VNIVERSIDAD D SALAMANCA

DEPARTAMENTO DE PSICOLOGÍA EVOLUTIVA Y DE LA EDUCACIÓN

TESIS DOCTORAL

“Representación de la magnitud numérica y su relación con la ejecución en matemáticas”

SARA SAN ROMUALDO CORRAL

Trabajo dirigido por:

Prof. Dr. D. Josetxu Orrantia Rodríguez

- Salamanca, 2015 -

A mis padres y a mi hermana

Gracias por ser siempre mi ancla.

Gracias, gracias infinitas

ÍNDICE DE CONTENIDOS

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

INTRODUCCIÓN

INTRODUCCIÓN

QUÉ ESTAMOS BUSCANDO

Aquello sobre lo que versa esta Tesis Doctoral es un producto determinado, la representación y el procesamiento de magnitudes numéricas. Más concretamente, considerando que el procesamiento de magnitudes numéricas es un proceso complejo, el presente trabajo pretende acercarnos a este proceso estudiando su relación con la ejecución matemática. En otras palabras, imaginemos por un instante qué ocurre cuando en nuestro día a día tenemos que resolver ciertas operaciones, por ejemplo, realizar un simple cálculo como podría ser 65 + 34 para saber cuánto debo pagar en un supermercado. Algo que nos resulta tan espontáneo y mundano, es un proceso que se ha ido desarrollando a lo largo del tiempo y que hemos ido perfeccionando gracias a la continua exposición y/o a la propia experiencia matemática. Precisamente, nuestro esfuerzo en este trabajo persigue explorar cómo procesamos las magnitudes numéricas y estudiar la relación que tiene con la ejecución matemática. A pesar de ser un campo de estudio muy reciente y del que aún no existe acuerdo sobre qué es lo que exactamente predice la ejecución matemática, analizaremos dicha relación para intentar explicar qué factores explicarían más el rendimiento matemático posterior y qué mecanismos estarían implicados. Si podemos discernir qué está ocurriendo, la idea que subyace sería bien sencilla: si sabemos explícitamente los componentes que intervienen o explican dicha relación, educativamente nos va a permitir prevenir dificultades e intervenir de manera más eficaz.

Para ello, el marco teórico de esta Tesis Doctoral parte de tres ideas fundamentales: cómo representamos y procesamos magnitudes numéricas, cómo podemos evaluarlo y sobre todo, qué relación existe entre el procesamiento de magnitudes numéricas y la ejecución matemática. Si bien la posibilidad que planteamos marca cierta diferencia respecto a los trabajos previos sobre el estudio de esta relación, y en cierta medida amplía las limitaciones que hemos encontrado en trabajos anteriores, es nuestro deseo no abrir la "caja de Pandora" al iniciar este viaje dadas las marcadas diferencias que, se establecen entre las distintas aproximaciones a la naturaleza y mecanismos implicados en esta representación.

Para alcanzar el objetivo que hemos mencionado anteriormente, creemos necesario esbozar aquello que el lector encontrará en las dos Partes que componen esta Tesis Doctoral. La primera de ellas recoge los Capítulos I, II y III y hace referencia al marco teórico sobre el que hemos planteado nuestras hipótesis. La Segunda Parte incluye los Capítulos IV y V recogiendo los estudios empíricos, el resumen y las conclusiones finales a este trabajo.

El Capítulo I está dedicado a una de las dos dimensiones que dan nombre a estas páginas: la representación y el procesamiento de magnitudes numéricas. En este sentido, partiremos de la idea de la existencia de un mecanismo subyacente a las representaciones de la magnitud y que es conocido como el sistema numérico aproximado (SNA), un sistema primitivo de representación no verbal que permite a los individuos procesar magnitudes y cuyo desarrollo no depende de una enseñanza explícita. Como veremos a lo largo de este primer Capítulo, es un sistema innato y está presente en otras especies animales no humanas, personas que no han recibido ningún tipo de instrucción matemática e incluso en bebés, que son capaces de entender y manipular magnitudes numéricas por medio de representaciones no simbólicas. Además, explicaremos este proceso desde los estudios de neuroimagen y con pacientes con lesión cerebral, cuya pretensión es localizar la zona específica del cerebro donde se lleva a cabo este procesamiento, zona que además está implicada en el procesamiento de números simbólicos cuando tenemos que atender a su numerosidad (i.e., comparar dos números simbólicos). Para acercarnos a este proceso –llamado procesamiento y representación de magnitudes– hemos decidido ayudarnos de algunas aproximaciones teóricas que con mayor detalle ha explorado esas representaciones, los modelos de procesamiento de magnitudes y cálculo más representativos. Este grupo de modelos teóricos ha pretendido a lo largo del tiempo desentrañar los secretos de un proceso que es la base de la competencia matemática, no obstante, aún no hay acuerdo entre los investigadores en cuándo y cómo se lleva a cabo esta proyección entre los numerales simbólicos y las representaciones no simbólicas de la numerosidad. Intentaremos esgrimir los dos planteamientos clásicos y, desde el punto de vista teórico, opuestos. Esto es, asumir que el sistema numérico aproximado está implicado en el procesamiento de la información numérica simbólica, cuando los individuos tienen que procesar números simbólicos (i.e., dígitos arábigos), de tal forma que cuando se aprenden los símbolos para representar números, estos adquieren significado cuando se asocian con el sistema numérico aproximado preexistente. Desde una de las perspectivas se asume que simplemente los números simbólicos se proyectan directamente en las representaciones no simbólicas de la cantidad. Otros, sin embargo, veremos que plantean que esta proyección se produce en las representaciones exactas de la cantidad, y solamente después hay una conexión entre estas representaciones exactas y las aproximadas de la cantidad. En otras palabras, necesitamos acceder a la semántica del número. Esto tiene algunas repercusiones en relación al planteamiento que guía esta tesis doctoral, centrado en analizar las relaciones entre la representación de la cantidad y la ejecución matemática, ya que como veremos, una cuestión crítica es si las relaciones entre las habilidades matemáticas se establecen con la representación de la magnitud o con el sistema simbólico exacto. Planteamientos que serán nuestro punto de partida en el Tercer Capítulo de este trabajo.

En el Capítulo II de la Tesis repasaremos de manera sintética las diferentes tareas que se proponen para analizar el procesamiento y representación de la magnitud numérica. Tareas que a su vez implican distintos índices y medidas que bien recogen la eficacia con la que procesamos magnitudes, o reflejan la representación subyacente a la magnitud. No obstante, y tal y como veremos a lo largo de este Capítulo, es un tema, en cierto modo, controvertido porque no existe consenso a la hora de decidir qué tarea/s utilizar, cuál mide mejor la representación, si todas miden lo mismo y si realmente podemos compararlas entre sí. Esto puede suponer un problema a la hora de establecer las posibles relaciones entre el procesamiento de la magnitud y la ejecución en matemáticas. De hecho, hasta donde llegan nuestros conocimientos, en la actualidad es un debate abierto y, explicar las maneras de estudiar esta relación nos permite establecer el contexto adecuado para recoger, en el último Capítulo de esta Primera Parte, un numeroso grupo de estudios que utilizan distintas tareas y medidas y sobre todo, enmarcar dichos trabajos en función de dónde creen que existe esa relación y los componentes esenciales en este proceso; qué es lo que realmente puede explicar la relación entre el procesamiento y la ejecución matemática.

En el Tercer Capítulo de este trabajo, recogemos un extenso corpus empírico de trabajos que han estudiado la relación del procesamiento y representación de magnitudes numéricas y la ejecución en matemáticas explícitamente. Como hemos mencionado unas líneas más arriba es una cuestión aún abierta puesto que es un campo de estudio muy reciente. Nuestra pretensión es intentar esbozar un recorrido dentro de los diferentes trabajos. Para ello, plantearemos el Capítulo desde dos planteamientos diferenciados entre sí; los estudios que apoyarían la hipótesis de que nuestro sistema numérico aproximado no simbólico es el precursor del desarrollo de habilidades matemáticas más complejas y que explica el rendimiento matemático posterior y, por otro lado, nos encontraremos con los trabajos que ponen su atención en la premisa de que no es el procesamiento de magnitudes si no cómo accedemos a ellas, cómo accedemos a su semántica; el procesamiento simbólico como predictor de las diferencias individuales en la ejecución matemática posterior. Esta premisa nos guía hacia dos tipos de sistemas de procesamiento claramente delimitados, separados e independientes entre sí; un sistema aproximado y un sistema exacto. Otros sugieren que en realidad contamos con dos sistemas separados para representar cantidades simbólicas y no simbólicas, sin necesidad de que tenga que haber una conexión entre ambos, o que al menos las propias relaciones entre los números simbólicos de alguna manera eclipsen las relaciones entre los símbolos y su representación de la cantidad. En la última parte recogeremos una tercera perspectiva que explica que las diferencias individuales en ejecución matemática se deben fundamentalmente a diferencias individuales en el procesamiento simbólico "puro" sin necesidad de acceder a la magnitud. Para intentar arrojar un poco más de luz a esta cuestión, vamos a estructurar esta parte de la Tesis comenzando con los estudios realizados con niños para continuar con los llevados a cabo en población adulta puesto que los estudios que presentaremos en la Segunda Parte, el primer estudio –longitudinal–, se realizó con niños y el segundo con población adulta.

La parte empírica de nuestro trabajo, que expondremos en el Capítulo IV, incluye el diseño, los análisis, resultados y conclusiones de los dos estudios experimentales que tienen por objeto explorar la hipótesis que ha guiado esta Tesis Doctoral. En el primero de ellos, intentaremos establecer, mediante un estudio longitudinal, cómo el procesamiento y representación de magnitudes numéricas se relaciona con la ejecución matemática dos años después en niños de 6-8 años. Una novedad que aporta este trabajo es que se ha estudiado esta relación utilizando también dígitos con dos cifras. Es algo novedoso, porque en los estudios realizados con niños el rango de las numerosidades empleado en las tareas de comparación simbólica únicamente abarcan el rango de 1-9, puesto que se entiende que al ser niños pequeños que, o no han comenzado la etapa de enseñanza obligatoria o están al inicio de esa instrucción matemática, todavía no han aprendido las matemáticas simbólicas. Nuestro segundo estudio empírico también explorará esta hipótesis, pero en población adulta (estudiantes universitarios). Para ello dividimos el estudio en tres objetivos, en el primero de ellos analizaremos hasta qué punto son las medidas no simbólicas o simbólicas las que se relacionan con ejecución matemática. En el primer caso, las medidas no simbólicas reflejarían la agudeza con la que tenemos representadas las magnitudes mientras que las medidas simbólicas estarían más relacionadas con la hipótesis de acceso. En un segundo momento, replicaremos la hipótesis de los que plantean que las diferencias individuales en ejecución matemática se deben fundamentalmente a diferencias individuales en el procesamiento simbólico "puro", es decir, que ni tan siquiera procesamos magnitudes o accedemos a su significado. Veremos si el procesamiento simbólico puro explica la ejecución matemática más allá de lo que explicarían las medidas de acceso a la representación de la magnitud. Con el último objetivo de este estudio queremos analizar si la variabilidad en la ejecución en tareas de cálculo simple puede ser explicada por la tarea de enumeración más allá de las variables de control y otras variables que hemos visto en los objetivos anteriores que están relacionadas con el cálculo. En los estudios más recientes se ha incorporado esta tarea de conteo puesto que se ha comprobado que los mecanismos implicados también son componentes nucleares del procesamiento de las magnitudes. Hasta donde llegan nuestros conocimiento esto no se ha analizado pero tenemos razones para creer que algo similar podría ocurrir porque algunos estudios han planteado que los adultos no sólo utilizan la recuperación de hechos numéricos cuando llevan a cabo cálculos simples, sino que también puede utilizar estrategias y procedimientos que implican manipulación de la magnitud (e.g Campbell & Xu, 1999; Lefevre, Sandeski & Bizand, 1996).

Por último, en el Capítulo V se sintetizan e interpretan los resultados, para finalmente, proponer una serie de conclusiones, de limitaciones en el planteamiento de nuestro trabajo y de las posibles aplicaciones y estudios posteriores que nos ayudarían a ampliar los objetivos que nos hemos marcado en nuestro trabajo.

Ahora que ya sabemos qué buscamos, estamos listos para comenzar a pedalear.

PRIMERA PARTE

MARCO
TEÓRICO

CAPÍTULO I

REPRESENTACIÓN Y PROCESAMIENTO DE MAGNITUDES NUMÉRICAS.

PROCESAMIENTO DE LA MAGNITUD NO SIMBÓLICA Y SIMBÓLICA

La comprensión y el procesamiento de cantidades numéricas es fundamental para tener éxito en la educación y en la vida diaria. Poseer cierta sensibilidad hacia magnitudes numéricas se ha demostrado también en otras especies (Brannon, Cantlon, & Terrace, 2006; Dehaene, 1998) y está comprobado que los humanos nacemos con esta capacidad (Xu, 2003; Xu & Spelke 2000). Este conocimiento de la magnitud numérica está pensado para servir de base después a una mayor competencia de procesamiento matemático de nivel superior, como por ejemplo el cálculo (Butterworth, 2005). Además, numerosos estudios han demostrado que niños con dificultades en matemáticas presentan problemas específicos a la hora de comprender y procesar magnitudes numéricas (De Smedt, Reynvoet, et al., 2009; Landerl, Bevan & Butterworth, 2004; Landerl, Fussenegger, Moll & Willburger, 2009; Passolunghi & Siegel, 2004; Rousselle & Noel, 2007).

En este ámbito de conocimiento surgen cuestiones de gran calado relativas, por ejemplo, a la comprensión del proceso que permite a los niños aprehender el significado de los números, o al dilema de si existe o no un fundamento innato en dicho proceso (Feigenson, Dehaene & Spelke, 2004).

Igualmente desafiante resulta cuestionarse si realmente existe algún grupo neuronal preferente que dirige este procesamiento, qué partes de nuestro cerebro se activan en este proceso y las bases que compartimos con otros animales no humanos (Brannon, 2006).

Por otro lado, en los últimos años se han realizado numerosas investigaciones en las que se ha estudiado el papel del formato en el procesamiento de magnitudes numéricas no simbólicas como base de un procesamiento simbólico posterior. Otras investigaciones, sin embargo, han puesto especial interés en cuestionar que las representaciones no simbólicas de la magnitud tengan un papel relevante en el procesamiento de magnitudes simbólicas.

A lo largo de este primer Capítulo vamos a abordar qué es la representación numérica de la magnitud y cómo procesamos magnitudes, e intentaremos dar respuesta a las cuestiones anteriormente expuestas. Para poder comprender la importancia de dichas representaciones se analizarán tres aspectos principalmente; en primer lugar profundizaremos sobre qué entendemos como procesamiento de la magnitud numérica haciendo especial hincapié en los componentes y variables que intervienen en dicho proceso. Para analizar dicha cuestión, realizaremos una descripción sobre cómo procesamos y representamos magnitudes, partiendo de la premisa de que el procesamiento de magnitudes no simbólicas viene innato en nosotros e incluso está presente en otras especies no humanas. En un segundo momento, estudiaremos cómo evoluciona esta representación; desde una representación menos precisa -representación logarítmica de la magnitud numérica o *"noisy"* como explicaremos a lo largo del trabajo- hacia una representación más exacta o *"más fina"*. Y, finalmente, intentaremos entender la relación entre el procesamiento no simbólico y simbólico y los diferentes planteamientos que existen en la actualidad sobre esta cuestión.

1.1 REPRESENTACIÓN DE MAGNITUDES NUMÉRICAS

La relación entre el sentido numérico y la capacidad en las matemáticas es importante e intrigante, porque creemos que el sentido del número es universal, mientras que la habilidad para las matemáticas depende altamente de la cultura y la lengua, y toma muchos años en aprenderse. Por lo tanto, un vínculo entre estos dos aspectos es sorprendente y suscita muchas preguntas y reflexiones importantes. Entre ellas uno de las más importantes es si podemos inculcar a los niños un sentido numérico con el objetivo de mejorar sus habilidades matemáticas en el futuro (Libertus, 2011).

Aunque como veremos hoy poco se duda de que nacemos con "ciertas habilidades" como son la capacidad para representar, discriminar y operar con magnitudes, algunos conocimientos y procesos matemáticos precisan tener un aprendizaje o formación mucho más especializada. La premisa de que nacemos con ciertos "sentidos" o percepciones numéricas podemos sustentarla en que la base de todo conocimiento del número es el "sentido numérico" o como otros llaman, Sistema Numérico Aproximado (en adelante SNA). Este sistema se encontraría en una región específica del córtex parietal, el cual contiene las representaciones no verbales de la cantidad numérica o lo que también se denomina como mapas espaciales (línea numérica).

Estas habilidades numéricas presentes ya desde momentos tan tempranos, se irán desarrollando con el paso del tiempo (Estévez, Castro & Reigosa, 2008), y no se manifiesta exclusivamente en los humanos, sino que está presente en muchas otras especies animales, como explicaremos a lo largo de este primer capítulo. Dicho sistema se ha descrito como un sistema mental de representación de la magnitud que produce el "sentido numérico" en todas las especies y durante todo el desarrollo humano empezando justo desde el nacimiento (Mazzoco, Feigenson & Halberda, 2011). Algunos plantean que esta noción intuitiva de la magnitud o sentido numérico puede constituir la base del desarrollo matemático posterior o tener una relación directa con las habilidades matemáticas.

1.1.1 Origen de la Representación de magnitudes numéricas. El Sistema Numérico Aproximado.

Para poder relacionarnos satisfactoriamente en una sociedad en la que los números son parte inherente es necesario interpretar, comparar y calcular mediante cantidades numéricas. En este sentido, entender las diferencias individuales en este proceso, se ha convertido en el foco de interés de numerosas investigaciones, muchas de las cuales, y las más recientes, se han centrado en analizar un factor subyacente a dichas diferencias: la ***representación de la magnitud numérica***. Junto con la capacidad para comprender conceptos numéricos exactos cuando se representan simbólicamente, las personas poseemos un Sistema Numérico Aproximado que nos permite operar de manera aproximada con las cantidades (e.g., si pagamos en una tienda con un billete de 50 € un artículo que ha contado 7 €, y nos devuelven 23 €, este sistema nos alerta rápidamente de que algo no va bien sin necesidad de calcular –ah! faltaba un billete de 20 €). Este sistema de representación mental de la magnitud está presente en bebés, niños, adultos de diferentes culturas e incluso en primates y otros animales (Dehaene, 1997) y se ha discutido ampliamente si conformaría a posteriori, la base cognitiva para las matemáticas simbólicas (Halberda, Mazzoco y Feigenson, 2008; Dehaene, 2011). Es un sistema primitivo de representación no verbal que permite a los individuos procesar magnitudes y cuyo desarrollo no depende de una enseñanza explícita (Feigenson et al., 2004). Estas representaciones no simbólicas se caracterizan por un efecto de ratio o distancia, esto es, cuando la distancia numérica entre los conjuntos es pequeña o la ratio se aproxima a 1, la ejecución es menos precisa y más lenta (Si en el ejemplo anterior nos devuelven 38 €, quizás no seamos tan rápidos en darnos cuenta de que falta un billete de 5 €, o que debamos hacer el cálculo para saberlo). Se asume que estos efectos se producen por un mayor solapamiento de las representaciones de la magnitud más cercanas (ver Figura 1). En este sentido, el tamaño de los efectos de distancia y ratio se consideran indicadores de la precisión de las representaciones de la magnitud numérica, y dicho tamaño disminuye con la edad, llevando a representaciones cada vez más precisas (Halberda & Feigenson, 2008).

Este sistema se activa cuando realizamos tareas numéricas, pero como venimos diciendo, representa el número sólo de forma aproximada. Dicha imprecisión se presenta de forma más acusada en unas personas y otras y opera de manera totalmente distinta a las representaciones simbólicas de la cantidad, tales como los números arábigos (6 ó 9) o las palabras numéricas ("seis" o "nueve"). De hecho, mientras que el acceso a la representación semántica del número desde los símbolos nos permite distinguir sutiles diferencias entre cantidades (e.g distinguir 202 del 204), el SNA fracasaría en hacer tales distinciones, aunque sí podría distinguir entre 202 y 74.

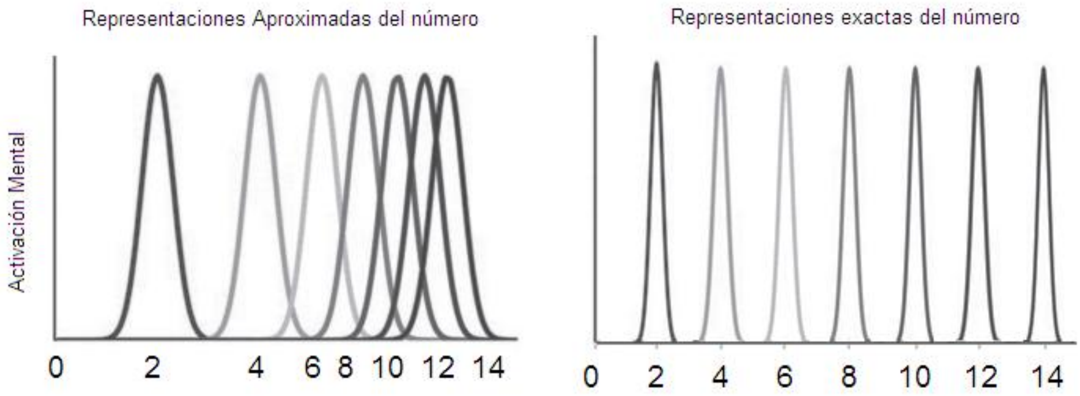


Figura 1.1: Distribuciones de activación mental en función de las numerosidades; Representación Aproximada (izquierda) y Representación exacta de la numerosidad (derecha). Adaptado de Feigenson et al. (2013).

En las últimas tres décadas, han sido muchos los estudios sobre la cognición numérica de los niños que han demostrado que los bebés nacen con la habilidad para representar, discriminar y operar con numerosidades, aunque solamente con cierta precisión (Feigenson, Dehaene & Spelke, 2004). Por ejemplo, incluso controlando variables como la luminancia y el área ocupada, niños de 6 meses pueden discriminar entre grupos de 8 y 16 ó 16 y 32 puntos, pero fracasarían entre 16 y 24 (Xu, Spelke & Goddard, 2005; Xu & Spelke, 2000) (Ver Figura 2). En otro trabajo de McCrink y Wynn (2004) muestran cómo bebés de 9 meses son capaces de sumar o restar colecciones de objetos (e.g 5+5 ó 10-5). Estas representaciones aproximadas del número quedan restringidas por la ratio de los dos números y mejora en precisión durante el primer año de vida (Lipton & Spelke, 2003).

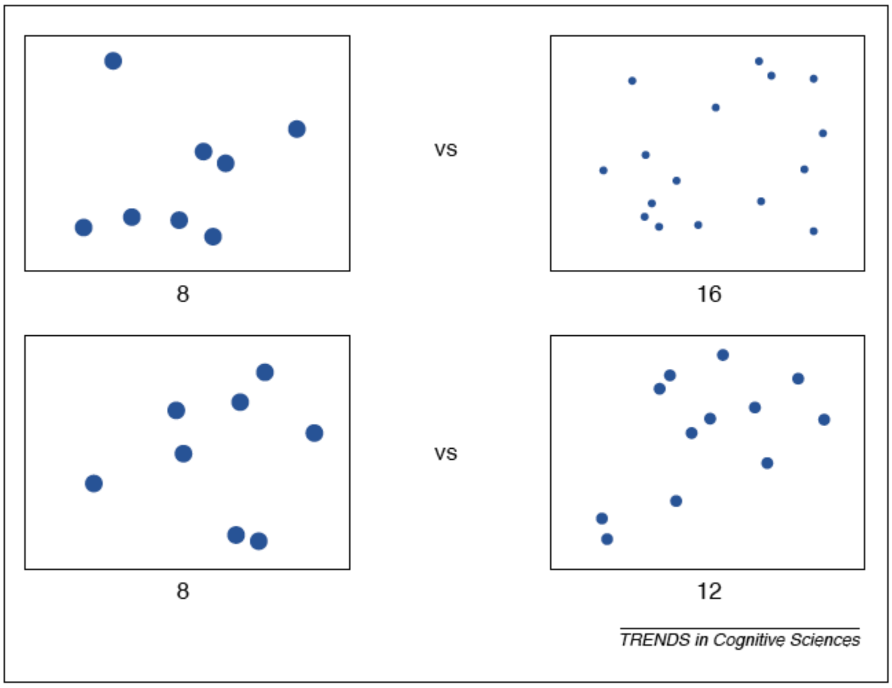


Figura 1.2: Ejemplo de comparación de magnitudes en trabajos con bebés (Xu & Spelke, 2000).

De hecho, este sistema aproximado obedece a la Ley de Weber[1]: cuanto mayor es la numerosidad más aproximado es su procesamiento. Recientemente se ha propuesto la fracción de Weber (*w*) cómo un índice de la agudeza del SNA. Reflejaría algo así como la cantidad mínima que habría entre dos cantidades para que se indique la mayor en una tarea de comparación de magnitudes (Véase Figura 3). Así, los bebés de 6 meses tienen una (*w*) de 1.0, correspondiente a una ratio de 1:2, lo que les permite la distinción entre 8 elementos y 16. A los 9 meses, son capaces de distinguir conjuntos con una ratio de 2:3, es decir, una (*w*) de 0.5, lo que les permite distinguir 8 elementos de 12. En tareas de comparación no simbólica, el SNA permitiría hacer discriminaciones de un ratio de 6:7 a la edad de 6 años (Halberda et al., 2008; Piazza et al., 2010). La fracción weber va decreciendo en el desarrollo de la edad adulta donde se estima entre 0.11 y 0.14, una ratio entre 8:9 y 7:8 (Halberda et al., 2008).

La explicación de este decremento de (*w*) correspondiente con un aumento en la agudeza del SNA es una cuestión aún no resuelta, habiendo distintas hipótesis al respecto. En una primera hipótesis se plantea que la agudeza del SNA aumenta como resultado del propio proceso madurativo, no por influencias culturales o educativas, ya que ninguna influencia culturas podría explicar la disminución de (*w*) en el primer año de vida. Una segunda hipótesis, sin embargo, apunta que es la experiencia que las personas poseen con la

1 La fracción de Weber es igual a la diferencia entre los dos números de la ratio, dividido por el número más pequeño; por ejemplo, una ratio de 7:8 equivaldría a una w=0.14.

información numérica, por ejemplo, a través de la adquisición del sistema numérico que proporciona la cultura o la instrucción en matemáticas, lo que explicaría el aumento en la precisión del SNA más que la representación de la magnitud *per se*.

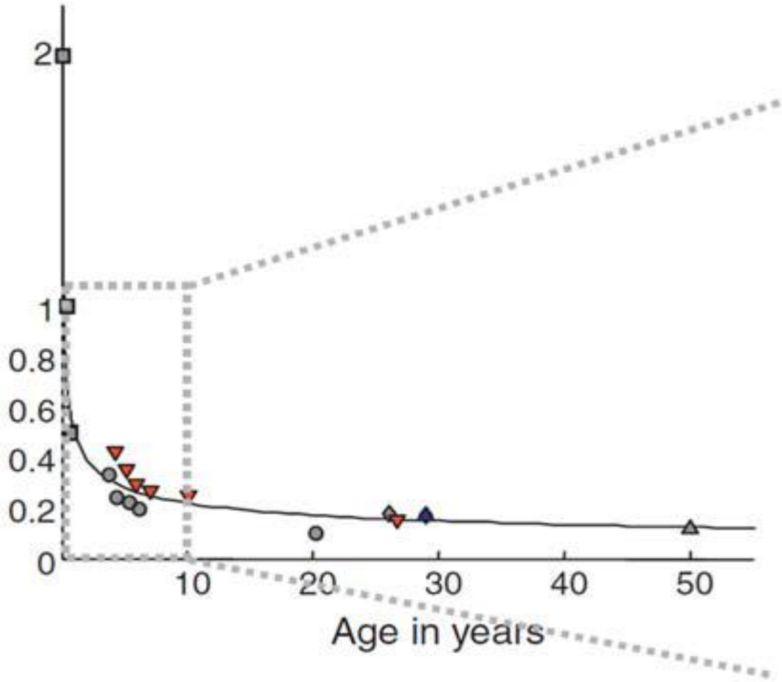


Figura 1.3: Precisión en el SNA estimado a partir de la fracción de Weber en función de la edad (tomado de Piazza, 2010).

No obstante, esta es una cuestión abierta –sobre la cual profundizaremos en en el *Capítulo III*–, considerando incluso que ambas hipótesis no son excluyentes, y que tanto los procesos madurativos como la experiencia con la información numérica pueden ser responsables de una precisión más fina del SNA con la edad.

Efecto Distancia y Efecto de la Ratio en la representación de magnitudes

Para entender un poco más qué significa "representar magnitudes", vamos a dar un salto en el tiempo y remontarnos al estudio original de Moyer y Landauer (1967) sobre cómo representamos magnitudes. En esta investigación, pedían a los participantes decidir entre dos números cuál de ellos era el mayor y observaron, lo que anticipábamos más atrás, que el tiempo que tardaban dependía de la diferencia numérica (o distancia) entre los dos números. Dicho con otras palabras, eran más rápidos juzgando qué número es mayor cuando la distancia numérica entre los números era grande (e.g 1 vs. 9) que cuando la distancia entre ambas magnitudes era pequeña (e.g 8 vs. 9). A este fenómeno se le conoce como ***Efecto de la Distancia Numérica (NDE)*** (ver Figura 4).

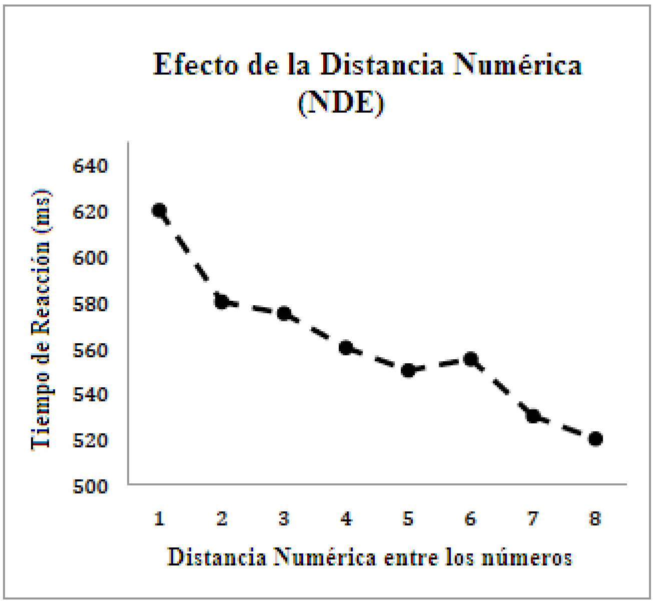


Figura 1.4: Efecto Distancia Numérica. Cuando la distancia entre dos números aumenta, el TR (ms) es menor.

Encontraron, además, que los participantes eran más precisos y más rápidos comparando números con magnitudes pequeñas *vs*. dos números con magnitudes grandes, incluso cuando la distancia entre los números permanece constante. Por ejemplo, al comparar 1 y 2 vs. 8 y 9 –su distancia es 1 en los dos-, cuando juzgaban que el 9 es una magnitud mayor a 8 (ratio de 0.89) que al comparar 4 vs. 3 (ratio 0.75). A este efecto, complementario al efecto de distancia, se le conoce como ***Efecto de la ratio (NRE),*** también denominado *"efecto del tamaño numérico"* (ver Figura 5).

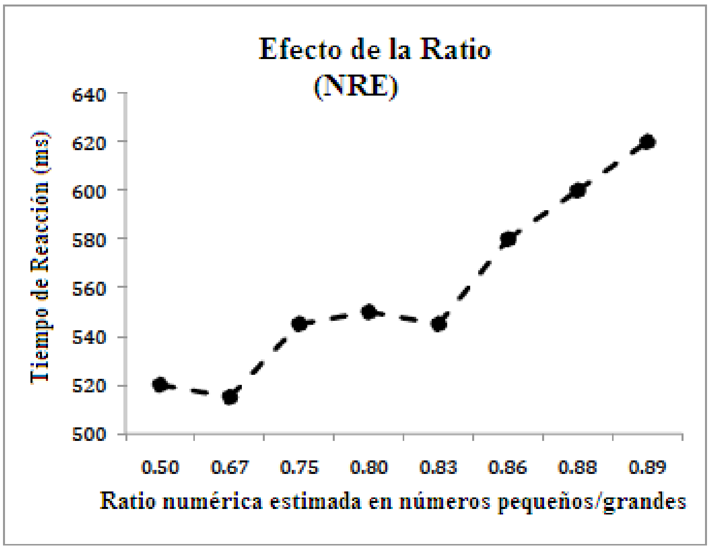


Figura 1.5: Efecto de la Ratio. Cuanto mayor es la ratio entre dos números, la ejecución es más lenta.

Ambos efectos han sido replicados en humanos numerosas veces, como tendremos oportunidad de ver, y en animales (e.g., Brannon & Terrace, 2002). Muchos investigadores afirman que los efectos distancia y ratio reflejan el sistema subyacente para representar y procesar magnitudes numéricas: un sistema análogo de representación de magnitudes. Una manera de entender esto, es imaginar que los números están representados a lo largo de un continuum al que podríamos denominar *"línea mental numérica"* –es un término estrictamente metafórico, no es que tengamos una representación lineal de la magnitud numérica en nuestro cerebro–, sobre la cual vamos situando las magnitudes numéricas. Las cantidades numéricas quedan representadas en una distribución no-lineal o logarítmica que se asemejaría a la curva de Gauss (ver Figura 6). Debido a su proximidad, las magnitudes que están más cercanas en la línea numérica quedarían superpuestas unas con otras y resulta más complejo discriminar estas magnitudes que las cantidades más separadas (efecto distancia numérica). En palabras de Rubinstein et al. (2002; p.1) *"los individuos convierten los estímulos numéricos en magnitudes continuas. La comparación entre estas magnitudes se lleva a acabo de la misma manera que las comparaciones entre estímulos físicos, tales como la longitud de líneas. Se entiende que la causa del efecto distancia es el solapamiento entre las representaciones numéricas".* El efecto tamaño –ratio- se explicaría ya sea mediante el aumento en la anchura de las curvas de cada magnitud o por la separación entre las magnitudes numéricas en la línea numérica (que disminuye cuando aumentamos el tamaño).

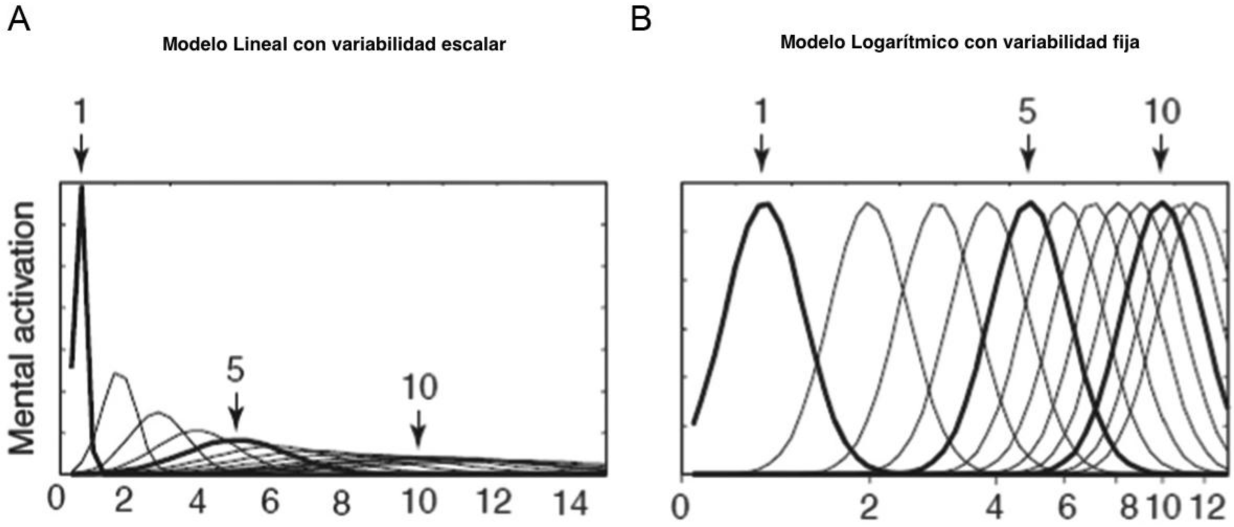


Figura 1.6: Dos modelos sobre la manera que las magnitudes numéricas pueden ser representadas a lo largo de una línea "numérica mental".

En estudios recientes se ha demostrado la relación entre la edad y los cambios que se experimentan en las representaciones de las magnitudes numéricas. Con la edad y la experiencia, los niños realizan las tareas confiando en primer lugar en representaciones logarítmicas de las magnitudes numéricas para evolucionar después a representaciones lineales (Booth & Siegler, 2006; Geary, Hoard, Byrd-Craven, Nugent & numtee, 2007; Opter, Thompson & DeVries, 2007; Siegler & Booth, 2004; Siegler & Opfer, 2003). Operar con una representación logarítmica implica que las estimaciones serían cada vez más rápidas para números pequeños pero no para números más grandes, mientras que el uso de una representación lineal implicaría utilizar una tasa igual de tiempo para todo el rango numérico. Se ha encontrado que el cambio de patrones logarítmicos a lineales en una tarea típica para evaluar la representación de la magnitud, como es la de estimaciones en la recta numérica (ver más adelante una descripción de esta tarea) ocurre entre niños de preescolar y segundo grado en estimaciones de (0-100) y entre segundo y cuarto grado para la estimación 0-1.000 (Booth & Siegler, 2004; pero ver Barth & Paladino (2011) para una explicación alternativa).

Si bien hemos pretendido dar una explicación sobre cómo representamos la magnitud numérica desde el origen, éste va más allá de las páginas que nos preceden. No obstante, ese esbozo nos va a servir para entender un poco más sobre el Sistema Numérico Aproximado, este sistema primitivo de representación no verbal que no es exclusivo de los humanos, sino como vamos a ver a continuación, lo compartimos con otras especies animales y personas que no han tenido acceso a la instrucción matemática.

1.1.2 Representación de la magnitud en animales y poblaciones iletradas

Ningún animal –no humano– es capaz de poder prever la Prima de Riesgo, realizar un balance de economía o ir a la compra. Sin embargo, las investigaciones realizadas durante los cien últimos años han demostrado que los animales pueden representar los atributos puramente numéricos del mundo que les rodea.

Las primeras aproximaciones que se hicieron acerca de la habilidad numérica de los animales estaban basadas en la idea de que el número es una dimensión artificial y no natural que puede ser representado por los animales únicamente bajo condiciones de un extenso entrenamiento (Davis & Pérusse, 1988). A pesar de ello, investigaciones recientes sugieren que algunos animales atienden a los atributos numéricos de su entorno de forma espontánea y automática (Hausser et al., 1996). Esto queda reflejado en las demostraciones de discriminación del número (con una ratio dependiente) que nos podemos encontrar en los monos Tamarin sin tener un entrenamiento en tareas numéricas (Spelke et al., 2003). Se observa también como los macacos Rhesus de Puerto Rico realizan operaciones de suma en conjuntos grandes (basado en el trabajo sobre el desarrollo de la suma y la resta en niños sin instrucción aritmética de Wynn, 1992). En este estudio llevado a cabo por Hausser y cols. (2003) los primates observaban 4 limones en una mesa que a continuación ocultaba el experimentador. A continuación veían cómo el experimentador añadía 4 limones más debajo de los que había ocultado anteriormente. Para finalizar se destapaba y era entonces cuando se revelaba el posible resultado de 8 limones o el resultado imposible de 4. Los monos miraban más tiempo el resultado de 4 limones, esto explica cómo se había creado una interferencia en su expectación. No se encontraron diferencias significativas en cuanto al tiempo cuando se les mostraba una operación de 2 más 2. Esto nos sugiere que los primates son capaces de "rastrear" operaciones de suma en conjuntos de gran numerosidad pero únicamente detectan interferencias en el resultado de la operación de suma cuando la ratio entre lo observado y lo esperado en el resultado es favorable.

Cuando los animales –como diversos primates y ratas- son evaluados en las mismas tareas numéricas no verbales que los humanos adultos, aparecen sorprendentes paralelismos que nos sugieren que los humanos y animales no humanos comparten un formato común para representar el número que es ratio-dependiente y obedece la Ley psicofísica de Weber. En un estudio realizado por Brannon (2006), primates y humanos adultos fueron evaluados en una tarea idéntica de ordenar numerosidades; en cada ensayo aparecía dos conjuntos de puntos y el animal o estudiante debían elegir el valor numérico más pequeño e ignorar las características no numéricas presentes en cada estímulo, tales como el tamaño de los puntos o la densidad del conjunto. El comportamiento de los primates y de los estudiantes fue significativamente muy similar en esta tarea: en ambas especies la precisión y los tiempos de reacción se modulaban en función de la ratio de las dos cantidades de la comparación (Cantlon & Brannon, 2006) (Figura 7: parte b y c).

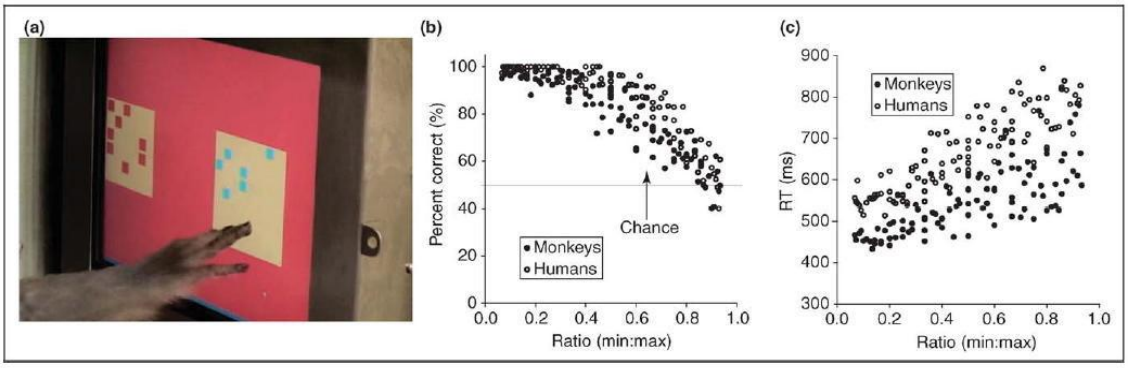


Figura 1.7. Los monos y los humanos comparten un sistema dependiente de la ratio para ordenar numerosidades. **(a)** Un primate eligiendo el valor numéricamente más pequeño entre dos conjuntos. Precisión **(b)** y Tiempos de Reacción (TR) **(c)** en una tarea de comparación numérica en monos y estudiantes universitarios.

En otro grupo de estudios (Whalen, Gallistel & Gelman, 1999), a ratas y humanos se les pedía realizar un número específico de respuestas para cada ensayo (en un teclado o palanca). En ambos grupos la media del número de respuestas aumentaba sistemáticamente con la magnitud del número que se les pedía y la variabilidad en el número de respuestas se incrementaba linealmente con la media del número de respuestas. Lo que se demuestra es que bajo las condiciones adecuadas podemos observar en adultos humanos un sistema del número dependiente de la ratio que es impreciso y que también compartimos con algunas especies animales no humanas.

El efecto de Congruencia semántica es otro componente de las comparaciones análogas de la magnitud que forman parte del dominio numérico. La congruencia semántica afecta sistemáticamente a los tiempos de respuesta cuando las personas realizamos cualquier tipo de comparación ordinal (como por ejemplo "*¿Cuál es el que tiene menos?"*). Nos referimos a efectos de congruencia semántica porque encontramos que con valores pequeños dentro de un continuo, como es el número, son más rápidos comparando cuando a los participantes se les pregunta *"¿Cuál es el que tiene menos?",* mientras que con valores grandes realizan la comparación en menos tiempo cuando les preguntamos *"¿En dónde hay más?".* En otras palabras, los adultos son más rápidos comparando dos valores numéricos cuando su magnitud total es congruente con la expresión verbal formulada en la pregunta. Aunque está originariamente pensado que el efecto de congruencia semántica sea específico en comparaciones que tienen lugar en representaciones simbólicas y discretas (Banks & Flora, 1977) en un estudio realizado por Cantlon y Brannon (2005) se demuestra cómo en los macacos Rhesus también está presente este efecto. Se utilizó una pista de color en lugar de la pregunta verbal "¿dónde hay menos?, o ¿Cuál es mayor?". Los monos fueron entrenados para elegir el menor de dos conjuntos (Figura 7; parte a) cuando en la pantalla era roja y el mayor entre los dos grupos cuando era azul. Los monos, de un modo similar a los humanos, son mucho más rápidos eligiendo el menor entre dos valores pequeños que eligiendo entre valores grandes. Por el contrario, fueron más rápidos eligiendo el valor mayor entre números grandes comparado con la elección del más pequeño entre dos valores grandes. Por lo tanto, el efecto de congruencia semántica no puede ser un subproducto de un proceso comparativo específico del idioma o lenguaje sino que es, más en general, un sello distintivo del proceso psicológico para la comparación de las representaciones análogas de magnitud.

Recordemos que Moyer y Landauer (1967) fueron los primeros en demostrar que cuando pedimos a adultos humanos comparar las magnitudes relativas representadas por dos números en formato arábigo, su tiempo de reacción (TR) está influenciado sistemáticamente por la distancia y la magnitud absoluta de los valores que se están comparando. En otras palabras, el tiempo de respuesta disminuye en tanto en cuanto aumenta la distancia numérica entre los dos valores (e.g son más rápidos comparando 2 vs. 9 que 2 vs. 4). Por tanto, aunque un número se pueda representar con símbolos arbitrarios (e.g "3" o "tres") existe una representación no verbal con un formato análogo que subyace a estos símbolos.

Se ha demostrado cómo las representaciones análogas de la magnitud del número son independientes del idioma (Dehaene, 1997) y de hecho, es universal, tal y como observamos en estudios realizados en dos culturas indígenas de Brasil; los Piraha y los Mundurucu. Estas tribus se caracterizan por tener un lenguaje que contiene muy pocas palabras numéricas. La tribu Piraha tiene palabras para "uno" y "dos" pero utilizan el término "muchos" para referirse a todas las otras cantidades. Cuando se les pedía construir conjuntos de tuercas o baterías que emparejaba un ejemplo de conjunto en un número, los Piraha eran perfectamente capaces de construir conjuntos de uno o dos objetos pero su precisión disminuía con el tamaño del conjunto (Gordon, 2004). Acorde con este planteamiento; Pica, Lemer, Izard y Dehaene (2004) llevaron a cabo un interesante estudio en el que analizaron la agudeza de este sistema numérico aproximado en la tribu de los Mundurucu. Esta tribu del Amazonas, al igual que los Piraha, tienen un sistema numérico poco desarrollado. Su lenguaje numérico únicamente presenta palabras número para los valores de 1 a 5 y poseen un algoritmo no verbal para el conteo. Sin embargo, cuando los participantes Mundurucu compararon la magnitud relativa de un gran número de puntos (20-80), controlando variables como el área, perímetro y densidad, observaron cómo su rendimiento era bastante similar a la de control de los participantes de habla francesa. La fracción de Weber obtenida fue 0.18, ligeramente superior a la muestra occidental (w=0.12). En ambos grupos, la precisión era mayor cuando la ratio entre los dos valores aumentaba (Figura 8). Por lo tanto, sin el lenguaje numérico, los adultos humanos poseen representaciones de la magnitud del número que obedecen a la Ley de Weber.

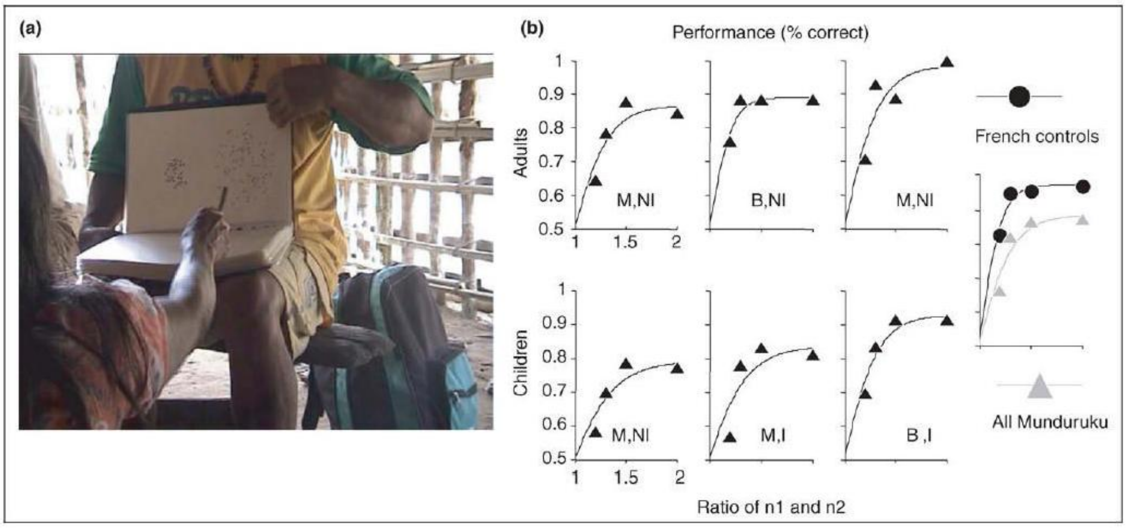


Figura 1.8. Representación del número en culturas sin lenguaje numérico. **(a)** Participante Mundurucu evaluado en una tarea de comparación numérica. **(b)** Fracción de elecciones correctas como una función de la ratio entre los dos valores numéricos comparados en niños y adultos.

Piazza, Pica, Izard, Spelke y Dehaene (2013), posteriormente, replicaron el estudio estudio con los Mundurucu. La diferencia fundamental respecto a las investigaciones anteriores realizadas por estos mismos autores, fue que además de la variable edad estudiaron el efecto de la instrucción que habían tenido los participantes de la tribu; los que no habían recibido ningún tipo de instrucción durante años y los que, a raíz de los estudios anteriores, sí habían sido instruidos en ciertos aspectos matemáticos. Se analizó la fracción de weber obtenida por los participantes y en esta ocasión encontraron que disminuía desde los 4 a los 13 años de edad pero no sufriría cambios en la edad adulta. Respecto al efecto de la instrucción, los resultados indican que la educación está asociada con un aumento significativo en la precisión del sistema numérico aproximado, y que dicha relación es independiente de la maduración. Estos efectos se observaron en los participantes Mundurucu que habían sido instruidos en aritmética y enumeración simbólica. Entonces, esto nos sugiere que el efecto de la educación en la precisión del sistema numérico aproximado no es un efecto genérico de la escolarización sino un efecto específico de la instrucción de los números, debido a que la *w* era menor cuando en el sistema de los Munduruku se introducían operaciones aritméticas y el conteo. Se observó además, que la educación no alteraba la eficacia en tareas de comparación no simbólica lo que nos sugiere que estos resultados no deben ser interpretados en términos de "mejora" en un sistema general de representación de la magnitud (Feigenson, 2007) sino de la escolarización.

1.1.3 Evidencias sobre la base cerebral de las magnitudes numéricas

Como hemos señalado anteriormente, la comprensión y manipulación de cantidades numéricas forma parte de nuestra herencia genética. Nos preguntamos entonces:

¿Existe un circuito cerebral específico que está asociado a la representación y adquisición del conocimiento sobre cantidades numéricas y sus relaciones?, ¿Estaríamos hablando de una zona específica o existen diferentes áreas en función de la tarea que estemos desempeñando?

Aunque su explicación aún es incompleta, convergen dos argumentos que apoyarían la tesis de que el **surco intraparietal** estaría implicado en dicho proceso. En primer lugar, numerosos estudios de neuroimagen (fRMI) afirman que esta región es la que se activa durante la realización de tareas de procesamiento numérico. En segundo lugar, los estudios neuropsicológicos realizados en pacientes con algún tipo de lesión cerebral indican que la representación interna de cantidades puede verse alterada debido a las lesiones en este área.

En los últimos años han desarrollado numerosos estudios mediante **técnicas de neuroimagen** concluyendo que los circuitos neuronales del procesamiento numérico se localizan principalmente en el ***lóbulo parietal***, aunque otras regiones cerebrales, como la corteza prefrontal, la parte posterior del lóbulo temporal, la corteza cingulada y distintas regiones subcorticales también contribuyen al buen funcionamiento de estas capacidades. Especial interés merece el estudio de pacientes con déficit en el procesamiento numérico y, en concreto, de aquéllos diagnosticados de acalculia o de discalculia del desarrollo. Aunque el número de estudios publicados en pacientes es todavía escaso, los resultados obtenidos, junto con los hallados en población "sana", confirman la importancia del lóbulo parietal en la delimitación de las bases neurales del procesamiento numérico y el cálculo.

