueva de lo que se ha hecho en clase, no creo. Yo sé que para ellos es una novedad, ver que eso baja por aquí y puedo hacer cálculos de cosas muy rápidas. Pero es casi la primera vez que se enfrentan a eso ahí.

I. Esas prácticas son diseñadas solamente por ti o por…

P. Por un equipo.

I. Háblame de esta segunda parte.

P. Lo que te comentaba de la posibilidad de organizar la ventana gráfica apropiadamente para que puedan comparar esas dos funciones, una función constante y la otra exponencial y buscar la forma de asombrarse al ver cómo crece eso de rápido. Eso era una de las intenciones y la otra era un despeje del valor presente, pero era una cuestión algebraica, ellos lo podían hacer con calculadora pero el programa les hace eso, como para que ellos miraran también la potencia de cálculo algebraico que tiene el programa y en el del problema la idea era que pudieran verbalizar un poquito lo que estaba pasando ahí, lo que la gráfica les decía, inclusive yo les ayudé a dibujar la asíntota y una vez que pudieran hacer algo como lo que dijo Leonardo que se iba estabilizando alrededor de cierto valor, la forma de sacar esas conclusiones; yo sé que ahí faltan muchos detalles para que se capte más la esencia del problema, yo me pongo en el lugar del estudiante y yo quedaría con la inquietud de por qué eso se estabilizó, ahí me lo muestra la gráfica pero me da la impresión de que todavía, como que no sr sabe dónde está la clave de porqué se frena eso y queda como constante. Entonces a mí me parece que está la otra parte que no se menciona, que es que la resistencia del aire va aumentando a medida que iba ganando en velocidad, entonces más resistencia y más velocidad producían en algún momento como una compensación y lleva a que se estabilice la velocidad, pero esos detalles yo no sé hasta qué punto estén ellos en posibilidades de captarlo.

I. ¿Cuál era el objetivo de esta sesión?

P. El objetivo era tener la posibilidad de apreciar comportamientos de funciones que se construyen con las funciones exponenciales, porque de acuerdo a la definición esas no serían funciones exponenciales, que cuando se hacen con lápiz y papel queda muy difícil de verlo.

I. ¿Por qué el énfasis en funciones exponenciales crecientes? ¿En dónde quedó la decreciente?

P. La del paracaidista es decreciente.

I. ¡Bueno!

P. Lo que pasa es que fenómenos asociados con las decrecientes en los ejemplos que uno encuentra de aplicación están más bien en la parte final en donde uno encuentra decaimiento radiactivo. En realidad no se le dio mucho énfasis a eso.

I. ¿Existe la posibilidad que ellos queden con la idea?

P. De que todo lo exponencial es para todo lo que crece. Sí, ese riesgo se corre ahí.

I. ¿Tú me podrías hacer un esquema o bosquejo de los elementos que has abordado para entender la función exponencial, desde que comenzaste de interés simple, interés compuesto hasta aquí? ¿Qué elementos? ¿Cómo los conectaste, si dijeras “este es mi mapa de la función exponencial de lo que les enseñé a los estudiantes”?

P. Um, qué interesante. Un elemento clave: la variable en el exponente, eso era algo importante nuevo. Segundo, otro elemento era caracterizar las funciones que se forman con esas cosas, variable en el exponente, mirar cómo son… cómo son sus gráficas, describirlas con los elementos que ya traen de antes: dominio, rango, cómo crecen; ése era otro elemento. Otro elemento que tenía presente era conectar con las transformaciones de funciones, de hecho en las aplicaciones no aparecían con la definición que se tenía, puramente funciones exponenciales, sino transformaciones de la función exponencial; entonces tocaba también tener en cuenta eso, porque eso va a afectar por supuesto la gráfica y su comportamiento, eso era un tercer elemento; las trasformaciones. Había una cosa que es un crecimiento en realidad mucho más fuerte que las otras, pero la manera como crece esta es mucho mas rápida, pero es una cuestión más visual que una descripción matemática: ¿qué tanto más, cómo es ese más que crece? Eso ahí lo descuidé, después fue que me di cuenta que cómo cambia, eso no quedó ahí. Otro elemento clave ahí es el hecho que da cuenta de cosas en donde los cambios se dan de manera continua, interés compuesto continuo, el crecimiento casi continuo.

I. Listo.

P. No creo que sea más. Hasta ahí.

6. ENTREVISTA CLASE 1 Y 2 CASO 2

I: Hagámoslo de la siguiente manera: si a ti algo te parece bien importante, interesante, de una vez me lo comentas. Y si no me lo comentas, pero yo lo tenía aquí dentro de mis apuntes, entonces te lo pregunto al final. ¿Estas las habías visto despacio?

P: Sí, una visión general… y además quería mirar donde estaba exactamente cuando empezamos a ver exactamente la función, que era lo interesante, porque esto es lo previo. Claro que lo previo también es importante.

I: ¿Por qué?

P: Pues porque sitúa a los estudiantes, ¿no? Recordar qué era una función era importante, la definición del logaritmo también es muy importante porque eso es lo que permite pasar de una forma a la otra, mirar que están relacionados tanto el logaritmo como la exponencial. La logarítmica y la exponencial están relacionadas, ambos son potencias, en últimas son una potencia. Pero entonces eso es importante eso hacerlo ver.

I: Estás recordando la función uno a uno.

P: Ah, sí. Es como sosteniéndolo ahí o qué.

I: Sí. Y ahí haces la gráfica para…

P: Para mostrar cómo es con las líneas verticales, cómo es que se demuestra si es función o no, gráficamente. Si la atraviesa en un solo punto pues es una función; si no, no es función. Esta otra, por ejemplo. Todo eso era de lo mismo. Lo de la inversa también para relacionar las dos funciones, ¿no? Estos son todos conceptos previos que requieren o que es importante recordar para poder entrar en el tema. Pues se supone que ellos ya los tenían, pero eso no puede uno confiarse.

I: ¿O sea que tú considerabas que para poder trabajar esas dos, necesitan recordar función inversa?

