VNIVERSIDAD D SALAMANCA
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

USal 800 AÑOS
1218 ~ 2018

Curso Cero de Matemáticas para las titulaciones de la Facultad de Economía y Empresa

Facultad de Economía y Empresa
Dpto Economía e Historia Económica
Perfil Matemáticas

19 de junio de 2017

J. Manuel Cascón, <casbar@usal.es>
Federico Cesteros, <fcesteros@usal.es>
Rodrigo del Campo, <rde@usal.es>
Aurora Manrique, <amg@usal.es>
M. Dolores García, <dgarcia@usal.es>
Bernardo García-Bernalt, <bgarcia@usal.es>
Guillermo Sánchez, <guillermo@usal.es>
Gustavo Santos, <santos@usal.es>

Contenidos

Objetivos

Objetivos

- Homogeneizar los conocimientos matemáticos. Se desarrollan los contenidos básicos que permitan afrontar las asignaturas del primer curso con garantías de éxito
- Mejorar el rendimiento académico. Una base sólida en Matemáticas permite que el alumno concentre su atención en la adquisición de nuevas competencias
- Adaptar la docencia a las nuevas tecnologías. Los contenidos se han generado mediante eXeLearning, LaTeX/Beamer, Mathematica
- Fomentar la formación *on-line*. Este material ofrece las ventajas de la enseñanza virtual: flexibilidad, accesibilidad, trabajo autónomo, pensamiento crítico, retroalimentación, ...

Tema 1

Conjuntos de números

Tema 1

Conjuntos de números

Números naturales

- Los números naturales surgen por la necesidad de contar
- El conjunto de los números naturales se representa con la letra $\mathbb{N}$
- El primer número natural es el 1. El 0 no se considera número natural

$$\boxed{\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}}$$

Números naturales. Operaciones

En el conjunto $\mathbb{N}$ se consideran las operaciones de suma $(+)$ y producto $(\cdot)$ (a menundo el punto se omite)

Suma: La suma (+) satisface las propiedades: conmutativa y asociativa en $\mathbb{N}$

Producto: El producto (·) satisface las propiedades: conmutativa, asociativa y elemento neutro (1) en $\mathbb{N}$

La suma y producto de números naturales verifica la propiedad distributiva:

$$a(b+c) = ab + ac, \quad \forall a, b, c \in \mathbb{N}$$

Números naturales. Teoría de la divisibilidad

Definiciones

- Un número $a \in \mathbb{N}$ es múltiplo de $b \in \mathbb{N}$ si existe $c \in \mathbb{N}$ tal que:

$$a = b \cdot c,$$

se indica $\boxed{a = \dot{b}}$

- Un número $a \in \mathbb{N}$ es divisor de $b \in \mathbb{N}$ si existe $c \in \mathbb{N}$ tal que:

$$b = a \cdot c,$$

se indica $\boxed{a|b}$

Números naturales. Teoría de la divisibilidad

Definiciones

- Un número $a \in \mathbb{N}$ es múltiplo de $b \in \mathbb{N}$ si existe $c \in \mathbb{N}$ tal que:

  $$a = b \cdot c,$$

  se indica $\boxed{a = \dot{b}}$

  Ejemplo 14 es múltiplo de 7 $(14 = 7 \cdot 2)$

- Un número $a \in \mathbb{N}$ es divisor de $b \in \mathbb{N}$ si existe $c \in \mathbb{N}$ tal que:

  $$b = a \cdot c,$$

  se indica $\boxed{a|b}$

Números naturales. Teoría de la divisibilidad

Definiciones

- Un número $a \in \mathbb{N}$ es múltiplo de $b \in \mathbb{N}$ si existe $c \in \mathbb{N}$ tal que:

  $$a = b \cdot c,$$

  se indica $\boxed{a = \dot{b}}$

- Un número $a \in \mathbb{N}$ es divisor de $b \in \mathbb{N}$ si existe $c \in \mathbb{N}$ tal que:

  $$b = a \cdot c,$$

  se indica $\boxed{a|b}$

Números naturales. Teoría de la divisibilidad

Definiciones

- Un número $a \in \mathbb{N}$ es múltiplo de $b \in \mathbb{N}$ si existe $c \in \mathbb{N}$ tal que:

  $$a = b \cdot c,$$

  se indica $\boxed{a = \dot{b}}$

- Un número $a \in \mathbb{N}$ es divisor de $b \in \mathbb{N}$ si existe $c \in \mathbb{N}$ tal que:

  $$b = a \cdot c,$$

  se indica $\boxed{a|b}$

  Ejemplo 3 es divisor de 15 ($15 = 3 \cdot 5$)

Números naturales. Teoría de la divisibilidad

Definiciones

- Un número $a \in \mathbb{N}$ es múltiplo de $b \in \mathbb{N}$ si existe $c \in \mathbb{N}$ tal que:
$$a = b \cdot c,$$
se indica $\boxed{a = \dot{b}}$

- Un número $a \in \mathbb{N}$ es divisor de $b \in \mathbb{N}$ si existe $c \in \mathbb{N}$ tal que:
$$b = a \cdot c,$$
se indica $\boxed{a|b}$

Observación

$$a \text{ es múltiplo de } b \quad \Leftrightarrow \quad b \text{ es divisor de } a$$

Números Naturales. Teoría de la divisibilidad

Definición Un número $p \in \mathbb{N}$ se dice primo si no tiene más divisores que la unidad y él mismo.

Ejemplo El 7, 29 y 131 son números primos.
El 8, 27 y 135 no son primos

Proposición Todo número natural descompone de forma única (salvo el orden) como producto de números primos

Ejemplo

$$39 = 3 \cdot 13, \qquad 3960 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$$

Tema 1

Conjuntos de números

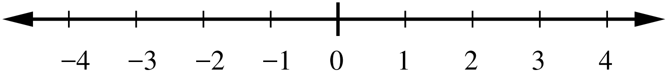
Números enteros

- Surgen de forma natural como la solución de las ecuaciones del tipo:

$$x + a = b, \qquad a, b \in \mathbb{N}$$

- El conjunto de los números enteros se representa con la letra $\mathbb{Z}$
- En $\mathbb{Z}$ se distinguen números positivos, números negativos y el 0.

$$\boxed{\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}}$$



Números enteros. Operaciones

En el conjunto $\mathbb{Z}$ se consideran las operaciones de suma $(+)$ y producto $(\cdot)$

Suma: La suma (+) satisface las propiedades: conmutativa, asociativa, elemento neutro (0), y elemento opuesto en $\mathbb{Z}$

Producto: El producto (·) satisface las propiedades: conmutativa, asociativa y elemento neutro (1) en $\mathbb{Z}$

La suma y producto de números enteros verifica la propiedad distributiva

Por lo anterior, $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo

Tema 1

Conjuntos de números

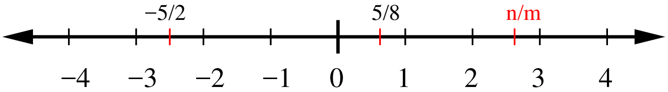
Números racionales

- Surgen como solución de las ecuaciones:

$$ax = b, \qquad a, b \in \mathbb{Z}, a \neq 0$$

- El conjunto de los números racionales se representa con la letra $\mathbb{Q}$
- Todo número racional admite una representación decimal, donde se distingue parte entera y parte decimal. La parte decimal de un número racional es finita o periódica (pura o mixta)

$$\boxed{\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m} \; : \; n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}, n \text{ y } m \text{ primos entre sí} \right\}}$$



Números racionales. Operaciones

En el conjunto $\mathbb{Q}$ se consideran las operaciones de suma $(+)$ y producto $(\cdot)$

Suma: La suma (+) satisface las propiedades: conmutativa, asociativa, elemento neutro (0), y elemento opuesto en $\mathbb{Q}$

Producto: El producto (·) satisface las propiedades: conmutativa, asociativa, elemento neutro (1) y elemento inverso en $\mathbb{Q}$

La suma y producto de números racionales verifica la propiedad distributiva

Por lo anterior, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ es un cuerpo conmutativo

Tema 1

Conjuntos de números

Números reales

- Introducir de forma rigurosa los números reales no es un proceso sencillo y supera los objetivos de este curso
- Tras incluir los números racionales en la recta numérica *quedan huecos*. Se trata de números cuya expresión decimal no es finita ni periódica
- Los números que verifican la propiedad anterior se denominan irracionales y se denotan por $\mathbb{I}$
- Ejemplos de números irracionales son: $\sqrt{2}$, e , π:

$$\sqrt{2} = 1.41421356237309504880168872420969\ldots$$
$$e = 2.71828182845904523536028747135266 24\ldots$$
$$\pi = 3.14159265358979323846264338327950 28\ldots$$

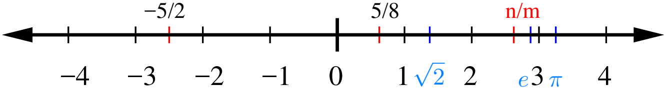
Números reales

- Los números reales resultan de la unión de los números racionales e irracionales:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

- Como ya hemos adelantado, los números reales se denotan con la letra $\boxed{\mathbb{R}}$
- Todo lo anterior puede resumirse, presentando los números reales como el conjunto

$$\boxed{\mathbb{R} = \left\{ a_0.a_1a_2a_3\ldots \quad : \quad \begin{array}{l} a_0 \in \mathbb{Z} \\ a_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}, \quad \forall i \in \mathbb{N} \end{array} \right\}}$$



Números reales. Operaciones

En el conjunto $\mathbb{R}$ se consideran las operaciones de suma $(+)$ y producto $(\cdot)$

Suma: La suma (+) satisface las propiedades: conmutativa, asociativa, elemento neutro (0), y elemento opuesto en $\mathbb{R}$

Producto: El producto (·) satisface las propiedades: conmutativa, asociativa, elemento neutro (1) y elemento inverso en $\mathbb{R}$

La suma y producto de números reales verifica la propiedad distributiva

Por lo anterior, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ es un cuerpo conmutativo

Números reales. Orden

Sea $\mathbb{R}^+$ el conjunto de los números reales positivos incluido el cero

Dados $a, b \in \mathbb{R}$ se define la relación (binaria):

$$\boxed{a \leqslant b \quad \Leftrightarrow \quad b - a \in \mathbb{R}^+}$$

La relación anterior satisface las propiedades:

1. $a \leqslant a \quad \forall a \in \mathbb{R}$ (*reflexividad*)
2. $a \leqslant b$ y $b \leqslant a \quad \Rightarrow \quad a = b$ (*antisimetría*)
3. $a \leqslant b$ y $b \leqslant c \quad \Rightarrow \quad a \leqslant c$ (*transitividad*)
4. Dados $a, b \in \mathbb{R}$ se tiene $a \leqslant b$ o $b \leqslant a$
5. Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$ si $a \leqslant b \Rightarrow a + c \leqslant b + c$
6. Dados $a, b \in \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}^+$, si $a \leqslant b \Rightarrow ac \leqslant bc$

Números reales. Orden

Sea $\mathbb{R}^+$ el conjunto de los números reales positivos incluido el cero

Dados $a, b \in \mathbb{R}$ se define la relación (binaria):

$$\boxed{a \leqslant b \quad \Leftrightarrow \quad b - a \in \mathbb{R}^+}$$

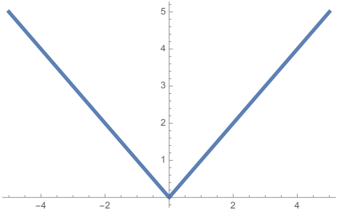
Por lo anterior $(\mathbb{R}, \leqslant)$ se dice conjunto totalmente ordenado

Es más, $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leqslant)$ es un cuerpo conmutativo totalmente ordenado

Números reales. Valor absoluto

Se define valor absoluto como la función sobre $\mathbb{R}$:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



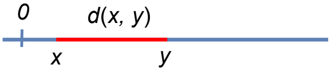
Propiedades

1. $|x| \geqslant 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad$ y $\qquad |x| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$
2. $|x| = |-x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$
3. $|x+y| \leqslant |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$ (desigualdad triangular)
4. $|xy| = |x||y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

Números reales. Distancia

El valor absoluto permite introducir el concepto de distancia entre dos puntos x, y de la recta real

$$\boxed{d(x,y) = |x-y|}$$



Propiedades

1. $d(x,y) \geqslant 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$,
2. $d(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$,
3. $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$,
4. $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$

Números reales. Acotación

Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$

- Se dice que $x \in \mathbb{R}$ es una cota superior de A, si x es mayor o igual que todos los elementos de A, es decir:

$$a \leqslant x \quad \forall a \in A$$

- A se dice acotado superiormente si tiene alguna cota superior
- Se dice que $x \in \mathbb{R}$ es una cota inferior de A, si x es menor o igual que todos los elementos de A, es decir:

$$x \leqslant a \quad \forall a \in A$$

- A se dice acotado inferiormente si tiene alguna cota inferior
- A se dice acotado si es acotado superior e inferiormente

Números reales. Acotación (II)

Sea $A \subset \mathbb{R}$:

- Si A está acotado superiormente, se denomina supremo a la menor de las cotas superiores. Se denota $\sup A$
- Si A tiene supremo y además $\sup A \in A$, el supremo es máximo de A y se denota $\max A$
- Si A está acotado inferiormente, se denomina ínfimo a la mayor de las cotas inferiores. Se denota $\inf A$
- Si A tiene ínfimo y además $\inf A \in A$, el ínfimo es mínimo de A y se denota $\min A$

Números reales. Acotación (III)

Axioma del extremo

Todo conjunto de $\mathbb{R}$ no vacío y acotado superiormente tiene supremo

Observaciones

- El axioma anterior implica que todo $A \subset \mathbb{R}$ no vacío y acotado inferiormente tiene ínfimo. Además, todo $A \subset \mathbb{R}$ acotado tiene ínfimo y supremo
- El axioma del supremo también recibe el nombre de axioma de completitud o continuidad
- Este axioma garantiza que los números reales *llenan* la recta real
- $\mathbb{Q}$ no verifica el axioma del extremo. Por ejemplo:

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$$

está acotado superiormente en $\mathbb{Q}$, pero no existe el supremo de A en $\mathbb{Q}$ ($\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$)

Números reales. Intervalos

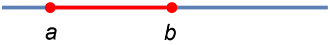
Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es un intervalo si dados $a, b \in A$ con $a < b$ se verifica que:

$$\forall c \in \mathbb{R} : a < c < b \quad \Rightarrow c \in A$$

Tipos de intervalos

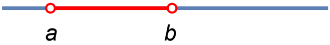
- Cerrado y acotado:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$$



- Abierto y acotado:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$



Números reales. Intervalos

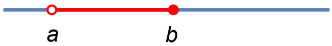
Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es un intervalo si dados $a, b \in A$ con $a < b$ se verifica que:

$$\forall c \in \mathbb{R} : a < c < b \quad \Rightarrow c \in A$$

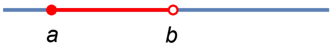
Tipos de intervalos

- Semiabiertos/semicerrados y acotados:

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$$



$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}$$



Números reales. Intervalos

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es un intervalo si dados $a, b \in A$ con $a < b$ se verifica que:

$$\forall c \in \mathbb{R} : a < c < b \quad \Rightarrow c \in A$$

Tipos de intervalos

- Cerrados y no acotados:

$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x\}$$

$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant b\}$$

Números reales. Intervalos

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es un intervalo si dados $a, b \in A$ con $a < b$ se verifica que:

$$\forall c \in \mathbb{R} \, : \, a < c < b \quad \Rightarrow c \in A$$

Tipos de intervalos

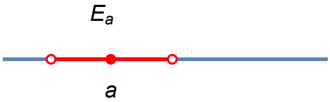
- Abiertos y no acotados:

$$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \, : \, a < x\}$$

$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \, : \, x < b\}$$

Números reales. Entorno de un punto

Dados $a \in \mathbb{R}$, se denomina entorno de a, E_a, a todo intervalo abierto que lo contiene



Tema 1

Conjuntos de números

Números complejos. Introducción

- En ocasiones, la resolución de ecuaciones algebraicas conduce a raíces que no son números reales:

$$x^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$$

- Los números complejos son una extensión de los números reales que incluyen este tipo de raíces
- Para definir el conjunto de los números complejos, primero se debe introducir la denominada unidad imaginaria que se denota con la letra i, y formalmente es:

$$\boxed{i = \sqrt{-1}}$$

Observación De la definición de unidad imaginaria se tiene: $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{0, 1, 2, 3\}$:

$$i = \sqrt{-1}, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = i, \dots, i^{4n+k} = i^k$$

Números complejos. Definición

El conjunto de los números complejos se denota con la letra $\mathbb{C}$ y viene dado por:

$$\boxed{\mathbb{C} = \{a + bi \,:\, a, b \in \mathbb{R}\}}$$

Observaciones

- En todo número complejo se distingue parte real (Re) e imaginaria (Im):

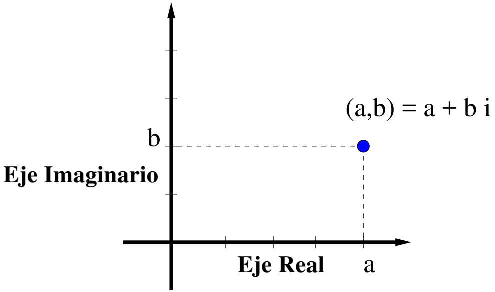
$$\mathrm{Re}(a + bi) = a, \qquad Im(a + bi) = b$$

- Todo número real es en particular un número complejo ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$)
- Los números complejos con parte real nula ($a = 0$), se denominan imaginarios (puros)
- En ocasiones los números complejos se presentan como un par ordenado:

$$a + bi \equiv (a, b)$$

Números complejos. Plano complejo

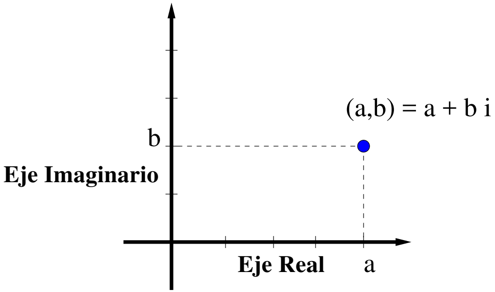
Los números complejos pueden identificarse con los puntos del plano (Plano complejo)



Observación Los puntos (números) sobre el eje de abcisas (eje real) son los números reales. Los puntos (números) sobre el eje de ordenadas (eje imaginario) son los números imaginarios (puros)

Números complejos. Plano complejo

Los números complejos pueden identificarse con los puntos del plano (Plano complejo)



Definición Se denomina módulo de un número complejo, $a + bi$, a la longitud del vector (a, b), se denota $|a + bi|$:

$$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Números complejos. Operaciones

En el conjunto $\mathbb{C}$ se consideran las operaciones de suma $(+)$ y producto $(\cdot)$ (extienden operaciones en $\mathbb{R}$)

- Suma: $a+bi,\ c+di \in \mathbb{C}$
$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$
- Producto: $a+bi,\ c+di \in \mathbb{C}$
$$(a+bi)\cdot(c+di)=ac+bdi^2+adi+bci$$
$$\overset{i^2=-1}{=}(ac-bd)+(ad+bc)i$$

La suma y producto satisfacen en $\mathbb{C}$ las mismas propiedades que fueron descritas en ▸ Prop.. Por ello, $(\mathbb{C},+,\cdot)$ es un cuerpo conmutativo

Los elementos neutros con respecto a la suma y el producto son respectivamente $0=0+0i$, y $1=1+0i$

Números complejos. Conjugado

Definición Dado un número complejo $z = a + bi \in \mathbb{C}$ se denomina conjugado y se denota $\overline{z}$ al número $\overline{z} = a - bi \in \mathbb{C}$.

Propiedades Para todo $z = a + bi \in \mathbb{C}$

1. $\overline{z} = z \quad \Leftrightarrow \quad z \in \mathbb{R}$
2. $z \cdot \overline{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$
3. Si $z \neq 0$
$$\frac{1}{a + bi} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$

Tema 2

Vectores

Vectores en $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^n$

Operaciones con vectores

Dependencia/independencia lineal

Bases

Tema 2

Vectores

Vectores en $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^n$

Operaciones con vectores

Dependencia/independencia lineal

Bases

Vectores en $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$

Definiciones

- El conjunto de vectores en el plano es el conjunto de pares de números reales. Se denota $\mathbb{R}^2$:

$$\boxed{\mathbb{R}^2 = \{(a,b) \,:\, a,b \in \mathbb{R}\}}$$

  Matemáticamente, $\mathbb{R}^2$ se puede introducir como el producto cartesiano : $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

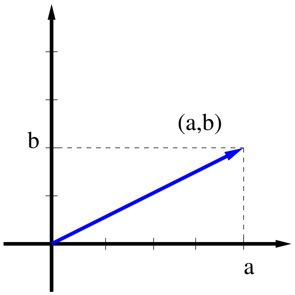
- El conjunto de vectores en el espacio es el conjunto de ternas de números reales.
  Se denota $\mathbb{R}^3$:

$$\boxed{\mathbb{R}^3 = \{(a,b,c) \,:\, a,b,c \in \mathbb{R}\}}$$

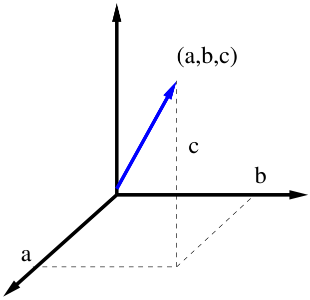
  Matemáticamente, $\mathbb{R}^3$ se puede introducir como el producto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$

Vectores en $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$

Los espacios de vectores $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ se pueden identificar con los puntos de plano y espacio, respectivamente



Vectores en $\mathbb{R}^2$



Vectores en $\mathbb{R}^3$

Vectores en $\mathbb{R}^n$

- Las definiciones anteriores pueden extenderse al caso de *n-tuplas* (lista ordenada de n elementos), para obtener $\mathbb{R}^n$:

$$\boxed{\mathbb{R}^n = \{\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \,:\, a_i \in \mathbb{R},\ \forall i = 1, 2, \ldots, n\}}$$

- Si bien la interpretación geométrica de $\mathbb{R}^n$ se pierde para $n > 3$, este tipo de conjuntos son ampliamente usados en Economía
- Por ejemplo, $\mathbb{R}^n$, puede modelizar las cestas de n bienes o los n activos que componen una cartera

Nota: Es habitual representar los vectores: $\vec{v}$ ó $\mathbf{v}$. En este curso utilizaremos la segunda opción (**negrita**)

Tema 2

Vectores

Vectores en $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^n$

Operaciones con vectores
- Módulo
- Suma
- Producto por escalar
- Producto escalar

Dependencia/independencia lineal

Bases

Operaciones con vectores

A continuación, revisaremos las principales operaciones con vectores, y las interpretaremos geométricamente:

- Módulo de un vector
- Suma de vectores
- Producto de un vector por un escalar (escalar $\equiv$ un número real)
- Producto escalar de vectores

Módulo de un vector

- El módulo de un vector es la longitud del mismo
- Si $\mathbf{v}$ es un vector, su módulo se denota $|\mathbf{v}|$
- Del Teorema de Pitágoras resulta:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v} &= (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 & &\Rightarrow |\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \\
\mathbf{v} &= (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 & &\Rightarrow |\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \\
\mathbf{v} &= (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n & &\Rightarrow |\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2}
\end{aligned}
$$

Propiedades Sean $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ vectores:

1. $|\mathbf{v}| \geqslant 0$
2. $|\mathbf{v}| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{v} = \mathbf{0}$
3. $|\mathbf{v} + \mathbf{w}| \leqslant |\mathbf{v}| + |\mathbf{w}|$
4. Si $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, $\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ es de módulo 1 (normalizar $\mathbf{v}$)

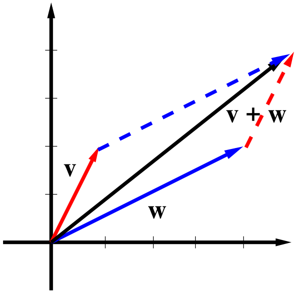
Suma de vectores

La suma de dos vectores es otro vector que tiene por componentes la suma de las componentes:

- $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2), \mathbf{w} = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$$
$$\Rightarrow \mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_1, v_2) + (w_1, w_2) = (v_1 + w_1, v_2 + w_2)$$

Geométricamente:



Suma de vectores

La suma de dos vectores es otro vector que tiene por componentes la suma de las componentes:

- $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3), \mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3 \\ \Rightarrow \mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_1, v_2, v_3) + (w_1, w_2, w_3) \\ = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3) \end{aligned}$$

- $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n), \mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n) \in \mathbb{R}^n \\ \Rightarrow \mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) + (w_1, w_2, \ldots, w_n) \\ = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \ldots, v_n + w_n) \end{aligned}$$

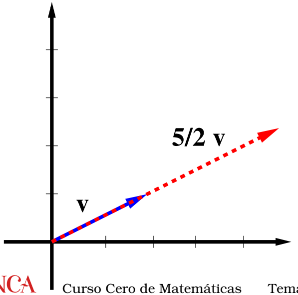
Producto de un vector por un escalar

El producto de un vector por un escalar (n^o real) es otro vector que resulta de multiplicar cada una de sus componentes por dicho escalar

- $\mathbb{R}^2$:

$$\lambda \in \mathbb{R},\ \mathbf{v} = (v_1, v_2)\mathbb{R}^2$$
$$\Rightarrow \lambda\mathbf{v} = \lambda(v_1, v_2) = (\lambda v_1, \lambda v_2)$$

Geométricamente:



Producto de un vector por un escalar

El producto de un vector por un escalar (n^{o} real) es otro vector que resulta de multiplicar cada una de sus componentes por dicho escalar

- $\mathbb{R}^3$:

$$\lambda \in \mathbb{R},\ \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$$
$$\Rightarrow \lambda\mathbf{v} = \lambda(v_1, v_2, v_3) = (\lambda v_1, \lambda v_2, \lambda v_3)$$

- $\mathbb{R}^n$:

$$\lambda \in \mathbb{R},\ \mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$$
$$\Rightarrow \lambda\mathbf{v} = \lambda(v_1, v_2, \ldots, v_n) = (\lambda v_1, \lambda v_2, \ldots, \lambda v_n)$$

Producto escalar de dos vectores

El producto escalar $\cdot$ de dos vectores es el número real que resulta de multiplicar el modulo de ambos vectores por el coseno del ángulo que forman

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = |\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}|\,\cos(\mathbf{v}, \mathbf{w})$$

Observación Si $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ están en coordenadas cartesianas, su producto escalar es la suma del producto de sus componentes

Producto escalar de dos vectores

El producto escalar $\cdot$ de dos vectores es el número real que resulta de multiplicar el modulo de ambos vectores por el coseno del ángulo que forman

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = |\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}| \cos(\mathbf{v}, \mathbf{w})$$

Observación Si $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ están en coordenadas cartesianas, su producto escalar es la suma del producto de sus componentes

Producto escalar de dos vectores

El producto escalar $\cdot$ de dos vectores es el número real que resulta de multiplicar el modulo de ambos vectores por el coseno del ángulo que forman

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = |\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}|\,\cos(\mathbf{v},\mathbf{w})$$

Observación Si $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ están en coordenadas cartesianas, su producto escalar es la suma del producto de sus componentes

Esto es:

- $\mathbb{R}^2\ :\ (v_1, v_2)\cdot(w_1, w_2) = v_1 w_1 + v_2 w_2$

Producto escalar de dos vectores

El producto escalar $\cdot$ de dos vectores es el número real que resulta de multiplicar el modulo de ambos vectores por el coseno del ángulo que forman

