Álgebra

Grado en Administración y Dirección de Empresa

J. Manuel Cascón, <casbar@usal.es>
M. Dolores García, <dgarcia@usal.es>
Bernardo García-Bernalt, <bgarcia@usal.es>
M. Aurora Manrique, <amg@usal.es>

Facultad de Economía y Empresa
Dpto Economía e Historia Económica
Perfil Matemáticas

15 de enero de 2018

Contenidos

Introducción

Presentación

Objetivos

Contenido

Manual

Evaluación

Introducción

Presentación

Objetivos

Contenido

Manual

Evaluación

Álgebra

- Primer curso de Grado en ADE.

- Asignatura Básica. 6 ECTS.

- Distribución horaria:
  - Teoría: 1.30 h. semanal
  - Práctica: 1h, semanal
  - Seminario: Práctica con `wxMaxima`

Introducción

Presentación

Objetivos

Contenido

Manual

Evaluación

Objetivos

El objetivo principal es conocer y comprender los elementos básicos del ágebra lineal y matricial y dotar al alumno de la abstracción necesaria para analizar y formular los problemas relacionados con la empresa y la teoría económica

Objetivos

El objetivo principal es conocer y comprender los elementos básicos del ágebra lineal y matricial y dotar al alumno de la abstracción necesaria para analizar y formular los problemas relacionados con la empresa y la teoría económica

¿ Pero por qué estudiamos Álgebra ?

¿Por qué estudiamos Álgebra?

- Instrumental: Estadística, Macroeconomía, Econometría, Teoría de la Decisión, Teoría de Juegos
- Ejemplos:
  - Análisis input-output de Leontief
  - Optimización beneficios/costes. Programación Lineal, Método Simplex
  - Juegos en forma normal o estrátegica
  - Modelos dinámicos. Análisis de Markov
- Abstracción: resolución de problemas

Optimización

Un fabricante debe producir $b_1, \ldots, b_m$ cantidades de m artículos.

Para su elaborarición se requieren n actividades distintas en sus fábricas. El coste unitario de cada actividad j es c_j.

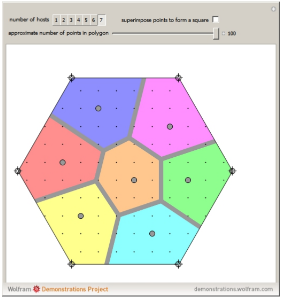
Si a_{ij} representa la cantidad de producto i producido por una unidad de actividad j, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$ representa las unidades que se producen del producto i en todas las actividades.

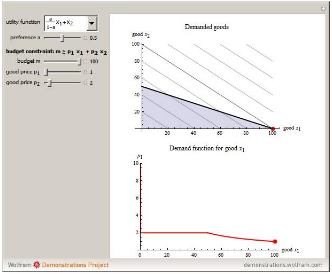
Las unidades requeridas del producto i son b_i.

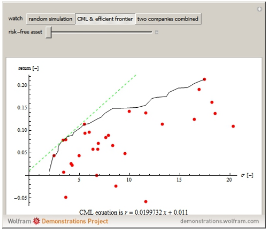
El problema que debe resolver el fabricante es:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{s.a} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant b_i, \ i = 1, \ldots, m \\ & x_j \geqslant 0, \ j = 1, \ldots, n \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} \text{mín} & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{s.a} & A\mathbf{x} \geqslant \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geqslant 0, \end{array}$$

Otros Ejemplos







Introducción

Contenido

Contenido

Contenido

TEMA 1 Preliminares

TEMA 2 Lógica y Teoría de Conjuntos
Lógica. Teoría de Conjuntos. Aplicaciones.
Relaciones binarias: orden y equivalencia.

TEMA 3 Espacios Vectoriales

TEMA 4 Aplicaciones Lineales

TEMA 5 Diagonalización de Endomorfismos

TEMA 6 Formas Bilineales y Cuadráticas

Contenido

Contenido

Contenido

Contenido

Introducción

Presentación

Objetivos

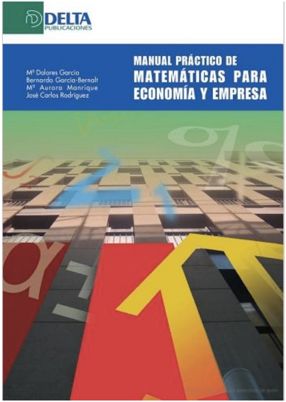
Contenido

Manual

Evaluación

Manual

M. D. García. B. García Bernalt, M. A. Manrique y J. C. Rodríguez. *Manual práctico de Matemáticas para Economía y Empresa*. Delta Publicaciones 2006



Introducción

Presentación

Objetivos

Contenido

Manual

Evaluación

Evaluación

- **Examen** (60 %):
  - Parte Teórica (2 puntos). (Mínimo de 0.8)
  - Parte Práctica (4 puntos).

- **Evaluación Continua** (40 %)
  - 2 controles tipo test (2×1 punto)
  - 4 preguntas teórico práctivas (4×0.4 puntos)
  - Ejercicios con `wxMaxima` (0.4 puntos)
  - Trabajos adicionales

Tema 1

Preliminares

Tema 1

Preliminares

Conjuntos de Números

- Números Naturales : $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$
- Números Enteros : $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$
- Números Racionales :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m} \,:\, n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}, n \text{ y } m \text{ primos entre sí} \right\}$$

- Números Reales : Expresión decimal:

$$\mathbb{R} = \left\{ a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots \quad : \quad \begin{array}{l} a_0 \in \mathbb{Z} \\ a_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}, \quad \forall i \in \mathbb{N} \end{array} \right\}$$

- Otros: $\mathbb{I}$- Irracionales (p.e. $\sqrt{2}$), $\mathbb{C}$- Complejos ($i = \sqrt{-1}$)

Conjuntos de Números

- Números Naturales : $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$
- Números Enteros : $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$
- Números Racionales :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m} \ : \ n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}, n \text{ y } m \text{ primos entre sí} \right\}$$

- Números Reales : Expresión decimal:

$$\mathbb{R} = \left\{ a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots \quad : \quad \begin{array}{l} a_0 \in \mathbb{Z} \\ a_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}, \quad \forall i \in \mathbb{N} \end{array} \right\}$$

- Otros: $\mathbb{I}$- Irracionales (p.e. $\sqrt{2}$), $\mathbb{C}$- Complejos ($i = \sqrt{-1}$)

Conjuntos de Números

- Números Naturales : $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$
- Números Enteros : $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$
- Números Racionales :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m} \ : \ n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}, n \text{ y } m \text{ primos entre sí} \right\}$$

- Números Reales : Expresión decimal:

$$\mathbb{R} = \left\{ a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots \quad : \quad \begin{array}{l} a_0 \in \mathbb{Z} \\ a_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}, \quad \forall i \in \mathbb{N} \end{array} \right\}$$

- Otros: $\mathbb{I}$- Irracionales (p.e. $\sqrt{2}$), $\mathbb{C}$- Complejos ($i = \sqrt{-1}$)

Conjuntos de Números

- Números Naturales : $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$
- Números Enteros : $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$
- Números Racionales :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m} \; : \; n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}, n \text{ y } m \text{ primos entre sí} \right\}$$

- Números Reales : Expresión decimal:

$$\mathbb{R} = \left\{ a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots \quad : \quad \begin{array}{l} a_0 \in \mathbb{Z} \\ a_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}, \quad \forall i \in \mathbb{N} \end{array} \right\}$$

- Otros: $\mathbb{I}$- Irracionales (p.e. $\sqrt{2}$), $\mathbb{C}$- Complejos ($i = \sqrt{-1}$)

Conjuntos de Números

- Números Naturales : $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$
- Números Enteros : $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$
- Números Racionales :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m} \ : \ n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}, n \text{ y } m \text{ primos entre sí} \right\}$$

- Números Reales : Expresión decimal:

$$\mathbb{R} = \left\{ a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots \quad : \quad \begin{array}{l} a_0 \in \mathbb{Z} \\ a_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}, \quad \forall i \in \mathbb{N} \end{array} \right\}$$