Las evidencias halladas hasta el momento lo señalan como la región con mayor relevancia en el procesamiento numérico. En él, se han podido identificar dos regiones fundamentales durante la realización de tareas de representación de magnitudes numéricas; el segmento horizontal del surco intraparietal (SHSIP) y el giro angular (Ardila & Roselli, 2002; Dehaene & Cohen, 1995). Más específicamente, el *surco intraparietal* sustentaría la representación interna de las cantidades y la relación existente entre éstas. Se ha observado que en tareas que implican el procesamiento numérico se activa frente a otro tipo de estímulos (e.g., colores, orientación visual, etc.), presentaría una mayor actividad cuando comparamos la magnitud de dos números que cuando lo leemos y cuando estimamos un resultado aproximado respecto a un cálculo exacto (Dehaene, Spelke, Stanescu, Pinel & Tsivkin, 1999) (Figura 9).

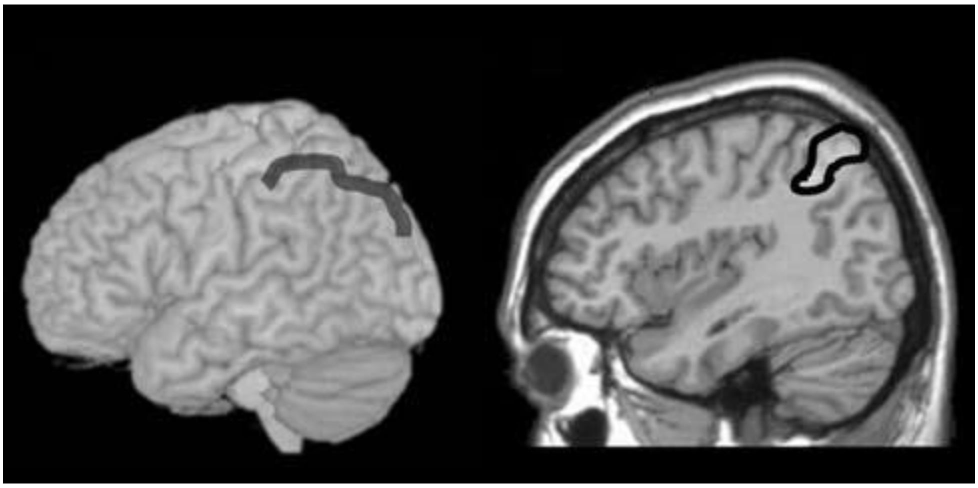


Figura 1.9: Localización del surco intraparietal izquierdo visto desde una perspectiva lateral del encéfalo **(a)** y en un corte sagital **(b)** (tomado de Serra-Grabulosa et al, 2010**)**.

Es una región que no sólo procesa la información numérica, sino que también participa en la representación abstracta de las magnitudes, sin diferenciar el formato (simbólico o no simbólico) (Reynvoet & cols., 2003). Ontogenéticamente, se ha constatado que existe un patrón madurativo de inicio frontal pero que progresivamente se va especializando a un proceso parietal, una vez automatizada la relación entre los símbolos numéricos y las magnitudes que representan (Ansari, Gracia, Lucas, Halmon & Dhital, 2005). En niños con discalculia del desarrollo se ha corroborado la importancia que tiene esta región en el procesamiento numérico, y se ha observado una menor activación en estos niños respecto al grupo control.

El *giro angular*, especialmente el izquierdo, desempeña funciones relacionadas con el procesamiento numérico y cálculo. En concreto con aquellas tareas que requieren un procesamiento verbal, como por ejemplo las tablas de multiplicar. Diferentes estudios muestran que esta área forma parte del sistema lingüístico y contribuye al cálculo posterior (Dehaene, Piazza, Pinel & Cohen, 2003) (Figura 10).

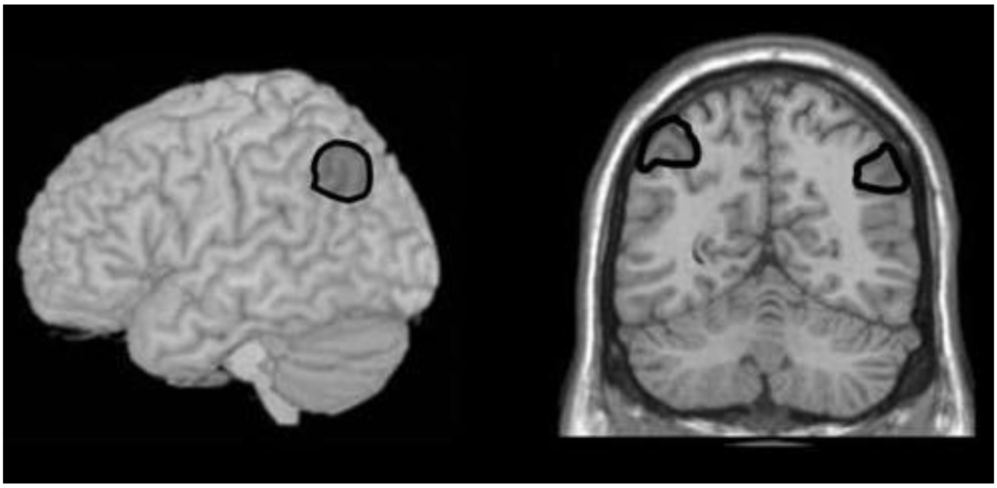


Figura 1.10: Localización del giro angular izquierdo visto desde una perspectiva lateral del encéfalo **(a)** y en un corte coronal **(b)** durante una tarea de procesamiento numérico (tomado de Serra-Grabulosa et al, 2010).

La activación en esta región es mayor en tareas de cálculo exacto que aproximado, sin embargo, aún quedan numerosas incógnitas en lo que concierne a la función que tiene el giro angular en el procesamiento aritmético. En estudios como los realizados por Dehaene y cols. (2001) apuntan que la "disociación" neural entre el cálculo aproximado y el exacto podría ser consecuencia de factores metodológicos más relacionados con el diseño de la tarea. En concreto, las diferencias neurofuncionales entre ambos tipos de cálculo desaparecen al controlar el efecto de la distancia numérica entre los estímulos que constituyen la tarea. Además, algunos estudios defienden que el giro angular no sólo se encarga del procesamiento verbal de las cantidades, sino que contribuye a la representación numérica espacial (Göbel, Walsh & Rushworth, 2001). Esto cuestionaría la hipótesis propuesta por el grupo de Dehaene, que sostiene que esta región asume principalmente el procesamiento de las operaciones simples o "hechos matemáticos".

Es interesante destacar los estudios realizados con **pacientes con algún tipo de lesión cerebral.** En uno de los trabajos de Dehaene y Cohen (1997) explicaron dos casos de acalculia en dos pacientes que llamaron MAR y BOO. Estos casos nos proporciona una doble disociación entre el tipo de acalculia en el "sentido numérico" y un tipo de acalculia con las dificultades en "memoria verbal" respectivamente. MAR era un paciente zurdo con una lesión parietal inferior derecha y con un síndrome de Gerstmann puro que mostraba dificultades cuando las tareas requerían manipular la cantidad, como por ejemplo elegir entre dos números el mayor, proyectar en líneas numéricas y en resta. El paciente BOO, era un diestro con una lesión subcortical en la zona izquierda mostraba diferentes patrones; pocas dificultades en tareas que requerían manipular cantidades pero graves dificultades con tareas numéricas relacionadas con memoria o más verbales, como la multiplicación. Los pacientes MAR y BOO pueden leer en voz alta números arábigos y escribirlos al dictado, pero ambos presentan dificultades en tareas de cálculo simple. La paciente BOO (Dehaene y Cohen, 1997) mantenía intacta su capacidad para identificar y producir números, sin embargo, la lesión le provocó dificultades para el cálculo. La memoria para las tablas aritméticas estaba totalmente impedida, de manera que cometía errores en problemas simples como 2*3 ó 4*4. Esta paciente mostraba una excelente comprensión de las cantidades, ya que realizaba correctamente tareas de comparación numérica y podía completar series numéricas. Aunque mostraba una disociación entre operaciones aritméticas, ya que la resta la mantenía intacta (es interesante notar que la resta no se almacena como tablas, sino que fundamentalmente se resuelven por procedimientos (estrategias) de cálculo que requieren manipulación de las cantidades o magnitudes).

El paciente MAR (Dehaene et al,, 1997) también podía nombrar números arábigos y escribirlos al dictado, y sin embargo presentaba alteraciones en el cálculo, en concreto, en la resta y la división. Atendiendo a la Figura 11, BOO presentaría dificultades asociadas al circuito en el que se implica el sistema verbal, mientras que MAR tendría alteraciones relacionadas con el circuito en el que se implica la representación de magnitudes.

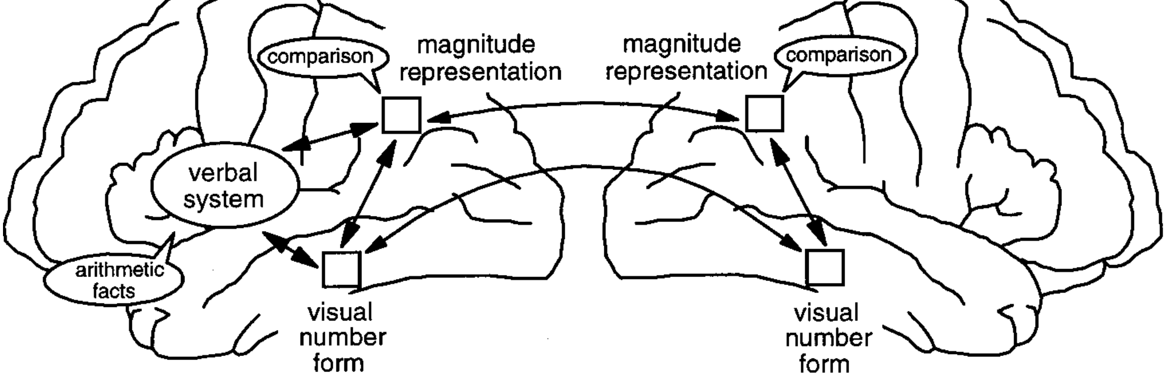


Figura 1.11: Localización cerebral dificultades pacientes MAR y BOO (Dehaene, 2003).

1.1.4 Modelos de procesamiento numérico y cálculo.

Antes de desarrollar brevemente dos de los principales modelos, nos gustaría señalar que la construcción de la representación mental que intenta explicar el procesamiento ha sido un tema bastante controvertido y polémico. Son pocos los desacuerdos a nivel de observación, debido a que ha sido posible replicar los principales hallazgos empíricos en este campo del procesamiento. A pesar de ello, dichos modelos explicativos difieren al menos, en dos aspectos esenciales: la naturaleza de la representación de los números y la manera en la que se relacionan entre sí los distintos componentes implicados (de manera modular o interactiva), como veremos a continuación.

1.1.4.1 Modelo Modular abstracto de McCloskey, Caramazza y Basili, 1985; McCloskey, 1992.

McCloskey et al. (1985; McCloskey, 1992) proponen de una forma genérica el primer modelo de procesamiento de los números y del cálculo. Formulan componentes separados para la comprensión y producción de números arábigos y palabras (Figura 12). Además, uno de los postulados fundamentales de este modelo es que la comunicación entre los distintos módulos de entrada y de salida (input-output) está mediada por representaciones internas abstractas.

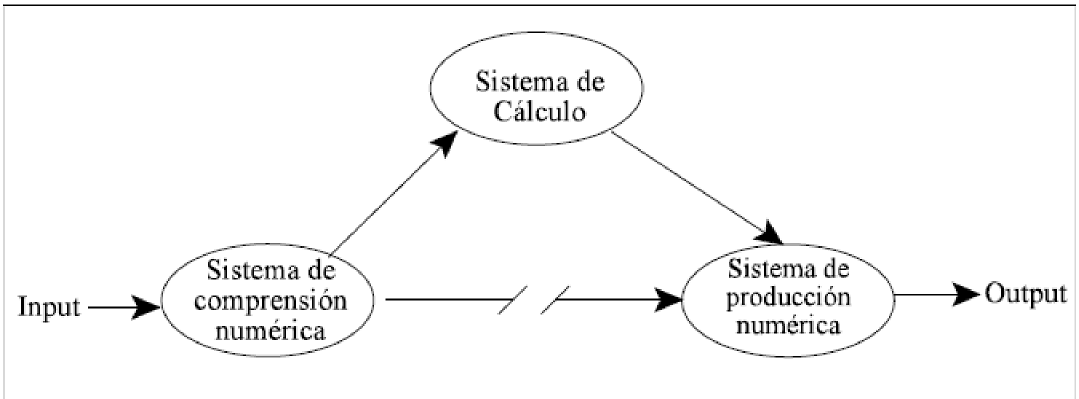


Figura 1.12: Explicación modelo Modular de McCloskey et al.; 1985;1992)

Para estos autores, existen dos sistemas bien diferenciados en los mecanismos cognitivos implicados en el uso que hacemos de los números, tal y como podemos observar en la Figura 13: un sistema de procesamiento numérico y un sistema de procesamiento de cálculo. Dado que nuestro trabajo versa sobre el procesamiento de magnitudes nos centraremos en la parte concerniente al procesamiento. Este sistema de *procesamiento numérico,* incluye a su vez los mecanismos para comprender y producir números. Dentro de cada subsistema del procesamiento numérico (comprensión y producción) estos autores también distinguen entre los componentes para procesar números arábigos (números en forma de dígitos, como 52) y los componentes para procesar números verbales (números en forma de palabras, como cincuenta y dos). Esta organización en módulos independientes explica por qué resulta parcialmente sencillo el paso de un código a otro; la comprensión de un número que está en forma arábiga y se produce de manera verbal (oral o escrita), y viceversa. Independientemente del código que se utilice, los inputs y los outputs tienen que "atravesar" dicha representación abstracta del valor del número, o lo que es lo mismo, su magnitud. Por otro lado, *el sistema de procesamiento de cálculo* se compone de los conocimientos de hechos numéricos y de los procedimientos necesarios para realizar cálculos.

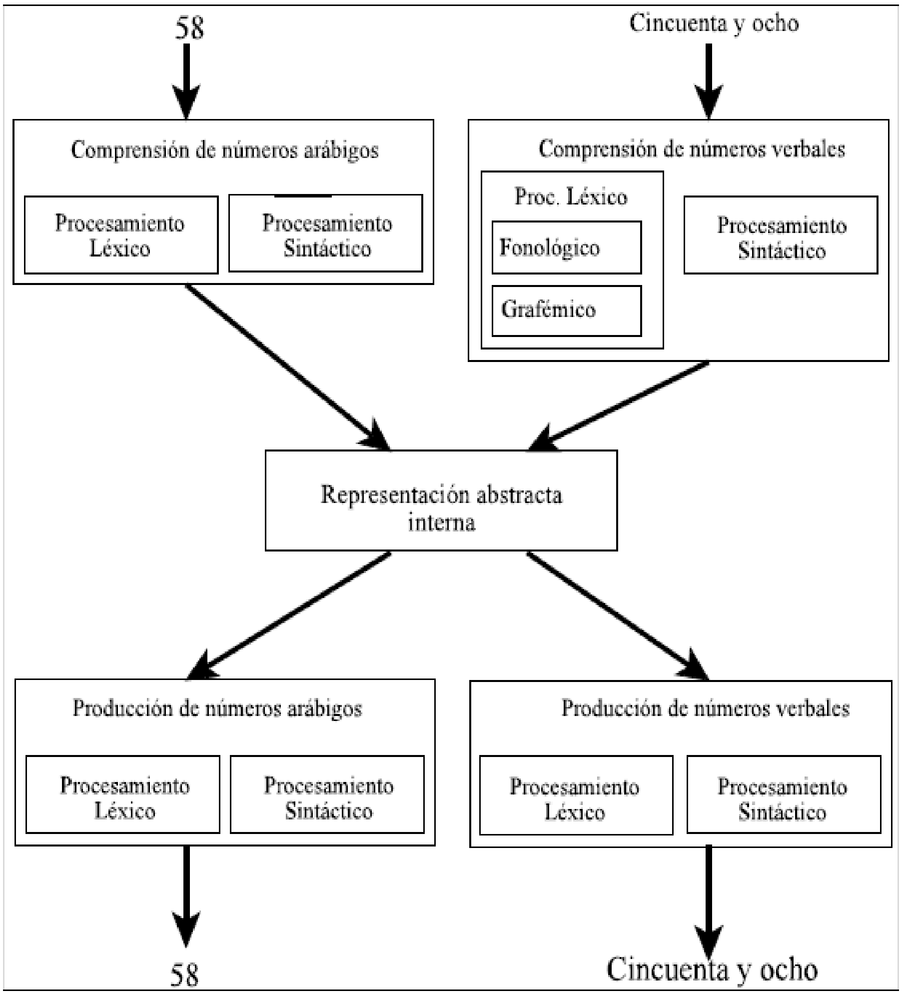


Figura 1.13: Modelo Modular Abstracto, McCloskey et al. 1985; McCloskey, 1992. Mecanismos cognitivos implicados en el uso de los números.

Por lo tanto, según este modelo el procesamiento numérico se compone de tres tipos de sistemas cognitivos: la comprensión, el cálculo y el sistema de producción de respuestas. Un aspecto central en este modelo es la afirmación de que estos subsistemas se comunican a través del uso de un código semántico de cantidad, único y abstracto. La función del sistema de comprensión es codificar los diferentes input numéricos (palabras escritas o dígitos arábigos) en un código abstracto, que se convierte en la entrada sobre la cual los sistemas de cálculo y de producción comienzan a operar. Los hechos aritméticos, al igual que la salida de los números del sistema de cálculo, están en un código abstracto. El subsistema de producción da la vuelta al procedimiento realizado por el sistema de comprensión convirtiendo la salida abstracta desde los sistemas de comprensión y cálculo en dígitos arábigos, escritos o hablados, según sea requerido. De esta forma, la implicación de un código único y abstracto como base del cálculo numérico tiene implicaciones sobre la independencia de los procesos incluidos. Así, debido a que los números son representados en un código abstracto antes de que se produzcan los procesos de cálculo, el formato en el que los números entran al sistema no tendría implicaciones en el cálculo. Consecuentemente, de acuerdo con este modelo, los procesos de cálculo no deberían mostrar diferencias debido al formato original en el que se presenten los números. Este modelo implicaría, por lo tanto, que la decodificación numérica y los procesos de cálculo son independientes y estrictamente aditivos.

Este modelo de McCloskey y otros (1985) ha sido objeto de controversia en relación con dos puntos principales: la modularidad de su arquitectura y la naturaleza abstracta de la representación mental de los números. Esta controversia dará lugar a otros modelos alternativos, entre los que cabe destacar el modelo de triple código de, que vamos a describir en el siguiente punto.

1.1.4.2 Modelo de triple código para el procesamiento de los números y el cálculo de Dehaene, 1992; Dehaene y Cohen, 1995.

Una arquitectura alternativa para el procesamiento numérico fue la propuesta por Dehaene (1992); Dehaene y Cohen, (1995), la cual ha sido ampliamente utilizada para revisar aspectos relacionados con el procesamiento numérico (y cálculo). Este modelo postula la existencia de tres códigos sobre los que se basa el procesamiento numérico (ver Figura 14): Una representación análoga de la magnitud, una forma numérica visual-arábiga, y un sistema de codificación auditivo-verbal. A diferencia del modelo anterior, asume que los tres códigos pueden activar directamente otro sin la intervención de un código *amodal abstracto*. Sin embargo, se supone que cada componente contribuye a diferentes tareas de procesamiento numérico. Por un lado, la representación análoga a la magnitud se encarga de realizar el cálculo aproximado y la estimación, así como las comparaciones de tamaño del número y posiblemente en la "subitización" (o estimación inmediata). Por otro lado, la entrada y salida de los dígitos y las operaciones multidígitos son mediadas por la forma arábiga. Y por último, el código auditivo verbal media con la entrada y salida escrita y hablada y proporciona las bases representacionales para la adicción simple y multiplicación de hechos.

En concreto, el modelo de triple código está basado en dos premisas principales. De acuerdo con la primera, disponemos de tres códigos mentales para la representación de los números:

1) Un código verbal (fonológico y grafémico), o ***sistema de codificación auditivo-verbal*** en el que los números estarían representados como secuencias de palabras sintácticamente organizadas (e.g cuarenta y tres).
2) Un código visual arábigo, o ***forma visual de los numerales arábigos***, que permite manipular éstos espacialmente. En este nivel, la representación de un número es una lista ordenada de los dígitos que lo integran (e.g 43).
3) Código o ***representación análoga de la magnitud***, en el que las magnitudes o cantidades asociadas con un numeral están analógicamente representadas como distribuciones locales de activación (inherentemente variables) a lo largo de una línea numérica orientada (de izquierda a derecha).

La información numérica que entra en el sistema será inicialmente representada para su tratamiento ulterior en aquel de los tres códigos mentales que corresponde a su naturaleza; la información numérica que sale del sistema será convertida, desde uno de esos tres códigos, en el formato requerido en cada caso.

La segunda premisa del modelo es que cada procedimiento numérico o tarea a realizar va necesariamente ligada a un código de entrada y de salida específico. Es decir, ni se trata de un código único abstracto, como el propuesto por McCloskey y otros (1986), ni se trata de que cada individuo prefiera el uso de un código u otro. De lo que se trata es que cada manipulación mental de un número requiere uno u otro código, lo que implica que la solución de una tarea puede requerir más de una transcodificación. De todas formas, a pesar de la ausencia de un código central abstracto, el modelo de triple código de Dehaene y Cohen predice procesos de recuperación y codificación aditivos y no interactivos. Una vez que el input es transformado en el código apropiado, el procesamiento ocurre de la misma manera sin tener en cuenta el formato del input. Como consecuencia, cualquier tipo de diferencias en el rendimiento para una operación numérica dada (juicio de magnitud, lectura numérica, recuerdo de hechos aritméticos) deberían ser atribuidas a diferencias en la eficiencia de la codificación desde el código del estímulo al tipo de codificación requerida para realizar esa operación (Dehaene, 1996, Dehaene & Akhavein, 1995; Dehaene, Bossini, & Giraus, 1993).

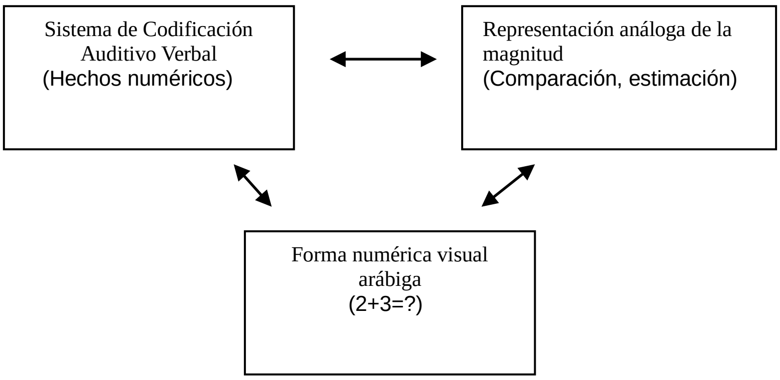


Figura 1.14: Diagrama simplificado del Modelo de Triple Código (Dehaene y Cohen, 1992, 1995)

1.2 DESARROLLO DEL PROCESAMIENTO DE MAGNITUDES NUMÉRICAS

La principal distinción que nos encontramos en las numerosas investigaciones que se han encargado de estudiar el procesamiento de magnitudes, es el formato de la presentación de la magnitud numérica. Las representaciones simbólicas utilizan símbolos –dígitos, palabras numéricas, números romanos– que representan cantidades numéricas, pero la relación entre los símbolos y las cantidades es arbitraria. Los símbolos llegan a ser representaciones de la magnitud numérica en el transcurso del aprendizaje y del desarrollo. En este sentido, no hay nada físico en un símbolo numérico como 7 que sugiera que este símbolo represente la magnitud simbólica 7 (Ansari, 2012). El hecho de que este símbolo represente la magnitud siete es una invención cultural (o al menos lo que ha quedado de los números arábigos en la actualidad). Las representaciones no simbólicas, sin embargo, son representaciones icónicas que reflejan a una magnitud (ver figura 15).

En este contexto, desde algunos planteamientos se sugiere que el significado de los símbolos numéricos está determinado por la referencia directa que se hace a su magnitud no simbólica: *"Cuando aprendemos símbolos numéricos, simplemente asignamos sus formas arbitrarias a las representaciones pertinentes de la cantidad no simbólica"* (Dehaene, 2008, p. 552; véase también, Dehaene, 1997; Gallistel & Gelman, 2000). Pero como veremos, no todos los investigadores estarían de acuerdo con este planteamiento.

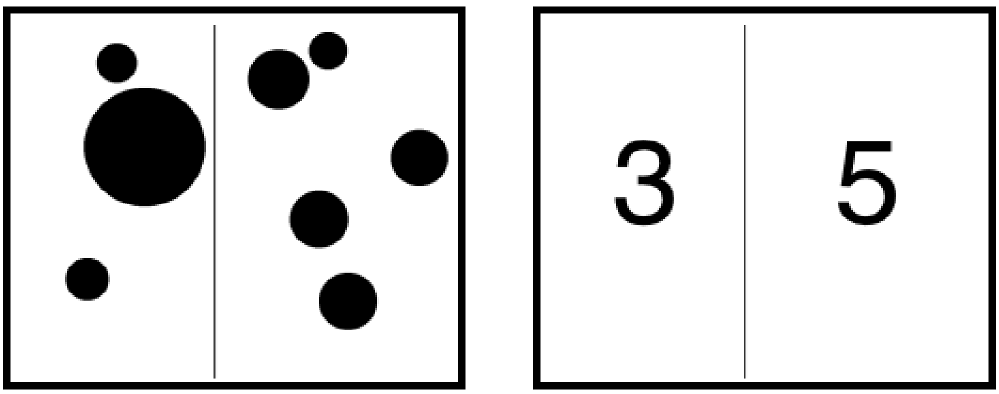


Figura 1.15: Ejemplo de estímulos no simbólicos y simbólicos para una tarea de comparación de magnitudes.

1.2.1 Procesamiento simbólico y no simbólico de la magnitud

Tal y como explicamos en la primera parte de este Capítulo, tanto humanos como animales comparten la habilidad para representar magnitudes numéricas no simbólicas. Sin embargo, a partir de una instrucción explícita, los humanos aprenden a representar cantidades de forma más precisa con palabras numéricas y posteriormente con otros símbolos, como números arábigos (dígitos).

Desde que los humanos tienen la capacidad para representar magnitudes simbólicas y no simbólicas, nos preguntamos entonces cómo estos sistemas de procesamiento simbólico y no simbólico interactúan a lo largo del desarrollo. ***¿El conocimiento simbólico del número progresa de forma independiente a las habilidades no simbólicas?,*** o, ***¿Trabajan juntos estos dos sistemas en el desarrollo de las capacidades matemáticas posteriores?*** Las investigaciones pasadas y en la actualidad en este área de conocimiento nos muestran resultados mixtos respecto a la relación entre el procesamiento de magnitudes no simbólicas y simbólicas. Nosotros vamos a diferenciar tres tipos de teorías para poder explicar el papel que desempeñan en el desarrollo de las habilidades matemáticas.

La primera de ellas, postula que los niños aprenden el significado de los símbolos numéricos a partir del "mapeo" –proyección– que realizan en las magnitudes no simbólicas ya preexistentes (Dehaene, 1997, 1992; Mundi & Gilmore, 2009). Esto es, los símbolos adquieren su significado a través de su relación con el sistema no simbólico (Halberda et al, 2008; Mazzocco, et al, 2011). De este modo, el sistema no simbólico está pensado para sentar las bases del procesamiento de magnitudes simbólicas.

Así, cuando lo niños comienzan a contar aprenden un nuevo sistema simbólico para representar números. Lógicamente es un sistema más preciso para representar magnitudes, pero este sistema no sustituiría el sistema no simbólico preexistente, más bien se proyectaría en él. De acuerdo con Lipton y Spelke (2005), los niños comienzan a proyectar las palabras numéricas en las representaciones numérica son simbólicas a la vez que comienzan a desarrollar las habilidades de conteo.

Existirían algunas evidencias para apoyar este planteamiento. Quizás la más evidente es algo que venimos diciendo a lo largo de estas páginas: los mismos efectos de distancia y ratio que se observan en la comparación de magnitudes no simbólicas, se observan también cuando se comparan números simbólicos. Esto sugiere que las cantidades simbólicas y no simbólicas comparten la misma representación subyacente. Apoyo directo para esta premisa lo podemos encontrar en el modelo computacional propuesto por Verguts y Fias (2004). Los autores desarrollaron un modelo en el que diferentes nodos internos representan un número dado. Cuando se presenta una cantidad no simbólica, como por ejemplo siete puntos, el nodo "siete" recibirá la máxima activación. Pero de acuerdo a las curvas Gaussianas a lo largo de la límea numérica mental (ver Figura 1) que generan el efecto distancia, los nodos "seis" y "ocho" también se activaran, aunque en menor medida que el nodo "siete"; y de la misma manera incluso los nodos "cinco" y "nueve" también aunque con menor probabilidad. Esto refleja que la representación subyacente a una cantidad no simbólica no es una cantidad exacta, sino más bien probabilística que provoca los efectos de distancia y ratio. Los autores añadieron "perturbaciones" al modelo que producían errores que reflejaban la conducta humana. Cuando se presenta como input un número simbólico "7", el modelo activa directamente el nodo "siete", lo que hace que la representación simbólica sea más precisa (tanto el modelo como los humanos hacen muy pocos errores con inputs simbólicos. Pero lo importante es que el nodo "siete" para los puntos no simbólicos es exactamente el mismo que para "7", por lo que el modelo explícitamente asume que los estímulos no simbólicos y simbólicos comparten la misma representación subyacente.

Otro apoyo para la idea de que el sistema simbólico que se aprende se proyecta en el sistema no simbólico viene de un interesante trabajo de Gilmore, McCarthy, y Spelke (2007). Los autores demostraron que los niños pueden poner en marcha el sistema no simbólico para ejecutar sumas aproximadas presentadas en formato simbólico antes de que hayan aprendido la aritmética simbólica en la escuela (ver más adelante la tarea utilizada y que nosotros hemos adaptado en uno de los experimentos de esta tesis).

Una perspectiva diferente para comprobar las conexiones entre las represetnaciones no simbólicas y simbólicas de los números ha sido analizar las correlaciones entre las habilidades de los niños para discriminar contidades no simbólicas y sus habilidades en tareas simbólicas. Si las representaciones de las magnitudes no simbólicas sirven como base sobre la que se construyen las representaciones simbólicas, entonces las diferencias individuales en la representación de la magnitud no simbólica prediciría las diferencias en las tareas simbólicas. Un buen número de estudios han encontrado esta relación (e.g., Halberda & Feigenson, 2008; Inglis et al., 2011; Libertus, Feigenson & Halberda, 2011;

Mazzocco, Feigenson & Halberda, 2011b; Piazza et al., 2010). Y siguiendo con el mismo argumento, niños con dificultades en el aprendizaje de las matemáticas deberían mostrar dificultades con el procesamiento de magnitudes no simbólicas, como algunos han demostrado (e.g., Mazzocco, Feigenson & Halberda, 2011a). Dado que este es uno de los aspectos centrales de esta tesis doctoral, el capítulo tercero lo dedicamos iíntegramente a analizar estas cuestiones.

A pesar de estas evidencias, otras perspectivas sugieren que estas conexiones entre las representaciones de la magnitud no simbólica y la simbólica no son tan claras. Comenzando por lo último comentado, en el capítulo tercero comentaremos una serie de estudios que irían en contra de esta relación entre las diferencias individuales en la representación de la magnitud no simbólica y la ejecución en tareas simbólicas.

Desde otro planteamiento, otros trabajos han proporcionado apoyo a la idea de que la comprensión de los números simbólicos no se apoya en el sistema aproximado de representación no simbólica de la cantidad. Por ejemplo, Le Corre y Carey (2007) sugieren una explicación alternativa: que los números simbólicos se conectan en un principio con cantidades no simbólicas *exactas* en el rango de subitizing[1]. De acuerdo con estos autores, el significado numérico se adquiere desde el conteo con el principio de cardinalidad (el último número de la secuencia de conteo de un conjunto refleja la numerosidad de ese conjunto). Comprobaron que niños que aún no comprendían el principio de cardinalidad eran capaces de proyectar palabras numéricas a conjuntos de objetos pero sólo en el rango de subitizing. Sin embargo, la proyección de los números a cantidades por encima del rango de subitizing solo ocurría meses después de adquirir el principio de cardinalidad. En este sentido, Le Corre y Carey (2007) proponen que la proyección de los símbolos en magnitudes (exactas) en el rango de subitizing es un paso esencial para entender la semántica del número, y no tanto la proyección de los símbolos en el sistema no simbólico aproximado. Solo después de que los niños han creado esta nueva representación de los números exactos con cantidades pequeñas comienzan a establecer conexiones entre el preexistente sistema numérico aproximado y la nueva representación exacta de los números mayores. No obstante, cómo se llevan a cabo estas conexiones es una cuestión abierta aún en debate (ver Lyons & Ansari, 2015, para una revisión de esta cuestión).

[1] Aunque lo veremos más adelante, el subitizing se refiere a la aprehensión rápida y exacta del número de objetos en un conjunto sin necesidad de contar, y se restringe a conjuntos de 3 o 4 objetos como máximo (Trick & Pylyshyn, 1994). Para cantidades es necesario contar para establecer la numerosidad.

Otra perspectiva más radical sugiere que en realidad el SNA y el sistema exacto para los números simbólicos son dos sistemas representacionales distintos, como intentan demostrar Lyons, Ansari y Beilock (2012). Estos autores encontraron que los adultos ejecutan peor una tarea de comparación en formato mixto que en formato puro, ya sea simbólico o no simbólico. Específicamente, a los participantes se les pedía que compararan un número simbólico con una magnitud no simbólica (presentada rápidamente para evitar conteo) y decidir cuál era mayor. De acuerdo con el argumento de los autores, si lo dos formatos comparten la misma representación subyacente, entonces esta tarea no debería ser distinta otra en que se presentaran las dos cantidades en el mismo formato, como comparar dos conjuntos de puntos. Sin embargo, los resultados mostraron que los dultos ejecutaron peor la tarea en el formato mixto. Según Lyons et al. (2012), el cambio entre formatos requiere un coste adicional de procesamiento, posiblemente porque están implicados dos sistemas representacionales distintos.

En línea de lo encontrado Lyons et al. (2012) con adultos, Sasanguie, Defever, Maertens y Reynvoet (2013) analizaron si el procesamiento de números no sombólicos predice el procesamiento del números simbólicos en niños que están comenzando a adquirir el conocimiento de los dígitos en la escuela. Sasanguie et al (2013) administraron una tarea de comparación no simbólica al comienzo del año escolar, y en los seis meses posteriores los niños aprendieron aprendieron los símbolos como parte de curriculum. Después de esto fueron evaluados en una tarea de comparación simbólica. De acuerdo con los autores, si los números simbólicos se aprenden proyectándose en el sistema numérico aproximado, entonces se encontraría una asociación entre la ejecución sobre ambas tareas, porque una mayor precisión del SNA facilitará la proyección de los símbolos en este SNA. Sin embargo, los resultados no mostraron ninguna asiciación entre las tareas, sugiriendo que habría dos sistemas representacionales distintos para el SNA y los símbolos numéricos no solo en adultos, como plantean Lyons et al. (2012), sino también en niños de 5 años de edad.

1.3 RESUMEN

A lo largo de estas páginas hemos reflejado que los bebés, los niños, los adultos e incluso los animales son capaces de entender y manipular magnitudes numéricas por medio de representaciones no simbólicas. Y el mecanismo subyacente a estas representaciones es conocido como el sistema numérico aproximado, un sistema primitivo de representación no verbal que permite a los individuos procesar magnitudes y cuyo desarrollo no depende de una enseñanza explícita. Estas representaciones no simbólicas se caracterizan por un efecto de ratio o distancia, esto es, cuando la distancia numérica entre los conjuntos es pequeña o la ratio se aproxima a 1, la ejecución es más lenta y menos exacta. Se asume que las magnitudes numéricas se representan a lo largo de una hipotética "línea numérica mental", y que los efectos de distancia y ratio se producen por un mayor solapamiento de las representaciones de la magnitud más cercanas. En este sentido, el tamaño de los efectos de distancia y ratio se consideran indicadores de la precisión de las representaciones de la magnitud numérica, y dicho tamaño disminuye con la edad, llevando a representaciones cada vez más precisas. Además, numerosos estudios de neuroimagen han establecido el surco intraparietal como la zona específica del cerebro donde se lleva a cabo este procesamiento, zona que además está implicada en el procesamiento de números simbólicos cuando tenemos que atender a su numerosidad, por ejemplo, cuando tenemos que comparar dos números simbólicos. Ello es debido a que se ha asumido que el sistema numérico aproximado está implicado en el procesamiento de la información numérica simbólica, esto es, cuando los individuos tienen que procesar números simbólicos (eg., dígitos arábigos), de tal forma que cuando se aprenden los símbolos para representar números, estos adquieren significado cuando se asocian con el sistema numérico aproximado preexistente. No obstante, aún no hay acuerdo entre los investigadores en cuándo y cómo se lleva a cabo esta proyección entre los numerales simbólicos y las representaciones no simbólicas de la numerosidad. Desde una perspectiva se asume que simplemente los números simbólicos se proyectan directamente en las representaciones no simbólicas de la cantidad. Otros, sin embargo, plantean que esta proyección se produce en las representaciones exactas de la cantidad, y solamente después hay una conexión entre estas representaciones exactas y las aproximadas de la cantidad. Aún otros sugieren que en realidad contamos con dos sistemas separados para representar cantidades simbólicas y no simbólicas, sin necesidad de que tenga que haber una conexión entre ambos, o que al menos las propias relaciones entre los números simbólicos de alguna manera eclipsen las relaciones entre los símbolos y su representación de la cantidad. Esto tiene algunas repercusiones en relación al planteamiento que guía esta tesis doctoral, centrado en analizar las relaciones entre la representación de la cantidad y la ejecución matemática, ya que como veremos, una cuestión crítica es si las relaciones entre las habilidades matemáticas se establecen con la representación de la magnitud o con el sistema simbólico exacto. No obstante, antes de plantearnos estas cuestiones e intentar darles respuesta es necesario revisar de qué manera podemos medir estos sistemas, para después considerar cómo se relacionan con la ejecución matemática.

CAPÍTULO II

MIDIENDO EL SISTEMA NUMÉRICO APROXIMADO

Hasta este momento, hemos tratado de entender cómo representamos magnitudes numéricas –más específicamente cómo las procesamos- y empezamos a adelantar ciertas "pinceladas" de lo que analizaremos de forma más exhaustiva en el Capítulo III; la posible relación entre el procesamiento de la magnitud y la ejecución posterior en matemáticas. Las preguntas que siguen a continuación serían *¿Cómo podemos medir el sistema numérico?, ¿Qué tipo de tareas son las adecuadas para hacerlo?, ¿Existe consenso a la hora de utilizar una tarea u otra?,* ó *¿Están midiendo lo mismo independientemente si los participantes son niños o adultos?* Para responder a estas cuestiones es necesario adentrarnos en la explicación de las tareas clásicas que se han utilizado para evaluar el SNA, las medidas que proponen, poniendo el acento en las diferencias evolutivas –entre niños y adultos– en la ejecución de estas pruebas Y como veremos en la última parte, la heterogeneidad del diseño de los estudios y tareas utilizadas nos muestran resultados mixtos y no concluyentes. Dicho con otras palabras, el estudio de las diferencias individuales en matemáticas explicadas a partir de la representación de la magnitud, es un campo de investigación "muy joven" y precisamente por ello, alberga ciertas limitaciones que a día de hoy no nos permite explicar –rotundamente– la naturaleza de las relaciones entre la ejecución del SNA y la ejecución matemática.

En las próximas páginas vamos a hacer una breve descripción de las diferentes tareas comúnmente utilizadas para medir el procesamiento y representación de magnitudes numéricas. Además, en las tareas distinguiremos distintas medidas o índices que reflejan, por un lado, medidas específicas de las tareas, esto es, que reflejan la agudeza y precisión de la representación de la magnitud, y por otro lado, medidas de eficacia, más relacionadas con la velocidad y eficiencia para procesar magnitudes. También analizaremos algunas cuestiones aún no resueltas, como las relaciones que se establecen entre las distintas tareas y hasta qué punto estas reflejan los mismos componentes relacionados con el procesamiento de magnitudes.

Una cuestión más. Aunque el abanico de tareas puede ser muy amplio, nos centraremos solamente en aquellas tareas que comúnmente se han utilizado en los estudios que han relacionado las diferencias individuales en el procesamiento y representación de la magnitud numérica y la ejecución matemática, para así poder revisar críticamente estos estudios en el siguiente Capítulo.

Recapitulando algunas de las ideas reflejadas en las páginas anteriores, el SNA es un sistema mental de representación aproximada que se activa durante el procesamiento de magnitudes. Ya sabemos que las representaciones aproximadas se pueden mostrar como curvas Gausianas organizadas en una hipotética línea numérica mental (ver Figura 1.1 del Capítulo I). La altura o anchura de cada curva (sus desviaciones estándares) en cierta medida reflejaría la cantidad de error asociado a cada representación del número, y las desviaciones incrementarían de manera lineal o logarítmica con el aumento de cantidades (ver misma figura anterior), o lo que es lo mismo, la agudeza y precisión de la representación decrementa con el incremento de las cantidades. Pero lo que es más importante, hay diferencias individuales respecto a esta precisión lo cual se reflejaría en las tareas que miden esta representación.

2.1 TAREAS UTILIZADAS PARA EVALUAR LA REPRESENTACIÓN DE LA MAGNITUD NUMÉRICA

La tarea más típica utilizada para medir la agudeza de la representación de magnitudes tanto en niños como en adultos es la **tarea de comparación numérica**, especialmente en su **versión no simbólica** (más adelante plantearemos la simbólica). En este caso se presentan conjuntos de puntos de diferentes cantidades para elegir dónde hay más (Halberda et al., 2008). En esta tarea se utilizan comúnmente cuatro índices de medida: proporción de aciertos, el efecto distancia, el efecto ratio y la fracción interna de Weber (*w*). Como ya expusimos páginas atrás, en la comparación de magnitudes se produce un efecto de distancia numérica que se refiere al decremento en los tiempos de reacción y errores cuando la distancia entre las cantidades a comparar incrementa. Y un efecto ratio numérica, referido al incremento en los tiempos de reacción y errores cuando la ratio entre las dos cantidades a comparar aumenta. Ambos efecto suelen calcularse a partir de la pendiente en una ecuación de regresión en la que se relaciona tiempo de reacción y aciertos (VD) con la distancia numérica o ratio (VI). Se asume que un mayor efecto distancia/ratio refleja una menor precisión en la representación de la magnitud. El efecto de ratio y el efecto distancia (Véase Figura 1.4 y 1.5 en Capítulo I) suelen presentar una alta correlación, por lo que han sido utilizados de manera indistinta como indicadores de la agudeza en la representación de magnitudes. Pero sin duda el índice más ampliamente utilizado para medir la agudeza del SNA es la fracción interna de Weber, expresada en el índice w, que reflejaría, más o menos, la distancia mínima que tendría que haber entre las dos cantidades a comparar para que un individuo las diferencie. Su cálculo es complejo, en el que se busca obtener un valor *w* tal que para cada par de numerosidades a comparar (n1 y n2) la proporción de error esperado a partir de la fórmula

$$\boxed{\tfrac{1}{2}\ \mathrm{erfc}\left([n_1 - n_2) \,/\, \sqrt{2}w\ \sqrt{n^2_1 + n^2_2}]\right)}$$

sea lo más cercano posible a la proporción de error que se observa en los datos. O lo que es lo mismo, se ajusta el modelo de la fórmula a los datos utilizando w como término libre. Una w más pequeña refleja una mayor agudeza en la representación de la magnitud.

Existen distintas variantes de la tarea de comparación de magnitudes respecto a la presentación de estímulos. La más evidente es el rango de cantidades utilizadas, que van desde rango 1 a 9 (e.g., Holloway & Ansari, 2009), fundamentalmente para equilibrar la tarea cuando se acompaña de la típica tarea de comparación de magnitudes simbólicas (ver más adelante), hasta rangos de 9 a 70 (e.g., Gilmore, Attridge & Inglis, 2011). Aquellos que utilizan cantidades mayores consideran que utilizar cantidades pequeñas, fundamentalmente en el rango 1 a 4, puede poner en marcha distintos mecanismos que no se basan en la representación de la magnitud, sino de mecanismos automáticos (subitizing) que no implican procesar.

Otras variantes tienen que ver con la presentación de los conjuntos de puntos a comparar, que pueden ser espacialmente separados (la más común), solapados (entremezclados) o un conjunto de puntos seguido de otro (Figura 2.1).

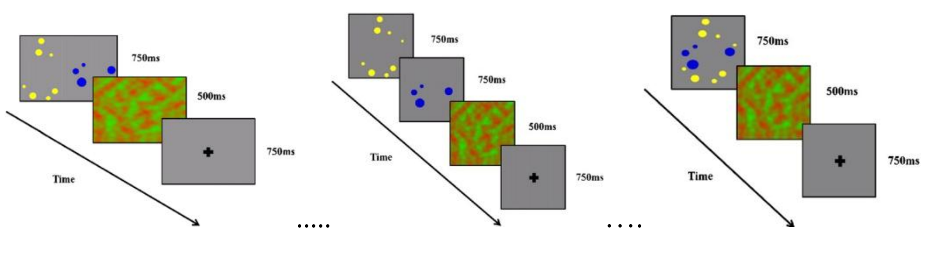


Figura 2.1: Distintas presentaciones de la tarea de comparación de magnitudes no simbólicas: espacialmente separados, secuencial y entremezclados (tomado de Price, Palmer, Battista & Ansari, 2012).

Otro ejemplo de la tarea de comparación de magnitudes, que no ha sido muy utilizada en los estudios sobre la representación de la magnitud, pero cuyo interés reside en que es el procedimiento usado en la investigación realizada con bebés, se basa en el **paradigma "tiempo de mirada" (looking-time paradigm).** En los estudios que utilizan este método, un conjunto de puntos con la misma numerosidad (llamado estándar) se presenta repetidamente, lo que hace que el tiempo que se dedica a mirar los estímulos se reduzca (el conocido fenómeno de habituación). La presentación de un estímulo con una numerosidad diferente tiene como resultado el incremento del tiempo de mirada, lo cual solo ocurre si el bebé detecta el estímulo como diferente. Algunos estudios (e.g., Gebuis & van der Smagt, 2011) ha utilizado este paradigma para analizar representación de la magnitud en adultos. En este caso se establece una línea base de numerosidad (presentando quince estímulos con la misma numerosidad), y durante la tarea los participantes deben indicar si cada estímulo presentado es el establecido como base o diferente. Como en las tareas de comparación, la dificultad viene dada por la ratio entre la numerosidad base y las numerosidades diferentes. Una tarea derivada de esta es la tarea igual/diferente, es decir, se presentan dos conjuntos de estímulos y se debe indicar si tienen la misma numerosidad o diferente. Esta tarea tiene algunas consecuencias teóricas que analizaremos más adelante.

Otra cuestión que tiene interés teórico en las tareas de representación de la magnitud no simbólica es el **control de variables no numéricas en la generación de los puntos que reflejan la numerosidad.** Si lo puntos fueran del mismo tamaño, uno podría guiarse por variables no numéricas, como el área representada por los puntos (hay más puntos azules porque yo veo "más azul"). En este sentido, la generación de puntos se lleva a cabo controlando las posibles variables no numéricas que podrían influir en la decisión, tales como, el área acumulada de los puntos, la densidad o el contorno del conjunto, entre otros.

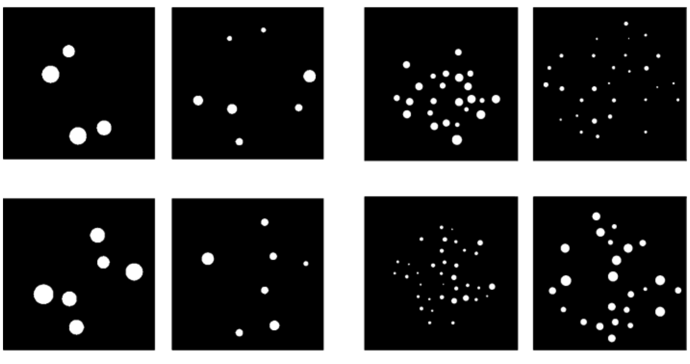


Figura 2.2: Ejemplo de pares de estímulos controlando variables no numéricas.

Con la adquisición del sistema simbólico numérico (palabras numéricas y dígitos arábigos) los niños desarrollan rutas de proyección de este sistema en el SNA. De hecho, ya sabemos que el efecto distancia/ratio también se da en tareas de comparación numérica simbólicas, lo cual sugiere que cuando se procesan números simbólicos se accede a la representación de la magnitud (pero ver más atrás otras interpretaciones de esta cuestión que también analizaremos más adelante). Por esta razón, otra de las tareas más ampliamente utilizadas para analizar las diferencias individuales en la precisión de la representación de la magnitud es la tarea de **comparación de magnitudes simbólicas**. Generalmente se utiliza la comparación de cantidades pequeñas (dígitos arábigos de 1 a 9), y dado que se producen los mismos efectos que en las tareas de comparación de magnitudes no simbólicas, los índices de medida que se consideran son, por un lado, eficacia, como proporción de aciertos, tiempos de respuesta o una combinación de los mismos (i.e., tiempos de respuesta dividido por proporción de aciertos), y por otro lado, los índices específicos de la tarea, es decir, aquellos que reflejan representación de la magnitud, como el índices de distancia, calculado a partir de la pendiente de la relación entre distancia y tiempos de respuesta o aciertos; aunque Holloway y Ansari (2009) proponen calcularlo a partir de la fórmula: distancias menores menos distancias mayores, y esto a su vez dividido por las distancias mayores. A menor índice de distancia reflejaría una mayor precisión en la representación de la magnitud. También existe alguna variante de la tarea de comparación de magnitudes simbólicas. Por ejemplo, en vez de aparecer los dos dígitos a comparar, solamente aparece un dígito en la pantalla y los participantes tienen que decidir si es más grande o más pequeño que el número de referencia cinco (e.g., Mussolin et al., 2010). Y al igual que en las tareas de procesamiento de magnitudes no simbólicas, también se ha propuesto la variante igual/diferente en vez de la comparación.

Sorprendentemente, se ha utilizado poco la tarea de **comparación de magnitudes simbólicas grandes con números de dos dígitos**, salvo alguna excepción con muestras de adultos, bien en la versión presentación simultánea de las dos cantidades (e.g., Gilmore et al., 2011), o bien en la versión con un número de referencia fijado, normalmente 65 (e.g., Castronovo & Göbel, 2012). Cuando se ha utilizado la comparación de magnitudes simbólicas de dos dígitos en el campo del procesamiento numérico, se ha hecho fundamentalmente en el contexto de cómo se accede a la magnitud de esos números, si de manera holística o dígito por dígito descomponiendo decenas y unidades (e.g., Dehaene, Dupoux & Mehler, 1990; Nuerk, Weger & Willmes, 2001; Nuerk & Willmes, 2005), y no tanto desde el estudio de las diferencias individuales en la precisión de las representaciones de la magnitud. Este aspecto es importante señalarlo, puesto que hasta donde alcanza nuestro conocimiento no existe ningún estudio que haya utilizado la comparación de magnitudes simbólicas de números de dos dígitos con niños, al menos no cpon niños de las edades que utilizaremos nosotros en esta tesis doctoral.

La precisión de las representaciones del SNA también se han analizado en el contexto de **tareas aritméticas**. La lógica que subyace a este planteamiento sería que si el SNA sirve como base sobre la cual se asientan las matemáticas formales, entonces sería posible ejecutar operaciones aritméticas desde las representaciones aproximadas del número. Esta premisa ha sido comprobada a partir de ***tareas de sumas (y restas) aproximadas no simbólicas*** desarrolladas originariamente por Hilary Barth y colaboradores (e.g., Barth, Beckmann & Spelke, 2008; Barth, La Mont, Lipton, Dehaene, Kanwisher & Spelke, 2006; Barth, La Mont, Lipton & Spelke, 2006). En una de las diferentes versiones de esta tarea (presentamos la utilizada con niños que aún no han comenzado el aprendizaje formal de la aritmética –5 años, ver Figura 2.3), los participantes ven un conjunto de puntos que posteriormente son ocultados; entonces se añade otro conjunto de puntos a los ocultados, y esta cantidad (que permanece oculta) se compara con otro conjunto de puntos que aparece después.