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = |\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}|\,\cos(\mathbf{v}, \mathbf{w})$$

Observación Si $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ están en coordenadas cartesianas, su producto escalar es la suma del producto de sus componentes

Esto es:

- $\mathbb{R}^3$: $(v_1, v_2, v_3) \cdot (w_1, w_2, w_3) = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$

Producto escalar de dos vectores

El producto escalar $\cdot$ de dos vectores es el número real que resulta de multiplicar el modulo de ambos vectores por el coseno del ángulo que forman

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = |\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}|\,\cos(\mathbf{v}, \mathbf{w})$$

Observación Si $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ están en coordenadas cartesianas, su producto escalar es la suma del producto de sus componentes

Esto es:

- $\mathbb{R}^n$: $(v_1, v_2, \ldots, v_n) \cdot (w_1, w_2, \ldots, w_n)$
  $= v_1 w_1 + v_2 w_2 + \ldots + v_n w_n$

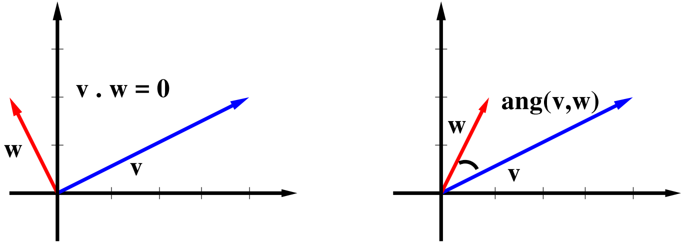
Producto escalar de dos vectores

Propiedades

1. $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son perpendiculares $\quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0}$

2. $|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$

3. $\cos(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{|\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}|} \Rightarrow \text{áng}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \arccos\left[\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{|\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}|}\right]$



Tema 2

Vectores

Vectores en $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^n$

Operaciones con vectores

Dependencia/independencia lineal

Bases

Combinación lineal

Dados dos vectores $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ y dos números reales λ y μ, se denomina combinación lineal a todo vector de la forma:

$$\lambda\,\mathbf{v} + \mu\,\mathbf{w}$$

Ejemplos

- El vector $(-4, 5)$ es combinación lineal de los vectores $(1, -1)$ y $(-2, 3)$ pues

$$(-4, 5) = 2\,(1, -2) + 3\,(-2, 3)$$

- Cualquier vector de $\mathbb{R}^2$ es combinación lineal de $\{(1, 0), (0, 1)\}$, pues

$$(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$$

Combinación lineal

Dados dos vectores $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ y dos números reales λ y μ, se denomina combinación lineal a todo vector de la forma:

$$\lambda\,\mathbf{v} + \mu\,\mathbf{w}$$

La definición anterior se puede extender al caso de n-vectores. Así cualquier vector de la forma:

$$\lambda_1\,\mathbf{v}_1 + \lambda_2\,\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_n\,\mathbf{v}_n$$

con $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ es una combinación lineal de $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$

Dependencia lineal

Definición Los vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ se dicen linealmente dependientes si alguno de ellos se puede obtener como combinación lineal de los restantes

Ejemplos

- Los vectores $\{(-4,5),(1,-2),(-2,3)\}$ son linealmente dependientes, pues $(-4,5)$ es combinación lineal de $\{(1,-2),(-2,3)\}$
- Cualquier conjunto de vectores de $\mathbb{R}^3$, que incluya a los vectores $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ y a algún otro, es linealmente dependiente

Independencia lineal

Definición Si los vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ NO son linealmente dependientes se dicen linealmente independientes

Ejemplos

- Los vectores $(1, 0), (1, 1)$ son linealmente independientes
- Los vectores $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ son linealmente independientes

Tema 2

Vectores

Vectores en $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^n$

Operaciones con vectores

Dependencia/independencia lineal

Bases

Bases canónicas

Se denominan bases canónicas a los conjuntos:

- $\{(1,0),(0,1)\}$ en $\mathbb{R}^2$
- $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ en $\mathbb{R}^3$
- $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\dots,\mathbf{e}_n\}$ en $\mathbb{R}^n$ donde $\mathbf{e}_i = (0,\dots,0,\overset{\overset{i}{\downarrow}}{1},0,\dots,0)$

Observación Las bases canónicas permiten expresar cualquier vector como combinación lineal de sus elementos de forma única:

$$(a,b) = a(1,0) + b(0,1) \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$$

$$(a,b,c) = a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1), \quad \forall a,b,c \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}(a_1,a_2,\dots,a_n) = a_1(1,0,\dots,0) + a_2(0,1,0,\dots,0) + \dots \\ \dots + a_n(0,\dots,0,1) \quad \forall a_i \in \mathbb{R}, i = 1,\dots,n\end{aligned}$$

Tema 3

Matrices y determinantes

Tema 3

Matrices y determinantes

Matrices

Definición Se denomina matriz de dimensión $m \times n$ a un conjunto de números dispuestos en m filas y n columnas

$$A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \ a_{ij} \in \mathbb{R}, \ \forall i, j$$

De forma abreviada, se escribe $\boxed{A = (a_{ij})_{m\times n}}$

Tipos de matrices

- M. fila: $A \in \mathbb{M}_{1\times n}(\mathbb{R})$
- M. columna: $A \in \mathbb{M}_{m\times 1}(\mathbb{R})$
- M. cuadrada: $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$
- M. simétrica:

$$A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \ : \ a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i,j$$

- M. triangular: $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$
  Inferior: $a_{ij} = 0 \quad \forall i < j$
  Superior: $a_{ij} = 0 \quad \forall i > j$

- M. identidad: $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$

$$a_{ii} = 1 \quad \forall i, \qquad a_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j$$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Tipos de matrices

- M. fila: $A \in \mathbb{M}_{1\times n}(\mathbb{R})$
- M. columna: $A \in \mathbb{M}_{m\times 1}(\mathbb{R})$
- M. cuadrada: $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$
- M. simétrica:

$$A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \ : \ a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i,j$$

- M. triangular: $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$
  Inferior: $a_{ij} = 0 \quad \forall i < j$
  Superior: $a_{ij} = 0 \quad \forall i > j$

- M. identidad: $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$

$$a_{ii} = 1 \quad \forall i, \qquad a_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j$$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tipos de matrices

- M. fila: $A \in \mathbb{M}_{1\times n}(\mathbb{R})$
- M. columna: $A \in \mathbb{M}_{m\times 1}(\mathbb{R})$
- M. cuadrada: $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$
- M. simétrica:

$$A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \ : \ a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, j$$

- M. triangular: $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$
  Inferior: $a_{ij} = 0 \quad \forall i < j$
  Superior: $a_{ij} = 0 \quad \forall i > j$
- M. identidad: $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$

$$a_{ii} = 1 \quad \forall i, \qquad a_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j$$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Tipos de matrices

- M. fila: $A \in \mathbb{M}_{1\times n}(\mathbb{R})$
- M. columna: $A \in \mathbb{M}_{m\times 1}(\mathbb{R})$
- M. cuadrada: $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$
- M. simétrica:

$$A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \, : \, a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i,j$$

- M. triangular: $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$
  Inferior: $a_{ij} = 0 \quad \forall i < j$
  Superior: $a_{ij} = 0 \quad \forall i > j$

- M. identidad: $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$

$$a_{ii} = 1 \quad \forall i, \qquad a_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j$$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Tipos de matrices

- M. fila: $A \in \mathbb{M}_{1\times n}(\mathbb{R})$
- M. columna: $A \in \mathbb{M}_{m\times 1}(\mathbb{R})$
- M. cuadrada: $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$
- M. simétrica:

$$A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \,:\, a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i,j$$

- M. triangular: $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$
  Inferior: $a_{ij} = 0 \quad \forall i < j$
  Superior: $a_{ij} = 0 \quad \forall i > j$
- M. identidad: $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$

$$a_{ii} = 1 \quad \forall i, \qquad a_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j$$

Ejemplo

$$A_I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Tipos de matrices

- M. fila: $A \in \mathbb{M}_{1\times n}(\mathbb{R})$
- M. columna: $A \in \mathbb{M}_{m\times 1}(\mathbb{R})$
- M. cuadrada: $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$
- M. simétrica:

$$A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \ : \ a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, j$$

- M. triangular: $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$
  Inferior: $a_{ij} = 0 \quad \forall i < j$
  Superior: $a_{ij} = 0 \quad \forall i > j$

- M. identidad: $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$

$$a_{ii} = 1 \quad \forall i, \qquad a_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j$$

Ejemplo

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Operaciones con matrices

- **Suma**: Dadas $A, B \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, la suma de matrices se define:

$$\boxed{C = A + B \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad \forall i, j}$$

- **Producto por escalar**: Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, y $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, el producto por escalar se define:

$$\boxed{B = \lambda A \Leftrightarrow b_{ij} = \lambda a_{ij} \qquad \forall i, j}$$

- **Producto matricial**: Dadas $A \in \mathbb{M}_{m\times n}$, y $B \in \mathbb{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$, el producto matricial es otra matriz $C \in \mathbb{M}_{m\times p}$ tal que

$$\boxed{\begin{aligned} C = AB \Leftrightarrow c_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \\ &= a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{in} b_{nj} \qquad \forall i, j \end{aligned}}$$

Propiedades: asociativo, distributivo con la suma, NO es conmutativo

Operaciones con matrices. Producto

Ejemplo Calcular:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -5 & 6 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Operaciones con matrices. Producto

Ejemplo Calcular:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\times 2+(-2)\times(-1) & 1\times 0+(-2)\times 2 & 1\times 3+(-2)\times 1 \\ (-1)\times 2+3\times(-1) & (-1)\times 0+3\times 2 & (-1)\times 3+3\times 1 \\ 0\times 2+1\times(-1) & 0\times 0+1\times 2 & 0\times 3+1\times 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -5 & 6 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Operaciones con matrices. Producto

Ejemplo Calcular:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\times 2+(-2)\times(-1) & 1\times 0+(-2)\times 2 & 1\times 3+(-2)\times 1 \\ (-1)\times 2+3\times(-1) & (-1)\times 0+3\times 2 & (-1)\times 3+3\times 1 \\ 0\times 2+1\times(-1) & 0\times 0+1\times 2 & 0\times 3+1\times 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -5 & 6 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Operaciones con matrices. Producto

Ejemplo Calcular:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\times 2+(-2)\times(-1) & 1\times 0+(-2)\times 2 & 1\times 3+(-2)\times 1 \\ (-1)\times 2+3\times(-1) & (-1)\times 0+3\times 2 & (-1)\times 3+3\times 1 \\ 0\times 2+1\times(-1) & 0\times 0+1\times 2 & 0\times 3+1\times 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -5 & 6 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Operaciones con matrices. Producto

Ejemplo Calcular:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\times 2+(-2)\times(-1) & 1\times 0+(-2)\times 2 & 1\times 3+(-2)\times 1 \\ (-1)\times 2+3\times(-1) & (-1)\times 0+3\times 2 & (-1)\times 3+3\times 1 \\ 0\times 2+1\times(-1) & 0\times 0+1\times 2 & 0\times 3+1\times 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -5 & 6 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Operaciones con matrices. Producto

Ejemplo Calcular:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\times 2+(-2)\times(-1) & 1\times 0+(-2)\times 2 & 1\times 3+(-2)\times 1 \\ (-1)\times 2+3\times(-1) & (-1)\times 0+3\times 2 & (-1)\times 3+3\times 1 \\ 0\times 2+1\times(-1) & 0\times 0+1\times 2 & 0\times 3+1\times 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -5 & 6 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Operaciones con matrices. Producto

Ejemplo Calcular:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\times 2+(-2)\times(-1) & 1\times 0+(-2)\times 2 & 1\times 3+(-2)\times 1 \\ (-1)\times 2+3\times(-1) & (-1)\times 0+3\times 2 & (-1)\times 3+3\times 1 \\ 0\times 2+1\times(-1) & 0\times 0+1\times 2 & 0\times 3+1\times 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -5 & 6 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Operaciones con matrices. Producto

Ejemplo Calcular:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\times 2+(-2)\times(-1) & 1\times 0+(-2)\times 2 & 1\times 3+(-2)\times 1 \\ (-1)\times 2+3\times(-1) & (-1)\times 0+3\times 2 & (-1)\times 3+3\times 1 \\ 0\times 2+1\times(-1) & 0\times 0+1\times 2 & 0\times 3+1\times 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -5 & 6 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Operaciones con matrices. Producto

Ejemplo Calcular:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\times 2+(-2)\times(-1) & 1\times 0+(-2)\times 2 & 1\times 3+(-2)\times 1 \\ (-1)\times 2+3\times(-1) & (-1)\times 0+3\times 2 & (-1)\times 3+3\times 1 \\ 0\times 2+1\times(-1) & 0\times 0+1\times 2 & 0\times 3+1\times 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -5 & 6 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Operaciones con matrices. Producto

Ejemplo Calcular:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \times 2 + (-2) \times (-1) & 1 \times 0 + (-2) \times 2 & 1 \times 3 + (-2) \times 1 \\ (-1) \times 2 + 3 \times (-1) & (-1) \times 0 + 3 \times 2 & (-1) \times 3 + 3 \times 1 \\ 0 \times 2 + 1 \times (-1) & 0 \times 0 + 1 \times 2 & 0 \times 3 + 1 \times 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -5 & 6 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Operaciones con matrices. Producto

Ejemplo Calcular:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -5 & 6 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz traspuesta

Definición Dada $A \in \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ se define la matriz traspuesta de A y se denota $A^t \in \mathbb{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ a:

$$\boxed{A^t \Leftrightarrow a^t_{ij} = a_{ji} \qquad \forall i, j}$$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Leftrightarrow \qquad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Propiedades

1. $(A+B)^t = A^t + B^t$
2. $(AB)^t = B^t A^t$
3. $A^t = A \Leftrightarrow$ A es simétrica

Matriz inversa

Definición: Una matriz $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ se dice invertible o regular si existe otra matriz $A^{-1} \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, que se denomina inversa, que satisface:

$$\boxed{AA^{-1} = A^{-1}A = I_n}$$

(siendo I_n la matriz identidad de orden n)

Propiedades

1. Si existe la inversa es única
2. Si A y B son invertibles $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
3. $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t = A^{-t}$

Rango de una matriz (I)

Dada una matriz A, se denominan transformaciones elementales de la matriz a las siguientes operaciones:

- Intercambiar de posición dos filas (o columnas) entre sí
- Multiplicar una fila (o columna) por un número distinto de 0
- Sumar a una fila (o columna) el múltiplo de otra

Una matriz A, se dice escalonada por filas si verifica:

Si a_{ij} es el primer elemento de la fila i-ésima no nulo, entonces, todos los elementos situados hasta la columna j y por debajo de la fila i son nulos

Dado i, sea j el menor índice verificando

$$a_{ij} \neq 0 \Rightarrow a_{kl} = 0,\ \forall k > i,\ l \leqslant j$$

$$\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_{ij} \neq 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \vdots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Rango de una matriz (II)

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Escalonada — Escalonada — No escalonada

Propiedades:

- Toda matriz escalonada por filas es triangular superior
- Toda matriz se puede reducir a una matriz escalonada por filas mediante transformaciones elementales.

Rango de una matriz (III)

Ejemplo Reducir a una matriz escalonada por filas

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \Rightarrow \\ f_2 - 3f_1 \\ f_3 + 2f_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \Rightarrow \\ f_3 + \frac{5}{4}f_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Definición Dos matrices se dicen equivalentes si una se puede obtener a partir de la otra mediante transformaciones elementales.

Rango de una matriz (III)

Ejemplo Reducir a una matriz escalonada por filas

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \underset{\substack{f_2 - 3f_1 \\ f_3 + 2f_1}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{f_3 + \frac{5}{4}f_2}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Definición Dos matrices se dicen equivalentes si una se puede obtener a partir de la otra mediante transformaciones elementales.

Rango de una matriz (III)

Ejemplo Reducir a una matriz escalonada por filas

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \underset{\substack{f_2-3f_1 \\ f_3+2f_1}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{f_3+\frac{5}{4}f_2}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Definición Dos matrices se dicen equivalentes si una se puede obtener a partir de la otra mediante transformaciones elementales.

Rango de una matriz (III)

Ejemplo Reducir a una matriz escalonada por filas

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \underset{\substack{f_2 - 3f_1 \\ f_3 + 2f_1}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{f_3 + \frac{5}{4}f_2}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Definición Dos matrices se dicen equivalentes si una se puede obtener a partir de la otra mediante transformaciones elementales.

Rango de una matriz (III)

Ejemplo Reducir a una matriz escalonada por filas

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \underset{\substack{f_2 - 3f_1 \\ f_3 + 2f_1}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{f_3 + \frac{5}{4} f_2}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Definición Dos matrices se dicen equivalentes si una se puede obtener a partir de la otra mediante transformaciones elementales.

Rango de una matriz (IV)

Rango se denomina rango de una matriz:

- Al número máximo de filas (o columnas) linealmente independientes
- Al número de filas no nulas de una matriz escalonada por filas equivalente

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \operatorname{rang}(A) = 1$$

Observación Las dos definiciones de rango que figuran arriba son equivalentes

Tema 3

Matrices y determinantes

Determinantes (I)

- Sea $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ el conjunto de las matrices cuadradas de orden n, el determinante, que se denota $|\cdot|$ ó $\det(\cdot)$ es una función:

$$\det : \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

  que asigna a cada matriz $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ un número real
- Para definir el valor del determinante procedemos por recurrencia
- Si $n = 1$, la matriz es un número real y su determinante coincide con la matriz

$$\mathbb{M}_{1\times 1}(\mathbb{R}) : A = (a_{11}) \Rightarrow \det(a_{11}) = |a_{11}| = a_{11}$$

  Es decir, si $n = 1$ el determinante es la identidad
- Para $n > 1$ necesitamos introducir el concepto de adjunto

Determinantes (II)

Definición Dada una matriz $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, se denomina adjunto ij, de la matriz A y se denota A_{ij}, al determinante de la matriz que resulta de eliminar la fila i y la columna j y multiplicarlo por la cantidad $(-1)^{i+j}$

Observación El cálculo de un adjunto de una matriz de orden n, involucra el cálculo de un determinante de orden $n-1$. Dado que hemos introducido el determinante de orden 1, por el momento, podríamos calcular adjuntos de matrices de orden 2:

Ejemplo Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Entonces:

$$A_{11} = 4 \qquad A_{12} = 1 \qquad A_{21} = -3 \qquad A_{22} = 1$$

Determinantes (III)

Definición Dada $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, se denomina determinante de A, y se denota $\det(A)$ ó $|A|$ a:

- Si $n = 1$: $\det(A) = \det(a_{11}) = a_{11}$
- Si $n > 1$: Para cualesquiera $i, j \in \{1, \ldots, n\}$

$$\det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} \qquad \text{ó}$$
$$\det(A) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$$

Observaciones

- El determinante no depende de la fila i o columna j seleccionada para su cálculo
- El cálculo de un determinante de orden n, involucra el cálculo de n determinantes de orden $n-1$

Determinantes (IV)

Si $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ con $n = 2$ y 3 la definición anterior conduce a las fórmulas:

$$\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}): \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}): \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) \\ -(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}) \end{array}$$

Determinantes (IV)

Si $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ con $n = 2$ y 3 la definición anterior conduce a las fórmulas:

$$\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) \\ -(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}) \end{array}$$

Determinantes (IV)

Si $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ con $n = 2$ y 3 la definición anterior conduce a las fórmulas:

$$\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) \\ -(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}) \end{array}$$

Determinantes (IV)

Si $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ con $n = 2$ y 3 la definición anterior conduce a las fórmulas:

$$\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) \\ -(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}) \end{array}$$

Determinantes (IV)

Si $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ con $n = 2$ y 3 la definición anterior conduce a las fórmulas:

$$\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) \\ -(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}) \end{array}$$

Determinantes (IV)

Si $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ con $n = 2$ y 3 la definición anterior conduce a las fórmulas:

$$\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) \\ -(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}) \end{array}$$

Determinantes (IV)

Si $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ con $n = 2$ y 3 la definición anterior conduce a las fórmulas:

$$\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) \\ -(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}) \end{array}$$

Determinantes (IV)

Si $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ con $n = 2$ y 3 la definición anterior conduce a las fórmulas:

$$\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}): \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}): \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) \\ -(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}) \end{array}$$

Determinantes (IV)

Si $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ con $n = 2$ y 3 la definición anterior conduce a las fórmulas:

$$\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}): \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}): \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) \\ -(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}) \end{array}$$

Determinantes (IV)

Si $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ con $n = 2$ y 3 la definición anterior conduce a las fórmulas:

$$\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) \\ -(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}) \end{array}$$

Determinante. Ejemplos

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -4(10-1) = -36$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

$$+(-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 2 - 20 + 8 + 64 + 40 - 8 - 4 = 82$$

Determinante. Ejemplos

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -4(10-1) = -36$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} - 8 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 2 - 20 + 8 + 64 + 40 - 8 - 4 = 82$$

Determinante. Ejemplos

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -4(10-1) = -36$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 2 - 20 + 8 + 64 + 40 - 8 - 4 = 82$$

Determinante. Ejemplos

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -4(10-1) = -36$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 2 - 20 + 8 + 64 + 40 - 8 - 4 = 82$$

Determinante. Ejemplos

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -4(10-1) = -36$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 2 - 20 + 8 + 64 + 40 - 8 - 4 = 82$$

Determinante. Ejemplos

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} -4\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} +0\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -4(10-1) = -36$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

$$+(-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 2 - 20 + 8 + 64 + 40 - 8 - 4 = 82$$

Determinante. Ejemplos

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -4(10-1) = -36$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} - 8 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 2 - 20 + 8 + 64 + 40 - 8 - 4 = 82$$

Cálculo de la inversa

Propiedad Sea $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, si A tiene inversa entonces se verifica que:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{det(A)}\text{Adj}(A)^t}$$

donde $\text{Adj}(A)$ denota la matriz adjunta de A (aquella en la cada elemento *ij* es el adjunto *ij*).

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = (3+4+0) - (-2+0+8) = 1$$

$$A_{11} = 1 \quad A_{12} = 2 \quad A_{13} = -2$$

$$A_{21} = 2 \quad A_{22} = 5 \quad A_{23} = -4$$

$$A_{31} = 3 \quad A_{32} = 7 \quad A_{33} = -5$$

Cálculo de la inversa

Propiedad Sea $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, si A tiene inversa entonces se verifica que:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{det(A)}\mathrm{Adj}(A)^t}$$

donde $\mathrm{Adj}(A)$ denota la matriz adjunta de A (aquella en la cada elemento *ij* es el adjunto *ij*).

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = (3+4+0) - (-2+0+8) = 1$$

$$\begin{array}{lll} A_{11} = 1 & A_{12} = 2 & A_{13} = -2 \\ A_{21} = 2 & A_{22} = 5 & A_{23} = -4 \\ A_{31} = 3 & A_{32} = 7 & A_{33} = -5 \end{array}$$

Cálculo de la inversa

Propiedad Sea $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, si A tiene inversa entonces se verifica que:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{det(A)}\mathrm{Adj}(A)^t}$$

donde $\mathrm{Adj}(A)$ denota la matriz adjunta de A (aquella en la cada elemento *ij* es el adjunto *ij*).

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = (3+4+0) - (-2+0+8) = 1$$

$$\begin{array}{lll} A_{11} = 1 & A_{12} = 2 & A_{13} = -2 \\ A_{21} = 2 & A_{22} = 5 & A_{23} = -4 \\ A_{31} = 3 & A_{32} = 7 & A_{33} = -5 \end{array}$$

Cálculo de la inversa

Propiedad Sea $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, si A tiene inversa entonces se verifica que:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{det(A)}\mathrm{Adj}(A)^t}$$

donde $\mathrm{Adj}(A)$ denota la matriz adjunta de A (aquella en la cada elemento *ij* es el adjunto *ij*).

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = (3+4+0) - (-2+0+8) = 1$$

$$\begin{array}{lll} A_{11} = 1 & A_{12} = 2 & A_{13} = -2 \\ A_{21} = 2 & A_{22} = 5 & A_{23} = -4 \\ A_{31} = 3 & A_{32} = 7 & A_{33} = -5 \end{array}$$

Cálculo del rango (I)

Definición Se denomina menor de una matriz A al determinante de una submatriz cuadrada de A. El orden de un menor es el orden de la submatriz asociada.

Propiedad El rango de una matriz $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ es el orden del menor de mayor orden no nulo.

Observación Si una matriz tiene al menos rango $n+1$, dado un menor de orden n no nulo, existe un menor de orden $n+1$ no nulo, cuya submatriz asociada contiene a la submatriz del menor dado.

La observación anterior permite establecer el siguiente algoritmo para el cálculo del rango de una matriz.

Cálculo del rango (II). Algoritmo

1. Dado $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ no nula, $n > 1$, seleccionar un menor no nulo de orden 1. Iniciar $r = 1$
2. Orlar (añadir fila y columna) el menor
3. ¿Es el menor orlado nulo?

   SI: Eliminar la orla,

   ¿Exiten otras formas de orlar el menor?

   - **SI**: Volver al paso **2**
   - **NO**: El rango es r. FIN

   NO: Incrementar r en una unidad $(r \leftarrow r + 1)$

   ¿Se puede orlar de nuevo?