P: Sí. Recordar primero qué es una función y qué es una inversa. Qué es una inversa y cómo se calcula la inversa. Para que después puedan relacionar que la función exponencial y la logarítmica son inversas. Estamos viendo la metodología, bueno, para cómo se obtiene la inversa.

I: El proceso, ¿cierto?

P: El proceso, sí, para sacar la inversa. Listo. Ahí sí es donde empezamos ya con el tema. Ah, la función exponencial. Ahí lo están haciendo, son muy importantes, que son las que como que a los estudiantes los baja de la parte abstracta, los baja a algo más concreto, entonces le encuentran como más sentido a lo que están viendo, que no todo es teórico.

I: ¿Por qué los estudiantes ahí ya sabían eso?

P: Porque yo los puse a leer previamente. Lectura previa del tema. Ellos tuvieron que preparar el tema. Eso es lo que yo hago en las clases. O sea dejo el tema, yo lo empiezo a desarrollar pero empiezo a preguntar: y esto por qué aquí, o qué forma tiene, para qué, empiezo a preguntar todo, como a interrogar a todo el mundo sobre el tema que se dejó, entonces interviene uno y otro, vamos como armando todo con todos.

I: ¿Y cuando tú iniciaste la clase, por qué decidiste comenzarla por la ecuación así analítica, en lugar de comenzarla por gráficas?

P: ¿Por hacer la gráfica?

I: ¿Por qué la ecuación y no la gráfica, o un problema?

P: No, yo de una vez comencé porque pues me parece que ese es como el orden lógico. Empezar de una vez con la función. Ya hacer la gráfica de la función sería como otra cosa, otra característica que yo quiero mostrar y mostrar… ¿qué más es lo que me dice?

I: ¿Por ejemplo comenzar con un ejercicio, un problemita?

P: No, yo pienso que primero hay que afianzar la parte conceptual: qué es, qué es esa función, cuáles son sus características y cuando yo ya tenga claro eso y haya mostrado qué forma tiene, entonces yo pienso que ahí es más fácil inducir a hacer la aplicación. Directo me parece como difícil, que puedan captar de una vez todo, es como pedirle el todo sin haberle dado las partes, me parece a mí, ¿no? Sí, esa sería la razón. Ah, estamos mirando el dominio, el rango, características, todo esto es la característica. Esto creo que es fundamental para que quede claro qué, cuáles son las condiciones que debe tener…

I: ¿Y hasta ahí va como tú la tenías planeada, no te ha tocado cambiar nada de lo que llevabas en la cabeza?

P: No, no, hasta ahora la veo bien.

I: Porque como a veces uno lleva unas cosas planeadas y de acuerdo con las respuestas de los estudiantes o algo, uno empieza a hacer cambios. Si hay alguna cosa que cambiaste, me cuentas.

P: No, hasta ahora no. Yo siempre los voy llevando, los llevo mucho, yo diría que los llevo demasiado, los llevo casi cargados, pero me gusta hacerlo, porque me encanta que quede todo tan claro, que casi no haya ni preguntas. Hasta donde más se pueda. Les voy sacando todo por pildoritas.

I: ¿Por qué crees que ellos aceptan tan fácilmente que es una curva?

P: Bueno, de pronto la han oído nombrar, de pronto la relacionan con… a ver, con qué.

No, la única forma de que comprueben realmente que es una curva es que hagan una tabla de valores, que la grafiquen y que se den cuenta que al unir esos puntos da una curva. Esa sería como la forma más lógica de mostrar que sí es una curva, que no es una línea recta. Ahí todavía no estamos haciendo la gráfica, sino eso es una…

I: Caracterización.

P: Sí, caracterización: si es creciente o decreciente. Características de la función. Las formas generales y luego ya sí entramos en un ejercicio específico para graficarlo y volver a observar eso mismo que ya dijimos teóricamente, cómo es allá, cómo es en un ejercicio. Llegaron temprano, ¿no? – Comentando una parte del video, en la que se ven dos estudiantes que llegan tarde a la clase -.

I: Y este creo que siempre llegaba así.

P: Y ese se salió ahí corriendo.

I: Porque le sonó el celular. ¿Esas dos, pones esas dos simplemente para que practiquen o porque una es más difícil que la otra?

P: No. El objetivo de esas dos es que vean que como la base aumenta, entonces eso tiene un efecto en la curva, que es más cerrada. Básicamente es eso. Las dos son iguales. Exactamente iguales, pero la diferencia que se va a ver es que una crece más rápidamente que la otra. O sea el efecto que tiene la base de ser más grande, hacer que crezca más rápidamente. ¿Avanzamos?

I: Sí, yo creo que sí. Ah, bueno aquí en este paso.

P: ¿Paso?

I: En este paso, sí, entran a jugar mucho los exponentes, ¿cierto?

P: Sí, claro.

I: ¿Entonces como qué valor, qué papel crees que tú que juegan los exponentes en el aprendizaje de esa función exponencial?

P: Pues hay que saber las leyes de los exponentes, cómo se operan los exponentes, cómo se operan las potencias.

I: Cuando tú les haces este pedacito, es como para recordar una convención que hay, que si hay un exponente negativo, ¿por convención?

P: Es decir, ya esto es el efecto final. Aquí no están los pasos intermedios, ¿cierto? Porque para que esto se obtenga, no es así. No es una cosa mágica que apareció ahí. Que se pasó abajo y quedó con positivo, ¿pero por qué? No, tiene que haber, previamente ya se vio potenciación, ¿cierto? Es un tema anterior y entonces en potenciación ya miramos qué pasaba cuando un exponente aparecía allá negativo, qué hacía uno para que quedara abajo, ¿cierto? Eso era hacer un producto, es decir multiplicar por uno, yo lo explico así. Multiplicar por uno. Multiplicar por dos a la tres sobre dos a la tres. Si yo multiplico por dos a la tres arriba, entonces ahí es que aparece. Arriba me queda dos a la cero que es uno, entonces de ahí salió el uno, y abajo me queda el dos a la tres. Esa es la forma de operar para que eso salga así.