- Otros: $\mathbb{I}$- Irracionales (p.e. $\sqrt{2}$), $\mathbb{C}$- Complejos ($i = \sqrt{-1}$)

Tema 1

Preliminares

Vectores

$$\mathbb{R}^2 = \{(a_1, a_2) : a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$$
$$\mathbb{R}^3 = \{(a_1, a_2, a_3) : a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$$
$$\dots$$
$$\mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, \dots, n\}$$

- Suma

$$\mathbb{R}^2 \Rightarrow (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$
$$\mathbb{R}^3 \Rightarrow (a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$
$$\dots$$
$$\mathbb{R}^n \Rightarrow (a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$$

- Producto por escalar

$$\mathbb{R}^2 \Rightarrow \lambda(a_1, a_2) = (\lambda a_1, \lambda a_2)$$
$$\mathbb{R}^3 \Rightarrow \lambda(a_1, a_2, a_3) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$$
$$\dots$$
$$\mathbb{R}^n \Rightarrow \lambda(a_1, a_2, \dots, a_n) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n)$$

Vectores

$$\mathbb{R}^2 = \{(a_1, a_2) : a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$$
$$\mathbb{R}^3 = \{(a_1, a_2, a_3) : a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$$
$$\ldots$$
$$\mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, \ldots, n\}$$

- Suma

$$\mathbb{R}^2 \Rightarrow (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$
$$\mathbb{R}^3 \Rightarrow (a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$
$$\ldots$$
$$\mathbb{R}^n \Rightarrow (a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$$

- Producto por escalar

$$\mathbb{R}^2 \Rightarrow \lambda(a_1, a_2) = (\lambda a_1, \lambda a_2)$$
$$\mathbb{R}^3 \Rightarrow \lambda(a_1, a_2, a_3) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$$
$$\ldots$$
$$\mathbb{R}^n \Rightarrow \lambda(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_n)$$

Vectores

$$\mathbb{R}^2 = \{(a_1, a_2) \,:\, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$$
$$\mathbb{R}^3 = \{(a_1, a_2, a_3) \,:\, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$$
$$\dots$$
$$\mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \,:\, a_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, \dots, n\}$$

- Suma

$$\mathbb{R}^2 \Rightarrow (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$
$$\mathbb{R}^3 \Rightarrow (a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$
$$\dots$$
$$\mathbb{R}^n \Rightarrow (a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$$

- Producto por escalar

$$\mathbb{R}^2 \Rightarrow \lambda(a_1, a_2) = (\lambda a_1, \lambda a_2)$$
$$\mathbb{R}^3 \Rightarrow \lambda(a_1, a_2, a_3) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$$
$$\dots$$
$$\mathbb{R}^n \Rightarrow \lambda(a_1, a_2, \dots, a_n) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n)$$

Tema 1

Preliminares

Matrices

Definición: Se denomina matriz de dimensión $m \times n$ a un conjunto de números dispuestos en m filas y n columnas.

$$A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \; a_{ij} \in \mathbb{R}, \; \forall i,j$$

De forma abreviada se escribe $A = (a_{ij})_{m\times n}$

Tipos de matrices

- M. fila: $A \in \mathbb{M}_{1\times n}(\mathbb{R})$
- M. columna: $A \in \mathbb{M}_{m\times 1}(\mathbb{R})$
- M. cuadrada: $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$
- M. simétrica:

$$A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \ : \ a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i,j$$

- M. triangular: $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$
  Inferior: $a_{ij} = 0 \quad \forall i < j$
  Superior: $a_{ij} = 0 \quad \forall i > j$

- M. identidad: $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$

$$a_{ii} = 1 \quad \forall i, \qquad a_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j$$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Tipos de matrices

- M. fila: $A \in \mathbb{M}_{1\times n}(\mathbb{R})$
- M. columna: $A \in \mathbb{M}_{m\times 1}(\mathbb{R})$
- M. cuadrada: $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$
- M. simétrica:

$$A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \; : \; a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i,j$$

- M. triangular: $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$
  Inferior: $a_{ij} = 0 \quad \forall i < j$
  Superior: $a_{ij} = 0 \quad \forall i > j$
- M. identidad: $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$

$$a_{ii} = 1 \quad \forall i, \qquad a_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j$$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tipos de matrices

- M. fila: $A \in \mathbb{M}_{1\times n}(\mathbb{R})$
- M. columna: $A \in \mathbb{M}_{m\times 1}(\mathbb{R})$
- M. cuadrada: $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$
- M. simétrica:

$$A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \,:\, a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, j$$

- M. triangular: $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$
  Inferior: $a_{ij} = 0 \quad \forall i < j$
  Superior: $a_{ij} = 0 \quad \forall i > j$
- M. identidad: $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$

$$a_{ii} = 1 \quad \forall i, \qquad a_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j$$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Tipos de matrices

- M. fila: $A \in \mathbb{M}_{1\times n}(\mathbb{R})$
- M. columna: $A \in \mathbb{M}_{m\times 1}(\mathbb{R})$
- M. cuadrada: $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$
- M. simétrica:

$$A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \,:\, a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i,j$$

- M. triangular: $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$
  Inferior: $a_{ij} = 0 \quad \forall i < j$
  Superior: $a_{ij} = 0 \quad \forall i > j$

- M. identidad: $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$

$$a_{ii} = 1 \quad \forall i, \qquad a_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j$$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Tipos de matrices

- M. fila: $A \in \mathbb{M}_{1\times n}(\mathbb{R})$
- M. columna: $A \in \mathbb{M}_{m\times 1}(\mathbb{R})$
- M. cuadrada: $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$
- M. simétrica:

$$A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \,:\, a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i,j$$

- M. triangular: $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$
  Inferior: $a_{ij} = 0 \quad \forall i < j$
  Superior: $a_{ij} = 0 \quad \forall i > j$
- M. identidad: $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$

$$a_{ii} = 1 \quad \forall i, \qquad a_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j$$

Ejemplo

$$A_I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Tipos de matrices

- M. fila: $A \in \mathbb{M}_{1\times n}(\mathbb{R})$
- M. columna: $A \in \mathbb{M}_{m\times 1}(\mathbb{R})$
- M. cuadrada: $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$
- M. simétrica:

$$A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \,:\, a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i,j$$

- M. triangular: $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$
  Inferior: $a_{ij} = 0 \quad \forall i < j$
  Superior: $a_{ij} = 0 \quad \forall i > j$

- M. identidad: $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$

$$a_{ii} = 1 \quad \forall i, \qquad a_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j$$

Ejemplo

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Operaciones con matrices

- **Suma**: Dadas $A, B \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ la suma de matrices se define:

$$\boxed{C = A + B \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad \forall i, j}$$

- **Producto por escalar**: Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, y $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ el producto por escalar se define:

$$\boxed{B = \lambda A \Leftrightarrow b_{ij} = \lambda a_{ij} \qquad \forall i, j}$$

- **Producto matricial**: Dadas $A \in \mathbb{M}_{m\times n}$, y $B \in \mathbb{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$, el producto matricial es otra matriz $C \in \mathbb{M}_{m\times p}$ tal que

$$\begin{aligned} C = AB \Leftrightarrow c_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \\ &= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} \qquad \forall i, j \end{aligned}$$

Propiedades: asociativo, distributivo con la suma, NO es conmutativo.