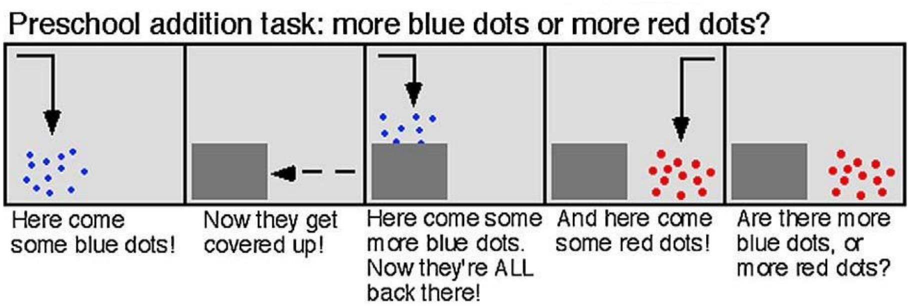


Figura 2.3: Ejemplo de tarea de sumas aproximadas utilizada con niños de 5 años (tomado de Barth et al., 2006).

Puesto que al final se convierte en una tarea de comparación de magnitudes no simbólicas, las características de los estímulos y los índices de medida son los mismos que aquellos utilizados en las tareas de comparación de magnitudes. De hecho, en las sumas y restas no simbólicas aproximadas se producen los mismos efectos de distancia y ratio entre los conjuntos sumados (o restados) y el conjunto con el que hay que comparar el resultado.

Por lo tanto, en estas tareas se pueden utilizar tanto el porcentaje de aciertos, como los índices de distancia y ratio y la fracción de Weber.

Como es lógico, también se han utilizado las ***sumas aproximadas en la versión simbólica*** de los estímulos. Por ejemplo, Dehaene, Spelke, Pinel, Stanescu y Tsivkin (1999) utilizaron una tarea de sumas aproximadas junto con similares sumas exactas (ver Figura 2.4) para demostrar que los circuitos cerebrales implicados en ambas tareas son distintos (surco intraparietal para las sumas aproximadas y giro angular para las sumas exactas; ver más atrás).

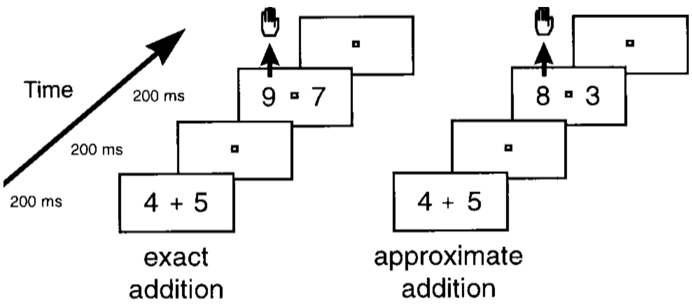


Figura 2.4: Diseño de tareas para diferenciar el cálculo exacto del aproximado (tomado de Dehaene et al., 1999).

No obstante, las tareas de sumas aproximadas simbólicas también han sido utilizadas con cantidades mayores y con niños pequeños con diseños similares a las sumas aproximadas no simbólicas utilizadas por Barth y colaboradores. Por ejemplo, Gilmore, McCarthy y Spelke (2007) diseñaron una prueba de sumas aproximadas simbólicas similar la presentada en la Figura 2.5. En este caso los puntos se sustituye por dígitos arábigos de dos cifras y se presentan en al contexto de un problema aritmético verbal (ver Figura XXX para un ejemplo adaptado por nosotros desde Gilmore et al. (2007).

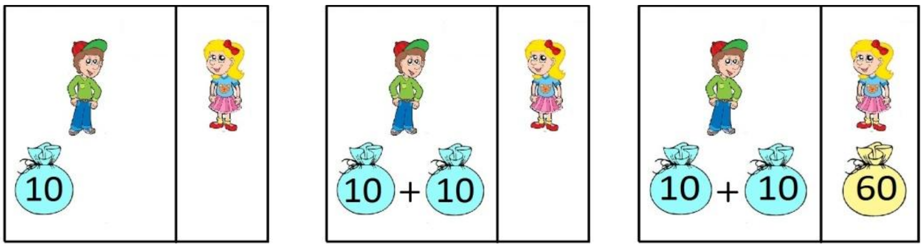


Figura 2.5: Ejemplo tarea de sumas aproximadas simbólicas (adaptado de Gilmore et al. 2007).

En este caso aparecen dos personajes en la pantalla del ordenador y el experimentador indica, por ejemplo, "María tiene x canicas" y aparece una bolsa coloreada mostrando el numeral arábigo. Posteriormente aparece una segunda bolsa del mismo color y el experimentador indica "y consigue X canicas más". Finalmente aparece otro personaje con otra bolsa coloreada mostrando otro numeral y el experimentador indica "Pedro tiene X canicas en su bolsa" y se le pregunta al niño "¿Quién tiene más canicas?". Se ha demostrado que niños que aún no pueden calcular esas cantidades contestan por encima del azar, produciéndose los efectos de distancia y ratio similares a las sumas aproximadas no simbólicas.

Además de las tareas de procesamiento de magnitudes simbólicas y no simbólicas, un buen número de estudios han utilizado las llamadas **tareas de proyección**. Si como se asume, al procesar magnitudes simbólicas se accede a la representación no simbólica de esa magnitud, ¿por qué no analizar directamente la proyección entre las representaciones simbólicas y no simbólicas del número? Esto es lo que se ha hecho desde diferentes perspectivas. La tarea más evidente es la ***tarea de estimación de cantidades no simbólicas***, donde hay que poner en conexión las representaciones no simbólicas con las simbólicas. En este caso se presentan brevemente (para evitar conteo) conjuntos más o menos numerosos de puntos para que los participantes estimen verbalmente cuántos puntos hay. Esta tarea requiere que los participantes accedan a las representaciones no verbales del SNA y que proyecten estas representaciones a las palabras numéricas simbólicas. En este caso se utiliza como índice de medida el coeficiente de variación (*cv*), un índice que mide la precisión de la proyección entre el SNA y el sistema numérico verbal. Como la proyección puede ser bidireccional, la tarea puede partir de una palabra numérica simbólica para que el participante genere un conjunto de puntos de esa cantidad, generalmente utilizando un potenciómetro que genera puntos en la pantalla con una velocidad tal que impida utilizar conteo.

Dado que la tarea de estimación es difícil para los niños (Lipton & Spelke, 2005), Mundy y Gilmore (2009) desarrollaron una tarea más estructurada de elección entre dos alternativas. En esta tarea se le presenta a los niños una cantidad entre 20 y 50 (bien simbólica o no simbólica –puntos, dependiendo de la dirección de la proyección) y tienen que elegir entre dos alternativas (no simbólicas o simbólicas) que refleje dicha cantidad. La dificultad se manipula variando la ratio entre las dos alternativas. Algunos autores (e.g., Sullivan & Barner, 2014) sugieren que los mecanismos de proyección pueden operar de manera distinta para cantidades grandes que para cantidades pequeñas, por lo que Brankaer, Ghesquière y De Smedt (2014) propusieron una tarea similar a la de Mundy y Gilmore (2009) pero en este caso con cantidades pequeñas de 1 a 9.

Otra tarea de proyección ampliamente utilizada ha sido la ***estimación en la línea numérica***, es decir, presentar una cantidad numérica simbólica y pedir a los participantes que localicen su posición en una línea numérica. Esta es una interesante tarea de evaluación porque dentro de las actividades matemáticas en muchas aulas se utiliza la recta numérica para enseñar conceptos numéricos (Siegler y Booth, 2004). Además, como decíamos anteriormente, las tareas clásicas de estimación de cantidades (estimar un conjunto de puntos) no son sencillas para los niños, por lo que esta tarea también puede ser una buena alternativa para analizar las habilidades de proyección desde una tarea de estimación. En la tarea se presenta a los participantes una hoja de papel (también existen aplicaciones por ordenador) con una línea numérica con el 0 al inicio de la línea y el 100 al final de la misma (el límite superior también puede ser 1000 o incluso 10, dependiendo de la edad de los participantes). Por encima de la línea se presenta un número y la tarea consiste en marcar en la línea dónde iría colocado (ver Figura 2.6).

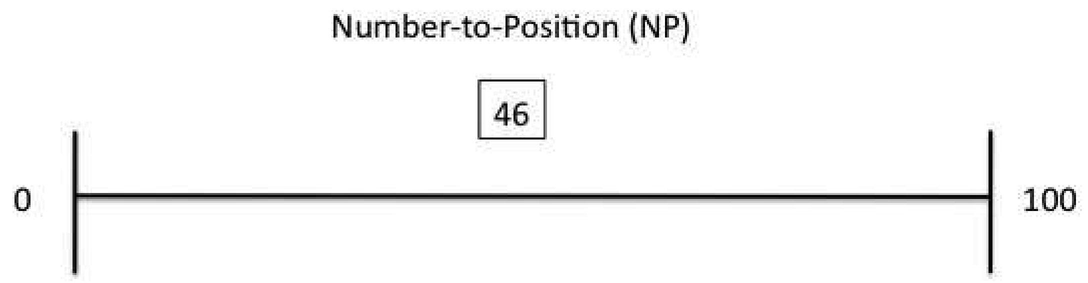


Figura 2.6: Ejemplo de estimación en recta numérica utilizada en diferentes estudios (e.g Booth & Siegler, 2006).

Para medir la exactitud de la estimación, se suele utilizar como índice de medida el porcentaje de error absoluto, calculado a partir del valor absoluto derivado de la fórmula "cantidad a estimar menos cantidad estimada y ello dividido por la escala de estimación. Así, si un participante tiene que estimar la cantidad 15 sobre una línea 0-100 y marca en la posición 35, el porcentaje de error absoluto sería del 20% [(35 – 15)/100]. Otro índice más próximo a la medición de la precisión de la representación de la magnitud se obtiene a partir del ajuste de las puntuaciones obtenidas a una función lineal, es decir, la proporción de varianza explicada en una regresión con las cantidades estimadas como variable predictora y las cantidades a estimar como variable dependiente. Este índice es un reflejo del cambio evolutivo con la edad desde una función logarítmica hacia una función lineal. Una representación logarítmica exagera la distancia entre las magnitudes de los números en el límite inferior de la recta y minimiza las distancias en el límite superior del rango, como se presenta en la Figura 2.7

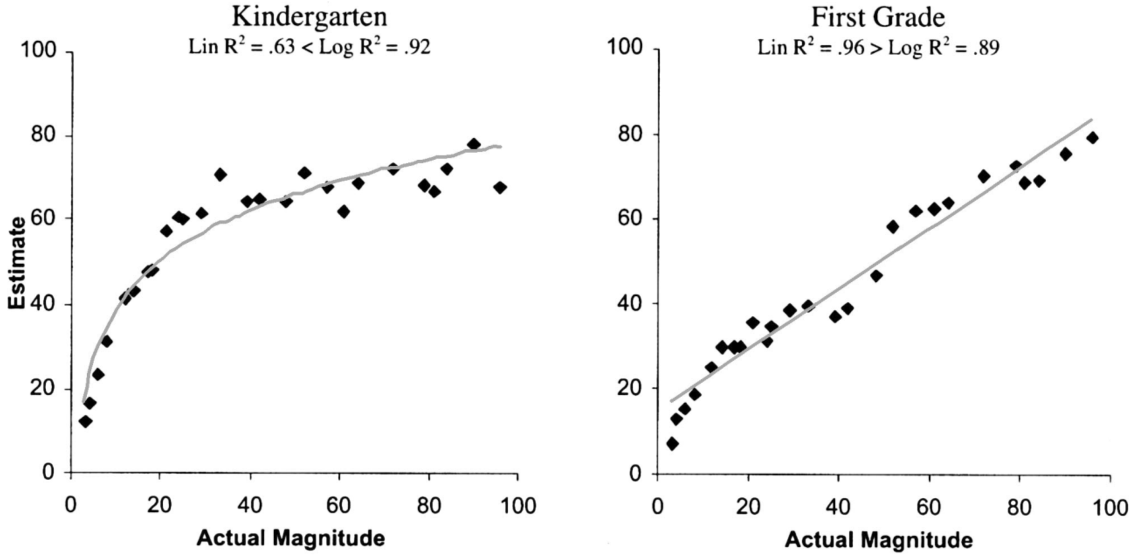


Figura 2.7: Progresión desde un patrón logarítmico en niños más pequeños a un patrón lineal en niños mayores (tomado de Booth & Siegler, 2006).

Este cambio evolutivo desde una confianza en una representación logarítmica de las magnitudes numéricas hacia una representación lineal se ha encontrado entre niños de Educación Infantil y niños de segundo grado de Primaria para estimaciones de localizaciones numéricas sobre una línea 0-100 (Siegler & Booth, 2004) y entre segundo y sexto grado para estimaciones sobre la línea 0-1000 (Siegler & Opfer, 2003). Esto supone que los niños alrededor de segundo curso pueden operar con distintos tipos de representaciones en función de la escala de medida, posiblemente motivado por la exposición a los números en cada rango en situaciones educativas.

2.2 CUESTIONES A RESOLVER EN RELACIÓN A LAS TAREAS QUE MIDEN REPRESENTACIÓN DE LA MAGNITUD

Como hemos podido comprobar, se han propuesto diferentes tareas para analizar las diferencias individuales en el procesamiento y representación de la magnitud numérica, especialmente para estudiar las relaciones entre estas diferencias individuales y la ejecución matemática (foco de atención de esta tesis). Sin embargo, en el próximo capítulo tendremos oportunidad de ver que el análisis de estas relaciones ha arrojado resultados mixtos y no concluyentes. Posiblemente, uno de los problemas para interpretar los diferentes resultados encontrados sea precisamente la ***variedad de tareas y estímulos utilizados en los diferentes estudios***, asumiéndose que en todos los casos se está midiendo lo mismo: el sistema numérico aproximado. Sin embargo, en las próximas líneas comprobaremos que quizás este no sea el caso. *La relación entre las diferentes tareas* posiblemente no sea la que supuestamente se ha asumido, y que sea precisamente esto lo que ha arrojado resultados tan dispares entre diferentes estudios que han analizado las relaciones entre el SNA y la ejecución matemática. Por ejemplo, si la habilidad para comparar magnitudes simbólicas, sea el caso con numerales del 1 al 9 no se relaciona con la habilidad para llevar a cabo, por ejemplo, sumas aproximadas no simbólicas, no nos sorprendería que pudiera haber resultados contradictorios cuando se compara la ejecución en estas tareas con la ejecución matemática, como muy bien sugieren Gilmore, Attridge, De Smedt y Inglis (2014). En lo que sigue vamos a revisar algunos trabajos que han analizado las relaciones entre las diferentes tareas o los índices para medirlas, así como la fiabilidad y valides de los mismos. Comenzaremos con algunos estudios que han puesto en relación diferentes tareas para después revisar otros que han analizado tareas individuales.

Respecto a los estudios que han utilizado diferentes tareas, estos son más bien escasos, por lo que no hay muchas evidencias acumuladas en cuanto a las diferencias individuales en la ejecución sobre estas tareas. En el caso de los estudios que han incluido participantes adultos han encontrado resultados mixtos cuando se han analizado las relaciones de diferentes versiones del SNA. Por ejemplo, Gilmore, Attridge y Inglis (2011) analizaron la relación entre seis tareas típicas utilizadas para evaluar el SNA: comparación de magnitudes simbólicas y no simbólicas, ambas en las versiones de cantidades grandes y pequeñas, y sumas aproximadas en su versión simbólica y no simbólica. Utilizando como índices de medida porcentaje de aciertos y fracción de Weber, encontraron que no había correlación entre las versiones no simbólicas de comparación y sumas aproximadas, a pesar de que utilizaron el mismo rango de estímulos en ambas tareas. De la misma manera, no encontraron correlaciones entre las versiones simbólicas de las mismas tareas. No obstante, sí encontraron correlaciones significativas entre las versiones de cantidades grandes y pequeñas de las tareas de comparación, y entre las versiones simbólicas y no simbólicas de la tarea de comparación con cantidades pequeñas. Sin embargo, Maloney, Risko, Preston, Ansari y Fulgelsang (2010) analizaron la relación entre tareas de comparación simbólica y no simbólica con cantidades pequeñas a partir del índice de distancia numérica y no encontraron relación entre ambas tareas. Y en el estudio de Gebuis y van der Smagt (2011) revisado más atrás en el que utilizaron el paradigma de detección junto con una tarea de comparación de magnitudes no simbólicas con los mismos parámetros tampoco encontraron relación entre ambas tareas. De manera similar, Smets, Gebius, Defever y Reynvoet (2014) analizaron la relación entre tres tareas no simbólicas: paradigma de detección, comparación, e igual/diferente. Los resultados mostraron que no hubo correlaciones significativas entre las tareas utilizando como índices de medida la proporción de aciertos y la fracción de Weber.

Por lo que se refiere a los estudios que han incorporado *muestras de niños* también encontramos resultados mixtos. Algunos trabajos no han encontrado relación entre tareas de comparación simbólicas y no simbólicas con cantidades pequeñas cuando se ha utilizado como índice de medida el efecto distancia (e.g., Desoete, Ceulemans, De Weerdt y Pieters, 2012; Holloway & Ansari, 2009). Por su parte, Gilmore et al. (2014) recientemente llevaron a cabo dos experimentos para examinar la ejecución sobre diferentes tareas. En el primer experimento analizaron la ejecución sobre tres tareas no simbólicas: comparación de cantidades pequeñas (1 a 9), comparación de cantidades grandes (5 a 22) y sumas aproximadas, encontrando correlaciones significativas entre las tres tareas utilizando como medida la proporción de aciertos. En el segundo experimento combinaron tareas simbólicas con no simbólicas; concretamente comparaciones simbólicas y no simbólicas de cantidades pequeñas y sumas aproximadas simbólicas y no simbólicas. Sus resultados mostraron correlaciones significativas entre las versiones no simbólicas de ambas tareas respecto a la proporción de aciertos, así como entre las versiones simbólicas y no simbólicas de cada tarea.

Por lo tanto, no hay una conclusión clara respecto a las relaciones entre las distintas tareas que supuestamente miden el SNA. Una posible explicación a las discrepancias entre diferentes estudios podríamos encontrarla en el *tipo de medidas utilizadas para analizar las relaciones*, entre las que se incluyen tanto medidas de eficacia como efectos específicos de las tareas. Como veremos enseguida, hay evidencias para creer que las medidas utilizadas dentro de una misma tarea presentan diferentes grados de fiabilidad y validez y pueden no correlacionar entre sí.

Algunos estudios se han centrado en analizar cómo las características particulares de una determinada tarea puede afectar a la ejecución. En este sentido, la que más investigación ha generado desde el punto de vista de su revisión es la tarea de comparación de magnitudes no simbólicas, posiblemente por ser la tarea más ampliamente utilizada para medir la precisión del procesamiento y representación de la magnitud numérica.

Una cuestión que se ha considerado es hasta qué punto los distintos índices utilizados para medir el SNA son fiables y se relacionan entre sí. Por ejemplo, Price et al. (2012) analizaron la fiabilidad test-retest de dos índices de medida, la fracción de Weber y el efecto de ratio en los tiempos de respuesta sobre tres variantes de la tarea de comparación de magnitudes respecto a la presentación de los puntos (espacialmente separados, secuencial y entremezclados, ver Figura 2.1), encontrando coeficientes de fiabilidad entre .4 y .8, con una mayor fiabilidad de la fracción de Weber. Sin embargo, aunque encontraron relaciones significativas entre el efecto de ratio y la fracción de Weber la asociación fue muy débil (R^2 = .11) y solo en la presentación secuencial, no encontrando ninguna asociación entre los dos índices cuando los estímulos se presentaron concurrentemente (el tipo de presentación más habitual en los diferentes estudios). Por su parte, Inglis y Gilmore (2014) llevaron a cabo un estudio similar, pero en este caso analizando cuatro índices de medida de la tarea de comparación de magnitudes: proporción de aciertos, la fracción de Weber, y dos variantes del efecto de ratio, bien sobre los tiempos de respuesta y sobre los aciertos. Sus resultados mostraron que los índices basados en el efecto de ratio no se relacionaron con los otros índices analizados y tenían muy baja fiabilidad test-retest. Además, la medida basada en los aciertos se relacionó con la fracción de Weber, algo esperado porque la fracción de Weber se calcula a partir de la proporción de aciertos. Sin embargo, la proporción de aciertos mostró una mayor fiabilidad que la fracción de Weber y presentó una distribución normal de las puntuaciones, mientras que la fracción de Weber presentó una mayor asimetría en la distribución. Esto llevó a los autores a considerar que el índice basado en la proporción de aciertos sería el más adecuado, incluso más que la fracción de Weber.

Otra cuestión a debatir dentro de la tarea de comparación de magnitudes no simbólicas es la referente al *tiempo de exposición de los estímulos*. O lo que es lo mismo, hasta qué punto la precisión del SNA varía con el tiempo de exposición de los estímulos. Esta cuestión es importante porque cuando se ha utilizado esta tarea en diferentes estudios, algunos han presentado los estímulos hasta que los participantes dan una respuesta (e.g., Inglis et al., 2011), muestras que otros han mostrado los estímulos durante un periodo de tiempo prefijado. Entre estos últimos, se encuentran los que presentan los estímulos por un periodo muy corto de tiempo, como 200 ms (e.g., Halberda et al., 2008) hasta los que utilizan tiempos tan largos como 2500 ms (Halberda & Feigenson, 2008). El único estudio que conocemos que analizado esta cuestión directamente fue llevado a cabo por Inglis y Gilmore (2013), quienes analizaron si los índices de medida del SNA (en este caso aciertos y fracción de Weber) cambian en función del tiempo de exposición (16 ms, 300 ms, 600 ms, 1200 ms y 2400 ms). Sus resultados mostraron que la precisión del SNA mejoró cuando los estímulos se presentaron durante más tiempo.

Un último aspecto a considerar en las tareas de comparación de magnitudes no simbólica es el *control de variables no numéricas* que pueden afectar a los resultados. Como planteábamos más atrás, el control de variables no numéricas parece lógico si se quiere estudiar un "puro" procesamiento de la numerosidad, es decir sin estar afectado por otras variables que pueden influir en las respuestas pero que no implican operar con numerosidad. Como exponíamos más atrás, existen distintas propiedades visuales que pueden influir en las respuestas de los participantes, como el perímetro del conjunto, la superficie total (el valor acumulado de las distintas superficies de cada punto), el tamaño de los puntos o la densidad de los mismos (ver Figura 2.1). La mayoría de los estudios que utilizan tareas de comparación de magnitudes han controlado alguna de estas variables. Por ejemplo, lo común es que en la mitad de los estímulos las variables no numéricas correlacionen con la numerosidad, los llamados ensayos congruentes (por ejemplo, mayor tamaño de los puntos y mayor perímetro coincide con el conjunto más numeroso) y en la otra mitad lo contrario, los ensayos incongruentes (en el conjunto más numeroso el tamaño de los puntos u el perímetro es menor). Sin embargo, algunos estudios muestran que los participantes responden a las propiedades visuales incluso cuando se controlan las variables no numéricas. Por ejemplo, en el estudio de Gilmore et al. (2011) revisado más atrás el cuarenta por ciento de la muestra tuvo que ser eliminada, y en el estudio de Inglis et al. (2011) el treinta por ciento, ya que la ejecución de los participantes en los ensayos congruentes e incongruentes difirió más del 50% en aciertos, lo que sugiere que confiaron en los indicios visuales de os estímulos para responder.

En una interesante reflexión sobre el control de variables no numéricas, Gebuis y Reynvoet (2012 a y b; ver también Defever, Reynboet & Gebuis, 2013) cuestionan que los juicios de numerosidad pueda ser independiente de las propiedades visuales de los estímulos. De acuerdo con estos autores, los juicios sobre numerosidad se basan en la combinación de diferentes indicios visuales, ya que dos conjuntos de ítems pueden diferir en su numerosidad solo si sus características visuales difieren; de otra manera ambos representarían la misma numerosidad. De hecho, la numerosidad y los indicios visuales correlacionan en la vida real. Por ejemplo, si en una habitación entran más personas no solo aumenta la numerosidad sino también la densidad; se podría controlar la densidad, pero entonces otro indicio visual podría entrar en juego. De esta forma, Gebuis y Reynvoet (2012 a y b) sugieren que los métodos utilizados para controlar variables no numéricas son insuficientes, ya que pueden controlar unas variables pero no otras la vez. En este sentido, los autores se preguntan si controlar los indicios visuales en estudios sobre la numerosidad tiene sentido, ya que el control de variables no numéricas no impide hacer uso de tales indicios, sino que simplemente hace la tarea más compleja. Siguiendo con el argumento de estos autores, si en la vida diaria la relación entre numerosidad y la mayoría de los indicios visuales no se viola, parecería innecesario tener un mecanismo cerebral que pueda extraer numerosidad independientemente de las propiedades visuales de los estímulos. Por lo tanto, la investigación debería cuestionar si utilizar estímulos más válidos ecológicamente y no controlar los indicios visuales para tener una verdadera noción de numerosidad.

Una última cuestión respecto a las tareas utilizadas para analizar el procesamiento de la magnitud numérica, con cierto calado teórico, se refiere al <u>*uso de tareas de comparación como reflejo de la representación de la magnitud.*</u> Como hemos podido ver en otras partes de este trabajo, las tareas de comparación tienen como resultado un efecto de distancia (mayor facilidad para discriminar magnitudes lejanas, como 2 vs. 7, que magnitudes cercanas, 2 vs. 3), cuya causa posiblemente resida en un mayor solapamiento representacional de las magnitudes cercanas. Sin embargo, algunos autores de cuestionan si realmente el efecto de distancia refleja las características de la representación de la magnitud (Cohen, 2009; Cohen Kadosh, Brodsky, Levin, & Henik 2008; Holloway & Ansari, 2008; Van Opstal, Gevers, De Moor & Verguts, 2008; Van Opstal & Verguts, 2011). Desde estos trabajos se sugiere que el efecto de distancia de la comparación se puede explicar por procesos de decisión más generales sobre las representaciones que se activan en vez de las propias representaciones de la magnitud. Por ejemplo, Van Opstal et al. (2008) desarrollaron un modelo de simulación en el que el efecto de distancia de la comparación se origina en el peso de las conexiones de los estímulos con los nodos de respuesta. De acuerdo al modelo, el efecto distancia siempre estará presente tan pronto como las conexiones entre estímulos y respuestas incrementen monotónicamente, dado que la activación de los nodos de respuesta se determina por la fuerza de estas conexiones. Por lo tanto, el efecto de distancia de la comparación ocurre por la activación de los nodos de respuesta: los estímulos más cercanos tienen similares fuerza de asociación a los nodos de respuesta, por lo que será más difícil diferenciarlos aumentando los tiempos de reacción. Así, no es necesario asumir el efecto de distancia por un mayor solapamiento representacional en las distancias más cortas, sino por el peso de las conexiones entre la magnitud activada por los estímulos y los nodos de respuesta.

Algunos autores proponen que una forma de evitar esta confusión entre solapamiento representacional y procesos de decisión es utilizar una tarea de emparejamiento numérico como la tarea igual/diferente (Dehaene & Akhavein 1995; Cohen Kadosh et al., 2008; Van Opstal & Verguts, 2011). Recordemos que en esta tarea los participantes tienen que decidir si dos magnitudes presentadas simultáneamente son la misma o diferente. Y se ha encontrado un efecto de distancia similar a la tarea de comparación (Dehaene & Akhavein, 1995). Sin embargo, como sugieren Van Opstal y Verguts (2011), este efecto distancia reflejaría la representación mental subyacente, sin ser confundido con procesos decisionales. A diferencia de la tarea de comparación, la comparación de dos números en la tarea igual/diferente no se relaciona con una decisión ordinal, ya que esta es irrelevante cuando se tiene que decidir si son iguales o distintos; solo es necesario procesar la identidad de los números para completar la tarea con éxito. Por lo tanto, es plausible que cualquier efecto ordinal, como el efecto de distancia, se origine directamente desde la representación mental ordenada de los estímulos. De hecho, Van Opstal y Verguts (2011) simularon el efecto distancia en la tarea igual/diferente y encontraron que, a diferencia de la tarea de comparación, este efecto solo se daba cuando se asumía solapamiento representacional. Por lo tanto sería más apropiado analizar las representaciones de la magnitud desde tareas igual/diferente (ver también Cohen, Kadosh et al., 2008).

No obstante, y a pesar de haberse encontrado un efecto de distancia en tareas igual/diferente (e.g., Dehaene & Akhavein 1995; Van Opstal & Verguts, 2011), otros estudios no han encontrado tal efecto, especialmente cuando se utilizan tareas igual/diferente en su versión simbólica (e.g., Cohen, 2009; Defever, Sasanguie, Vandewaetere & Reynvoet, 2012; Goldfarb, Henik, Rubinsten, Bloch-David, & Gertner, 2001; Sasanguie & Reynboet, 2014). Por ejemplo, Goldfarb et al. (2011) sugieren que el efecto de distancia encontrado en los estudios previos, como en el de Dehaene y Akhavein (1995), es debido a los análisis específicos que llevaron a cabo (agrupando distancias). Así, en una réplica del estudio de Dehaene y Akhavein (1995), Goldfarb et al. (2011) encontraron el efecto de distancia cuando analizaron los resultados de la misma forma que en el estudio original, en este caso analizando los estímulos 1, 2, 8, y 9, y comparando la distancia 1 con todas las demás. Sin embargo, cuando el análisis incluyó los números 3, 4, 5, 6, y 7 (incluidos en el estudio de Dehaene & Akhavein, 1995, pero utilizados como relleno) no encontraron el efecto de distancia (ver resultados similares en Defever et al., 2012). Como notan los autores, el re-análisis que hicieron es más próximo al análisis que se lleva a cabo cuando se utiliza una tarea estándar de comparación de magnitudes.

Más aún, en un desafiante estudio, Cohen (2009) propuso que el efecto de distancia entre dos numerales surge por la similaridad física de los mismos, y no por la cantidad que representan (ver también Cohen, Warren, & Blanc-Goldhammer, 2013; Defever et al., 2012; García-Orza, Perea, Mallouh, & Carreiras, 2012; Wong & Szucs, 2012). Cohen (2009) sugiere que los símbolos numéricos (dígitos arábigos) se han podido crear de tal manera que su forma física refleja la cantidad que representan. En su estudio original, presentó a los participantes dígitos que tenían que ser clasificados como iguales o diferentes al número de referencia cinco. Los datos mostraron que los participantes basaron sus respuestas sobre las características físicas de los dígitos y no sobre su valor numérico.

En este contexto, surge la cuestión de hasta qué punto cuando se procesan números simbólicos se accede a su representación semántica basada en la magnitud. Al final del capítulo anterior planteábamos que cabría la posibilidad de que existiera un sistema encargado de procesar números simbólicos sin necesidad de que estos activaran su representación semántica. O dicho en otras palabras, *¿Es posible que se desarrolle un sistema de representación para los números simbólicos separado del SNA?* En línea con este argumento, revisábamos más atrás el trabajo de Lyons et al. (2012), quienes han sugerido que los sistemas de representación para los números simbólicos y no simbólicos estarían separados, al menos en los adultos. Estos autores proponen que a través del uso repetido de los números simbólicos, las relaciones entre símbolos podrían llegar a ensombrecer las relaciones entre los símbolos y las cantidades que representan, de tal forma que los símbolos pueden llegar a operar como un sistema asociativo. Si este fuera el caso, es posible que las diferencias individuales en el procesamiento numérico y su relación con la ejecución en matemáticas se encuentren en este sistema simbólico y no en la representación de la magnitud. Esta es una cuestión que trataremos detenidamente en el siguiente capítulo.

2.3 RESUMEN

Hemos tenido oportunidad de ver la variedad de tareas que se proponen para analizar y medir el procesamiento y representación de la magnitud numérica. Tareas que a su vez implican distintos índices de medida que bien recogen la eficacia con que se procesan las magnitudes, o reflejan la representación subyacente de la magnitud. No obstante surgen dudas sobre si todas las tareas miden lo mismo o si realmente están relacionadas entre sí. Dudas que tienen repercusión a la hora de establecer las posibles relaciones entre procesamiento y representación de la magnitud numérica y la ejecución matemática. De hecho, como tendremos oportunidad de ver en el siguiente capítulo, los diferentes estudios utilizan distintas tareas o diferentes índices de medida para analizar estas posibles relaciones, lo que genera dudas a la hora de extraer conclusiones, especialmente si, como veremos, los diferentes estudios llegan a conclusiones que muchas veces encontradas entre sí.

CAPÍTULO III

RELACIÓN ENTRE EL PROCESAMIENTO DE MAGNITUDES NUMÉRICAS Y LA EJECUCIÓN EN MATEMÁTICAS

Durante la última década se ha impulsado la investigación que tiene como objetivo estudiar la relación entre las diferencias individuales en las habilidades de procesamiento magnitudes numéricas y el rendimiento en matemáticas tanto en adultos, en niños con desarrollo típico, así como en niños con desarrollo matemático atípico o discalculia del desarrollo (DD) que se vean afectados en su capacidad para procesar magnitudes numéricas. Este tipo de investigación está empezando a sentar las bases para el diseño y evaluación de intervenciones educativas que fomenten el procesamiento de la magnitud numérica. Una de las preguntas que se destacan en este cuerpo emergente de la investigación es si el procesamiento de magnitudes, ya sea en formato simbólico (dígitos) o no simbólico (puntos), o ambos, es crucial para tener un buen rendimiento en matemáticas. Este tipo de investigación puede determinar con mayor precisión el contenido matemático que se debe incluir en intervenciones futuras. Más allá de las aplicaciones e implicaciones educativas, teóricamente necesitamos establecer si las habilidades de procesamiento numérico simbólico o no simbólico, o ambos, son predictivas del rendimiento en matemáticas. Mientras que las representaciones no simbólicas de magnitudes numéricas están concebidas para ser compartidas entre las especies y pueden ser medidas desde edades muy tempranas, las representaciones simbólicas son exclusivamente humanas y son invenciones culturales relativamente recientes para proporcionar representaciones abstractas de las magnitudes numéricas. Además, analizando la relación por un lado, del procesamiento de magnitudes numéricas simbólicas y no simbólicas, y por otro, el rendimiento de los niños en matemáticas, se nos plantean cuestiones más amplias relativas al papel que tienen las habilidades más básicas evolutivamente en la adquisición de estas habilidades numéricas

En la literatura –como hemos ido viendo a lo largo de esta Tesis– se demuestra que existen cambios significativos relacionados con la edad en la representación básica y procesamiento tanto de magnitudes numéricas no simbólicas como simbólicas. En los estudios de comparación de magnitudes, proyección, estimación y estimación en recta numérica, los datos convergen en que la representación y procesamiento de magnitudes numéricas va siendo más precisa a medida que nos desarrollamos o, dicho con otras palabras; la precisión/agudeza en las representaciones de magnitudes experimenta mejoras asociadas a la edad. Desde una perspectiva educativa, esto nos plantea una serie de preguntas: *¿Las diferencias presentes en las medidas de procesamiento de magnitudes numéricas están relacionadas con las habilidades que tienen los niños en matemáticas?, ¿Cómo de específicas son estas relaciones?, ¿Existe consenso a la hora de explicar cómo o cuánto predice un rendimiento posterior?* Estas cuestiones se han abordado recientemente en una serie de estudios transversales y longitudinales. En las páginas que vienen a continuación describiremos y analizaremos este corpus de estudios. Comenzaremos con aquellos trabajos que han establecido una relación entre las diferencias individuales en la representación de la magnitud no simbólica implicada en el SNA y la ejecución matemática en niños. Seguiremos con los que han puesto en duda esta relación, al considerar que no son las representaciones no simbólicas de la magnitud sino el acceso a las mismas desde los símbolos numéricos donde se establece la relación. Posteriormente también revisaremos esta disyuntiva desde estudios llevado a cabo con participantes adultos. Y terminaremos analizándola desde la perspectiva de las dificultades de aprendizaje.

3.1 EL PROCESAMIENTO NO SIMBÓLICO (SISTEMA NUMÉRICO APROXIMADO) COMO PREDICTOR DEL RENDIMIENTO EN MATEMÁTICAS

Las relaciones entre la precisión en el SNA y la ejecución matemática se ha encontrado en niños que no han comenzado aún el aprendizaje formal de las matemáticas (e.g Gilmore et al., 2010; Libertus, Feigenson & Halberda, 2011, 2013 a y b; Mazzocco et al., 2011; Mussolin et al. 2012), en niños que se encuentran en pleno proceso de aprendizaje (e.g. Halberda, Mazzocco & Feigenson, 2008; Inglis et al., 2011; Lonnemann et al., 2011; Lourenco et al., 2012) y en adultos que han finalizado el aprendizaje formal, como veremos más adelante (e.g Libertus & Halberda, 2012; Wind & Brand; 2012).

El primer estudio que apoyó la hipótesis de que las diferencias individuales en el SNA (con una tarea de comparación de magnitudes no simbólicas) se relacionan con las diferencias en la ejecución en matemáticas fue llevado a cabo por Halberda, Mazzocco & Feigenson (2008). Evaluaron a niños de 14 años a través una serie de tareas matemáticas y cognitivas de forma longitudinal, comenzando en la etapa infantil. Evaluar las habilidades matemáticas, verbales u otras de manera longitudinal nos proporciona la oportunidad para detectar cualquier correlación entre la precisión del SNA y la habilidad para las matemáticas simbólicas mientras controlamos otras variables como inteligencia general, variables viso-espaciales y memoria de trabajo. Mostraban a los participantes un conjunto de puntos en la pantalla del ordenador –azules y amarillos– y debían indicar si había más puntos azules o amarillos. Cada ensayo era presentado durante 200 ms, y el tamaño de los conjunto variaba desde 5 a 16 elementos, con ratios de 1:2, 3:4, 5:6 y 7:8. Del mismo modo, controlaron el área de los elementos para evitar que el juicio emitido por el participante se guiara por variables perceptivas no numéricas (ver capítulo anterior). Además, en cada año evaluaban la competencia en matemáticas mediante test estandarizados específicos de matemáticas (TEMA-2 y/o Subtest de Cálculo Woodcock-Johnson) y variables no numéricas como la tarea RAN nombrado de colores o el test WASI como un índice de inteligencia general. Finalmente, midieron la precisión de las comparaciones de magnitudes numéricas a partir de la fracción de Weber (w). Las correlaciones entre la precisión del SNA y las diferencias individuales en las puntuaciones obtenidas en matemáticas –durante la etapa infantil y a lo largo de Primaria–, reveló que los niños de 14 años que eran más precisos a la hora de representar magnitudes no simbólicas también obtuvieron mejores puntuaciones en los test de matemáticas cuando eran más pequeños (ver Figura 3.1 parte a y b). En otras palabras, estos autores encontraron una gran variabilidad en la precisión del SNA en la muestra de participantes de 14 años y esta variabilidad correlacionó significativamente con las diferencias en las habilidades matemáticas formales medidas por los test a lo largo de toda su escolaridad.

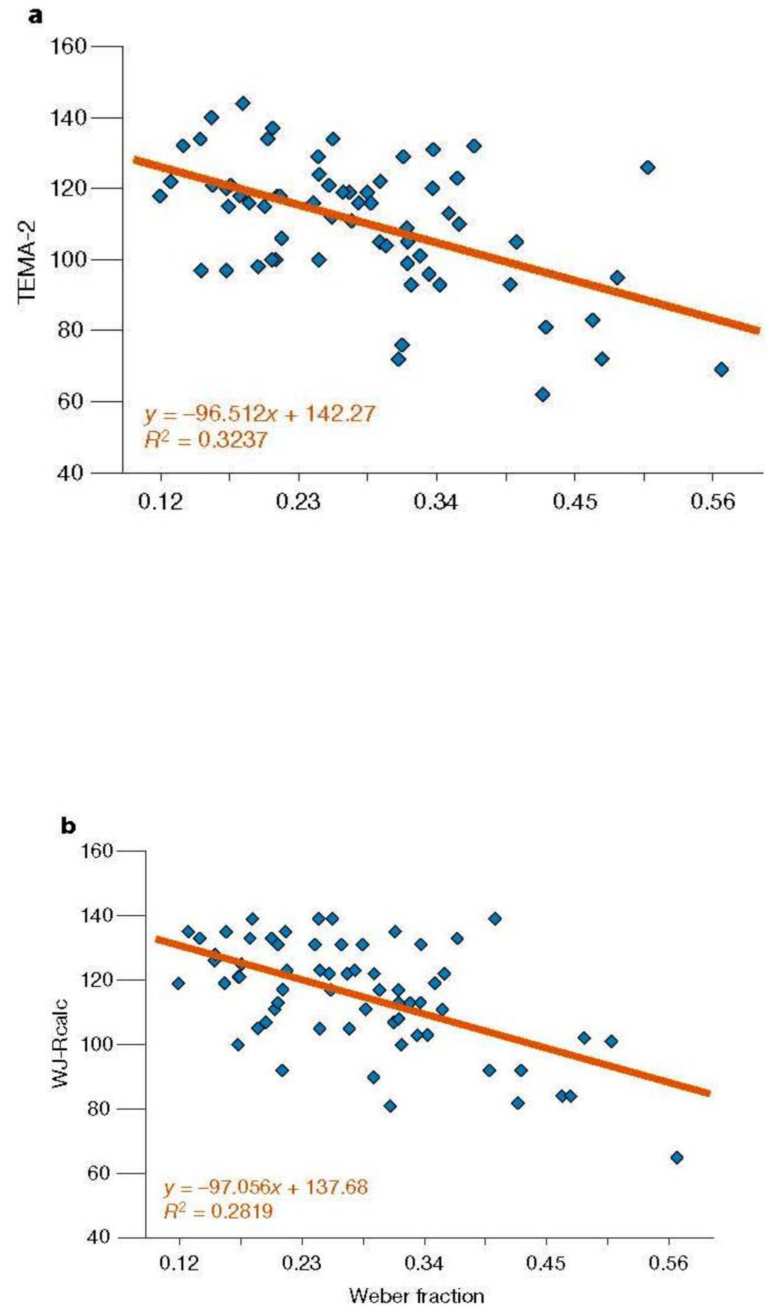


Figura 3.1: Regresión Lineal de las puntuaciones estandarizadas para cada sujeto en TEMA-2 **(a)** o en el Subtest de cálculo **(b)** de ejecución matemática y la precisión del SNA (*w*). Obtener números altos en ambos test indica un mejor rendimiento, mientras que en la fracción de Weber, números más pequeños indican una mejor representación y rendimiento.

Como se observa en las figuras, la precisión del SNA explicó alrededor de un 30% de la varianza de las puntuaciones en ejecución matemática. Después de controlar otras habilidades cognitivas como inteligencia, memoria o lenguaje, la precisión del SNA aún explicaba entre un 14 y un 20% de la varianza en ejecución matemática.

Inglis et al. (2011), en esta misma línea, intentaron replicar los resultados obtenidos en el estudio de Halberda et al. (2008). Sin embargo, a diferencia de los primeros, estos autores tuvieron en cuenta que tanto la agudeza o precisión en el SNA como el rendimiento en las matemáticas simbólicas puede estar condicionado por el desarrollo y evolución de cada persona. De acuerdo con los autores, es posible que la medida recogida por Halberda et al. (2008) del SNA obtenida a los 14 años podría estar influenciada por otros factores del desarrollo no reflejados en los test de ejecución matemática a la edad de 5-11 años. En este estudio midieron a los participantes (niños entre 7 y 9 años de edad) en dos tareas de forma concurrente –tarea de comparación no simbólica (tamaño de los conjuntos 5-22 puntos: índice utilizado ***w***) junto con un test de ejecución matemática *Woodcock-Johnson III*–. Para evaluar la inteligencia no verbal utilizaron la prueba de matrices del *WASI*. Encontraron una relación entre la precisión del SNA y la ejecución matemática (pr = .55, p = .008 parcializando inteligencia)), es decir, aquellos con una mayor agudeza del SNA tendieron a tener puntuaciones más altas en ejecución matemática.

Hasta ahora, estos estudios nos han mostrado que la relación entre el SNA y la habilidad matemática se encuentra en niños en edad escolar. En el trabajo llevado a cabo por Libertus et al. (2011), tenían como objetivo estudiar la relación entre la precisión en el SNA y la habilidad matemática temprana en niños pequeños que no han tenido o han tenido una intrucción mínima en las matemáticas formales. Para ello, evaluaron a niños de 3-5 años mediante una tarea de comparación de magnitudes no simbólica (basada en Halberda et al., 2008; tamaño de los conjuntos 4-15). A su vez, emplearon el test TEMA-3 (Ginsburg & Baroody, 2003) de ejecución matemática y un test de habilidad verbal como variable de control. El interés principal era demostrar que incluso en niños pequeños con poca o ninguna intrucción en las matemáticas formales, las diferencias individuales en la precisión del SNA podrían correlacionarse con la ejecución matemática, controlando habilidades que no son matemáticas. Utilizaron medidas de aciertos, la fracción de Weber y el tiempo de respuesta (TR). Los resultados obtenidos demostraron una relación entre la precisión del SNA y las matemáticas simbólicas en niños de etapa infantil, incluso controlando la edad y habilidades verbales. La proporción de aciertos, TR y *w* explicaron entre un 7 y 18% de la varianza de la habilidad matemática antes de controlar edad y vocabulario. Mientras que cuando se introdujeron estas variables en el modelo, tan sólo un 6% se explicaría mediante *w*, 13% por el porcentaje de aciertos mientras que el TR prediciría un 5-8% de dicha varianza. Una consideración importante es que en el anterior estudio de Halberda et al. (2008) no se analizaron los TR con adolescentes.

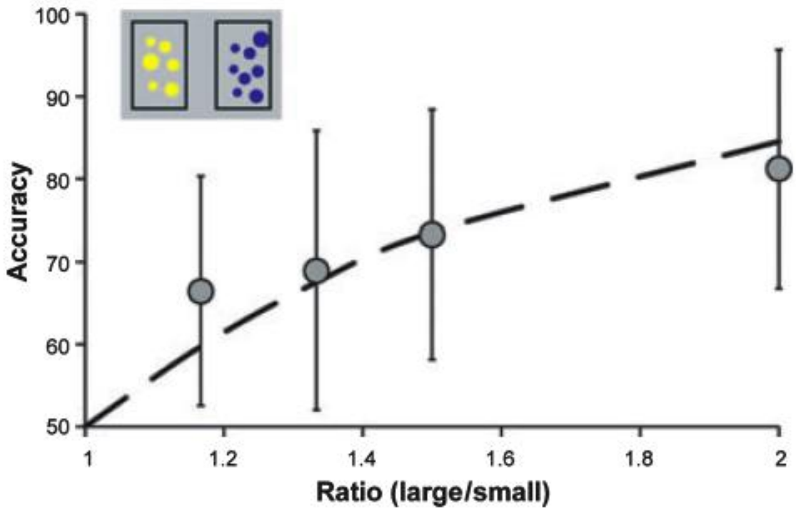


Figura 3.2[1]*:* Ejemplo de estímulo utilizado en la tarea de precisión del SNA. Gráfico principal; Eficacia (porcentaje correcto) en la tarea de comparación de magnitudes no simbólicas.

Hasta ahora las relaciones entre la precisión del SNA y la ejecución matemática se ha analizado concurrentemente o con asociaciones restrospectivas (Halberda et al., 2008). Mazzocco, Feigenson & Halberda (2011b) propusieron analizar en un estudio longitudinal si la precisión en el SNA medida antes de entrar en la escuela, predice el rendimiento en matemáticas durante o después de la etapa infantil. Para ello, en un primer momento tomaron medidas de precisión del SNA en niños de 3-4 años con la tarea de comparación no simbólica (la misma utilizada en el estudio de Halberda et al., 2008) y al cabo de un periodo de dos años evaluaron mediante un test de competencia matemática (TEMA-3) a esos mismos niños. Para analizar la especificidad de la influencia de la precisión del SNA, también aplicaron la Escala Abreviada de Inteligencia de Wechsler (vocabulario expresivo, cubos y matrices) y tres subtest (letras, colores y números) de la prueba RAN (rapid automatized naming). Su hipótesis era que la precisión del SNA prediciría las habilidades matemáticas pero no otros aspectos de ejecución cognitiva, como los subtest del la escala

[1] Se toma la medida de eficacia para evaluar la precisión del SNA y está representa como una función de la relación entre los valores numéricos. Las barras indican ± 1 desviación estándar. El gran tamaño nos indica la gran variabilidad individual en la precisión del SNA de los niños.

Wechsler o RAN, excepto el subtest de números. Los investigadores encontraron que la precisión/agudeza en el SNA antes de la instrucción formal en matemáticas predice selectivamente su rendimiento en matemáticas a los 6 años, y esta asociación no era explicada por inteligencia, porque no encontraron tal asociación con el vocabulario la organización perceptiva (cubos) o la recuperación léxica (RAN) excepto para números. Este estudio fue el primero es demostrar que la precisión en el SNA medida en los años previos a la escolarización –en la etapa infantil– puede predecir el rendimiento en matemáticas en la etapa de primaria (R^2 = .278 para TEMA-3 y R^2 = .324 para RAN números).

Bonny y Lourenco (2013) llevaron a cabo un estudio para analizar la relación entre la precisión del SNA y la ejecución matemática, pero añadiendo un elemento nuevo a la discusión: la posibilidad de una relación no lineal entre el SNA y las matemáticas simbólicas. En la tarea de comparación no simbólica utilizaron un número de referencia (8 puntos), así los conjuntos a comparar los dividieron en "conjuntos grandes" (9-12 elementos) o "pequeños" (4-7). Para la ejecución matemática utilizaron el TEMA-3 añadiendo una prueba de vocabulario como control. Encontraron que la precisión del SNA predice menos el rendimiento en matemáticas en los niños que puntuaban más alto en el test TEMA-3 que los que tenían peor puntuación durante la etapa infantil. Por lo tanto, estos hallazgos sugieren que la conexión entre el SNA y la matemática simbólica podría ser fundamentalmente discontinua, es decir, que esta relación podría estar mediatizada por el papel del conocimiento numérico de los niños. No obstante, aunque no lo analizaron, los autores proponen otros factores sociales y cognitivos que podrían influir en el proceso de aprendizaje de las matemáticas durante los años escolares, como puede ser la motivación (Cleary & Chen, 2009) ansiedad ante las matemáticas (Ashcraft, 2002), o el estatus socio-económico (Jordan et al., 1992), entre otros, y que podrían mediar la relación entre el SNA y las matemáticas.

Uno de los estudios más recientes que pretende aunar y validar los resultados obtenidos en estos anteriores trabajos (i.e., Bonny & Lourenco, 2013; Halberda et al., 2008; Libertus et al., 2011; Mazzocco et al., 2011b) es el realizado por Libertus, Feigenson y Halberda (2013a). De acuerdo con los autores, los resultados previos que sugieren una relación entre la precisión del SNA y las matemáticas hay que tomarlos con cautela. Argumentan que antes de que los niños comienzan la enseñanza formal ya se pueden encontrar diferencias individuales en las habilidades matemáticas. El trabajo de Libertus et al. (2011) que vimos más atrás encuentra que estas diferencias se asocian con diferencias individuales en el SNA. Por lo tanto, argumentan Libertus et al. (2013a), que es posible que la relación entre la agudeza del SNA y las habilidades matemáticas que encuentran Mazzocco et al. (2011b) en su estudio longitudinal, se podría explicar por una relación entre la agudeza del SNA y la habilidad matemática concurrente, por lo que no se puede saber si el SNA juega un papel en el desarrollo de las habilidades matemáticas posteriores. La única forma de demostrar una relación predictiva entre la agudeza del SNA y la posterior habilidad matemática es controlando las diferencias individuales previas en las habilidades matemáticas. En este contexto, estos autores evaluaron la precisión del SNA a través de una tarea de comparación de magnitudes similar a los anteriores estudios (basada el el Panamath) y la competencia matemática (TEMA-3) en niños de prescolar en dos momentos -con 6 meses de diferencia entre cada evaluación- en intentaron probar una relación predictiva entre ambas, pero con la novedad anticipada de controlar las diferencias individuales en matemáticas durante la primera sesión de evaluación. Además, aumentaron el tamaño de la muestra respecto al estudio previo (N=204 vs. N=17 en Mazzocco et al., 2011b). En tercer lugar, se tomaron como medidas tanto la eficacia –porcentaje de aciertos- como el tiempo de reacción (TR) en la tarea de agudeza del SNA. Por último, incluyeron evaluaciones no numéricas como el vocabulario expresivo, la atención y memoria de trabajo con el fin de comprobar si la eficacia y los TR en la tarea de comparación de magnitudes son las que mayormente contribuyen en la predicción de la competencia matemática de forma concurrente, incluso cuando controlaron la velocidad del procesamiento, atención y memoria de trabajo. Los resultados replicaron aquellos previos de Mazzocco et al. (2011b) y los ampliaron mostrando que la relación entre la agudeza del SNA y las habilidades matemáticas se mantiene incluso cuando se controlan las diferencias previas en las habilidades matemáticas. De hecho, las habilidades matemáticas previas predijeron un 45% de la varianza de las habilidades matemáticas posteriores, y la agudeza del SNA contribuyó un significativo 7% más. Además, lo hace controlando otras variables no numéricas (memoria de trabajo, vocabulario y atención).