I: Y el hecho de que los muchachos entiendan, manejen esas convenciones, ¿cómo qué papel juega en la exponencial, en que entiendan la función exponencial? ¿O no es relevante?

P: No, sí. Las potencias, claro. El manejo de las potencias tiene que ser… pues ya lo tienen que conocer y manejar bien, o sea es un requisito para que puedan entender la función exponencial. Tienen que ya haberla manejado, saber qué es una potencia, cómo se desarrolla una potencia, qué significa que la potencia tenga un exponente negativo o positivo. Ese es un concepto previo que deben tener para poder entender la función exponencial, porque sin ese concepto sí les queda muy difícil que puedan entenderla. No sé si quiera adelantar algo ahí.

I: Todo es de la gráfica, ¿cierto?

P: Sí, estamos trazando los… poniendo los valores.

I: Tú me decías que, ¿para qué es que haces la gráfica?

P: La gráfica pienso yo que tiene dos objetivos: uno, es mostrar la forma en que están relacionadas las dos variables, digamos, como visualmente qué es lo que representa esa función, cómo se representa, entonces qué forma tiene, si es una línea recta, si es una curva, qué es, identificar cómo es. Porque, digamos, la sola ecuación, pues sí, tiene unas características, unas partes, pero como que es demasiado abstracta y no entiendo qué es eso. No me imagino ni siquiera qué es. Entonces, con la gráfica como que concretamos que la representación de esa ecuación, allá, tiene esa forma, tiene una forma que es curva. Y es así: es creciente o es decreciente y tiene unas características. Entonces eso como que ya pasa de lo abstracto que es la ecuación, a una cosa más concreta que es una gráfica, que es algo visual y fácil de entender. Creo que después hicimos una decreciente.

I: Se me escapa. Sí, sí, sí. Hicieron una decreciente, la de un medio.

P: Para mirar las dos formas.

I: Ahí está, un medio a la equis. Tres medios a la equis. Pero después hacen la de un medio. Tú pones ese ejemplo, pero pides es que hagan la de un medio. La base es creciente, ¿sí oyes por allá? Ahí es donde les dices: entonces vamos a dibujar un medio a la equis. ¿Por qué hacer tanto énfasis en la base, siendo que la base sabemos que es constante?

P: Bueno, lo de la base es simplemente para que distingan que hay creciente y decreciente. No más. Ese es el único objetivo de hacer énfasis en la base, en que, de una forma, si la base es tal cosa, cumple tal condición, entonces me va a dar decreciente. Si cumple otra condición, me va a dar creciente. Simplemente es para mostrar la forma, no más.

I: Ese era el uno, ¿cierto?

P: Sí. Ese es el mismo, ¿sí?

I: Sí, ahí continúa.

P: Bueno. Ahí se puede avanzar porque está haciendo la gráfica.

I: ¿Hay algún momento en el que se haga una exigencia mayor para las gráficas, o las gráficas punto a punto y unimos y ya?

P: No entiendo.

I: ¿Hay algún momento en que ellos generalizan la gráfica y dicen con las características, esta ya sé que esta corta en cero uno y además va a ser creciente, o siempre lo hacen punto a punto?

P: No, yo expongo siempre así es para que quede claro. Pero ya después ellos pueden obviar pasos, o sea ya simplemente con la sola ecuación ya tienen una información, sin haber hecho la gráfica. Por eso les hice el énfasis al comienzo, que sin haber hecho la gráfica, ya teníamos una información, que era: cómo nos iba a dar, si era creciente, si era decreciente, que cortaba el eje tal cosa, había unas características generales, entonces eso lo tienen que aprender cuando vayan a hacer cualquiera.

I: ¿Y con esas características generales, tú buscas que en algún momento hagan la gráfica sin hacerla punto a punto, con esas características generales?

P: ¿Que la puedan hacer sin hacer puntos? No, pues yo no había pensado en eso. Pues yo pienso que eso le da precisión a la gráfica, ¿no? Que no sea como tan… como hacer simplemente un bosquejo. Sin puntos, sería un bosquejo. Esto le da precisión, entonces muestra puntos específicos, muestra que hay una intersección en tal punto preciso, ahí como que se cumplen partes de las condiciones generales que habíamos dicho. Todo eso lo hago siempre así, pues para mostrar la… Si fuera una aplicación por ejemplo, entonces en la aplicación es muy importante esos puntos, porque ya no es una cosa teórica sino aplicada a algo. Entonces ahí esos puntos ya cobran más importancia. Cada punto es…

I: Sí, es una pareja que dice, que da mucha información del fenómeno.

P: Sí claro, entonces yo sí hago más énfasis en que lo hagan casi que punto a punto siempre, más que hagan simplemente un bosquejo. El bosquejo pues sí, ayuda, o puede ser una cosa práctica para hacerla rápido. Pero yo sí hago más énfasis en que sea como más de puntos. Ah, ya eso es aplicaciones.

I: Cuando tú pasas a estas aplicaciones es porque ¿qué quieres?

P: Quiero mostrar que eso que vimos teórico y que dibujamos allá sirve para algo, ¿no? Que tiene alguna utilidad, que no es una cosa simplemente siempre abstracta, sino que eso tiene aplicación en muchas áreas. Entonces, qué rico mostrar que en el área de ellos se aplica y de pronto en otras, ¿no?

I: ¿O sea que es un paso más allá?

P: Sí.

I: ¿No es para entender más esta, sino es un paso más allá?