   - **SI**: Volver al paso **2**
   - **NO**: El rango es r. FIN

Cálculo del rango (III)

Ejemplo Calcular el rango de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

$$|1| = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) \geqslant 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) \geqslant 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \\ 3 & 9 & 10 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \boxed{\text{rang}(A) = 2}$$

Cálculo del rango (III)

Ejemplo Calcular el rango de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

$$|1| = 1 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) \geqslant 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) \geqslant 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \\ 3 & 9 & 10 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \boxed{\operatorname{rang}(A) = 2}$$

Cálculo del rango (III)

Ejemplo Calcular el rango de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

$|1| = 1 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) \geqslant 1$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) \geqslant 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \\ 3 & 9 & 10 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \boxed{\operatorname{rang}(A) = 2}$$

Cálculo del rango (III)

Ejemplo Calcular el rango de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

$$|1| = 1 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) \geqslant 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) \geqslant 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \\ 3 & 9 & 10 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \boxed{\operatorname{rang}(A) = 2}$$

Cálculo del rango (III)

Ejemplo Calcular el rango de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

$$|1| = 1 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) \geqslant 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) \geqslant 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \\ 3 & 9 & 10 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \boxed{\operatorname{rang}(A) = 2}$$

Cálculo del rango (III)

Ejemplo Calcular el rango de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

$|1| = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) \geqslant 1$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) \geqslant 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \\ 3 & 9 & 10 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \boxed{\text{rang}(A) = 2}$$

Cálculo del rango (III)

Ejemplo Calcular el rango de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

$|1| = 1 \neq 0 \Rightarrow \mathrm{rang}(A) \geqslant 1$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \mathrm{rang}(A) \geqslant 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \\ 3 & 9 & 10 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \boxed{\mathrm{rang}(A) = 2}$$

Cálculo del rango (III)

Ejemplo Calcular el rango de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

$$|1| = 1 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) \geqslant 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) \geqslant 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \\ 3 & 9 & 10 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \boxed{\operatorname{rang}(A) = 2}$$

Cálculo del rango (III)

Ejemplo Calcular el rango de

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 & \mathbf{4} \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ \mathbf{3} & 6 & 9 & \mathbf{10} \end{pmatrix}$$

$$|1| = 1 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) \geqslant 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) \geqslant 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \\ 3 & 9 & 10 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \boxed{\operatorname{rang}(A) = 2}$$

Cálculo del rango (III)

Ejemplo Calcular el rango de

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 & \mathbf{4} \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ \mathbf{3} & 6 & 9 & \mathbf{10} \end{pmatrix}$$

$|1| = 1 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) \geqslant 1$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) \geqslant 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \\ 3 & 9 & 10 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \boxed{\operatorname{rang}(A) = 2}$$

Cálculo del rango (III)

Ejemplo Calcular el rango de

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 & \mathbf{4} \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ \mathbf{3} & 6 & 9 & \mathbf{10} \end{pmatrix}$$

$|1| = 1 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) \geqslant 1$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) \geqslant 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \\ 3 & 9 & 10 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \boxed{\operatorname{rang}(A) = 2}$$

Determinantes: Propiedades

1. A es invertible (o regular) $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$
2. Si $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ es triangular:

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} \times a_{22} \times \ldots \times a_{nn}.$$

3. $\det(A^t) = \det(A)$
4. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
5. $\det(I_n) = 1$ (I_n matriz identidad de orden n)
6. Si $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$$

7. Si una fila (o columna) de A es combinación lineal de las restantes filas (o columnas), entonces $\det(A) = 0$. En particular, si dos filas (o columnas) de A son proporcionales se tiene $\det(A) = 0$

Determinantes: Propiedades

1. A es invertible (o regular) $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$
2. Si $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ es triangular:

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} \times a_{22} \times \ldots \times a_{nn}.$$

3. $\det(A^t) = \det(A)$
4. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
5. $\det(I_n) = 1$ (I_n matriz identidad de orden n)
6. Si $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$$

7. Si una fila (o columna) de A es combinación lineal de las restantes filas (o columnas), entonces $\det(A) = 0$. En particular, si dos filas (o columnas) de A son proporcionales se tiene $\det(A) = 0$

Determinantes: Propiedades

1. A es invertible (o regular) $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$
2. Si $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ es triangular:

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} \times a_{22} \times \ldots \times a_{nn}.$$

3. $\det(A^t) = \det(A)$
4. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
5. $\det(I_n) = 1$ (I_n matriz identidad de orden n)
6. Si $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$$

7. Si una fila (o columna) de A es combinación lineal de las restantes filas (o columnas), entonces $\det(A) = 0$. En particular, si dos filas (o columnas) de A son proporcionales se tiene $\det(A) = 0$

Determinantes: Propiedades

1. A es invertible (o regular) $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$
2. Si $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ es triangular:

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} \times a_{22} \times \ldots \times a_{nn}.$$

3. $\det(A^t) = \det(A)$
4. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
5. $\det(I_n) = 1$ (I_n matriz identidad de orden n)
6. Si $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$$

7. Si una fila (o columna) de A es combinación lineal de las restantes filas (o columnas), entonces $\det(A) = 0$. En particular, si dos filas (o columnas) de A son proporcionales se tiene $\det(A) = 0$

Determinantes: Propiedades

1. A es invertible (o regular) $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$
2. Si $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ es triangular:

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} \times a_{22} \times \ldots \times a_{nn}.$$

3. $\det(A^t) = \det(A)$
4. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
5. $\det(I_n) = 1$ (I_n matriz identidad de orden n)
6. Si $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$$

7. Si una fila (o columna) de A es combinación lineal de las restantes filas (o columnas), entonces $\det(A) = 0$. En particular, si dos filas (o columnas) de A son proporcionales se tiene $\det(A) = 0$

Determinantes: Propiedades

1. A es invertible (o regular) $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$
2. Si $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ es triangular:

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} \times a_{22} \times \ldots \times a_{nn}.$$

3. $\det(A^t) = \det(A)$
4. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
5. $\det(I_n) = 1$ (I_n matriz identidad de orden n)
6. Si $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$$

7. Si una fila (o columna) de A es combinación lineal de las restantes filas (o columnas), entonces $\det(A) = 0$. En particular, si dos filas (o columnas) de A son proporcionales se tiene $\det(A) = 0$

Determinantes: Propiedades

1. A es invertible (o regular) $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$
2. Si $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ es triangular:

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} \times a_{22} \times \ldots \times a_{nn}.$$

3. $\det(A^t) = \det(A)$
4. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
5. $\det(I_n) = 1$ (I_n matriz identidad de orden n)
6. Si $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$$

7. Si una fila (o columna) de A es combinación lineal de las restantes filas (o columnas), entonces $\det(A) = 0$. En particular, si dos filas (o columnas) de A son proporcionales se tiene $\det(A) = 0$

Tema 4

Sistemas de ecuaciones lineales

Tema 4

Sistemas de ecuaciones lineales

Sistemas de ecuaciones lineales

Teorema de Rouché-Frobenius

Resolución de un SCD

Resolución de un SCI

Sistemas de ecuaciones lineales

Sistema de m ecuaciones con n incógnitas

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ldots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}}$$

<u>Notación:</u>

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\widehat{A} = (A|\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \text{(matriz ampliada)}$$

Tema 4

Sistemas de ecuaciones lineales

Teorema de Rouché-Frobenius

Teorema Sea $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ un sistema de ecuaciones lineales con m ecuaciones y n incógnitas, entonces:

1) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es sistema compatible (SC) $\Leftrightarrow$ $\boxed{\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(\widehat{A})}$

2) Si $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es SC entonces :

2a) $\operatorname{rang}(A) < n \Rightarrow$ Sistema Compatible Indetermiando (SCI)(infinitas soluciones)

2b) $\operatorname{rang}(A) = n \Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado (SCD)(solución única)

Tema 4

Sistemas de ecuaciones lineales

Resolución de un SCD

Dado el SCD

$$A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

la solución única puede calcularse mediante:

- Eliminación gaussiana
- Manipulación algebraica (Sustitución / Reducción / Igualación)
- Regla de Cramer
- Cálculo de la inversa
- Otros (factorizaciones)

Ejemplo Resolver:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} \text{eq1} \equiv & 3x & - & y & + & z & = & 7 \\ \text{eq2} \equiv & x & + & 3y & - & 2z & = & 0 \\ \text{eq3} \equiv & 2x & + & 2y & - & z & = & 2 \end{array}\right\} \Rightarrow (x, y, z) = \left(\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}, -4\right)$$

Resolución de un SCD. Eliminación gaussiana

- Se utilizan transformaciones elementales para calcular una matriz triangular equivalente a la ampliada
- El proceso consta de $n-1$ etapas
- En la etapa i-ésima se *hacen ceros* en la columna i por debajo de la diagonal
- En la etapa i-ésima la operación que se realiza con la fila j-ésima, viene dada por:

$$\boxed{f_j \leftarrow f_j - \frac{a_{ji}}{a_{ii}} f_j \qquad \forall j > i}$$

  siempre que $a_{ii} \neq 0$, en otro caso se deben permutar filas

- Efectuada la triangulación, se resuelve el sistema triangular de *abajo a arriba* (remonte)

Resolución de un SCD. Eliminación gaussiana

En nuestro caso:

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\substack{f_2 - \\ f_3 -}}{\overset{\text{Etapa 1}}{\Longrightarrow}} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & \frac{10}{3} & -\frac{7}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & \frac{8}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

$$\underset{f_3 -}{\overset{\text{Etapa 2}}{\Longrightarrow}} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & \frac{10}{3} & -\frac{7}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix} \overset{\text{Resol.}}{\Longrightarrow} \begin{cases} z = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{1}{5}} = -4 \\ y = \frac{-\frac{7}{3} + \frac{7}{3} z}{\frac{10}{3}} = -\frac{7}{2} \\ x = \frac{7 + y - z}{3} = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Resolución de un SCD. Eliminación gaussiana

En nuestro caso:

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\begin{array}{c} f_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} f_1 \\ f_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} f_2 \end{array}}{\overset{\text{Etapa 1}}{\Rightarrow}} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & \frac{10}{3} & -\frac{7}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & \frac{8}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

$$\underset{f_3 -}{\overset{\text{Etapa 2}}{\Rightarrow}} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & \frac{10}{3} & -\frac{7}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix} \overset{\text{Resol.}}{\Rightarrow} \left\{ \begin{array}{l} z = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{1}{5}} = -4 \\ y = \frac{-\frac{7}{3} + \frac{7}{3} z}{\frac{10}{3}} = -\frac{7}{2} \\ x = \frac{7 + y - z}{3} = \frac{5}{2} \end{array} \right.$$

En nuestro caso:

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\substack{f_2 - \frac{1}{3}f_1 \\ f_3 - \frac{2}{3}f_1}}{\overset{\text{Etapa 1}}{\Rightarrow}} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & \frac{10}{3} & -\frac{7}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & \frac{8}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

$$\underset{f_3 -}{\overset{\text{Etapa 2}}{\Rightarrow}} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & \frac{10}{3} & -\frac{7}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix} \overset{\text{Resol.}}{\Rightarrow} \left\{ \begin{array}{l} z = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{1}{5}} = -4 \\ y = \frac{-\frac{7}{3} + \frac{7}{3}z}{\frac{10}{3}} = -\frac{7}{2} \\ x = \frac{7+y-z}{3} = \frac{5}{2} \end{array} \right.$$

Resolución de un SCD. Eliminación gaussiana

En nuestro caso:

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\substack{f_2 - \frac{1}{3} f_1 \\ f_3 - \frac{2}{3} f_1}}{\overset{\text{Etapa 1}}{\Rightarrow}} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & \frac{10}{3} & -\frac{7}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & \frac{8}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

$$\underset{f_3 - \frac{a_{32}}{a_{22}} f_2}{\overset{\text{Etapa 2}}{\Rightarrow}} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & \frac{10}{3} & -\frac{7}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix} \overset{\text{Resol.}}{\Rightarrow} \left\{ \begin{array}{l} z = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{1}{5}} = -4 \\ y = \frac{-\frac{7}{3} + \frac{7}{3} z}{\frac{10}{3}} = -\frac{7}{2} \\ x = \frac{7 + y - z}{3} = \frac{5}{2} \end{array} \right.$$

Resolución de un SCD. Eliminación gaussiana

En nuestro caso:

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\substack{f_2 - \frac{1}{3}f_1 \\ f_3 - \frac{2}{3}f_1}}{\overset{\text{Etapa 1}}{\Rightarrow}} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & \frac{10}{3} & -\frac{7}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & \frac{8}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

$$\underset{f_3 - \frac{4}{5}f_2}{\overset{\text{Etapa 2}}{\Rightarrow}} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & \frac{10}{3} & -\frac{7}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix} \overset{\text{Resol.}}{\Rightarrow} \left\{ \begin{array}{l} z = \dfrac{-\frac{4}{5}}{\frac{1}{5}} = -4 \\ y = \dfrac{-\frac{7}{3} + \frac{7}{3}z}{\frac{10}{3}} = -\frac{7}{2} \\ x = \dfrac{7 + y - z}{3} = \frac{5}{2} \end{array} \right.$$

Resolución de un SCD. Eliminación gaussiana

En nuestro caso:

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\substack{f_2 - \frac{1}{3}f_1 \\ f_3 - \frac{2}{3}f_1}}{\overset{\text{Etapa 1}}{\Rightarrow}} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & \frac{10}{3} & -\frac{7}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & \frac{8}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

$$\underset{f_3 - \frac{4}{5}f_2}{\overset{\text{Etapa 2}}{\Rightarrow}} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & \frac{10}{3} & -\frac{7}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix} \overset{\text{Resol.}}{\Rightarrow} \left\{ \begin{array}{l} z = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{1}{5}} = -4 \\ y = \frac{-\frac{7}{3} + \frac{7}{3}z}{\frac{10}{3}} = -\frac{7}{2} \\ x = \frac{7+y-z}{3} = \frac{5}{2} \end{array} \right.$$

Resolución de un SCD. Regla de Cramer

La regla de Cramer determina que la componente i-ésima de la solución x_j viene dada por:

$$x_j = \frac{\det(A_1, \ldots, \overset{\overset{j}{\downarrow}}{\mathbf{b}}, \ldots A_n)}{\det(A)}$$

donde A_i denota la columna i-ésima de la matriz A.

Resolución de un SCD. Regla de Cramer

La regla de Cramer determina que la componente i-ésima de la solución x_j viene dada por:

$$x_j = \frac{\det(A_1, \ldots, \overset{\overset{j}{\downarrow}}{\mathbf{b}}, \ldots A_n)}{\det(A)}$$

donde A_i denota la columna i-ésima de la matriz A.
En nuestro caso:

$$x = \frac{\det\begin{pmatrix} 7 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{5}{2}$$

Resolución de un SCD. Regla de Cramer

La regla de Cramer determina que la componente i-ésima de la solución x_j viene dada por:

$$x_j = \frac{\det(A_1, \ldots, \overset{\overset{j}{\downarrow}}{\mathbf{b}}, \ldots A_n)}{\det(A)}$$

donde A_i denota la columna i-ésima de la matriz A.

$$y = \frac{\det \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{-7}{2}$$

Resolución de un SCD. Regla de Cramer

La regla de Cramer determina que la componente i-ésima de la solución x_j viene dada por:

$$x_j = \frac{\det(A_1, \ldots, \overset{\overset{j}{\downarrow}}{\mathbf{b}}, \ldots A_n)}{\det(A)}$$

donde A_i denota la columna i-ésima de la matriz A.

$$z = \frac{\det \begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{-8}{2} = -4$$

Resolución de un SCD. Regla de Cramer

La regla de Cramer determina que la componente i-ésima de la solución x_j viene dada por:

$$x_j = \frac{\det(A_1, \ldots, \overset{\substack{j\\ \downarrow}}{\mathbf{b}}, \ldots A_n)}{\det(A)}$$

donde A_i denota la columna i-ésima de la matriz A.
Por tanto:

$$x = \frac{5}{2} \qquad y = -\frac{7}{2} \qquad z = -4$$

Resolución de un SCD. Manip. algrebraica

Manipulamos el sistema con el objetivo de obtener un sistema más sencillo (eliminación de incógnitas). Observar que:

$$\left.\begin{array}{rl} \text{eq1 + eq3} \equiv & 5x + y = 9 \\ \text{-eq2 + 2 eq3} \equiv & 3x + y = 4 \end{array}\right\} \overset{\text{Igualando } y's}{\Rightarrow} \quad 9 - 5x = 4 - 3x$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \quad y = 9 - 5\frac{5}{2} = -\frac{7}{2}$$

Por último, sustituyendo x e y en eq1 concluimos:

$$z = 7 - 3x + y = 7 - 3\frac{5}{2} - \frac{7}{2} = -4$$

Tema 4

Sistemas de ecuaciones lineales

Resolución de un SCI (I)

Dado el SCI

$$A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

para determinar la familia de soluciones se puede proceder del siguiente modo:

1. Calcular un menor de orden máximo
2. Eliminar las ecuaciones (filas de la matriz), si es el caso, que quedan fuera del menor (son dependientes)
3. Pasar al segundo miembro los términos que incluyen a las incógnitas (columnas de la matriz) no presentes en el menor seleccionado. Parametrizar estas incógnitas (sustituirlas por parámetros: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$)
4. El sistema resultante es SCD y puede ser resuelto por cuaquiera de los métodos descritos previamente

Resolución de un SCI (II)

Ejemplo Resolver:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & - & t & = & 0 \\ & & & & z & + & t & = & 0 \\ x & + & y & + & 2z & & & = & 0 \end{array}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) = 2 = \operatorname{rang}(\widehat{A}),$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{rcrcr} x & + & z & = & -y+t \\ & & z & = & -t \end{array}\right\} \underset{\substack{y=\lambda \\ t=\mu}}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{rcrcr} x & + & z & = & -\lambda+\mu \\ & & z & = & -\mu \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -\lambda + 2\mu \\ z = -\mu \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = -\lambda + 2\mu \\ y = \lambda \\ z = -\mu \\ t = \mu \end{array}}$$

Resolución de un SCI (II)

Ejemplo Resolver:

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & - & t & = & 0 \\ & & & & z & + & t & = & 0 \\ x & + & y & + & 2z & & & = & 0 \end{array}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \mathrm{rang}(A) = 2 = \mathrm{rang}(\widehat{A}),$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{ccccc} x & + & z & = & -y+t \\ & & z & = & -t \end{array}\right\} \underset{\substack{y=\lambda \\ t=\mu}}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{ccccc} x & + & z & = & -\lambda+\mu \\ & & z & = & -\mu \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -\lambda + 2\mu \\ z = -\mu \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = -\lambda + 2\mu \\ y = \lambda \\ z = -\mu \\ t = \mu \end{array}}$$

Resolución de un SCI (II)

Ejemplo Resolver:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & - & t & = & 0 \\ & & & & z & + & t & = & 0 \\ x & + & y & + & 2z & & & = & 0 \end{array}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \mathrm{rang}(A) = 2 = \mathrm{rang}(\widehat{A}),$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{rcrcr} x & + & z & = & -y+t \\ & & z & = & -t \end{array}\right\} \underset{\substack{y=\lambda \\ t=\mu}}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{rcrcr} x & + & z & = & -\lambda+\mu \\ & & z & = & -\mu \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -\lambda + 2\mu \\ z = -\mu \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = -\lambda + 2\mu \\ y = \lambda \\ z = -\mu \\ t = \mu \end{array}}$$

Resolución de un SCI (II)

Ejemplo Resolver:

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & - & t & = & 0 \\ & & & & z & + & t & = & 0 \\ x & + & y & + & 2z & & & = & 0 \end{array}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \mathrm{rang}(A) = 2 = \mathrm{rang}(\widehat{A}),$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{ccccc} x & + & z & = & -y+t \\ & & z & = & -t \end{array}\right\} \underset{\substack{y=\lambda \\ t=\mu}}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{ccccc} x & + & z & = & -\lambda+\mu \\ & & z & = & -\mu \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -\lambda + 2\mu \\ z = -\mu \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = -\lambda + 2\mu \\ y = \lambda \\ z = -\mu \\ t = \mu \end{array}}$$

Resolución de un SCI (II)

Ejemplo Resolver:

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & - & t & = & 0 \\ & & & & z & + & t & = & 0 \\ x & + & y & + & 2z & & & = & 0 \end{array}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) = 2 = \operatorname{rang}(\widehat{A}),$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{ccccc} x & + & z & = & -y+t \\ & & z & = & -t \end{array}\right\} \underset{\substack{y=\lambda \\ t=\mu}}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{ccccc} x & + & z & = & -\lambda+\mu \\ & & z & = & -\mu \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -\lambda + 2\mu \\ z = -\mu \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = -\lambda + 2\mu \\ y = \lambda \\ z = -\mu \\ t = \mu \end{array}}$$

Resolución de un SCI (II)

Ejemplo Resolver:

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & - & t & = & 0 \\ & & & & z & + & t & = & 0 \\ x & + & y & + & 2z & & & = & 0 \end{array}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2 = \text{rang}(\widehat{A}),$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{ccccc} x & + & z & = & -y+t \\ & & z & = & -t \end{array}\right\} \underset{\substack{y=\lambda \\ t=\mu}}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{ccccc} x & + & z & = & -\lambda+\mu \\ & & z & = & -\mu \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -\lambda + 2\mu \\ z = -\mu \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = -\lambda + 2\mu \\ y = \lambda \\ z = -\mu \\ t = \mu \end{array}}$$

Resolución de un SCI (II)

Ejemplo Resolver:

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & - & t & = & 0 \\ & & & & z & + & t & = & 0 \\ x & + & y & + & 2z & & & = & 0 \end{array}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2 = \text{rang}(\widehat{A}),$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{ccccc} x & + & z & = & -y+t \\ & & z & = & -t \end{array}\right\} \underset{\substack{y=\lambda \\ t=\mu}}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{ccccc} x & + & z & = & -\lambda+\mu \\ & & z & = & -\mu \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -\lambda + 2\mu \\ z = -\mu \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = -\lambda + 2\mu \\ y = \lambda \\ z = -\mu \\ t = \mu \end{array}}$$

Tema 5

Polinomios

Tema 5

Polinomios

Polinomios

Definiciones

- Un monomio en x de grado $n \in \mathbb{N}$ es una expresión algebraica de la forma ax^n con $a \in \mathbb{R}$
- Un polinomio en x es una suma de monomios en x

$$\boxed{p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0, \quad a_0, \ldots a_n \in \mathbb{R}, \quad a_n \neq 0}$$

- Grado del polinomio es el mayor de los grados de los monomios que lo forman

Operaciones con polinomios

Suma/resta: Se suman/restan los monomios del mismo grado

Multiplicación: Se multiplica cada monomio de uno de los factores por todos los monomios del otro factor y después se suman los monomios del mismo grado

Ejemplos

$$(3x^3 - x^2 + 5x - 2) + (2x^2 + x - 3) = 3x^3 + x^2 + 6x - 5$$

$$(3x^3 - x^2 + 5x - 2) \cdot (2x^2 + x - 3) = 6x^5 + x^4 + 4x^2 - 17x + 6$$

$$\begin{array}{rrrrrrr}
 & & & 3x^3 & -x^2 & +5x & -2 \\
\times & & & & 2x^2 & +x & -3 \\
\hline
 & & & -9x^3 & +3x^2 & -15x & +6 \\
 & & 3x^4 & -x^3 & +5x^2 & -2x & \\
 & 6x^5 & -2x^4 & +10x^3 & -4x^2 & & \\
\hline
 & 6x^5 & +x^4 & & +4x^2 & -17x & +6
\end{array}$$

Operaciones con polinomios

División: Dividir $p(x)$ entre $q(x)$ con grado $p(x) \geqslant$ grado $q(x)$ consiste en hallar dos polinomios $c(x)$ -cociente- y $r(x)$ -resto- tales que $\boxed{p(x) = q(x) \cdot c(x) + r(x)}$ con grado $r(x) <$ grado $q(x)$

Si $r(x) = 0$ la división es exacta

Ejemplo

$$
\begin{array}{rr|l}
- & 6x^3 - 2x^2 + x + 3 & x^2 - x + 1 \\
 & 6x^3 - 6x^2 + 6x \phantom{{}+3} & \hline 6x + 4 \\
\hline
- & 4x^2 - 5x + 3 & \\
 & 4x^2 - 4x + 4 & \\
\hline
 & -x - 1 &
\end{array}
$$

$$6x^3 - 2x^2 + x + 3 = (x^2 + x + 1) \cdot (6x + 4) + (-x - 1)$$

Regla de Ruffini

División de un polinomio $p(x)$ entre un monomio $x-a$

Ejemplo Dividir x^3+x^2-1 entre $x-1$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & & 1 & 2 & 2 \\ \hline & 1 & 2 & 2 & \boxed{1} \end{array}$$

El cociente de dividir x^3+x^2-1 entre $x-1$ es igual a x^2+2x+2 y el resto es 1, con lo que

$$x^3+x^2-1=(x-1)(x^2+2x+2)+1$$

Tema 5

Polinomios

Raíces de polinomios

Definiciones

Sea $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ un polinomio en x con coeficientes reales de grado n, $(a_n \neq 0)$

- Se dice que a es raíz de $p(x)$ si $p(a) = 0$
- Si a es una raíz de $p(x)$, se llama orden o multiplicidad (algebraica) de a al mayor número natural m tal que $p(x)$ es divisible por $(x-a)^m$. En particular, si $m = 1$ se dice que a es una raíz simple de $p(x)$
- Si $a_0 = 0$ la ecuación es homogénea y 0 es raíz de $p(x)$

Raíces de polinomios

Sea $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ un polinomio en x con coeficientes reales de grado n, $(a_n \neq 0)$

- **Teorema del resto** El resto de dividir $p(x)$ por $x - a$ es igual al valor numérico del polinomio en $x = a$, es decir, $p(a)$

- **Teorema del factor** $p(x)$ es divisible por $x - a$ si y sólo si a es raíz de $p(x)$

- **Teorema fundamental del Álgebra** Todo polinomio de grado $n \geqslant 1$ con coeficientes reales tiene exactamente n raíces complejas (reales o no), contando cada una tantas veces como indique su multiplicidad. Esto es,

$$\boxed{p(x) = a_n(x - \lambda_1)^{m_1}(x - \lambda_2)^{m_2} \cdots (x - \lambda_p)^{m_p}}$$

donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{C}$, $m_1 + \cdots + m_p = n$

Raíces de polinomios

Del teorema anterior se deduce que si $p(x)$ es un polinomio en x con coeficientes reales de grado n,

- $p(x)$ tiene a lo sumo n raíces reales
- Las raíces complejas aparecen por pares conjugados $(a+bi,\ a-bi, \quad a, b \in \mathbb{R})$
- Todo polinomio de grado impar con coeficientes reales tiene al menos una raíz real

Observación

Si $a_n = 1$, i.e., $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ con $n \geqslant 2$, entonces

$-a_{n-1}$ es igual a la suma de las raíces de $p(x)$

$(-1)^n a_0$ es igual al producto de las raíces de $p(x)$

Raíces de polinomios

Regla de los signos de Descartes

Si todas las raíces de $p(x)$ son reales,

- el número de raíces positivas es igual al número de cambios de signo que hay entre coeficientes consecutivos no nulos de $p(x)$
- el número de raíces negativas es igual al número de cambios de signo que hay entre coeficientes consecutivos no nulos de $p(-x)$

Ejemplo Determinar los signos de las raíces de $x^4 + 5x^3 - 7x^2 - 29x + 30$

$p(x) = +x^4 + 5x^3 - 7x^2 - 29x + 30$

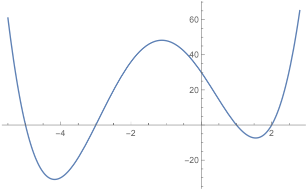
$\Rightarrow$ n^o cambios signo $= 2$

$\Rightarrow$ 2 raíces reales positivas

$p(-x) = +x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 29x + 30$

$\Rightarrow$ n^o cambios signo $= 2$

$\Rightarrow$ 2 raíces reales negativas



Tema 5

Polinomios

Polinomios

Raíces de polinomios

Factorización de polinomios

- Ecuaciones de segundo grado
- Ecuaciones bicuadradas

Factorización de polinomios

Ecuaciones de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$

- La solución general de la ecuación es:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

- Se llama discriminante de la ecuación al número:

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$$

- En una ecuación de grado 2, si:
  - $\boxed{\Delta > 0}$ existen dos raíces reales
  - $\boxed{\Delta = 0}$ existe una raíz real doble
  - $\boxed{\Delta < 0}$ no existe ninguna raíz real (dos raíces complejas conjugadas)

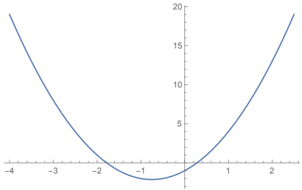
- Si x_1, x_2 son las raíces de la ecuación:

$$\boxed{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}}, \qquad \boxed{x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}}$$

Factorización de polinomios

Ejemplos

- $2x^2 + 3x - 1$
  $= 2\left(x + \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{17}}{4}\right)\left(x + \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{17}}{4}\right)$
  $\Delta = 17$



- $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$
  $\Delta = 0$

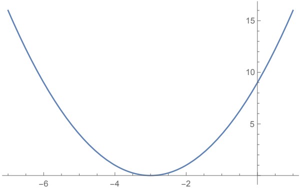
- $3x^2 - x + 4$
  no tiene raíces reales
  $\Delta = -47$