Ejemplos

Matriz traspuesta

Definición Dada $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ se define la matriz traspuesta de A y se denota $A^t \in \mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ a:

$$\boxed{A^t \;\Leftrightarrow\; a^t_{ij} = a_{ji} \qquad \forall i,j}$$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Leftrightarrow \qquad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Propiedades

- $(A+B)^t = A^t + B^t$
- $(AB)^t = B^t A^t$
- $A^t = A \Leftrightarrow$ A es simétrica

Matriz inversa

Definición: Una matriz $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ se dice invertible o regular si existe otra matriz $A^{-1} \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, que se denomina inversa, que satisface:

$$\boxed{AA^{-1} = A^{-1}A = I_n}$$

(siendo I_n la matriz identidad de orden n)

Propiedades

- Si existe la inversa es única.
- Si A y B son invertibles $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

Rango de una matriz (I)

Dada una matriz A se denominan transformaciones elementales de la matriz a las siguientes operaciones:

- Intercambiar de posición dos filas (o columnas) entre si
- Multiplicar una fila (o columna) por un número no nulo
- Sumar a una fila (o columna) el múltiplo de otra ($\neq 0$)

Una matriz A, se dice escalonada por filas si verifica:

Si a_{ij} es el primer elemento de la fila i-ésima no nulo, entonces, todos los elementos situados hasta la columna j y por debajo de la fila i son nulos

Dado i, sea j el menor índice verificando

$$a_{ij} \neq 0 \Rightarrow a_{kl} = 0,\ \forall k > i,\ l \leqslant j$$

$$\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{ij} \neq 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

Rango de una matriz (II)

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Escalonada   Escalonada   No escalonada

Propiedades:

- Toda matriz escalonada por filas es triangular superior
- Toda matriz se puede reducir a una matriz escalonada por filas mediante transformaciones elementales.

Rango de una matriz (III)

Ejemplo Reducir a una matriz escalonada por filas

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \Rightarrow \\ f_2 - 3f_1 \\ f_3 + 2f_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \Rightarrow \\ f_3 + \frac{5}{4}f_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Definición Dos matrices se dicen equivalentes si una se puede obtener a partir de la otra mediante transformaciones elementales.

Rango de una matriz (III)

Ejemplo Reducir a una matriz escalonada por filas

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \underset{\substack{f_2 - 3f_1 \\ f_3 + 2f_1}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{f_3 + \frac{5}{4} f_2}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Definición Dos matrices se dicen equivalentes si una se puede obtener a partir de la otra mediante transformaciones elementales.

Rango de una matriz (III)

Ejemplo Reducir a una matriz escalonada por filas

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \underset{\substack{f_2 - 3f_1 \\ f_3 + 2f_1}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{f_3 + \frac{5}{4}f_2}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Definición Dos matrices se dicen equivalentes si una se puede obtener a partir de la otra mediante transformaciones elementales.

Rango de una matriz (III)

Ejemplo Reducir a una matriz escalonada por filas

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 5\\ -2 & 1 & -4\end{pmatrix} \underset{\substack{f_2-3f_1\\ f_3+2f_1}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 0 & -4 & -4\\ 0 & 5 & 2\end{pmatrix}$$

$$\underset{f_3+\frac{5}{4}f_2}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 0 & -4 & -4\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}$$

Definición Dos matrices se dicen equivalentes si una se puede obtener a partir de la otra mediante transformaciones elementales.

Rango de una matriz (III)

Ejemplo Reducir a una matriz escalonada por filas

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \underset{\substack{f_2 - 3f_1 \\ f_3 + 2f_1}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{f_3 + \frac{5}{4} f_2}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Definición Dos matrices se dicen equivalentes si una se puede obtener a partir de la otra mediante transformaciones elementales.

Rango de una matriz (IV)

Rango se denomina rango de una matriz:

- Al número máximo de filas (o columnas) linealmente independientes
- Al número de filas no nulas de una matriz escalonada por filas equivalente

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{rang}(A) = 1$$

Observación Las dos definiciones de rango que figuran arriba son equivalentes

Tema 1

Preliminares

Determinantes

Definición: Dada una matriz $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ se denomina determinante y se denota $|A|$ ó $det(A)$ a:

$$\boxed{|A| = det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} \text{sig}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}}$$

(siendo S_n el grupo de todas las permutaciones de grado n)

En la práctica: . . .

$\mathbb{M}_{1\times 1}(\mathbb{R}): \quad |a_{11}| = a_{11}$

$$\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}): \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}): \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) \\ -(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}) \end{array}$$

Para orden superior, es necesario introducir el concepto de adjunto

Definición Dada una matriz $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, se denomina adjunto ij, de la matriz A y se denota A_{ij}, al determinante de la matriz que resulta de eliminar la fila i y la columna j y multiplicarlo por la cantidad $(-1)^{i+j}$.

Propiedad (desar

cualquier i o j

Determinantes

$\mathbb{M}_{1\times 1}(\mathbb{R})$: $|a_{11}| = a_{11}$

$$\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) \\ -(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}) \end{array}$$

Para orden superior, es necesario introducir el concepto de adjunto

Definición Dada una matriz $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, se denomina adjunto ij, de la matriz A y se denota A_{ij}, al determinante de la matriz que resulta de eliminar la fila i y la columna j y multiplicarlo por la cantidad $(-1)^{i+j}$.

Propiedad (desarrollo por adjuntos):Sea $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ para cualquier i o j se verifica:

$$det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$$
$$det(A) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$$

Determinantes

$\mathbb{M}_{1\times 1}(\mathbb{R}): \quad |a_{11}| = a_{11}$

$\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}): \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

$$\mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}): \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) \\ -(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}) \end{array}$$

Para orden superior, es necesario introducir el concepto de adjunto

Definición Dada una matriz $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, se denomina adjunto ij, de la matriz A y se denota A_{ij}, al determinante de la matriz que resulta de eliminar la fila i y la columna j y multiplicarlo por la cantidad $(-1)^{i+j}$.

Propiedad (desarrollo por adjuntos):Sea $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ para cualquier i o j se verifica:

$$det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$$
$$det(A) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$$

Determinantes

$$\mathbb{M}_{1\times 1}(\mathbb{R}): \quad |a_{11}| = a_{11}$$

$$\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}): \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}): \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) \\ -(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}) \end{array}$$

Para orden superior, es necesario introducir el concepto de adjunto

Definición Dada una matriz $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, se denomina adjunto ij, de la matriz A y se denota A_{ij}, al determinante de la matriz que resulta de eliminar la fila i y la columna j y multiplicarlo por la cantidad $(-1)^{i+j}$.

Propiedad (desarrollo por adjuntos):Sea $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ para cualquier i o j se verifica:

$$\boxed{\begin{array}{l} det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} \\ det(A) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} \end{array}}$$

Determinantes

$$\mathbb{M}_{1\times 1}(\mathbb{R}): \quad |a_{11}| = a_{11}$$

$$\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}): \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}): \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) \\ -(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}) \end{array}$$

Para orden superior, es necesario introducir el concepto de adjunto

Definición Dada una matriz $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, se denomina adjunto ij, de la matriz A y se denota A_{ij}, al determinante de la matriz que resulta de eliminar la fila i y la columna j y multiplicarlo por la cantidad $(-1)^{i+j}$.

Propiedad (desarrollo por adjuntos):Sea $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ para cualquier i o j se verifica:

$$det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$$
$$det(A) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$$

Determinantes

$$\mathbb{M}_{1\times 1}(\mathbb{R}): \quad |a_{11}| = a_{11}$$

$$\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}): \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}): \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) \\ -(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}) \end{array}$$

Para orden superior, es necesario introducir el concepto de adjunto

Definición Dada una matriz $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, se denomina adjunto ij, de la matriz A y se denota A_{ij}, al determinante de la matriz que resulta de eliminar la fila i y la columna j y multiplicarlo por la cantidad $(-1)^{i+j}$.

Propiedad (desarrollo por adjuntos):Sea $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ para cualquier i o j se verifica:

$$det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$$
$$det(A) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$$

Determinantes

$$\mathbb{M}_{1\times 1}(\mathbb{R}): \quad |a_{11}| = a_{11}$$

$$\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}): \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}): \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) \\ -(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}) \end{array}$$

Para orden superior, es necesario introducir el concepto de adjunto

Definición Dada una matriz $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, se denomina adjunto ij, de la matriz A y se denota A_{ij}, al determinante de la matriz que resulta de eliminar la fila i y la columna j y multiplicarlo por la cantidad $(-1)^{i+j}$.