P: No. Pues sí es para aplicarla, porque una cosa es teórica y no es tan fácil pasar de una vez a una aplicación. No es lo mismo. Yo puedo saber muy bien trabajar la parte teórica y entender qué es la base, qué es el exponente, la gráfica, todos esos elementos teóricos los puedo saber. Pero eso mismo, cómo lo aplico a algo concreto, pues cambia. Cambia, es decir, los conceptos se siguen aplicando, pero hay que entenderlos, hay que hacer como una… Hay que relacionarlos con lo anterior y aplicarlos allí. Entonces, ahí es donde a veces es difícil para ellos. Cómo se pasa de esto que es puramente teórico a otra cosa. Allá, qué es lo que representa… Allá ya no es equis y ye, sino la equis aquí es una cosa concreta, el número de horas, el otro es el número de bacterias, entonces ya las variables dejaron de ser teóricas y se convirtieron en algo concreto. Entonces hay que como hacer analogía.

I: No, eso no es analogía.

P: Bueno. Sí es una analogía. ¿O qué sería? No, una analogía no.

I: No, era lo que tú ya decías: casos concretos, una cosa es la generalización de la variable equis y la variable *y* y otra cosa es…

P: Sí, ya cuando paso a algo concreto…

I: Ya el caso específico: tiempo contra tal cosa.

P: Sí.

I: Contra crecimiento de las bacterias.

P: Y además eso me ayuda a que la gente entienda más y a que le encuentre utilidad a eso que aprendió. Que no es solamente que lo vamos a ver porque tenemos que verlo. Tiene utilidades, se aplica y se aplica en su área. Eso creo que es muy importante porque eso motiva a que la gente le ponga más atención, trate de entenderlo mejor. Ah, ¿ese es el de las bacterias? Ah, el ejercicio de las bacterias. Ah, no. Ah, estamos…

I: Crecimiento exponencial.

P: Ese es un ejemplo, un ejemplo que se hizo en clase, crecimiento de bacterias. O sea, yo les hago mucho énfasis en: "Mire: esto era lo que veíamos allá como tal cosa", para que empiecen a identificar que eso que vieron allá, aquí tiene un correspondiente.

I: Este tipo de escritura sin lugar a dudas es diferente a como lo venían manejando hasta hace un momento en la clase.

P: No.

I: ¿Por qué no?

P: Porque es efe de equis igual a una función elevada a una potencia. Lo único que tiene de raro es que aparece un coeficiente aquí.

I: ¿Para el estudiante y para ti, qué se busca con un coeficiente ahí?, ¿para que sea otro paso adelante o tú lo ves con el mismo nivel de dificultad?

P: No, aquí lo que pasa, es que escrito en esa forma, va a servir para identificar una condición inicial, por ejemplo. Específicamente, una condición inicial.

I: ¿Y cuando tú piensas en escoger ese ejercicio lo escogiste con ese objetivo, o con qué… Lo de la condición inicial que me estás comentando, o eso es cuando ya estás desarrollando el problema que…?

P: No, cuando ya estoy desarrollando. Inicialmente, simplemente el ejercicio lo tomé así porque creo que no es tan difícil entender que tiene la misma forma de lo que ya vimos, porque esto es una constante, aquí hay otra constante elevada allá. Entonces es como si fuera un coeficiente numérico, no le veo ningún problema que tenga un coeficiente numérico. Si hubiera otra letra sí sería complejo, o sea, no tendría la misma forma. Les hago ver las mismas características que ya vimos: que la base es mayor que cero, entonces cómo debe dar la gráfica, para que se la vayan imaginando cómo va a dar.

I: Sin embargo, es la primera vez en el recorrido de la clase que el profesor dice: “es una constante elevada a una variable”.

P: Ah, constante.

I: ¿Lo hiciste conscientemente, o mejor dicho, tú esperabas hasta ese momento para decirles: tenemos una constante elevada a una variable, hacérselo explícito?

P: No, no lo pensé así. La base la nombré fue base, ¿cierto? Pero era un número.

I: Bueno, pero más allá de la base o de la constante, es que es en el primer momento que dices “elevado a una variable”.

P: No, eso sí lo dije al comienzo.

I: ¿Sí?

P: Claro, que la variable, sí claro. Cuando estaba definiendo la función, al puro comienzo, entonces dije: tiene esta forma: *y* igual a *b* a la equis. Entonces dije: aquí hay una base elevada a una variable, no una base no, yo no me acuerdo si lo dije constante.

I: ¿Lo miramos?

P: Bueno. Tal vez hablé de base.

I: No estoy segura.

P: Vamos a ver.

I: Ah, listo. Listo.

P: Entonces sí lo dije.

I: Y ahora me voy para el título dos.

P: Ah, esa es la primera pregunta, que es, inicialmente cuántas bacterias hay.

I: En este anterior, vuelve la pregunta: ¿buscabas que entendieran algo más de la exponencial como tal, o simplemente que mecanizaran, qué se buscaba en ese ejercicio anterior?

P: Bueno, afianzar de pronto algunas cosas, o sea aplicar las características que vimos al comienzo, afianzarlas ahí. Pero además, ya como están aplicadas a algo, entonces eso cambia: lo que ya se había hecho teórico pasa a otro campo. Entonces hay que mirar ahí como se maneja, cómo se maneja aplicado. Es básicamente lo que yo pretendo con los ejercicios de aplicación. Si allá se manejaba teóricamente haciendo ciertas cosas, aquí cómo se manejaría, cómo se haría la gráfica, o esos puntos cómo se representan, dónde va cada una de las variables, cómo se llama cada una, identificar cuál es la que iría de pronto en el eje horizontal y cuál en el eje vertical, todas esas cosas, dependiendo del tipo de preguntas que tenga el ejercicio.

I: ¿Este ejercicio que vamos a ver ahora, es un ejercicio que escogiste con un mayor grado de complejidad y venía pensado ya en eso o en clase decidiste?

P: No, ese sí lo pensé. Primero comencé con uno… Siempre voy de menos a más. Siempre trato de comenzar con uno bien fácil y luego aumentar la complejidad. Sí, este ya es más complejo y creo que había que despejar una ecuación más difícil.

I: ¿Le incluyes la constante? ¿Es cuando dices lo de la constante y no podrías trabajar si no has averiguado el valor de la constante?