Factorización de polinomios

Ejemplos

- $2x^2 + 3x - 1$
  $= 2\left(x + \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{17}}{4}\right)\left(x + \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{17}}{4}\right)$
  $\Delta = 17$

- $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$
  $\Delta = 0$



- $3x^2 - x + 4$
  no tiene raíces reales
  $\Delta = -47$

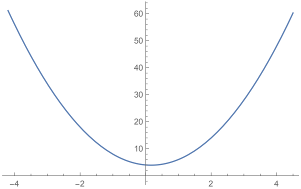
Factorización de polinomios

Ejemplos

- $2x^2 + 3x - 1$
  $= 2\left(x + \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{17}}{4}\right)\left(x + \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{17}}{4}\right)$
  $\Delta = 17$

- $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$
  $\Delta = 0$

- $3x^2 - x + 4$
  no tiene raíces reales
  $\Delta = -47$



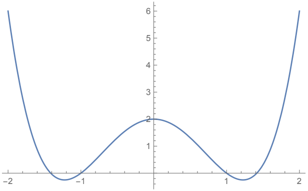
Factorización de polinomios

Ecuaciones bicuadradas $ax^4 + bx^2 + c = 0$

Se resuelven aplicando $\boxed{z = x^2}$

Ejemplo

$$x^4 - 3x^2 + 2 = (x^2 - 1)(x^2 - 2)$$
$$= (x-1)(x+1)\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)$$



Factorización de polinomios

- Si $p(x)$ es un polinomio con coeficientes reales de grado n, y las raíces reales de $p(x)$ son $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ con multiplicidades $m_1, \ldots, m_p$ respectivamente, entonces

$$\boxed{p(x) = (x-\lambda_1)^{m_1}(x-\lambda_2)^{m_2} \cdots\ (x-\lambda_p)^{m_p} q(x)}$$

  donde $m_1 + \cdots + m_p \leqslant n$ y $q(x)$ es un polinomio de grado $n-(m_1+\cdots+m_p)$ con $q(\lambda_i) \neq 0,\ i = 1, \ldots, p$

- Si $p(x)$ es un polinomio con coeficientes enteros y $\boxed{x = a}$ es una raíz entera del polinomio, entonces $\boxed{a}$ es un divisor del término independiente del polinomio

Factorización de polinomios

Ejemplo Factorizar $p(x) = x^4 + x^3 - 6x^2 - 4x + 8$

Los divisores enteros del término independiente son
$\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 1 & -6 & -4 & 8 \\ 1 & & 1 & 2 & -4 & -8 \\ \hline & 1 & 2 & -4 & -8 & \boxed{0} \end{array}$$

$$x^4 + x^3 - 6x^2 - 4x + 8 = (x-1)\cdot(x^3 + 2x^2 - 4x - 8)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & -4 & -8 \\ 1 & & 1 & 3 & -1 \\ \hline & 1 & 3 & -1 & \boxed{-9} \end{array}$$

$\Rightarrow$ 1 no es raíz de $x^3 + 2x^2 - 4x - 8$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & -4 & -8 \\ 2 & & 2 & 8 & 8 \\ \hline & 1 & 4 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

$$x^4 + x^3 - 6x^2 - 4x + 8 = (x-1)\cdot(x-2)\cdot(x^2 + 4x + 4)$$

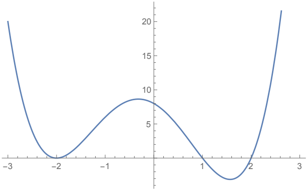
Factorización de polinomios

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 4 & 4 \\ 2 & & 2 & 12 \\ \hline & 1 & 6 & \boxed{16} \end{array} \qquad \Rightarrow 2 \text{ no es raíz de } x^2+4x+4$$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 4 & 4 \\ -2 & & -2 & -4 \\ \hline & 1 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

Se concluye que

$$x^4+x^3-6x^2-4x+8=(x-1)\,(x-2)\,(x+2)^2$$



Tema 6

Funciones (I): Introducción

Tema 6

Funciones (I): Introducción

Conceptos previos
- Definiciones generales
- Composición de funciones

Funciones inyectivas e inversa de una función

Algunos tipos de funciones

Definiciones generales

Definiciones

- Una función real de variable real es una aplicación

$$\boxed{f : D \to \mathbb{R}}$$

  Donde D es un subconjunto de $\mathbb{R}$. Normalmente una función de este tipo se denota $y = f(x)$, donde $x \in D$ representa la variable independiente e $y \in \mathbb{R}$ la variable dependiente

- El dominio o campo de existencia de la función f es el subconjunto de $\mathbb{R}$ donde f está definida: $\mathrm{Dom}(f) = D$

- El recorrido de la función es el subconjunto de $\mathbb{R}$ formado por todos los valores que toma la variable dependiente, es decir la imagen de la aplicación f: $\mathrm{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R}; \exists x \in D, f(x) = y\}$

Definiciones generales

Definiciones

- Una función real de variable real es una aplicación

$$\boxed{f : D \to \mathbb{R}}$$

  Donde D es un subconjunto de $\mathbb{R}$. Normalmente una función de este tipo se denota $y = f(x)$, donde $x \in D$ representa la variable independiente e $y \in \mathbb{R}$ la variable dependiente

- El dominio o campo de existencia de la función f es el subconjunto de $\mathbb{R}$ donde f está definida: $\mathrm{Dom}(f) = D$

- El recorrido de la función es el subconjunto de $\mathbb{R}$ formado por todos los valores que toma la variable dependiente, es decir la imagen de la aplicación f: $\mathrm{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R}; \exists x \in D, f(x) = y\}$

Definiciones generales

Definiciones

- Una función real de variable real es una aplicación

$$\boxed{f : D \to \mathbb{R}}$$

  Donde D es un subconjunto de $\mathbb{R}$. Normalmente una función de este tipo se denota $y = f(x)$, donde $x \in D$ representa la variable independiente e $y \in \mathbb{R}$ la variable dependiente
- El dominio o campo de existencia de la función f es el subconjunto de $\mathbb{R}$ donde f está definida: $\mathrm{Dom}(f) = D$
- El recorrido de la función es el subconjunto de $\mathbb{R}$ formado por todos los valores que toma la variable dependiente, es decir la imagen de la aplicación f: $\mathrm{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R}; \exists x \in D, f(x) = y\}$

Ejemplos

- Sea $f(x) = x^3 + 3$. Esta función está definida para cualquier valor de x, es decir: $\boxed{\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}}$. Por otra parte $\forall y \in \mathbb{R}$ existe un $x \in \mathbb{R}$ que verifica $f(x) = x^3 + 3 = y$ (efectivamente esto ocurre para $x = \sqrt[3]{y-3}$), es decir $\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}}$
- Sea $f(x) = |\, x \,|$. El dominio de esta función es todo $\mathbb{R}$ y su recorrido los números reales no negativos

$$\boxed{\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}} \qquad \boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}}$$

- Se define la función de Dirichlet como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

En este caso:

$$\boxed{\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}} \qquad \boxed{\mathrm{Im}(f) = \{0\} \cup \{1\}}$$

Ejemplos

- Sea $f(x) = x^3 + 3$. Esta función está definida para cualquier valor de x, es decir: $\boxed{\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}}$. Por otra parte $\forall y \in \mathbb{R}$ existe un $x \in \mathbb{R}$ que verifica $f(x) = x^3 + 3 = y$ (efectivamente esto ocurre para $x = \sqrt[3]{y-3}$), es decir $\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}}$
- Sea $f(x) = \mid x \mid$. El dominio de esta función es todo $\mathbb{R}$ y su recorrido los números reales no negativos

$$\boxed{\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}} \qquad \boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}}$$

- Se define la función de Dirichlet como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

En este caso:

$$\boxed{\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}} \qquad \boxed{\mathrm{Im}(f) = \{0\} \cup \{1\}}$$

Ejemplos

- Sea $f(x) = x^3 + 3$. Esta función está definida para cualquier valor de x, es decir: $\boxed{\text{Dom}(f) = \mathbb{R}}$. Por otra parte $\forall y \in \mathbb{R}$ existe un $x \in \mathbb{R}$ que verifica $f(x) = x^3 + 3 = y$ (efectivamente esto ocurre para $x = \sqrt[3]{y-3}$), es decir $\boxed{\text{Im}(f) = \mathbb{R}}$
- Sea $f(x) = \mid x \mid$. El dominio de esta función es todo $\mathbb{R}$ y su recorrido los números reales no negativos

$$\boxed{\text{Dom}(f) = \mathbb{R}} \qquad \boxed{\text{Im}(f) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}}$$

- Se define la función de Dirichlet como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

En este caso:

$$\boxed{\text{Dom}(f) = \mathbb{R}} \qquad \boxed{\text{Im}(f) = \{0\} \cup \{1\}}$$

Ejemplos

- La función $f : D \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -\sqrt{x+1}$ tiene como dominio el conjunto de todos los x tales que $x + 1 \geqslant 0$. El recorrido de esta función será $\mathbb{R}^- \cup \{0\}$:

$$\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R}; x \geqslant -1\} \qquad \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^- \cup \{0\}$$

- La función $f : D \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$ tiene como dominio todos los puntos donde no se anula el denominador $x^2 - 1$, es decir, $\mathbb{R} - \{1, -1\}$. El recorrido es $\mathbb{R} - (0, 1]$:

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\} \qquad \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} - (0, 1]$$

- La función $f : D \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \mathrm{sen}(\frac{x^2}{x^2-1})$ tiene el mismo dominio que la anterior. El recorrido serán todos los valores que puede tomar el seno en el recorrido de $\frac{x^2}{x^2-1}$, es decir:

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\} \qquad \mathrm{Im}(f) = [-1, 1]$$

Ejemplos

- La función $f : D \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -\sqrt{x+1}$ tiene como dominio el conjunto de todos los x tales que $x + 1 \geqslant 0$. El recorrido de esta función será $\mathbb{R}^- \cup \{0\}$:

$$\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R}; x \geqslant -1\} \qquad \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^- \cup \{0\}$$

- La función $f : D \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$ tiene como dominio todos los puntos donde no se anula el denominador $x^2 - 1$, es decir, $\mathbb{R} - \{1, -1\}$. El recorrido es $\mathbb{R} - (0, 1]$:

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\} \qquad \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} - (0, 1]$$

- La función $f : D \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \mathrm{sen}(\frac{x^2}{x^2-1})$ tiene el mismo dominio que la anterior. El recorrido serán todos los valores que puede tomar el seno en el recorrido de $\frac{x^2}{x^2-1}$, es decir:

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\} \qquad \mathrm{Im}(f) = [-1, 1]$$

Ejemplos

- La función $f : D \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -\sqrt{x+1}$ tiene como dominio el conjunto de todos los x tales que $x + 1 \geqslant 0$. El recorrido de esta función será $\mathbb{R}^- \cup \{0\}$:

$$\boxed{\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R}; x \geqslant -1\}} \qquad \boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^- \cup \{0\}}$$

- La función $f : D \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$ tiene como dominio todos los puntos donde no se anula el denominador $x^2 - 1$, es decir, $\mathbb{R} - \{1, -1\}$. El recorrido es $\mathbb{R} - (0, 1]$:

$$\boxed{\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}} \qquad \boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} - (0, 1]}$$

- La función $f : D \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \mathrm{sen}(\frac{x^2}{x^2-1})$ tiene el mismo dominio que la anterior. El recorrido serán todos los valores que puede tomar el seno en el recorrido de $\frac{x^2}{x^2-1}$, es decir:

$$\boxed{\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}} \qquad \boxed{\mathrm{Im}(f) = [-1, 1]}$$

Gráfica de una función

Definición Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función real de variable real. Se denomina gráfica de f al siguiente conjunto de puntos del plano:

$$\boxed{\mathrm{Grf}(f) = \{(x, f(x)) \in D \times \mathbb{R}; \forall x \in D\}}$$

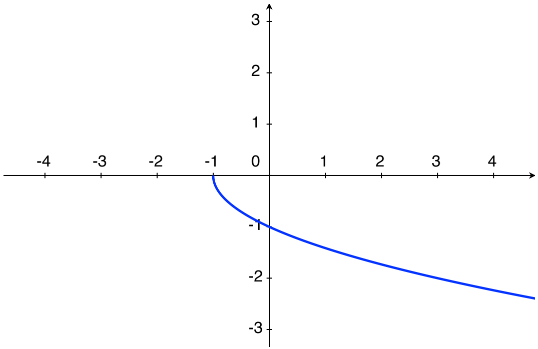
Observaciones

- La gráfica de f son los puntos del plano cuyas coordenadas cartesianas (x, y) verifican que $y = f(x)$, con $x \in D$
- La gráfica de una función ofrece de modo muy rápido e intuitivo información sobre las características de la misma (dominio, recorrido, cortes con los ejes, simetrías...)

Gráfica de una función. Ejemplo 1

Ejemplo $f(x) = -\sqrt{x+1}$

$$\operatorname{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R}; x \geqslant -1\} = [-1, +\infty)]$$
$$\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}^{-} \cup \{0\} = (-\infty, 0]$$

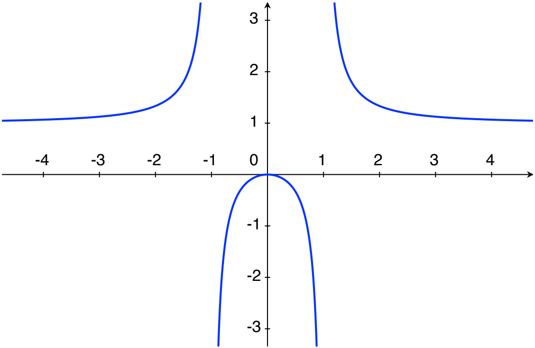


Gráfica de una función. Ejemplo 2

Ejemplo $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1, -1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$$

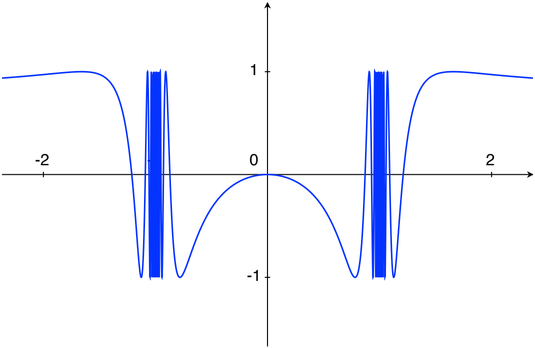
$$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} - (0, 1] = (-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$$



Gráfica de una función. Ejemplo 3

Ejemplo $f(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{x^2}{x^2-1}\right)$

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1, -1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$$
$$\mathrm{Im}(f) = [-1, 1]$$



Composición de funciones

Definición Sean $f : D_1 \to \mathbb{R}$ y $g : D_2 \to \mathbb{R}$ funciones reales de variable real, tales que

$$\mathrm{Im}(f) = f(D_1) \subset D_2$$

La composición de f y g, es una función $g \circ f : D_1 \to \mathbb{R}$ definida como sigue

$$\boxed{(g \circ f)(x) = g(f(x))}$$

Ejemplo Sea $f(x) = x + 1$ y $g(x) = \frac{1}{x^2-4}$. Entonces:

- $(g \circ f)(x) = g(x+1) = \dfrac{1}{(x+1)^2 - 4} = \dfrac{1}{x^2 + 2x - 3}$
- $(f \circ g)(x) = f\left(\dfrac{1}{x^2-4}\right) = \dfrac{1}{x^2-4} + 1 = \dfrac{x^2-3}{x^2-4}$

Tema 6

Funciones (I): Introducción

Función inyectiva y su inversa (I)

Definición Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función real de variable real. Diremos que es inyectiva o unívoca cuando si $x, x' \in D$ verifican $f(x) = f(x')$ entonces necesariamente $x = x'$:

$$\boxed{x, x' \in D, f(x) = f(x') \quad \Rightarrow \quad x = x'}$$

Es decir, cuando no hay dos elementos distintos de D que tengan la misma imagen

Ejemplo Veamos cómo la función $f(x) = 2x + 3$ es una función inyectiva.
Obsérvese que $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$ e $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$. Si $x, x' \in \mathbb{R}$ son tales que $f(x) = f(x')$. Entonces

$$2x + 3 = 2x' + 3 \quad \Rightarrow \quad x = x'$$

Obsevación Cuando una función $f : D \to \mathbb{R}$ es inyectiva podemos definir una función real de variable real

$$f^{-1} : \mathrm{Im}(f) \to D$$

que hace corresponder a cada elemento de $y \in \mathrm{Im}(f)$ el único $x \in D$ que verifica $f(x) = y$.

Función inyectiva y su inversa (II)

Ejemplo Si $f(x) = 2x + 3$ para determinar su inversa hacemos $y = 2x + 3$ y como consecuencia $x = \frac{y-3}{2}$. Es decir, $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se define $f^{-1}(y) = \frac{y-3}{2}$. Obtenemos así:

$$f(x) = 2x + 3, \qquad f^{-1}(y) = \frac{y-3}{2}$$

Las funciones f y f^{-1} del ejemplo pueden componerse. Obsérvese que:

$$\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = f^{-1}(2x+3) = \frac{(2x+3)-3}{2} = x$$

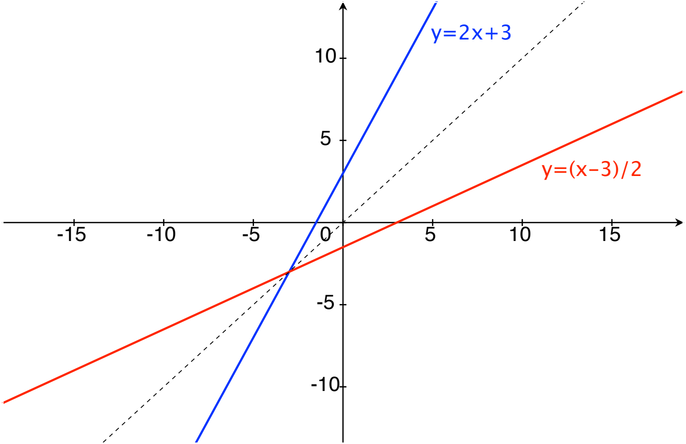
Y análogamente

$$\left(f \circ f^{-1}\right)(y) = f\left(\frac{y-3}{2}\right) = 2\left(\frac{y-3}{2}\right) + 3 = y$$

Es decir, $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id} = f^{-1} \circ f$ donde Id es la función identidad: $\mathrm{Id}(x) = x$

Función inyectiva y su inversa (III)

Obsérvese que si (x, y) es un punto de la gráfica de f entonces (y, x) es un punto de la gráfica de f^{-1}, es decir, la gráfica de una función y la de su inversa son simétricas respecto a la recta $y = x$



Inversa de una función

Definición Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función inyectiva. Existe una función $f^{-1} : Im(f) \to D$ que verifica:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x, \forall x \in D \text{ y } (f \circ f^{-1})(y) = y, \forall y \in \mathrm{Im}(f)$$

Llamaremos a f^{-1} función inversa de f. Su definición es:

$$\boxed{f^{-1}(y) = x, \text{donde } x \text{ es la antiimagen de } y \text{ por } f}$$

Ejemplo Sea $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la función $f(x) = +\sqrt{x}$. Nótese que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$. La inversa de f es la función $f^{-1}(y) = y^2$. En efecto:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(+\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$$

Análogamente, para $y \in \mathbb{R}^+$,

$$(f \circ f^{-1})(y) = f(y^2) = +\sqrt{y^2} = y$$

Tema 6

Funciones (I): Introducción

Conceptos previos

Funciones inyectivas e inversa de una función

Algunos tipos de funciones
- Funciones pares e impares
- Funciones acotadas
- Funciones monótonas
- Funciones exponenciales y logarítmicas

Funciones pares e impares

Definición: Sea $D \subset \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in D; -x \in D$. Diremos que la función $f : D \to \mathbb{R}$ es una función impar cuando:

$$\boxed{\forall x \in D \text{ se verifica que } f(-x) = -f(x)}$$

Observación: Si f es impar y el punto del plano $p = (x, f(x))$ es un punto de su gráfica, entonces el punto $p' = (-x, -f(x))$ también estaría en la gráfica de f, es decir, la gráfica de las funciones impares es simétrica respecto al origen de coordenadas

Ejemplo: La función $f(x) = \frac{x^3 - x^5}{\cos(x)}$ es una función impar, puesto que

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 - (-x)^5}{\cos(-x)} = \frac{-(x^3 - x^5)}{\cos(x)} = -f(x)$$

Funciones pares e impares

Definición: Sea $D \subset \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in D; -x \in D$. Diremos que la función $f : D \to \mathbb{R}$ es una función impar cuando:

$$\boxed{\forall x \in D \text{ se verifica que } f(-x) = -f(x)}$$

Observación: Si f es impar y el punto del plano $p = (x, f(x))$ es un punto de su gráfica, entonces el punto $p' = (-x, -f(x))$ también estaría en la gráfica de f, es decir, la gráfica de las funciones impares es simétrica respecto al origen de coordenadas

Ejemplo: La función $f(x) = \frac{x^3 - x^5}{\cos(x)}$ es una función impar, puesto que

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 - (-x)^5}{\cos(-x)} = \frac{-(x^3 - x^5)}{\cos(x)} = -f(x)$$

Funciones pares e impares

Definición: Sea $D \subset \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in D; -x \in D$. Diremos que la función $f : D \to \mathbb{R}$ es una función impar cuando:

$$\boxed{\forall x \in D \text{ se verifica que } f(-x) = -f(x)}$$

Observación: Si f es impar y el punto del plano $p = (x, f(x))$ es un punto de su gráfica, entonces el punto $p' = (-x, -f(x))$ también estaría en la gráfica de f, es decir, la gráfica de las funciones impares es simétrica respecto al origen de coordenadas

Ejemplo: La función $f(x) = \frac{x^3 - x^5}{\cos(x)}$ es una función impar, puesto que

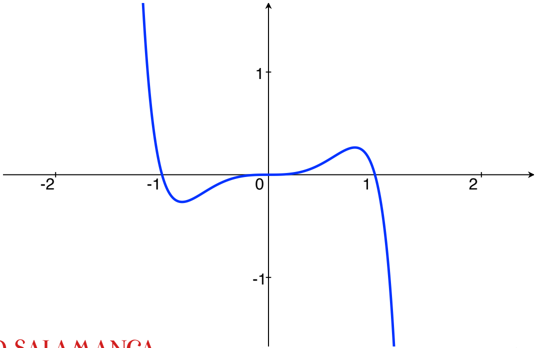
$$f(-x) = \frac{(-x)^3 - (-x)^5}{\cos(-x)} = \frac{-(x^3 - x^5)}{\cos(x)} = -f(x)$$

Funciones pares e impares

Definición: Sea $D \subset \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in D; -x \in D$.
Diremos que la función $f : D \to \mathbb{R}$ es una función impar cuando:

$$\boxed{\forall x \in D \text{ se verifica que } f(-x) = -f(x)}$$

Ejemplo La gráfica de $f(x) = \frac{x^3 - x^5}{\cos(x)}$ (impar) es:



Funciones pares e impares

Definición: Sea $D \subset \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in D; -x \in D$. Diremos que la función $f : D \to \mathbb{R}$ es una función par cuando:

$$\boxed{\forall x \in D \text{ se verifica que } f(-x) = f(x)}$$

Observación: Si f es par y el punto del plano $p = (x, f(x))$ es un punto de su gráfica, entonces el punto $p' = (-x, f(x))$ también estaría en la gráfica de f, es decir la gráfica de las funciones impares es simétrica respecto al eje de ordenadas

Ejemplo: La función $f(x) = -x\,\mathrm{sen}(x)$ es una función par, puesto que

$$f(-x) = -(-x)\,\mathrm{sen}(-x) = x\,\mathrm{sen}(-x) = -x\,\mathrm{sen}(x) = f(x)$$

Funciones pares e impares

Definición: Sea $D \subset \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in D; -x \in D$. Diremos que la función $f : D \to \mathbb{R}$ es una función par cuando:

$$\boxed{\forall x \in D \text{ se verifica que } f(-x) = f(x)}$$

Observación: Si f es par y el punto del plano $p = (x, f(x))$ es un punto de su gráfica, entonces el punto $p' = (-x, f(x))$ también estaría en la gráfica de f, es decir la gráfica de las funciones impares es simétrica respecto al eje de ordenadas

Ejemplo: La función $f(x) = -x\operatorname{sen}(x)$ es una función par, puesto que

$$f(-x) = -(-x)\operatorname{sen}(-x) = x\operatorname{sen}(-x) = -x\operatorname{sen}(x) = f(x)$$

Funciones pares e impares

Definición: Sea $D \subset \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in D; -x \in D$. Diremos que la función $f : D \to \mathbb{R}$ es una función par cuando:

$$\boxed{\forall x \in D \text{ se verifica que } f(-x) = f(x)}$$

Observación: Si f es par y el punto del plano $p = (x, f(x))$ es un punto de su gráfica, entonces el punto $p' = (-x, f(x))$ también estaría en la gráfica de f, es decir la gráfica de las funciones impares es simétrica respecto al eje de ordenadas

Ejemplo: La función $f(x) = -x\,\mathrm{sen}(x)$ es una función par, puesto que

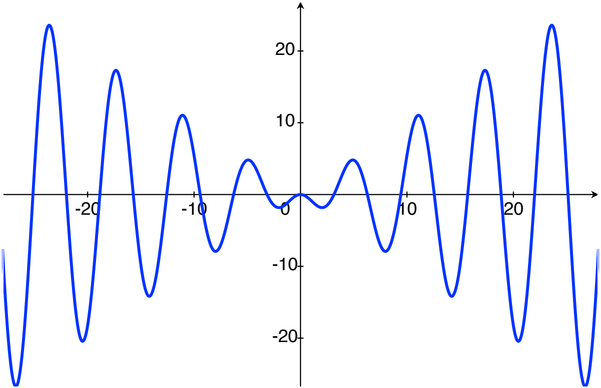
$$f(-x) = -(-x)\,\mathrm{sen}(-x) = x\,\mathrm{sen}(-x) = -x\,\mathrm{sen}(x) = f(x)$$

Funciones pares e impares

Definición: Sea $D \subset \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in D; -x \in D$. Diremos que la función $f : D \to \mathbb{R}$ es una función par cuando:

$$\forall x \in D \text{ se verifica que } f(-x) = f(x)$$

Ejemplo La gráfica de $f(x) = x\,\mathrm{sen}(x)$ (par) es:



Funciones acotadas

Definiciones

- Diremos que la función $f : D \to \mathbb{R}$ está acotada superiormente (resp. inferiormente) si existe un número real M tal que

$$\boxed{f(x) \leqslant M \text{ (resp. } f(x) \geqslant M); \forall x \in D}$$

- Diremos que f está acotada si lo está superior e inferiormente
- Diremos que f está acotada superiormente (resp. inferiormente) en un punto $a \in D$, si lo está en un entorno E_a del punto a

Observación Si f está acotada en D lo está en todos los puntos de D, pero el recíproco no es cierto. Una función puede estar acotada en todos los puntos de su dominio y no estar acotada en todo el dominio. Un ejemplo es la función $f(x) = x^4 + x^2$, cuyo dominio es todo $\mathbb{R}$

Funciones acotadas

Definiciones

- Diremos que la función $f : D \to \mathbb{R}$ está acotada superiormente (resp. inferiormente) si existe un número real M tal que

$$\boxed{f(x) \leqslant M \text{ (resp. } f(x) \geqslant M); \forall x \in D}$$

- Diremos que f está acotada si lo está superior e inferiormente
- Diremos que f está acotada superiormente (resp. inferiormente) en un punto $a \in D$, si lo está en un entorno E_a del punto a