Propiedad (desarrollo por adjuntos):Sea $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ para cualquier i o j se verifica:

$$det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$$
$$det(A) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$$

Determinantes

$\mathbb{M}_{1\times 1}(\mathbb{R}): \quad |a_{11}| = a_{11}$

$$\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}): \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}): \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) \\ -(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}) \end{array}$$

Para orden superior, es necesario introducir el concepto de adjunto

Definición Dada una matriz $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, se denomina adjunto ij, de la matriz A y se denota A_{ij}, al determinante de la matriz que resulta de eliminar la fila i y la columna j y multiplicarlo por la cantidad $(-1)^{i+j}$.

Propiedad (desarrollo por adjuntos):Sea $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ para cualquier i o j se verifica:

$$det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$$
$$det(A) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$$

Determinantes

$\mathbb{M}_{1\times 1}(\mathbb{R}):\quad |a_{11}| = a_{11}$

$$\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}):\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}):\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) \\ -(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}) \end{array}$$

Para orden superior, es necesario introducir el concepto de adjunto

Definición Dada una matriz $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, se denomina adjunto ij, de la matriz A y se denota A_{ij}, al determinante de la matriz que resulta de eliminar la fila i y la columna j y multiplicarlo por la cantidad $(-1)^{i+j}$.

Propiedad (desarrollo por adjuntos):Sea $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ para cualquier i o j se verifica:

$$\boxed{\begin{array}{l} det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} \\ det(A) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} \end{array}}$$

Determinantes

$\mathbb{M}_{1\times 1}(\mathbb{R}): \quad |a_{11}| = a_{11}$

$$\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}): \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}): \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) \\ -(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}) \end{array}$$

Para orden superior, es necesario introducir el concepto de adjunto

Definición Dada una matriz $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, se denomina adjunto ij, de la matriz A y se denota A_{ij}, al determinante de la matriz que resulta de eliminar la fila i y la columna j y multiplicarlo por la cantidad $(-1)^{i+j}$.

Propiedad (desarrollo por adjuntos):Sea $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ para cualquier i o j se verifica:

$$det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$$
$$det(A) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$$

Determinantes

$\mathbb{M}_{1\times1}(\mathbb{R}): \quad |a_{11}| = a_{11}$

$$\mathbb{M}_{2\times2}(\mathbb{R}): \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\mathbb{M}_{3\times3}(\mathbb{R}): \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) \\ -(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}) \end{array}$$

Para orden superior, es necesario introducir el concepto de adjunto

Definición Dada una matriz $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, se denomina adjunto ij, de la matriz A y se denota A_{ij}, al determinante de la matriz que resulta de eliminar la fila i y la columna j y multiplicarlo por la cantidad $(-1)^{i+j}$.

Propiedad (desarrollo por adjuntos):Sea $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ para cualquier i o j se verifica:

$$det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$$
$$det(A) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$$

Determinantes

$\mathbb{M}_{1\times 1}(\mathbb{R}): \quad |a_{11}| = a_{11}$

$$\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}): \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}): \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) \\ -(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}) \end{array}$$

Para orden superior, es necesario introducir el concepto de adjunto

Definición Dada una matriz $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, se denomina adjunto ij, de la matriz A y se denota A_{ij}, al determinante de la matriz que resulta de eliminar la fila i y la columna j y multiplicarlo por la cantidad $(-1)^{i+j}$.

Propiedad (desarrollo por adjuntos):Sea $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ para cualquier i o j se verifica:

$$det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$$
$$det(A) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$$

Determinantes

$\mathbb{M}_{1\times 1}(\mathbb{R})$: $|a_{11}| = a_{11}$

$\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

$$\mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) \\ -(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}) \end{array}$$

Para orden superior, es necesario introducir el concepto de adjunto

Definición Dada una matriz $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, se denomina adjunto ij, de la matriz A y se denota A_{ij}, al determinante de la matriz que resulta de eliminar la fila i y la columna j y multiplicarlo por la cantidad $(-1)^{i+j}$.

Propiedad (desarrollo por adjuntos):Sea $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ para cualquier i o j se verifica:

$$det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$$
$$det(A) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$$

Determinantes

$\mathbb{M}_{1\times 1}(\mathbb{R}):\quad |a_{11}| = a_{11}$

$$\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}): \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}): \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) \\ -(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}) \end{array}$$

Para orden superior, es necesario introducir el concepto de adjunto

Definición Dada una matriz $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, se denomina adjunto ij, de la matriz A y se denota A_{ij}, al determinante de la matriz que resulta de eliminar la fila i y la columna j y multiplicarlo por la cantidad $(-1)^{i+j}$.

Propiedad (desarrollo por adjuntos):Sea $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ para cualquier i o j se verifica:

$$\boxed{\begin{array}{l} det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} \\ det(A) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} \end{array}}$$

Determinante: Ejemplos

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -4(10-1) = -36$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 2 - 20 + 8 + 64 + 40 - 8 - 4 = 82$$

Determinante: Ejemplos

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -4(10-1) = -36$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

$$+(-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 2 - 20 + 8 + 64 + 40 - 8 - 4 = 82$$

Determinante: Ejemplos

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -4(10-1) = -36$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 2 - 20 + 8 + 64 + 40 - 8 - 4 = 82$$

Determinante: Ejemplos

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -4(10-1) = -36$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

$$+(-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 2 - 20 + 8 + 64 + 40 - 8 - 4 = 82$$

Determinante: Ejemplos

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -4(10-1) = -36$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 2 - 20 + 8 + 64 + 40 - 8 - 4 = 82$$

Determinante: Ejemplos

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -4(10-1) = -36$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

$$+(-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 2 - 20 + 8 + 64 + 40 - 8 - 4 = 82$$

Determinante: Ejemplos

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -4(10-1) = -36$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 2 - 20 + 8 + 64 + 40 - 8 - 4 = 82$$

Cálculo de la inversa

Propiedad Sea $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, si A tiene inversa entonces se verifica que:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{det(A)}\text{Adj}(A)^t}$$

donde $\text{Adj}(A)$ denota la matriz adjunta de A (aquella en la cada elemento *ij* es el adjunto *ij*).

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = (3+4+0) - (-2+0+8) = 1$$

$$A_{11} = 1 \quad A_{12} = 2 \quad A_{13} = -2$$

$$A_{21} = 2 \quad A_{22} = 5 \quad A_{23} = -4$$

$$A_{31} = 3 \quad A_{32} = 7 \quad A_{33} = -5$$

Cálculo de la inversa

Propiedad Sea $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, si A tiene inversa entonces se verifica que:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{det(A)}\mathrm{Adj}(A)^t}$$

donde $\mathrm{Adj}(A)$ denota la matriz adjunta de A (aquella en la cada elemento *ij* es el adjunto *ij*).

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = (3+4+0) - (-2+0+8) = 1$$

$$A_{11} = 1 \quad A_{12} = 2 \quad A_{13} = -2$$
$$A_{21} = 2 \quad A_{22} = 5 \quad A_{23} = -4$$
$$A_{31} = 3 \quad A_{32} = 7 \quad A_{33} = -5$$

Cálculo de la inversa

Propiedad Sea $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, si A tiene inversa entonces se verifica que:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{det(A)}\text{Adj}(A)^t}$$

donde $\text{Adj}(A)$ denota la matriz adjunta de A (aquella en la cada elemento *ij* es el adjunto *ij*).

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = (3+4+0) - (-2+0+8) = 1$$

$$\begin{array}{lll} A_{11} = 1 & A_{12} = 2 & A_{13} = -2 \\ A_{21} = 2 & A_{22} = 5 & A_{23} = -4 \\ A_{31} = 3 & A_{32} = 7 & A_{33} = -5 \end{array}$$

Cálculo de la inversa

Propiedad Sea $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, si A tiene inversa entonces se verifica que:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{det(A)}\mathrm{Adj}(A)^t}$$

donde $\mathrm{Adj}(A)$ denota la matriz adjunta de A (aquella en la cada elemento *ij* es el adjunto *ij*).