P: Exactamente. Entonces toca despejar, toca para una condición, para un punto, aprovecharlo en la ecuación y luego despejar eso utilizando el paso de exponencial a logarítmica. ¿Creo? Es que no me acuerdo cómo era el ejercicio. ¿Ah, en este tiene una gráfica o qué?

I: Sí. No, era el que estábamos pensando. Este simplemente es de gráfica.

P: Ah bueno, este por ejemplo es para ilustrar, ahí sí ya aplicado, cómo es una gráfica pero ya aplicada, ya no teórica sino aplicada. Entonces hicimos los… se calculaban los puntos y se traza la gráfica, porque eso es importante que lo vean cómo es teórico y cómo es aplicado: lo mismo. Es decir, se hace lo mismo pero tiene un… hay que entender el ejercicio y pasar de un campo a otro, trasladarse y situarse en ese contexto digamos, cómo es en ese contexto ya práctico. Pero pues simplemente para mostrar que lo que se hizo teóricamente, también aquí tiene una cosa parecida, o sea, tiene un desarrollo igual: hay que calcular puntos, hay que graficarlos, ya sabemos si es creciente o decreciente.

I: Este.

P: Crecimiento poblacional

I: O sea, ¿del ejercicio anterior a este sí hay un salto o no?, ¿conceptual?

P: No. Yo pienso que se complementan. Aquí trabajamos simplemente con puntos, ¿cierto? Calculamos puntos con una determinada condición. Aquí es otra cosa. Es un complemento porque aquí no vimos gráfica pero aquí sí vimos gráfica, entonces era para mirar la gráfica. Y este otro, es otro tipo de ejercicio. Ahí trato de mostrar como diferentes situaciones, para que no vean que siempre es lo mismo, ¿no? ¿Crecimiento poblacional? Me imagino que será también la cantidad de personas en un determinado tiempo. Ahí sí le faltó la te, para que quedara la forma como las otras, ¿no? Solamente es para proyectar un número. Pero entonces también el otro objetivo que tiene es mostrar diferentes aplicaciones.

I: ¿No tiene como objetivo manejar el número e?

P: No. No, mostrar diferentes tipos de ecuaciones. Bueno, ahí casualmente pues con la e los ilustra uno que también existe esa función, que existe esa exponencial especial, de base e. Es que toca con todo eso. Avancemos…

I: ¿Qué papel crees tú que juega el cuento de la calculadora ahí?

P: Pues es una herramienta, una herramienta importante para trabajar sobre todo esta parte, ¿no?

I: ¿Qué libro es ese?

P: Ese es del de Schokowsky. Álgebra y trigonometría.

I: Necesito que me lo prestes, por favor.

P: Es muy bueno.

I: Necesito que me lo prestes por lo menos por unos ocho días para fotocopiar los ejercicios que les pusiste de ahí.

P: Ese me encanta porque tiene unas aplicaciones muy buenas.

I: Sí, son interesantes.

P: Todo, todo tiene aplicaciones muy buenas.

I: De ahí fue que sacaste la ecuación logística, ¿cierto?

P: Sí, trato siempre de buscar diferentes, que pidan diferentes cosas, de pronto sí, en las mismas bacterias pero preguntando otra cosa, al revés, a la inversa, para que no sea tan… Siempre lo mismo, que vean que hay variedad en los ejercicios, que no todos piden lo mismo, o se hacen de la misma forma.

I: Este es genial por qué tienen mucho problema con el tiempo al tratar de resolverlo. Cuando tú por ejemplo les dictas ese ejercicio y les dices "suponiendo que el crecimiento es exponencial", ¿qué esperas que ellos entiendan?

P: Entiendan por eso. Bueno, pues si ya vimos una función que se llama exponencial, que tiene una forma y vimos unos ejercicios donde ya habíamos aplicado, que hemos graficado número de bacterias contra tiempo y nos damos cuenta de que tiene la forma, pues eso está representando el crecimiento exponencial de una bacteria, ¿cierto? Entonces cuando yo hablo en un ejercicio así, pues ya ellos tienen que relacionar que si ese crecimiento es exponencial, entonces qué forma tiene y es una aplicación de la función exponencial.

I: Bueno, pero qué diferencia tendría… ¿por qué tendrían ellos que pensar en una curva y no en una línea? Cuando les dices crecimiento exponencial. ¿O por qué no en una parábola, en uno de los brazos de una parábola?

P: Bueno, digamos crecimiento exponencial, pues ya vimos una…. Digamos, tenemos unos antecedentes de trabajo, ¿cierto? Vimos una función que tenía una forma, cómo eran sus características y todo eso y luego la aplicamos a algo concreto como es el crecimiento de las bacterias. Entonces al graficar ese crecimiento de las bacterias, vemos que los puntos no se alinean, no quedan todos alrededor de una tendencia lineal, sino que tienen otra tendencia que es una curva, que se llama exponencial. Entonces, eso es lo que yo espero que ellos entiendan, que si ya vimos ese comportamiento y una de las aplicaciones de esa función es el crecimiento exponencial de las bacterias, pues cuando yo les hable de crecimiento exponencial, es porque tiene una forma como esa.

I: Entonces ellos piensan: "me dijeron crecimiento exponencial", tú buscas que ellos piensen en la curva y que no vayan a pensar en la recta. Eso si tienen la ayuda gráfica que tú esperas que en ese momento la tienen, la tenga porque lo han trabajado. ¿Y de qué otra manera podrían, que no sea pensando en gráfica, crecimiento exponencial?

P: Crecimiento exponencial. Pues…

I: ¿O tú buscas que de otra manera además de pensarlo en gráfica, o no lo buscas, más bien sería…?

P: Pues si de pronto tienen una ecuación que la puedan identificar como exponencial, también sería otra forma.

I: ¿O sea que al decirles en la frase “tiene un crecimiento exponencial”, ellos pudieran pensar en una ecuación?

P: En una ecuación exponencial. En que ese comportamiento tiene una representación matemática con una función exponencial. O sea, una representación sería la ecuación y otra representación sería la gráfica.

I: Que ellos tengan como esa imagen mental.