En un trabajo de estos mismos autores publicado inmediatamente después de este previo (Libertus, Feigenson y Halberda, 2013b), mostraron en un estudio longitudinal de dos años (media de edad de los niños en t1 4.15 años) que la precisión del SNA se relaciona y predice las habilidades matemáticas posteriores informales, pero no las formales. El TEMA-3 precisamente hace esta distinción entre sus items, relacionándose parte de ellos con la aritmética informal u otros con la aritmética formal. Esto sugiere que el SNA puede ser importante para ciertas habilidades matemáticas sobre otras (más adelante trataremos esta cuestión relacionadas con las distintas habilidades matemáticas y su relación con el procesamiento de la magnitud numérica).

Como anunciamos al inicio del Capítulo (ver también el Capítulo anterior), en otras investigaciones se han utilizado otras tareas diferentes a la de comparación de magnitudes no simbólicas para medir la representación de magnitudes. Por ejemplo en el trabajo de Gilmore et al (2010) utilizaron un test de habilidad numérica no simbólica (sumas) en niños entre 5-6 años en vez de una tarea de comparación. Para estos autores las habilidades no simbólicas estarían también asociadas al éxito en el primer año de primaria. La tarea que emplearon fue la de sumas no simbólicas (ver Figura 3.3). La precisión que mostraron en esta tarea correlacionaba positivamente con las puntuaciones obtenidas en los test de ejecución matemática, lo que confirmaría una vez más que estas diferencias individuales en el rendimiento en aritmética no simbólica estarían relacionadas con la habilidad matemática.

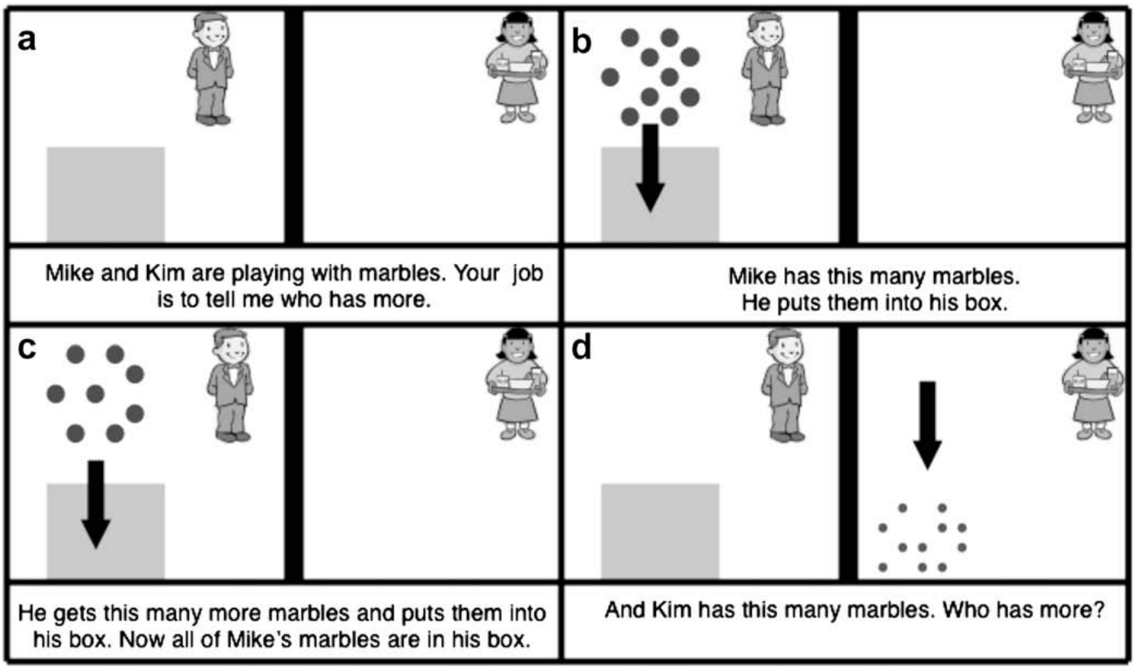


Figura 3.3: Ejemplo de un problema en la tarea de sumas aproximadas no simbólicas (Gilmore, 2010).

Más recientemente, vanMarle et al. (2014) estudiaron si la precisión del SNA explica el rendimiento matemático controlando otros factores que consideraban predictivos del aprendizaje: específicamente evaluaron sexo, educación de los padres, inteligencia, control ejecutivo y habilidades pre-lectura. Evaluaron en niños de 3-4 años las relaciones entre la agudeza del SNA y el aprendizaje de las competencias simbólicas cuantitativas. Además de utilizar la tarea de comparación de magnitudes no simbólicas, incluyeron 11 pruebas más, 7 de las cuáles requerían cierto conocimiento simbólico. Los resultados confirman una relación entre la ejecución matemática y la precisión del SNA, al menos en niños pequeños. La precisión del SNA se calculó a partir de la fracción de Weber y ésta correlacionaba significativamente con la ejecución matemática (TEMA-3) al final del años de Infantil, incluso controlando la edad, sexo, educación de los padres, inteligencia, control ejecutivo y conocimiento verbal. A pesar de estas evidencias, el estudio no permite saber si esta relación se mantiene en niños más mayores. Por otro lado, proponen que la precisión del SNA puede facilitar la comprensión inicial del significado de palabras numéricas o numerales en niños muy pequeños, pero no podemos relacionarlo directamente con un progreso en matemáticas por encima y más allá de estas relaciones, ya que la conexión entre el SNA y la ejecución matemática puede estar mediada por el conocimiento simbólico, aspecto que desarrollaremos más extensamente en el siguiente apartado.

Es importante señalar, sin embargo, que estas correlaciones entre la precisión del SNA y la ejecución matemática encontradas en los estudios revisados no revelan una relación causal entre la representación de la magnitud no simbólica y la ejecución matemática. Intentando trazar una relación causal más fuerte, recientemente algunos investigadores han demostrado que “entrenar” la aritmética aproximada (e.g., estimando la suma de dos o más conjuntos de puntos) mejora las puntuaciones en los test de competencia matemática tanto en adultos (Park & Brannon, 2013, 2014) como en niños (Hyde, Khanum & Spelke, 2014). Estos trabajos apuestan porque la habilidad que tienen los niños para representar magnitudes no simbólicas conforma el inicio a partir del cual se desarrollan habilidades matemáticas más sofisticadas. En línea con esto, Hyde et al. (2014) entrenaron a un grupo de niños de seis y siete años en una tarea de sumas numéricas no simbólicas y posterior al entrenamiento evaluaron los efectos de este entrenamiento sobre la velocidad y aciertos entareas se sumas simbólicas. Para comprobar la especificidad de la intervención, los autores entrenaron a otros grupos de niños en tareas de sumas no simbólicas pero no numéricas, como brillo y longitud de líneas. Sus resultados mostraron que aquellos que practicaron en tareas de sumas numéricas no simbólicas rindieron mejor en tareas aritméticas simbólicas que aquellos entrenados en la manipulación de magnitudes no numéricas. Además, el entrenamiento en tareas numéricas no simbólicas solo afectó al dominio de las matemáticas, ya que los mismos efectos no se encontraron cuando se midió en una tarea de completar frases. Así, los efectos observados son explicados por una relación especializada entre el SNA y las matemáticas y no por otros factores que pudieran mediar, como los efectos de la práctica sobre la motivación de los niños. Estos resultados van más allá de lo encontrado en los estudios correlacionales y sugiere que ejercitando procesos numéricos no simbólicos mejora la ejecución de las matemáticas simbólicas.

No obstante, todavía debemos tener cierta prudencia a la hora de poder interpretar estos resultados. En primer lugar, porque aún no está claro cómo se lleva a cabo este proceso de conexión entre el SNA y las matemáticas simbólicas. Además, otros estudios han demostrado que realizar este entrenamiento y evaluando a través de tareas de comparación de puntos, no mejora la ejecución matemática simbólica (e.g., Cohen, Cohen & Dehaene, 2006). Esto plantea la posibilidad de que lo que mejora el rendimiento en la habilidad matemática simbólica es la manipulación que hagamos con magnitudes no simbólicas (en un contexto explícitamente aritmético), y no un incremento en la precisión de dichas magnitudes (Ver Park & Brannon, 2014, para una mayor explicación).

En definitiva, desde los diferentes estudios que llevamos revisados se asume que las diferencias individuales en la ejecución matemática están intimamente relacionadas con las diferencias individuales en la precisión con la que somos capaces de procesar magnitudes no simbólicas. Especialmente a partir de los trabajos del grupo de Libertus, Halberda, Mazzocco y Feigenson los autores han intentado demostrar en sucesivos estudios, desde el original de Halberda et al. (2008) hasta los más recientes de Libertus et al. (2013a y b) que la precisión del SNA predice la ejecución en matemáticas tanto en niños al inicio de la edad escolar, al final de este periodo, en niños que aún no han comenzado la enseñanza formal de las matemáticas, incluso en adultos, como veremos más adelante (e.g., Halberda, Ly, Willme, Naiman, & Germine, 2012; Libertus, Odic & Halberda, 2012) o en niños con discalculia, como también veremos (e.g., Mazzocco, Feigenson, & Halberda, 2011a). Más aún, algunos trabajos han intentado establecer una relación causal entre el SNA y la aritmética simbólica, aunque estos trabajos hay que tomarlos con cautela dada la escasez de los mismos.

3.2 EL ACCESO A LA SEMÁNTICA DEL NÚMERO

A pesar de las evidencias anteriores, otras investigaciones han fracasado en encontrar una relación entre la precisión entre las diferencias individuales en el SNA y las diferencias individuales el la ejecución matemática simbólica (e.g., De Smedt & Gilmore, 2011; Holloway & Ansari, 2009; Kolkman et al., 2013; Sasanguie, De Smedt, et al., 2012; Sasanguie, Göbel, et al., 2013; Soltész et al., 2010; Vanbinst et al., 2012). Desde estos estudios se asume que no son las representaciones de la numerosidad –medidas a través de la precisión del SNA– las que se relacionan con la ejecución matemática, sino el ***acceso*** a esas representaciones desde los números simbólicos (el acceso al significado, a la semántica del número; e.g., Rousselle & Nöel, 2007). Cómo hemos mencionado en otras partes de este trabajo, los números simbólicos reflejan magnitudes, y sería esta representación simbólica de la magnitud la que realmente se relaciona con el desarrollo en matemáticas. En estos estudios que veremos a continuación, las medidas de las representaciones de la magnitud no simbólica normalmente se acompañan de medidas de las representaciones de la magnitud simbólica. Como decíamos en el Capítulo anterior (*Midiendo el Sistema Numérico Aproximado*), en las tareas que miden estas representaciones de la magnitud simbólica se producen los efectos distancia y ratio, los cuales también decrecen con la edad (Holloway & Ansari, 2008). Cuando se han analizado estos efectos en tareas de procesamiento numérico simbólico y no simbólico, se ha encontrado que la precisión del SNA no explica las diferencias en la ejecución matemática más allá de lo explicado por la precisión de las representaciones de la magnitud simbólica.

En este contexto, uno de los primeros estudios que analizó la hipótesis del acceso a las representaciones de la magnitud desde los números simbólicos en contraposición a la precisión del SNA fue el llevado a cabo por Holloway y Ansari (2009), quienes se plantearon si la relación entre las habilidades matemáticas y el procesamiento de la magnitud numérica es debida a las diferencias individuales presentes en la precisión de la representación de la magnitud, o si por el contrario se debía a la habilidad para acceder a la magnitud numérica desde símbolos abstractos como son los números arábigos. Una relación entre las habilidades matemáticas y la representación de la magnitud sólo desde el procesamiento de los números simbólicos sugeriría que no es la representación de la magnitud *per se*, sino el acceso a esa magnitud desde el procesamiento simbólico de los números. El objetivo del presente estudio fue doble. Desarrollaron su estudio apartir de los trabajos de Booth y Siegler (2006; Siegler y Booth, 2004, ver más adelante) en los que demostraron que las estimaciones en la línea numérica se relacionaban con la jececución matemática. Según Holloway y Ansari (2009) la estimación en la línea numérica refleja sólo algunos aspectos de la representación de la magnitud; y además, en esta tarea no se analiza el rol del procesamiento numérico no simbólico. Por ello, los autores emplearon una tarea de comparación numérica en sus versiones simbólica y no simbólica. En ambas tareas los estímulos estaman compuestos de cantidades desde 1 hasta 9 en versión dígitos o en versión conjuntos de puntos (en este caso cuadrados) que aplicaron a niños de 6 y 8 años de edad. Tomaron como medidas los tiempos de reacción y aciertos de los niños en ambas tareas, e incluyeron como medida específica de representación de la magnitud el efecto de distacia. Evaluaron como medidas estandarizadas de sus habilidades matemáticas fluidez de cálculo y cálculo sin tiempo (Test de ejecución Woodcock–Johnson III). También recogieron medidas estandarizadas de la lectura de los participantes para evaluar la especificidad de las relaciones posibles entre el Efecto de la Distancia y la ejecución en matemáticas.

El análisis inicial en los dos grupos de edad reveló una relación entre la competencia matemática de los niños y el tamaño de su efecto distancia simbólica calculado a partir de los tiempo de reacción; efectos de distancia grandes se asociaron con puntuaciones relativamente bajas en los test de matemáticas (ver tabla 3.1).

Step	Mathematics Fluency				Calculation			
	Predictor	β	R^2	ΔR^2	Predictor	β	R^2	ΔR^2
1	Age	−.147	.009	.009	Age	−.174	.008	.008
2	Symbolic mean RT	−.401**	.129	.142**	Symbolic mean RT	−.108	.029	.021
3	Nonsymbolic NDE	.063	.129	.011	Nonsymbolic NDE	−.126	.032	.003
4	WJ reading SS	.294**	.209	.087**	WJ reading SS	.374**	.170	.125**
5	Symbolic NDE	−.236*	.251	.049*	Symbolic NDE	−.190	.202	.032

Note. RT, response time; NDE, numerical distance effect; WJ, Woodcock–Johnson III battery; SS, standard score.
* $p < .05$.
** $p < .01$.

Tabla 3.1: Análisis de Regresión Jerárquica del estudio de Holloway y Ansari (2009)

Estos resultados sugieren que la capacidad básica para discriminar la magnitud relativa de un número estaría asociada a la capacidad del individuo para realizar operaciones aritméticas simples. Esta especificidad sugiere que la relación entre la ejecución matemática y del efecto distancia es impulsada por los procesos implicados en el acceso al significado de los números arábigos. La ausencia de una correlación entre la tarea de comparación de magnitudes no simbólicas y las puntuaciones en los test estandarizados, así como la correlación no significativa entre los efectos distancia simbólicos y no simbólicos, sugiere diferentes trayectorias de desarrollo del procesamiento y representación de magnitud numérica simbólica y no simbólica. Además, la falta de correlaciones significativas entre los efectos distancia simbólica y no simbólica pone en duda la hipótesis de que la representación numérica simbólica y representación numérica no simbólica están fuertemente relacionadas (Dehaene, 1997) y sugiere la existencia de diferentes representaciones subyacentes de magnitud numérica simbólica y no simbólica. Además, la relación entre el tamaño del efecto distancia y las diferencias individuales en el rendimiento en matemáticas cambió con la edad. En concreto, los resultados de las correlaciones separadas por grupo de edad indican que existe una relación entre la ejecución matemática y el efecto distancia, principalmente en los niños de 6 años y se ve disminuida a los 8 años de edad. Esto podría sugerir que la comprensión básica numérica es particularmente predictiva del rendimiento en matemáticas a una edad en que los niños están al inicio de la instrucción de las matemáticas formales.

Así, Holloway y Ansari (2009) fueron los primeros en demostrar que el efecto del tamaño distancia se relaciona con diferencias individuales en la ejecución matemática de los niños, y la relación sólo se encontró en la tarea de comparación simbólica. Por lo tanto, la fluidez con la que se accede al significado de los números arábigos parece ser un aspecto importante de la ejecución matemática.

En un estudio similar, De Smedt, Verschaffel y Ghesquière (2009) siguieron el mismo razonamiento, pero fueron más allá al plantear un estudio longitudinal en donde examinaron la asociación entre la comparación numérica al inicio de la escolaridad formal (es decir, al inicio del primer grado) y la ejecución en matemáticas 1 año después. Debido a que la evaluación de la comparación numérica no está influenciada por la educación matemática formal en la escuela primaria, esto permitiría examinar si las diferencias individuales en la capacidad de comparar los números puede predecir el rendimiento en matemáticas posteriormente. Los niños completaron una tarea de comparación numérica (1-9) al comienzo del primer grado tomando aciertos, TRs y efecto de distancia medido a partir de la pendiente de la regresión entre distancia y TRs. Los resultados de ejecución en matemáticas se recogieron 1 año más tarde en el inicio del segundo grado a partir de un test de ejecución matemática basado en el curriculum que cubría conocimiento numérico y comprensión de operaciones. También se incluyeron dos medidas de control en este estudio. En primer lugar, esta asociación se podría explicar por la *velocidad de procesamiento general*. Para controlar este efecto, se administró una tarea de lectura de números. Por otra parte, esta tarea proporciona un control adicional de las diferencias individuales en la identificación de números que podrían llegar a confundirse con las diferencias individuales en la tarea de comparación numérica. En segundo lugar, se podría explicar por la *capacidad intelectual*. Por lo tanto, se incorporó una medida de inteligencia general como variable de control (Matrices Progresivas de Raven).

Tabla 3.2: Análisis Regresión Jerárquica ***(TR)*** de la predicción del rendimiento matemático en segundo grado.

Step	Variable	Beta	t	Unique R^2	Total R^2
1	Age	.18	1.13	.03	.03
2	Raven's matrices	.30	1.92	.07	.10
3	Number reading reaction time	−.27	−1.76	.07	.17
4	Number comparison slope	.34	2.15	.10*	.27*

* $p < .05$.

Tabla 3.3: Análisis Regresión Jerárquica ***(Eficacia)*** de la predicción del rendimiento matemático.

Step	Variable	Beta	t	Unique R^2	Total R^2
1	Age	.18	1.13	.03	.03
2	Raven's matrices	.30	1.92	.07	.10
3	Number reading accuracy	.31	2.01	.09	.19
4	Number comparison accuracy	.31	1.83	.07	.26

Los resultados (ver tablas 3.2 y 3.3) mostraron que el efecto distancia medido a partir de la pendiente de la regresión entre distancia y TR predice la ejecución matemática independientemente de la edad la inteligencia y la velocidad identificando números. Estos resultados coinciden con los de Holloway y Ansari (2009) y sugieren que las conexiones entre los números y sus significados (magnitudes) son importantes para el desarrollo de las matemáticas. No obstante, la relación disminuyó cuando se consideraron las medidas de aciertos, lo que indicaría que es la fluidez y velocidad con la que se accede a la magnitud numérica lo que predice la ejecución matemática. Sin embargo, una limitación del presente trabajo es que no tomaron medidas de representación no simbólica de las cantidades.

En un intento de añadir nueva información, Soltész, Szücs y Szücs (2010) examinaron la relación entre la ejecución matemática, y la representación no simbólica de magnitudes en niños de 4 a 7 años de edad. Como novedad los autores plantearon una prueba de comparación de magnitudes no simbólicas, con estímulos por encima del rango de subitizing, en los que en vez de controlar las características no numéricas de los estímulos (área, perímetro, densidad, etc.), que de acuerdo a los autores siempre correlacionarán con el número (ver el Capítulo II de esta tesis para una discusión de esta cuestión), lo que hicieron fue manipular la variable congruencia para controlar las variables no numéricas de los estímulos: la mitad de los ensayos fueron congruentes (i.e., las variables no numéricas correlacionaban con la numerosidad) y la otra mitad incongruentes. Además, evaluaron conocimiento del número, fluidez verbal, memoria de trabajo, habilidades de conteo y operaciones simples de cálculo. Sus resultados mostraron que la comparación de magnitudes no simbólicas no correlacionó con las tareas relacionadas con el conocimiento numérico y aritmética. Además, los niños de más edad ejecutaron con éxito la tarea de comparación de magnitudes no simbólicas, mostrando los patrones típicos de ejecución como el efecto ratio. Sin embargo, los niños más pequeños tuvieron dificultades para discriminar los conjuntos independientemente de las variables no numéricas irrelevante para la numerosidad. Los autores sugieren que los niños más pequeños tienen más dificultades para inhibir la información irrelevante de la tarea. Estos resultados son consistentes con un reciente estudio de Fuhs y McNeil (2013) en el que analizaron en niños preescolares la relación entre la agudeza del SNA y la ejecución matemática a través del TEMA-3. Las autoras también aplicaron una prueba de control inhibitorio y otra de vocabulario receptivo. Sus resultados mostraron una asociación pequeña entre la agudeza del SNA y las habilidades matemáticas pero sólo para los ensayos en los que el área de los puntos entraba en conflicto con la numerosidad (ensayos incongruentes en términos de Soltész et al. (2010). Además, la asociación dejó de ser significativa cuando se incluyó en la predicción el control inhibitorio, sugiriendo que la relación entre la agudeza del SNA y las habilidades matemáticas estaría mediada por el control inhibitorio en niños pequeños.

Estos estudios anteriores (i.e., Soltész et al., 2010; Fuhs & McNeil, 2013) sugieren que la congruencia/incongruencia de los estímulos interviene en la ejecución de las tareas de comparación de magnitudes no simbólicas. Este "efecto de congruencia" tiene relación con el conocido como paradigma "Stroop numérico" dentro del campo del procesamiento numérico, pero en este caso con números simbólicos. En la tarea estándar de este paradigma los participantes comparan dos dígitos arábigos que varían no sólo en su valor numérico sino también en su tamaño físico. Los participantes tienen que comparar la magnitud numérica mientras se ignora el tamaño físico. Los ensayos pueden ser congruentes, donde el número numéricamente mayor es también físicamente mayor (e.g., 2 7); incongruentes, donde el número numéricamente mayor es físicamente más pequeño (e.g., 2 7); o neutros (e.g., 2 2 para la comparación física, o 2 7 para la comparación numérica). Los típicos resultados en esta tarea muestran tiempos de respuesta más largos para los ensayos incongruentes que para los congruentes. Y los efectos se toman como un indicadores de que la magnitud numérica (la semántica del número) se procesa automáticamente. En este contexto, Bugden y Ansari (2011) se plantearon hasta qué punto diferencias individuales en este procesamiento automático de la magnitud numérica se relacionan con la ejecución matemática en comparación con la típica tarea de comparación de magnitudes simbólicas que suponen un procesamiento intencional de dicha magnitud. Los autores aplicaron ambas tareas (i.e., comparación simbólica de dígitos 1 a 9 y los mismos números presentados en una tarea de Stroop numérico) a niños de 6 y 7 años junto con una tarea de ejecución matemática (Test de ejecución Woodcock–Johnson III). En las tareas de procesamiento automático e intencional tomaron como medida el efecto de ratio. Sus resultados indicaron, en consonancia con estudios previos (e.g., Holloway & Ansari, 2009; De Smedt et al., 2009) que el procesamiento intencional de la magnitud numérica se relaciona con las puntuaciones de competencia matemática; esto es, una pendiente más pronunciada relacionando ratios y tiempos de respuesta (i.e., mayor efecto ratio) tuvieron puntuaciones más bajas en ejecución matemática, pero estos efectos no fueron encontrados en la tarea de Stroop numérico. Además, las medidas de procesamiento intencional y automático de la magnitud numérica no correlacionaron entre sí. De acuerdo con los autores, es importante diferenciar diferentes procesos implicados en el procesamiento de la magnitud numérica y su relación con el aprendizaje de la aritmética.

Hasta ahora estamos viendo que las diferencias individuales para comparar magnitudes simbólicas se relacionan con la ejecución matemática. En estos estudios las habilidades matemáticas se han evaluado a partir de pruebas estandarizadas (e.g., Test de ejecución Woodcock–Johnson III; TEMA-3). Otro trabajos se han planteado analizar estas relaciones en aspectos específicos de la ejecución matemática. Por ejemplo, Vanbinst, Ghesquière y De Smedt (2012) centraron su trabajo en estudiar cómo las representaciones de la magnitud numérica contribuyen a un aspecto crucial y específico en el desarrollo de las matemáticas; el uso que hacen los niños de las estrategias al resolver operaciones matemáticas simples (sumas y restas de un dígito). En este campo aún no se había investigado específicamente la asociación entre el uso de la estrategia en aritmética y las representaciones numéricas de la magnitud,. Para probar este planteamiento, niños de tercer grado completaron la tarea de comparación de magnitudes de 1 a 9 en ambos formatos –dígitos y conjuntos de puntos– así como un tarea de sumas y restas de un solo dígito. Cuando resolvían la operación correspondiente, además se les pidió que informaran de la estrategia que habían utilizado para hallar el resultado[2] -recuperación o estrategia- en cada ensayo. Tomaron otras medidas de control como la capacidad intelectual general (Matrices Progresivas de Raven, nombrado de dígitos y ejecución matemática general basada en el curriculum). Los resultados demostraron, por primera vez, que el procesamiento numérico está relacionado con las diferencias individuales en el uso de estrategias procedimientos en aritmética de un solo dígito hasta 20, pero sólo el procesamiento simbólico (ver Figura 3.3). Los niños con mejor acceso a la representación de magnitudes (medida a parir del efecto de distacia) desde los dígitos recuperan más hechos matemáticos aritméticos en desde la memoria, lo hacen más rápidos y son más precisos, y también son más rápidos ejecutando estrategias de cálculo. Y estas asociaciones entre procesamiento de la magnitud numérica desde los números simbólicos y el uso de estrategias de cálculo se mantienen incluso cuando se controla la inteligencia, la velocidad para nombrar dígitos y las habilidades matemáticas más generales. Por lo tanto, el acceso a la magnitud numérica desde los dígitos parace jugar un papel importante en el desarrollo de estrategias aritméticas.

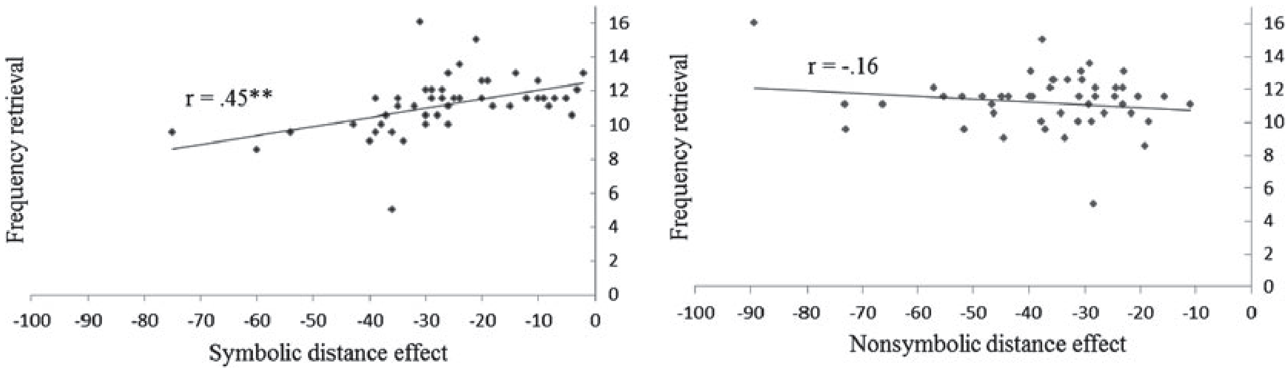


Figura 3.3: Gráficos de dispersión que nos muestran las asociaciones entre la frecuencia media de recuperación tienen los niños y el efecto distancia simbólico (a) y los efectos distancia no simbólicos (Tomado de Vanbinst et al., 2012)

Estos datos, sin embargo son de naturaleza concurrente, y no nos permiten inferir si las habilidades de procesamiento numérico preceden a la aritmética en niños que se encuentran en pleno desarrollo de estrategias aritméticas. En un estudio reciente llevado a cabo por los mismos autores (Vanbinst Ghesquière y De Smedt, 2015) tuvieron como

[2] La recuperación (retrieval) es más evidente en cantidades pequeñas que cuando operan con números grandes. En estos casos, la operación se resuelve con alguna estrategia y no de manera automática.

objetivo estudiar esta relación con un diseño longitudinal[3]; comprobar si el procesamiento numérico en primer grado (al inicio de la escolarización obligatoria) predice la eficiencia ejecutando estrategias aritméticas y recuperación de hechos posteriormente (en mitad del primer curso y al inicio del segundo). Los resultados van en la línea de lo que encontraron con medidas concurrentes: el acceso a la representación de magnitudes desde los dígitos predice la competencia en aritmética básica, esto es, uso eficaz de estrategias de cálculo y mayor confianza en la recuperación de hechos, y esta relación va más allá de lo explicado por la inteligencia, las habilidades matemáticas generales previas, la velocidad de procesamiento o la memoria de trabajo verbal o viso-espacial. Por lo tanto, las habilidades de procesamiento numérico simbólico precedería el desarrollo de estrategias eficaces de cálculo elemental.

Hasta ahora los estudios revisados se han centrado en analizar las relaciones entre procesamiento de magnitudes y ejecución matemática a partir de tareas de comparación numérica. Sin embargo, en el Capítulo anterior (*Capítulo II: Midiendo el Sistema Numérico Aproximado*) anticipábamos que el efecto distancia típico de las tareas de comparación puede no reflejar representación de la magnitud, sino que para algunos autores refleja procesos de decisión sobre las representaciones activadas desde los números (e.g., Cohen Kadosh et al., 2008; Van Opstal et al., 2008; Van Opstal & Verguts, 2011). En este sentido, se proponía que una forma de evitar esta confusión entre solapamiento representacional y procesos de decisión es utilizar una tarea de emparejamiento numérico como la tarea igual/diferente (Dehaene & Akhavein 1995; Cohen Kadosh et al., 2008; Van Opstal & Verguts, 2011) en la que los participantes tienen que decidir si dos magnitudes presentadas simultáneamente son la misma o diferente. Recordemos que en esta tarea se produce también un efecto de distancia que reflejaría solapamiento representacional (pero ver Goldfarb et al., 2011). A partir de estas consideraciones, Defever et al. (2012) utilizaron una tarea igual/diferente en distintos formatos (simbólico, no simbólico y mixto –dígitos y puntos–) para analizar dos cuestiones: si el efecto distancia encontrado en adultos se da también en niños, y si este efecto se relaciona con la ejecución matemática. Respecto a la primera cuestión aplicaron una tarea igual/diferente simbólica (dígitos de 1 a 9) y no

[3] Se utilizaron las mismas tareas y variables de control que el trabajo de Vanbinst et al. (2012). Los participantes completaron una prueba de rendimiento en matemáticas estandarizada basada en el currículo general al inicio de la escuela primaria -que evalúa las habilidades matemáticas de los niños al inicio de la instrucción-.También evaluaron tres predictores cognitivos no numéricos, es decir, la memoria de trabajo verbal, memoria visoespacial y velocidad de procesamiento. Para descartar posibles efectos de la capacidad intelectual, también se administraron una medida de inteligencia.

simbólica (puntos de uno a nueve) a niños de preescolar, primero, segundo, y sexto grado. Sus resultados mostraron que el efecto distancia sólo se producía en el formato no simbólico, con tiempos de respuesta más rápidos con distancias más largas, pero este efecto no se relacionó con la ejecución matemática. En la versión simbólica se produjo un efecto de similaridad física similar al encontrado por Cohen (2009) en adultos (ver Capítulo II) pero no un efecto distancia basado en la magnitud, por lo que esta tarea no sería adecuada para evaluar representación de la magnitud. No obstante, en un segundo experimento eliminaron la influencia de la similaridad física utilizando un formato mixto (dígitos y puntos). En este caso sí encontraron un efecto de distancia, y este efecto no se relacionó con la ejecución matemática, aunque sí encontraron una relación entre los tiempos de respuesta en la tarea y la ejecución matemática, lo cual sugeriría, en palabras de los autores, que lo que se relaciona con la ejecución matemática es la habilidad para asociar números simbólicos con sus magnitudes, más que el proceamiento de la magnitud per se. Esta explicación está en línea con otros trabajos que revisaremos más adelante (e.g., Bartelet et al., 2014).

La tarea de notación mixta utilizada por Defever et al. (2012) en realidad refleja una proyección entre los números simbólicos y sus magnitudes. Pero algunos estudios han utilizado tareas que directamente analizan estas habilidades de proyección. Aunque la tarea por excelencia para analizar proyecciones entre números y magnitudes sea la tarea de estimación (presentar un conjunto de puntos y estimar el número), esta tarea es difícil para los niños (Lipton & Spelke, 2005), por lo que Mundy y Gilmore (2009) utilizaron una tarea novedosa y más estructurada en la que a niños entre 6 y 8 años se les presentaba una cantidad entre 20 y 50 (bien simbólica o no simbólica –puntos–, dependiendo de la dirección de la proyección) y tienen que elegir entre dos alternativas (no simbólicas o simbólicas) que refleje dicha cantidad. La dificultad se manipula variando la ratio entre las dos alternativas (.50 y .66). Sus resultados mostraron que los niños eran capaces de resolver la tarea más allá del azar. Pero lo más importante, estas habilidades de proyección se relacionaron con la ejecución matemática más allá de lo explicado por las más utilizadas tareas de comparación.

Dado que los mecanismos de proyección pueden operar de manera distinta para cantidades grandes que para cantidades pequeñas (e.g., Sullivan & Barner, 2013), Brankaer et al. (2014) propusieron una tarea similar a la de Mundy & Gilmore (2009) pero en este caso con cantidades pequeñas de 1 a 9. Es decir, en la tarea de proyección desde simbólico a no simbólico se presentaba un número simbólico junto con dos conjuntos simbólicos (uno coincidente con el número y el otro con una distancia de 1 o 3) y los niños (entre 6 y 8 años) tenían que elegir qué conjunto correspondía con el número. En la versión de la proyección desde lo no simbólico a lo simbólico, se presentaban las mismas numerosidades pero ahora se presentaba un conjunto de puntos junto con dos números simbólicos para elegir cuál de estos nímeros correspondía con el conjunto de puntos. Los autores analizaron hasta qué punto la ejecución en esta tarea se relacionaba con las habilidades matemáticas de un test estandarizado de fluidez de cálculo y un test estandarizado sin tiempo de conocimientos curriculares (conocimiento numérico, aritmética elemental, resolución de problemas, medida y geometría). Extendiendo los resultados de Mundy y Gilmore (2009), los autores encontraron una asociación entre las habilidades de proyección y la ejecución matemática dependiendo de la edad y el tipo de test de matemáticas utilizado. En los niños más pequeños las habilidades de proyección se relacionaron con el test estandarizado sin tiempo que evalúa conocimientos generales matemáticos, mientras que en los niños más mayores la asociación entre las habilidades de proyección y las matemáticas se produjo en el test de fluidez de cálculo. Y estas asociaciones se produjeron más allá de lo explicado por una tarea de comparación de magnitudes.

Otra tarea de proyección ampliamente utilizada ha sido la estimación en la línea numérica, es decir, presentar una cantidad numérica simbólica y pedir a los participantes que localicen su posición en una línea numérica (Siegler y Booth, 2004). Además, como decíamos anteriormente, las tareas clásicas de estimación de cantidades (estimar un conjunto de puntos) no son sencillas para los niños, por lo que esta tarea también puede ser una buena alternativa para analizar las habilidades de proyección desde una tarea de estimación. Estos trabajos se han interesado por la relación entre la edad y los cambios que se experimentan en las representaciones de las magnitudes numéricas. Con la edad y la experiencia, los niños realizan las tareas confiando primero en representaciones logarítmicas de las magnitudes numéricas para evolucionar después a representaciones lineales (Booth & Siegler, 2006; Geary, Hoard, Byrd-Craven, Nugent & Numtee, 2007; Opter, Thompson & DeVries, 2007; Siegler & Booth, 2004; Siegler & Opfer, 2003). Booth & Siegler mostraron los cambios asociados al desarrollo y edad en la tarea de recta numérica estarían relacionados con las diferencias individuales en la ejecución matemática (Booth & Siegler, 2006; Booth & Siegler, 2004) y con la habilidad que tienen para aprender nueva información numérica –problemas aritméticos– (Booth & Siegler, 2008). Encontraron cambios de patrones logarítmicos a lineales en las estimaciones en recta/línea numérica; las estimaciones de los niños de prescolar y primer grado responden a un patrón claramente logarítmico (Figura 3.4). Por ejemplo, para estos niños la distancia psicológica entre 0 y 25 es mayor que la distancia entre 25 y 100. En niños de segundo grado, las estimaciones siguen un patrón más lineal donde las distancias entre las magnitudes son más equidistantes. Estos cambios en el patrón de representación, se producen en líneas numéricas de diferentes tamaños; 0-10 (Petito, 1990), 0-100 (Siegler & Booth, 2004, 2008) y 0-1000 (Siegler & Opfer, 2003).

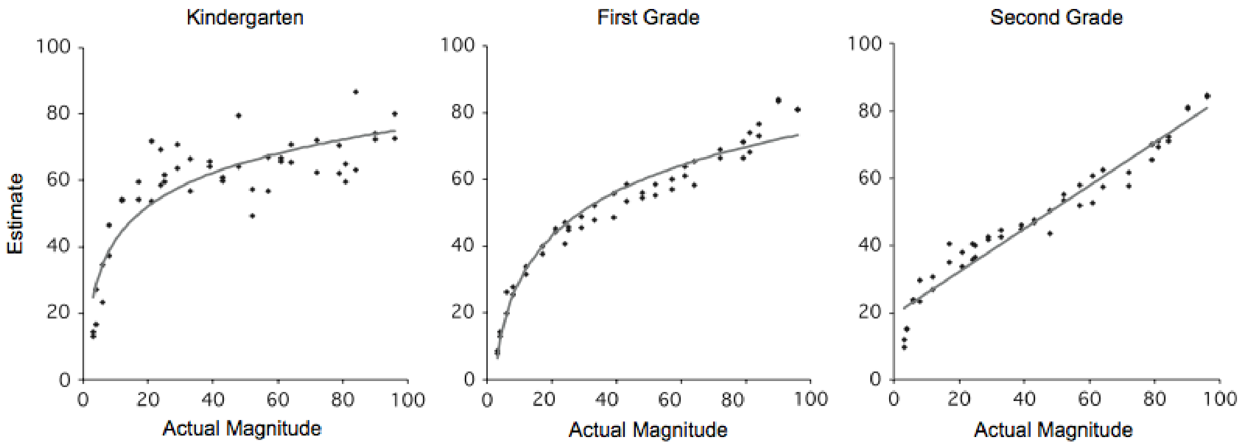


Figura 3.4: Medias de las estimaciones en recta numérica del trabajo de Booth y Siegler (2004)

Un paso más, partiendo de este mismo planteamiento, sería considerar si la linealidad de las representaciones de magnitudes numéricas influyen en el aprendizaje de la aritmética. Booth & Siegler (2008) comprobaron que las habilidades de estimación en la recta numérica una mayor linealidad de las estimaciones) no solo correlacionaba con el conocimiento numérico de los niños (medido con el test estandarizado WRAT), sino que además predecía el éxito en la resolución de problemas aritméticos no familiares después de controlar el conocimiento aritmético previo y la memoria a corto plazo para números.

Algunos trabajos han combinado la tarea de estimación en la línea numérica con otras tareas relacionadas con el procesamiento de magnitud numérica. Como veíamos en el Capítulo II, se han utilizado diferentes tareas para analizar el procesamiento y representación de la magnitud numérica, las cuales pueden reflejar distintos procesos numéricos básicos. Por ello, algunos trabajos han comenzado a combinar diferentes tareas en un mismo estudio para contrastar cuáles de ellas se relacionan más directamente con la ejecución matemática. Por ejemplo, Sasanguie et al. (2012) incluyeron en un mismo estudio tareas de comparación simbólica y no simbólica (estímulos de 1 a 9) y tareas de estimación (1-10 o 1-100 dependiendo de la edad de los niños) que presentaron en versión simbólica similar a los estudios previos (e.g., Booth & Siegler, 2004) y en versión no simbólica, en la que los números eran sustituidos por conjuntos de puntos[4]. Las tareas se aplicaron a niños de preescolar, primero, segundo y sexto grado junto con tareas de control como deletreo. Para analizar la relación entre las tareas de procesamiento de la magnitud y la ejecución matemática aplicaron un test de ejecución basado en el curriculum (conocimiento numérico, aritmética elemental, resolución de problemas, medida y geometría). Sus resultados mostraron los patrones típicos encontrados en los estudios previos, como un decremento del efecto distancia con el aumento de la edad en las tareas de comparación (e.g., Holloway & Ansari, 2009), y representaciones más lineales en los niños mayores cuando estimaron en la recta numérica (Booth & Siegler, 2008). Además, encontraron una asociación entre la tarea de comparación simbólica (pero no en la no simbólica) y la ejecución matemática, que fue más fuerte en los niños más pequeños, posiblemente debido a que los niños más pequeños están en proceso de proyectar los números simbólicos en las representaciones no simbólicas (Mundy & Gilmore, 2009). También encontraron una asociación entre las habilidades de estimación en la recta numérica (patrones de estimación lineales) con la ejecución matemática en ambas versiones (simbólica y no simbólica) de la tarea. No obstante, ambas versiones tuvieron una alta correlación, por lo que analizaron correlaciones parciales que indicaron que la asociación entre ejecución matemática y la tarea simbólica se mantuvo cuando se controló la ejecución no simbólica, mientras que la asociación entre ejecución matemática y la tarea no simbólica desapareció cuando se controló la ejecución simbólica. Tomados juntos, los resultados son consistentes con la visión de que las diferencias individuales en la ejecución matemática se relacionan con el acceso a la representación de la magnitud desde los números simbólicos y no con la representación de la magnitud per se.

En un trabajo posterior, Sasanguie, Göbel, Moll, Smets y Reynvoet (2013) replicaron este estudio sustituyendo la tarea de comparación no simbólica con cantidades de 1 a 9 por una tarea de precisión del SNA con numerosidades grandes en la que utilizaron como medida la fracción de Weber (similar a lo utilizado por Haberda, Libertus y colaboradores). Además, junto a la tarea de ejecución matemática basada en el curriculum utilizaron un test de fluidez aritmética, y las relaciones entre representación de la magnitud

[4] En este caso, los extremos de la línea estaban etiquetados por un cículo vacío para representar 0 y por un círculo conteniendo 10 o 100 puntos.

y ejecución matemática fueron analizadas en un estudio longitudinal de un año. Los resultados mostraron una asociación entre la tarea de comparación simbólica y las dos medidas de ejecución matemática. Además, las estimación en la línea numérica simbólica se relacionó con la ejecución en el test estandarizado basado en el curriculum. Sin embargo, otra vez la comparción no simbólica no mostró ninguna asicación con la ejecución matemática, a pesar de utilizar una medición más fina de la precisión del SNA.

Otros estudios más recientes han continuado con la línea de utilizar un rango amplio de tareas implicadas en el procesamiento y representación de la magnitud para analizar su relación con la ejecución matemática. Es el caso del estudio de Bartelet et al. (2014), en el que aplicaron a una amplia muestra de niños de preescolar una prueba de comparación simbólica y no simbólica con numerosidad e de 1 a 9 y de 10 a 39, junto con una tarea de enumeración de puntos y una tarea de estimación, controlando inteligencia (matrices progresivas de Raven) y velocidad de procesamiento. Un año más tarde fueron evaluados en ejecución matemática con un test estandarizado de fluidez aritmética. Pero quizás la novedad más importante de este estudio es que diferenciaron medidas de eficacia de medidas relacionadas con la representación de la magnitud. En las primeras utilizaron proporción de aciertos, tiempos de respuesta y una medida combinada de aciertos/tiempos de respuesta, mientras que en las segundas utilizaron el efecto ratio para las tareas de comparación simbólica y no simbólica, la pendiente de la regresión sobre tiempos de respuesta en el rango de subitizing y de conteo en la tarea de enumeración, y el coeficiente de variación en la tarea de estimación. En consonancia con los estudios que venimos revisando, el análisis de regresión jerárquica reveló que la comparación simbólica, la enumeración y la estimación predijeron las diferencias individuales en fluidez aritmética más allá de la inteligencia y velocidad de procesamiento, mientras que la comparación no simbólica no contribuyó a la varianza de la fluidez aritmética. Pero este estudio aportó a lo revisado hasta el momento que las relaciones de estas tareas simbólicas y la ejecución en aritmética se produjeron solamente cuando se consideraron medidas de eficacia y no cuando se consideraron los efectos específicos de las tareas que miden representación de la magnitud (e.g., efecto de ratio). Este resultado es interesante, porque indicaría que no es tanto el acceso a la representación de la magnitud desde los números simbólicos o la agudeza de esas representaciones lo que se relaciona con la ejecución matemática, sino la eficacia para procesar magnitudes simbólicas. Como revisábamos en el Capítulo II, algunos autores (e.g., Lyons et al., 2012; Sasanguie et al., 2013) plantean dos sistemas separados para las magnitudes simbólicas (exactas) y no simbólicas (aproximadas). Desde este estudio se sugiere que las diferencias individuales en la ejecución matemática se relacionarían con el sistema representacional simbólico exacto (volveremos sobre esta cuestión más adelante).

Nos gustaría terminar esta revisión de las relaciones entre representación de la magnitud y su relación con la ejecución matemática en niños con un estudio que refleja la dinámica de los últimos estudios que estamos describiendo. Lyons, Price, Vaessen, Blomert y Ansari (2014) plantean que dada la variabilidad de la naturaleza de los estudios, puede resultarnos muy complejo llegar a conclusiones claras sobre el papel que tienen las habilidades simbólicas y no simbólicas de procesamiento numérico en la ejecución matemática. Algunos de esos estudios (parte de ellos los hemos revisado aquí) han empleado diferentes tipos de tareas esto no nos permite comprender con claridad qué habilidades numéricas serían las cruciales para desarrollar las habilidades matemáticas más sofisticadas o complejas, como la aritmética mental. Además, diferentes trabajos centran su estudio en distintos grupos de edad, lo que añade más confusión porque algunas habilidades tienen más peso en función del punto de desarrollo. Por último, no todos los estudios controlan las mismas variables; unos controlan la habilidad en lectura, velocidad de procesamiento básico, funcionamiento ejecutivo, alguna combinación de los mismo, o incluso ninguno de estos factores. Para abordar esta cuestión, Lyons et al. (2014) recogieron datos de ocho tareas numéricas de una misma muestra que abarcaba seis cursos (de primero a sexto y 200 niños cada curso) (Ver descripción de las pruebas en Caja 1). Estos autores pudieron examinar cómo una gama amplia de habilidades numéricas básicas se relacionaban con la aritmética mental en varios puntos del desarrollo, al tiempo que controlaba otras variables no numéricas (lectura, velocidad de procesamiento básico, funcionamiento ejecutivo, así como la variabilidad intrasujetos en función del curso/edad).

Los resultados mostraron una correlación (alrededor de $r = 0.24$) entre el procesamiento no simbólico de la magnitud y la ejecución matemática, que fue significativa en cada grado. Sin embargo, después de controlar las otras siete tareas numéricas y demás variables, incluyendo varias las tareas simbólicas y variables de control, estas correlaciones dejaron de ser significativas. No obstante, las tareas que implicaronn un procesamiento simbólico siguen siguieron siendo un predictor significativo de la aritmética mental, lo que indica que estas habilidades simbólicas estarían directamente más relacionadas con el procesamiento matemático superior que el procesamiento no simbólico de la magnitud.

Curiosamente, el tipo de procesamiento simbólico que mejor predijo sistemáticamente la competencia matemática cambió con la edad: la comparación de magnitudes simbólicas fue más predictiva en niños más pequeños (6-7 años), mientras que la evaluación de orden relativo de cantidades simbólicas predijo mejor en niños mayores (a partir del 3º grado -7 años- hasta el último curso). Esto sugiere que no es simplemente una representación del número per se, lo que resulta crucial es cómo se utilizan esos símbolos, y cómo las habilidades simbólicas pueden cambiar a lo largo del desarrollo (Lyons & Ansari, 2015).

TAREAS NUMÉRICAS

- **Comparación Numérica Simbólica:** (1-9) y en el nivel 2 (10-39)
- **Comparación de puntos:** compararación no simbólica (1-9)
- **Estimación en Recta Numérica:** proyectar en una línea numérica (0-100) las cantidades simbólicas (i.e 12, 96)
- **Conteo:** contar objetos lo más rápido y preciso posible (4-9).
- **Estimación de puntos (simbólico):** estimar verbalmente el número de puntos en el menor tiempo posible (1, 2, 3, 4, 7, 11 y 16)
- **Orden Numérico:** presentación de tres números en formato dígito. Los niños deben decidir si están ordenados numéricamente o no.
- **Object matching (ObjMatch):** se presenta un conjunto de objetos (i.e animales, fruta, etc) y en la parte inferior dos conjuntos. La tarea consiste en determinar cuál de los conjuntos que aparecen abajo refleja el mismo número de elementos que el conjunto de objetos presentado en la parte superior.
- **Visual-audio matching (VisAud):** determinar si el número que escuchan es igual o distinto del número que ven en la pantalla (rango de números de 1-9).

EVALUACIÓN DE LA EJECUCIÓN MATEMÁTICA

- **Aritmética:** medida estandarizada de la habilidad aritmética mental (TempoTest Automatiseren (TTA) de De Vos, 2010) evaluado a partir de 50 sumas y 50 restas. En esta prueba debían calcular durante dos minutos el mayor número de operaciones.

VARIABLES DE CONTROL

- **Matrices Progresivas Raven** para evaluar la Inteligencia no verbal.
- **Medida estandarizada de Lectura:** test estandarizado que evalúa la habilidad en lectura a través de la lectura de palabras y pseudopalabras en un tiempo limitado.
- **Velocidad de procesamiento:** en la pantalla aparece un pez dentro de un cuadrado (contiene 4 cuadrados), el participante debe pulsar la tecla que corresponde al cuadrado donde ha salido el pez lo más rápido posible.

Caja 1: Descripción de las tareas utilizadas en el estudio de Lyons et al. (2014) para evaluar la representación de la magnitud y la relación con la ejecución matemática.

En la línea con este argumento, Vogel, Remark & Ansari (2015) también encontraron que los niños utilizan diferentes procesos cognitivos cuando procesan magnitudes numéricas relativas y las relaciones de orden de los números. Aunque tanto la tarea de orden numérico como la comparación numérica mostraron un efecto distancia, estos efectos no correlacionaron entre sí. Del mismo modo, a pesar de que las medidas de procesamiento de magnitudes numéricas correlacionan con las puntuaciones obtenidas en un test de ejecución matemática, el orden numérico no se relacionó con las diferencias individuales en matemáticas. Por tanto, no se trata simplemente de procesar símbolos numéricos; las operaciones cognitivas implicadas en el procesamiento de estos símbolos es lo que importa.

3.3 ESTUDIOS CON POBLACIÓN ADULTA

Los estudios que analizan las relaciones entre el procesamiento y representación de la magnitud y la ejecución em matemáticas llevados a cabo en población adulta reflejan en cierta medida la misma problemática que se plantea en los estudios llevados a cabo con niños, aunque en el caso de los adultos el volumen de investigación es menor. No obstante, mientras algunos trabajos proponen una relación directa entre la precisión del SNA y la ejecución en matemáticas otros no han encontrado dicha relación o la misma está mediatizada por las representaciones simbólicas. Veamos algunos de estos trabajos.