Observación Si f está acotada en D lo está en todos los puntos de D, pero el recíproco no es cierto. Una función puede estar acotada en todos los puntos de su dominio y no estar acotada en todo el dominio. Un ejemplo es la función $f(x) = x^4 + x^2$, cuyo dominio es todo $\mathbb{R}$

Funciones acotadas

Definiciones

- Diremos que la función $f : D \to \mathbb{R}$ está acotada superiormente (resp. inferiormente) si existe un número real M tal que

$$\boxed{f(x) \leqslant M \text{ (resp. } f(x) \geqslant M); \forall x \in D}$$

- Diremos que f está acotada si lo está superior e inferiormente
- Diremos que f está acotada superiormente (resp. inferiormente) en un punto $a \in D$, si lo está en un entorno E_a del punto a

Observación Si f está acotada en D lo está en todos los puntos de D, pero el recíproco no es cierto. Una función puede estar acotada en todos los puntos de su dominio y no estar acotada en todo el dominio. Un ejemplo es la función $f(x) = x^4 + x^2$, cuyo dominio es todo $\mathbb{R}$

Funciones acotadas

Definiciones

- Diremos que la función $f : D \to \mathbb{R}$ está acotada superiormente (resp. inferiormente) si existe un número real M tal que

$$\boxed{f(x) \leqslant M \text{ (resp. } f(x) \geqslant M); \forall x \in D}$$

- Diremos que f está acotada si lo está superior e inferiormente
- Diremos que f está acotada superiormente (resp. inferiormente) en un punto $a \in D$, si lo está en un entorno E_a del punto a

Observación Si f está acotada en D lo está en todos los puntos de D, pero el recíproco no es cierto. Una función puede estar acotada en todos los puntos de su dominio y no estar acotada en todo el dominio. Un ejemplo es la función $f(x) = x^4 + x^2$, cuyo dominio es todo $\mathbb{R}$

Máximos y mínimos absolutos y relativos

Definiciones

- Se llama extremo superior de una función $f : D \to \mathbb{R}$, y denotaremos $\sup(f)$, a la menor de sus cotas superiores
- Diremos que un punto $x_0 \in D$ es un máximo global o absoluto de f si $f(x_0) = \sup(f)$
- Se llama extremo inferior de una función $f : D \to \mathbb{R}$, y denotaremos $\text{ínf}(f)$, a la mayor de sus cotas inferiores
- Diremos que un punto $x_0 \in D$ es un mínimo global o absoluto de f si $f(x_0) = \text{ínf}(f)$
- Diremos que un punto $x_0 \in D$ es un máximo local o relativo de f si existe un entorno de x_0, E_{x_0} tal que $\forall x \in E_{x_0} \cap D$, se verifica $f(x) \leqslant f(x_0)$
- Diremos que un punto $x_0 \in D$ es un mínimo local o relativo de f si existe un entorno de x_0, E_{x_0} tal que $\forall x \in E_{x_0} \cap D$, se verifica $f(x) \geqslant f(x_0)$

Máximos y mínimos absolutos y relativos

Definiciones

- Se llama extremo superior de una función $f : D \to \mathbb{R}$, y denotaremos $\sup(f)$, a la menor de sus cotas superiores
- Diremos que un punto $x_0 \in D$ es un máximo global o absoluto de f si $f(x_0) = \sup(f)$
- Se llama extremo inferior de una función $f : D \to \mathbb{R}$, y denotaremos $\inf(f)$, a la mayor de sus cotas inferiores
- Diremos que un punto $x_0 \in D$ es un mínimo global o absoluto de f si $f(x_0) = \inf(f)$
- Diremos que un punto $x_0 \in D$ es un máximo local o relativo de f si existe un entorno de x_0, E_{x_0} tal que $\forall x \in E_{x_0} \cap D$, se verifica $f(x) \leqslant f(x_0)$
- Diremos que un punto $x_0 \in D$ es un mínimo local o relativo de f si existe un entorno de x_0, E_{x_0} tal que $\forall x \in E_{x_0} \cap D$, se verifica $f(x) \geqslant f(x_0)$

Máximos y mínimos absolutos y relativos

Definiciones

- Se llama extremo superior de una función $f : D \to \mathbb{R}$, y denotaremos $\sup(f)$, a la menor de sus cotas superiores
- Diremos que un punto $x_0 \in D$ es un máximo global o absoluto de f si $f(x_0) = \sup(f)$
- Se llama extremo inferior de una función $f : D \to \mathbb{R}$, y denotaremos $\inf(f)$, a la mayor de sus cotas inferiores
- Diremos que un punto $x_0 \in D$ es un mínimo global o absoluto de f si $f(x_0) = \inf(f)$
- Diremos que un punto $x_0 \in D$ es un máximo local o relativo de f si existe un entorno de x_0, E_{x_0} tal que $\forall x \in E_{x_0} \cap D$, se verifica $f(x) \leqslant f(x_0)$
- Diremos que un punto $x_0 \in D$ es un mínimo local o relativo de f si existe un entorno de x_0, E_{x_0} tal que $\forall x \in E_{x_0} \cap D$, se verifica $f(x) \geqslant f(x_0)$

Máximos y mínimos absolutos y relativos

Definiciones

- Se llama extremo superior de una función $f : D \to \mathbb{R}$, y denotaremos $\sup(f)$, a la menor de sus cotas superiores
- Diremos que un punto $x_0 \in D$ es un máximo global o absoluto de f si $f(x_0) = \sup(f)$
- Se llama extremo inferior de una función $f : D \to \mathbb{R}$, y denotaremos $\inf(f)$, a la mayor de sus cotas inferiores
- Diremos que un punto $x_0 \in D$ es un mínimo global o absoluto de f si $f(x_0) = \inf(f)$
- Diremos que un punto $x_0 \in D$ es un máximo local o relativo de f si existe un entorno de x_0, E_{x_0} tal que $\forall x \in E_{x_0} \cap D$, se verifica $f(x) \leqslant f(x_0)$
- Diremos que un punto $x_0 \in D$ es un mínimo local o relativo de f si existe un entorno de x_0, E_{x_0} tal que $\forall x \in E_{x_0} \cap D$, se verifica $f(x) \geqslant f(x_0)$

Máximos y mínimos absolutos y relativos

Definiciones

- Se llama extremo superior de una función $f : D \to \mathbb{R}$, y denotaremos $\sup(f)$, a la menor de sus cotas superiores
- Diremos que un punto $x_0 \in D$ es un máximo global o absoluto de f si $f(x_0) = \sup(f)$
- Se llama extremo inferior de una función $f : D \to \mathbb{R}$, y denotaremos $\inf(f)$, a la mayor de sus cotas inferiores
- Diremos que un punto $x_0 \in D$ es un mínimo global o absoluto de f si $f(x_0) = \inf(f)$
- Diremos que un punto $x_0 \in D$ es un máximo local o relativo de f si existe un entorno de x_0, E_{x_0} tal que $\forall x \in E_{x_0} \cap D$, se verifica $f(x) \leqslant f(x_0)$
- Diremos que un punto $x_0 \in D$ es un mínimo local o relativo de f si existe un entorno de x_0, E_{x_0} tal que $\forall x \in E_{x_0} \cap D$, se verifica $f(x) \geqslant f(x_0)$

Máximos y mínimos absolutos y relativos

Definiciones

- Se llama extremo superior de una función $f : D \to \mathbb{R}$, y denotaremos $\sup(f)$, a la menor de sus cotas superiores
- Diremos que un punto $x_0 \in D$ es un máximo global o absoluto de f si $f(x_0) = \sup(f)$
- Se llama extremo inferior de una función $f : D \to \mathbb{R}$, y denotaremos $\inf(f)$, a la mayor de sus cotas inferiores
- Diremos que un punto $x_0 \in D$ es un mínimo global o absoluto de f si $f(x_0) = \inf(f)$
- Diremos que un punto $x_0 \in D$ es un máximo local o relativo de f si existe un entorno de x_0, E_{x_0} tal que $\forall x \in E_{x_0} \cap D$, se verifica $f(x) \leqslant f(x_0)$
- Diremos que un punto $x_0 \in D$ es un mínimo local o relativo de f si existe un entorno de x_0, E_{x_0} tal que $\forall x \in E_{x_0} \cap D$, se verifica $f(x) \geqslant f(x_0)$

Máximos y mínimos absolutos y relativos

Observación Con las definiciones anteriores un máximo o mínimo absoluto de una función en un conjunto D lo es también relativo. El recíproco no es cierto, es decir, un máximo o mínimo relativo no tiene por qué ser absoluto

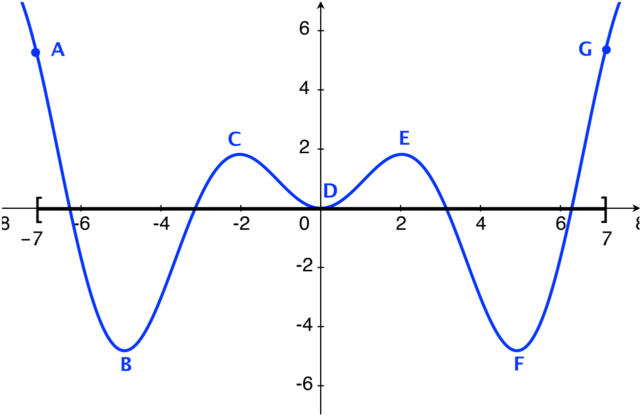
Ejemplo Consideremos la función (ver gráfica en la siguiente página)

$$f(x) = x \operatorname{sen} x$$

en el intervalo cerrado $I = [-7, 7]$, que alcanza el máximo absoluto en los puntos A y G de su gráfica, y el mínimo absoluto en B y F. Los puntos C y E representan máximos relativos, pero no absolutos, y el punto D un mínimo relativo, pero no absoluto

Máximos y mínimos absolutos y relativos

$f(x) = x \operatorname{sen} x$ en el intervalo D = [-7,7]



Máx. absolutos: A,G

Máx. relativos (no abs.): C, E

Mín. absolutos: B,F

Mín. relativos (no abs.): D

Funciones monótonas

Definiciones Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función real de variable real y sea $a \in D$

- Diremos que f es creciente en el punto a si existe un entorno de a, E_a, tal que:

$$\forall x \in E_a \cap D \text{ si } \begin{cases} x \leqslant a \text{ entonces } f(x) \leqslant f(a) \\ x \geqslant a \text{ entonces } f(x) \geqslant f(a) \end{cases}$$

  Si las desigualdades son todas estrictas diremos que es estrictamente creciente

- Diremos que f es decreciente en el punto a si existe un entorno de a, E_a, tal que:

$$\forall x \in E_a \cap D \text{ si } \begin{cases} x \leqslant a \text{ entonces } f(x) \geqslant f(a) \\ x \geqslant a \text{ entonces } f(x) \leqslant f(a) \end{cases}$$

  Si las desigualdades son todas estrictas diremos que es estrictamente decreciente

Funciones monótonas

Definiciones Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función real de variable real y sea $a \in D$

- Diremos que f es creciente en el punto a si existe un entorno de a, E_a, tal que:

$$\forall x \in E_a \cap D \text{ si} \begin{cases} x \leqslant a \text{ entonces } f(x) \leqslant f(a) \\ x \geqslant a \text{ entonces } f(x) \geqslant f(a) \end{cases}$$

  Si las desigualdades son todas estrictas diremos que es estrictamente creciente

- Diremos que f es decreciente en el punto a si existe un entorno de a, E_a, tal que:

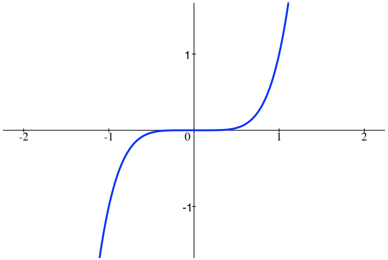
$$\forall x \in E_a \cap D \text{ si} \begin{cases} x \leqslant a \text{ entonces } f(x) \geqslant f(a) \\ x \geqslant a \text{ entonces } f(x) \leqslant f(a) \end{cases}$$

  Si las desigualdades son todas estrictas diremos que es estrictamente decreciente

Funciones monótonas

Definición Diremos que f es monótona creciente o estrictamente creciente (resp. monótona decreciente o estrictamente decreciente) en un conjunto C si es creciente o estrictamente creciente (resp. decreciente) en todos los puntos $a \in C$

Ejemplo: La función $f(x) = x^5$ es estrictamente creciente en todo su dominio de definición



Función exponencial

Una función exponencial es una función del tipo

$$\boxed{f(x) = a^x \text{ donde } a \in \mathbb{R} \text{ y } a > 0, a \neq 1}$$

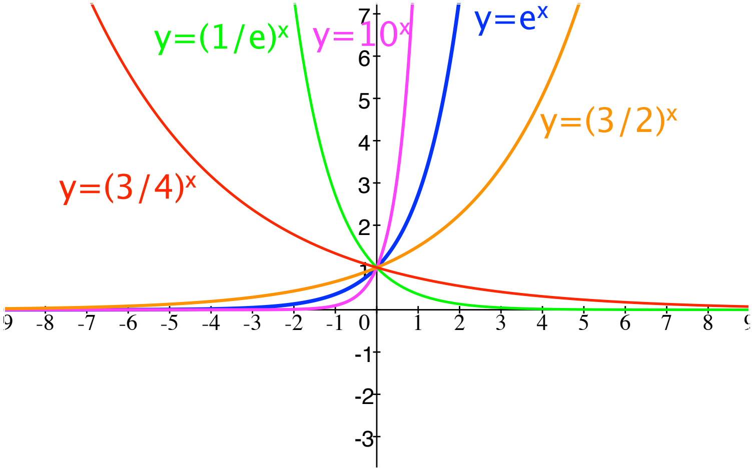
Muy frecuentemente en las funciones exponenciales el número real a es el número de Euler:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2.718281\ldots$$

La función exponencial verifica estas propiedades:

- Su dominio es todo $\mathbb{R}$
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$, es decir $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$
- $f(0) = 1$
- $f(x + x') = f(x)f(x')$
- $f(x - x') = \frac{f(x)}{f(x')}$
- Si $a > 1$ entonces f es monótona creciente
- Si $a < 1$ entonces f es monótona decreciente

Funciones exponenciales. Gráficas



Función logarítmica

Una función logarítmica es una función del tipo

$$\boxed{f(x) = \log_a(x) \text{ donde } a \in \mathbb{R} \text{ y } a > 0, a \neq 1}$$

Recuérdese $log_a(x) = b \quad \Leftrightarrow \quad a^b = x$

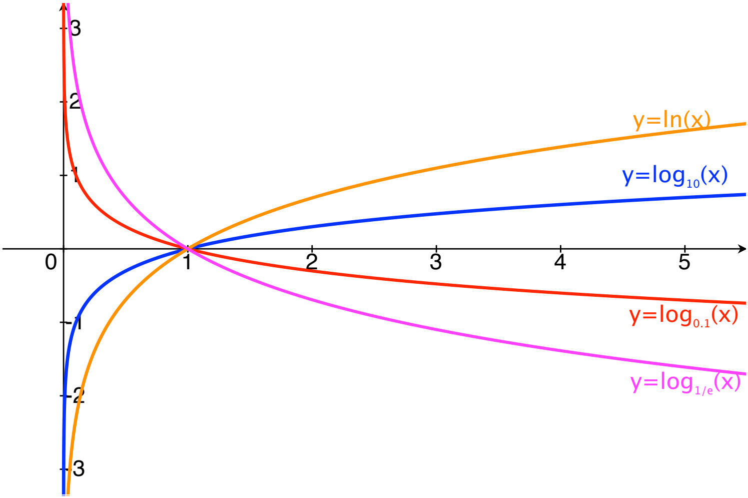
Muy frecuentemente en las funciones logarítmicas el número real a es el número e y en ese caso el $\log_e(x)$ se denota por $\ln(x)$ o, simplemente por $\log(x)$

La función logarítmica verifica estas propiedades:

- Sólo está definida si $x > 0$ es decir, $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}^+$
- $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$
- $f(1) = 0$ y $f(a) = 1$
- Si $a > 1$ entonces f es monótona creciente
- Si $a < 1$ entonces f es monótona decreciente

La función $f(x) = \log_a(x)$ es la función inversa de $g(x) = a^x$, es decir $g(f(x)) = x$

Funciones logarítmicas. Gráficas



Tema 7

Funciones (II): Límites y continuidad

Tema 7

Funciones (II): Límites y continuidad

Límite de una función en un punto

Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función real de variable real y sea $p \in \mathbb{R}$, tal que siempre hay elementos de D, distintos del propio p tan próximos a p como se quiera

Definición Diremos que $l \in \mathbb{R}$ es el límite de la función f en el punto p y escribiremos $\lim_{x \to p} f(x) = l$, si

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tal que } \forall x \in D - \{p\},\ \text{tal que}$$
$$\operatorname{dist}(x, p) = \mid x - p \mid < \delta \text{ se verifica que}$$
$$\operatorname{dist}(f(x), l) = \mid f(x) - l \mid < \epsilon$$

Es decir, a medida que nos aproximamos a p por puntos de D, las imágenes de esos puntos por la función f se aproximan al valor l

Límite de una función en un punto

Ejemplo Consideremos la función $f(x) = 3x + 5$.
Veamos que $\boxed{\lim_{x \to 2} f(x) = 11}$

El dominio de f es todo $\mathbb{R}$, de modo que siempre nos podremos acercar al punto $p = 2$ por puntos del dominio de la función tanto como queramos.

Sea $\epsilon > 0$. Hemos de demostrar que existe un $\delta > 0$ tal que si $| x - 2 | < \delta$ entonces $|f(x) - l| = | (3x + 5) - 11 | < \epsilon$.

Sea $\boxed{\delta < \frac{\epsilon}{3}}$. Si $| x - 2 | < \frac{\epsilon}{3}$ tenemos:

$$| (3x + 5) - 11 | = | 3x - 6 | = 3 | x - 2 | < 3\frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

como queríamos probar

Límites laterales

Definición: Diremos que $l_i \in \mathbb{R}$ es el límite por la izquierda la de la función f en el punto p y escribiremos $\lim\limits_{x \to p^-} f(x) = l_i$, si

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tal que } \forall x \in D - \{p\},\ \text{tal que } 0 < p - x < \delta$$
$$\text{se verifica que } \mid f(x) - l_i \mid < \epsilon$$

Definición: Diremos que $l_d \in \mathbb{R}$ es el límite por la derecha la de la función f en el punto p y escribiremos $\lim\limits_{x \to p^+} f(x) = l_d$, si

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tal que } \forall x \in D - \{p\},\ \text{tal que } 0 < x - p < \delta$$
$$\text{se verifica que } \mid f(x) - l_d \mid < \epsilon$$

Límites laterales

Poposición Existe el límite de la función f en el punto p y vale l si y sólo si:

$$\boxed{\lim_{x\to p^-} f(x) = l = \lim_{x\to p^+} f(x)}$$

Ejemplo Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 5 \\ 2x & \text{si } x \geqslant 5 \end{cases}$$

No existe $\lim_{x\to 5} f(x)$ puesto que:

$$\lim_{x\to 5^-} f(x) = 25 \neq 10 = \lim_{x\to 5^+} f(x)$$

Límites infinitos

Definiciones

- Diremos que $\boxed{\lim\limits_{x\to p^-} f(x) = +\infty}$ si $\forall K \in \mathbb{R}\ \exists\delta > 0$ tal que si $0 < p - x < \delta$ entonces $f(x) > K$
- Diremos que $\boxed{\lim\limits_{x\to p^+} f(x) = +\infty}$ si $\forall K \in \mathbb{R}\ \exists\delta > 0$ tal que si $0 < x - p < \delta$ entonces $f(x) > K$
- Diremos que $\boxed{\lim\limits_{x\to p^-} f(x) = -\infty}$ si $\forall K \in \mathbb{R}\ \exists\delta > 0$ tal que si $0 < p - x < \delta$ entonces $f(x) < K$
- Diremos que $\boxed{\lim\limits_{x\to p^+} f(x) = -\infty}$ si $\forall K \in \mathbb{R}\ \exists\delta > 0$ tal que si $0 < x - p < \delta$ entonces $f(x) < K$

Límites en el infinito

Definiciones

- Diremos que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ si $\forall\epsilon > 0\ \exists K \in \mathbb{R}$ tal que si $x > K$ entonces $| f(x) - L |< \epsilon$
- Diremos que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ si $\forall K \in \mathbb{R}\ \exists h \in \mathbb{R}$ tal que $\forall x > h$ se verifica $f(x) > K$
- Diremos que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ si $\forall K \in \mathbb{R}\ \exists h \in \mathbb{R}$ tal que $\forall x > h$ se verifica $f(x) < K$

Análogamente:

- Diremos que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$ si $\forall\epsilon > 0\ \exists K \in \mathbb{R}$ tal que si $x < K$ entonces $| f(x) - L |< \epsilon$
- Diremos que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ si $\forall K \in \mathbb{R}\ \exists h \in \mathbb{R}$ tal que $\forall x < h$ se verifica $f(x) > K$
- Diremos que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ si $\forall K \in \mathbb{R}\ \exists h \in \mathbb{R}$ tal que $\forall x < h$ se verifica $f(x) < K$

Límites en el infinito

Definiciones

- Diremos que $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L}$ si $\forall \epsilon > 0\ \exists K \in \mathbb{R}$ tal que si $x > K$ entonces $| f(x) - L | < \epsilon$
- Diremos que $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$ si $\forall K \in \mathbb{R}\ \exists h \in \mathbb{R}$ tal que $\forall x > h$ se verifica $f(x) > K$
- Diremos que $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty}$ si $\forall K \in \mathbb{R}\ \exists h \in \mathbb{R}$ tal que $\forall x > h$ se verifica $f(x) < K$

Análogamente:

- Diremos que $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L}$ si $\forall \epsilon > 0\ \exists K \in \mathbb{R}$ tal que si $x < K$ entonces $| f(x) - L | < \epsilon$
- Diremos que $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty}$ si $\forall K \in \mathbb{R}\ \exists h \in \mathbb{R}$ tal que $\forall x < h$ se verifica $f(x) > K$
- Diremos que $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}$ si $\forall K \in \mathbb{R}\ \exists h \in \mathbb{R}$ tal que $\forall x < h$ se verifica $f(x) < K$

Tema 7

Funciones (II): Límites y continuidad

Propiedades de los límites (I)

Sean $f, g, h : D \to \mathbb{R}$ y sea $p \in D$ tal que siempre hay elementos de D distintos del propio p, tan próximos a p como se quiera. Sea $\lim_{x\to p} f(x) = l$ y $\lim_{x\to p} g(x) = l'$

Propiedades

1. Si existe, el límite de una función en un punto es único
2. Si una función tiene límite en un punto entonces está acotada en ese punto
3. Si $l \neq 0$ existe un entorno de p, E_p tal que si $x \in E_p \cap D$ entonces $f(x)$ tiene el mismo signo que l
4. Si $l < l'$, entonces existe un entorno de p, E_p tal que si $x \in E_p \cap D,\ x \neq p$, $f(x) < g(x)$
5. Si en un entorno E_p se verifica $\forall x \in D \cap E_p,\ x \neq p$ que $f(x) < g(x)$, entonces $l < l'$
6. Si $l = l'$ y en un entorno E_p se verifica $\forall x \in D \cap E_p$, $x \neq p$ que $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$, entonces $\lim_{x\to p} h(x) = l$ (criterio del emparedado)

Propiedades de los límites (II)

Sea

$$\boxed{\lim_{x \to p} f(x) = l} \quad \text{y} \quad \boxed{\lim_{x \to p} g(x) = l'}$$

Propiedades

- $\lim_{x \to p} [f(x) + g(x)] = l + l'$
- $\lim_{x \to p} [f(x) \cdot g(x)] = l \cdot l'$
- Si $l' \neq 0$ entonces $\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{l'}$
- $\lim_{x \to p} [f(x)]^a = l^a \qquad (a \in \mathbb{R})$
- $\lim_{x \to p} \sqrt[a]{f(x)} = \sqrt[a]{l} \qquad (a \in \mathbb{R}, a \neq 0)$
- $\lim_{x \to p} [f(x)]^{g(x)} = l^{l'}$

Tema 7

Funciones (II): Límites y continuidad

Cálculo de límites (I)

Para calcular el $\lim_{x \to p} f(x)$ sustituimos el x por p en la función y calculamos $f(p)$, teniendo en cuenta lo siguiente cuando aparecen límites $\pm\infty$:

$k + \infty = +\infty$	$k - \infty = -\infty$	$(k \in \mathbb{R})$
$k \cdot (+\infty) = +\infty$	$k \cdot (-\infty) = -\infty$	$(k > 0)$
$k^{+\infty} = +\infty$	$k^{-\infty} = 0$	$(k > 1)$
$k^{+\infty} = 0^{+}$	$k^{-\infty} = +\infty$	$(0 < k < 1)$
$\frac{1}{\infty} = 0$	$\frac{1}{0^{+}} = +\infty$	$\frac{1}{0^{-}} = -\infty$
$+\infty^{+\infty} = +\infty$	$\log(+\infty) = +\infty$	$\log(0^{+}) = -\infty$

Cálculo de límites (II)

- Si $\boxed{\lim\limits_{x \to p} f(x) = a^{\infty}}$

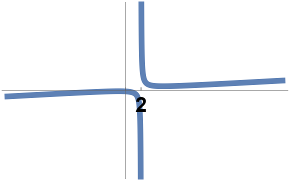
Si $a > 1$ $\quad \begin{cases} a^{+\infty} \to +\infty \\ a^{-\infty} \to 0^+ \end{cases}$ $\qquad$ Si $0 < a < 1$ $\quad \begin{cases} a^{+\infty} \to 0^+ \\ a^{-\infty} \to +\infty \end{cases}$

- Si $\boxed{\lim\limits_{x \to p} f(x) = \frac{a}{0}}$ calculamos los límites laterales de la función en el punto

Ejemplo Calcular $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2+4}{x-2}$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2+4}{x-2} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2+4}{x-2} = -\infty$$



Los límites laterales son distintos, y por tanto la función no tiene límite en el punto $x = 2$

Casos de indeterminación

En esta tabla se presentan los casos de indeterminación en el cálculo de límites. En estas situaciones el resultado puede ser cualquiera, dependiendo del caso concreto de la función (puede tomar valores $\pm\infty, 0, l$). Cuando se presenta un caso de indeterminación se ha de recurrir a ciertas técnicas específicas

$0/0$	$f(x)/g(x)$	$f(x) \to 0$	$g(x) \to 0$
∞/∞	$f(x)/g(x)$	$f(x) \to \infty$	$g(x) \to \infty$
$0 \cdot \infty$	$f(x) \cdot g(x)$	$f(x) \to 0$	$g(x) \to \infty$
$\infty - \infty$	$f(x) - g(x)$	$f(x) \to \infty$	$g(x) \to \infty$
0^0	$f(x)^{g(x)}$	$f(x) \to 0$	$g(x) \to 0$
∞^0	$f(x)^{g(x)}$	$f(x) \to \infty$	$g(x) \to 0$
1^∞	$f(x)^{g(x)}$	$f(x) \to 1$	$g(x) \to \infty$

Cálculo de límites. Casos de indeterminación

Indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$$

- Si es una función racional (un cociente de polinomios) se descomponen estos en factores y se simplifica