P: Como esas dos, sí.

I: Buscas que ellos tengan eso. ¿Algo más?

P: A ver qué más.

I: ¿Que la diferencien por ejemplo de un crecimiento lineal o de un crecimiento de las otras: de equis a la dos, equis a la tres, las polinomiales, o no?

P: Bueno, en esa parte específicamente yo no lo hice así.

I: No lo buscas.

P: No, no lo busco ahí. Realmente uno, creo que uno hace primero esas funciones. Antes. Trató la función lineal y vio cómo era, trató la cuadrática, vio cómo era, de pronto también trató alguna función potencia, entonces tienen un comportamiento. De pronto sí sería bueno que uno hiciera de pronto la diferencia entre la función potencia y la exponencial, porque se parecen, ¿no? Esa sí sería una cosa que uno debiera hacer. Que yo de pronto no la hice, pero sí la debiera hacer. Demostrar que hay una parecida en la cual la variable es la que está en la base y no en el exponente. Entonces son diferentes, se parecen en su estructura, pero son diferentes.

I: ¿Son diferentes en…?

P: Son diferentes en que la una tiene un exponente que es la variable y la otra tiene la base que es la variable. Ambas tienen una potencia, pero la variable de la una está en el exponente y la de la otra está en la base. Sí eso de pronto sí, pienso que eso sí les ayudaría como a que no les parezca que todas, es decir, como para diferenciar especialmente con una parábola, ¿no?

I: Por ejemplo.

P: Una parábola se puede parecer bastante a una exponencial. Ah, esa creo que es para la pendiente. ¿No era para la pendiente?

I: No.

P: No porque la pendiente era en cada punto, sí claro

I: ¿Qué pretendes tú ahí, cuando les dices: “es exponencial, que es distinto a lineal”?

P: Pues que les quede claro que en el texto del ejercicio ya me están diciendo algo. El texto ya me está diciendo qué comportamiento va a tener esa función. Si me dicen que es exponencial, pues ya eso no puede ser lineal, porque es otra cosa.

I: ¿Qué otra cosa deberían tener ellos en la cabeza? ¿Qué otra cosa buscabas?

P: Pues tener claro cómo es una lineal y cómo es una exponencial, ¿cierto? Diferenciar entre las dos.

I: ¿En cuanto a qué?

P: En cuanto a sus características.

I: ¿A todas o alguna específica?

P: Bueno, lo más rápido sería una gráfica, que son completamente diferentes y la ecuación también, claro. La ecuación es muy diferente. O sea, si a ellos ya les dan la ecuación, ellos ya tienen que identificar con la sola ecuación: “ah, esto es una exponencial”, porque tiene la forma exponencial, ya la vimos. Entonces no pueden decir que…

I: Espérate, que es que a mí me parece que aquí tú les dijiste algo muy importante y no lo estamos viendo. Ahí cuando les dijiste lo de… de lo mismo que estábamos hablando.

P: La ecuación tiene que permitir… ya le da información a uno, la sola ecuación ya la deben conocer.

I: Sí, pero es que estaba segura que les decías otra cosa importantísima. Yo diría que una de las cosas llamativas de este ejercicio es que a pesar de que tenían la ecuación, tú tenías que decirles: “caramba, pero no es lineal”. Pero la tenían. En un momento dado lo que les dices es: “es exponencial, distinto a lineal. La pendiente va cambiando.” Les dices eso. Y si tú les dices: “la pendiente va cambiando”, ¿en qué momento de todo el proceso buscabas que ellos se dieran cuenta que la pendiente iba cambiando?

P: No, eso sí fue, digamos que yo pienso que es más circunstancial que pensado, yo no lo pensé así. Surgió en el momento, y si alguien se le ocurre que es lineal, pues yo simplemente hice el énfasis para mostrar la diferencia entre las dos, en que eran dos funciones bien diferentes. En la una, en la línea recta, pues la pendiente es constante, es la misma todo el tiempo. En una curva va variando.

I: ¿Tú pretendes que ellos se den cuenta de eso, de que la pendiente va cambiando? ¿Das por hecho que ellos se dan cuenta de eso?

P: Ahí sí no sé. Yo supuse que entendían que una curva tiene diferentes pendientes. Que en cada punto cambian. Y que está representada por una tangente a la curva en ese punto.

I: Lo que pasa es que acabas de decir tú mismo, algo muy interesante, cuando me estabas explicando me dices a mí, que esa es la característica más importante que las diferencia. Entonces cuando me dices que es la característica más importante, por eso te digo que si buscabas que ellos se dieran cuenta de esa característica.

P: No, porque ese no era el objetivo en ese momento. En ese momento estábamos trabajando en una aplicación, pero surgió que a alguien se le ocurriera, a pesar de que estábamos en un ejercicio de exponencial, se suponía que era exponencial, sin embargo alguien por allá dijo que lineal, se le ocurrió decir que lineal, está desubicado. Pero el énfasis lo hice como para recordarles: esta es diferente, una lineal es diferente a una exponencial y aquí nos están diciendo que el crecimiento es exponencial, entonces no puede ser lineal, es diferente. La diferencia hay que buscarla, en qué se diferencian.

I: Ahí es cuando les dices: para la próxima clase, la logarítmica.

I: Tu objetivo en la clase anterior, en la primera parte antes de comenzar con las aplicaciones, ¿tú cómo resumirías cuál era el objetivo de esa primera parte, antes de iniciar con las aplicaciones?

P: Ah bueno, antes de iniciar con las aplicaciones, conocer la función, cómo es esa función, entonces si es una función exponencial, como qué es. Básicamente, conocerla.

I: De esos “qué es”, ¿tú buscabas que identificaran qué?

P: Pues que identificaran cómo era la ecuación, cómo era la gráfica y qué características tenía, eso era lo que me interesaba ahí. Cada uno de los elementos de la ecuación, qué representaban.