En un estudio llevado a cabo por Libertus, Odic & Halberda (2012) evaluaron a estudiantes universitarios a partir de la tarea de comparación no simbólica basada en el trabajo de Halberda et al. (2008) y el Test de Aptitudes Escolares (SAT) –habilidades cuantitativas y verbales– para estudiar la relación entre la precisión en SNA y la ejecución matemática. Encontraron que la correlación, entre la ejecución en los subtest cuantitativos (SAT) y la precisión en el SNA era muy significativa incluso controlando las habilidades verbales, inteligencia general o esfuerzo, y otros factores adicionales que podían mediar en esta relación. A su vez, sugieren una relación específica entre la enseñanza de las habilidades matemáticas y un sentido numérico intuitivo, que permanece y se observa incluso en los exámenes de acceso a la universidad. DeWind & Brannon (2012) obtuvieron resultados en la misma línea que Libertus et al. (2012); la precisión del SNA correlacionaba con las puntuaciones de los test de competencia matemática, pero no con varios test de competencia verbal. O, esta estrecha relación entre la precisión del SNA y la competencia en matemáticas parece que se mantiene durante toda la vida (Halberda et al., 2012). En este contexto de debate, Guillaume, Nys, Mussolin & Content (2013) evaluaron esta relación analizando dos aspectos que no habían sido considerados suficientemente en las investigaciones anteriores (o las que vamos a ver más adelante) realizadas con población adulta. El primer aspecto que se cuestionaron fue el rango de niveles de progreso matemático establecidos en las muestras de trabajos previos. De hecho, exceptuando el estudios de Halberda et al. (2012) que utilizaron una gran muestra de participantes através de internet, en los demás, las muestras no eran representivas; estaban compuestas o por estudiantes de Psicología (Libertus et al., 2012; Price et al., 2012) ó por estudiantes universitarios, sin una mayor consideración (DeWind & Brannon, 2012; Gilmore et al., 2011; Inglis et al., 2011; Lyons & Beilock, 2011). Para subsanar esta limitación, estos autores proponen utilizar dos grupos para estudiar la relación entre la ejecución matemática y la precisión en el SNA; participantes con una gran competencia en matemáticas (estudiantes de ingeniería) y participantes supuestamente menos competentes (estudiantes de psicología) con el fin de que la muestra fuera heterogénea y representativa. La segunda novedad que proporciona este estudio es comprobar si los procesos perceptivos no numéricos influyen e interfieren en los juicios de magnitud numérica en las tareas de comparación no simbólica. Para ello, utilizaron un paradigma similar al Stroop numérico en el que se combinan en una tarea de comparación las dimensiones numérica y física (e.g., 3 8 vs. 3 8, para estímulos congruentes e incongruentes, respectivamente) pero en una tarea de comparación no simbólica. Así, los participantes tenían que juzgar cuál de dos conjuntos de puntos (bien congruentes o incongruentes) era más numeroso (dimensión numérica) o cuál tenía un máyor área acumulada (dimensión no numérica). Como es esperable desde el paradigma Stroop, en ambas tareas se produciría interferencia de una dimensión sobre la otra. Las predicciones de Guillaume et al. (2013) fueron que si una mayor competencia en matemáticas se relaciona con la agudeza del SNA, los adultos más competentes en matemáticas estarían más influenciados por la dimensión numérica en la comparación física, mientras que los menos competentes estarían influenciados por la dimensión física en la comparación numérica. Las fracciones de Weber confirmaron que los adultos con una mayor competencia en matemáticas –ingenieros– fueron más precisos que los que tienen una menor competencia en las tareas de comparación numérica pero el rendimiento en la tarea de comparación física (no numérica) fue similar en ambos grupos. Es decir, los adultos con mayor especialización presentan una “sensibilidad” mayor en la dimensión numérica beneficiándose de tener un SNA más preciso. Este resultado va en consonancia con la hipótesis de que ser más experto en matemáticas esta relacionado con la precisión del SNA en adultos formados. Además, utilizando una prueba de fluidez aritmética, comprobaron que los participantes que tenían representaciones numéricas más precisas –calculado a partir de la fracción de Weber– eran más rápidos en la tarea aritmética, por encima de la influencia de la pertenencia a un grupo u otro. Esto apoyaría aún más la hipótesis de una relación específica entre la agudeza del SNA y las habilidades matemáticas (véase resultados similares en Nys & Content, 2012).

Frente a este grupo de estudios que sí han demostrado la relación entre el SNA y la ejecución matemática, otros sin embargo fracasado en encontrar esta relación. Así, en el estudio de Inglis et al. (2011) revisado más atrás en el que encontraron una relación entre la precisión del SNA y laejecución matemática en niños, los autores analizaron si lo mismo ocurría en participantes adultos. Emplearon una tarea de comparación no simbólica –el tamaño de los conjuntos era mayor respecto al empleado con niños (9-70)– y el test de Woodcock-Johnshon III para medir la competencia matemática. Utilizaron otras medidas de ejecución en matemáticas, que tomadas en conjunto, reflejan de manera más precisa la amplia naturaleza de la matemática. En particular, a partir de varias medidas de habilidades numéricas (añandiendo las subpruebas de fluidez matemática, resolución de problemas, conceptos cuantitativos y series numéricas), tarea de Matrices (WASI) y variables de matemáticas no-numéricas relacionadas con la geometría e interferencia lógica. No encontraron una relación significativa entre la precisión del SNA en adultos con ninguna medida de ejecución matemática. En particular, la correlación entre la precisión del SNA y el rendimiento en cálculo en adultos (pr= 0.161; p= 0.211) fue significativamente inferior a la de los niños (pr= - 0.548; p=0.008).

En un intento de añadir luz a las inconsistencias encontradas en los diferentes trabajos que analizan las relaciones entre el SNA y la ejecución matemática, Price et al (2012) investigaron las posibles fuentes de estas inconsistencias al contrastar la fiabilidad, validez y la relación con la ejecución matemática de dos medidas diferentes del SNA (efecto de ratio y fracción de Weber) calculadas a partir de tres variantes de la tarea de comparación de magnitudes numéricas con estímulos presentados espacialmente separados, secuencial y entremezclados (ver Capítulo II, Figura 2.1 una descripción de estas tareas). Como exponíamos en el capítulo anterior, aunque encontraron relaciones significativas entre el efecto de ratio y la fracción de Weber, esta asociación fue muy débil (R^2 = .11) y solo en la presentación secuencial, no encontrando ninguna asociación entre los dos índices cuando los estímulos se presentaron concurrentemente (el tipo de presentación más habitual en los diferentes estudios). Pero lo más importante, ni la fracción de weber ni el efecto de ratio de ninguna de las variantes de la tarea correlacionó con la ejecución en matemáticas (Test Woodcock-Johnson de competencia matemática).

Otro grupo de trabajos han constatado la existencia de la relación entre el SNA y la ejecución matemática pero ésta estaría mediada por el conocimiento que se tiene de los números simbólicos. Por ejemplo en el estudio realizado por Lyons & Beilock (2011) proponen que la representación del orden relativo en símbolos numéricos puede ser una pieza clave entre el SNA y las habilidades matemáticas más complejas. Si el SNA va unido a la adquisición del orden numérico simbólico, entonces una mayor precisión del SNA debería estar relacionado con una mayor eficacia a la hora de establecer relaciones ordinales entre los números simbólicos. Por otra parte, si la comprensión de los símbolos numéricos sirve como base de las asociaciones durante la aritmética mental, entonces la evaluación de las relaciones ordinales en los números simbólicos deberán predecir habilidades aritméticas más complejas. Para comprobar si esto es así, evaluaron a estudiantes universitarios en una serie de tareas: ordenar números, ordenar letras, comparación de magnitudes simbólicas y no simbólicas, reconocimiento de números, aritmética mental y una tarea para controlar variables cognitivas (memoria de trabajo). Tomaron como medidas la fracción de weber, los TRs y proporción de errores y observaron una correlación entre la precisión del SNA y la ejecución matemática, aunque dicha relación estaba mediada por la habilidad para ordenar números simbólicos (ver Figura 3.5)

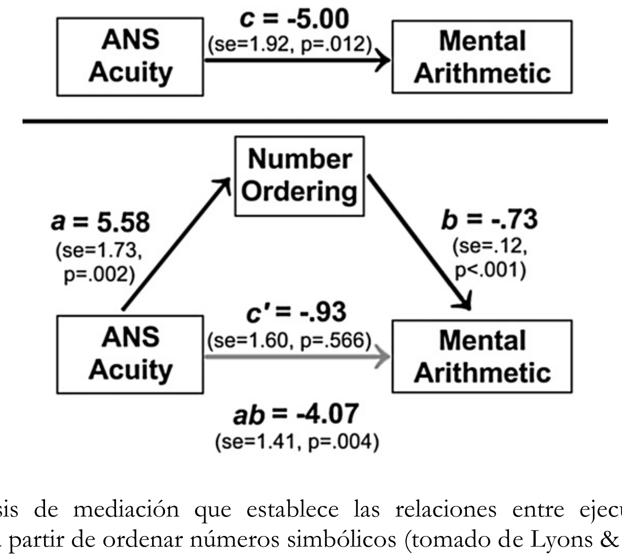


Figura 3.5: Análisis de mediación que establece las relaciones entre ejecución matemática y precisión del SNA a partir de ordenar números simbólicos (tomado de Lyons & Beilock, 2011).

Castronovo & Gobel (2012) se plantearon la disyuntiva de si es la precisión del SNA o un sistema numérico exacto (SNE) lo que se relaciona con la ejecución en matemáticas. Los autores, siguiendo a Dehaene (2009), sugieren que además del SNA los individuos desarrollan un SNE con rutas de proyección entre ambos sistemas a partir de la adquisición de los símbolos numéricos. Su objetivo fue analizar el impacto de la educación matemática sonre el SNA, el SNE y las habilidades de proyección entre estos dos sistemas comparando la ejecución en tareas numéricas básicas simbólicas y no simbólicas en un grupo de estudiantes que están estudiando matemáticas frente a un grupo de control (estudiantes de Psicología). Las tareas utilizadas fueron una tarea de comparación no simbólica utilizando como medida la fracción de Weber (w) para medir la agudeza del SNA; una tarea de comparación simbólica con el índice de distancia como medida del SNE; y dos tareas de proyección (Basadas en Crollen, Castronovo & Seron, 2011), una desde el SNE al SNA a partir de una tarea de producción de numerosidad, y otra desde el SNA al SNE a través de una tarea de estimación de numerosidad, midiendo en ambos casos el coeficiente de variación. Sus resultados mostraron que la precisión del SNA no fue distinto entre ambos grupos, mientras que la ejecución en las tareas relacionadas con el SNE y las habilidades de proyección fueron significativamente mejores en los participantes con más alto nivel en matemáticas, lo que sugiere que el nivel matemático alto tiene poca influencia sobre el SNA pero se asocia a una mayor precisión del SNE y mejores habilidades de proyección entre el SNA y el SNE.

Desde el trabajo de Castronovo y Göbel (2012) (el más completo de los que conocemos respecto a la variedad de tareas utilizadas con población adulta) se sugeriría que no es la representación de la magnitud lo que se relaciona con las diferencias individuales en matemáticas, sino el acceso a esas representaciones desde los números simbólicos, como así se muestra desde el efecto distancia de la tarea de comparación simbólica y el coeficiente de variación de las tareas de proyección. Aunque este trabajo apunta hacia la existencia de un sistema numérico exacto, que según los autores, estaría conectado con la representación aproximada de las cantidades, otros trabajos y resultados obtenidos de los mismos que hemos ido revisando a lo largo de esta tesis apuntan a que el sistema para números exactos no necesariamente se conectaría con el SNA. Recordemos que Lyons et al. (2012) proponen la existencia en los adultos de dos sistemas representacionales distintos para magnitudes exactas y aproximadas no cecesariamente conectados entre sí. Sasanguie et al. (2013) también proponen dos sistemas representacionales distintos para el SNA y los símbolos numéricos no solo en adultos, como plantean Lyons et al. (2012), sino también en niños de 5 años de edad. Otros trabajos más allá y sugieren que las diferencias individuales en la ejecución matemática se relacionarían con el sistema representacional simbólico exacto. Por ejemplo, Bartelet et al. (2014) encontraron que las relaciones entre las tareas de procesamiento simbólico y la ejecución en aritmética se produjeron solamente cuando se consideraron medidas de eficacia y no cuando se consideraron los efectos específicos de las tareas que miden representación de la magnitud. Todos estos trabajos apuntan hacia la posibilidad de que no es tanto el acceso a la representación de la magnitud desde los números simbólicos o la agudeza de esas representaciones lo que se relaciona con la ejecución matemática, sino la eficacia para procesar magnitudes simbólicas.

En un intento de analizar esta cuestión directamente, Sasanguie y Reynvoet (2014) se han cuestionado recientemente si la asociación la ejecución en tareas numéricas simbólicas y la ejecución matemática en adultos se debe a un mejor acceso a la representación no simbólica subyacente a los números simbólicos, o más bien la ejecución matemática se construye sobre un procesamiento rápido y automático de los símbolos per se, es decir a partir de un procesamiento simbólico puro sin necesidad de activar la representación de la magnitud no simbólica. Para ello, los autores utilizaron un paradigma de emparejamiemto audiovisual (i.e, una tarea igual/diferente) en el que se presentaban palabras numéricas vía auditiva que tenía que emparejarse bien con dígitos arábigos (tarea simbólica pura, ver Figura 3.6) o con conjuntos de puntos (tarea de notación mixta). Los autores razonaron que si las diferencias individualesen aritmética se explican por un eficiente acceso a la representación no simbólica subyacente desde los números, entonces encontrarían una asociación entre la ejecución en la tarea de notación mixta en la que los números simbólicos se tienen que emparejar con una representación no simbólica de la magnitud, y la ejecución matemática. Mientras que si el procesamiento rápido u automático de los símbolos es el responsable de las diferencias individuales en aritmética, encontrarían una relación entre ejecución matemática y la tarea simbólica pura, que se puede resolver dentro del sistema simbólico si necesidad de acceder a la magnitud subyacente. Para analizar si la relación es específicamente numérica, también utilizaron una tarea de emparejamiento de letras (ver Figura 3.6), en la que no encontrarían relación con la ejecución aritmética.

Figura 3.6: Tarea de emparejamiento audiovisual utilizada por Sasanguie y Reynvoet (2014)

Los resultados fueron coherentes con la hipótesis de que la ejecución en matemáticas se construye sobre un rápido y automático procesamiento simbólico. En primer lugar, no encontraron un efecto distancia en la tarea simbólica pura, indicando que en esta tarea no hay acceso a la representación de la magnitud y que el procesamiento numérico simbólico confía en un circuito especializado para procesar números simbólicos . Además, solo la ejecución en esta tarea explicó una parte de la varianza en la ejecución matemática (fluidez de cálculo) más allá de la inteligencia (matrices progresivas de Raven) y de la velocidad de procesamiento general. Y no hubo ninguna relación entre la tarea de notación mixta (en la que sí encontraron efecto de distancia) y la ejecución matemática. Ni entre la ejecución matemática y la tarea de emparejamiento de letras, lo que sugiere que la relación entre procesamiento simbólico y ejecución matemática es específica del número.

3.4 RELACIÓN ENTRE EL PROCESAMIENTO DE MAGNITUDES NUMÉRICAS Y DISCALCULIA

Aunque nuestra pretensión es estudiar la relación que tiene el procesamiento de magnitudes con la ejecución matemática en población normal, nos parece interesante revisar brevemente los trabajos realizados con niños con dificultades de aprendizaje en matemáticas y/o discalculia en este campo de estudio. En particular, las investigaciones que centran su atención en cómo procesan magnitudes numéricas niños con discalculia. La discalculia, es un desorden específico y persistente del desarrollo numérico y aprendizaje de las matemáticas a pesar de tener una inteligencia normal. Aunque se han propuesto diferentes factores explicativos de las dificultades con las matemáticas (ver una revisión en Mazzocco y Räsänen, 2013, o el monográfico de *Cognitive Development* nº 24), diferentes estudios recientes han comenzado a plantear que el origen de la discalculia puede estar relacionado con procesamiento y representación de la magnitud numérica (e.g., Wilson & Dehaene, 2007; Butterworth, 2005; Price, Holloway, Rasanen, Vesterinen, & Ansari, 2007). Como es fácil anticipar, en el estudio de niños con discalculia se plantea la misma disyuntiva que venimos analizando en estudios con poblaciones normales de niños y adultos: si es la representación no simbólica de la magnitud o es el acceso a la misma lo que explicaría las dificultades de estos niños. Ambas perspectivas son conocidas como *hipórtesis del módulo numérico defectuoso* (Butterworth, 2005) e *hipótesis del déficit de acceso* (Rousselle &

Nöel, 2007). La primera propone que un déficit específico en la capacidad innata que tenemos para comprender y representar magnitudes conduce a dificultades en el aprendizaje del número y la aritmética; mientras que la segunda plantea que las dificultades en las matemáticas se originan en un impedimento para acceder al significado numérico (i.e., su magnitud) desde los símbolos numéricos más que en una dificultad en el procesamiento de la magnitud per se. Ambas hipótesis han sido puestas a prueba utilizando tareas relacionadas con la representación de la magnitud tanto simbólicas como no simbólicas.

Los estudios alineados a favor de la hipótesis del módulo numérico defectuoso han encontrado que los niños con discalculia y con dificultades en el aprendizaje de la aritmética ejecutan peor que los niños con desarrollo típico tanto en tareas simbólicas como no simbólicas. Así, algunos autores han encontrado que, cuando comparan conjuntos de puntos, lo niños con discalculia muestran menos sensibilidad a las diferencias numéricas que los niños controles con desarrollo típico, mostrando de esta manera una menos agudeza del SNA (e.g., Piazza et al., 2010; Mazzocco et al., 2011a). Por ejemplo, utilizando una tarea de comparación de magnitudes basada en Halberda et al. (2008), Mazzocco et al. (2011a) encontraron que los niños con discalculia de trece años presentaban una fracción de Weber similar a la de los niños con desarrollo típico de cinco años; y Piazza et al. (2010) encontraron una menor agudeza del SNA en niños sde 12 años. De la misma manera, Mussolin Mejias y Nöel (2010) comprobaron que los niños de 10-11 años con dificultades eran más lentos y menos exactos que los niños con desarrollo típico cuando tenían que comparar pequeñas numerosidades cercanas. Otros han acompañado las tareas de comparación con tareas de producción de estimaciones, encontrando menos precisión y más variabilidad que los niños sin dificultades (Mejias, Grègoire, & Nöel, 2012; ver también Mazzocco et al., 2011a).

Sin embargo, otros estudios que han evaluado niños con dificultades más jóvenes han encontrado que los niños con dificultades tienen una ejecución normal en las tareas que utilizan estímulos no simbólicos pero una ejecución peor que los niños con desarrollo típico en las tareas que utilizan estímulos simbólicos (Rousselle & Noël, 2007; Iuculano et al., 2008; Landerl & Kölle, 2009; De Smedt and Gilmore, 2011). Rousselle y Noël (2007) fueron los primeros en contrastar la hipótesis de acceso analizando la ejecución en tareas con estímulos simbólicos y no simbólicos en niños con dificultades en matemáticas de 7 y 8 años de edad. Encontraron que estos niños diferían de los controles con desarrollo típico en tareas de comparación de magnitudes simbólicas, pero no en tareas de comparación de magnitudes no simbólicas. Estos resultados fueron replicados por otros estudios, como los de Iuculano et al. (2008) con niños de 6 años de edad o Landerl y Kölle (2009) con niños de 7 y 8 años de edad. Estos resultados apoyarían la hipótesis de acceso: un SNA intacto pero un déficit de acceso desde los números simbólicos explicarían las dificultades.

Algunos autores han tratado de encontrar una explicación a estos resultados contradictorios para las tareas que utilizan estímulos no simbólicos y apuntan a cuestiones metodológicas (De Smedt et al., 2013; Gilmore et al., 2013; ver Capítulo II), o a factores relacionados con la edad (Nöel & Rousselle, 2011). Especialmente interesante es la explicación ofrecida por Nöel y Rousselle (2011), quienes han propuesto una perspectiva evolutiva para explicar las discrepancias entre los estudios que apoyan una hipótesis u otra. De acuerdo con los autores, en la mayoría de los estudios (alineados con una hipótesis u otra) los niños con dificultades ejecutan significativamente por debajo de los controles con desarrollo típico en tareas que utilizan estímulos simbólicos. Sin embargo, las diferencias entre estudios se encuentran en las tareas con estímulos no simbólicos. Y se puede ver una disociación entre aquellos que promueven la hipótesis de un defectuoso SNA y la hipótesis de acceso, ya que estos últimos evalúan a niños más pequeños (6-8 años de edad) que los primeros (10 años en adelante). En este contexto, la dificultad inicial de los niños con discalculia o dificultades de aprendizaje se encontraría en el procesamiento de los números simbólicos (el sistema de representación exacta de los números) y la posterior proyección de los mismos al SNA. Posteriormente, el uso continuo de números simbólicos debería incrementar la precisión del SNA, pero este refinamiento sería menos pronunciado en los niños con dificultades debido a las dificultades que encuentran en el procesamiento de números exactos. De esta forma, despues de unos años de escolaridad, esta falta de refinamiento del SNA llevaría a los niños con dificultades tener una menor precisión de las representaciones numéricas no simbólicas respecto a los niños con un desarrollo típico, en los que su contacto con los números simbólicos les lleva a una mayor agudeza del SNA. Por lo tanto, el déficit inicial de los niños con dificultades se encontraría en la construcción de un sistema de representación numérica exacta, mientras que la reducida agudeza del SNA aparecería posteriormente y sería secundario a este déficit inicial.

3.5 RESUMEN

A lo largo de estas páginas hemos revisado algunos de los trabajos más representativos que han analizado las relaciones entre el procesamiento de la representación de la magnitud y la ejecución matemática. Como hemos tenido oportunidad de ver, se consideran dos perspectivas para explicar estas relaciones, las cuales se han analizado en distintas poblaciones, tanto en niños, como en adultos como en niños que presentan un desarrollo atípico. Desde una perspectiva se asume que las diferencias individuales en la ejecución matemática se explican por una menor agudeza de la representación de la magnitud per se, reflejada en la ejecución de tareas compuestas por estímulos no simbólicos. Los primeros estudios en este campo de investigación se han desarrollado teniendo en cuenta esta premisa. Sin embargo, estudios posteriores han comenzado a cuestionar esta perspectiva, planteando una altenativa basada en el acceso a las representaciones de las magnitudes no simbólicas desde los números simbólicos. Así, se plantea que las diferencias individuales en la ejecución matemática se asociarían a diferencias en la competencia de los individuos para procesar magnitudes simbólicas que se proyectan en el SNA. Aún ha emergido una nueva perspectiva más reciente, en la que se plantea que no es la representación de la magnitud per se ni el acceso a esa representación de la magnitud lo que explica las diferencias individuales en matemáticas, sino la eficacia del procesamiento simbólico per se, sin necesidad de que haya una conexión entre los símbolos y las magnitudes subyacentes a los mismos. Los estudios que se alinean en alguna de estas perspectivas encuentran resultados acordes con sus hipótesis. En este contexto, no es fácil explicar los resultados contradictorios. Como anticipábamos en el capítulo anterior existen algunas posibilidades explicativas, principalmente las que están relacionadas con cuestiones metodológicas más que teóricas. Por ejemplo, considerando la tarea más ampliamente utilizada para evaluar la representación de la magnitud no simbólica, como es la tarea de comparación, no existe consenso respecto a los parámetros a utilizar, como el control de variables no numérica o el tamaño de los conjuntos de puntos. Considerando este último aspecto, aquellos partidiarios de la agudeza del SNA como factor explicativo de las diferencias individuales en matemáticas utilizan tareas con conjuintos mayores que aquellos partidiarios de la hipótesis de acceso, que generalmente utilizan conjuntos pequeños de 1 a 9. Además, las medidas utilizadas (aciertos, tiempos de respuesta, fracción de Weber, efecto de distancia…) pueden reflejar diferentes aspectos de la representación de la magnitud. Y hemos tenido oportunidad de ver que las tareas también pueden ser variadas (comparación, estimación proyeccción…) que también pueden reflejar distintos aspectos de la representación de la magnitud. Si parece haber una tendencia en los trabajos más recientes a utilizar un rango más amplio de tareas que capturen diferentes habilidades relacionadas con el procesamiento y representación de la magnitud. Unido a lo anterior, los diferentes estudios también utilizan diferentes tareas para evaluar la ejecución matemática, lo que añade confusión, ya que ciertos aspectos de la representación de la magnitud se pueden relacionar con unos componentes pero no con otros de la ejecución matemática. Si parece que lo ideal es utilizar distintas medidas de ejecución matemática en un mismo estudio. Y también encontramos diferencias entre los estudios respecto al tipo de variables de control incorporadas a los diseños (inteligencia, memoria de trabajo, habilidades viso-espaciales, habilidades lectoras, vocabulario…), todas ellas supuestamente relacionadas con la ejecución matemática. No es de estrañar, entonces, que los resultados aportados por los diferentes estudios sean mixtos y no conluyentes. Y parece evidente que el estudio de las diferencias individuales a partir de la representación de la magnitud es un campo en continua expansión y con muchas cuestiones abiertas. En esta tesis doctoral pretendemos contribuir genuinamente a este campo.

SEGUNDA PARTE

RESUMEN DE LAS INVESTIGACIONES, ESTUDIOS EMPÍRICOS Y CONCLUSIONES

CAPÍTULO IV

REPRESENTACIÓN Y PROCESAMIENTO DE MAGNITUDES NUMÉRICAS Y SU RELACIÓN CON EJECUCIÓN MATEMÁTICA

4.1 INTRODUCCIÓN

Esta tesis comenzó hace cuatro años, en plena discusión científica sobre las relaciones entre el procesamiento de la magnitud numérica y la ejecución en matemáticas. Los diferentes estudios que se iban publicando empezaban a tomar partido respecto a una de las cuestiones que hemos ido desarrollando a lo largo de estas páginas: si es la representación de la magnitud per se o el acceso a esas representaciones lo que explica las diferencias individuales en la ejecución matemática. Si queríamos hacer una aportación genuina debíamos dirigir nuestra atención hacia alguna de las cuestiones no resueltas en este campo de investigación. Comenzamos a desarrollar algunos estudios piloto con la intención fundamental de tomar contacto con la metodología y, sobre todo, con el desarrollo de tareas que evaluaban la representación de la magnitud. Mes tras mes iban apareciendo trabajos que daban cuenta del interés de la comunidad científica por este campo de investigación. Y curiosamente alguno de estos trabajos respondían a algunas de las cuestiones que nos íbamos planteando. En este contexto, surgió la idea de analizar una cuestión que no estaba considerándose en este campo de investigación: qué ocurre con el procesamiento de la magnitud de números de dos cifras, especialmente en la versión simbólica de las tareas de comparación. Hasta ese momento, y curiosamente hasta la fecha en la que se está escribiendo esto, la mayoría de los trabajos estaban considerando la comparación de magnitudes simbólicas con números pequeños, generalmente en el rango de 1 a 9. Sin embargo, otras tareas utilizadas para evaluar la representación de la magnitud numérica implicaban cantidades mayores, como la comparación de magnitudes, las tareas de proyección o la estimación en la línea numérica. Además, se da la circunstancia de que una de las diferencias entre los estudios que relacionan la agudeza del SNA con las matemáticas y los que las relacionan con el acceso a esas magnitudes, es que los primeros utiliza conjuntos de puntos grandes (de dos cifras) para comparar, mientras que los segundos utilizan conjuntos pequeños de 1 a 9 puntos, fundamentalmente para equiparar con la tarea estándar de comparación de magnitudes simbólicas de 1 a 9, como hemos dejado patente en el Capítulo II de esta tesis. Y como hemos podido ver, la relación entre la comparación de magnitudes simbólicas de 1 a 9 y la ejecución matemática se da fundamentalmente en los niños más pequeños (e.g., Lyons et al., 2014), precisamente porque están comenzando a darle significado a los números simbólicos proyectándolos, según la posición más compartida (pero ver Sasanguie et al., 2013), en las representaciones no simbólicas preexistentes. Siguiendo esta lógica, cuando los niños comienzan a enfrentarse a los números de dos cifras (en nuestro sistema educativo en primer curso de Educación Primaria) y a adquirir el concepto de valor posicional también comienzan a darle significado a estos números, por lo que parece factible que las diferencias individuales en el procesamiento de estos números se podrían relacionar con las diferencias individuales en la ejecución matemática. Esta fue la motivación que guió el **primer estudio experimental** de esta tesis doctoral. Además, los diferentes estudios que estaban apareciendo comenzaban a considerar la necesidad de utilizar un rango amplio de tareas para analizar las relaciones entre la representación de la magnitud y la ejecución matemática. Por lo tanto nos planteamos utilizar un rango de tareas en un mismo estudio que permitieran el uso de números de dos cifras y que no hubieran sido analizadas en su conjunto previamente, pero tareas que individualmente habían mostrado su relación con la ejecución matemática, que en nuestro caso fueron la comparación de magnitudes no simbólicas (Halberda et al., 2008; Libertus et al., 2013a), las sumas simbólicas aproximadas (Gilmore et al., 2007), tareas de proyección en ambas direcciones entre simbólico/no simbólico (Mundy & Gilmore, 2009), y estimación en la recta numérica (0-100) (Booth & Siegler, 2008), y comparación de magnitudes simbólicas de dos cifras (no analizada previamente con niños).

Siguiendo con nuestra intención de hacer una aportación genuina al estudio del procesamiento de la magnitud y su relación con la ejecución matemática, nuestro **segundo estudio experimental** se centró en la población adulta, principalmente por la escasez de estudios con esta población respecto a los estudios con niños. Dado que este segundo estudio se fraguó más recientemente, quisimos analizar las relaciones entre procesamiento de la magnitud y ejecución matemática solventando algunas de las limitaciones que se han ido planteando en este campo, de las cuales hemos dado cuenta en el marco teórico de esta tesis doctoral. Así, y siguiendo con el planteamiento iniciado en el primer estudio, nuestro objetivo fue utilizar un amplio rango de tareas relacionadas con la representación de la magnitud. Hasta donde llegan nuestros conocimientos, solo el estudio de Castronovo y Göbel (2012) ha utilizado diferentes tareas (comparación simbólica y no simbólica y proyección) en población adulta. Además, quisimos analizar cómo el procesamiento de la magnitud se relaciona con distintos componentes de la ejecución matemática. Aunque en los estudios más recientes con niños se está empezando a utilizar un rango más amplio de medidas de ejecución matemática, este es un aspecto no considerado aún en los estudios con población adulta. Y también quisimos ampliar el rango de medidas de control no numéricas que tradicionalmente se han relacionado con la ejecución matemática con la intención de analizar la contribución del procesamiento de la magnitud numérica más allá de estas medidas. En este estudio nos planteamos analizar tres cuestiones distintas.

Una primera cuestión, la más evidente dentro del campo, aunque no por ello deja de ser novedosa considerando las condiciones en que la estudiaremos, es examinar si es la representación de la magnitud numérica per se o el acceso a la misma lo que se relaciona con la ejecución matemática. Nuestra aportación será analizar estas relaciones considerando diferentes medidas de ejecución matemática y controlando un rango amplio de variables no numéricas.

Otra cuestión tiene que ver con la tercera alternativa explicativa de las relaciones entre procesamiento numérico y ejecución matemática. Recordemos que reciente Sasanguie y Reynvoet (2014) han plateado que lo que se relaciona con la ejecución matemática no es la representación de la magnitud per se ni el acceso a la misma desde los símbolos, sino el procesamiento de los números simbólicos per se, sin necesidad de acceder a las representaciones no simbólicas subyacentes a los mismos. Los autores utilizaron un paradigma de emparejamiento audiovisual en el que se presentaban palabras numéricas vía auditiva que tenía que emparejarse bien con dígitos arábigos (tarea simbólica pura) o con conjuntos de puntos (tarea de notación mixta). Y encontraron que sólo la ejecución en la tarea simbólica pura se relacionaba con la ejecución matemática. Sin embargo, este estudio tiene algunas limitaciones desde nuestro análisis. Así, la tarea de notación mixta (relacionada con la hipótesis de acceso) solo incluyó numerosidades dentro del rango de subitizing, limitación apuntada por los propios autores. Y sabemos que se utilizan dos sistemas distintos para procesar pequeñas y grandes numerosidades (Hyde, 2011), por lo que en nuestro estudio utilizamos una tarea de emparejamiento audiovisual similar, pero aumentando el rango de cantidades en la tarea de notación mixta. Además, añadimos al modelo una tarea más, comparación de magnitudes simbólicas, que también se ha relacionado con la hipótesis de acceso, para ver la contribución de cada tarea a la ejecución matemática. Y en la línea del nuestro objetivo anterior, utilizamos dos tareas para evaluar la ejecución matemática, fluidez de cálculo y cálculo mental, para examinar hasta qué punto las diferentes tareas de procesamiento numérico se relacionan con distintos componentes de las matemáticas.

Una tercera cuestión que nos interesa en el estudio con adultos tiene que ver con la posibilidad de que los mecanismos implicados en la tarea de enumeración (también considerados componentes nucleares del procesamiento de magnitudes, e.g., Reeve et al., 2012) se relacionen con la ejecución matemática, especialmente con la fluidez de cálculo. Hasta la fecha ningún trabajo a analizado esta posibilidad en adultos, aunque algunos estudios recientes con niños han confirmado esta relación (e.g., Gray & Reeve, 2014), posiblemente porque los niños utilizan estrategias de conteo cuando realizan tareas de cálculo (e.g Moore & Ashcraft, 2015). Siguiendo con este razonamiento, hay evidencias de que los adultos no sólo utilizan la recuperación de hechos numéricos cuando llevan a cabo cálculos simples, sino que también puede utilizar estrategias y procedimientos que implican manipulación de la magnitud (e.g., Campbell & Xu, 1999; Lefevre, Sandeski & Bizand, 1996). Por lo tanto, estamos interesados en analizar si las diferencias individuales en la ejecución del cálculo simple pueden ser explicadas por la enumeración más allá de variables de control no numéricas y otras variables numéricas que tienen relación con el cálculo.

OBJETIVOS Y PREDICCIONES

1. *Estudio 1.* Analizar, en un estudio longitudinal, qué habilidades de las relacionadas con el procesamiento de magnitudes predicen la ejecución matemática más allá de lo explicado por la inteligencia dos años después.

Las medidas en t1 se llevaron acabo al final del primer curso de Educación

Primaria, donde los niños recientemente han sido introducidos a los números de dos cifras. En t2 se midió la ejecución matemática al final del tercer curso de Educación Primaria.

Utilizamos una tarea de comparación de magnitudes no simbólica, una tarea de sumas aproximadas simbólica, una tarea de proyección (en ambas direcciones) y una tarea de estimación en la línea numérica. Todas ellas reflejan diferentes aspectos de la representación de la magnitud, y todas han mostrado en diferentes estudios su relación con la ejecución matemática, excepto la comparación de magnitudes simbólicas de dos cifras, que no ha sido utilizada hasta la fecha con niños. Si los participantes han comenzado a dar significado semántico (magnitud) a los números de dos cifras, esperamos que en todas las tareas se produzcan los efectos típicos que reflejan representación de la magnitud, como los efectos de ratio y distancia en las tareas de comparación (simbólica y no simbólica), sumas aproximadas y proyección. Además, esperamos que los resultados en la prueba de estimación en la línea numérica comiencen a mostrar una función lineal frente a la función logarítmica propia de niños más pequeños.

Además, si la ejecución en matemáticas se construye a partir del SNA, esperamos una relación entre la ejecución en cada una de las tareas y la ejecución matemática, mientras que si lo importante para la ejecución matemática es el acceso al SNA desde los números simbólicos, la relación será solamente con aquellas tareas que incluyan números simbólicos.

Por lo que se refiere a cada tarea individual, todas ellas reflejan de una manera u otra procesamiento y representación de la magnitud y todas se han relacionado con la ejecución matemática, por lo que no hay una predicción concreta sobre cuál de estas tareas tendrá un mayor peso en dicha ejecución.

2. *Estudio 2.* Analizar en población adulta qué medidas de las relacionadas con la representación de la magnitud se relacionan con la ejecución matemática.

Este segundo objetivo general se divide en tres objetivos específicos:

2.1. Examinar si es la representación de la magnitud numérica per se o el acceso a la misma lo que se relaciona con la ejecución matemática.

Para cumplir con este objetivo, añadimos cuatro aspectos no contemplados en los estudios previos: a) utilizamos las clásicas tareas de comparación de magnitudes simbólicas y no simbólicas, pero en las versiones de cantidades pequeñas (1 a 9) y cantidades grandes; b) combinamos en todas las tareas medidas de eficacia y medidas que reflejan representación de la magnitud; c) analizamos las relaciones entre representación de la magnitud y tres medidas de ejecución matemática: un test de aptitudes matemáticas adquiridas al final de bachillerato., una prueba de fluidez de cálculo y una prueba de cálculo mental; y d) utilizamos un rango más amplio de tareas de control no numérica que en los estudios previos: inteligencia, memoria de trabajo verbal, memoria de trabajo viso-espacial y velocidad de procesamiento, todas ellas relacionadas con la ejecución matemática.

Si lo que se relaciona con la ejecución matemática es la representación de la magnitud per se, esperamos que la ejecución en todas las tareas prediga la ejecución matemática más allá de las variables de control, mientras que si lo que se relaciona es el acceso a dicha representación desde los números simbólicos, esperamos que sean las tareas que utilizan estímulos simbólicos las que predigan la ejecución matemática. No obstante, estas predicciones pueden cambiar en función de las medidas (eficacia vs. representación) de las tareas de comparación de magnitudes. Así, desde la hipótesis de acceso se predeciría una relación con las medidas de representación de la magnitud, mientras que si la relación solamente es con las medidas de eficacia no sería la agudeza de la representación lo que se relaciona con la ejecución matemática, sino la eficacia para procesar magnitudes. Y respecto a las medidas de ejecución matemática, esperamos que la ejecución en las tareas que incluyen números simbólicos mostrarán una mayor relación con las tareas de cálculo, mientras que las relaciones con la medida más global de aptitud matemática no están claras, dada la escasez de estudios previos al respecto. Cabría la posibilidad de que la ejecución en tareas de comparación no simbólica se relacionara más con esta medida de ejecución matemática, ya que mide componentes de las matemáticas que no implican un procesamiento rápido de números simbólicos.

2.2. Analizar si es el procesamiento simbólico puro o el acceso desde los símbolos a la representación de la magnitud lo que se relaciona con la ejecución matemática

Para analizar esta cuestión replicamos, en parte, el estudio que plantea esta hipótesis (i.e., Sasanguie & Rynvoet, 2014) y lo ampliamos. Así, para analizar en mayor profundidad la hipótesis de acceso, utilizamos las mismas tareas de estos autores (emparejamiento audiovisual) ampliando el número de estímulos tanto en la tarea simbólica pura como en la tarea de notación mixta, e incluimos una tarea de comparación de magnitudes simbólicas. De esta manera, las tres tareas se componían de un rango de estímulos similares[1]. Para evitar confusión entre las dos tareas que emplean solo dígitos, i.e., emparejamiento simbólico puro y comparación simbólica, con esta última solo utilizamos la medida relacionada con la precisión de la representación de la magnitud, como es el índice de distancia (una medida de eficacia podría confundirse con la tarea simbólica pura). Además, siguiendo con la línea del objetivo anterior, utilizamos dos medidas de ejecución matemática (fluidez de cálculo y cálculo mental), y las mismas medidas de control no numéricas.

Las predicciones en este caso son claras: si la ejecución matemática está relacionada con la ejecución en tareas con números simbólicos porque se accede a la representación, entonces esperaríamos que la ejecución en las tres tareas se relacione con la ejecución matemática, mientras que si la ejecución matemática se construye sobre un rápido y automático procesamiento simbólico puro, entonces solo la ejecución en la prueba de emparejamiento simbólico puro se relacionaría con las medidas de ejecución matemática. No obstante, estas predicciones pueden depender de la tarea de ejecución matemática utilizada. Respecto a la velocidad/fluidez de cálculo, se esperaría una relación con la ejecución en todas las tareas, mientras que el cálculo mental, posiblemente más dependiente de procesar magnitudes, se relacionaría más con las tareas que implican acceder a la magnitud (comparación y emparejamiento en notación mixta).

2.3. Analizar si las habilidades implicadas en la enumeración se relacionan con la aritmética elemental

Los mecanismos implicados en la enumeración son considerados componentes del procesamiento de magnitudes, por eso en el contexto de esta tesis doctoral parece pertinente analizar la relación entre la ejecución en esta tarea y la ejecución en matemáticas. Hasta la fecha, ningún trabajo ha analizado esta relación en población adulta. Para cumplir

[1] Sasanguie y Reynvoet (2014) utilizaron como estímulos para la tarea simbólica pura los números 1, 2, 8, y 9, con ensayos iguales (e.g., 2-2), con distancia numérica corta (e.g. 1-2) y con distancia numérica larga (e.g., 1-8). En la tarea de notación mixta utilizaron estímulos en el rango de subitizing (i.e., 1, 2, 3, y 4), con ensayos iguales, con distancia numérica corta (e.g., 1-2), y en este caso, la distancia larga fue de dos (e.g., 2-4). En nuestro estudio utilizamos todos los números de 1 a 9 con cuatro distancias.

con este objetivo, utilizamos una prueba típica de enumeración que acompañamos con una prueba de comparación de magnitudes simbólicas para ver una contribución individual y única de la enumeración sobre la ejecución matemática. Como medida de ejecución matemática en este caso solo utilizamos una tarea de fluidez de cálculo, ya que es en este componente de la ejecución matemática donde mayor influencia puede tener la enumeración.

Las predicciones para este objetivo también son evidentes: si la ejecución en cálculo se relaciona con las habilidades de enumeración, entonces la ejecución en la tarea de enumeración predecirán la ejecución en cálculo más allá de los explicado por la tarea de comparación de magnitudes simbólicas y de las variables de control no numéricas.

No obstante, y considerando que la enumeración incluye mecanismos distintos para el rango de subitizing y el rango de conteo, la predicción anterior será mas evidente en el rango de conteo, dada la importancia que tiene el conteo en el cálculo, no solo en niños, sino también en adultos (e.g., LeFevre et al., 1996). Además, la capacidad para "subitizar" es automática en los adultos. Sin embargo, en la medida en que haya diferencias individuales en el rango de subitizing, también este rango puede explicar parte de la varianza de las puntuaciones de cálculo.

4.2 ESTUDIO 1

4.2.1 Método

4.2.1.1 Participantes

55 niños/as de un colegio concertado de la ciudad de Salamanca formaron parte de este primer estudio durante los cursos 1º y 3º de E. Primaria. El primer año (t1) (edad 6 años, n1=52, 21 niños y 32 niñas, rango de edad= 6 años 1 mes a 6 años 11 meses) fueron evaluados de manera individual con todas las pruebas relacionadas con la representación y procesamiento de magnitudes numéricas y de la ejecución matemática mediante un test estandarizado (BadyG I), en este caso de manera colectiva en el aula. En el segundo momento (t2) se les volvió a evaluar la ejecución en matemáticas dos años después mediante el mismo test (BadyG I) para ver las posibles diferencias en el rendimiento después de dos cursos (n2= 40, 14 niños y 26 niñas, rango de edad= 8 años 1 mes a 8 años y 11 meses). En (t1), 3 niños no fueron incluidos en los análisis estadísticos puesto que o les faltaba alguna tarea o bien se ausentaron del colegio los días en los que se llevó a cabo la evaluación. En (t2) la muestra se redujo a 40 debido a dos razones principalmente; el número de errores que cometían algunos de ellos en algunas pruebas era muy elevado y no se pudo incluir en los análisis posteriores o por traslado de ciudad y ya no estaban en el centro.

4.2.1.2 Materiales

- ***Tareas específicas para evaluar la representación de la magnitud***

Comparación de magnitudes grandes no simbólicas

Los niños debían elegir el más numeroso de dos conjuntos de puntos (generados por un programa de Dibujo) presentados simultáneamente a ambos lados de la pantalla apretando las teclas “a” (más numeroso a la izquierda) o “ñ” (más numeroso a la derecha). El rango de numerosidad iba desde 6 puntos a 60. con 3 ratios diferentes; .50, .66, y .75. La prueba consta de 90 ensayos (30 por ratio) más 5 de práctica. Cada ensayo comienza con un punto de fijación (1000 ms) seguido por los conjuntos de puntos que permanecen un tiempo limitado en la pantalla (1500 ms) para evitar conteo. El siguiente ensayo aparece una vez que el niño haya pulsado la respuesta. Se controlaron variables no numéricas para evitar que guiaran los juicios por aspectos físicos, controlando el tamaño de los puntos, el área y la densidad. Para prevenir el uso de estrategias basadas en variables continuas (tamaño de los puntos, área, luminosidad), el radio por defecto de los puntos es de 60 píxeles y la variabilidad máxima en el tamaño es de ±35%; además, en la mitad de los ensayos el tamaño de los puntos y el área decrementa con la numerosidad, y en la otra mitad incrementa. En otras palabras, la mitad de los estímulos eran congruentes física y numéricamente (mayor número, mayor tamaño) y la otra mitad incongruentes (mayor número ocupa menor tamaño).

Medidas

a) Eficacia: proporción de errores

b) Efectos específicos de la tarea: fracción de Weber (para proporciones de aciertos por encima de 0.5).

Comparación de magnitudes grandes simbólicas (Comparación 55):

Tarea clásica de comparación simbólica con un número de referencia fijo (55) (Dehaene et al., 1990) que aún no ha sido utilizada en los estudios previos. En la tarea se presentan en el centro de la pantalla todos los números desde 31 a 79, excepto el estándar 55 (tamaño 64; letra Geneva). Los participantes tienen que apretar la tecla "a" si el número es más pequeño que 55, y la tecla "ñ" si es más grande. Cada número va precedido de un punto de fijación (1000 ms) y permanece en la pantalla hasta la respuesta. Para calcular el efecto de distancia, los números se agrupan en 6 distancias (51-54 y 56 -59, distancia 1; 47-50 y 60-63, distancia 2; y así sucesivamente).

Medidas

a) Eficacia: (a) proporción de errores; (b) media de TR; (c) índice de aciertos/TR.

b) Efectos específicos de la tarea: (a) tamaño del efecto de distancia en TR; dado que esperamos una función logarítmica en los TR (Dehaene et al., 1990), se utilizará tanto la pendiente de la regresión lineal como de la logarítmica; (b) tamaño del efecto de distancia para proporción de errores.

Tareas de Proyección (Proyección de lo simbólico a lo no simbólico y proyección de lo no simbólico hacia lo simbólico):

Basada en el estudio de Mundy y Gilmore (2009) desarrollamos una tarea de elección entre dos alternativas. En esta tarea se le presenta a los niños una cantidad entre 20 y 50 (bien en formato simbólica o no simbólica –puntos, dependiendo de la dirección de la proyección) y tienen que elegir entre dos alternativas (no simbólicas o simbólicas) que refleje dicha cantidad. La dificultad se manipula variando la ratio entre las dos alternativas. En ambas versiones (simbólica-no simbólica y viceversa) utilizamos las ratios 0.5 y 0.66. A los niños se les presentaba en la pantalla un número (o conjunto de puntos) durante 2000 ms, precedido siempre de un punto de fijación (*). Después aparecían dos cantidades (o dos conjuntos de puntos) uno en la izquierda y otro en la derecha de la pantalla y los niños debían decidir qué cantidad entre estas dos era la misma que la que se había presentado en primer lugar.

Medidas

a) Eficacia: (a) proporción de aciertos; (b) media de TR; (c) índice de aciertos/TR.

b) Efectos específicos de la tarea: (a) tamaño del efecto de la ratio.

Sumas aproximadas (versión simbólica):

Basándonos en una tarea de Gilmore et al. (2007), los participantes ven una secuencia animada en la que aparecen dos cantidades en el lado izquierdo de la pantalla y una cantidad de comparación en el lado derecho. La tarea consiste en sumar aproximadamente las cantidades de la izquierda y decidir si el total es mayor o menor la de la derecha. Las cantidades son presentadas en cajas coloreadas etiquetadas con números arábigos. Los participantes ven aparecer una caja en el lado izquierdo de la pantalla permaneciendo visible, y aparece una segunda caja en la izquierda; posteriormente aparece una tercera caja a la derecha que también permanece visible. Esta secuencia animada es narrada por el investigador. *"Juan tiene 10 canicas y consigue 10 canicas más; Ana tiene 60 canicas; ¿quién tiene más?"* (ver Figura 2.5 del Capítulo II). El niño da la respuesta apretando la tecla "a" si es la cantidad sumada de la derecha y "ñ" si es la de la izquierda. Se presentan 24 ensayos (8 para cada una de las ratios 4:5, 4:6 y 4:7) con números desde 5 a 58. Esta misma tarea se presenta en su versión no simbólica sustituyendo lo números arábigos por puntos controlando las variables continuas. A partir del trabajo de Gilmore et al. (2007), los estímulos se crearán para controlar también el uso de estrategias no basadas en la suma aproximada.

Medidas

a) Eficacia: proporción de aciertos

b) Efectos específicos de la tarea: fracción de Weber (para proporciones de aciertos por encima de 0.5).

Estimación en la recta numérica (0-100):

En esta tarea de proyección de magnitudes (simbólicas a no simbólicas) se presentan hojas A4 con una línea de 25 cm en el centro de la misma, con el 0 a la izquierda y el 10 o el 100 (dependiendo de la edad) a la derecha. La tarea consiste en marcar en la recta numérica un número arábigo situado en el centro de la hoja por encima de la línea. En el intervalo 0-10 se presentan todos los números de 1 a 9 dos veces, mientras que en el intervalo 0-100 se presentan ordenados aleatoriamente en hojas separadas los números 3, 4, 6, 8, 12, 17, 21, 23, 25, 29, 33, 39, 43, 48, 52, 57, 61, 64, 72, 79, 81, 84, 90 y 96. En el primer ítem de la tarea el experimentador dice "esta línea va de 0 a 10 (o 100). Si el 0 está aquí y el 10 (o 100) está aquí, ¿dónde situarías este número? Después de esto los participantes van pasando las hojas a su propio ritmo.

Medidas

a) Eficacia: Porcentaje de error absoluto a partir de la cantidad estimada menos cantidad a estimar dividido por la escala de estimación (Siegler & Booth, 2004)

b) Efectos específicos de la tarea: R^2 de las funciones lineal y logarítmica.

- ***Variable de control***

TIDI 0 Test ICCE de Inteligencia de Carlos Yuste Hernánz y Jesús Franco Rodríguez (2008) que evalúa 5 factores diferentes:

- **Inteligencia general:** indica la capacidad intelectual del niño, su aptitud para el trabajo intelectual y facilidad para el estudio, teniendo en cuenta su edad, nivel escolar y la etapa evolutiva que vive.

- **Factor verbal:** indica la capacidad para relacionar ideas y aplicar la inteligencia a cuestiones formuladas con palabras. Dicho resultado predice, con razonable exactitud, el éxito en actividades que suponen establecer relaciones analógicas entre palabras (obtenemos luz dando la llave de la luz y agua abriendo el...) y dominar un vocabulario básico acorde a su edad (al pie de, hacia, distinto de los demás, entrelazado, etc.).

- **Factor numérico:** indica la capacidad para manejar números y resolver operaciones y problemas de tipo matemático muy sencillos. También supone dominio de aquellos conceptos básicos de tipo numérico o cuantitativo (mitad, bastantes, menos, tantos).

- **Factor espacial:** aptitud para comprender secuencias lógicas de contenido figurativo a base de figuras geométricas o dibujos y para manejar mentalmente objetos imaginándose la parte que falta en un diseño.

- **Razonamiento lógico:** capacidad lógica del alumno a partir de la comprensión de secuencias lógicas con figuras geométricas, problemas numéricos y analogías verbales.

▪ ***Ejecución matemática***

Test BADyG (I) Batería de Aptitudes Diferenciales y Generales:

Se llevó a cabo una evaluación del Factor Numérico (NN) a través del test ***BADyG (I),*** Batería de Aptitudes Diferenciales y Generales (Yuste, Martínez & Gálvez, 1998). Las pruebas utilizadas para medir dicho factor fueron la de Cálculo (Nn) y la tarea de Problemas Numérico/Verbales (Rn) y junto a la prueba de la recta numérica, fue la única que se implementó de manera colectiva. A cada niño se le entregó un cuadernillo de respuestas. Se eligieron estas dos pruebas porque:

- **Cálculo Numérico (Nn):** mide rapidez y seguridad en cálculos mentales simples. Esta prueba sustituye a la de series numéricas de niveles superiores. Las series lógicas numéricas no son comprensibles para algunos niños de esta edad, por lo que mediría más bien el haber llegado o no a un determinado estadio de desarrollo, no discriminando entre quienes aún no las entienden. En cambio la seguridad y rapidez en el cálculo ya es una habilidad que todos poseen en mayor o menor grado.

Consta de 18 elementos ordenados según un índice de dificultad y con doble alternativa de respuesta. Para los cálculos sólo deben realizar operaciones de sumar y de restar, presentadas en series de 2 ó 3 operaciones cada vez.

- **Problemas Numérico/Verbales (Rn):** mide flexibilidad para resolver problemas numérico-verbales de sumas y restas.

La prueba consta de 18 elementos ordenados según un índice de dificultad, de respuesta abierta. Los problemas Numérico/Verbales de esta prueba se seleccionaron una vez clasificados los tipos de problemas Numérico/Verbales, para conseguir una presentación más variada y buscando medir mejor la flexibilidad mental del niño ante planteamientos muy variados.