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = (3+4+0) - (-2+0+8) = 1$$

$$\begin{array}{lll} A_{11} = 1 & A_{12} = 2 & A_{13} = -2 \\ A_{21} = 2 & A_{22} = 5 & A_{23} = -4 \\ A_{31} = 3 & A_{32} = 7 & A_{33} = -5 \end{array}$$

Cálculo del rango I

Definición Se denomina menor de una matriz A al determinante de una submatriz cuadrada de A. El orden de un menor es el orden de la submatriz asociada.

Propiedad El rango de una matriz $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ es el orden del menor de mayor orden no nulo.

Observación Si una matriz tiene al menos rango $n+1$, dado un menor de orden n no nulo, existe un menor de orden $n+1$ no nulo, cuya submatriz asociada contiene a la submatriz del menor dado.

La observación anterior permite establecer el siguiente algoritmo para el cálculo del rango de una matriz.

Cálculo del rango II

Paso 0 : Dado $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ no nula, seleccionar un menor no nulo de orden 1.

Paso 1 : Orlar (añadir fila y columna) el menor.

Paso 2 : Si el menor resultante es no nulo, y no es posible orlar (no existen filas o columnas con las que orlar). El rango es el orden del menor tras ser orlado. FIN.

Paso 3 Si el menor resultante es no nulo, volver al paso 2 y orlar de nuevo.

Paso 4 : Si el menor resultante es nulo, pero existen otras formas de orlarlo no estudiadas, volver al paso 2 y considerarlas.

Paso 5 : Si el menor resultante es nulo, y han sido consideradas todas la formas en las que puede ser orlado, el rango es el orden del menor antes de ser orlado. FIN.

Cálculo del rango III

Ejemplo Calcular el rango de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

$$|1| = 1 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) \geqslant 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) \geqslant 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \\ 3 & 9 & 10 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \boxed{\operatorname{rang}(A) = 2}$$

Cálculo del rango III

Ejemplo Calcular el rango de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

$$|1| = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) \geqslant 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) \geqslant 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \\ 3 & 9 & 10 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \boxed{\text{rang}(A) = 2}$$

Cálculo del rango III

Ejemplo Calcular el rango de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

$|1| = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) \geqslant 1$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) \geqslant 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \\ 3 & 9 & 10 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \boxed{\text{rang}(A) = 2}$$

Cálculo del rango III

Ejemplo Calcular el rango de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

$$|1| = 1 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) \geqslant 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) \geqslant 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \\ 3 & 9 & 10 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \boxed{\operatorname{rang}(A) = 2}$$

Cálculo del rango III

Ejemplo Calcular el rango de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

$$|1| = 1 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) \geqslant 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) \geqslant 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \\ 3 & 9 & 10 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \boxed{\operatorname{rang}(A) = 2}$$

Cálculo del rango III

Ejemplo Calcular el rango de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

$|1| = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) \geqslant 1$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) \geqslant 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \\ 3 & 9 & 10 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \boxed{\text{rang}(A) = 2}$$

Cálculo del rango III

Ejemplo Calcular el rango de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

$|1| = 1 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) \geqslant 1$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) \geqslant 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \\ 3 & 9 & 10 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \boxed{\operatorname{rang}(A) = 2}$$

Cálculo del rango III

Ejemplo Calcular el rango de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

$$|1| = 1 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) \geqslant 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) \geqslant 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \\ 3 & 9 & 10 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \boxed{\operatorname{rang}(A) = 2}$$

Cálculo del rango III

Ejemplo Calcular el rango de

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 & \mathbf{4} \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ \mathbf{3} & 6 & 9 & \mathbf{10} \end{pmatrix}$$

$$|1| = 1 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) \geqslant 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) \geqslant 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \\ 3 & 9 & 10 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \boxed{\operatorname{rang}(A) = 2}$$

Cálculo del rango III

Ejemplo Calcular el rango de

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 & \mathbf{4} \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ \mathbf{3} & 6 & 9 & \mathbf{10} \end{pmatrix}$$

$$|1| = 1 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) \geqslant 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) \geqslant 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \\ 3 & 9 & 10 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \boxed{\operatorname{rang}(A) = 2}$$

Cálculo del rango III

Ejemplo Calcular el rango de

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 & \mathbf{4} \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ \mathbf{3} & 6 & 9 & \mathbf{10} \end{pmatrix}$$

$|1| = 1 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) \geqslant 1$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) \geqslant 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \\ 3 & 9 & 10 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \boxed{\operatorname{rang}(A) = 2}$$

Determinantes: Propiedades

- A es invertible (o regular) $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.
- Si $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ es triangular:

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} * a_{22} * \ldots * a_{nn}.$$

- $\det(A^t) = \det(A)$
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
- $\det(I_n) = 1$ (I_n matriz identidad de orden n).
- Si $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ entonces

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A).$$

Determinantes: Propiedades

- A es invertible (o regular) $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.
- Si $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ es triangular:

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} * a_{22} * \ldots * a_{nn}.$$

- $\det(A^t) = \det(A)$
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
- $\det(I_n) = 1$ (I_n matriz identidad de orden n).
- Si $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ entonces

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A).$$

Determinantes: Propiedades

- A es invertible (o regular) $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.
- Si $A \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ es triangular:

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} * a_{22} * \ldots * a_{nn}.$$

- $\det(A^t) = \det(A)$
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
- $\det(I_n) = 1$ (I_n matriz identidad de orden n).
- Si $A \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ entonces

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A).$$

Determinantes: Propiedades

- A es invertible (o regular) $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.
- Si $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ es triangular:

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} * a_{22} * \ldots * a_{nn}.$$

- $\det(A^t) = \det(A)$
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
- $\det(I_n) = 1$ (I_n matriz identidad de orden n).
- Si $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ entonces

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A).$$

Determinantes: Propiedades

- A es invertible (o regular) $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.
- Si $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ es triangular:

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} * a_{22} * \ldots * a_{nn}.$$

- $\det(A^t) = \det(A)$
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
- $\det(I_n) = 1$ (I_n matriz identidad de orden n).
- Si $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ entonces

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A).$$

Determinantes: Propiedades

- A es invertible (o regular) $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.
- Si $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ es triangular:

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} * a_{22} * \ldots * a_{nn}.$$

- $\det(A^t) = \det(A)$
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
- $\det(I_n) = 1$ (I_n matriz identidad de orden n).
- Si $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ entonces

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A).$$

Tema 1

Preliminares

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Sistema de m ecuaciones con n incognitas

$$\left.\begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ldots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{A\mathbf{x} = \mathbf{b}}$$

Notación:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\widehat{A} = (A|\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \text{(matriz ampliada)}$$

Teorema de Rouche-Frobenius

Teorema Sea $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ un sistema de ecuaciones lineales con m ecuaciones y n incognitas, entonces:

$1)$ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es sistema compatible (SC) $\Leftrightarrow \boxed{\text{rang}(A) = \text{rang}(\widehat{A})}$

$2)$ Si $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es SC entonces :

$2a)$ $\text{rang}(A) < n \Rightarrow$ SCI (inf. soluciones)

$2b)$ $\text{rang}(A) = n \Rightarrow$ SCD (solución única)

Resolución de un SCD

Dado el SCD

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

la sólución única puede calcularse mediante:

- Eliminación gaussiana.
- Sustitución / Reducción / Igualación.
- Regla de Cramer.
- Cálculo de la inversa.
- Otros.

Ejemplo Resolver:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & y & + & z & = & 7 \\ x & + & 3y & - & 2z & = & 0 \\ 2x & + & 2y & - & z & = & 2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad (x, y, z) = \left(\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}, -4\right)$$

Resolución de un SCI

Dado el SCI

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

para determinar la familia de soluciones se puede proceder del siguiente modo:

1. Calcular un menor de orden máximo.
2. Eliminar las ecuaciones (filas de la matriz), si es el caso, que quedan fuera del menor (son dependientes).
3. Pasar al segundo miembro los términos que incluyen a las incognitas (columnas de la matriz) no presentes en el menor seleccionado. Parametrizar estas incognitas (sustituirlas por parámetros, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots$)
4. El sistema resultante es SCD y puede ser resuelto por cuaquiera de los métodos descritos previamente.