I: Y tú al principio me dijiste que habías iniciado con elemento básicos que necesitaban ya manejar o con prerrequisitos, elementos previos. Dentro de estos elementos previos, entonces tú decías…

P: Pues tienen que saber lo de potenciación, o sea, tienen que haber manejado potenciación antes. ¿Si no saben qué es una potencia, pues cómo les voy a explicar la función exponencial, que es una potencia?

I: Y leyes de los exponentes.

P: Leyes de los exponentes también lo requieren. Requieren también la definición de qué es un logaritmo y el paso de logaritmo a exponencial, eso es clave, porque eso se maneja todo el tiempo en este tipo de aplicaciones.

I: Como definición.

P: Sí, como definición y para mirar que están relacionados.

I: También les preguntaste sobre función, qué es una función…

P: La inversa.

I: Y recordaron función uno a uno.

I: ¿Cuáles momentos consideras tú que son como claves en la primera clase, en toda la clase donde haces el recorderis y donde haces las aplicaciones? Sin esta, sin la atención académica, los momentos clave.

P: ¿De cada una de las anteriores, o cómo?

I: De la clase anterior, sí.

P: Primero conceptos previos.

I: Exacto. Y luego terminaste con las aplicaciones.

P: Bueno. Los conceptos previos. Uno tiene que partir de que hay unas cosas que no puede uno suponer. Que si no las tienen, pues me toca devolverme, porque cómo voy a seguir. Ese es un momento importante. La parte previa que deben tener, con la que deben venir preparados para poder empezar a ver otra cosa más compleja. Bueno, después el segundo momento es cuando ya empezamos a mirar teóricamente o conceptualmente la función: qué es esa función, matemáticamente cómo se escribe, cómo se representa gráficamente y qué características tiene. Ese es otro momento importante. Y el tercer momento son las aplicaciones. Creo que son como tres pedazos grandes.

I: Ya mirando la clase, ¿tú crees que resultaría importante en algún momento que ellos analicen cómo es el cambio de esta variable y cómo es el de esta? ¿Cómo, cuando aquí estoy aumentando uno, uno, uno, aquí con la otra variable, qué está pasando en la exponencial? O en las tablas de valores, que miraran.

P: Bueno sí, eso lo hago por ejemplo cuando van a graficar entonces yo siempre hago mucho énfasis en las escalas. Entonces para mirar la escala horizontal, entonces vamos a mirar qué variación tuvo la equis, cuál es el valor mínimo y cuál es el máximo y con eso yo planeo mi escala, hasta dónde debe ir. Y lo mismo hago aquí, en la otra. Entonces les hago énfasis en que no necesariamente esta escala tiene que ser idéntica a la de aquí, puede ser en algún ejercicio. Pero si uno se da cuenta en esta, esta tiene que usar una escala más rápida, tiene que crecer más rápido.

I: Pero nunca lo haces explícito en la clase.

P: De pronto no lo hago ahí, sino que tendría que ser como una cosa previa, porque eso lo hago es más cuando veo el plano cartesiano, veo cómo son las escalas y les digo que puede haber funciones en las que una crece más rápido que la otra.
I: ¿Y en la exponencial no es importante o no buscas hacer énfasis en eso, en cómo crece una y cómo crece la otra?

P: Bueno, de pronto eso sí creo que me haría falta. Creo que sería importante. Eso no lo dije por ninguna parte. Pero sí pienso que sí es importante porque es una característica, que una crece más rápido que la otra.

7. ENTREVISTA 3. CASO 2.

I. Y ahora sí viene la que es los ejercicios. Esta es la atención académica. Bueno y en las aplicaciones entonces ya es…

P: Esto que vimos teórico, dónde se aplica y cómo se aplica.

I: El objetivo es que ellos vean cómo se aplica.

P: Sí. Cómo se aplica y que la aplicación es cercana, porque por ejemplo yo no quise hacer la aplicación del interés compuesto, porque aquí está fuera de contexto. Sí, es una función exponencial, pero esa no es tan importante para ellos. Para ellos es más importante ver el crecimiento bacteriano o la descomposición radioactiva de un elemento. Eso está más cercano a lo que ellos conocen o a lo que ellos aplican. Pienso que eso es más efectivo que ponerles un ejercicio de interés compuesto. Esta ya es la tercera sesión, esa es la del ejercicio.

I: Y ahí sí es donde les pones la constante y entonces toca utilizar el logaritmo.

P: Y les recuerdo entonces la definición de logaritmo, identificar cada uno de los términos: cuál es la base del logaritmo, cuál es el exponente, la definición del logaritmo, para que eso mismo, eso que está allá teórico que se llama “la definición de logaritmo”, eso aquí, cómo se aplica aquí en esta ecuación exponencial, cómo se pasa de una forma a la otra para poder despejar, porque ahí se requiere despejar el valor *k*. Uno trabaja con muchos supuestos, ¿no?

I: Muchísimos.

P: A mí me gusta desmenuzar todo hasta lo más mínimo porque me encanta que… Digo: por lo menos una vez que lo vean todo y les queda más claro, eso ayuda mucho.

P: Esa fue más compleja, el desarrollo matemático. Pero habíamos hecho un ejercicio parecido, un ejemplo en la primera. Entonces yo esperaba que bueno, con ese ejemplo ya tenían una idea de lo que había que hacer, pero bueno, uno supone muchas cosas.

I: Yo te hacía la pregunta de “crece exponencialmente”, porque es que es lo típico. Uno cuando encuentra los ejercicios de ese tema, siempre dicen así y entonces yo decía: Bueno, y este estudiante, o uno qué pretende que el chico tenga en la cabeza cuando lea “crece exponencialmente”. ¿Será que sí le dice algo toda esa frase?

P: Yo creo que sí le tiene que decir algo, porque tiene que relacionar lo que ya había antes con lo que estoy viendo ahorita. Si estamos en ese tema de la exponencial, lo acabamos de explicar, miramos qué forma tenía y vamos a hacer una aplicación, entonces el que le digan “crece exponencialmente” y estamos hablando de la función exponencial y estamos hablando de las aplicaciones de la función exponencial, ¿pues cómo no va uno a relacionar que esas palabras que le están diciendo ahí, se están relacionando con lo que acabo de ver?