La estructura semántica influye en la dificultad. Los problemas que comparten una misma estructura semántica difieren en dificultad según el lugar ocupado por la incógnita:

- **Cambio:** preguntando por el resultado son los más fáciles, y preguntando por el comienzo los más difíciles.
- **Combinación:** son más fáciles cuando se desconoce el conjunto que cuando se desconoce una parte.
- **Comparación:** más difícil si la incógnita está en el referente. El más difícil es el que pregunta por la diferencia.
- **Igualación:** lo más fáciles son aquellos que preguntan por la diferencia entre las dos cantidades.

4.2.1.3 Procedimiento

Los participantes fueron evaluados individualmente en una sala dentro del colegio. La realización de las pruebas específicas se llevó a cabo en dos sesiones (en ocasiones 3 dependiendo de las características individuales de cada niño) y en las horas lectivas, pudiéndose reincorporar al aula una vez concluidas. Aproximadamente, el tiempo total de aplicación de las pruebas fue alrededor de 1 hora por participante en las pruebas individuales y 45´ para las pruebas colectivas. Todas las pruebas experimentales fueron diseñadas a través del software SuperLab y se aplicaron en dos ordenadores portátiles de 15" de pantalla exceptuando la tarea de Estimación en recta numérica y las específicas de matemáticas que se realizaron dentro del aula con papel y lápiz.

Las medidas se tomaron en dos momentos con dos años de diferencia. En la Medida 1 (t1), se aplicarán las tareas específicas para evaluar la representación de la magnitud, junto con las variables de control no numéricas y el Test en ejecución matemática (BadyG I). En la Medida 2 (t2) se aplicará de nuevo el test que evalúa la ejecución matemática.

Debido a su edad, en algunos casos la información fue repetida varias veces, ya que había conceptos que aún no dominaban puesto que estaban en proceso de adquisición, por lo que antes de comenzar cada tarea había que tener plena seguridad de la comprensión de las instrucciones para que la realización de las pruebas fuese lo más eficaz posible. Se les recordaba que debían prestar atención y ser rápidos, aunque sin olvidar la precisión. Para ello, también era necesario que adoptasen una posición correcta sentándose cómodamente frente al ordenador. Cada prueba se iniciaba pulsando la barra espaciadora del teclado, en cada una además contenía una pausa, para evitar la fatiga o falta de concentración a la tarea dado que cada una estaba compuesta por un número elevado de estímulos. Además, todas las pruebas iban precedidas de 3 ensayos de prueba para que los niños comprendieran mejor las instrucciones y se familiarizasen con la mecánica de la prueba.

Puesto que una de las medidas que íbamos a evaluar era la rapidez (TRs), era muy importante que los participantes tuvieran los dedos índices de cada mano en las teclas "a" y "ñ". Facilitamos esta tarea cubriendo el ordenador con un plástico opaco que dejaba a la vista únicamente las dos teclas a utilizar.

4.2.2 Resultados

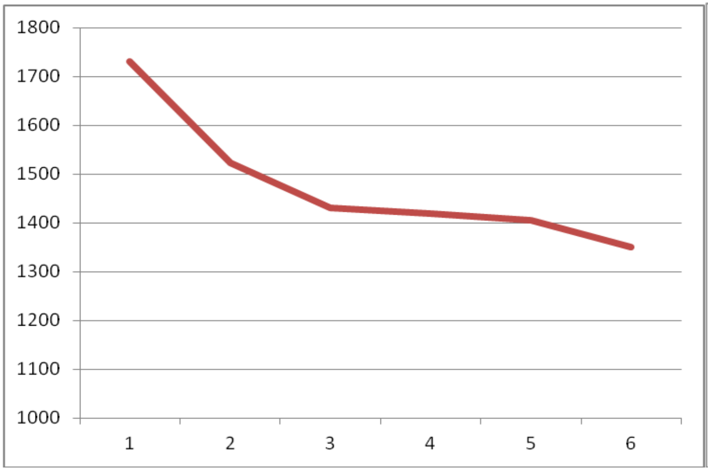
4.2.2.1 Análisis Descriptivos

- ***Efectos específicos de las tareas***

Comparación de magnitudes grandes simbólicas (Comparación 55):

Llevamos a cabo un análisis de varianza (ANOVA) de medidas repetidas sobre los tiempos de respuesta utilizando las distancias (1-6) como factor intra-sujeto. El análisis arrojó un efecto significativo de la distancia $F(5, 270)= 24.33$, $p<.0001$. Contrastes a posteriori mostraron que los participantes Distancia 1 tardaron significativamente más que en todas las distancias y tardaron más en Distancia 2 que en 4, 5 y 6.

Al igual que en los tiempos de reacción, ejecutamos un análisis de varianza de medidas repetidas (ANOVA) sobre el porcentaje de aciertos con la distancia como factor intra-sujeto. Como se observa en la Figura 4.1, se dio un efecto distancia significativo $F(5, 270)= 17.34$, $p <.0001$. Y contrastes a posterior mostraron que en la Distancia 1 hubo menos aciertos que en las distancias 3, 4, 5 y 6, menos aciertos en distancia 2 que en distancias 4, 5 y 6 y menos aciertos en la distancia 3 que en la 4, 5 y 6.



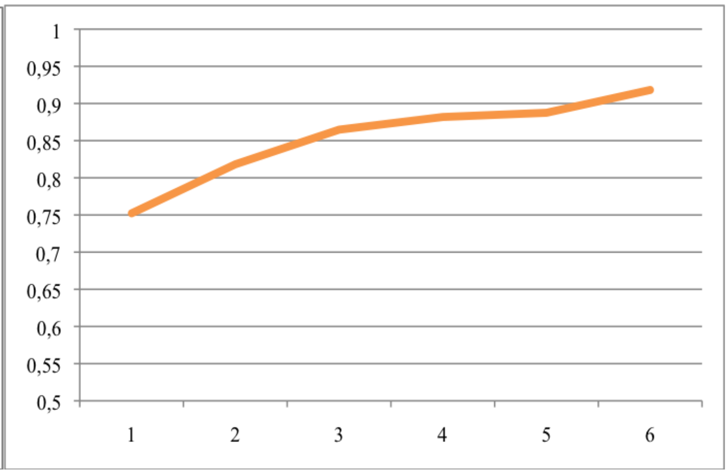


Figura 4.1: Tiempos de respuesta y proporción de aciertos en la tarea comparación simbólica magnitudes grandes (Comparación 55) en función de la distancia.

Comparación de magnitudes grandes no simbólicas:

Se llevó a cabo un análisis de va de medidas repetidas sobre la proporción de errores con la ratio como factor intra-sujeto. Como refleja la Figura 4.2 hubo un efecto ratio F (2, 108)= 60.51, p < .0001. Contrastes a posterior utilizando el ajuste Bonferroni mostraron que hubo diferencias significativas entre cada una de las ratios (proporción de errores).

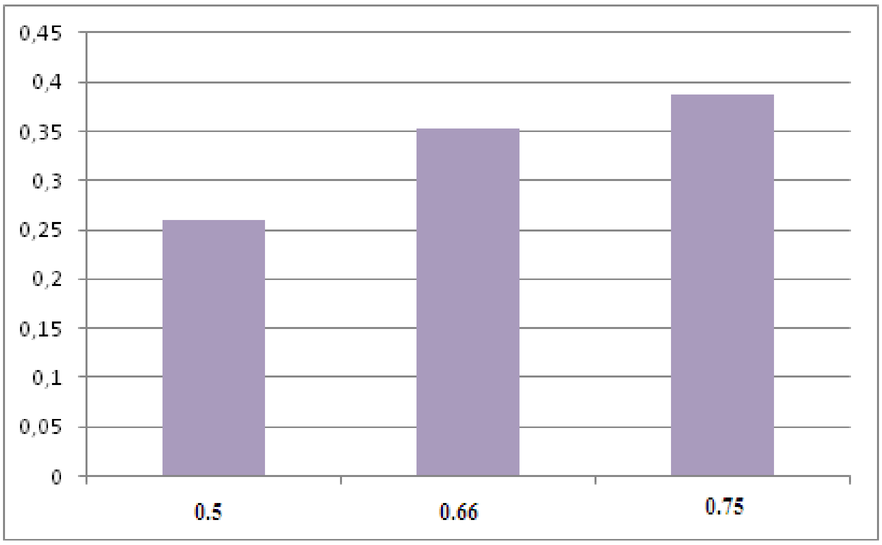


Figura 4.2*:* Proporción errores en comparación no simbólica magnitudes grandes en función de la ratio.

Tareas Proyección no simbólica-simbólica:

Para analizar la tarea de proyección llevamos a cabo un análisis de varianza de medidas repetidas sobre la proporción de aciertos con las variables dirección de la proyección y ratio como factores intrasujetos. El efecto de la ratio fue significativo $F(1, 52) = 7.75$, $p < .005$, mientras que ni el efecto dirección de la proyección ni la interacción dirección-ratio fueron significativos ($F < 1$), lo cual significa que los participantes resolvieron ambas tareas (Proyección no simbólico-sb vs. Proyección simbólica-no simbólica) con la misma eficacia.

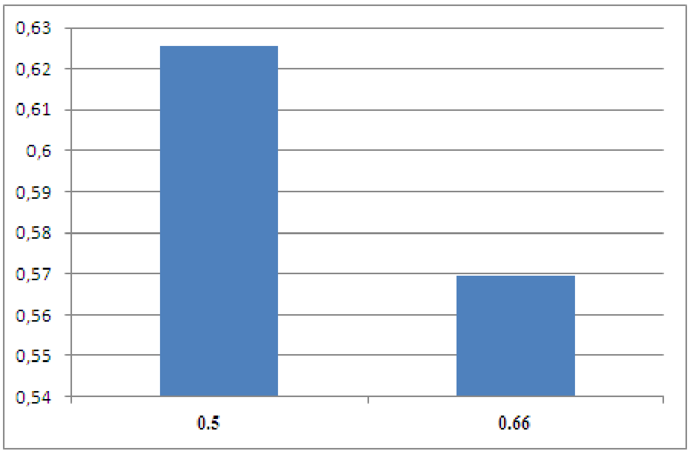


Figura 4.3: Efecto ratio para las tareas de Proyección simbólica y no simbólica (Proporción de aciertos)

Sumas Aproximadas simbólicas:

Al igual que en los efectos anteriores, llevamos a cabo un análisis de varianza de medidas repetidas sobre la proporción de errores con la ratio como factor intra-sujetos. Como se puede observar en la tabla x, hubo un efecto significativo de la ratio $F(2, 104) = 21.84$, $p < .0001$. Comparación por pares mostraron que las diferencias fueron significativas entre cada una de las ratios con las demás.

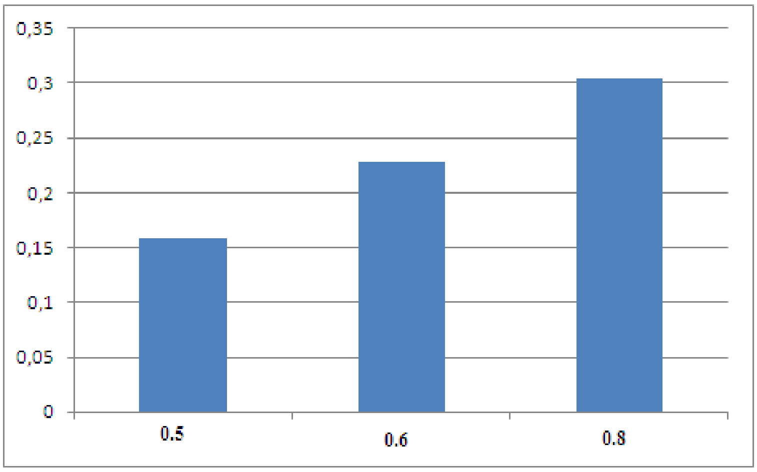


Figura 4.4: Proporción de errores en la tarea de sumas aproximadas en función de la ratio.

Estimación en recta numérica (0-100):

Como hemos visto en otras partes de esta Tesis, sabemos que con edades mayores los niños cambian de una función logarítmica a una función lineal en la recta numérica. Por ello llevamos a cabo un análisis de Regresión calculando las funciones lineales y logarítmicas. El análisis mostró una función lineal (R^2 = .94) y una función logarítmica (R^2 = .95) (ver Figura 4.5), por lo tanto, ambas funciones predicen de manera similar las estimaciones en la recta numérica, lo cual es coherente con los estudios previos, ya que precisamente en el primer curso (6 años) es cuando los niños empiezan a cambiar de una función logarítmica a una función lineal.

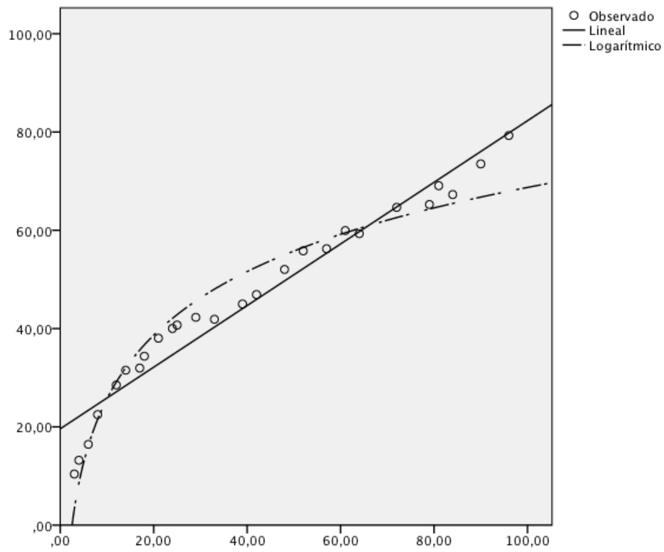


Figura 4.5: Función logarítmica y lineal de las estimaciones en la recta numérica (0-100)

4.2.2.2 Análisis de Correlaciones

Para analizar la relación entre las distintas medidas utilizadas y la ejecución matemática, así como entre las distintas medidas entre sí, llevamos a cabo un análisis de correlación de Pearson (ver tabla 4.1).

Tabla 4.1: Correlaciones de Pearson entre las distintas medidas utilizadas en el estudio longitudinal.

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
1. BADyG		.076	.009	-0.333*	-.504**	-.530**	-.334*	-.526**	.492**
2. Comparación magnitudes grandes no simbólica (prop. errores)			.743**	.209	.133	.005	.049	.187	-.188
3. Comparación magnitudes grandes no simbólicas (w)				.251	.038	-.011	.090	.213	-.205
4. Proyección (1) errores					.252	.356**	-.135	.332*	-.311*
5. Sumas Aproximadas (proporción de errores)						.251	-.149	.393**	-.424**
6. Comparación 55 (Eficacia)							-.380**	.524**	-.448**
7. Comparación 55 (I.D) con TR								-.159	.182
8. Recta Numérica (porcentaje error absoluto)									-.951**
9. Recta numérica (R^{2})									

** $p < .01$
* $p < .05$
(1) Dado que no hay diferencias en función de la dirección de la proyección, utilizamos la puntuación media de la proporción de aciertos en ambas direcciones.
Nota: prop; proporción, (I.D); índice distancia; TR, Tiempos de reacción.

Como se puede observar en la Tabla 4.1, todas las medidas utilizadas correlacionaron significativamente con la ejecución matemática evaluada dos años más tarde, excepto la de Comparación de magnitudes grandes no simbólicas. Además, las dos medidas de estimación en la recta numérica correlacionaron con las sumas aproximadas y con la eficacia en comparación simbólica, pero no con el índice de distancia. Por su parte, las sumas aproximadas no correlacionaron con comparación simbólica. Y la tarea de proyección correlacionó con la eficacia para comparar cantidades simbólicas y con las medidas de estimación en la línea numérica.

4.2.2.3 Análisis de Regresión

Para analizar hasta qué punto las distintas variables explican una parte de la varianza en ejecución matemática más allá de lo explicado por la variable de control, llevamos a cabo distintos análisis de regresión jerárquica en función de las medidas utilizadas para la ejecución matemática. Dado que la comparación de magnitudes no simbólicas medida en 1º de Primaria no correlacionó con la ejecución matemática medida dos años más tarde, no fueron utilizadas en el modelo de regresión. En el paso 1 se incluyó la variable de control y para ver de qué manera cada una de las restantes medidas contribuyen individualmente a la varianza de ejecución matemática fueron introducidas en sucesivos pasos. Así en el paso 2 se incluyó la comparación simbólica, en el paso 3 las sumas aproximadas, en el paso 4 la recta numérica y en el paso 5 las medidas de proyección. En la tabla 4.2, se reflejan los resultados de este análisis.

Tabla 4.2: Análisis de Regresión Jerárquica evaluación ejecución matemática. Medidas eficacia

Medidas de Eficacia

Pasos	**Predictor**	β	R^2	ΔR^2
1	Variable Control (inteligencia)	.16	.17	.17**
2	Comparación 55 (sb) IE	-.29*	.30	.13**
3	Sumas Aproxim. (sb) err	-,34*	.43	.13**
4	Recta Numérica (PEA)	-,17	.45	.02
5	Proyección (err)	-.03	.45	0

** p < .01
* p < .05
Nota: err, errores; sb, simbólico; I.E, índice de eficacia; PEA, porcentaje de error absoluto

Como se puede ver en la Tabla 4.2 los resultados de este análisis mostraron que todo el modelo explica un 45.1 % de la varianza F(5, 37) = 6.08 p < .0001. Pero lo más importante es que las medidas relacionadas con la representación de la magnitud añadieron un 37.4 % más. No obstante, no todas las medidas contribuyeron individualmente a la varianza de la ejecución matemática. La primera variable introducida –comparación simbólica– añadió un 13.3 % a lo explicado por la medida de inteligencia general (p < .005). Igualmente las sumas aproximadas añadieron un 12.9 % más (p < .005). Sin embargo, ni la recta numérica ni la proyección contribuyeron más allá por lo explicado por las otras dos variables posiblemente debido a la colinealidad entre unas variables y otras.

Llevamos a cabo otro análisis de regresión jerárquica utilizando como medidas los efectos específicos que reflejan la representación como son: el índice de distancia en comparación simbólica y la función lineal en la estimación en la recta numérica. En el paso 1 se incluyó la variable de control de Inteligencia General, en el paso 2 el índice de distancia de la comparación simbólica, en el paso 3 las sumas aproximadas, en el paso 4 incluimos R^2 de la estimación en recta numérica y en el paso 5 las medidas de proyección. El modelo explicó un 42.3 % de la varianza F(5, 37) = 5.43 p < .001 pero lo más importante es que otra vez las tareas de comparación simbólica y sumas aproximadas contribuyeron significativamente a la varianza de la ejecución en matemáticas 2 años después (Ver tabla

4.3). La diferencia con el análisis anterior es que en este caso el índice de distancia que refleja representación de la magnitud contribuyó significativamente a la ejecución en matemáticas.

Tabla 4.3: Análisis de Regresión Jerárquica evaluación ejecución matemática. Medidas específicas.

	Medidas de los Efectos específicos de las tareas			
Pasos	**Predictor**	β	R^2	ΔR^2
1	Variable Control (inteligencia)	.23	.17	.17**
2	Comparación 55 (sb) I.D	-.25*	.28	.11*
3	Sumas Aproxim. (sb) err	-,30*	.39	.11*
4	Recta Numérica (R^2)	.18	.42	.03
5	Proyección (err)	-.08	.42	0

** $p < .01$
* $p < .05$
Nota: err, errores; sb, simbólico; I.D, índice distancia; R^2, función lineal de la estimación en recta numérica.

En un intento de analizar hasta qué punto estas medidas relacionadas con el procesamiento y la representación de la magnitud numérica contribuyen a la ejecución matemática dos años más tarde, llevamos a cabo un nuevo análisis de regresión jerárquica pero introduciendo como variable de control la propia ejecución matemática en t1, es decir, queremos analizar si el procesamiento de magnitudes numéricas explica la varianza en ejecución matemática dos años más tarde controlando las diferencias individuales en la propia ejecución matemática en t1. En otras palabras, queremos estudiar si estas medidas contribuyen más allá de lo que contribuye la propia ejecución matemática. Para ello en el paso 1 junto con la variable de control de inteligencia introdujimos la ejecución matemática en t1 y en el paso 2 agrupamos las medidas de procesamiento de magnitudes para ver su contribución global.

Tabla 4.4: Análisis de Regresión Jerárquica evaluación ejecución matemática 2 años después

Ejecución matemática 2 años después				
Pasos	**Predictor**	β	R^2	ΔR^2
1	Variable Control (inteligencia)	-.01	.51	.51**
	Ejec.Matemática t1 (BadyG)	.53**		
2	Comparación 55 (sb) I.E	-.13	.64	.13*
	Sumas Aproxim. (sb) err	-.29*		
	Recta Numérica (err)	-.11		
	Proyección (err)	-.04		

** p < .01
* p < .05
Nota: err, errores; sb, simbólico; Aproxim., aproximadas; I.D, índice distancia; R^2, función lineal de la estimación en recta numérica.

Como se puede ver en la Tabla 4.4, el modelo completo explicó un 64.4 % de la varianza, pero lo más importante es que las medidas de procesamiento de la magnitud añadieron un 12.6 % más ($p < .05$) a lo explicado por las medidas de inteligencia y de ejecución matemática.

4.2.3 Discusión

Nuestro objetivo en este estudio era analizar qué habilidades de las relacionadas con el procesamiento de magnitudes predicen la ejecución matemática más allá de lo explicado por la inteligencia dos años después. Para ello utilizamos una serie de tareas que han mostrado su relación con la ejecución matemática. Antes de analizar las relaciones entre las medidas obtenidas en las distintas tareas y la ejecución matemática, es necesario verificar que se producen los efectos específicos relacionados con la representación de la magnitud en estas tareas y con esta muestra. Como pudimos comprobar en los primeros análisis, en cada una de las pruebas se producen los efectos específicos, lo que demuestra que las pruebas miden correctamente aquellos que deben medir. Así, en las pruebas de comparación de magnitudes no simbólicas, la prueba de sumas aproximadas y las pruebas de proyección se producen los efectos de ratio esperados, o lo que es lo mismo, que a ratios mayores los niños encuentran más dificultad para resolver las tareas, posiblemente debido a un solapamiento representacional entre las magnitudes más cercanas. De la misma manera, en la prueba de estimación en la recta numérica tanto la función logarítmica como la función lineal presentan una R^2 similar (R^2 = .94 para la función lineal y (R^2 = .95) para la función logarítmica), lo que sugeriría que los niños de primer curso se encuentran en plena transición de una representación logarítmica a una representación lineal, lo cual coincide con los estudios previos sobre el tema (e.g., Booth & Siegler, 2004).

De especial interés para nosotros era la prueba de comparación de magnitudes simbólicas, dado que no había sido utilizada hasta la fecha por ningún estudio en niños de estas edades. Y como esperábamos, se produjo el efecto distancia, esto es, que a menor distancia entre los números de dos cifras más dificultad tenían los niños para compararlos. Esto es importante, porque el momento de la evaluación (a finales del primer curso de E. Primaria) es un periodo en el que los niños han comenzado a estudiar de manera formal los números de dos cifras. Pero dado el efecto distancia encontrado, los niños ya acceden a una representación de la magnitud de esos números. No obstante, como podemos apreciar en la Figura 4.6 que recoge los tiempos de respuesta en función de la distancia, la pendiente refleja una función más logarítmica que lineal. De hecho, llevamos a cabo un análisis de regresión que así lo recogía (R^2 = .79 para la regresión lineal; R^2 = .94 para la regresión logarítmica). Esto sugiere que los niños a esta edad presentan un mayor solapamiento representacional en las cantidades más cercanas grandes que en las cantidades más cercanas pequeñas, acorde con las curvas de Gauss logarítmicas a lo largo de la hipotética línea numérica mental (ver Figura 1.6 del Capítulo I), posiblemente debido a que están comenzando a proyectar los números simbólicos en su representación de la magnitud subyacente. Esto es interesante, porque la tarea de estimación en la línea numérica ya refleja una representación más lineal, indicando que el acceso a la representación de la magnitud desde los números simbólicos no es igual dependiendo del contexto de la tarea.

Considerando las relaciones entre las distintas medidas de la representación de la magnitud y la ejecución matemática, los resultados se aproximan más a la hipótesis que plantea diferencias individuales en el acceso a la representación desde los números simbólicos que la hipótesis que plantea diferencias individuales en la precisión de las representaciones de la magnitud no simbólicas. Como hemos visto en el análisis de correlaciones, no hemos encontrado ninguna relación entre las medidas de procesamiento de magnitudes no simbólicas y la ejecución matemática dos años más tarde, lo que sugiere que la precisión de la representación de la magnitud per se no explica las diferencias individuales en la ejecución matemática posterior. Nuestros resultados difieren de aquellos obtenidos por Halberda, Libertus y colaboradores (e.g., Halberda et al., 2008; Libertus et al., 2013a y b) quienes sí encontraron una relación entre la precisión del SNA y la ejecución matemática. No obstante, una diferencia que encontramos entre nuestro estudio y los llevados a cabo por estos autores es el tamaño de las muestras, siendo mucho más pequeño en nuestro estudio, lo que puede contribuir a estos resultados contradictorios. Es probable que nuestro diseño no encuentre la potencia estadística necesaria para que aparezcan correlaciones significativas. Otra diferencia se encuentra en la tarea utilizada en aquellos estudios y la utilizada en el nuestro, especialmente en el rango de las cantidades a comparar. En los estudios de Halberda, Libertus y colaboradores, las cantidades utilizadas iban de 5 a 30 como máximo, mientras que en nuestra prueba iban de 6 a 60, lo que la puede hacerla mucho más exigente. De hecho, las fracciones de Weber en nuestro estudio fueron más elevadas que en los estudios previos. Por ejemplo, en los trabajos de Halberda, Libertus y colaboradores se encontraron fracciones de Weber para esta edad entre .20 y .40 aproximadamente para niños de la misma edad la utilizada en nuestro estudio, mientras que en nuestro estudio se obtuvo una media en la fracción de Weber de 1.5 cuando se tuvieron en cuenta todos los participantes. Cuando eliminamos aquellos participantes con proporciones de errores por encima del 50% (ocho participantes), la fracción de Weber media bajo a .87, aún muy por encima de lo encontrado en los estudios previos. Por lo tanto, nuestros resultados tienen que ser tomados con cautela, debido al tamaño de la muestra y a las exigencias de la tarea.

Por otro lado, sin embargo, nuestros son coherentes con la propuesta de que las diferencias individuales en la ejecución matemática se relacionan con las habilidades de los niños para acceder a la representación de la magnitud desde los números simbólicos. Los análisis mostraron correlaciones significativas entre la ejecución matemática y la ejecución en las demás tareas que reflejan representación de la magnitud, con correlaciones significativas entre $r = .33$ para la proporción de errores en la tarea de proyección y $r = .53$ para la medida de eficacia (combinación de tiempos de respuesta y errores) de la tarea de comparación de magnitudes simbólicas, lo cual es importante teniendo en cuenta el tamaño de la muestra utilizada. Además, las correlaciones fueron significativas tanto para las medidas de eficacia (errores, tiempos de respuesta/aciertos) como para las medidas que reflejan representación de la magnitud, como el índice de distancia en la tarea de comparación de magnitudes simbólicas o la función lineal de la tarea de estimación en la línea numérica. Considerando que estas tareas implican acceder a la representación de la magnitud desde los números simbólicos, estos resultados suponen que no es solo la eficacia con la que se accede a la magnitud lo que se relaciona con la ejecución matemática, sino también la activación de dicha magnitud.

Más allá de los análisis correlaciónales, nuestra intención era analizar la contribución que las distintas medidas hacen a la ejecución matemática medida dos años más tarde. El primer análisis de regresión jerárquica en el que incluimos los índices de eficacia mostró una aportación única de la comparación de magnitudes simbólicas y las sumas aproximadas después de controlar la inteligencia. Por lo que se refiere a la comparación de magnitudes simbólicas, nuestros resultados coinciden con los encontrados en otros estudios, tanto longitudinales como con medidas concurrentes (e.g., Bartelet et al., 2014; Bugden & Ansari, 2011; De Smedt et al., 2009; Holloway & Ansari, 2009; Vanbinst et al., 2012, 2015). Sin embargo, nuestro estudio va más allá al demostrar esta relación con números de dos cifras. Esto es importante, porque sugiere que la eficacia con la que se accede a la magnitud desde los números simbólicos no solo ocurre con los números de 1 a 9, sino que el aprendizaje de los números de dos cifras y la eficacia con la que se procesan juega un papel relevante en el aprendizaje de las matemáticas. Pero no solo eso, el segundo análisis de regresión en el que se incluyó como medida el efecto específico de la tarea (i.e., el índice de distancia) también aportó significativamente a la varianza de la ejecución matemática más allá de la inteligencia y de las demás variables incluidas en el modelo. Esto sugiere que no solo es importante para la ejecución matemática la eficacia con la que se procesan números, sino también la precisión con la que se proyectan estos números en la magnitud subyacente; aquellos niños que son más precisos accediendo a la representación de la magnitud desde los números de dos cifras cuando estos se están aprendiendo son mejores resolviendo tareas matemáticas formales dos años más tarde. Una posible interpretación de este hecho podría ser que cuando hay conexiones más débiles entre los números simbólicos y sus magnitudes subyacentes hace más difícil para los niños el aprendizaje de conceptos aritméticos más complejos

La competencia de los niños con las sumas aproximadas simbólicas también explicó parte de la varianza de la ejecución matemática. No conocemos estudios previos que hayan analizado esta tarea en relación a la ejecución matemática. Solo De Smedt y Gilmore (2011) utilizaron una tarea de sumas aproximadas simbólicas en niños con dificultades en el aprendizaje de las matemáticas encontrando una peor ejecución de estos niños respecto de un grupo de control sin dificultades, lo cual sugiere que las habilidades implicadas en esta tarea tienen relación con la ejecución matemática. Nuestro estudio va más allá al ser el primero mostrando que en niños con desarrollo típico, una buena ejecución en esta tarea predice la competencia matemática posterior. Esto apoyaría otra vez la hipótesis de que el acceso a la representación de la magnitud desde los números simbólicos se relaciona con la ejecución matemática ya que de acuerdo con los autores que diseñaron esta tarea (i.e., Gilmore et al., 2007), cuando los niños aprenden los números simbólicos y los proyectan en las representaciones no simbólicas, espontáneamente utilizan el sistema no simbólico para operar con las cantidades presentadas simbólicamente. Se podría argumentar que los niños de nuestro estudio se basan en el cálculo exacto para resolver la tarea, ya que en el primer curso de Educación Primaria han comenzado a aprender el algoritmo de la suma de números de dos cifras, y que por lo tanto son las habilidades de cálculo las que se relacionan con la ejecución matemática posterior. Sin embargo esto es poco probable, ya que los niños a esta edad no han desarrollado aún estrategias de cálculo mental para poder resolver la tarea. Además, analizando los tiempos de respuesta encontramos una media de alrededor de 2000 ms, un tiempo poco factible para que estos niños puedan calcular mentalmente. Por lo tanto, parece más factible que los niños resuelvan la tarea "reclutando" su conocimiento numérico no simbólico activado desde los números simbólicos. Esta explicación se apoya también en el efecto ratio encontrado en los resultados de esta tarea

Por otro lado, la estimación en la línea numérica y las habilidades de proyección no explicaron parte de la varianza de ejecución matemática más allá de la inteligencia y de la comparación de magnitudes y sumas aproximadas. Este resultado es sorprendente, especialmente el encontrado en la estimación en la línea numérica, ya que las correlaciones de Pearson con la ejecución matemática fueron tan altas como las encontradas en la comparación de magnitudes y sumas aproximada. Además, estudios previos que han utilizado esta tarea han encontrado una relación con la ejecución matemática, tanto cuando ha sido analizada aisladamente (e.g., Booth & Siegler, 2008) como conjuntamente con otras tareas (e.g., Moore & Ashcraft, 2015; Sasanguie et al., 2012, 2013).

Una posible explicación es la colinealidad de esta tarea con las sumas aproximadas y la eficacia en la comparación de magnitudes, dado que las correlaciones con estas tareas son altas, lo cual sugiere que comparten aspectos comunes de la representación de la magnitud. No obstante, repetimos el análisis de regresión jerárquica incluyendo las medidas de esta tarea en el paso 2, antes de las sumas aproximadas simbólicas y la comparación de magnitudes simbólicas. En este caso, la estimación en la línea numérica explicó significativamente una parte de la varianza más allá de la inteligencia; e interesantemente, las tareas de sumas aproximadas y comparación de magnitudes incluidas en los pasos 3 y 4 siguieron explicando una parte de la varianza de la ejecución matemática más allá de la inteligencia y la estimación en la línea numérica. Esto sugiere que aunque las habilidades implicadas en las tres tareas se relacionan con la ejecución matemática, parece que las sumas aproximadas simbólicas y la comparación de magnitudes simbólicas contribuyen en mayor medida a las diferencias individuales en la ejecución matemática medida dos años más tarde.

En el caso de la tarea de proyección, a pesar de encontrar una correlación de Pearson significativa, estas habilidades de proyección no contribuyeron a la varianza de la ejecución matemática más allá de la inteligencia y de lo aportado por las demás medidas de la representación de la magnitud. Además, y al igual que hicimos con la estimación en la línea numérica, repetimos en análisis de regresión jerárquica introduciendo esta variable en el paso 2. Pero a diferencia de la tarea de estimación en la línea numérica, las habilidades implicadas en la tarea de proyección no explicaron varianza en ejecución matemática más allá de la inteligencia. Estos resultados contradicen los aportados por Mundy y Gilmore (2009) que utilizaron una tarea similar a la utilizada en este estudio y con niños de la misma edad, y quienes encontraron que las habilidades de proyección entre representaciones simbólicas y no simbólicas se relacionaron con la ejecución matemática por encima de la influencia de la ejecución en tareas de comparación de magnitudes. No obstante, hay diferencias importantes entre el estudio del Mundy y Gilmore (2009) y el presentado aquí. Por un lado, en el presente estudio incluyó dos medidas además de la comparación de magnitudes en el modelo de predicción: una de ellas (estimación en la línea numérica), además, correlacionó con las habilidades de proyección. Además, estos autores analizaron las relaciones entre las habilidades de proyección y la ejecución matemática concurrentemente, es decir, en el mismo momento de medida, mientras que nuestro estudio es longitudinal, con las medidas de ejecución matemática tomadas dos años después de evaluar las habilidades de proyección. En este sentido, es posible que las habilidades de proyección tengan influencia en los primeros momentos de la enseñanza formal de las matemáticas cuando los niños están precisamente estableciendo relaciones entre los números simbólicos y las magnitudes subyacentes. Pero pasado este momento, y a pesar de mantener cierta relación con la ejecución matemática posterior (la correlación de Pearson fue significativa), estas habilidades pierden peso respecto a otras relacionadas con la representación de la magnitud, como las tres analizadas aquí.

Una última cuestión referente a este estudio es hasta qué punto estas habilidades relacionadas con la representación de la magnitud contribuyen a la ejecución matemática dos años más tarde después de controlar la ejecución matemática en t1. Cuando las puntuaciones de ejecución matemática medidas en t1 se incorporaron en el análisis de regresión jerárquica, las medidas relacionadas con la representación de la magnitud siguieron contribuyendo a la varianza de la ejecución matemática medida en t2. Esto indica que las medidas implicadas en el acceso a la representación de la magnitud predicen la ejecución matemática posterior por encima de la ejecución matemática medida dos años antes.

En definitiva, los resultados de este estudio demuestran que el procesamiento de números simbólicos y el acceso desde los mismos a la representación que subyace a ellos medidos a los 6 años de edad predice la ejecución matemática de esos niños dos años más tarde. Los niños a esa edad (primer curso de Educación Primaria) están en el proceso de proyectar los números simbólicos de dos cifras en la representación no simbólica preexistente. Y el procesamiento de estos números y sus conexiones con la representación de la magnitud subyacente parece ser importante para las habilidades matemáticas posteriores.

4.3. ESTUDIO 2

4.3.1 Método

4.3.1.1 Participantes

116 estudiantes de segundo curso del Grado de Magisterio en Primaria de la Universidad de Salamanca formaron parte de este estudio (n= 116, 77 mujeres y 39 hombres, con una media de 22.6 años). Para el Objetivo 1, la muestra se redujo a n=86; 15 participantes no tenían alguna de las medidas de las variables de control, 9 no completaron todas las tareas (se utilizaron un gran número de pruebas tal y como veremos a continuación) y 6 que no pudieron incluir alguna prueba debido al número tan elevado de errores. En el Objetivo 2 y 3 la muestra para los análisis estaba compuesta por 83 participantes; 15 participantes no tenían alguna de las medidas de las variables de control, 12 no habían realizado alguna tarea específica de este análisis y 7 no tenían las 3 medidas de ejecución matemáticas.

4.3.1.2 Materiales

- ***Tareas específicas para evaluar la representación de la magnitud***

Comparación de magnitudes pequeñas simbólicas y no simbólicas (1-9)

Los participantes tienen que elegir lo más rápidamente posible el mayor de dos números arábigos (1 a 9) o de dos conjuntos de puntos presentados simultáneamente a ambos lados de la pantalla apretando las teclas "a" (mayor a la izquierda) o "ñ" (mayor a la derecha). Un punto de fijación * (1000 ms) precede a cada ensayo, que en el caso de los números permanece en la pantalla hasta la respuesta, y en el caso de los puntos permanece un tiempo limitado (750 ms) para evitar conteo. Se presentan 72 ensayos correspondientes a las combinaciones de uno a nueve con una distancia numérica entre estímulos de 1 a 6. En la condición no simbólica, el área individual, el área total y la densidad de los puntos se varía para evitar el uso de estrategias basadas en variables continuas. Concretamente, de los 12 pares que había por distancia; cuatro eran congruentes, 4 incongruentes y 4 neutros. Es decir, en 4 pares la numerosidad mayor presentaba un área mayor, en otros 4 la numerosidad menor se presentaba con un área mayor y en 4 ambas numerosidades ocupaban el mismo área.

Medidas

a) Eficacia: (a) proporción de aciertos; (b) media de TR; (c) índice de aciertos/TR.

b) Efectos específicos de la tarea: (a) tamaño del efecto de distancia en TR calculado con dos procedimientos: TR de las dos distancias cortas menos TR de las dos distancias largas dividido por TR de las largas (Holloway & Ansari, 2009), y pendiente de la regresión TR-distancia; (b) tamaño del efecto de distancia para proporción de aciertos.

Comparación de magnitudes grandes no simbólicas

Los participantes eligen el más numeroso de dos conjuntos de puntos (azules y amarillos mediante el programa específico Panamath) presentados simultáneamente a ambos lados de la pantalla apretando las teclas S (más numeroso a la izquierda) o L (más numeroso a la derecha). Se presentan dos rangos de numerosidad dependiendo de la edad (5-30 y 9-80) con distintas ratios; .50, .66, .75 y .83. La prueba consta de 160 ensayos (20 por ratio) más 5 de práctica. Cada ensayo comienza con un punto de fijación (1000 ms) seguido por los conjuntos de puntos que permanecen un tiempo limitado en la pantalla (600 ms) para evitar conteo. El siguiente ensayo aparece apretando el investigador la barra espaciadora. En la mitad de los ensayos los puntos amarillos son más numerosos y en la otra mitad los azules. Para prevenir el uso de estrategias basadas en variables continuas (tamaño de los puntos, área, luminosidad), el radio por defecto de los puntos es de 60 píxeles y la variabilidad máxima en el tamaño es de ±35%; además, en la mitad de los ensayos el tamaño de los puntos y el área decrementa con la numerosidad, y en la otra mitad incrementa.

Medidas

a) Eficacia: proporción de aciertos

b) Efectos específicos de la tarea: fracción de Weber (para proporciones de aciertos por encima de 0.5).

Comparación de magnitudes grandes simbólicas (Comparación 65)

Tarea clásica de comparación simbólica con un número de referencia fijo (65) (Dehaene et al., 1990) y que tiene el mismo procedimiento que la tarea de Comparación 55 anteriormente explicada en el Estudio 1. En la tarea se presentan en el centro de la pantalla todos los números desde 31 a 99, excepto el estándar 65. Los participantes tienen que apretar la tecla A si el número es más pequeño que 55, y la tecla Ñ si es más grande. Cada número va precedido de un punto de fijación (1000 ms) y permanece en la pantalla hasta la respuesta. La tarea estaba compuesta por 136 estímulos más 6 ensayos. Para calcular el efecto de distancia, los números se agrupan en 6 distancias (51-54 y 56 -59, distancia 1; 47-50 y 60-63, distancia 2; y así sucesivamente).

Medidas

a) Eficacia: (a) proporción de aciertos; (b) media de TR; (c) índice de aciertos/TR.
b) Efectos específicos de la tarea: (a) tamaño del efecto de distancia en TR; (b) tamaño del efecto de distancia para proporción de aciertos.

<u>Enumeración de puntos</u>

Solo recientemente se ha incorporado esta tarea como factor explicativo de las diferencias individuales en matemáticas, especialmente los efectos específicos en el rango de subitizing. Los estímulos se componen de puntos negros distribuidos aleatoriamente sobre un fondo blanco. Siguiendo investigaciones previas, el tamaño de los puntos es constante (2 cm de diámetro) y la numerosidad varía a lo largo de los ensayos (n = 1 a 9). Los puntos se presentan en una cuadrícula (15 por 11 cm) de manera pseudo-aleatoria, con una distancia mínima de 2 cm y una distancia máxima de 7 cm. La prueba se compone de 54 ensayos (6 por cada numerosidad) presentados aleatoriamente, más 5 de práctica. Un punto de fijación aparece en el centro de la pantalla (1000 ms) previo a la presentación de cada estímulo, que permanece en la pantalla hasta que el participante da una respuesta que el investigador registra pulsando una tecla numérica, después de lo cual aparece otro estímulo con un intervalo de 2000 ms. Un dispositivo de voz activada conectado al ordenador recoge los tiempos de respuesta desde que los estímulos aparecen en la pantalla hasta que el participante da la respuesta.

Medidas

a) Eficacia: (a) media de TR; (b) proporción de aciertos; (c) mediana de los TR de las respuestas correctas dividido por la proporción de respuestas correctas.
b) Efectos específicos de la tarea (a partir de Gray & Reeve, 2014): (a) rango de subitizing, o punto de discontinuidad en el que la pendiente de los TR cambia de una función lineal a una exponencial; (b) pendiente de los TR en el rango de subitizing; (c) intercepto en y de la pendiente de los TR del rango de subitizing; (d) pendiente de los TR del rango de conteo.

Emparejamiento audiovisual dígito palabra numérica

En la pantalla del ordenador se presentan números arábigos y simultáneamente, los participantes escuchan una palabra numérica (basada en la tarea propuesta por Sasanguie & Reynvoet, 2014). La tarea de los participantes consiste en decidir de la manera más rápida y precisa posible, si la palabra numérica que escuchan y el dígito que ven son iguales (coinciden) o diferentes (no coinciden) pulsando la tecla A o la tecla L. La mitad de los participantes tienen que apretar la tecla L si coinciden y la tecla A cuando el número que escuchan es diferente al que ven en la pantalla. La otra mitad de los participantes, para indicar que ambos números son el mismo pulsan la tecla A y cuando son diferentes pulsan la L. El rango numérico que hemos utilizado va de 1-9 en formato visual (dígitos arábigos en blanco sobre fondo negro, fuente Geneva 36) y en formato auditivo (palabras numéricas). Los sonidos fueron grabados digitalmente por una hablante española. De esta manera en la mitad de los ensayos el estímulo auditivo y el visual eran iguales (i.e. 1-1, 2-2, 3-3, 4-4, 5-5, 6-6, 7-7, 8-8 y 9-9). Estos nueve ensayos se presentaron de forma aleatoria, ocho veces a los participantes para tener un total de 72 ensayos en la condición de iguales. Para los ensayos en los que los números que se presentaban eran diferentes, tenemos nueve ensayos diferentes, con la distancia numérica de uno (i.e. 1-2, 2-3, 3-4, 4-5, 5-6, 6-7, 7-8, 8-9 y 9-8), nueve ensayos diferentes con la distancia numérica de dos (i.e. 1-3, 2-4, 3-5, 4-6, 5-7, 6-8, 7-9, 8-6 y 9-7), nueve ensayos diferentes con la distancia numérica de tres (1-4, 2-5, 3-6, 4-7, 5-8, 6-9, 7-4, 8-5 y 9-6), y nueve ensayos diferentes con la distancia numérica de cuatro (1-5, 2-6, 3-7, 4-8, 5-9, 6-2, 7-3, 8-4 y 9-5). Estos 36 ensayos se presentaron aleatoriamente dos veces a los participantes para obtener un total de 72 ensayos. Por tanto, tenemos 72 ensayos en la condición de iguales y otros 72 en la condición de diferente lo que resulta en un total de 144 ensayos. Antes de comenzar el experimento, se presentaban seis ensayos de práctica para que los participantes se familiarizasen con la tarea. A cada ensayo le precedía una cruz de fijación de 600 ms y el ensayo se presentaba a los 1000 ms.

Medidas

a) Eficacia: (a) media de TR; (b) proporción de aciertos; (c) mediana de los TR de las respuestas correctas dividido por la proporción de respuestas correctas.

b) Efectos específicos de la tarea: Efecto Distancia (a) tamaño del efecto de distancia en TR; dado que esperamos una función logarítmica en los TR (Dehaene et al., 1990), se utilizará tanto la pendiente de la regresión lineal como de la logarítmica; (b) tamaño del efecto de distancia para proporción de aciertos.

Emparejamiento audiovisual puntos-palabra numérica

El procedimiento era idéntico a la tarea de emparejamiento dígito – palabra numérica, con la excepción de que el estímulo visual que se presentaba eran conjuntos de puntos con uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho y nueve puntos. En este caso tanto los ensayos de la condición de iguales como los de la condición diferentes, se presentaban el doble de veces, y por tanto, los participantes realizaban un total de 288 ensayos que se presentaban de forma aleatoria con una pausa en la mitad de la tarea.

Medidas

a) Eficacia: (a) media de TR; (b) proporción de aciertos; (c) mediana de los TR de las respuestas correctas dividido por la proporción de respuestas correctas.

b) Efectos específicos de la tarea: Efecto distancia (a) rango de subitizing, o punto de discontinuidad en el que la pendiente de los TR cambia de una función lineal a una exponencial; (b) pendiente de los TR en el rango de subitizing; (c) intercepto en y de la pendiente de los TR del rango de subitizing; (d) pendiente de los TR del rango de conteo.

- ***Variables de control no numéricas***

- Inteligencia: Matrices Progresivas de Raven (Raven & Court, 1992).
- Memoria de Trabajo: lazo articulatorio, memoria verbal inmediata mediante la repetición de números con dificultad creciente.
- Control Ejecutivo: memoria de dígitos en orden inverso.
- Agenda viso-espacial: Cubos de Corsi y Test de Patrones Visuales (Della Sala et al., 1999).
- Índice Verbal: evaluado mediante dos subpruebas del test TEA-3 de Aptitudes Escolares; palabra diferente y vocabulario.
- Velocidad de procesamiento: Consta de 20 ítems compuestos cada uno por dos cuadrados, uno rojo y el otro negro, que aparecen a ambos lados de la pantalla del ordenador dividiendo el espacio por medio de una línea negra. La tarea consiste en elegir en el menor tiempo posible, en qué lado de la pantalla (izquierdo o derecho) aparece el cuadrado de color rojo. Para ello, deben pulsar la tecla "a" si aparece en la parte izquierda y la "ñ" si por el contrario está en la derecha. En la mitad de los ensayos éste aparece a la izquierda y los otros 10 en la derecha de manera aleatoria.

Cada ensayo va precedido por un punto de fijación (*) durante 1000 ms que sirve para anunciar la aparición del estímulo.

- ***Ejecución matemática***

- Test de Aptitudes Escolares (TEA-3) Subprueba de Cálculo
- Velocidad de Cálculo: se administró 2 tareas para evaluar la velocidad de cálculo; sumas y restas de un dígito (1-9). Los estímulos de la prueba están basados en Lefevre, Sadesky y Bisanz (1996); se excluyen las operaciones con el mismo número (e.g., 6+6) y problemas que contienen 0 y 1 como operandos o resultado obteniendo un total de 56 ensayos y contrabalanceando la posición del operando mayor. Se pide a los participantes contestar lo más rápido y precisos posible. Las respuestas eran verbales y el tiempo de respuesta lo recogía un dispositivo de voz activada. Cada ensayo aparecía en la pantalla del ordenador con el siguiente formato: 5+3 ó 5-3 en el caso de la resta precedido de un punto de fijación (*) de 1000 ms. Siguiendo el planteamiento del Campbell et al. (2010) la mitad de los estímulos los denominamos como "cortos" y la mitad restante "largos" en función de si el producto de los operandos era < ó > a 25. Una vez que el participante contestaba debía indicar con la tecla "a" si había recuperado el hecho matemático (suma o resta) de manera automática o la "ñ" si había utilizado algún tipo de estrategia para resolver la operación.
- Cálculo Mental: se presentaba en la pantalla una suma con dos dígitos (e.g., 25+24, 79+ 56) que debían resolver en el menor tiempo posible, precedido de un punto de fijación (*) de 1000 ms. La tarea estaba compuesta por 48 estímulos divididos en dos condiciones; los ítems cuya suma era > ó < que 100 y también si la operación era con llevadas o no.

4.3.1.3 Procedimiento

Las pruebas Matrices Progresivas y las distintas subpruebas del TEA son de aplicación colectiva. El resto son de aplicación individualizada en diferentes salas acondicionadas dentro de la propia Facultad de Educación de la Universidad de Salamanca. Para las pruebas que se presentaron por ordenador se utilizó un portátil con pantalla de 15 pulgadas usando el software SuperLab y Panamath (para la prueba de comparación de magnitudes no simbólicas con numerosidades grandes) además de un sistema de micrófono

(RSVP) para recoger las respuestas de los participantes cuando las tareas precisaban de producción verbal. Las medidas se tomaron en 3 sesiones individuales de 45' cada una, donde se aplicaron todas las pruebas relacionadas con la representación y procesamiento de la magnitud, ejecución matemática (medidas de velocidad de cálculo y cálculo mental) y las pruebas para evaluar otras funciones más generales (variables de control no numéricas): inteligencia, memoria de trabajo verbal y visoespaciales y velocidad de procesamiento. Las tareas colectivas se llevaron a cabo en una sesión de una hora aproximadamente en dos aulas diferentes debido al número de participantes.

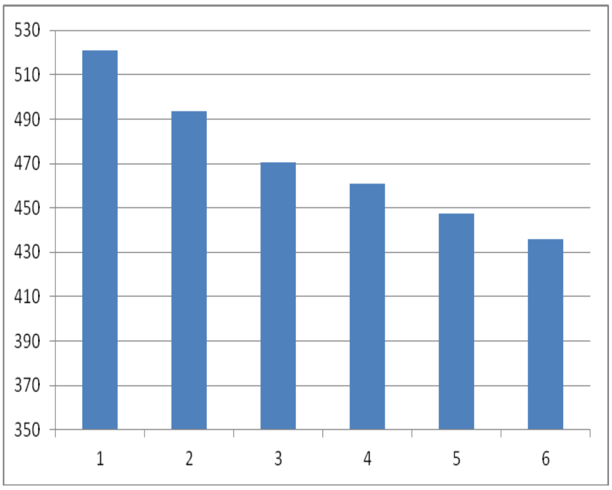
4.3.2 Resultados

4.3.2.1 Análisis Descriptivos

- ***Efectos específicos de las tareas***

Comparación de magnitudes pequeñas simbólicas (1-9):

Se utilizó un análisis de varianza de medidas repetidas (ANOVA) utilizando las 6 distancias así como los efectos intra-sujetos en media del tiempo de reacción y media de proporción de aciertos por cada distancia (eficacia). Encontramos que se produce este efecto (Figura 4.6); con distancias pequeñas, el tiempo de reacción es mayor que en distancias mayores, $F(5, 103)= 110.275$; $p <.0001$, así como los efectos en eficacia –proporción de aciertos– $F(5, 103)= 68,177$; $p <.0001$. En los análisis "post hoc" con el ajuste Bonferroni haciendo una comparación por pares, mostraron que las diferencias eran significativas para todas las distancias, es decir, emplearon más tiempo comparando en distancias cortas que en distancias largas y además, son más precisos cuanto mayor sea la distancia entre las dos numerosidades.