Resolución de un SCI II

Ejemplo Resolver:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & + & z & - & t & = & 0 \\ & & & & z & + & t & = & 0 \\ x & + & y & + & 2z & & & = & 0 \end{array}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) = 2 = \operatorname{rang}(\widehat{A}),$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{rcrcr} x & + & z & = & -y+t \\ & & z & = & -t \end{array}\right\} \underset{\substack{y=\lambda \\ t=\mu}}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{rcrcr} x & + & z & = & -\lambda+\mu \\ & & z & = & -\mu \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -\lambda + 2\mu \\ z = -\mu \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = -\lambda + 2\mu \\ y = \lambda \\ z = -\mu \\ t = \mu \end{array}}$$

Resolución de un SCI II

Ejemplo Resolver:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & + & z & - & t & = & 0 \\ & & & & z & + & t & = & 0 \\ x & + & y & + & 2z & & & = & 0 \end{array}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) = 2 = \operatorname{rang}(\widehat{A}),$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{rcrcl} x & + & z & = & -y+t \\ & & z & = & -t \end{array}\right\} \underset{\substack{y=\lambda \\ t=\mu}}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{rcrcl} x & + & z & = & -\lambda+\mu \\ & & z & = & -\mu \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -\lambda + 2\mu \\ z = -\mu \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = -\lambda + 2\mu \\ y = \lambda \\ z = -\mu \\ t = \mu \end{array}}$$

Resolución de un SCI II

Ejemplo Resolver:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & - & t & = & 0 \\ & & & & z & + & t & = & 0 \\ x & + & y & + & 2z & & & = & 0 \end{array}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2 = \text{rang}(\widehat{A}),$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{rcrcr} x & + & z & = & -y+t \\ & & z & = & -t \end{array}\right\} \underset{\substack{y=\lambda \\ t=\mu}}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{rcrcr} x & + & z & = & -\lambda+\mu \\ & & z & = & -\mu \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -\lambda + 2\mu \\ z = -\mu \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = -\lambda + 2\mu \\ y = \lambda \\ z = -\mu \\ t = \mu \end{array}}$$

Resolución de un SCI II

Ejemplo Resolver:

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & - & t & = & 0 \\ & & & & z & + & t & = & 0 \\ x & + & y & + & 2z & & & = & 0 \end{array}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) = 2 = \operatorname{rang}(\widehat{A}),$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{ccccc} x & + & z & = & -y+t \\ & & z & = & -t \end{array}\right\} \underset{\substack{y=\lambda \\ t=\mu}}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{ccccc} x & + & z & = & -\lambda+\mu \\ & & z & = & -\mu \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -\lambda + 2\mu \\ z = -\mu \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = -\lambda + 2\mu \\ y = \lambda \\ z = -\mu \\ t = \mu \end{array}}$$

Resolución de un SCI II

Ejemplo Resolver:

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & - & t & = & 0 \\ & & & & z & + & t & = & 0 \\ x & + & y & + & 2z & & & = & 0 \end{array}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2 = \text{rang}(\widehat{A}),$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{ccccc} x & + & z & = & -y+t \\ & & z & = & -t \end{array}\right\} \underset{\substack{y=\lambda \\ t=\mu}}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{ccccc} x & + & z & = & -\lambda+\mu \\ & & z & = & -\mu \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -\lambda + 2\mu \\ z = -\mu \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = -\lambda + 2\mu \\ y = \lambda \\ z = -\mu \\ t = \mu \end{array}}$$

Resolución de un SCI II

Ejemplo Resolver:

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & - & t & = & 0 \\ & & & & z & + & t & = & 0 \\ x & + & y & + & 2z & & & = & 0 \end{array}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) = 2 = \operatorname{rang}(\widehat{A}),$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{ccccc} x & + & z & = & -y+t \\ & & z & = & -t \end{array}\right\} \underset{\substack{y=\lambda \\ t=\mu}}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{ccccc} x & + & z & = & -\lambda+\mu \\ & & z & = & -\mu \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -\lambda + 2\mu \\ z = -\mu \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = -\lambda + 2\mu \\ y = \lambda \\ z = -\mu \\ t = \mu \end{array}}$$

Resolución de un SCI II

Ejemplo Resolver:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & - & t & = & 0 \\ & & & & z & + & t & = & 0 \\ x & + & y & + & 2z & & & = & 0 \end{array}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \mathrm{rang}(A) = 2 = \mathrm{rang}(\widehat{A}),$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{rcrcr} x & + & z & = & -y+t \\ & & z & = & -t \end{array}\right\} \underset{\substack{y=\lambda \\ t=\mu}}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{rcrcr} x & + & z & = & -\lambda+\mu \\ & & z & = & -\mu \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -\lambda + 2\mu \\ z = -\mu \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = -\lambda + 2\mu \\ y = \lambda \\ z = -\mu \\ t = \mu \end{array}}$$

Tema 2

Lógica y teoría de conjuntos

Tema 2

Lógica y teoría de conjuntos

Nociones básicas

Def. Una **proposición** es un enunciado que es o puede ser cierto o falso, y no ambas cosas simultáneamente.

- Dada una proposición p podemos asignarle un valor de verdad $v(p)$. Si p es cierto $v(p) = 1$ y si es falso $v(p) = 0$
- Una proposición universal es aquella que afirma que todos los elementos de un cierto conjunto verifican una propiedad. El símbolo cuantificador asociado a estas proposiciones es $\forall$, que se lee para todo. Por ejemplo

$$\forall x \in \mathbb{Z} \text{ es divisible por } 1$$

- Una proposición existencial es aquella que afirma que algún elemento de un cierto conjunto verifica una propiedad. El símbolo cuantificador asociado a estas proposiciones es $\exists$ que se lee existe. Por ejemplo

$$\exists x \in \mathbb{Z} \text{ que es divisible por } 35$$

Nociones básicas

Def. Una **proposición** es un enunciado que es o puede ser cierto o falso, y no ambas cosas simultáneamente.

- Dada una proposición p podemos asignarle un valor de verdad $v(p)$. Si p es cierto $v(p) = 1$ y si es falso $v(p) = 0$
- Una proposición universal es aquella que afirma que todos los elementos de un cierto conjunto verifican una propiedad. El símbolo cuantificador asociado a estas proposiciones es $\forall$, que se lee para todo. Por ejemplo

$$\forall x \in \mathbb{Z} \text{ es divisible por } 1$$

- Una proposición existencial es aquella que afirma que algún elemento de un cierto conjunto verifica una propiedad. El símbolo cuantificador asociado a estas proposiciones es $\exists$ que se lee existe. Por ejemplo

$$\exists x \in \mathbb{Z} \text{ que es divisible por } 35$$

Nociones básicas

Def. Una **proposición** es un enunciado que es o puede ser cierto o falso, y no ambas cosas simultáneamente.

- Dada una proposición p podemos asignarle un valor de verdad $v(p)$. Si p es cierto $v(p) = 1$ y si es falso $v(p) = 0$
- Una proposición universal es aquella que afirma que todos los elementos de un cierto conjunto verifican una propiedad. El símbolo cuantificador asociado a estas proposiciones es $\forall$, que se lee para todo. Por ejemplo

$$\forall x \in \mathbb{Z} \text{ es divisible por } 1$$

- Una proposición existencial es aquella que afirma que algún elemento de un cierto conjunto verifica una propiedad. El símbolo cuantificador asociado a estas proposiciones es $\exists$ que se lee existe. Por ejemplo

$$\exists x \in \mathbb{Z} \text{ que es divisible por } 35$$

Nociones básicas

Def. Una **proposición** es un enunciado que es o puede ser cierto o falso, y no ambas cosas simultáneamente.