Ejemplo

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - x - 6} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 3} \frac{(x+3)(x-3)}{(x-3)(x+2)} = \lim_{x \to 3} \frac{x+3}{x+2} = \frac{6}{5}$$

- Si es un cociente de funciones irracionales o una función irracional y un polinomio se multiplica y divide por la expresión irracional conjugada y se simplifica

Ejemplo

$$\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{\sqrt{x+7} - 3} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}{(\sqrt{x+7}-3)(\sqrt{x+7}+3)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}{x+7-9} = \lim_{x \to 2} \sqrt{x+7} + 3 = 6$$

Cálculo de límites. Casos de indeterminación

Indeterminaciones del tipo $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to p}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\infty}{\infty}$$

- Podemos reducirlo al caso anterior sin más que tener en cuenta que $\lim_{x\to p}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to p}\frac{1/g(x)}{1/f(x)}=\frac{0}{0}$
- Si $f(x)$ y $g(x)$ son polinomios o funciones con radicales dividimos numerador y denominador por la mayor potencia de x

Ejemplo

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^7+x^2}+x}{x^2+2}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\sqrt[3]{x^7+x^2}+x}{x^{7/3}}}{\frac{x^2+2}{x^{7/3}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{1+x^{-5}}+x^{-4/3}}{x^{-1/3}+2x^{-7/3}}=\frac{1}{0}=\infty$$

Cálculo de límites. Casos de indeterminación

Indeterminaciones del tipo $\infty - \infty$ $\lim\limits_{x \to p} f(x) - g(x) = \infty - \infty$

- Si la expresión es una diferencia de funciones racionales, realizando las operaciones se resuelve o se llega a una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$

  Ejemplo

$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{x^2}{x-2} - \frac{x^3+8}{x^2-4} \right) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2(x+2) - x^3 - 8}{x^2-4} = \lim_{x \to 2} \frac{2x^2-8}{x^2-4}$$

$$= \lim_{x \to 2} 2\,\frac{x^2-4}{x^2-4} = 2$$

- Si f y/o g son funciones con radicales, para hallar $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - g(x))$, multiplicamos y dividimos por el conjugado $f(x) + g(x)$

  Ejemplo

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt{x^2-2} - \sqrt{x^2-x} = \lim_{x \to \infty} \frac{(\sqrt{x^2-2} - \sqrt{x^2-x})(\sqrt{x^2-2} + \sqrt{x^2-x})}{(\sqrt{x^2-2} + \sqrt{x^2-x})}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x-2}{(\sqrt{x^2-2} + \sqrt{x^2-x})} = \frac{1}{2}$$

Cálculo de límites. Casos de indeterminación

Indeterminaciones del tipo $0 \cdot \infty$ $\lim\limits_{x\to p} f(x) \cdot g(x) = 0 \cdot \infty$

Se reducen al caso $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$

Indeterminaciones del tipo 1^{∞} $\lim\limits_{x\to p} f(x)^{g(x)} = 1^{\infty}$

Tendremos en cuenta el siguiente resultado, conocido como fórmula de Euler:

Si $\lim\limits_{x\to p} f(x) = 1$ y $\lim\limits_{x\to p} g(x) = \infty$, entonces

$$\lim_{x\to p} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to p}(f(x)-1)g(x)}$$

Ejemplo

$$\lim_{x\to 2}(x-1)^{\frac{2}{x-2}} = 1^{\infty} = e^{\lim\limits_{x\to 2}[(x-1)-1]\frac{2}{x-2}} = e^2$$

Otras indeterminaciones: 0^0, ∞^0, 1^{∞}

Pueden resolverse aplicando:

$$\lim_{x\to p} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to p} e^{\log(f(x)^{g(x)})} = e^{\lim\limits_{x\to p}(g(x)\,\log f(x))}$$

Tema 7

Funciones (II): Límites y continuidad

Continuidad

Definición Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función real de variable real. Diremos que la función f es continua en el punto $p \in D$ si

$$\boxed{\lim_{x \to p} f(x) = f(p)}$$

Con esta definición, la función f será discontinua en p si se da alguna de estas tres situaciones

1. No existe $\lim_{x \to p} f(x)$
2. f no está definida en p
3. $\lim_{x \to p} f(x) \neq f(p)$

En el caso 1 diremos que la discontinuidad en p es esencial. Si existe $\lim_{x \to p} f(x)$ y se dan los casos 2 o 3 diremos que la discontinuidad es evitable

Definición Diremos que f es continua en un subconjunto de su dominio C, si es continua en todo punto de C

Continuidad

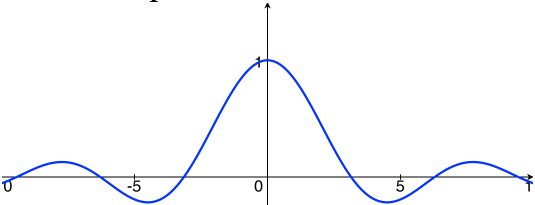
Ejemplo Veamos si la siguiente función es continua en el punto $p = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Observar que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \neq f(0)$$

por tanto la función será discontinua en 0, y la discontinuidad es evitable puesto que existe el límite de la función en el punto



Continuidad lateral

Definiciones

- Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función real de variable real. Diremos que la función f es continua por la izquierda en el punto $p \in D$ si

$$\boxed{\lim_{x \to p^-} f(x) = f(p)}$$

- Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función real de variable real. Diremos que la función f es continua por la derecha en el punto $p \in D$ si

$$\boxed{\lim_{x \to p^+} f(x) = f(p)}$$

Propiedad Si una función es continua por la derecha y por la izquierda en un punto, entonces es continua en dicho punto

Continuidad lateral

Ejemplo Estudiemos la continuidad de la siguiente función en el punto $p = 1$

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 1 \\ e & \text{si } x = 1 \\ e\,x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Como las definiciones de la función a la derecha y la izquierda del punto 1 son distintas hemos de hallar los límites laterales

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} e^x = e \quad = \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} e\,x^2 = e$$

Como $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$ la función es continua en el punto $p = 1$.

Tema 7

Funciones (II): Límites y continuidad

Propiedades de las funciones continuas

Sean $f, g : D \to \mathbb{R}$ funciones reales de variable real y sea $p \in D$:

- Si f y g son continuas en p entonces las funciones $f+g$, $f \cdot g$ y kf ($k \in \mathbb{R}$) son continuas en p
- Si f y g son continuas en p y $g(p) \neq 0$ entonces $\frac{f}{g}$ es continua en p
- Si f es continua en p y g es continua en $f(p)$ entonces la composición de ambas $g \circ f$ es continua en p
- Si f es continua en p entonces tiene límite en p
- Si f es continua en p entonces está acotada en p
- Si f es continua en p y $f(p) \neq 0$ entonces existe un entorno de p , E_p tal que $\forall x \in E_p \cap D$ se verifica que $\operatorname{signo} f(x) = \operatorname{signo} f(p)$
- Si f es continua en p y toma valores positivos y negativos en todo entorno de p entonces $f(p) = 0$

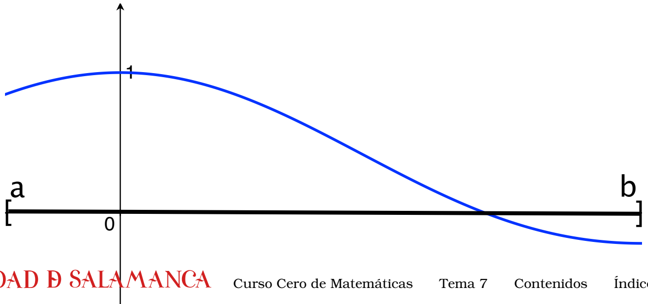
Algunas funciones continuas conocidas

- La función constante $f(x) = K$ es continua en todo $\mathbb{R}$, puesto que $\forall p \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to p} f(x) = k = f(p)$
- La función identidad $f(x) = x$ es continua en todo $\mathbb{R}$, ya que $\forall p \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to p} f(x) = p = f(p)$
- Las funciones potenciales $f(x) = x^n$ son continuas en todo $\mathbb{R}$, puesto que es un producto de funciones continuas ($x^n = x\,x \overset{(n)}{\ldots} x$)
- Las funciones polinómicas $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ son continuas en todo $\mathbb{R}$, puesto que cada monomio es un producto de funciones continuas, y el polinomio es entonces una suma de funciones continuas
- Las funciones racionales $\frac{P(x)}{Q(x)}$ son continuas en todos los puntos p donde $Q(p) \neq 0$

Propiedades de las funciones continuas

Teorema (de Bolzano) Sea f una función real de variable real continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ tal que $\operatorname{signo} f(a) \neq \operatorname{signo} f(b)$. Entonces, existe $c \in (a, b)$ tal que $\boxed{f(c) = 0}$

Observación: Geométricamente lo que este teorema indica es que si la función es continua en el intervalo y en uno de sus extremos está por encima del eje de abscisas y en otro por debajo, entonces la función corta al eje de abscisas en algún punto entre a y b



Propiedades de las funciones continuas

Teorema (de Darboux): Sea f una función real de variable real continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ tal que $f(a) \neq f(b)$. Se verifica que:

$$\boxed{\forall k \in (f(a), f(b)), \exists c \in (a,b) \text{ tal que } f(c) = k}$$

Observación: Este teorema es en realidad el mismo que el anterior aplicado a la función $h(x) = f(x) - k$

Teorema: Sea f una función real de variable real continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, entonces f está acotada en $[a,b]$, es decir, existen números reales K y k' tales que:

$$\forall x_0 \in [a,b], K < f(x_0) < k'$$

Teorema (de Weierstrass) Sea f una función real de variable real continua en un intervalo cerrado $[a,b]$. Entonces f alcanza el máximo y el mínimo absoluto en $[a,b]$, es decir $\exists c, c' \in [a,b]$ tales que:

$$\boxed{\forall x_0 \in [a,b],\ f(c') \leqslant f(x_0) \leqslant f(c)}$$

Tema 8

Funciones (III): Derivabilidad

Tema 8

Funciones (III): Derivabilidad

Derivada en un punto

Definición Una función real de variable real $f : D \to \mathbb{R}$ es derivable en un punto $a \in D$ si existe el siguiente límite y es finito:

$$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

O escrito de otro modo

$$\boxed{\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$

A dicho límite lo denominamos derivada de f en a y lo denotamos $f'(a)$

Derivadas laterales. Derivada por la izquierda

Según la definición de límite, para que exista $f'(a)$, deben existir los límites laterales (por la izquierda y por la derecha), y además ser iguales. Formalizamos esta cuestión con las siguientes definiciones

Definición Una función real de variable real $f : D \to \mathbb{R}$ es derivable por la izquierda en un punto $a \in D$ si existe el siguiente límite y es finito:

$$\boxed{\lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

o bien

$$\boxed{\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$$

Derivadas laterales. Derivada por la derecha

Y análogamente

Definición Una función real de variable real $f : D \to \mathbb{R}$ es derivable por la derecha en un punto $a \in D$ si existe el siguiente límite y es finito:

$$\boxed{\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

o bien

$$\boxed{\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$

Derivabilidad. Ejemplo

Estudiar la derivabilidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leqslant 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Veamos en primer lugar que $f(x)$ es derivable en cualquier punto $a \neq 0$:

$$\text{Si } a > 0 : f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a+h-a}{h} = 1$$

$$\text{Si } a < 0 : f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2(a+h)-2a}{h} = 2$$

El cálculo de estos límites no depende de si

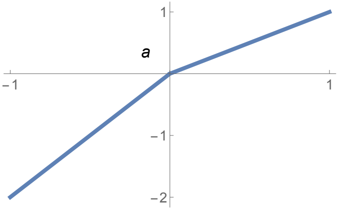
$$a \to h^+ \qquad \text{o} \qquad a \to h^-$$

Derivabilidad. Ejemplo

Veamos ahora la derivabilidad en el punto $a = 0$:

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h},$$

que en este caso depende de si $h \to 0^+$ o $h \to 0^-$:



$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h}{h} = 2$$

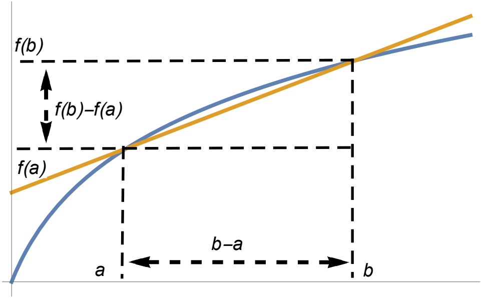
$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$$

Como los límites son distintos f no es derivable en $a = 0$, no exite $f'(0)$

Interpretación geométrica de la derivada

Sea $f : D \to \mathbb{R}$, su tasa de variación media (T.V.M.) en un intervalo $[a, b] \subseteq D$ viene dada por

$$\frac{\text{variación de } f(x)}{\text{variación de } x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \overset{(b=a+h)}{=} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

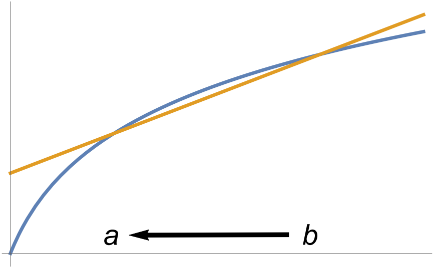


Esta expresión coincide con la tangente del ángulo que forma la recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ con el eje x, que es la pendiente de dicha recta

Interpretación geométrica de la derivada

Tomando límites en la expresión de la T.V.M cuando $b \to a$ (o $h \to 0$) obtenemos la expresión de la definición de derivada de f en el punto a

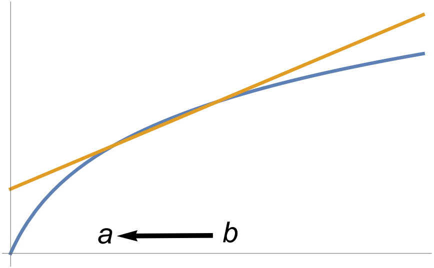
En cuanto a las rectas, al hacer $b \to a$, el punto $(b, f(b))$ se acerca a $(a, f(a))$, y la recta secante a $f(x)$ por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$, en el límite, es la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$



Interpretación geométrica de la derivada

Tomando límites en la expresión de la T.V.M cuando $b \to a$ (o $h \to 0$) obtenemos la expresión de la definición de derivada de f en el punto a

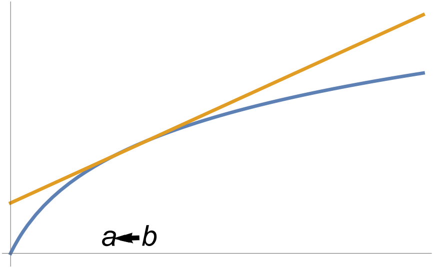
En cuanto a las rectas, al hacer $b \to a$, el punto $(b, f(b))$ se acerca a $(a, f(a))$, y la recta secante a $f(x)$ por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$, en el límite, es la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$



Interpretación geométrica de la derivada

Tomando límites en la expresión de la T.V.M cuando $b \to a$ (o $h \to 0$) obtenemos la expresión de la definición de derivada de f en el punto a

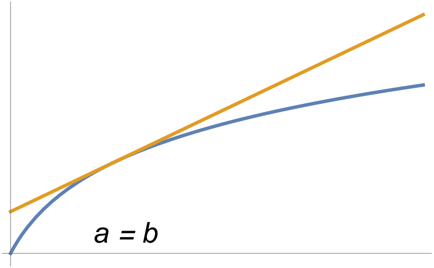
En cuanto a las rectas, al hacer $b \to a$, el punto $(b, f(b))$ se acerca a $(a, f(a))$, y la recta secante a $f(x)$ por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$, en el límite, es la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$



Interpretación geométrica de la derivada

Tomando límites en la expresión de la T.V.M cuando $b \to a$ (o $h \to 0$) obtenemos la expresión de la definición de derivada de f en el punto a

En cuanto a las rectas, al hacer $b \to a$, el punto $(b, f(b))$ se acerca a $(a, f(a))$, y la recta secante a $f(x)$ por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$, en el límite, es la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$



Interpretación geométrica de la derivada

Tomando límites en la expresión de la T.V.M cuando $b \to a$ (o $h \to 0$) obtenemos la expresión de la definición de derivada de f en el punto a

En cuanto a las rectas, al hacer $b \to a$, el punto $(b, f(b))$ se acerca a $(a, f(a))$, y la recta secante a $f(x)$ por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$, en el límite, es la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$

Concluimos así que:

La derivada de la función $f : D \to \mathbb{R}$ en un punto $a \in D$, $f'(a)$, coincide con la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$

Función derivada y derivadas de funciones elementales

Definición Una función real de variable real $f : D \to \mathbb{R}$ es derivable en D si lo es en cada punto $a \in D$

A la función $f' : D \to \mathbb{R}$ que a cada $x \in \mathbb{R}$ le asigna su derivada en ese punto, $f'(x)$, la denominamos función derivada de f

Derivadas de funciones elementales

$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \operatorname{sen} x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\operatorname{sen} x$
$f(x) = a^x \ \ (a > 0), \ \ (f(x) = e^x)$	$f'(x) = a^x \ln a, \quad (f'(x) = e^x)$
$f(x) = \log_a x \ (a > 0), \ (f(x) = \ln x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}\frac{1}{\ln a}, \quad (f'(x) = \frac{1}{x})$

Propiedades de la función derivada:

Propiedades Sean $f, g : D \to \mathbb{R}$ funciones derivables en D. Entonces:

- $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- $(kf(x))' = kf'(x)$
- $(f \cdot g)'(x) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$
- $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$ si $g(x) \neq 0$

Regla de la cadena Sean $f : D \to \mathbb{R}$ y $g : D' \to \mathbb{R}$ funciones reales de variable real tales que $Im(f) \subseteq D'$. Consideramos la función compuesta $g \circ f : D \to \mathbb{R}$. Entonces:

$$\boxed{(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)}$$

Derivadas. Ejemplos

1. $\left(x^4+7x^2-5x+6\right)'=4x^3+14x-5$
2. $\left(e^x\cos x\right)'=e^x\cos x-e^x\operatorname{sen}x=e^x\left(\cos x-\operatorname{sen}x\right)$
3. $\left(\dfrac{\operatorname{sen}x}{x^2+1}\right)'=\dfrac{\cos x\cdot\left(x^2+1\right)-\operatorname{sen}x\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}$
4. $\left(\operatorname{sen}x^3\right)'=\cos x^3\cdot 3x^2$
5. $\left(\operatorname{sen}^3 x\right)'=3\operatorname{sen}^2 x\cdot\cos x$
6. $\left(\sqrt{x}\right)'=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
7. $\left(\sqrt{x^2+1}\right)'=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
8. $\left(\tan x\right)'=\left(\dfrac{\operatorname{sen}x}{\cos x}\right)'=\dfrac{\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

Derivadas sucesivas

Definición Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función derivable en D y $f' : D \to \mathbb{R}$ su función derivada. Si $f'(x)$ es derivable en un punto $a \in D$ definimos la derivada segunda de f en a, y la denotamos $f''(a)$, como

$$f''(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h}$$

Si existe $f''(a)$ para todo $a \in D$, entonces existe la función derivada segunda de f en D:

$$f'' : D \to \mathbb{R}, \text{dada por } f''(x) = (f')'(x)$$

Sucesivamente definimos, si existen, las funciones 'derivada tercera, cuarta,..., n-ésima':

$$\boxed{f^{(n}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f^{(n-1}(x+h) - f^{(n-1}(x)}{h} = (f^{(n-1})'(x)}$$

Derivadas sucesivas. Ejemplos

Consideramos los mismos ejemplos anteriores

1. $\left(x^4+7x^2-5x+6\right)''=12x^2+14$

2. $$\begin{aligned}\left(e^x\cos x\right)'' &= e^x(\cos x-\operatorname{sen}x)+e^x(-\operatorname{sen}x-\cos x)\\ &= -2e^x\operatorname{sen}x\end{aligned}$$

3. $$\left(\frac{\operatorname{sen}x}{x^2+1}\right)'' = \frac{[-\operatorname{sen}x\cdot(x^2+1)+2x\cos x-\cos x\cdot 2x-\operatorname{sen}x\cdot 2](x^2+1)^2}{(x^2+1)^4}-$$ $$-\frac{[\cos x\cdot(x^2+1)-\operatorname{sen}x\cdot 2x]2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{-(x^4-4x^2+3)\operatorname{sen}x-4x(x^2+1)\cos x}{(x^2+1)^3}$$

4. $\left(\operatorname{sen}x^3\right)''=-9x^4\operatorname{sen}x^3+6x\cos x^3$

5. $\left(\operatorname{sen}^3 x\right)''=6\operatorname{sen}x\cdot\cos^2 x-3\operatorname{sen}^3 x$

6. $\left(\sqrt{x}\right)''=\frac{-2\frac{1}{2\sqrt{x}}}{4x}=\frac{-1}{4x\sqrt{x}}$

7. $\left(\sqrt{x^2+1}\right)''=\frac{\sqrt{x^2+1}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

8. $(\tan x)''=\frac{2\cos x\operatorname{sen}x}{\cos^4 x}=\frac{2\operatorname{sen}x}{\cos^3 x}$

Tema 8

Funciones (III): Derivabilidad

Derivabilidad y continuidad

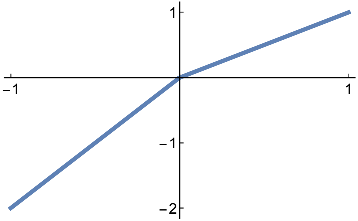
Teorema Si $f : D \to \mathbb{R}$ es derivable en un punto $a \in D$, entonces es continua en dicho punto

Observación El recíproco no es cierto: una función puede ser continua en un punto a y sin embargo no existir $f'(a)$

Ejemplo

Consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leqslant 0 \\ x & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$



Derivabilidad y continuidad. Ejemplo

La función $f(x)$ es continua en 0 ya que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$$

Calculamos ahora $f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$:

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h}{h} = 2$$

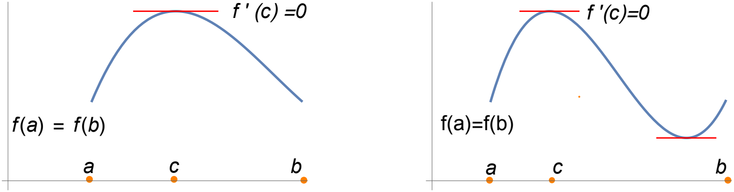
$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1$$

Como $2 \neq 1$, no existe $f'(0)$ y tendríamos

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Teorema de Rolle

Teorema Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Si $f(a) = f(b)$, entonces existe un punto $\boxed{c \in (a, b)}$ tal que $\boxed{f'(c) = 0}$

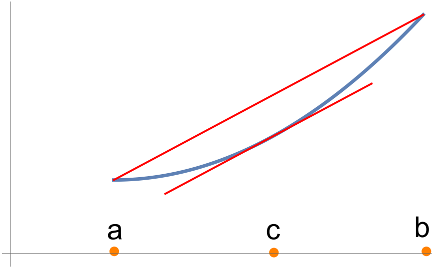


Observación Vemos en la gráfica que la recta tangente en el punto $(c, f(c))$ es horizontal (derivada 0)

Teorema del valor medio

Teorema Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Entonces existe un punto $c \in D$ tal que

$$\boxed{f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$$



Regla de L'Hopital

Teorema Sean $f, g : D \to \mathbb{R}$ dos funciones derivables en un intervalo que contiene al punto a, salvo quizás en el punto a, siendo además $g(x)$, $g'(x) \neq 0$ en todos los puntos de dicho intervalo. Supongamos que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \quad \text{o} \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\frac{\infty}{\infty}$$

Si existe $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces existe $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ y además

$$\boxed{\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

Regla de L'Hopital. Ejemplos

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{1-x}$

Tenemos que $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{1-x} = \frac{0}{0}$. Derivando numerador y denominador:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{-1} = \frac{1}{-1} = -1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{1-x} = -1$$

$\lim\limits_{x\to \infty} \frac{e^x}{x^4+7}$

Tenemos que $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{e^x}{x^4+7} = \frac{\infty}{\infty}$. Derivando numerador y denominador:

$$\lim_{x\to \infty} \frac{e^x}{4x^3} = \frac{\infty}{\infty}$$

y podemos seguir aplicando el criterio sucesivamente de modo que

$$\lim_{x\to \infty} \frac{e^x}{4x^3} = \lim_{x\to \infty} \frac{e^x}{12x^2} = \lim_{x\to \infty} \frac{e^x}{24x} = \lim_{x\to \infty} \frac{e^x}{24} = \infty$$

Tema 8

Funciones (III): Derivabilidad

Función creciente

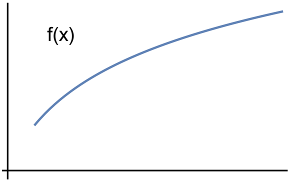
Definición Sea una función $f : D \to \mathbb{R}$. f es creciente en D si para cualesquiera $x, y \in D$:

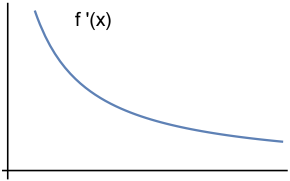
$$\text{si } x < y, \text{ entonces } f(x) \leqslant f(y)$$

Si la desigualdad es estricta, se dice que f es estrictamente creciente

Proposición Sea una función $f : D \to \mathbb{R}$ derivable en D.

$$f \text{ es creciente en } D \quad \Leftrightarrow \quad f'(x) \geqslant 0, \forall x \in D$$





Función decreciente

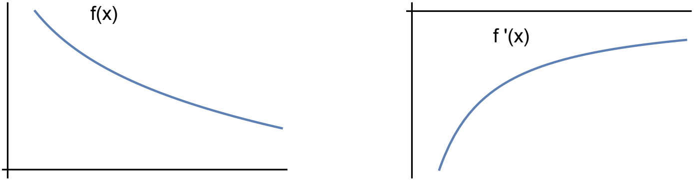
Definición Sea una función $f : D \to \mathbb{R}$. f es decreciente en D si para cualesquiera $x, y \in D$:

$$\text{si } x < y, \text{ entonces } f(x) \geqslant f(y)$$

Si la desigualdad es estricta, se dice que f es estrictamente decreciente

Proposición Sea una función $f : D \to \mathbb{R}$ derivable en D.

$$f \text{ es decreciente en } D \quad \Leftrightarrow \quad f'(x) \leqslant 0, \forall x \in D$$



Máximos y mínimos de una función

Definición Sea una función $f : D \to \mathbb{R}$. f alcanza en un punto $a \in D$ un máximo local o relativo si existe un entorno de a, E_a, tal que $f(a) \geqslant f(x), \forall x \in E_a \cap D$

Definición Sea una función $f : D \to \mathbb{R}$. f alcanza en un punto $a \in D$ un mínimo local o relativo si existe un entorno de a, E_a, tal que $f(a) \leqslant f(x), \forall x \in E_a \cap D$

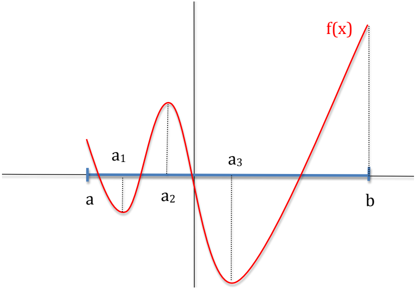
Definición Sea una función $f : D \to \mathbb{R}$. Un punto $a \in D$ es máximo global o absoluto de f en D si $f(a) \geqslant f(x), \forall x \in D$

Definición Sea una función $f : D \to \mathbb{R}$. Un punto $a \in D$ es mínimo global o absoluto de f en D si $f(a) \leqslant f(x), \forall x \in D$

Definición Sea una función $f : D \to \mathbb{R}$. Un punto $a \in D$ es un extremo relativo (absoluto) de f si es un máximo o mínimo relativo (absoluto) de f

Máximos y mínimos de una función. Ejemplo

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$



- a_2 máximo relativo
- a_1, a_3 mínimos relativos
- b máximo absoluto
- a_3 mínimo absoluto

Condición necesaria de extremo local

Proposición Sea una función $f : D \to \mathbb{R}$ derivable en $a \in D$. Si $f(x)$ alcanza un máximo o un mínimo relativo en a, entonces $\boxed{f'(a) = 0}$. Los puntos a en los que $f'(a) = 0$ se denominan $\boxed{\text{puntos críticos de } f}$

Observaciones

- La tangente a la gráfica de $f(x)$ en un punto crítico es paralela al eje x (es horizontal), tiene pendiente 0
- Para hallar los posibles extremos de una función habrá que resolver la ecuación $f'(x) = 0$

Ejemplo Posibles extremos de la función $x^3 - 2x^2 - 4x$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16+48}}{6} = \begin{cases} 2 \\ -\frac{2}{3} \end{cases}$$

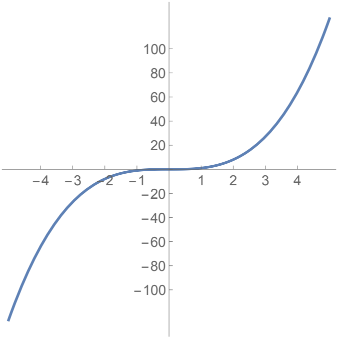
Luego los posibles extremos locales de $f(x)$ son

$$(2, f(2) = -8) \quad \text{y} \quad \left(-\frac{2}{3}, f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{40}{27}\right)$$

Condición necesaria de extremo local

Observación La condición necesaria de extremo local <u>no es suficiente</u>

Ejemplo La función $f(x) = x^3$ tiene derivada 0 ($f'(x) = 3x^2$) en $x = 0$, y f es estrictamente creciente en $x = 0$ por lo que no tiene extremo en dicho punto



Clasificación extremos locales

Para saber si un punto crítico es máximo o mínimo tenemos en cuenta lo siguiente:

- Si el punto $(a, f(a))$ es un máximo local de $f(x)$, debe existir un entorno de a, E_a, en el que la función $f(x)$ sea creciente a la izquierda de a y decreciente a su derecha. Por lo tanto debe ser:

$$\begin{cases} f'(x) > 0 & \text{para } x \in E_a \cap D \text{ y } x < a \\ f'(x) < 0 & \text{para } x \in E_a \cap D \text{ y } x > a \end{cases}$$

- Si el punto $(a, f(a))$ es un mínimo local de $f(x)$, debe existir un entorno de a, E_a, en el que la función $f(x)$ sea decreciente a la izquierda de a y creciente a su derecha. Por lo tanto debe ser:

$$\begin{cases} f'(x) < 0 & \text{para } x \in E_a \cap D \text{ y } x < a \\ f'(x) > 0 & \text{para } x \in E_a \cap D \text{ y } x > a \end{cases}$$

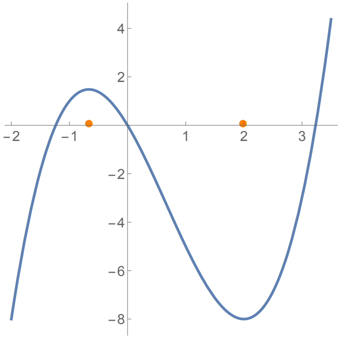
Clasificación de extremos locales. Ejemplo

Ejemplo En el ◂ ejemplo anterior, $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x$.