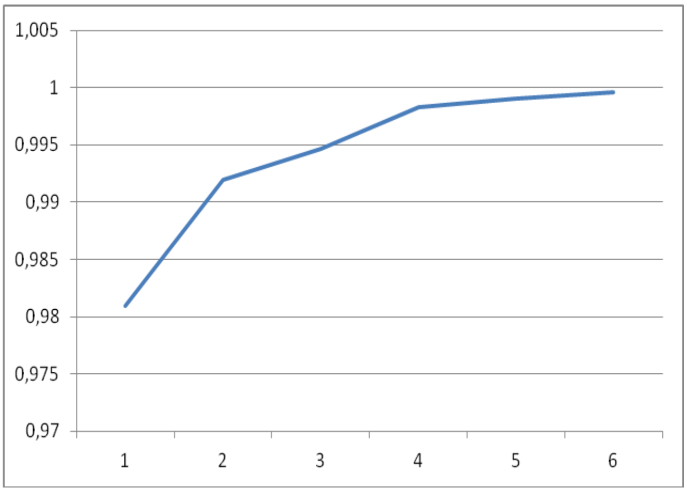


Figura 4.6: Efectos específicos de la tarea de comparación simbólica (1-9). La primera gráfica hace referencia al Efecto Distancia con (TR) y el segundo explica la proporción de aciertos en función de las distancias.

Comparación de magnitudes pequeñas no simbólicas (1-9):

Se encontraron efectos tanto en tiempos de reacción F(5, 104)= 162.988; p <.0001 como en proporción de aciertos, F(5, 104)= 58,217; p <.0001 calculado a partir de un análisis de varianza de medidas repetidas (Figura 4.7 y 4.8). Específicamente, en la comparación por pares en la prueba post doc Bonferroni se observó que las diferencias eran significativas para todas las distancias.

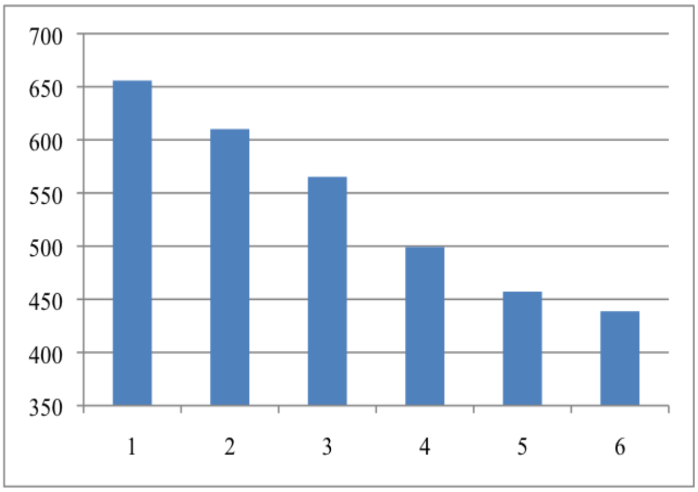


Figura 4.7: Efectos específicos de comparación no simbólica (1-9); Efectos distancia en TR

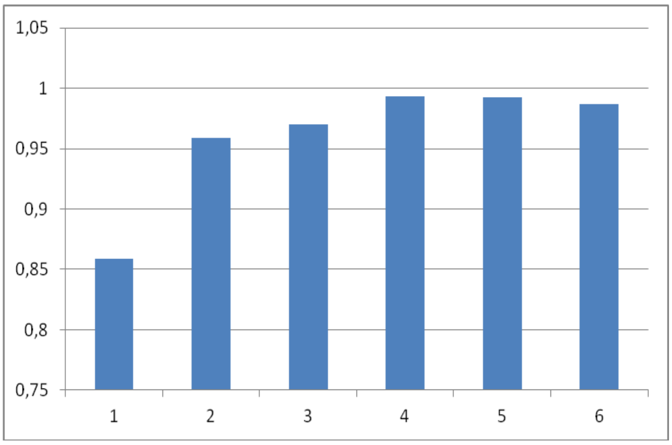


Figura 4.8: Proporción de aciertos comparación no simbólica (1-9) en función de la distancia. Eficacia.

Comparación de magnitudes grandes simbólicas (Comparación 65):

Se dan los efectos específicos de la tarea en TR y proporción de aciertos (Efecto Distancia/Eficacia) F(5, 104)= 162.988; p <.0001 y F(5, 104)= 110.275; p <.0001 respectivamente (Figura 4.9). En el análisis post hoc (Bonferroni) demostró diferencias significativas en todas las distancias con excepción de Distancia 4 y Distancia 5 cuyos tiempos no eran significativamente diferentes.

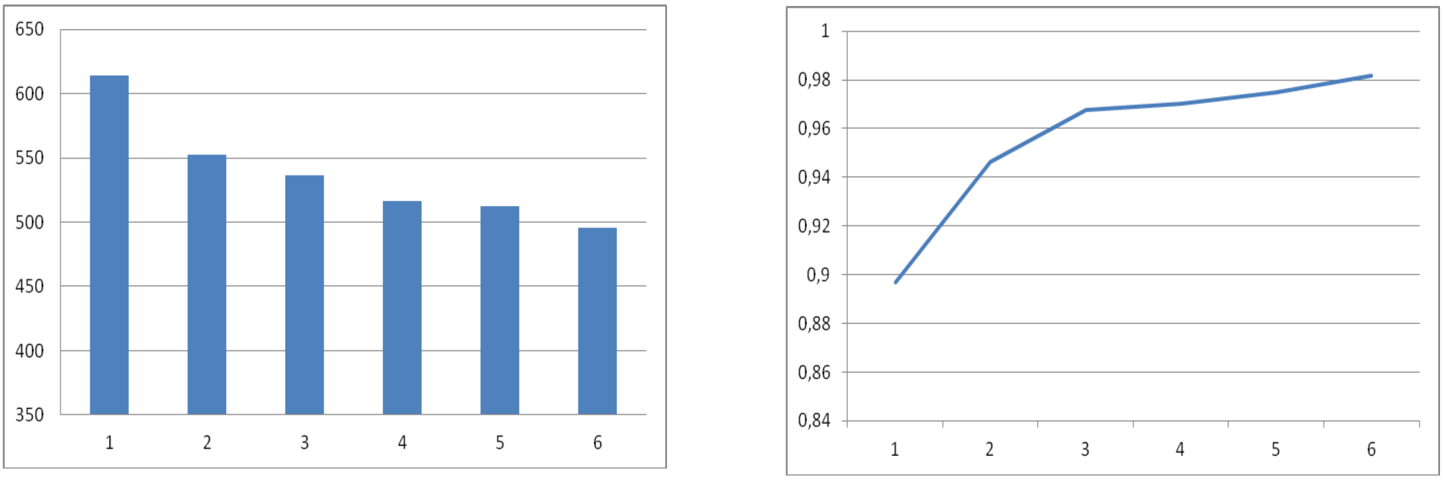


Figura 4.9: Efectos específicos de comparación simbólica magnitudes grandes. Efectos distancia (EDN) y Eficacia.

Comparación de magnitudes grandes no simbólicas (Panamath):

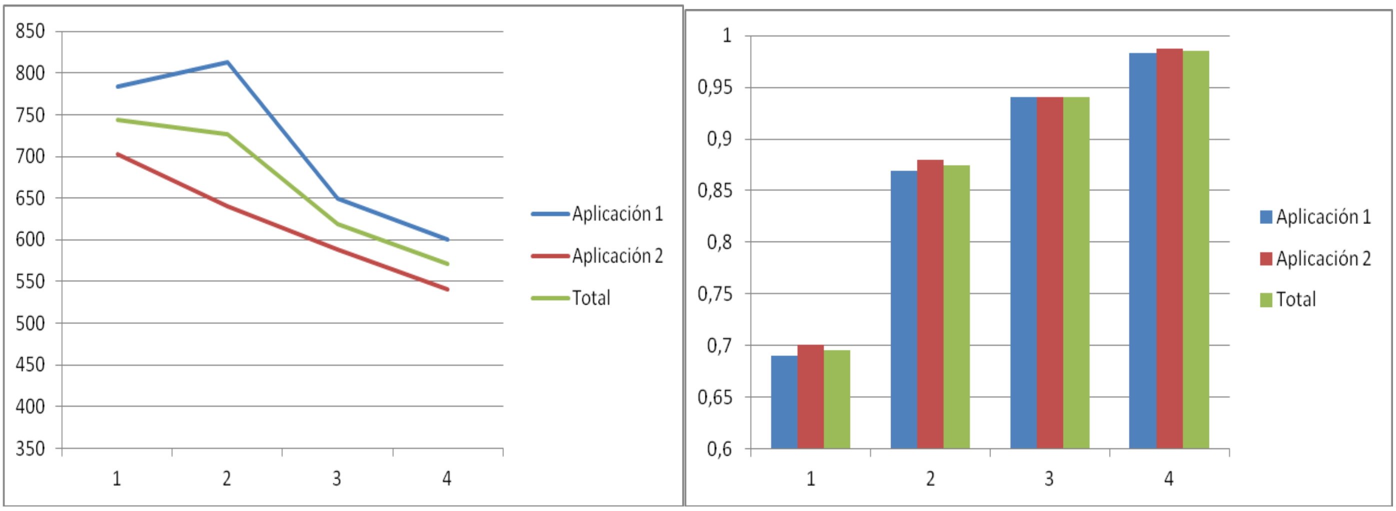


Figura 4.10: Gráficas comparación no simbólica magnitudes grandes: a la izquierda Tiempos de reacción (TR) en función de las ratios. La figura de la derecha explica la proporción de aciertos, ambas gráficas para las dos aplicaciones y un promedio de las mismas.

Nota:

(1) Los números 1,2,3 y 4 de ambas tablas corresponden a las distintas ratios utilizadas dentro del estudio:

a. 1 = ratio 0.5; 2= 0.66; 3= 0.75 y 4= 0.83

Se llevó a cabo un análisis para comprobar si se cumplen los efectos específicos de la tarea con la aplicación t2, y se dan los efectos específicos de la tarea en TR y proporción de aciertos (Efecto Ratio/Eficacia) $F(3, 101)=79.91$; $p < .0001$ y $F(3, 101)= 684.392$; $p < .0001$ respectivamente (Figura 4.11). En los análisis post hoc (Bonferroni) se observó que las diferencias eran significativas para todas las ratios; el tiempo era menor a medida que aumenta la ratio, y a su vez, cuanto menor sea la distancia entre las cantidades que están comparando cometen más errores.

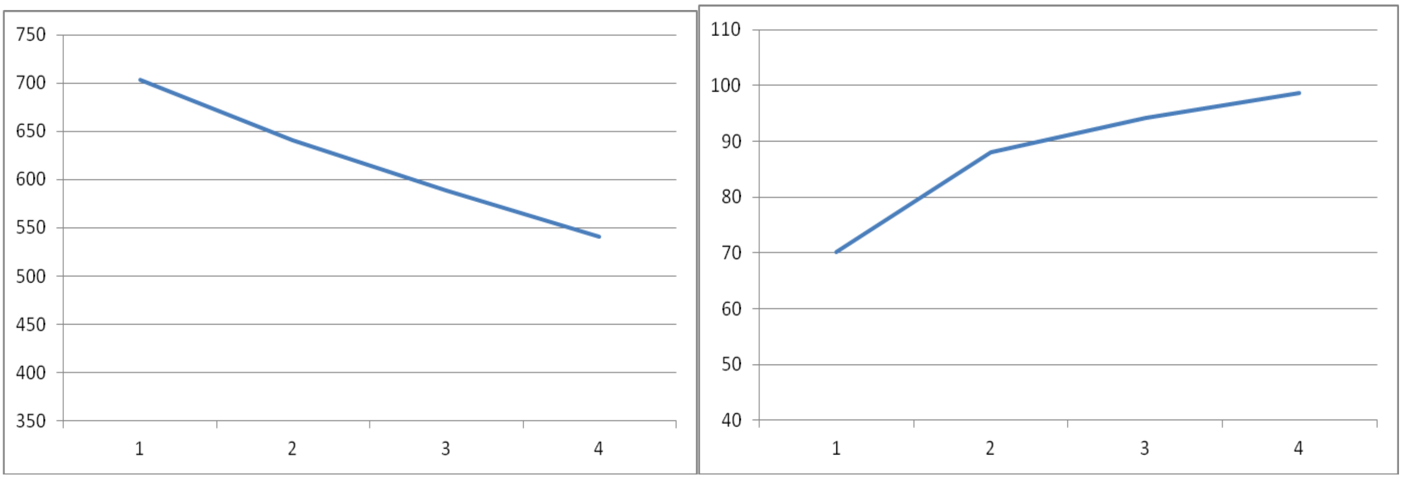


Figura 4.11: Efectos específicos de comparación simbólica magnitudes grandes (t2). Efectos Ratio (ERN) y Eficacia.

(2) Los números 1,2,3 y 4 de ambas tablas corresponden a las distintas ratios utilizadas dentro del estudio:

a. 1 = ratio 0.5; 2= 0.66; 3= 0.75 y 4= 0.83

Emparejamiento audiovisual dígito-palabra numérica:

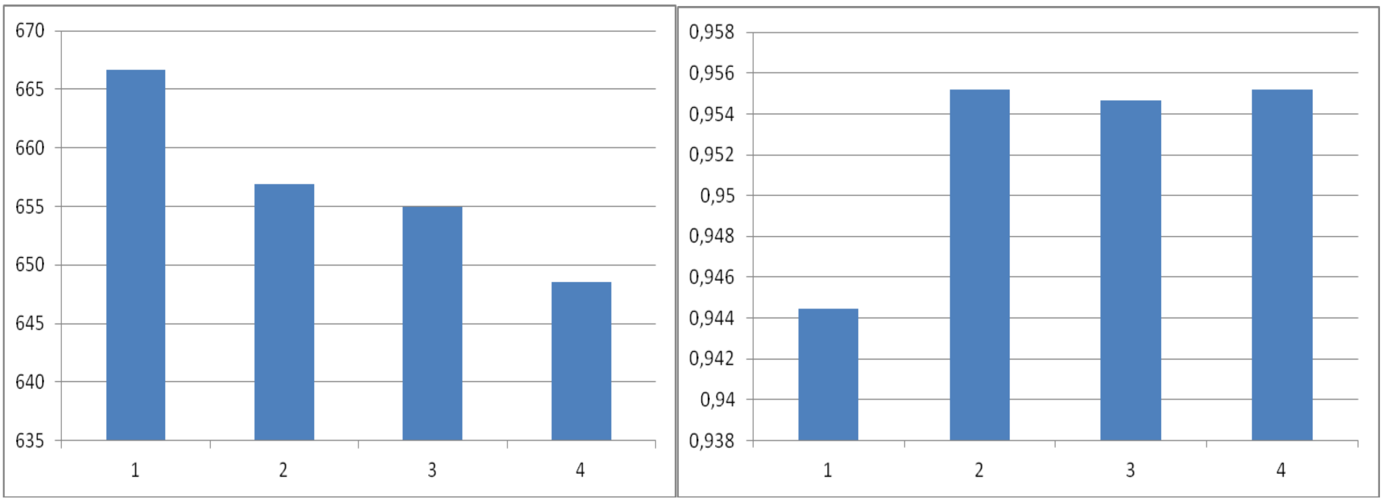


Figura 4.12: Efectos específicos de la tarea Emparejamiento audiovisual dígito-palabra numérica. Efectos Distancia (ERN) y proporción de aciertos.

Se cumple los efectos específicos de la tarea $F(3, 97)= 4.752$; $p <.03$; sin embargo, en el análisis post hoc, observamos que los tiempos son significativamente diferentes únicamente entre las Distancias 1 y 4, aunque utilizando el ajuste Bonferroni esta diferencia deja de ser significativa. Respecto a la eficacia, $F(3, 97)= 1.049$; $p = .371$ no existen diferencias significativas (Figura 4.12), por lo que el número de aciertos no difiere en ninguna de las distancias.

Tarea de emparejamiento audiovisual puntos-palabra numérica:

Se cumple el efecto distancia en tiempos de reacción para todos los estímulos –posteriormente analizaremos los efectos específicos separando por un lado el rango de subitizing (1-4) y por otro el rango de conteo (4-8)– $F(3, 97)= 236.830$; $p <.0001$ y eficacia (expresada en proporción de aciertos) $F(3, 97)= 76.812$; $p <.0001$. Una vez analizado el contraste por pares mediante la prueba de ajuste Bonferroni, observamos que las diferencias en tiempos de reacción son significativas para todas las distancias.

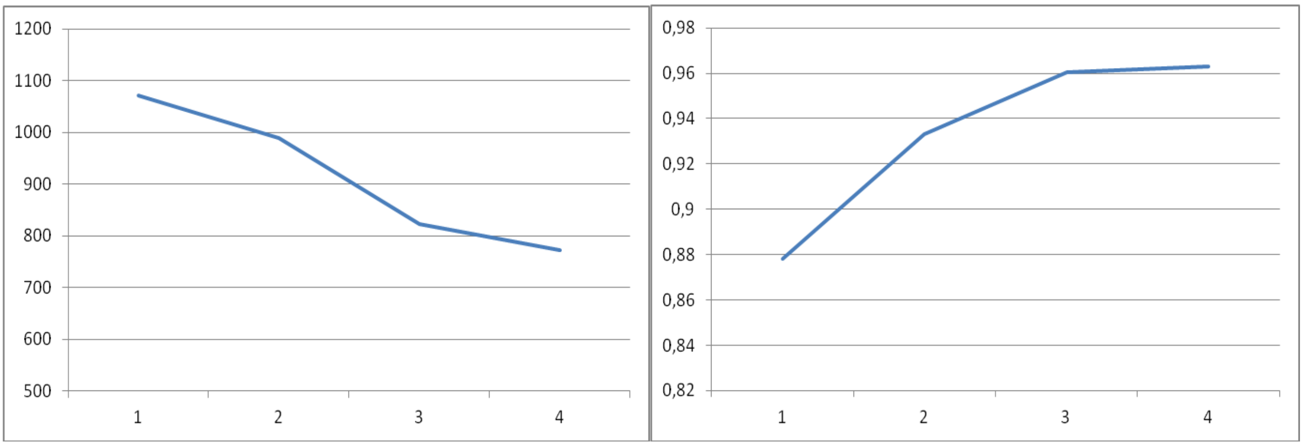


Figura 4.13: Efectos específicos de la tarea de emparejamiento audiovisual puntos-palabra numérica; TRs para cada distancia y Proporción de aciertos para todo el rango de estímulos.

<u>Efectos específicos para el rango de subitizing (1-4):</u>

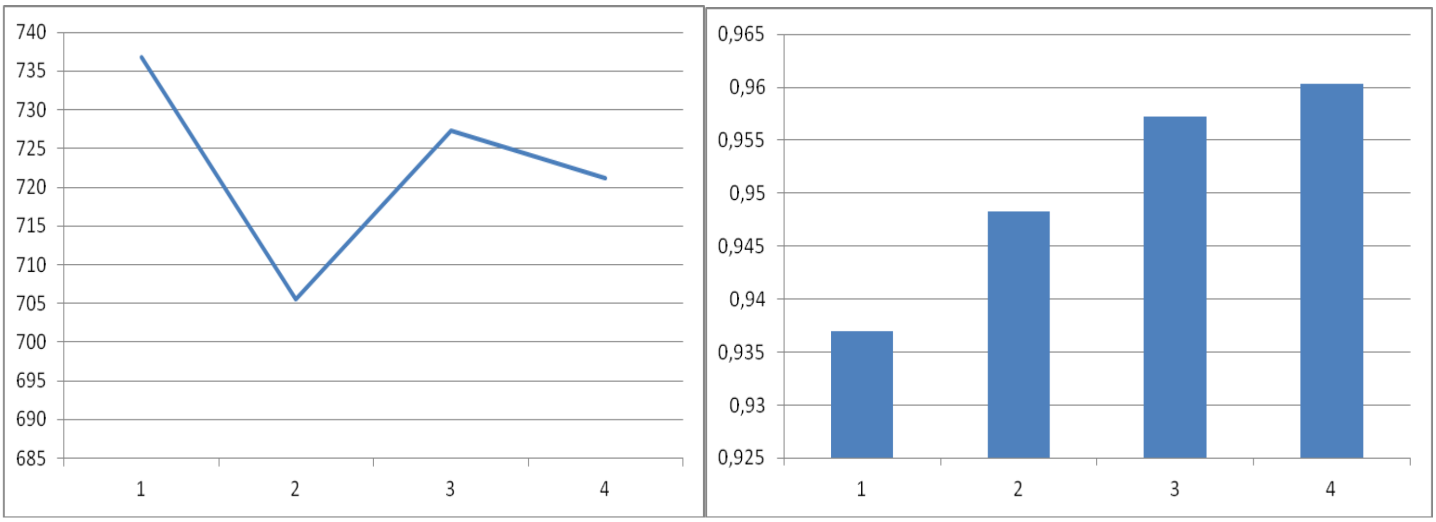


Figura 4.14: Efectos específicos de la tarea de emparejamiento audiovisual puntos-palabra numérica; TRs para cada distancia y Proporción de aciertos para todo el rango de subitizing.

Observamos que se cumplen los efectos específicos de la tarea en TR F(3, 97)= 14.852; p<.0001 (Efecto Distancia) pero no para proporción de aciertos (Eficacia) y F(3, 97)= 4.136; p<.007 (Figura 4.14). En el análisis post hoc (Bonferroni) demostró que en distancias más pequeñas el tiempo de reacción es mayor en todas las distancias con excepción entre Distancia 3 y Distancia 4 cuyos tiempos no eran significativamente diferentes.

<u>Efectos específicos para el rango de conteo (4-8):</u>

Por otro lado, analizando el rango de conteo (4-8) observamos que se cumplen los efectos específicos de la tarea, tanto para tiempos de reacción como para proporción de aciertos (eficacia); F(3, 97)= 296.897; p<.0001 y F(3, 97)= 83.408; p<.0001 respectivamente (Figura 4.15). En el análisis post hoc (Bonferroni) las diferencias en tiempos de reacción eran significativas (p < .0001). Además mostraron ser menos precisos en Distancia 1 y 2 (por ejemplo) mientras que no se aprecian diferencias entre las distancias 3 y 4.

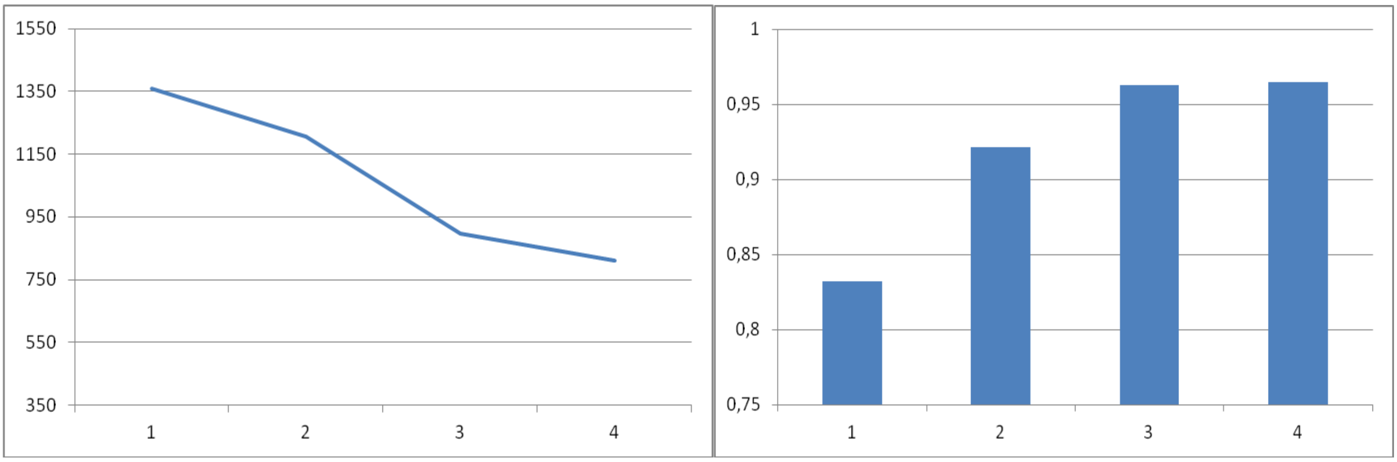


Figura 4.15: Efectos específicos de la tarea de emparejamiento audiovisual puntos-palabra numérica; TRs para cada distancia y Proporción de aciertos para todo el rango de conteo.

4.3.2.2 ***OBJETIVO 1 del estudio.*** Representación no simbólica y simbólica de la magnitud y su relación con ejecución matemática.

Recordemos que nuestra pretensión en este primer objetivo es analizar hasta qué punto son las medidas no simbólicas o simbólicas las que se relacionan con ejecución matemática. En el primer caso, las medidas no simbólicas reflejarían la agudeza con la que tenemos representadas las magnitudes mientras que las medidas simbólicas estarían más relacionadas con la hipótesis de acceso.

Análisis de correlaciones

Llevamos a cabo un análisis de correlación de Pearson para examinar las asociaciones entre las distintas variables utilizadas en el estudio (ver tabla 4.5).

Tabla 4.5: Correlaciones para Objetivo 1.

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.
1. TEA- 3		-.591**	-.607**	-0.196	-.300**	-.292**	-.270**	-.229**	-0.111	0.136	-0.173
2. Velocidad de Calculo			.708**	.440**	.515**	.527**	.213*	0.175	.243*	-0.066	0.093
3. Cálculo Mental				.354**	.413**	.353**	.239*	0.062	.264*	-0.079	0.115
4. Comparación Simbólica 1-9 (Eficacia)					.593**	.608**	0.108	.367**	.232*	-0.084	0.097
5. Comparación Simbólica 1-9 (I. D.)						.555**	0.173	.234*	.215*	-0.093	0.109
6. Comparación 65 (Eficacia)							.404**	.279**	.243*	-0.115	0.136
7. Comparación 65 (I. D.)								0.139	0.183	-0.076	0.077
8. Comparación No Simbólica 1-9 (Eficacia)									0.104	-0.020	0.043
9. Comparación No Simbólica 1-9 (I. D.)										0.049	-0.047
10. Comparación No Simbólica Grande (Aciertos)											-.985**
11. Comparación No Simbólica Grande (W. F.)											

** p < .01
* p < .05
Nota: prop; proporción, (I.D); índice distancia; W.F, Fracción de Weber.

Como se puede observar en la tabla, el resultado más sobresaliente es que la comparación no simbólica con magnitudes grandes no correlaciona con ninguna de las medidas de ejecución matemática. Incluso, ni tan siquiera correlaciona con la comparación no simbólica (1-9) que supuestamente mide procesos similares. Por lo tanto, en los posteriores análisis no tendremos en cuenta esta medida. Además, en las tareas simbólicas todas se relacionan con las medidas de ejecución matemática. Pero para los subsiguientes análisis de las medidas simbólicas se utilizará aquella que correlacione más con ejecución matemática.

Análisis de Regresión

Para analizar hasta qué punto las distintas variables explican una parte de la varianza en ejecución matemática más allá de lo explicado por las variables de control, llevamos a cabo distintos análisis de regresión jerárquica en función de las medidas utilizadas para la ejecución matemática. En primer lugar utilizamos medidas de eficacia y en segundo lugar las medidas de los efectos específicos de la tarea.

Respecto a la medida de ejecución TEA-3 llevamos a cabo un análisis de regresión jerárquica para analizar en qué grado las medidas de eficacia simbólicas y no simbólicas contribuyen a la varianza más allá de las variables de control. En el paso 1 se incluyeron todas las variables de control utilizadas: matrices Progresivas Raven (inteligencia no verbal), Cubos Corsi (Agenda visoespacial), Memoria de Dígitos directo/inverso (memoria corto plazo/ejecutivo central) y velocidad manual (velocidad de procesamiento)[2]. En el paso 2 se incluyó la medida de eficacia de comparación 65 y en el paso 3 la medida de eficacia de magnitudes pequeñas no simbólicas (1-9).

Como se puede ver en la Tabla 4.6 los resultados de este análisis mostraron que todo el modelo explica un 24.8% de la varianza $F(6, 86) = 4.73$ $p < .0001$. Observamos que las medidas de control explicaron un 17.1 % de la varianza $p < .005$. Mientras que las medidas relacionadas con el procesamiento numérico añadieron un 7.7% más. Más interesante aún, ambas medidas (simbólica y no simbólica) contribuyen de manera significativa a la varianza de las puntuaciones del test TEA-3.

Tabla 4.6: Regresión Objetivo 1 para medidas de eficacia y efectos específicos en ejecución matemática TEA-3.

	Medidas de Eficacia				**Efectos específicos de la tarea**			
Pasos	**Predictor**	β	R^2	ΔR^2	**Predictor**	β	R	ΔR^2
1	Variables control		.17	.17**	Variables control		.16	.16**
	RAVEN	.16			RAVEN	.20*		
	Cubos Corsi	.15			Cubos Corsi	.15		
	Memoria Dígitos	.23*			Memoria Dígitos	.18		
	Velocidad Manual	.14			Velocidad Manual	.05		
2	Comp. 65 I.E	-.18*	.21	.043*	Comp. sb(1-9) I.D	-.26*	.22	.06*
3	Comp.Nosb (1-9) I.E	-.21*	.25	.035*	Comp.Nosb (1-9) I.D	.02	.22	0

Nota: I.D., índice distancia numérica; I.E; índice de eficacia; sb, simbólico; nosb, no simbólico; Comp, comparación
** p < .01
* p < .05

Cuando consideramos las medidas relacionadas con la representación de la magnitud, en el paso 1 se incluyeron todas las variables de control, en el paso 2 se incluyó el índice de distancia de la tarea comparación (1-9) simbólica y en el paso 3 el índice de distancia de comparación no simbólica (1-9). El modelo explicó el 16% de la varianza: $F(6, 86) = 3.88$ $p < .005$. En este caso, la única medida que contribuyó a la varianza más allá de las medidas de control fue la de índice de distancia de la comparación simbólica (1-9) ($p < .02$).

[2] Las variables de control en todos los análisis de regresión jerárquica que realizamos son las mismas, por tanto, no las citaremos en análisis posteriores.

Por lo que se refiere a la medida de ejecución matemática de velocidad de cálculo llevamos a cabo dos análisis de regresión jerárquica considerando otra vez medidas de eficacia y efectos específicos. Siguiendo la misma lógica incluimos en los pasos aquellas medidas de eficacia que correlacionan más alto con la medida de ejecución matemática. Así en el paso 1 se incluyeron las variables de control, en el paso 2 el índice de eficacia de comparación 65 y en el paso 3 índice eficacia comparación no simbólica (1-9). Como era previsible desde el análisis de correlaciones, solamente la medida simbólica explicó un porcentaje significativo de la varianza. Como se puede ver en la Tabla 4.6, el modelo completo explicó el 27.1% de la varianza $F(6, 86) = 6.63$ $p < .0001$. Pero más interesante, las medidas de control solamente explicaron un 7.3% de la varianza con $p < .0005$ mientras que el procesamiento de la magnitud simbólica le añadió un 20% más de explicación de la varianza al modelo.

Tabla 4.7: Regresión Objetivo 1 para medidas de eficacia y efectos específicos en ejecución matemática con Velocidad de cálculo.

	Medidas de Eficacia				**Efectos específicos de la tarea**			
Pasos	**Predictor**	β	R^2	ΔR^2	**Predictor**	β	R	ΔR^2
1	Variables control		.11	.11*	Variables control		.10	.10
	RAVEN	.01			RAVEN	.13		
	Cubos Corsi	-.10			Cubos Corsi	-.07		
	Memoria Dígitos	-.18			Memoria Dígitos	-.20*		
	Velocidad Manual	.13			Velocidad Manual	-.06		
2	Comp. 65 I.E	.45**	.31	.20**	Comp. (1-9) I.D	.47**	.33	.23**
3	Comp.Nosb (1-9) I.E	.10	.32	.01	Comp.Nosb (1-9) I.D	.18	.35	.03

Nota: TR, tiempo de respuesta; I.D., índice distancia numérica; I.E; índice de eficacia; sb, simbólico; nosb, no simbólico; Comp, comparación
** $p < .01$
* $p < .05$

En cuanto a las medidas que reflejan representación de la magnitud, en el paso 1 del modelo se incluyeron las variables de control en el paso 2 el índice de distancia de comparación simbólica (1-9) y en el paso 3 índice de distancia de comparación no simbólica (1-9). En este caso el modelo explicó el 35.4 % de la varianza con $F(6, 86) = 7.67$ $p < .0001$. Otra vez los efectos específicos de la tarea contribuyeron en mayor medida que las variables de control (añadieron un 10 % a la varianza). En este caso, la medida simbólica fue altamente significativa ($p < .0001$) aunque la medida no simbólica se aproximó a la significatividad $p = .06$.

Por último llevamos a cabo un análisis con la última medida de ejecución matemática; cálculo mental. Por lo que se refiere a las medidas de eficacia en el paso 1 del análisis de regresión jerárquica se incluyó las variables de control, en el paso 2 la eficacia simbólica (1-9) y en el paso 3 la eficacia no simbólica (1-9). El modelo explicó el 31 % de la varianza con $F(6, 86) = 6.01$ $p < .0001$ (ver tabla 4.8). En este caso, la medida de eficacia simbólica le añadió un 11 % a la varianza de ejecución que fue altamente significativo $p < .0001$.

Por lo que se refiere a las medidas específicas de la tarea, se incluyó como paso 1 las variables de control, en el paso 2 el índice de distancia de (1-9) simbólico y en el paso 3 el índice de distancia (1-9) no simbólica. El modelo explicó el 36 % de la varianza $F(6, 86) = 7.61$ $p < .0001$. Siguiendo con la línea de resultados que venimos contando, el índice de distancia simbólico añadió un 14.5 % a la varianza, que fue altamente significativa $p < .0001$.

Tabla 4.8: Regresión Objetivo 1 para medidas de eficacia y efectos específicos en ejecución matemática con Cálculo Mental.

	Medidas de Eficacia				Efectos específicos de la tarea			
Pasos	**Predictor**	β	R^2	ΔR^2	**Predictor**	β	R	ΔR^2
1	Variables control		.20	.20**	Variables control		.20	.20**
	RAVEN	-.16			RAVEN	-.10		
	Cubos Corsi	-13			Cubos Corsi	-.13		
	Memoria Dígitos	-.28**			Memoria Dígitos	-.27**		
	Velocidad Manual	.24**			Velocidad Manual	.24*		
2	Comp.Sb(1-9) I.E	.36**	.31	.11**	Comp. Sb (1-9) I.D	.38**	.34	.14**
3	Comp.Nosb (1-9) I.E	-.01	.31	0	Comp.Nosb (1-9) I.D	.15	.36	.02

Nota: I.D., índice distancia numérica; I.E; índice de eficacia; sb, simbólico; nosb, no simbólico; Comp, comparación
** $p < .01$
* $p < .05$

4.3.2.3 ***OBJETIVO 2.*** Representación no simbólica y simbólica de la magnitud y su relación con ejecución matemática **vs.** Representación simbólica "per se".

Con este segundo objetivo queremos replicar la hipótesis planteada por Sasanguie y Reynvoet (2014) en la que planteaban que las diferencias individuales en ejecución matemática se debían fundamentalmente a diferencias individuales en el procesamiento simbólico "puro". Recordemos que por nuestra parte queríamos comprobar si el procesamiento simbólico puro medido a partir de una prueba de emparejamiento audiovisual con estímulos simbólicos (palabras numéricas y dígitos) explica la ejecución matemática más allá de lo que explicarían las medidas de acceso a la representación de la magnitud, entre las que incluimos por un lado el índice de distancia que sabemos por los objetivos anteriores es un buen predictor de la ejecución matemática, y además refleja acceso a la representación de la magnitud y añadiéndole una medida más directa de acceso como sería una prueba de proyección de lo simbólico a no simbólico. Esta medida fue utilizada por Sasanguie y Reynvoet (2014), pero limitada al rango de subitizing (1-4). En nuestro caso, hemos añadido el rango de conteo (4-9). Además, como estos autores utilizaron como medida de ejecución matemática velocidad de cálculo, nosotros hemos incluido la misma variable y le hemos añadido la medida de cálculo mental.

Análisis de correlaciones

Llevamos a cabo un análisis de correlación de Pearson para analizar las relaciones entre las distintas variables utilizadas. Como se puede observar en la Tabla 4.9 todas las variables elegidas correlacionan con la ejecución matemática excepto la medida simbólica pura que no correlaciona con el cálculo mental.

Tabla 4.9: Correlaciones para Objetivo 2.

	1.	2.	3.	4.	5.
1. Velocidad de Cálculo (TR)		.708**	.515**	.342**	.489**
2. Cálculo Mental			.413**	.109	.431**
3. Comparación Simbólica 1-9 (I. D.)				.362**	.314**
4. Emparejamiento dígito-palabra numérica (TR)					-.037
5. Emparejamiento puntos-palabra numérica (I.D)					

** p < .01
* p < .05
Nota: I.D; índice distancia; TR, Tiempos de reacción.

Análisis de Regresión

Para analizar la contribución de cada una de las variables a la varianza de ejecución matemática, llevamos a cabo un primer análisis de regresión jerárquica con la velocidad de cálculo como variable predicha. En el paso 1 se incluyeron las variables de control, en el paso 2 el índice de distancia de la tarea de emparejamiento audiovisual palabra numérica-puntos y el índice de distancia de la tarea de comparación simbólica (1-9). En el paso 3 añadimos la tarea de emparejamiento audiovisual simbólica pura. El modelo fue altamente predictivo ya que explicó un 55.2 % de la varianza de cálculo explicada por las variables introducidas F(7, 83) =14.59 p < .0001. Como se puede apreciar en la Tabla 4.10 (ver parte A de la tabla) las variables específicas de procesamiento explicaron la proporción más alta de varianza, dado que las variables de control sólo explicaron el 9 % que sólo se aproximó a la significatividad (p = .09).

Más interesante aún, las variables relacionadas con el acceso a la representación de la magnitud añadieron un 37 % (p < .0001) y a su vez, la variable relacionada con la representación simbólica pura le añadió 9.4 % que también fue significativa (p < .0001).

Tabla 4.10: Regresión Objetivo 2 para medidas de eficacia y efectos específicos en ejecución matemática con Cálculo (TR) como variable predicha

	Parte A				**Parte B**			
Pasos	**Predictor**	β	R^2	ΔR^2	**Predictor**	β	R	ΔR^2
1	Variables control		.09	.09	Variables control		.09	.09
	RAVEN	.13			RAVEN	.14		
	Cubos Corsi	.01			Cubos Corsi	.01		
	Memoria Dígitos	-.17			Memoria Dígitos	-.17*		
	Velocidad Manual	-.29*			Velocidad Manual	-.30*		
2	Emparejam.Nosb I.D	.34**	.46	.37**	Emparejam.Sb (TR)	.38**	.21	.12**
	Comp.Sb(1-9) I.D	.44**						
3	Emparejam.Sb (TR)	.37**	.55	.09**	Emparejam.Nosb I.D	.34**	.55	.34**
					Comp.Sb(1-9) I.D	.44**		

Nota: I.D., índice distancia numérica; I.E; índice de eficacia; sb, simbólico; nosb, no simbólico; Comp, comparación; Emparejam.Nosb, Tarea de Emparejamiento audiovisual puntos-palabra numérica; Emparejam.Sb, Emparejamiento audiovisual dígito-palabra numérica; TR, Tiempos de Reacción.
** p < .01
* p < .05

Dado que nos interesaba analizar de qué manera contribuyen ambos tipos de variables (acceso a la magnitud vs. procesamiento simbólico puro) llevamos a cabo el mismo análisis introduciendo en el paso 2 la tarea de emparejamiento audiovisual palabra numérica-dígitos, es decir, la relacionada con la representación simbólica pura y en el paso 3 las variables relacionadas con la representación de la magnitud (ver parte B de la Tabla 4.10). En este caso, la variable simbólica pura añadió 12.3 % (p < .0001) mientras que las variables relacionadas con la representación de la magnitud añadieron 34.1% a la varianza de ejecución en cálculo, es decir, aunque de acuerdo con Sasanguie y Reynvoet (2014) la representación simbólica pura explica una parte de la varianza de ejecución en cálculo, cuando ésta va acompañada de variables que miden acceso a la representación de la magnitud, éstas juegan un papel más importante a la hora de explicar las diferencias en ejecución en cálculo.

En un intento de profundizar en las relaciones entre estas variables relacionadas con el procesamiento de la magnitud y el procesamiento simbólico y la ejecución en cálculo, llevamos a cabo un nuevo análisis de regresión jerárquica utilizando como variable predicha el cálculo mental. Por tanto, en el paso 1 se incluyeron las variables de control, en el paso 2 las variables relacionadas con el acceso a la representación de la magnitud y en el paso 3 el procesamiento simbólico puro (Ver parte A de la Tabla 4.11).El modelo explicó un 42.2 % de la varianza $F(7, 83) = 8.55$ $p < .0001$ pero en este caso únicamente las variables relacionadas con el procesamiento de la magnitud contribuyeron a la varianza de cálculo mental (20.5%, $p < .0001$) mientras que como era esperable desde el análisis de correlaciones, el procesamiento simbólico puro no contribuyó significativamente a la varianza ($p = .13$). De hecho, repetimos el análisis introduciendo en el paso 2 la variable relacionada con el procesamiento simbólico puro y ésta no explicó significativamente más allá de lo explicado por las variables de control, aunque se aproximó ligeramente a la significatividad ($p = .09$) (ver Tabla 4.11; parte B).

Tabla 4.11: Regresión Objetivo 2 para medidas de eficacia y efectos específicos en ejecución matemática con Cálculo Mental como variable predicha.

	Parte A				Parte B			
Pasos	**Predictor**	β	R^2	Δ R^2	**Predictor**	β	R	Δ R^2
1	Variables control		.20	.20**	Variables control		.20	.20**
	RAVEN	-.10			RAVEN	-.10		
	Cubos Corsi	-.13			Cubos Corsi	-.13		
	Memoria Dígitos	-.23*			Memoria Dígitos	-.23*		
	Velocidad Manual	-.34**			Velocidad Manual	-.34**		
2	Emparejam.Nosb I.D	.29**	.41	.21**	Emparejam.Sb (TR)	.15	.23	.03
	Comp.Sb(1-9) I.D	.29**						
3	Emparejam.Sb (TR)	.15	.42	.01	Emparejam.Nosb I.D	.29**	.42	.20**
					Comp.Sb(1-9) I.D	.29**		

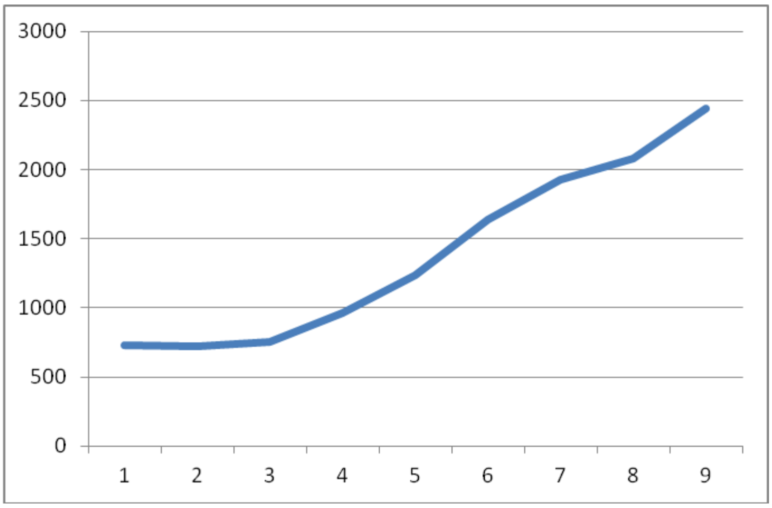
Nota: I.D., índice distancia numérica; I.E; índice de eficacia; sb, simbólico; nosb, no simbólico; Comp, comparación; Emparejam.Nosb, Tarea de Emparejamiento audiovisual puntos-palabra numérica; Emparejam.Sb, Emparejamiento audiovisual dígito-palabra numérica; TR, Tiempos de Reacción.
** $p < .01$
* $p < .05$

4.3.2.4 ***OBJETIVO 3.*** Ejecución matemática más allá del procesamiento de números y variables de control. Tarea de Enumeración.

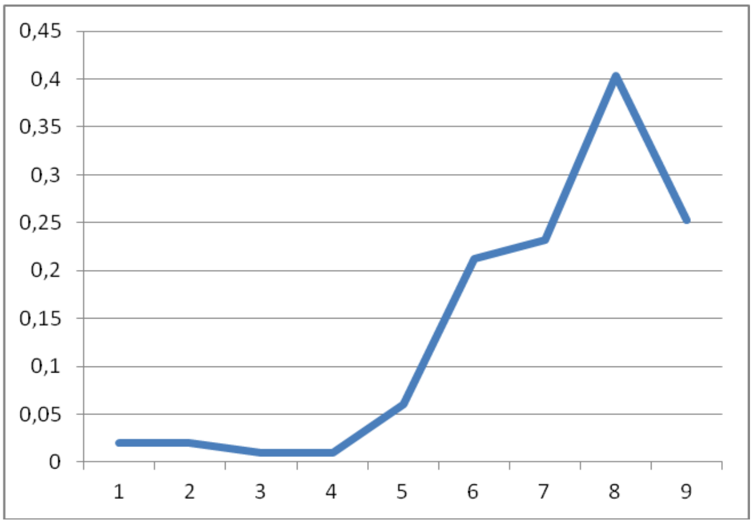
En los trabajos más recientes que han analizado la relación de la representación de la magnitud y ejecución matemática se ha incorporado una tarea de enumeración / conteo, como ya mencionamos en los Capítulos anteriores y al comienzo de éste, puesto que se ha visto que los mecanismos implicados en esta tarea también son componentes nucleares del procesamiento de magnitudes. Además, estos trabajos han comprobado que esta tarea también tiene mucha relación con la ejecución matemática, especialmente con el cálculo, posiblemente porque los niños utilizan estrategias de conteo cuando realizan tareas de cálculo (e.g., Moore & Ashcraft, 2015). ¿Esto mismo podría ocurrir con adultos? Hasta donde llegan nuestros conocimiento esto no se ha analizado, pero tenemos razones para creer que algo similar podría ocurrir, porque algunos estudios han planteado que los adultos no sólo utilizan la recuperación de hechos numéricos cuando llevan a cabo cálculos simples, sino que también puede utilizar estrategias y procedimientos que implican manipulación de la magnitud (e.g Campbell & Xu, 1999; Lefevre, Sandeski & Bizand, 1996).

Por lo tanto, con este objetivo queremos analizar si la variabilidad en la ejecución en tareas de cálculo simple puede ser explicada por la enumeración más allá de las variables de control y otras variables que hemos visto en los objetivos anteriores que tienen relación con el cálculo. No obstante, en este análisis solamente incluiremos la tarea de sumas como variable predicha. Siguiendo la lógica de lo planteado hasta el momento, vamos a diferenciar medidas de eficacia y medidas de la representación de la magnitud. De la misma manera y como han planteado estudios previos, en esta tarea vamos a diferenciar dos mecanismos: subitizing y conteo.

Efectos de la tarea en el rango de subitizing y en el rango de conteo



Gráfica 4.1: Media de los tiempos de reacción (TRs) para el rango de subitizing y rango de conteo.



Gráfica 4.2: Proporción de errores en el rango de subitizing y el rango de conteo.

Una característica de esta tarea es que los conjuntos pequeños (n ≤ 4) se enumera más rápido y de manera muy precisa, mientras que para los conjuntos más grandes (n ≥ 4) se hace de manera más lenta y con una tendencia a cometer más errores. La pendiente (TRs) de la enumeración para conjuntos pequeños (más conocida como Rango de Subitizing) es prácticamente plana, mientras quela pendiente para conjuntos mayores es más pronunciada. La discontinuidad que existe entre los conjuntos pequeños y grandes se cree que estarían reflejando dos sistemas de enumeración diferentes, uno llamado Sistema de Subitizing y Sistema de conteo (Schleifer & Landerl, 2011). Ambos rango pueden ser representados en funciones lineales separadas. El punto de discontinuidad (y por tanto, rango de subitizing de un individuo o grupo) puede ser determinado por el punto en el cual la pendiente de los TRs cambia de una función lineal a una función exponencial. Por ejemplo, como podemos observar en la Gráfica 4.1, el rango de subitizing es 3, podemos decir que la pendiente para los TRs se caracteriza por ser lineal entre las numerosidades 1 a 3, y una función exponencial de 4 a 9.

Más interesante, si nos fijamos en la media de la proporción de errores (Gráfica 4.2) observamos que cuando los participantes debían enumerar 5 o más puntos el número de errores aumenta significativamente, mientras que en el rango de subitizing son prácticamente inexistentes. Algo que debemos tener en cuenta es el decremento tan acusado de los errores para el 9 (el conjunto presentado con mayor numerosidad). Es lo que se denomina como "Efecto techo" o "Efecto final" (e.g., Trick, 2008 para una mayor explicación), como es el número mayor utilizado en toda la tarea, cuando aparecía en la pantalla los ensayos con 9 puntos ya presuponían que era el conjunto mayor y directamente daban la respuesta “9”.

Análisis de correlaciones

Se llevó a cabo un análisis de correlaciones Pearson para examinar las asociaciones entre las distintas variables utilizadas en el estudio (ver tabla 4.12).

Tabla 4.12: Correlaciones para Objetivo 3.

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
1. Cálculo Sumas		.295**	.396**	.621**	.608**	.275**	0.141	.580**	.489**
2. Comparación Simbólica 1-9 (Eficacia)			.593**	.370**	.269**	.239*	0.056	.287**	0.187
3. Comparación Simbólica 1-9 (I. D.)				.283**	.313**	0.065	-0.060	.261*	.323**
4. Enumeración (Eficacia 1-8)					.851**	.577**	.265**	.916**	.678**
5. Enumeración (Beta 1-8)						0.188	.210(*	.869**	.893**
6. Enumeración (Eficacia 1-4)							.377(**)	.395(**)	0.055
7. Enumeración (Beta 1-4)								.221*	-0.097
8. Enumeración (Eficacia 5-8)									.726**
9. Enumeración (Beta 4-8)									

** $p < .01$
* $p < .05$
Nota: (I.D); índice distancia.

Análisis de Regresión

Para ver la contribución de estas variables a la varianza de cálculo, llevamos a cabo distintos análisis de regresión jerárquica introduciendo las variables específicas de la representación de la magnitud y conteo junto con las variables de control que venimos utilizando. En el primer análisis de regresión jerárquica, introdujimos las medidas de eficacia de las distintas variables junto con las variables de control. En el paso 1 se incluyeron las variables de control, en el paso 2 índice de eficacia (1-9) simbólica y paso 3 el índice de eficacia de la tarea de enumeración (Tabla 4.13). El modelo explicó un 40 %; $F(7, 83) = 9.44$ $p < .0001$. El índice de eficacia de la comparación simbólica (1-9) añadió un 4 % a la varianza en cálculo $p < .05$ mientras que la tarea de enumeración añadió un 26 % más ($p < .0001$).

Tabla 4.13: Regresión Objetivo 3 para medidas de eficacia y efectos específicos en ejecución matemática con Cálculo Mental.

	Medidas de Eficacia				Efectos específicos de la tarea			
Pasos	**Predictor**	β	R^2	Δ R^2	**Predictor**	β	R	Δ R^2
1	Variables control		.09	.09	Variables control		.09	.09
	RAVEN	.13			RAVEN	.11		
	Cubos Corsi	.09			Cubos Corsi	-.01		
	Memoria Dígitos	-.10			Memoria Dígitos	-.04		
	Velocidad Manual	-.03			Velocidad Manual	-.01		
2	Comp.Sb(1-9) I.E	.08	.13	.04*	Comp. Sb (1-9) I.D	.22*	.15	.06**
3	Enumeración IE	.61**	.40	.26**	Enumeración IE	.54**	.38	.13**

Nota: I.D., índice distancia numérica; I.E; índice de eficacia; sb, simbólico; nosb, no simbólico; Comp, comparación
** p < .01
* p < .05

Para comprobar de qué manera cada uno de los mecanismos implicados en la enumeración contribuyen diferencialmente a la varianza del cálculo, introdujimos las medidas de cada uno de los mecanismos en un paso diferente. Así, en el paso 1 se incluyen las variables de control, en el paso 2 el índice de eficacia de la tarea de comparación simbólica (1-9), en el paso 3 el índice de eficacia del rango de subitizing de la tarea de enumeración y en paso 4 el índice de eficacia del rango de conteo de la misma tarea. El modelo explica un 36.6 % de la varianza $F(7, 83) = 6.93$ $p < .0001$ pero lo más interesante es que cada una de las variables hizo una aportación genuina a la ejecución en cálculo. Como se puede apreciar en la Tabla 4.14, cada una de las variables contribuyó significativamente aunque el rango de conteo contribuyó con un porcentaje mayor.

Tabla 4.14: Regresión Objetivo 3 para medidas de eficacia y efectos específicos en ejecución matemática con Cálculo Sumas.