- Dada una proposición p podemos asignarle un valor de verdad $v(p)$. Si p es cierto $v(p) = 1$ y si es falso $v(p) = 0$
- Una proposición universal es aquella que afirma que todos los elementos de un cierto conjunto verifican una propiedad. El símbolo cuantificador asociado a estas proposiciones es $\forall$, que se lee para todo. Por ejemplo

$$\forall x \in \mathbb{Z} \text{ es divisible por } 1$$

- Una proposición existencial es aquella que afirma que algún elemento de un cierto conjunto verifica una propiedad. El símbolo cuantificador asociado a estas proposiciones es $\exists$ que se lee existe. Por ejemplo

$$\exists x \in \mathbb{Z} \text{ que es divisible por } 35$$

Nociones básicas

Def. Una **proposición** es un enunciado que es o puede ser cierto o falso, y no ambas cosas simultáneamente.

Observación importante

Una proposición existencial queda demostrada encontrando un ejemplo de elemento que verifique la propiedad. Sin embargo una proposición universal no queda demostrada salvo que se compruebe que todos los elementos del conjunto verifican la propiedad.

Nociones básicas

Operadores Permiten la construcción de nuevas proposiciones a partir de relaciones entre éstas.

- Negación ($\neg$)
- Conjunción ($\wedge$)
- Disyunción ($\vee$)
- Leyes de Morgan

Nociones básicas

Operadores Permiten la construcción de nuevas proposiciones a partir de relaciones entre éstas.

- Negación ($\neg$)
  - $\neg p$ significa no ocurre p. Por tanto p es verdadero precisamente si $\neg p$ es falso y viceversa.
  - $v(\neg p) = 1 - v(p)$
  - Doble negación: $\neg(\neg p)$ es equivalente a p.

$$v(\neg(\neg p)) = 1 - v(\neg p) = 1 - (1 - v(p)) = v(p)$$

  - Si p es una proposición universal $\neg p$ es una proposición existencial.
  - Si p es una proposición existencial $\neg p$ es una proposición universal.
  - Ejemplo: l es el límite de la sucesión de números reales $\{a_n\}$ cuando $\forall \epsilon \in \mathbb{R}, x > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant n_0$ entonces $\mid x_n - l \mid < \epsilon$. ¿Cuál sería la condición para que l no fuera el límite de $\{a_n\}$?
- Conjunción ($\wedge$)
- Disyunción ($\vee$)

Nociones básicas

Operadores Permiten la construcción de nuevas proposiciones a partir de relaciones entre éstas.

- Negación ($\neg$)
- Conjunción ($\wedge$)
  - $p \wedge q$ significa p y q. $p \wedge q$ es cierta si lo son ambas, p y q
  - $v(p \wedge q) = v(p)v(q)$
- Disyunción ($\vee$)
- Leyes de Morgan

Nociones básicas

Operadores Permiten la construcción de nuevas proposiciones a partir de relaciones entre éstas.

- Negación ($\neg$)
- Conjunción ($\wedge$)
- Disyunción ($\vee$)
  - $p \vee q$ significa p o q. $p \vee q$ es cierta si lo son alguna, p o q
  - $v(p \vee q) = v(p) + v(q) - v(p)v(q)$
- Leyes de Morgan

Nociones básicas

Operadores Permiten la construcción de nuevas proposiciones a partir de relaciones entre éstas.

- Negación ($\neg$)
- Conjunción ($\wedge$)
- Disyunción ($\vee$)
- Leyes de Morgan

$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$
$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$

Nociones básicas

Proposiciones condicionales

Una **proposición condicional** es una proposición compuesta por dos proposiciones p y q que se relacionan por el conector lógico $\Rightarrow$,

$$p \Rightarrow q$$

Leeremos si p entonces q o p implica q. La proposición p suele llamarse hipótesis y la proposición q tesis.

Que la proposición $p \Rightarrow q$ sea cierta significa solamente que en el caso de que se verificara p entonces también se verificaría q, independientemente de lo que signifiquen p y q. Es decir, sólo se afirma la conexión lógica entre ambas proposiciones, sin asegurar nada sobre la verdad o falsedad de cada una de ellas. Por tanto lo único que no puede ocurrir es que p sea verdadera y q sea falsa.

$$v(p \Rightarrow q) = 1 - v(p) + v(p)v(q)$$

Condición Suficiente

Ejemplo I

Para reservar un hotel es suficiente con dar nombre y número de tarjeta.

Es suficiente con $\underbrace{\text{dar nombre y número de tarjeta}}_{p}$ para $\underbrace{\text{reservar un hotel}}_{q}$

Basta dar nombre y número de tarjeta para reservar un hotel

Si $\underbrace{\text{das nombre y número de tarjeta}}_{p}$ entonces $\underbrace{\text{puedes reservar un hotel}}_{q}$

$$\boxed{p \Rightarrow q}$$

p es condición suficiente para q

Condición Suficiente

Ejemplo I

Para reservar un hotel es suficiente con dar nombre y número de tarjeta.

Es suficiente con $\underbrace{\text{dar nombre y número de tarjeta}}_{p}$ para $\underbrace{\text{reservar un hotel}}_{q}$

Basta dar nombre y número de tarjeta para reservar un hotel

Si $\underbrace{\text{das nombre y número de tarjeta}}_{p}$ entonces $\underbrace{\text{puedes reservar un hotel}}_{q}$

$$\boxed{p \Rightarrow q}$$

p es condición suficiente para q

Condición Suficiente

Ejemplo I

Para reservar un hotel es suficiente con dar nombre y número de tarjeta.

Es suficiente con $\underbrace{\text{dar nombre y número de tarjeta}}_{p}$ para $\underbrace{\text{reservar un hotel}}_{q}$

Basta dar nombre y número de tarjeta para reservar un hotel

Si $\underbrace{\text{das nombre y número de tarjeta}}_{p}$ entonces $\underbrace{\text{puedes reservar un hotel}}_{q}$

$$\boxed{p \Rightarrow q}$$

p es condición suficiente para q

Condición Suficiente

Ejemplo I

Para reservar un hotel es suficiente con dar nombre y número de tarjeta.

Es suficiente con $\underbrace{\text{dar nombre y número de tarjeta}}_{p}$ para $\underbrace{\text{reservar un hotel}}_{q}$

Basta dar nombre y número de tarjeta para reservar un hotel

Si $\underbrace{\text{das nombre y número de tarjeta}}_{p}$ entonces $\underbrace{\text{puedes reservar un hotel}}_{q}$

$$\boxed{p \Rightarrow q}$$

p es condición suficiente para q

Condición Suficiente

Ejemplo I

Para reservar un hotel es suficiente con dar nombre y número de tarjeta.

Es suficiente con $\underbrace{\text{dar nombre y número de tarjeta}}_{p}$ para $\underbrace{\text{reservar un hotel}}_{q}$

Basta dar nombre y número de tarjeta para reservar un hotel

Si $\underbrace{\text{das nombre y número de tarjeta}}_{p}$ entonces $\underbrace{\text{puedes reservar un hotel}}_{q}$

$$\boxed{p \Rightarrow q}$$

p es condición suficiente para q

Condición Suficiente

Ejemplo I

Para reservar un hotel es suficiente con dar nombre y número de tarjeta.

Es suficiente con $\underbrace{\text{dar nombre y número de tarjeta}}_{p}$ para $\underbrace{\text{reservar un hotel}}_{q}$

Basta dar nombre y número de tarjeta para reservar un hotel

Si $\underbrace{\text{das nombre y número de tarjeta}}_{p}$ entonces $\underbrace{\text{puedes reservar un hotel}}_{q}$

$$\boxed{p \Rightarrow q}$$

p es condición suficiente para q

Condición Suficiente

Ejemplo II

La derivabilidad es condición suficiente para la continuidad.

Es suficiente que $\underbrace{\text{la función sea derivable}}_{p}$ para que $\underbrace{\text{sea continua}}_{q}$

Basta con que la función sea derivable para que sea continua

Si $\underbrace{\text{una función es derivable}}_{p}$ entonces $\underbrace{\text{es continua}}_{q}$

$$\boxed{p \Rightarrow q}$$

p es condición suficiente para q

Condición Suficiente

Ejemplo II

La derivabilidad es condición suficiente para la continuidad.