I: Bueno, ¿y el día que a nuestros estudiantes no les digan “crece exponencialmente”, sino que les den una tabla, y les digan “y cómo crece esto”, con un desarrollo así, tú crees que el estudiante puede hacerla reversible y decir “crece exponencialmente”?

P: ¿Con la tabla, con la sola tabla?

I: Sí. Que le den una tabla bastante continua.

P: Yo me imagino que una persona que se le enfrente a ese problema de tener solamente la tabla, pues tendría que graficar, como para mirar ese comportamiento cómo es, porque la gráfica me ayuda mucho. Ahora, si me dieran la ecuación, la ecuación también me ayudaría.

I: Ah no, esa sí ya no.

P: No, yo creo que tendrían que graficar para poder decir: “este comportamiento es lineal o este comportamiento es tal cosa”. Porque con los solos puntos es muy difícil.

I: Pero supongamos que la den curvita y cómo para que digan: “es exponencial”.

P: ¿Para que la identifiquen exactamente con sólo la tabla?

I: Sí, que se les ocurra decir: “bueno más o menos tiene un comportamiento exponencial, podría ser exponencial”. Con la tabla y haciendo la grafiquita.

P: Bueno, pues yo creo que sería que relacionaran las dos variables. O sea, que mientras una crece muy lentamente, la otra crece muy rápidamente. Ese podría ser un comportamiento exponencial. Es decir, el número de bacterias… yo trataría de relacionarlo siempre así: es muy rápido, eso lo ven ellos en la práctica, dejan unas bacterias ahí y al otro día, rápidamente van creciendo por montones. Entonces el número de bacterias aumenta muy rápidamente en el tiempo. Pero eso no es tan fácil que puedan sacar esa conclusión. No. No creo que la puedan sacar tan fácilmente. Ah, estamos en el despeje.

I: Sí, cuando ahí sí necesitan la logarítmica. ¿Ese ejercicio tú lo ubicaste con toda la intención, la necesidad del logaritmo?

P: Sí.

I: ¿Por qué?

P: Pues para que miremos que está relacionado con la logarítmica, que es la que vamos a ver después. Y además que todos los ejercicios no… pues para mostrar variedad en los ejercicios, que no siempre son haga la gráfica y calcule cuántos hay en tanto tiempo, sino este es al revés, de la misma ecuación es una de sus variables, no es la de siempre sino es otra. Es la misma ecuación pero lo que me piden ya no es la cantidad sino me piden es el exponente que era la variable tiempo, en este caso la variable tiempo y que además tenía la dificultad matemática, porque no es la ecuación normal.

I: ¿Eso quiere decir que ahí nos pasamos a otro objetivo? ¿Despejar ecuaciones donde hay exponenciales?

P: Ese no es exactamente el objetivo. El objetivo que yo tenía con este ejercicio es mostrar otra forma de ejercicios de aplicación que no sea siempre el mismo, la misma mecánica siempre. Hay otro donde me piden otra cosa. Con la misma ecuación me piden otra cosa, pero ésta requiere una cosa matemática que no habíamos visto en las otras, que es despejar esa variable que está allá en un exponente, eso no es tan común. Entonces ahí hay un grado de dificultad mayor. Pero ese sí tenía ese objetivo. Mirar que no todas las veces tiene que remplazar ahí y ya. Siempre uno encuentra esas dificultades con ellos: los exponentes negativos, a pesar de que se vieron y todo el cuento.

I: Yo lo que me preguntaba era: ¿por qué esa ecuación?

P: ¿Esta?

I: Sí. ¿Por qué…?

P: La logística. Esa es la ecuación logística.

I: Sí, esa es la logística. Yo decía, por qué una tan complicada en escritura, pero yo pensaba así. ¿Por qué? ¿Qué pretendías?

P: No, simplemente pues mostrar formas, es decir, que las ecuaciones no siempre aparecen en la forma en que uno tiene el estándar, que es el del comienzo, que es be a la equis… y siempre van a ser así, sino que hay variaciones, pero esas variaciones yo las puedo volver a mostrar haciendo ciertas operaciones, puedo volverlas a mostrar como deben aparecer, o sea como uno ya tiene el esquema de que la exponencial tiene que tener esta forma. Porque si no, entonces no sería entonces un ejemplo de exponencial.

I: Sí, es que lo que más me cuestiona a mí es si es un ejemplo de exponencial.

P: Sí, claro. Yo sí la considero una exponencial.

I: Yo la considero una compuesta en donde aparece una exponencial.

P: Bueno, pero ese… A ver, es más compleja, sí, pero sigue siendo exponencial, ¿o no? Sí es una exponencial.

I: ¿Y yo recalco en que tú pretendes que apliquen y al aplicar logren entender un poco más la esencia de la exponencial?

P: Sí. La esencia no solamente. No tanto la esencia, no tanto, sino más bien las variedades de formas en que se pueden presentar las ecuaciones y que siguen siendo exponenciales. O sea, si yo graficara, si yo hiciera, volvería a encontrar las mismas características que he hecho en otras más simples. O sea, yo he ido siempre de la más sencillita a una más compleja, a mirar que tiene muchas aplicaciones y que en las aplicaciones, la exponencial no siempre tiene que aparecer en la forma digamos normal que uno ya aprendió, como el esquema inicial que la ecuación es así. Entonces si me la dan un poquito con otra cosa diferente, entonces yo ya no la puedo identificar porque entonces ya no es exponencial. Esa es como la idea que yo tengo de eso y bueno, sí, esta evidentemente es mucho más compleja. Además también la relacioné pues con población, ¿no? Ya esta es población de seres humanos, no bacterias. Otro tipo de bichos. Y buscándole siempre las aplicaciones relacionadas con salud. Lo que más pueda, no es tan fácil encontrarlas, siempre me toca buscar de un lado y de otro, pero eso es bueno.