	Medidas de Eficacia				Efectos específicos de la tarea			
Pasos	**Predictor**	β	R^2	Δ R^2	**Predictor**	β	R	Δ R^2
1	Variables control		.09	.09	Variables control		.09	.09
	RAVEN	.15			RAVEN	.08		
	Cubos Corsi	.11			Cubos Corsi	-.03		
	Memoria Dígitos	-.09			Memoria Dígitos	-.11		
	Velocidad Manual	-.01			Velocidad Manual	-.02		
2	Comp.Sb(1-9) I.E	.13	.13	.04*	Comp. Sb (1-9) I.D	.26	.20	.12**
3	RangoSubitiz I.E	.04	.18	.05*	RangoSubitiz ß	.20*	.22	.02
4	RangoConteo I.E	.56**	.37	.19**	RangoConteo ß	.40**	.36	.14**

Nota: I.D., índice distancia numérica; I.E; índice de eficacia; sb, simbólico; nosb, no simbólico; Comp, comparación; ß, Beta; Subitiz, subitizing
** p < .01
* p < .05

El mismo análisis lo llevamos a cabo con las medidas relacionadas con la representación de la magnitud, así en el análisis de regresión jerárquica introdujimos en el paso 1 las variables de control, en el paso 2 el índice de distancia de la tarea de comparación simbólica (1-9) y en el paso 3 la pendiente (ß) de la regresión a partir de el número de puntos con el tiempo de reacción (ver Tabla 4.14). El modelo total explicó un 42.2 % $F(7, 83) = 10.35$ $p < .0001$. Otra vez, cada una de las variables aportó significativamente a la varianza. El índice de distancia añadió un 14.4 % $p < .001$ y la ß de la tarea de enumeración un 19 % más ($p < .0001$). Al igual que en el análisis anterior, quisimos comprobar de qué manera cada uno de los mecanismos implicados en la enumeración explican una única varianza de la ejecución en cálculo. En el paso 1 se introdujeron las variables de control, en el paso 2 el índice de distancia de la comparación simbólica (1-9), en el paso 3 la ß de la pendiente de regresión del rango de subitizing y en el paso 4 la de la pendiente de la regresión en el rango de conteo. El modelo explicó un 35.2 % de la varianza $F(7, 83) = 6.53$ $p < .0001$. Y otra vez las distintas variables hicieron una única contribución a la varianza aunque en este caso la aportación del rango de subitizing solamente de aproximó a la significatividad $p = .08$.

4.3.3 Discusión

El objetivo de este segundo estudio experimental era analizar en población adulta qué medidas de las relacionadas con la representación de la magnitud se relacionan con la ejecución matemática. Para ello, dividimos el estudio en tres objetivos diferenciados. En el primero estábamos interesados en analizar una de las cuestiones más debatidas en este campo de investigación: si es la representación de la magnitud per se o el acceso a esta representación desde los números simbólicos lo que se relaciona con la ejecución matemática. Para ello, utilizamos la tarea más ampliamente usada para analizar esta cuestión: la comparación de magnitudes en su versión simbólica y no simbólica, pero utilizando tanto cantidades pequeñas (1 a 9) como cantidades más grandes de dos dígitos, y analizando tanto medidas de eficacia como medidas relacionadas con la representación de la magnitud. Aunque la mayor aportación ha sido analizar las conexiones entre representación de la magnitud y matemáticas utilizando distintas medidas de ejecución matemática que reflejan distintos componentes de esta tarea, y añadiendo al modelo de predicción un rango más amplio de variables de control no numéricas que tradicionalmente se han relacionado con la ejecución matemática. En el segundo objetivo quisimos profundizar en una hipótesis alternativa a las tradicionalmente consideradas: que no sea la representación de la magnitud per se ni el acceso a dicha representación lo que se relaciona con la ejecución matemática, sino la representación simbólica per se. Y en el tercer objetivo nos interesó incorporar a las relaciones entre representación de la magnitud y ejecución matemática una nueva variable no considerada hasta la fecha en población adulta: las habilidades de enumeración. Con estos objetivos pretendíamos tener un panorama lo más amplio posible de las relaciones entre representación y ejecución matemática en población adulta, dada la escasez de estudios con esta población respecto a los trabajos relacionados con niños. Los resultados de este estudio experimental creemos que han aportado información genuina al campo.

Por lo que se refiere al primer objetivo, los análisis descriptivos mostraron que, como era de esperar, en todas las tareas utilizadas se producen los efectos típicos relacionados con la representación de la magnitud, como el efecto distancia y el efecto ratio. No obstante, merece la pena resaltar que en la tarea de comparación de magnitudes simbólicas con números de dos cifras el efecto distancia refleja, al igual que vimos con los niños en el estudio anterior, una función logarítmica más que lineal. De hecho realizamos los análisis de regresión que confirma lo que visualmente refleja la Figura 4.9 ($R^2 = .86$ para la regresión lineal; $R^2 = .97$ para la regresión logarítmica). Es resultado implica que cuando tienen que procesar números de dos cifras, los niños presentan una representación similar a la de los adultos, lo que sugiere que esta representación logarítmica se empieza a reflejar con el aprendizaje de los números de dos cifras, pero se mantiene a lo largo del desarrollo (ver Dehaene et al., para una discusión de esta cuestión).

El resultado más interesante del análisis correlacional otra vez volvió a mostrar, al igual que en el estudio de niños, que la tarea de comparación de magnitudes grandes no simbólica no correlacionó con ninguna de las medidas de ejecución matemática. Otra vez, esto es incoherente con los estudios previos que sí han encontrado esta relación en participantes adultos. De especial interés es el estudio de Libertus et al. (2012), quienes realizaron un estudio en condiciones muy similares al nuestro. Así, la tarea de comparación de magnitudes no simbólicas fue similar a la nuestra, ya que nosotros para este estudio pedimos al grupo de Halberda y colaboradores la tarea que ellos utilizaban. Además, el tamaño de la muestra en el estudio de Libertus at al. (2012) fue similar al de nuestro estudio. Incluso el test de ejecución matemática que utilizaron era similar al nuestro (SAT *Scholastic Aptitude Test*). Y por último, al igual que nosotros, hicieron dos aplicaciones de la prueba en dos momentos distintos. Así que su estudio y el nuestro son muy similares, por lo que hemos hecho una comparativa entre estudios. Por lo que se refiere las fracciones de Weber en las dos aplicaciones, ellos encontraron que el promedio en la primera aplicación fue .20 y en la segunda .19, y en nuestro caso .17 y .18 respectivamente. La correlación test-retest fue de $r = .32$, $p < 0 .01$, mientras que en nuestro caso fue de $r = .38$, $p < 0 .01$. De acuerdo con los autores, esta pequeña fiabilidad test-retest podría deberse a que algunos participantes mostraron más variabilidad que otros en las fracciones de Weber obtenidas en los dos momentos de medida, por lo que calcularon las puntuaciones de cambio absoluto en la fracción de Weber para cada participante y encontraron una correlación significativa entre esta puntuación y la ejecución matemática ($r = -.30$, $p < .05$). Nosotros hicimos el mismo procedimiento y encontramos que la correlación solo se aproximó a la significatividad ($r = -.19$, $p = .08$). Por lo que se refiere a las correlaciones entre las fracciones de Weber y la ejecución matemática, ellos encontraron que en la primera aplicación la correlación se aproximó a la significatividad ($r = -.24$, $p = .06$), mientras que en la segunda aplicación encontraron una correlación significativa ($r = -.31$, $p < .01$). En nuestro caso, la correlación no fue significativa ni en la primera aplicación ($r = -.16$, $p = .11$), ni en la ($r = -.17$, $p = .09$). A la luz de estas consideraciones, no encontramos una explicación a esta diferencia en las relaciones entre representación de la magnitud no simbólica medida a partir de la fracción de Weber y la ejecución matemática, ya que salvo las correlaciones, los demás aspectos de ambos estudios son similares.

Las únicas correlaciones significativas entre representación de la magnitud no simbólica y ejecución matemática que encontramos fue en la tarea de comparación no simbólica con cantidades pequeñas (1 a 9), cuyo índice de eficacia correlacionó con TEA-3, y el índice de distancia correlacionó con velocidad de cálculo y cálculo mental. Así que en los análisis de regresión hemos utilizado estas medidas para introducir en el modelo.

Llevamos a cabo distintos análisis de regresión jerárquica para analizar la contribución más allá de las variables de control no numéricas de las distintas medidas de eficacia y específicas de las tareas que reflejan representación de la magnitud sobre las tres medidas de ejecución matemática. Por lo que se refiere a la ejecución matemática general (medida a partir de TEA-3), y por lo que se refiere a las medidas de eficacia encontramos una contribución modesta, aunque significativa, de las medidas de representación de la magnitud, tanto simbólica como no simbólica. Pero cuando se consideraron los efectos específicos de la tarea, aquellos que reflejan agudeza en la representación de la magnitud, solamente hubo una aportación significativa del índice de distancia de la tarea de comparación simbólica. Si consideramos que las medidas de eficacia valoran la eficiencia con la que se procesan magnitudes (simbólicas y no simbólicas), mientras que el índice de distancia refleja la activación de las representaciones de la magnitud, estos resultados irían en consonancia con el planteamiento que sugiere que las diferencias individuales en la ejecución matemática (en este caso habilidades generales matemáticas) se relacionan con las habilidades para acceder a la representación de la magnitud desde los números simbólicos.

Por otro lado, cuando se considera la velocidad de cálculo, el análisis de regresión jerárquica muestra resultados similares al análisis anterior, aunque con algunos matices a considerar. Cuando las relaciones entre representación de la magnitud y ejecución matemática se establecen con habilidades matemáticas generales la mayor parte de la varianza la explican las variables de control no numéricas, especialmente inteligencia y memoria de trabajo, aunque las medidas de representación de la magnitud hacen una contribución modesta pero significativa. En el caso de la velocidad de cálculo la relación de invierte, ya que la mayor parte de la varianza se explica por las medidas relacionadas con la representación de la magnitud. Aunque en este caso, el peso recae en las medidas de la tarea de comparación de magnitudes simbólicas, con ninguna aportación de la comparación de magnitudes no simbólicas. Al igual que en el análisis anterior, no solo se relacionan las medidas de eficacia para procesar símbolos con el cálculo, sino también las medidas específicas que reflejan representación de la magnitud, como las recogidas en el índice de distancia. Por lo tanto, otra vez los resultados apoyan la hipótesis del acceso como explicación de las diferencias individuales en la fluidez en el cálculo.

En el último análisis de regresión jerárquica relacionado con este primer objetivo, examinamos la contribución de las medidas relacionadas con la representación de la magnitud con el cálculo mental. Y otra vez, hubo una contribución genuina de las medidas implicadas en la comparación de magnitudes simbólicas, contribuyendo tanto las medidas de eficacia como las que reflejan representación de la magnitud, como el índice de distancia.

Tomados globalmente, los resultados están en la línea de aquellos que plantean que las diferencias individuales en la ejecución matemática se relacionan con las habilidades para acceder a la representación de la magnitud desde los números simbólicos. Y ello fundamentalmente porque, además de la eficacia para procesar símbolos, los efectos de distancia en las comparaciones de magnitudes simbólicas han mostrado una aportación específica a la varianza de la ejecución matemática más allá de lo explicado por las variables de control no numéricas. Aquellos participantes con efectos de distancia relativamente más largos sobre los tiempos de respuesta pueden tener proyecciones menos "finas" entre los números simbólicos y las magnitudes que representan (Holloway & Ansari, 2009). Sin embargo, este panorama es algo más complejo cuando consideramos las diferentes medidas de ejecución matemática. Así, las aportaciones son más modestas cuando se consideran medidas generales de conocimientos matemáticos, e incluso hay alguna aportación de las medidas relacionadas con la representación no simbólica de la magnitud, lo cual es en cierta medida consistente con Libertus et al. (2012; ver también Libertus et al., 2013b para una reflexión sobre las medidas matemáticas). Pero cuando se consideran medidas de cálculo, especialmente aquellas relacionadas con la fluidez, las aportaciones del procesamiento de magnitudes simbólicas y su acceso a la magnitud subyacente son altamente significativas, aportando la mayor parte de la varianza explicada en relación a las variables de control, lo que es consistente con algunos trabajos desarrollados con niños (e.g., Holloway & Ansari, 2009; Vanbinst et al., 2012) y con adultos (Castronovo & Göbel, 2012). Una posible explicación de la mayor asociación entre procesamiento de magnitudes simbólicas y fluidez de cálculo podría ser que la precisión para acceder a la magnitud desde los números simbólicos facilita los mecanismos implicados en la resolución de operaciones simples. Por ejemplo, Butterworth, Zorzi, Girelli y Jonckeere (2001) proponen que los hechos aritméticos se organizan en términos de magnitudes, e identifican un proceso previo a la recuperación de hechos basado en la comparación de los dígitos implicados en la operación. Sin embargo, iría en contra del influyente modelo de triple código (Dehaene & Cohen, 1995), ya que en este modelo se propone que los hechos aritméticos se almacenan en formato verbal, esto es, como representaciones verbales que no implican procesamiento de la magnitud (ver Figura 1.14 del Estudio I). Sin embargo, el modelo no excluye que la posibilidad de que haya algún tipo de elaboración semántica, especialmente cuando no se recupera directamente el resultado desde la memoria, sino que se utiliza algún tipo de estrategia para llegar al resultado. Nótese en este sentido, que la tarea de velocidad de cálculo está compuesta de operaciones de suma y resta, y estas últimas normalmente se resuelven utilizando estrategias (e.g., Orrantia, Rodríguez, Múñes y Vicente, 2012) que requieren elaboración semántica de los operandos. De hecho, como se ha visto en el tercer objetivo de este estudio en el que hemos utilizado solo como medida de ejecución matemática la operación de suma, la correlación de esta medida con el índice de distancia se reduce de $r = .51$ a $r = .39$, posiblemente por quitar la operación de resta que está más mediatizada por el acceso a la representación de la magnitud (e.g., Dehaene, Piazza, Pinel, & Cohen, 2003).

Por lo tanto, parece que el acceso a la representación semántica desde los números simbólicos juega un papel relevante en la explicación de las diferencias individuales en la ejecución matemática, especialmente en el cálculo. Sin embargo, esto contrasta con otras propuestas que sugieren que es la eficacia para procesar magnitudes simbólicas y no la precisión para acceder a las representaciones subyacentes lo que se relaciona con la ejecución matemática. Algunos resultados apoyan esta idea en niños (e.g., Bartelet et al., 2014; Sasanguie et al., 2013). Y en el caso de los adultos, un estudio ha considerado esta hipótesis directamente (Sasanguie & Reynvoet, 2014), por lo que en el segundo objetivo de este estudio nos planteamos analizarlo.

Sasanguie y Reynvoet (2014) sugieren que los adultos construyen las habilidades aritméticas a partir de la habilidad para de manera rápida y automática procesar números simbólicos, por lo tanto, sin necesidad activar la representación de la magnitud subyacente. Es la hipótesis del procesamiento simbólico per se. Nosotros quisimos analizar esta cuestión desarrollando un estudio que replicara y ampliara el propuesto por Sasanguie y Reynvoet (2014). Para ello, utilizamos una tarea de emparejamiento audiovisual simbólica pura y de notación mixta que requiere proyectar los números simbólicos a cantidades. Además, utilizamos el índice de distancia de la comparación de magnitudes simbólicas (1 a 9) como reflejo del acceso a la magnitud desde los dígitos. Como ejecución matemática, utilizamos las tareas de velocidad de cálculo y cálculo mental.

El análisis de la tarea de emparejamiento mostró que en la versión simbólica se produjo un efecto de distancia en los tiempos de respuesta, con los participantes respondiendo más lento cuando la distancia entre los números a emparejar era corta, pero los contrastes a posteriori mostraron que cuando se ajustó la significatividad a partir de Bonferroni, ninguna diferencia entre distancias alcanzó la significatividad. Aunque este resultado coincide con lo obtenido por Sasanguie y Reynvoet (2014; ver también Cohen, 2009; Defever et al., 2012; Goldfarb et al., 2011), contradice otros estudios previos que sí han encontrado un efecto distancia en una tarea igual/diferente simbólica (e.g., Dehaene & Akhavein, 1995; Verguts & van Opstal, 2011). No obstante, ya expusimos en el Capítulo I que estos estudios que encuentran un efecto distancia en esta tarea por el tipo de estímulos que utilizan. Nuestros estímulos fueron similares a aquellos utilizados por Goldfarb et al. (2011), para así poderlos equiparar a la tarea de comparación de magnitudes simbólicas. Por otro lado, y como era esperable, la tarea de emparejamiento de notación mixta mostró un claro efecto de distancia. Por lo tanto, en los siguientes análisis solo utilizamos la eficacia (TR, puesto que el número de errores fue muy pequeño) en la tarea de emparejamiento simbólica, y el índice de distancia en la tarea de emparejamiento de notación mixta, puesto que se trataba de explorar la hipótesis de acceso.

Los análisis de correlación mostraron altas correlaciones significativas entre las tres medidas utilizadas y la velocidad de cálculo, y entre la medidas de comparación de magnitudes y emparejamiento de notación mixta y el cálculo mental, pero no entre la medida de emparejamiento simbólica y el cálculo mental. Vemos, otra vez, la importancia de utilizar diferentes medidas de ejecución matemática.

Por lo que se refiere a los análisis de regresión jerárquica, los resultados mostraron que las tres medidas utilizadas explicaron una parte de la varianza de la velocidad de cálculo más allá de lo explicado por las variables de control. Además el modelo fue altamente predictivo. Más interesante aún, las medidas que reflejan acceso a la representación de la magnitud explicaron más allá de lo explicado por la medida simbólica pura; y de la misma manera, la medida simbólica pura explicó más allá de lo explicado por las medidas de acceso. Estos resultados unidos a los obtenidos en el objetico anterior, indicarían que las diferencias individuales en fluidez de cálculo dependen en buena medida de la velocidad de procesamiento numérico puro, pero también de las habilidades para acceder a las representaciones simbólicas. Esto en cierta medida contradice los resultados obtenidos por Sasanguie y Reynvoet (2014), quienes sugieren que sólo la habilidad para procesar de manera rápida y automática números simbólicos se relaciona con la fluidez en cálculo. Una explicación a estos resultados contradictorios lo podemos encontrar en las diferencias entre estudios. Sasanguie y Reynvoet (2014) no utilizaron una tarea de comparación en su modelo predictivo. Y la tarea de emparejamiento de notación mixta la redijeron al rango de subitizing, mientras que en nuestro caso utilizamos cantidades de 1 a 9. Sasanguie y Reynvoet (2014) indicaron que utilizaron solo el rango de subitizing para asegurar que los participantes podían identificar rápidamente las magnitudes presentadas. Se podría argumentar, entonces, que nuestra tarea no refleja representación de la magnitud, reservada solo al rango de subitizing, ya que con números mayores los participantes utilizan el conteo para dar sus respuestas. Aún dudando de que solo el rango de conteo refleje representación de la magnitud (ver por ejemplo Reeve et al., 2012), hay que tener en cuenta que lo que predice la ejecución en la velocidad de cálculo no es la eficacia (TR) con la que se procesan las cantidades (o si se quiere, la velocidad con la que cuentan), sino el índice de distancia. Es decir, que los participantes con un menor índice de distancia son aquellos con representaciones no simbólicas más precisas, y son estos los más rápidos ejecutando operaciones de cálculo.

Por lo tanto, ambas hipótesis (procesamiento simbólico puro y acceso a la magnitud desde los símbolos) parecen explicar las diferencias individuales en el cálculo. Dado que algunos han postulado dos sistemas representacionales distintos para el SNA y los símbolos numéricos (e.g., Lyons et al., 2013), es posible que ambos sistemas contribuyan a las diferencias individuales en la ejecución matemática. Considerando el modelo más influyente de cognición numérica, como es el modelo de triple código, el sistema simbólico podría operar, como sugieren Sasanguie y Reynvoet (2014), por una ruta asemántica para conectar números arábigos y representaciones verbales, sin necesidad de activar una representación de la magnitud. El SNA operaría en una ruta que conecta los símbolos con magnitudes. En este contexto, las habilidades de cálculo se construirían sobre ambas rutas.

Por otro lado, y en lo referente al análisis de regresión jerárquica sobre la tarea de cálculo mental, los resultados mostraron que solo las medidas relacionadas con la representación de la magnitud explicaron una parte de la varianza del cálculo mental más allá de lo explicado por las variables de control y el procesamiento simbólico puro. Sin embargo, el procesamiento simbólico puro aportó significativamente a la varianza del cálculo mental por encima de las demás medidas incluidas en el modelo. Este resultado sugiere que el cálculo mental depende más de un procesamiento basado en magnitudes que del procesamiento simbólico, lo cual coincide con lo planteado en otros trabajos en los que se ha utilizado una tarea de cálculo mental (e.g., Guillaume et al., 2013). Por lo tanto, esto apoya nuestro planteamiento de utilizar diferentes medidas de ejecución matemática para analizar las relaciones entre procesamiento numérico y ejecución matemática.

Por último, nos planteamos un tercer objetivo en el que analizar hasta qué punto las habilidades implicadas en la enumeración se relacionan con la aritmética, en este caso con la velocidad de cálculo. Utilizamos una tarea de enumeración en la que comprobamos que la pendiente de los tiempos de respuesta (y errores) difiere para pequeñas y grandes numerosidades, reflejando así los dos mecanismos implicados en esta tarea, el subitizing y el conteo. Por ello, para los sucesivos análisis utilizamos los índices de medida propios de esta tarea: eficacia por un lado, y pendiente de la regresión sobre tiempos de respuesta en función de la numerosidad por otro, para el rango total, el rango de de subitizing y el rango de conteo.

El análisis correlacional mostró que todas las medidas correlacionaron significativamente con la velocidad de cálculo, excepto la pendiente en el rango de subitizing. Los análisis de regresión jerárquica mostraron una contribución muy significativa tanto de la medida de eficacia como de la pendiente del rango completo más allá de las medidas de control, y lo que es más importante, más allá de lo explicado por el índice de distancia de la tarea de comparación de magnitudes simbólicas, que hemos visto que contribuye significativamente al cálculo. Cuando diferenciamos los dos mecanismos implicados en la tarea, las medidas de eficacia tanto del rango de subitizing como del rango de conteo contribuyeron a la varianza del cálculo más allá de las variables de control y del índice de distancia de la comparación simbólica. Y en al caso de la medida específica de la tarea (pendiente) los resultados fueron similares, con la excepción de que en el rango de subitizing solo se aproximó a la significatividad.

Estos resultados son importantes, porque hasta donde llegan nuestros conocimientos ningún estudio previo ha analizado esta cuestión en población adulta. Y los mismos reflejan que una habilidad básica del procesamiento numérico, como es el conteo, aún muestra una asociación con las diferencias individuales en el cálculo adulto. Es importante notar que esta tarea también implica procesamiento de magnitudes, y que los efectos específicos de la tarea reflejan representación de la magnitud (Reeve et al., 2012). La explicación de que esta tarea se relaciones con la ejecución matemática podemos encontrarla en el hecho de que los adultos, no solo recuperan hechos numéricos desde la memoria, sino que también utilizan procedimientos de cálculo basado en el conteo (e.g., LeFevre et al., 1996). Por lo tanto parece lógico que aquellos más eficaces enumerando conjuntos sean también más rápidos ejecutando esas estrategias. No obstante, los resultados obtenidos en el rango de subitizing indican que las relaciones entre esta tarea y el cálculo va más allá del conteo, ya que el subitizing es un mecanismo automático de aprehensión de cantidades en adultos. Algunos plantean que el subitizing es el mecanismo que permite proyectar los números simbólicos en su magnitud (Le Corre & Carey, 2007), lo cual explicaría su relación con la aritmética en niños (Gray & Reeve, 2014). Porqué el subitizing se relaciona con el cálculo en adultos es una cuestión abierta que necesita más investigación, pero parece que se mantienen diferencias individuales en la representación de cantidades pequeñas que de alguna manera generan diferencias individuales en el cálculo.

CONCLUSIONES

Desde que Dehaene (1997) escribió *The number sense* se ha generado una corriente de investigación centrada en analizar los entresijos de un sistema que nos permite procesar magnitudes numéricas aproximadas, y que parece esencial para desenvolvernos en nuestra vida diaria. Esta corriente ha desembocado, en los años más recientes, en un intento por relacionar este sistema con la ejecución en matemáticas. Como hemos podido ver, en un campo que está arrojando resultados mixtos y aún no concluyentes, pero que está generando nuevas investigaciones que sin duda están aportando nuevos conocimientos. Esta tesis ha sido un intento de aportar algo genuino a este floreciente campo de investigación.

Como hemos podido ver, nacemos con este sistema numérico aproximado. Por lo tanto, la biología nos da las bases sobre la cual este sistema se va a ir desarrollando. Pero la cultura aporta un sistema numérico simbólico de naturaleza, que de una manera u otra acaba conectando con el proporcionado por la biología. De qué manera se lleva a cabo este proceso de proyección de un sistema en otro es una cuestión que aún no tiene una respuesta definitiva. Pero posiblemente este proceso juega un papel importante en el desarrollo de las habilidades matemáticas. Papel que como hemos tenido oportunidad de ver, se sigue manteniendo a lo largo del ciclo vital.

Hay partidarios de dar más importancia a un sistema u otro. Desde un lado se propone que es el sistema aproximado el que se relaciona con las habilidades matemáticas. De otro se propone que son las habilidades para proyectar un sistema en otro. Aún una tercera posibilidad, más reciente, plantea que es el sistema simbólico el que se relaciona con las habilidades matemáticas. Todos presentan evidencias a favor de su propuesta. Y posiblemente todos tengan parte de razón, y las habilidades matemáticas se construyen a parir de ambos sistemas y de las conexiones entre uno y otro. Pero si se trata de tomar partido, la presente tesis doctoral apoyaría la proyección del sistema simbólico en el aproximado como elemento clave para el desarrollo de las habilidades aritméticas.

Así, hemos desarrollado dos estudios, uno longitudinal con niños; otro con población adulta. En ambos casos hemos intentado hacer una aportación genuina a este campo de investigación. En el caso de los niños nos hemos centrado en cómo se procesan números de dos dígitos; esta es nuestra aportación. Los resultados nos han llevado a proponer tres tareas que reflejan habilidades que parece juegan un papel importante en la predicción de las habilidades matemáticas en los primeros años de la educación formal.

En el caso de los adultos, hemos desarrollado un estudio más amplio que ha intentado solventar algunas de las limitaciones que hemos encontrado en la literatura, e incluso ha aportado información novedosa que puede abrir puertas para investigar en el futuro. Desde las limitaciones, dos han sido los aspectos que hemos tenido en cuenta. Por un lado, utilizar un amplio rango de medidas de control que permitan que las predicciones sean adecuadas. Es probable que no hayamos incorporado todas. Por ejemplo, los mecanismos inhibitorios posiblemente jueguen un papel importante a controlar. Por otro lado, utilizar un rango más amplio de medidas relacionadas con la ejecución matemática. Hemos podido ver que dependiendo de las medidas utilizadas, los resultados van en una dirección u otra. Parece evidente que esto que hemos hecho con los adultos es necesario en los estudios que incorporen muestras de niños. Y desde nuestras aportaciones más genuinas, hemos incorporado al estudio con adultos una variable que puede tener un interés teórico importante en este campo de investigación, como es la tarea de enumeración.

Por supuesto, como todo trabajo presenta ciertas limitaciones. En el caso del estudio con niños, hay un desequilibrio entre las tareas simbólicas y las no simbólicas. Las sumas aproximadas y la estimación en la línea numérica podríamos haberlas ampliado a su versión no simbólica. No obstante, analizar una población de niños de esas edades implica seleccionar pruebas, debido a las dificultades en la recogida de datos. Por ello hemos utilizado la prueba no simbólica más ampliamente utilizada, y nos hemos concentrado en las pruebas simbólicas que nos parecían más relevantes y que aún no se habían estudiado conjuntamente. Sin duda, hemos tenido problemas con la prueba de comparación no simbólica. Para los niños hemos construido la prueba nosotros, y posiblemente no haya sido la más adecuada. Por ello, en nuestro segundo estudio hemos optado por utilizar una prueba ya utilizada en otros estudios, aunque no estamos seguros de su eficacia para medir lo que tiene que medir. Este asunto es importante, y la solución debería pasar por que la mayoría de los investigadores se pongan de acuerdo en qué tarea estándar utilizar.

Como es evidente, este trabajo tiene importantes implicaciones educativas. Una de ellas tiene que ver precisamente con la evaluación. Si como se plantea, las habilidades que hemos estudiado realmente juegan un papel importante en el desarrollo de las habilidades, necesitamos contar con pruebas de evaluación que realmente midan todos aquellos aspectos relacionados con el procesamiento y representación de la magnitud numérica. Hasta la fecha, al menos en nuestro país, no existe ningún instrumento de estas características. Pero su construcción no es tarea fácil. Primero, porque su aplicación va a necesitar inevitablemente un ordenador. Hemos visto que una parte importante de las tareas están basadas en los tiempos de respuesta, cuya unidad de medida son los milisegundos. No obstante, cada vez hay más acceso a la utilización de ordenadores, por lo que esta cuestión es relativamente solventable. Más complejo resulta decidir qué tareas utilizar, con qué estímulos, con qué parámetros. Hemos visto que solo la prueba por excelencia, como es la comparación de magnitudes no simbólicas, implica una serie de variables en las que hay que ponerse de acuerdo. Y para responder a qué tareas utilizar, antes hay que analizar más en profundidad cuáles son las que realmente se relacionan con las matemáticas. Y cuáles a qué edades.

Otra implicación evidente tiene que ver con la prevención, enseñanza e intervención en este campo. Desde la prevención, hay que detectar tempranamente que los niños en riesgo, para lo cual los instrumentos de evaluación van a jugar un papel relevante. Desde la enseñanza, parecería necesario incorporar en las aulas tareas que desarrollen todas aquellas habilidades relacionadas con el procesamiento y representación de magnitudes. Y desde la intervención, analizar el papel que estas habilidades juegan en explicar las dificultades en el aprendizaje para así desarrollar programas de intervención encaminados a solventarlas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ansari, D. (2008). Effects of development and enculturation on number representation in the brain. *Nature Reviews Neuroscience*, *9*(4), 278–291.

Ashcraft, M. H., & Moore, A. M. (2012). Cognitive processes of numerical estimation in children. *Journal of Experimental Child Psychology*, *111*, 246–267.

Barth, H., Beckmann, L., & Spelke, E. S. (2008). Nonsymbolic, approximate arithmetic in children: Abstract addition prior to instruction. Developmental Psychology, *44*(5), 1466–1477.

Barth, H., La Mont, K., Lipton, J., Dehaene, S., Kanwisher, N., & Spelke, E. (2006). Non-symbolic arithmetic in adults and young children. *Cognition*, *98*(3), 199–222.

Bartelet, D., Vaessen, A., Blomert, L., & Ansari, D. (2014). What basic number processing measures in kindergarten explain unique variability in first-grade arithmetic proficiency? *Journal of Experimental Child Psychology*, *117*, 12–28.

Bonny, J. W., & Lourenco, S. F. (2013). The approximate number system and its relation to early math achievement: Evidence from the preschool years. *Journal of Experimental Child Psychology*, *114*(3), 375-388.

Booth, J.L., & Siegler, R.S. (2006). Developmental and individual differences in pure numerical estimation. *Developmental Psychology*, *42* (1), 189–201.

Booth, J.L., & Siegler, R.S. (2008). Numerical magnitude representations influence arithmetic learning. *Child Development*, *79* (4), 1016–1031.

Brankaer, C., Ghesquie`re, P., & De Smedt, B. (2014). Children's mapping between nonsymbolic and symbolic numerical magnitudes and its association with timed and untimed tests of mathematics achievement. *PLoS One*, *9*(4), e93565.

Brannon, E.M., Cantlon, J. F., & Terrace, H. S. (2006). The role of reference points in ordinal numerical comparisons by rhesus macaques (Macaca mulatta). *Journal of Experimental Psychology*, *32*(2), 120–134.

Brannon, E. M., & Terrace, H. S. (1998). Ordering of the numerosities 1 to 9 by monkeys.

Science, *282*(5389), 746–749.

Castronovo, J., & G€obel, S.M. (2012). Impact of high mathematics education on the number sense. *PLoS One, 7* (4), e33832.

Cohen Dadosh, R., Brodsky, W., Levin, M. & Henik, A. (2008). Mental representation: What can pitch tell us about the distance effect? Cortex, *44(*4), 470-477.

Crollen, V., Castronovo, J. & Seron, X. (2011). Under-and over-estimation: a bi-directional mapping process between symbolic and non-symbolic representations of number? *Experimental Psychology*, *58*(1), 39-49.

De Smedt, B., Noël, M., Gilmore, C., & Ansari, D. (2013). How do symbolic and nonsymbolic numerical magnitude processing skills relate to individual differences in children's mathematical skills? A review of evidence from brain and behavior. *Trends in Neuroscience and Education, 2*, 48–55.

Defever, E., Sasanguie, D., Vandewaetere, M., Reynvoet, B. (2012). What can the same-different task tell us about the development of magnitude representations?. *Acta Psychologica, 140* (1), 35-42.

Dehaene, S. (1997). *The number sense: How the mind creates mathematics*. New York: Oxford University Press.

Dehaene, S., Dupoux, E. & Mehler, J. (1990). Is numerical comparison digital? Analogical and Symbolic Effects in two-digit number comparison. *Journal of Experimental Psychology, 16*(3), 626-641.

Dehaene, S., Spelke, E., Pinel, P., Stanescu, R. & Tsivkin, S. (1999). Sources of mathematical thinking: behavioral and brain-imaging evidence. *Science*, *284*(5416), 970-974.

Desoete, A., Ceulemans, A., DeWeerdt, F., & Pieters, S. (2012). Can we predict mathematical learning disabilities from symbolic and non-symbolic comparison tasks in kindergarten? Findings from a longitudinal study. *British Journal of Educational Psychology*, *82* (1), 64–81.

De Vos, T. (2010). *Tempo Test Automatiseren*. Amsterdam: Boom Test Publishers.

DeWind, N. K., & Brannon, E. M. (2012). Malleability of the approximate number system: Effects of feedback and training. Frontiers in Human *Neuroscience*, *6(*68), 1–10.

Estévez, N., Castro, D. & Reigosa, V. (2008). Bases biológicas de la discalculia del desarrollo. *Revista Cubana de Genética Comunitaria*, *2(*3), 14–19.

Friso-van den Bos, I., van der Ven, S. H. G., Kroesbergen, E. H., & van Luit, J. E. H. (2013). Working memory and mathematics in primary school children: A meta-analysis. *Educational Research Review*, *10*, 29–44.

Fuhs, M.W., & McNeil, N.M. (2013). ANS acuity and mathematics ability in preschoolers from low-income homes: contributions of inhibitory control. *Developmental Science*, *16* (1), 136–148.

Fuchs, L. S., Geary, D. C., Fuchs, D., Compton, D. L., & Hamlett, C. L. (2014). Sources of individual differences in emerging competence with numeration understanding versus multidigit calculation skill. *Journal of Educational Psychology*, *106*, 482–498.

Garcia-Orza, J., Perea, M., Abu Mallouh, R., & Carreiras, M. (2012). Physical similarity (and not quantity representation) drives perceptual comparison of numbers: Evidence from two Indian notations. *Psychonomic Bulletin and Review, 19*, 294–300.

Geary, D. C. (2011). Cognitive predictors of individual differences in achievement growth in mathematics: A five year longitudinal study. *Developmental Psychology*, *47*, 1539–1552.

Geary, D.C. (2013). Early foundations for mathematics learning and their relations to learning disabilities. *Current Directions in Psychological Science*, *22* (1), 23–27.

Geary, D. C., Hoard, M. K., Byrd-Craven, J., Nugent, L., & Numtee, C. (2007). Cognitive mechanisms underlying achievement deficits in children with mathematical learning disability. *Child Development*, *78,* 1343–1359.

Geary, D.C., Hoard, M.K., Nugent, L., & Bailey, D.H. (2013). Adolescents' functional numeracy is predicted by their school entry number system knowledge. *PLoS One*, *8*(1), e54651.

Gebuis, T., & Reynvoet, B. (2011). The interplay between nonsymbolic number and its continuous visual properties. *Journal of Experimental Psychology: General, 141*(4), 642–648.

Gebuis, T. & Reynvoet, B. (2012a). Continuous visual properties explain neural responses to non-symbolic number. *Psychophysiology, 49*(11), 1481-1491.

Gebuis, T., & Reynvoet, B. (2012b). The role of visual information in numerosity estimation. *PLoS ONE*, *7*, e37426.

Gebuis, T. & van der Smagt, M.J (2011). False approximations of the approximate number system. *PLoS ONE, 6*(10), e25405.

Gilmore, C., Attridge, N., De Smedt, B. & Inglis, M. (2014). Measuring the Approximate Number System in children: Exploring the relationships among different tasks. *Learning and Individual Differences, 29*, 50-58.

Gilmore, C., Attridge, N., Clayton, S., Cragg, L., Johnson, S., Marlow, N., Simms, V., & Inglis, M. (2013). Individual differences in inhibitory control, not non-verbal Lumber acuity, correlate with mathematics achievement. *PLoS One*, *8* (6), e67374.

Gilmore, C., Attridge, N., & Inglis, M. (2011). Measuring the approximate number system. *Quarterly Journal of Experimental Psychology*, *64*(11), 2099–2109.

Gilmore, C.K., McCarthy, S.E., & Spelke, E.S. (2011). Non-symbolic arithmetic abilities and mathematics achievement in the first year of formal schooling. *Cognition*, *115* (3), 394–406.

Göbel, S., Walsh, V., & Rushworth, M. F. S. (2001). The mental number line and the human angular gyrus. *Neuroimage*, *14*(6), 1278-1289.

Goldfarb, L, Henik, A., Rubinsten, O., Bloch-David, Y. &, Gertner L. (2011). The numerical distance effect is task dependent. *Memory & Cognition, 39*(8):1508–1517.

Halberda, J., Ly, R., Wilmer, J.B., Naiman, D.Q., & Germine, L. (2012). Number sense across the lifespan as revealed by a massive Internet-based sample. *Proceedings of the National Academy of Sciences, USA*, *109* (28), 11116–11120.

Halberda, J., Mazzocco, M.M., & Feigenson, L. (2008). Individual differences in non-verbal number acuity correlate with maths achievement. *Nature*, *455* (7213), 665–668.

Holloway, I.D., & Ansari, D. (2009). Mapping numerical magnitudes onto symbols: the numerical distance effect and individual differences in children's mathematics achievement. *Journal of Experimental Child Psychology*, *103* (1), 17–29.

Inglis, M., Attridge, N., Batchelor, E. S., & Gilmore, C. (2011). Non-verbal number acuity correlates with symbolic mathematics achievement: But only in children. *Psychonomic Bulletin & Review*, *18*(6), 1222–1229.

Inglis, M., & Gilmore, C. (2013). Sampling from the mental number line: how are approximate number system representations formed? *Cognition*, *129* (1), 63–69.

Iuculano, T., Tang, J., Hall, C. W., & Butterworth, B. (2008). Core information processing deficits in developmental dyscalculia and low numeracy. *Developmental Science*, *11*(5), 669–680.

Jordan, J.A., Mulhern, G., &Wylie, G. (2009). Individual differences in trajectories of arithmetical development in typically achieving 5- to 7-year-olds. *Journal of Experimental Child Psychology*, *103*, 455–468.

Jordan, N.C., Glutting, J., & Ramineni, C. (2010). The importance of number sense to mathematics achievement in first and third grades. *Learning and Individual Differences*, *20*(2), 82–88.

Jordan, N.C., Kaplan, D., Ramineni, C., & Locuniak, M.N. (2009). Early math matters: kindergarten number competente and later mathematics outcomes. *Developmental Psychology*, *45*(3), 850–867.

Kolkman, M.E., Kroesbergen, E.H., & Leseman, P.P.M. (2013). Early numerical development and the role of non-symbolic and symbolic skills. *Learning and Instruction*, *25*, 95–103.

Landerl K, Bevan A, Butterworth B (2004) Developmental dyscalculia and Basic numerical capacities: a study of 8-9-year-old students. *Cognition*, *93,* 99–125.

Landerl, K., Fussenegger, B., Moll, K., & Willburger, E. (2009). Dyslexia and dyscalculia: Two learning disorders with different cognitive profiles. *Journal of Experimental Child Psychology*, *103*(3), 309–324.

Landerl, K., & Kolle, C. (2009). Typical and atypical development of basic numerical skills in elementary school. *Journal of Experimental Child Psychology*, *103*, 546–565.

Le Corre, M. & Carey, S. (2007). One, two, three, four, nothing more: an investigation of the conceptual sources of the verbal counting principles. *Cognition, 105*(2), 395-438.

Libertus, M.E., Feigenson, L., & Halberda, J. (2011). Preschool acuity of the aproxímate number system correlates with school math ability. *Developmental Science*, *14* (6), 1292–1300.

Libertus, M.E., Feigenson, L., & Halberda, J. (2013a). Is approximate number precision a stable predictor of math ability? *Learning and Individual Differences*, *25*, 126–133.

Libertus, M. E., Feigenson, L., & Halberda, J. (2013b). Numerical approximation abilities correlate with and predict informal but not formal mathematics abilities. *Journal of Experimental Child Psychology*, *116*, 829–838.

Libertus, M. E., Feigenson, L., & Halberda, J. (2011). Preschool acuity of the approximate number system correlates with school math ability. *Developmental science*, *14*(6), 1292–1300.

Libertus, M.E., Odic, D., & Halberda, J. (2012). Intuitive sense of number correlates with math scores on college-entrance examination. *Acta Psychologica, 141* (3), 373–379.

Linsen, S., Verschaffel, L., Reynvoet, B., & De Smedt, B. (2014). The association between children's numerical magnitude processing and mental multi-digit subtraction. *Acta Psychologica*, *145*, 75–83.

Lipton, J. S., & Spelke, E. S. (2003). Origins of number sense: Large number discrimination in human infants. *Psychological Science*, *14*, 396–401.

Lonnemann, J., Linkersd€orfera, J., Hasselhorna, M., & Lindberg, S. (2011). Symbolic and non-symbolic distance effects in children and their connection with arithmetic skills. *Journal of Neurolinguistics*, *24* (5), 582–591.

Lourenco, S.F., Bonny, J.W., Fernandez, E.P., & Rao, S. (2012). Nonsymbolic number and cumulative area representations contribute shared and unique variance to symbolic math competence. *Proceedings of the National Academy of Sciences, USA*, *109* (46), 18737–18742.

Lyons, I. M., Ansari, D., & Beilock, S. L. (2012). Symbolic estrangement: Evidence against a strong association between numerical symbols and the quantities they represent. *Journal of Experimental Psychology: General*, *141*(4), 635–641.

Lyons, I.M., & Beilock, S.L. (2011). Numerical ordering ability mediates the relation between number-sense and arithmetic competence. *Cognition*, *121* (2), 256–261.

Maloney, E. A., Risko, E. F., Preston, F., Ansari, D., & Fugelsang, J. (2010). Challenging the reliability and validity of cognitive measures: The case of the numerical distance effect. *Acta Psychologica*, *134*(2), 154–161.

Mazzocco, M.M., Feigenson, L., & Halberda, J. (2011a). Impaired acuity of the approximate number system underlies mathematical learning disability (dyscalculia). *Child Development*, *82* (4), 1224–1237.

Mazzocco, M. M., Feigenson, L., & Halberda, J. (2011). Impaired acuity of the approximate number system underlies mathematical learning disability (Dyscalculia). *Child Development*, *82*(4), 1224–1237.

Mazzocco, M.M., Feigenson, L., & Halberda, J. (2011b). Preschoolers' precision of the approximate number system predicts later school mathematics performance. *PLoS One*, *6* (9), e23749.

McCloskey, M., Camarazza, A. & Basili, A. (1985). Cognitive mechanisms in number processing and calculation: Evidence from Dyscalculia. *Brian and Cognition, 4,* 171-196.

Mejias S., Grégoire J, Noël M. P. (2012). Numerical estimation in adults with and without developmental dyscalculia. *Learning and Individual Differences,* 22, 164–170.

Moyer, R. S., & Landauer, T. K. (1967). Time required for judgements of numerical inequality. *Nature*, *215*(109), 1519–1520.

Mundy, E., & Gilmore, C. K. (2009). Children's mapping between symbolic and nonsymbolic representations of number. *Journal of Experimental Child Psychology*, *103*(4), 490–502.

Mussolin, C., Mejias, S., & Noel, M. P. (2010). Symbolic and nonsymbolic number comparison in children with and without dyscalculia. *Cognition*, *115*(1), 10–25.

Mussolin, C., Nys, J., & Leybaert, J. (2012). Relationships between approximate number system acuity and early symbolic number abilities. *Trends in Neuroscience and Education*, *1(*1), 21–31.

Nuerk, H.-C., Weger, U. & Willmes, K. (2001). Decade breaks in the mental number line? Putting tens and units back into different bins. *Cognition, 82*, B25-B33.

Nuerk, H.-C. and Willmes, K. 2005. On the magnitude representations of two-digit numbers. *Psychology Science, 47*, 52–72.

Nys, J., Ventura, P., Fernandes, T., Querido, L., & Leybaert, J. (2013). Does math education modify the approximate number system? A comparison of schooled and unschooled adults. *Trends in Neuroscience and Education*, *2(*1), 13–22.

Opfer, J. E., & Siegler, R. S. (2007). Representational change and children's numerical estimation. *Cognitive Psychology*, *55*, 169–195.

Park, J., & Brannon, E. M. (2014). Training the approximate number system improves math proficiency. *Psychological Science*, *24*(10), 2013–2019.

Piazza, M., Facoetti, A., Trussardi, A.N., Berteletti, I., Conte, S., Lucangeli, D., Dehaene, S., & Zorzi, M. (2010). Developmental trajectory of number acuity reveals a severe impairment in developmental dyscalculia. *Cognition*, *116* (1), 33–41.

Piazza, M., Izard, V., Pinel, P., Le Bihan, D., & Dehaene, S. (2004). Tuning curves for approximate numerosity in the human intraparietal sulcus. *Neuron*, *44*, 547–555.

Piazza, M., Facoetti, A., Trussardi, A., Berteletti, I., Conte, S., Lucangeli, D., et al. (2010). Developmental trajectory of number acuity reveals a severe impairment in developmental dyscalculia. *Cognition*, *116*(1), 33–41.

Pica, P., Lemer, C., Izard, V., & Dehaene, S. (2004). Exact and approximate arithmetic in an Amazonian indigene group. *Science*, *306*, 499-503.

Price, G. R., Holloway, I., Räsänen, P., Vesterinen, M., & Ansari, D. (2007). Impaired parietal magnitude processing in developmental dyscalculia. *Current Biology*, *17*(24), 1042–1043.

Price, G.R., Palmer, D., Battista, C., & Ansari, D. (2012). Nonsymbolic numerical magnitude comparison: reliability and validity of different task variants and outcome measures, and their relationship to arithmetic achievement in adults. *Acta Psychologica*, *140* (1), 50–57.

Raven, J., Court, J.H., & Raven, J.C. (1995). *Coloured progressive matrices*. Oxford: Oxford Psychologists Press.

Raven, J. C., Court, J. H., & Raven, J. (1992). *Standard progressive matrices*. Oxford: Oxford Psychologists Press.

Reeve, R., Reynolds, F., Humberstone, J., & Butterworth, B. (2012). Stability and change in markers of core numerical competencies. *Journal of Experimental Psychology: General*, *141* (4), 649–666.

Reigosa-Crespo, V., Valdés-Sosa, M., Butterworth, B., Estévez, N., Rodríguez, M., Santos, E., Torres, P., Suárez, R., & Lage, A. (2012). Basic numerical capacities and prevalence of developmental dyscalculia: the Havana Survey. *Developmental Psychology*, *48* (1), 123–135.

Rousselle, L., & Noël, M. P. (2007). Basic numerical skills in children with mathematics learning disabilities: A comparison of symbolic vs. non-symbolic number magnitude processing. *Cognition*, *102*(3), 361–395.

Sasanguie, D., Defever, E., Maertens, B., & Reynvoet, B. (2013a). The approximate number system is not predictive for symbolic number processing in kindergarteners. *Quarterly Journal of Experimental Psychology*, *67* (2), 271-280.

Sasanguie, D., Defever, E., Van den Bussche, E., & Reynvoet, B. (2010). The reliability of and the relation between non-symbolic numerical distance effects in comparison, same-different judgments and priming. *Acta Psychologica*, *136*(1), 73–80.

Sasanguie, D., Göbel, S.M., Moll, K., Smets, K., & Reynvoet, B. (2013a). Acuity of the approximate number sense, symbolic number comparison or mapping numbers onto space: what underlies mathematics achievement? *Journal of Experimental Child Psychology, 114*, 418–431.

Sasanguie, D., Göbel, S.M., Moll, K., Smets, K., & Reynvoet, B. (2013b). Approximate number sense, symbolic number processing or number-space mappings: what underlies mathematics achievement? *Journal of Experimental Child Psychology, 114*, 418–431.

Sasanguie, D., De Smedt, B., Defever, E., & Reynvoet, B. (2012). Association between basic numerical abilities and mathematics achievement. British Journal of *Developmental Psychology*, *30* (2), 344–357.

Sasanguie, D., Van den Bussche, E., & Reynvoet, B. (2012). Predictors for mathematics achievement? Evidence from a longitudinal study. *Mind, Brain, and Education*, *6*, 119–128.

Smets, K., Gebuis, T., Defever, E., Reynvoet, B. (2014). Concurrent validity of approximate number sense tasks in adults and children. *Acta Psychologica, 150,* 120-128.

Soltész, F., Szűcs, D., & Szűcs, L. (2010). Relationships between magnitude representation, counting and memory in 4-to 7-year-old children: A developmental study. *Behavioral and Brain Functions*, *6*(1), 13.

Sullivan, J. & Barner, D. (2014). Inference and association in children's early numerical estimation. *Child Development, 85*(4), 1740-1755.

Trick, L. M., & Pylyshyn, Z. W. (1994a). Why are small and large numbers enumerated differently? A limited capacity preattentive stage in vision. *Psychological Review*, *101*, 80–102.

Trick, L. M., & Pylyshyn, Z. W. (1994b). Cueing and counting: Does the position of the attentional focus affect enumeration? *Visual Cognition*, *1*, 67–100.

Van Den Bos, K. P., Zijlstra, B. J. H., & Van den Broeck, W. (2003). Specific relations between alphanumeric-naming speed and reading speeds of monosyllabic and multisyllabic words. *Applied PsychoLinguistics*, *24*, 407–430.

Van Opstal, F. & Verguts, T. (2011). The origins of the numerical distance effect: the same-different task. *Journal of Cognitive Psychology, 23*(1), 112-120.

Vanbinst, K., Ghesquière, P., & De Smedt, B. (2012). Numericalmagnitude representations and individual differences in children's arithmetic strategy use. *Mind, Brain, and Education*, *6*, 129–136.

Vanbinst, K., Ghesquière, P., & De Smedt, B. (2015). Does numerical processin uniquely predict first graders' future development of single-digit aritmetic? *Learning and Individual Differences, 37*, 153-160.

Whalen, J., Gallistel, C. R., & Gelman, R. (1999). Non-verbal counting in humans: The psychophysics of number representation. *Psychological Science*, *10*, 130-137.

Wilson, A. J., & Dehaene, S. (2007). Number sense and developmental dyscalculia. En D. Coch, G. Dawson and K.W. Fischer (eds.), *Human Behavior, Learning, and the Developing Brain: Atypical Development* (pp. 212–238). New York: The Guilford Press.

Xenidou-Dervou, I., van Lieshout, E. C. D. M., & van der Schoot,M. (2013).Working memory in nonsymbolic approximate arithmetic processing: A dual-task study with preschoolers. *Cognitive Science*, *38*, 101–127.

Xu, F., & Spelke, E. S. (2000). Large number discrimination in 6-month-old infants. *Cognition*, *74*(1), B1–B11.

Zebian, S., & Ansari, D. (2012). Differences between literates and illiterates on symbolic but not nonsymbolic numerical magnitude processing. *Psychonomic Bulletin & Review*, *19*(1), 93–100.

VNiVERSiDAD
D SALAMANCA

Este trabajo ha sido posible gracias a la financiación concedida a Sara San Romualdo Corral por la Junta de Castilla y León y el Fondo Social Europeo en el marco de la Estrategia Regional de Investigación Científica, Desarrollo Tecnológico e Innovación 2007-2013

Junta de Castilla y León
Consejería de Educación

Europa impulsa nuestro crecimiento

UNIÓN EUROPEA
Fondo Social Europeo

Este trabajo ha sido posible gracias a la financiación concedida a Sara San Romualdo Corral por la Junta de Castilla y León y el Fondo Social Europeo en el marco de la Estrategia Regional de Investigación Científica, Desarrollo Tecnológico e Innovación 2007-2013