Observar que $f'(x) = (x + \frac{2}{3})(x - 2)$ verifica:

- $f'(x) > 0$ si $x \in \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$ (creciente)
- $f'(x) < 0$ si $x \in \left(-\frac{2}{3}, 2\right)$ (decreciente)
- $f'(x) > 0$ si $x \in (2, +\infty)$ (creciente)

Por lo tanto el punto $\boxed{(-\frac{2}{3}, \frac{40}{27})}$ es un máximo local y el punto $\boxed{(2, -8)}$ un mínimo local.



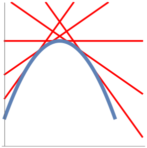
Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión

Definición Sea una función $f : D \to \mathbb{R}$. Sea $a \in D$ y $t(x)$ la recta tangente a $f(x)$ en el punto $(a, f(a))$

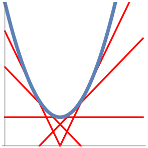
- $f(x)$ es cóncava en a si existe un entorno de a, E_a,tal que $t(x) \geqslant f(x)$ para todo $x \in E_a \cap D$

- $f(x)$ es convexa en a si existe un entorno de a, E_a, tal que $t(x) \leqslant f(x)$ para todo $x \in E_a \cap D$

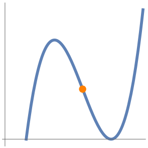
- $a \in D$ es un punto de inflexión de f si existe un entorno de a, E_a, tal que $t(x) \leqslant f(x)$ para algún $x \in E_a \cap D$ y $t(x) \geqslant f(x)$ para algún $x \in E_a \cap D$. En estos puntos la función pasa de cóncava a convexa o viceversa



Cóncava



Convexa



Punto de Inflexión

Tema 8

Funciones (III): Derivabilidad

Concavidad/convexidad y segunda derivada (I)

Proposición Sea una función $f : D \to \mathbb{R}$ que es derivable hasta al menos el segundo orden en un punto $a \in D$:

- Si $f(x)$ es cóncava en a, $f'(x)$ es decreciente en a, luego $\boxed{f''(a) \leqslant 0}$
- Si $f(x)$ es convexa en a, $f'(x)$ es creciente en a, luego $\boxed{f''(a) \geqslant 0}$
- Si $f(x)$ tiene un punto de inflexión en a, entonces $\boxed{f''(a) = 0}$

Concavidad/convexidad y segunda derivada (II)

Los enunciados recíprocos de las afirmaciones de la proposición anterior se formalizan como sigue:

Proposición Sea una función $f : D \to \mathbb{R}$ que es derivable hasta al menos el segundo orden en un punto $a \in D$.

- $f''(a) < 0$, entonces $f(x)$ es cóncava en a
- $f''(a) > 0$, entonces $f(x)$ es convexa en a
- $f''(a) = 0$ y $f'(x)$ no cambia de signo en un entorno de a, entonces a es un punto de inflexión

Observación Si f tiene derivadas de orden superior al segundo en a, la condición que determina el punto de inflexión es equivalente a que la primera derivada de f en a de orden superior al segundo no nula es de orden impar

Extremos relativos y segunda derivada. Condición suficiente

Proposición Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función real de variable real. Si f tiene derivada segunda continua en un extremo relativo $a \in D$, entonces

- $f''(a) > 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f \text{ tiene en a un mínimo} \\ \text{relativo estricto} \end{array} \right.$
- $f''(a) < 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f \text{ tiene en a un máximo} \\ \text{relativo estricto} \end{array} \right.$
- $f''(a) = 0$, y existen derivadas de orden superior en a, consideramos la primera distinta de 0, $f^{(n}(a) \neq 0$:
  - Si n es par, $f(x)$ tiene en a un punto de inflexión
  - Si n es impar, tiene un máximo relativo si $f^{(n}(a) < 0$ y un mínimo relativo si $f^{(n}(a) > 0$

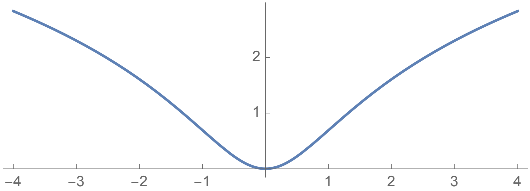
Extremos relativos. Ejemplos

Ejemplo Determinar los extremos relativos de $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0} \quad \text{Punto crítico}$$

$$f''(x) = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2} \Rightarrow f''(0) = 2 > 0$$

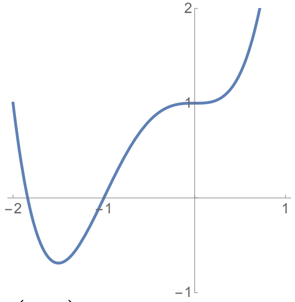
$\Rightarrow$ en $\boxed{x = 0}$ hay un mínimo relativo estricto



Extremos relativos. Ejemplos

Ejemplo Determinar los extremos relativos de

$$f(x) = x^4 + 2x^3 + 1$$



$$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 = 4x^2\left(x + \frac{3}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 0},\ \boxed{x = -\tfrac{3}{2}}$$

Puntos críticos

$$\Rightarrow f''(x) = 12x^2 + 12x, \quad f''(0) = 0, \quad f''\left(-\frac{3}{2}\right) = 9 > 0$$

En $\boxed{x = \frac{3}{2}}$ hay un mínimo relativo estricto y en $x = 0$ no se sabe. Sin embargo,

$$f'''(x) = 24x + 12 \Rightarrow f'''(0) = 12 > 0$$

luego $\boxed{x = 0}$ es punto de inflexión

Extremos relativos. Ejemplos

Ejemplo Determinar los extremos relativos de

$$f(x) = \begin{cases} -x(x+1) & \text{si } x \leqslant 0 \\ e^x - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Observar que f es continua en $\mathbb{R}$ porque

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 0 = \lim_{x \to 0^-} f(x)$$

Como

$$f'(x) = \begin{cases} -2x - 1 & \text{si } x < 0 \\ e^x & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad f$$

no es derivable en $x = 0$ porque

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = -1 \neq \lim_{x \to 0^-} f'(x) = 1$$

El único punto de derivada 0 es $x = -\frac{1}{2}$

Extremos relativos. Ejemplos

Dado que:

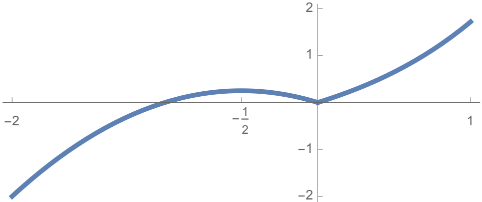
$$f''(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 0 \\ e^x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

tenemos $f''\left(-\frac{1}{2}\right) = -2 < 0$ obtenemos que $\boxed{x = -\frac{1}{2}}$ es un máximo relativo estricto.

Para estudiar qué pasa en $x = 0$, observamos que en un entorno de 0, $(-\epsilon, \epsilon)$:

$$f(0) < f(\epsilon), \qquad f(-\epsilon) < f(0), \qquad (\epsilon > 0)$$

por lo que en $\boxed{x = 0}$ hay un mínimo relativo estricto



Tema 8

Funciones (III): Derivabilidad

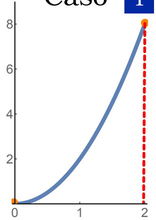
Extremos absolutos

Teorema de Weierstrass Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua definida en el intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces $f(x)$ alcanza un máximo y un mínimo absolutos en $[a, b]$.

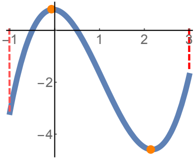
Observación Dichos puntos pueden estar:

1. en los extremos del intervalo
2. en puntos del interior del intervalo en los que la función es derivable (y se anula)
3. en puntos del interior del intervalo en los que la función no es derivable

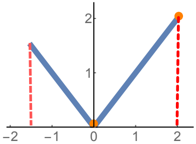
Caso 1



Caso 2



Casos 1, 3



Cálculo de extremos absolutos

Para hallar los máximos y mínimos absolutos de una función continua f en un intervalo cerrado $[a, b]$:

1. Se hallan los puntos de $[a, b]$ en los que f no es derivable
2. Se hallan los puntos donde $f'(x)$ se anula en (a, b)
3. Se hallan los valores de $f(x)$ en todos los puntos hallados y en los extremos del intervalo
4. El valor máximo corresponde al máximo absoluto y el valor mínimo al mínimo absoluto

Extremos absolutos. Ejemplo

Ejemplo Determinar los extremos absolutos en $\left[-\frac{1}{2}, 3\right]$ de

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x + 1 & \text{si } x \leqslant 2 \\ -2x + 7 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Observar que f es continua en $\left[-\frac{1}{2}, 3\right]$ porque

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 3 = \lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2)$$

Como

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 3 & \text{si } x < 2 \\ -2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

f no es derivable en $x = 2$ porque

$$\lim_{x\to 2^+} f'(x) = -2 \neq \lim_{x\to 2^-} f'(x) = 9$$

El único punto donde f' se anula en $\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$ es $x = 1$

Extremos absolutos. Ejemplo

De modo que los candidatos a extremos son:

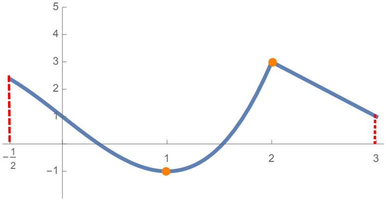
$\boxed{x = -\frac{1}{2}}$ (extremo intervalo) $\boxed{x = 3}$ (extremo intervalo)

$\boxed{x = 2}$ (f no derivable) $\boxed{x = 1}$ (f' se anula)

Hallando los valores de f:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{19}{8}, \qquad f(3) = 1, \qquad f(2) = 3, \qquad f(1) = -1$$

se concluye que $\boxed{x = 1}$ es el mínimo absoluto y $\boxed{x = 2}$ es el máximo absoluto



Tema 9

Funciones (IV): Representación gráfica

Tema 9

Funciones (IV): Representación gráfica

Representación gráfica de funciones

Ejemplos

Representación gráfica de funciones

Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función real de variable real. Para representar f hay que hallar

Dominio y continuidad

Es importante destacar los puntos en los que la función no es continua pero existe al menos uno de los límites laterales

Simetrías

Periodicidad

Cortes con los ejes

Asíntotas y ramas parabólicas

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos

Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión

Representación gráfica de funciones

Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función real de variable real. Para representar f hay que hallar

Dominio y continuidad

Simetrías

Hay que estudiar si la función es par: $f(x) = f(-x)$ -simétrica respecto del eje Y- o impar: $f(x) = -f(-x)$ -simétrica respecto del origen de coordenadas-

Periodicidad

Cortes con los ejes

Asíntotas y ramas parabólicas

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos

Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión

Representación gráfica de funciones

Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función real de variable real. Para representar f hay que hallar

Dominio y continuidad

Simetrías

Periodicidad

f es periódica si $\exists\, k \in \mathbb{R}$ tal que $f(x+k) = f(x)\ \forall x \in D$ -e.g., funciones trigonométricas-

Cortes con los ejes

Asíntotas y ramas parabólicas

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos

Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión

Representación gráfica de funciones

Cortes con los ejes

Para hallar los puntos de corte con el eje x se resuelve la ecuación $\boxed{f(x) = 0}$

Para hallar el punto de corte con el eje y se halla $\boxed{f(0)}$ si $0 \in D$

Observación Puede haber uno, ninguno, varios o infinitos puntos de corte con el eje X

Puede haber, como mucho, un punto de corte con el eje Y

Representación gráfica de funciones

Asíntotas y ramas parabólicas

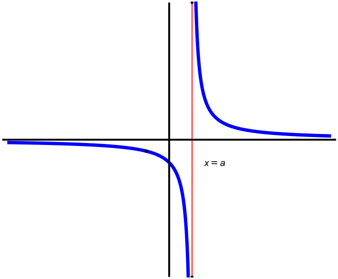
$x = a$ es asíntota vertical por la izquierda de f si

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty \ \text{ o } \ \lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$$

$x = a$ es asíntota vertical por la derecha de f si

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty \ \text{ o } \ \lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$$

Observación Las asíntotas verticales se buscan en los puntos de discontinuidad en los que existe al menos uno de los límites laterales



Representación gráfica de funciones

Asíntotas y ramas parabólicas

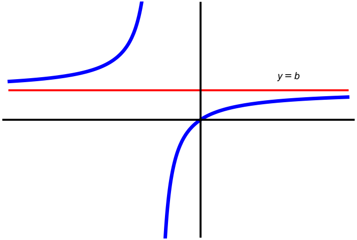
$y = b$ es asíntota horizontal de f cuando

$$x \to -\infty, \text{ si } \lim_{x \to -\infty} f(x) = b$$

$y = b$ es asíntota horizontal de f cuando

$$x \to +\infty, \text{ si } \lim_{x \to +\infty} f(x) = b$$

Observación Una función puede tener, como mucho, una asíntota horizontal en $x \to \infty$ y otra en $x \to -\infty$



Representación gráfica de funciones

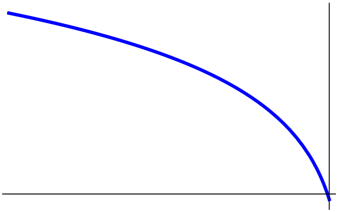
Asíntotas y ramas parabólicas

Cuando $x \to -\infty$

Si f satisface:

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ o $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$

entonces f tiene una rama parabólica de eje horizontal o eje OX



Representación gráfica de funciones

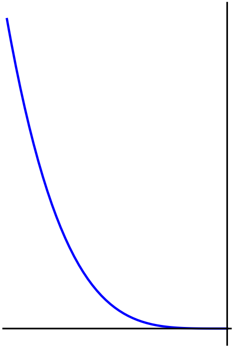
Asíntotas y ramas parabólicas

Cuando $x \to -\infty$

Si f satisface

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ o $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$ o $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$

entonces f tiene una rama parabólica de eje vertical o de eje OY



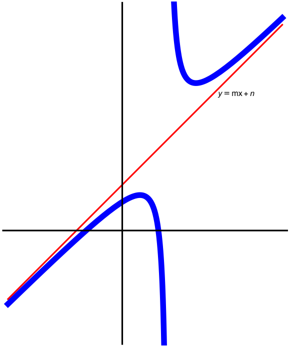
Representación gráfica de funciones

Asíntotas y ramas parabólicas

Cuando $x \to -\infty$

Si f verifica

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ o $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m \quad (m \neq 0)$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - mx) = n$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - (mx+n)) = 0$



entonces $y = mx + n$ es asíntota oblicua de f

Representación gráfica de funciones

Asíntotas y ramas parabólicas

Análogamente cuando $x \to +\infty$

Observación Si hay asíntota horizontal u oblicua en una dirección ($x \to -\infty$ o $x \to +\infty$), no puede haber rama parabólica en dicha dirección

Representación gráfica de funciones

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos

- Si f es derivable
- f es estrictamente creciente en los intervalos I en los que $f'(x) > 0 \quad \forall x \in I$
- f es estrictamente decreciente en los intervalos I en los que $f'(x) < 0 \quad \forall x \in I$
- Los puntos críticos de f, esto es, los puntos en los que $f'(x) = 0$, pueden ser máximos o mínimos relativos o puntos de inflexión

Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión

- Si f es dos veces derivable
- f es estrictamente convexa en los intervalos I en los que $f''(x) > 0 \quad \forall\, x \in I$
- f es estrictamente cóncava en los intervalos I en los que $f''(x) < 0 \quad \forall\, x \in I$
- Los puntos en los que se anula la derivada segunda y la función pasa de cóncava a convexa o viceversa son puntos de inflexión

Tema 9

Funciones (IV): Representación gráfica

Representación gráfica de funciones

Ejemplos

Ejemplo. Gráfica de $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$ (I)

- Dom(f)$= \mathbb{R} - \{-1, 1\}$
- f es continua en todo punto de su dominio
- f es par -simétrica respecto del eje Y-
- f no es periódica
- Punto de corte con los ejes $(0, 0)$
- Crecimiento y decrecimiento

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$

En la siguiente tabla se estudia el signo de $f'(x)$ en los intervalos correspondientes

	$(-\infty, -1)$	(-1,0)	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	+	-	-
$f(x)$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\downarrow$	$\downarrow$

Ejemplo. Gráfica de $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$ (II)

- - f es estrictamente creciente en $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ y estrictamente decreciente en $(0, 1) \cup (1, +\infty)$
  - En $x = 0$ hay un máximo relativo

- Concavidad y convexidad

$$f''(x) = \frac{6x^2 + 2}{(x^2 - 1)^3}$$

$$f''(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in \mathrm{Dom}(f)$$

En la siguiente tabla se estudia el signo de $f''(x)$ en los intervalos correspondientes

	$(-\infty, -1)$	(-1,1)	$(1, +\infty)$
$f''(x)$	+	-	+
$f(x)$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

Ejemplo. Gráfica de $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$ (III)

- - f es estrictamente convexa en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y estrictamente cóncava en $(-1, 1)$
  - No hay puntos de inflexión

- Asíntotas verticales

x=-1 : $\lim_{x \to -1^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$

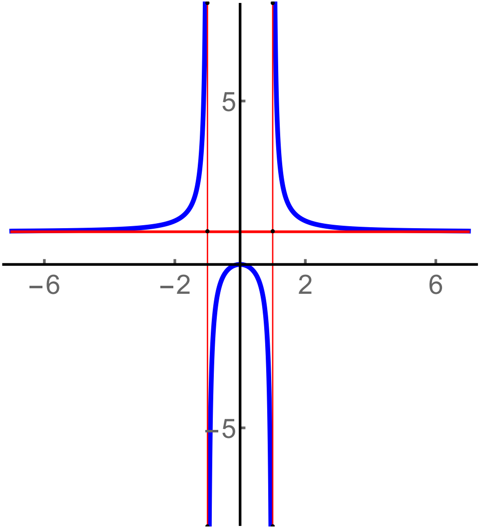
x=1 : $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

- Asíntotas horizontales

y=1 si $x \to -\infty$: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$

y=1 si $x \to +\infty$: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$

Ejemplo. Gráfica de $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$ (IV)



Ejemplo. Gráfica de $f(x) = e^{-x^2+x}$ (I)

- Dom(f)$= \mathbb{R}$
- f es continua en todo punto de su dominio
- f no es par ni impar
- f no es periódica
- Punto de corte con los ejes $(0, 1)$
- Crecimiento y decrecimiento

$$f'(x) = (1-2x)e^{-x^2+x}$$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}$$

En la siguiente tabla se estudia el signo de $f'(x)$ en los intervalos correspondientes

	$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$
$f'(x)$	+	-
$f(x)$	$\uparrow$	$\downarrow$

Ejemplo. Gráfica de $f(x) = e^{-x^2+x}$ (II)

- - f es estrictamente creciente en $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ y estrictamente decreciente en $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$
  - En $\boxed{x = \frac{1}{2}}$ hay un máximo relativo

- Concavidad y convexidad

$$f''(x) = (4x^2 - 4x - 1)e^{-x^2+x}$$

$$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \text{ o } x = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$$

En la siguiente tabla se estudia el signo de $f''(x)$ en los intervalos correspondientes

	$\left(-\infty, \frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$
$f''(x)$	+	-	+
$f(x)$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

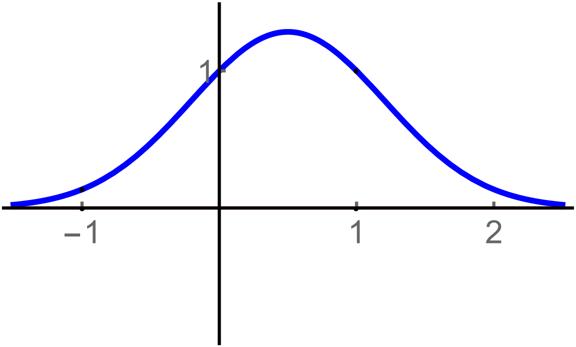
Ejemplo. Gráfica de $f(x) = e^{-x^2+x}$ (III)

- - f es estrictamente convexa en $\left(-\infty, \frac{1-\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$ y estrictamente cóncava en $\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$
  - En $x=\frac{1-\sqrt{2}}{2}$ y en $x=\frac{1-\sqrt{2}}{2}$ hay puntos de inflexión
- Asíntotas verticales: No hay
- Asíntotas horizontales

$$y=0 \quad \text{si } x \to -\infty : \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

$$y=0 \quad \text{si } x \to +\infty : \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

Ejemplo. Gráfica de $f(x) = e^{-x^2+x}$ (IV)



Ejemplo. Gráfica de $f(x) = \ln \frac{x+1}{x}$ (I)

- Dom(f)$= (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ (valores tales que $\frac{x+1}{x} > 0$)
- f es continua en todo punto de su dominio
- f no es par ni impar
- f no es periódica
- Punto de corte con los ejes: No hay
- Crecimiento y decrecimiento

$$f'(x) = -\frac{1}{x(x+1)}$$

$$f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in \text{Dom}(f)$$

En la siguiente tabla se estudia el signo de $f'(x)$ en los intervalos correspondientes

	$(-\infty, -1)$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	-	-
$f(x)$	$\downarrow$	$\downarrow$

Ejemplo. Gráfica de $f(x) = \ln \frac{x+1}{x}$ (II)

- - f es estrictamente decreciente en todo su dominio
  - No hay extremos

- Concavidad y convexidad

$$f''(x) = \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$$

$$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{2} \notin \ \mathrm{Dom}(f)$$

En la siguiente tabla se estudia el signo de $f''(x)$ en los intervalos correspondientes

	$(-\infty, -1)$	$(0, +\infty)$
$f''(x)$	-	+
$f(x)$	$\cap$	$\cup$

Ejemplo. Gráfica de $f(x) = \ln \frac{x+1}{x}$ (III)

- - f es estrictamente convexa en $(0, +\infty)$ y estrictamente cóncava en $(-\infty, -1)$
  - No hay puntos de inflexión

- Asíntotas verticales

$$\boxed{\text{x=-1}} : \qquad \lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$$

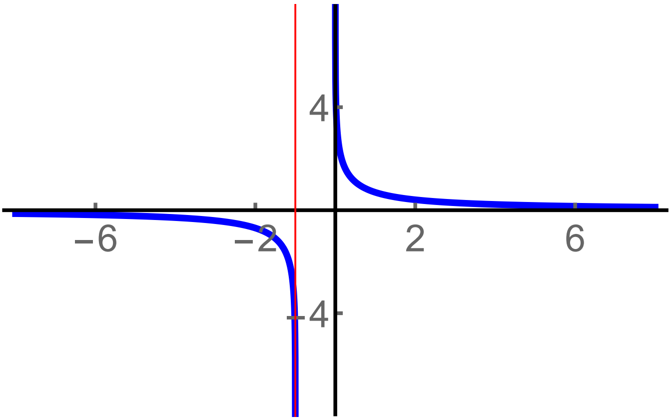
$$\boxed{\text{x=0}} : \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$$

- Asíntotas horizontales

$$\boxed{\text{y=0}} \quad \text{si } x \to -\infty : \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$$

$$\boxed{\text{y=0}} \quad \text{si } x \to +\infty : \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$$

Ejemplo. Gráfica de $f(x) = \ln \frac{x+1}{x}$ (IV)



Tema 10

Elementos básicos de integración

Integral indefinida

Métodos de integración

Funciones integrables Riemann. La integral definida

Integrales impropias

Aplicación: la función Gamma

Elementos básicos de integración

Concepto de función primitiva

Definición Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función real de variable real definida en un conjunto $D \subset \mathbb{R}$. Se llama función primitiva de f en D a otra función $F : D \to \mathbb{R}$, tal que

$$\boxed{F'(x) = f(x)}$$

Ejemplos

- Una primitiva de $f(x) = \frac{1}{x}$ es $F(x) = \ln x$ porque $F'(x) = \frac{1}{x} = f(x)$
- Una primitiva de $f(x) = \cos x$ es $F(x) = \operatorname{sen} x$ porque $F'(x) = \cos x = f(x)$.
  Otra primitiva sería $G(x) = \operatorname{sen} x + C$, donde C es una constante, dado que $G'(x) = f(x)$ independientemente del valor de C

Integral indefinida

Propiedad Si $F(x)$ y $G(x)$ son primitivas de una misma función $f(x)$, entonces difieren en una constante, esto es, $G(x) = F(x) + C$, con C constante

Definición Al conjunto de primitivas de una función $f(x)$ lo denotamos como

$$\boxed{\int f(x)\,dx}$$

y lo denominamos integral (indefinida) de $f(x)$

Así, si $F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$,

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + C}$$

siendo C cualquier número real

Propiedades e integrales inmediatas

Sean $f, g : D \to \mathbb{R}$ dos funciones con primitiva en $D \subset \mathbb{R}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces:

- $\displaystyle\int (f(x) + g(x))\ dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$
- $\displaystyle\int \lambda f(x)\, dx = \lambda \int f(x)\, dx$

Una integral inmediata se deduce directamente de las reglas de derivación. Destacamos las siguientes:

$$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \ (n \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x\, dx = e^x + C \qquad \int a^x\, dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C \ \ (a > 0)$$

$$\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + C$$

Elementos básicos de integración

Integral indefinida

Métodos de integración

Integración por sustitución o cambio de variable

Integración por partes

Funciones integrables Riemann. La integral definida

Integrales impropias

Aplicación: la función Gamma

Integración por sustitución o cambio de variable

Consiste en hacer un cambio de variable que transforme la integral en otra que resulte conocida o más sencilla

Proposición Sea $x = \varphi(t)$ una función derivable respecto de t, de modo que $dx = \varphi'(t)\,dt$. Entonces:

$$\boxed{\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt}$$

Integración por sustitución. Ejemplos

- $\displaystyle\int (2x+3)^3\,dx$

$$\left\{\begin{array}{l} t = 2x+3 \\ dt = 2\,dx \end{array}\right\} \Rightarrow \int (2x+3)^3\,dx = \int t^3\,\frac{dt}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\int t^3\,dt = \frac{1}{2}\frac{t^4}{4} = \frac{t^4}{8} + C$$

y deshaciendo el cambio

$$\int (2x+3)^3\,dx = \frac{(2x+3)^4}{8} + C$$

- $\displaystyle\int x \operatorname{sen} x^2\,dx$

$$\left\{\begin{array}{l} t = x^2 \\ dt = 2x\,dx \end{array}\right\} \Rightarrow \int x \operatorname{sen} x^2\,dx = \int \operatorname{sen} t\,\frac{dt}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}(-\cos t) + C = \frac{-\cos x^2}{2} + C$$

Integración por sustitución. Ejemplos

- $$\int \sqrt{2x+7}\, dx$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t^2 = 2x+7 \\ 2t\, dt = 2\, dx \end{array} \right\} \Rightarrow \int \sqrt{2x+7}\, dx = \int t\, t\, dt =$$

$$= \int t^2\, dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{(2x+7)\sqrt{2x+7}}{3} + C$$

- $$\int \frac{2x+1}{x^2+x+17}\, dx$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t = x^2+x+17 \\ dt = (2x+1)\, dx \end{array} \right\} \Rightarrow \int \frac{2x+1}{x^2+x+17}\, dx = \int \frac{dt}{t} =$$

$$= \ln t = \ln(x^2+x+17) + C$$

Observación Los resultados pueden comprobarse calculando las derivadas de las soluciones

Aplicación del método de integración por sustitución

En la tabla de integrales inmediatas tenemos:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

Haciendo el cambio $\boxed{x = \varphi(t)}$, $\boxed{dx = \varphi'(t)\,dt}$:

$$\int \frac{1}{\varphi(t)}\varphi'(t)\,dt = \ln|\varphi(t)| + C$$

y en la notación habitual, con la variable x y llamando a la función f:

$$\int \frac{1}{f(x)}f'(x)\,dx = \boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C}$$

Si repetimos este proceso en cada una de las integrales inmediatas, obtenemos la tabla que aparece en la siguiente página

Aplicación del método de integración por sustitución

$$\int \varphi(x)^n \varphi'(x)\, dx = \frac{\varphi(x)^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\, dx = \ln|\varphi(x)| + C$$

$$\int \varphi'(x) e^{\varphi(x)}\, dx = e^{\varphi(x)} + C$$

$$\int \varphi'(x) a^{\varphi(x)}\, dx = \frac{1}{\ln a} a^{\varphi(x)} + C \quad (a > 0)$$

$$\int \varphi'(x) \operatorname{sen}(\varphi(x))\, dx = -\cos(\varphi(x)) + C$$

$$\int \varphi'(x) \cos \varphi(x)\, dx = \operatorname{sen}(\varphi(x)) + C$$

Integración por partes

Este método permite el cálculo de la integral de productos de funciones, mediante la siguiente fórmula:

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

Observación Dado que tenemos

$$\big(u(x)\,v(x)\,\big)' = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x),$$

entonces

$$u(x)\,v'(x) = (u(x)\,v(x))' - u'(x)\,v(x) \;\Rightarrow\; \boxed{u\,dv = d(u\,v) - v\,du}$$

E integrando en ambas partes:

$$\int u\,dv = \int \left[d(uv) - v\,du\right] = uv - \int v\,du$$

Integración por partes. Ejemplos

- $\int \ln x \, dx = \int u \, dv$

  Consideramos $u = \ln x$ y $dv = dx$ de modo que:

  $$\int \ln x \, dx = uv - \int v \, du = \ln x \cdot x - \int x \frac{1}{x} \, dx = \ln x \cdot x - x + C$$

- $\int x^3 \ln x \, dx = \int u \, dv$ $\qquad \left\{ \begin{array}{lcl} u = \ln x & \Rightarrow & du = \frac{1}{x} \, dx \\ dv = x^3 \, dx & \Rightarrow & v = \frac{x^4}{4} \end{array} \right\}$

  $$\Rightarrow \int x^3 \ln x \, dx = uv - \int v \, du = \ln x \; \frac{x^4}{4} - \int \frac{x^4}{4} \, \frac{1}{x} \, dx$$

  $$= \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{4} \int x^3 \, dx = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{4} \, \frac{x^4}{4} + C$$

  $$= \frac{x^4}{4} \left(\ln x - \frac{1}{4} \right) + C$$

Integración por partes. Ejemplos

- $\displaystyle\int x\,e^x\,dx = \boxed{\int u\,dv}$ $\quad\left\{\begin{array}{lcl} u = x & \Rightarrow & du = dx \\ dv = e^x\,dx & \Rightarrow & v = e^x \end{array}\right\}$

$$\Rightarrow \int xe^x\,dx = \boxed{uv - \int v\,du} = xe^x - \int e^x\,dx$$

$$= xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C$$

- $\displaystyle\int x\cos x\,dx = \boxed{\int u\,dv}$ $\left\{\begin{array}{lcl} u = x & \Rightarrow & du = dx \\ dv = \cos x\,dx & \Rightarrow & v = \operatorname{sen} x \end{array}\right\}$

$$\Rightarrow \int x\cos x\,dx = \boxed{uv - \int v\,du} = x\operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\,dx$$

$$= x\operatorname{sen} x - (-\cos x) + C = x\operatorname{sen} x + \cos x + C$$

Tema 10

Elementos básicos de integración

Integral indefinida

Métodos de integración

Funciones integrables Riemann. La integral definida
- Definición de integral definida
- Cálculo de integrales definidas

Integrales impropias

Aplicación: la función Gamma

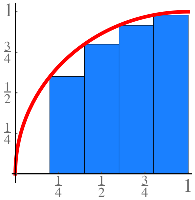
Suma inferior

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida y continua en todo el intervalo $[a, b]$. Consideramos una partición del intervalo, esto es, $P = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b\}$

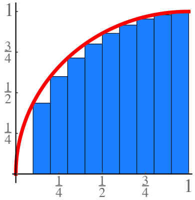
Definición Llamamos suma inferior de f asociada a la partición P_n a

$$s(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$$

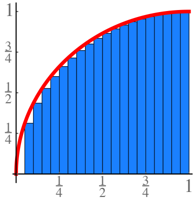
donde $m_i = \min\{f(x), x \in [x_{i-1}, x_i]\}$



$n = 5$



$n = 10$



$n = 20$

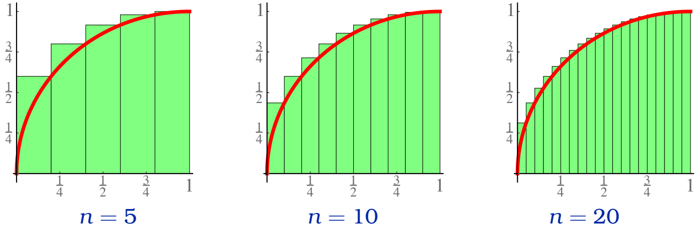
Suma superior

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida y continua en todo el intervalo $[a, b]$. Consideramos una partición del intervalo, esto es, $P_n = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b\}$

Definición Llamamos suma superior de f asociada a la partición P a

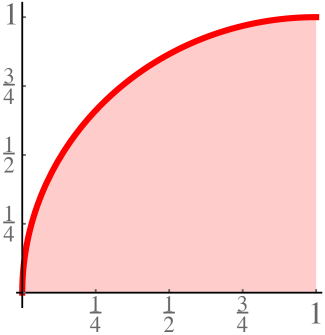
$$S(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

donde $M_i = \max\{f(x), x \in [x_{i-1}, x_i]\}$



Suma inferior/superior. Ejemplo

Sea $f(x) = \sqrt{1-(x-1)^2}$. El área sombreada es $\boxed{\frac{\pi}{4}}$ (¿Por qué?). Calcularemos las sumas inferiores y superiores asociadas a particiones con puntos equiespaciados



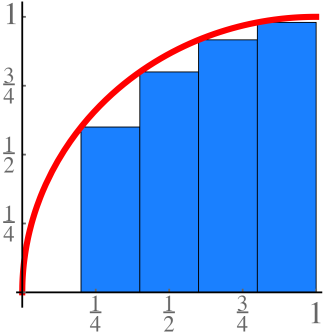
$f(x) = \sqrt{1-(x-1)^2}$

$$\text{Área} = \frac{\pi}{4} \approx 0.785398$$

P_n	$s(f, P_n)$	$S(f, P_n)$
5	0.659262	0.859262
10	0.726129	0.826129
20	0.757116	0.807116
100	0.780104	0.790104
1000	0.784889	0.785889

Suma inferior/superior. Ejemplo

Sea $f(x) = \sqrt{1-(x-1)^2}$. El área sombreada es $\boxed{\frac{\pi}{4}}$ (¿Por qué?). Calcularemos las sumas inferiores y superiores asociadas a particiones con puntos equiespaciados



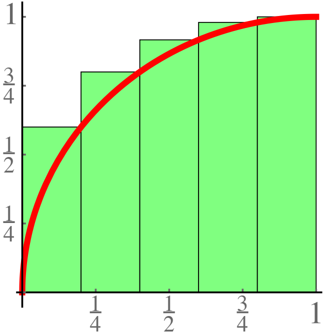
$$\text{Área} = \frac{\pi}{4} \approx 0.785398$$

P_n	$s(f, P_n)$	$S(f, P_n)$
5	0.659262	0.859262
10	0.726129	0.826129
20	0.757116	0.807116
100	0.780104	0.790104
1000	0.784889	0.785889

$$s(f, P_5) = 0.659262$$

Suma inferior/superior. Ejemplo

Sea $f(x) = \sqrt{1-(x-1)^2}$. El área sombreada es $\frac{\pi}{4}$ (¿Por qué?). Calcularemos las sumas inferiores y superiores asociadas a particiones con puntos equiespaciados



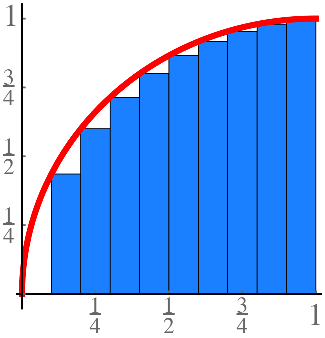
$S(f, P_5) = 0.859262$

$$\text{Área} = \frac{\pi}{4} \approx 0.785398$$

P_n	$s(f, P_n)$	$S(f, P_n)$
5	0.659262	0.859262
10	0.726129	0.826129
20	0.757116	0.807116
100	0.780104	0.790104
1000	0.784889	0.785889

Suma inferior/superior. Ejemplo

Sea $f(x) = \sqrt{1-(x-1)^2}$. El área sombreada es $\frac{\pi}{4}$ (¿Por qué?). Calcularemos las sumas inferiores y superiores asociadas a particiones con puntos equiespaciados



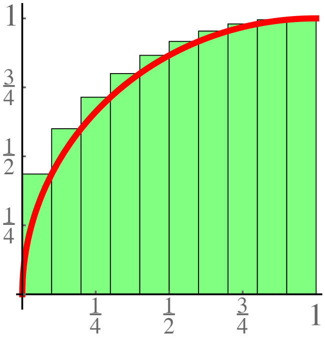
$s(f, P_{10}) = 0.72613$

$$\text{Área} = \frac{\pi}{4} \approx 0.785398$$

P_n	$s(f, P_n)$	$S(f, P_n)$
5	0.659262	0.859262
10	0.726129	0.826129
20	0.757116	0.807116
100	0.780104	0.790104
1000	0.784889	0.785889

Suma inferior/superior. Ejemplo

Sea $f(x) = \sqrt{1-(x-1)^2}$. El área sombreada es $\frac{\pi}{4}$ (¿Por qué?). Calcularemos las sumas inferiores y superiores asociadas a particiones con puntos equiespaciados



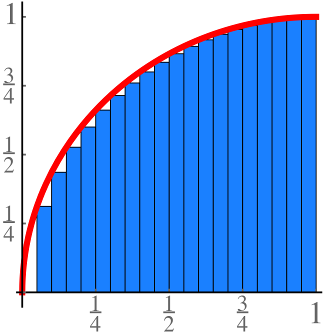
$$S(f, P_{10}) = 0.859262$$

$$\text{Área} = \frac{\pi}{4} \approx 0.785398$$

P_n	$s(f, P_n)$	$S(f, P_n)$
5	0.659262	0.859262
10	0.726129	0.826129
20	0.757116	0.807116
100	0.780104	0.790104
1000	0.784889	0.785889

Suma inferior/superior. Ejemplo

Sea $f(x) = \sqrt{1-(x-1)^2}$. El área sombreada es $\boxed{\frac{\pi}{4}}$ (¿Por qué?). Calcularemos las sumas inferiores y superiores asociadas a particiones con puntos equiespaciados



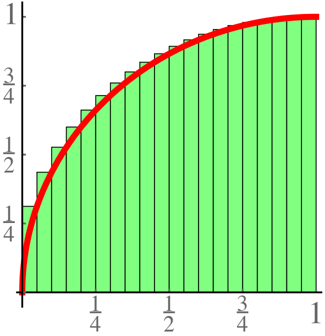
$$\text{Área} = \frac{\pi}{4} \approx 0.785398$$

P_n	$s(f, P_n)$	$S(f, P_n)$
5	0.659262	0.859262
10	0.726129	0.826129
20	0.757116	0.807116
100	0.780104	0.790104
1000	0.784889	0.785889

$$s(f, P_{20}) = 0.757116$$

Suma inferior/superior. Ejemplo

Sea $f(x) = \sqrt{1-(x-1)^2}$. El área sombreada es $\boxed{\frac{\pi}{4}}$ (¿Por qué?). Calcularemos las sumas inferiores y superiores asociadas a particiones con puntos equiespaciados



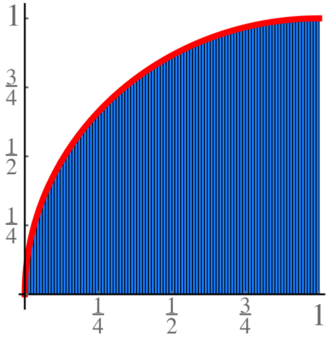
$S(f, P_{20}) = 0.807116$

$$\text{Área} = \frac{\pi}{4} \approx 0.785398$$

P_n	$s(f, P_n)$	$S(f, P_n)$
5	0.659262	0.859262
10	0.726129	0.826129
20	0.757116	0.807116
100	0.780104	0.790104
1000	0.784889	0.785889

Suma inferior/superior. Ejemplo

Sea $f(x) = \sqrt{1-(x-1)^2}$. El área sombreada es $\boxed{\frac{\pi}{4}}$ (¿Por qué?). Calcularemos las sumas inferiores y superiores asociadas a particiones con puntos equiespaciados



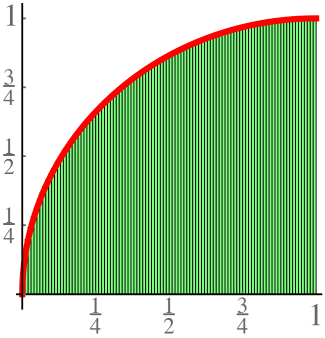
$$\text{Área} = \frac{\pi}{4} \approx 0.785398$$

P_n	$s(f, P_n)$	$S(f, P_n)$
5	0.659262	0.859262
10	0.726129	0.826129
20	0.757116	0.807116
100	0.780104	0.790104
1000	0.784889	0.785889

$$s(f, P_{100}) = 0.780104$$

Suma inferior/superior. Ejemplo

Sea $f(x) = \sqrt{1-(x-1)^2}$. El área sombreada es $\boxed{\frac{\pi}{4}}$ (¿Por qué?). Calcularemos las sumas inferiores y superiores asociadas a particiones con puntos equiespaciados



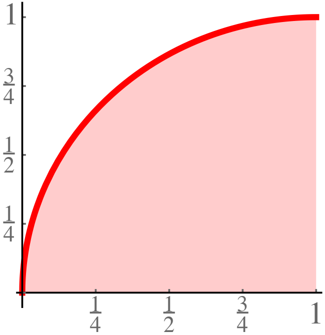
$$\text{Área} = \frac{\pi}{4} \approx 0.785398$$

P_n	$s(f,P_n)$	$S(f,P_n)$
5	0.659262	0.859262
10	0.726129	0.826129
20	0.757116	0.807116
100	0.780104	0.790104
1000	0.784889	0.785889

$$S(f, P_{100}) = 0.790104$$

Suma inferior/superior. Ejemplo

Sea $f(x) = \sqrt{1-(x-1)^2}$. El área sombreada es $\frac{\pi}{4}$ (¿Por qué?). Calcularemos las sumas inferiores y superiores asociadas a particiones con puntos equiespaciados



$f(x) = \sqrt{1-(x-1)^2}$

$$\text{Área} = \frac{\pi}{4} \approx 0.785398$$

P_n	$s(f, P_n)$	$S(f, P_n)$
5	0.659262	0.859262
10	0.726129	0.826129
20	0.757116	0.807116
100	0.780104	0.790104
1000	0.784889	0.785889

Funciones integrables Riemann. La integral definida

Observación En el ejemplo anterior se observa:

$$s(f, P_n) \leqslant \text{Área} \leqslant S(f, P_n)$$

De hecho, se puede demostrar que si f es continua y acotada el límite de ambas sumas cuando $n \to \infty$ coincide. Esto permite introducir la integral definida

Teorema Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua y acotada en $[a, b]$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} s(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} S(f, P_n)$$

Decimos entonces que f es integrable-Riemann (o simplemente integrable) en $[a, b]$. Ese valor lo denominamos integral de f en $[a, b]$, y se denota por

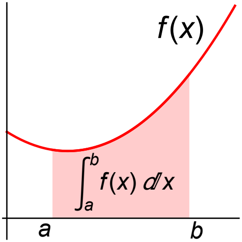
$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx}$$

Cálculo de integrales definidas

Regla de Barrow Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada en $[a, b]$. Si f es continua en $[a, b]$ y $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función primitiva cualquiera de $f(x)$ en $[a, b]$, entonces

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)}$$

Interpretación geométrica



Integral definida. Ejemplos

- $\displaystyle\int_{-1}^{1}(x^3-3x^2+2x-1)\,dx$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1}(x^3-3x^2+2x-1)\,dx = \boxed{\Big[F(x)\Big]_{-1}^{1}}$$

$$= \left[\frac{x^4}{4}-3\frac{x^3}{3}+2\frac{x^2}{2}-x\right]_{-1}^{1}$$

$$= \left(\frac{1}{4}-1+1-1\right)-\left(\frac{1}{4}+1+1+1\right) = \boxed{-4}$$

- $\displaystyle\int_{0}^{1} e^x\,dx$

$$\Rightarrow \int_{0}^{1} e^x\,dx = \boxed{\Big[F(x)\Big]_{0}^{1}} = \Big[e^x\Big]_{0}^{1} = e-e^0 = \boxed{e-1}$$

Integral definida. Ejemplos

- $\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\,dx$ $\quad \left\{ \begin{array}{l} t = x^2+9 \\ dt = 2x\,dx \end{array} \right\}$

$$\Rightarrow \int x\sqrt{x^2+9}\,dx = \int \sqrt{t}\,\frac{dt}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{\sqrt{(x^2+9)^3}}{3} + C$$

Así:

$$\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\,dx = \boxed{\Big[F(x)\Big]_0^4} = \left[\frac{\sqrt{(x^2+9)^3}}{3}\right]_0^4$$

$$= \frac{25\sqrt{25}}{3} - \frac{9\sqrt{9}}{3} = \boxed{\frac{98}{3}}$$

Tema 10

Elementos básicos de integración

Integral indefinida

Métodos de integración

Funciones integrables Riemann. La integral definida

Integrales impropias
- Integrales impropias de primera especie
- Integrales impropias de segunda especie

Aplicación: la función Gamma

Integrales impropias de primera especie

Sea $f : D \to \mathbb{R}$ con $D \subset \mathbb{R}$ una función integrable en cada intervalo $[a, x]$ con $x \geqslant a$

Se llama integral impropia de primera especie de f sobre $[a, +\infty)$, $\int_a^\infty f(x)\,dx$, al límite

$$\boxed{\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,dt}$$

si dicho límite existe. En este caso se dice que la integral es convergente. Si este límite no existe, se dice que la integral es divergente

Igualmente, se analiza

$$\boxed{\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{x\to-\infty} \int_x^b f(t)\,dt}$$

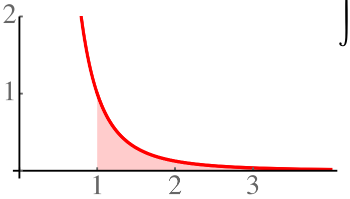
Integral impropia de primera especie. Ejemplo

Calculemos la siguiente integral impropia

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\, dx$$

Calcularemos $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\, dx = \lim_{x\to+\infty} \int_1^{x} \frac{1}{t^3}\, dt$

Como $F(t) = \frac{t^{-2}}{-2}$ cumple $F'(t) = \frac{1}{t^3}$ en cualquier $t > 0$,



Área calculada

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\, dx &= \lim_{x\to+\infty} \left[F(t)\right]_1^x \\ &= \lim_{x\to+\infty} \left(F(x) - F(1)\right) \\ &= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{-1}{2x^2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \boxed{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Integrales impropias de segunda especie

Sea $f : (a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función integrable en todo $[x, b]$ para $x \in (a, b]$ $\left(\text{existe } \int_x^b f(t)\, dt,\ \forall\, x \in (a, b]\right)$, que no está acotada a la derecha de a.

Se llama integral impropia de segunda especie de f en $(a, b]$, $\int_a^b f(x) dx$, al límite

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{x\to a^+} \int_x^b f(t)\, dt \equiv \int_{a^+}^b f(x)\, dx}$$

si dicho límite existe

Igualmente se analiza

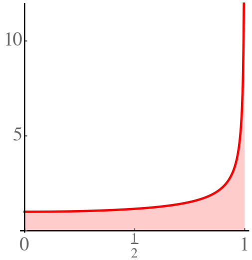
$$\boxed{\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)\, dt \equiv \int_a^{b^-} f(x)\, dx}$$

Integral impropia de segunda especie. Ejemplo

Calculemos la siguiente integral impropia:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx$$

Es una integral impropia de segunda especie pues $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\sqrt{1-x}} = +\infty$. Como $F(x) = -2\sqrt{1-x}$ cumple $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ en $[0, 1)$, procedemos



Área calculada

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx = \lim_{x\to 1}\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,dt$$
$$= \lim_{x\to 1}\left[-2\sqrt{1-t}\right]_0^x$$
$$= \lim_{x\to 1}\left(-2\sqrt{1-x} - (-2\sqrt{1-0})\right)$$
$$= \lim_{x\to 1}\left(2 - 2\sqrt{1-x}\right) = \boxed{2}$$

Tema 10

Elementos básicos de integración

Aplicación: la función Gamma

La función Gamma, $\Gamma : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, se define como:

$$\boxed{\Gamma(x) = \int_{0^+}^{\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt}$$

Propiedad $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, para todo $x > 0$

Demostración Por definición

$$\Gamma(x+1) = \int_{0^+}^{+\infty} t^x e^{-t}\, dt$$

e integrando por partes con $u = t^x$ y $dv = e^{-t}\, dt$:

$$\Gamma(x+1) = \Big[-t^x e^{-t} \Big]_{0^+}^{+\infty} + \int_{0^+}^{+\infty} e^{-t} x\, t^{x-1}\, dt$$

Como $\lim\limits_{t \to +\infty} (-t^x e^{-t}) = 0$ y $\lim\limits_{t \to 0^+} (-t^x e^{-t}) = 0$:

$$\Gamma(x+1) = x \int_{0^+}^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt = x\,\Gamma(x)$$

Bibliografía

Bibliografía I

- T. M. Apostol, Calculus: one-variable calculus, with an introduction to Linear Algebra. John Willey
- J. de Burgos, Cálculo infinitesimal de una y varias variables. McGraw Hill
- C. Calvo y otros, Temás básicos de Análisis Matemático, Álgebra Lineal y Geometría. Grupo HEDIMA. Universidad de Extremadura. http://matematicas.unex.es/~pjimenez/matematicasII_bachillerato.pdf
- A. Chiang. Métodos fundamentales de Economía Matemática. Ed. McGraw Hill.
- M. D. García y otros, Manual práctico de Matemáticas para Economía y Empresa. Delta Publicaciones
- F. González. Proyecto Matex. http://personales.unican.es/gonzaleof/

Bibliografía II

- E. PEGG JR, Riemann Sums from the Wolfram Demonstrations Project. http://demonstrations.wolfram.com/RiemannSums/
- G. SÁNCHEZ, Mathematica: Más allá de las Matemáticas. AddLink Media
- J. SPITZMUELLER, R. MURRI. The GC3 theme for LaTeX/Beamer slides. https://github.com/gc3-uzh-ch/beamer-theme-gc3
- K. SUDSAETER, P. J. HAMMOND. Matemáticas para el análisis económico. Ed. Prentice Hall
- R. K. SUNDARAN, A First Course in Optimization Theory. Cambridge, University Press
- Wolfram Mathematica. http://www.wolfram.com/mathematica/

Índice

Índice I

Índice II

Índice III

Índice IV

Índice V

Índice VI

Índice VII

Índice VIII

Índice IX

Índice X