Es suficiente que $\underbrace{\text{la función sea derivable}}_{p}$ para que $\underbrace{\text{sea continua}}_{q}$

Basta con que la función sea derivable para que sea continua

Si $\underbrace{\text{una función es derivable}}_{p}$ entonces $\underbrace{\text{es continua}}_{q}$

$$\boxed{p \Rightarrow q}$$

p es condición suficiente para q

Condición Suficiente

Ejemplo II

La derivabilidad es condición suficiente para la continuidad.

Es suficiente que $\underbrace{\text{la función sea derivable}}_{p}$ para que $\underbrace{\text{sea continua}}_{q}$

Basta con que la función sea derivable para que sea continua

Si $\underbrace{\text{una función es derivable}}_{p}$ entonces $\underbrace{\text{es continua}}_{q}$

$$\boxed{p \Rightarrow q}$$

p es condición suficiente para q

Condición Suficiente

Ejemplo II

La derivabilidad es condición suficiente para la continuidad.

Es suficiente que $\underbrace{\text{la función sea derivable}}_{p}$ para que $\underbrace{\text{sea continua}}_{q}$

Basta con que la función sea derivable para que sea continua

Si $\underbrace{\text{una función es derivable}}_{p}$ entonces $\underbrace{\text{es continua}}_{q}$

$$\boxed{p \Rightarrow q}$$

p es condición suficiente para q

Condición Suficiente

Ejemplo II

La derivabilidad es condición suficiente para la continuidad.

Es suficiente que $\underbrace{\text{la función sea derivable}}_{p}$ para que $\underbrace{\text{sea continua}}_{q}$

Basta con que la función sea derivable para que sea continua

Si $\underbrace{\text{una función es derivable}}_{p}$ entonces $\underbrace{\text{es continua}}_{q}$

$$\boxed{p \Rightarrow q}$$

p es condición suficiente para q

Condición Suficiente

Ejemplo II

La derivabilidad es condición suficiente para la continuidad.

Es suficiente que $\underbrace{\text{la función sea derivable}}_{p}$ para que $\underbrace{\text{sea continua}}_{q}$

Basta con que la función sea derivable para que sea continua

Si $\underbrace{\text{una función es derivable}}_{p}$ entonces $\underbrace{\text{es continua}}_{q}$

$$\boxed{p \Rightarrow q}$$

p es condición suficiente para q

Condición Necesaria

Ejemplo I

Rellenar la solicitud es necesario para asistir al curso.

Rellenar la solicitud es obligatorio para poder asistir al curso

Si $\underbrace{\textbf{no}\ \text{rellenas la solicitud}}_{\neg p}$ entonces $\underbrace{\textbf{no}\ \text{puedes asistir al curso}}_{\neg q}$

p es condición necesaria para q

Condición Necesaria

Ejemplo I

Rellenar la solicitud es necesario para asistir al curso.

Rellenar la solicitud es obligatorio para poder asistir al curso

Si $\underbrace{\textbf{no}\text{ rellenas la solicitud}}_{\neg p}$ entonces $\underbrace{\textbf{no}\text{ puedes asistir al curso}}_{\neg q}$

p **es condición necesaria para** q

Condición Necesaria

Ejemplo I

Rellenar la solicitud es necesario para asistir al curso.

Rellenar la solicitud es obligatorio para poder asistir al curso

Si $\underbrace{\textbf{no} \text{ rellenas la solicitud}}_{\neg p}$ entonces $\underbrace{\textbf{no} \text{ puedes asistir al curso}}_{\neg q}$

p **es condición necesaria para** q

Condición Necesaria

Ejemplo I

Rellenar la solicitud es necesario para asistir al curso.

Rellenar la solicitud es obligatorio para poder asistir al curso

Si $\underbrace{\textbf{no}\ \text{rellenas la solicitud}}_{\neg p}$ entonces $\underbrace{\textbf{no}\ \text{puedes asistir al curso}}_{\neg q}$

$$\neg p \Rightarrow \neg q$$

p **es condición necesaria para** q

Condición Necesaria

Ejemplo I

Rellenar la solicitud es necesario para asistir al curso.

Rellenar la solicitud es obligatorio para poder asistir al curso

Si $\underbrace{\textbf{no} \text{ rellenas la solicitud}}_{\neg p}$ entonces $\underbrace{\textbf{no} \text{ puedes asistir al curso}}_{\neg q}$

$$\neg p \Rightarrow \neg q$$

$$\boxed{q \Rightarrow p}$$

p **es condición necesaria para** q

Condición Necesaria

Ejemplo I

Rellenar la solicitud es necesario para asistir al curso.

Rellenar la solicitud es obligatorio para poder asistir al curso

Si $\underbrace{\textbf{no}\ \text{rellenas la solicitud}}_{\neg p}$ entonces $\underbrace{\textbf{no}\ \text{puedes asistir al curso}}_{\neg q}$

$$\neg p \Rightarrow \neg q$$

$$\boxed{q \Rightarrow p}$$

p* es condición necesaria para *q

Condición Necesaria

Ejemplo II

Que una matriz sea cuadrada es condición necesaria para que tenga inversa

Que una matriz sea cuadrada es obligatorio para que tenga inversa

Si $\underbrace{\text{una matriz } \textbf{no} \text{ es cuadrada}}_{\neg p}$ entonces $\underbrace{\textbf{no} \text{ tiene inversa}}_{\neg q}$

p es condición necesaria para q

Condición Necesaria

Ejemplo II

Que una matriz sea cuadrada es condición necesaria para que tenga inversa

Que una matriz sea cuadrada es obligatorio para que tenga inversa

Si $\underbrace{\text{una matriz } \textbf{no} \text{ es cuadrada}}_{\neg p}$ entonces $\underbrace{\textbf{no} \text{ tiene inversa}}_{\neg q}$

p **es condición necesaria para** q

Condición Necesaria

Ejemplo II

Que una matriz sea cuadrada es condición necesaria para que tenga inversa

Que una matriz sea cuadrada es obligatorio para que tenga inversa

Si $\underbrace{\text{una matriz } \textbf{no} \text{ es cuadrada}}_{\neg p}$ entonces $\underbrace{\textbf{no} \text{ tiene inversa}}_{\neg q}$

p **es condición necesaria para** q

Condición Necesaria

Ejemplo II

Que una matriz sea cuadrada es condición necesaria para que tenga inversa

Que una matriz sea cuadrada es obligatorio para que tenga inversa

Si $\underbrace{\text{una matriz } \textbf{no} \text{ es cuadrada}}_{\neg p}$ entonces $\underbrace{\textbf{no} \text{ tiene inversa}}_{\neg q}$

$$\neg p \Rightarrow \neg q$$

p **es condición necesaria para** q

Condición Necesaria

Ejemplo II

Que una matriz sea cuadrada es condición necesaria para que tenga inversa

Que una matriz sea cuadrada es obligatorio para que tenga inversa

Si $\underbrace{\text{una matriz } \textbf{no} \text{ es cuadrada}}_{\neg p}$ entonces $\underbrace{\textbf{no} \text{ tiene inversa}}_{\neg q}$

$$\neg p \Rightarrow \neg q$$

$$\boxed{q \Rightarrow p}$$

p **es condición necesaria para** q

Condición Necesaria

Ejemplo II

Que una matriz sea cuadrada es condición necesaria para que tenga inversa

Que una matriz sea cuadrada es obligatorio para que tenga inversa

Si $\underbrace{\text{una matriz \textbf{no} es cuadrada}}_{\neg p}$ entonces $\underbrace{\text{\textbf{no} tiene inversa}}_{\neg q}$

$$\neg p \Rightarrow \neg q$$

$$\boxed{q \Rightarrow p}$$

p es condición necesaria para q

Condición necesaria y suficiente

$\boxed{p \Leftrightarrow q}$ **es equivalente a** $\boxed{\begin{array}{c} p \Rightarrow q \\ q \Rightarrow p \end{array}}$

p **es condición necesaria y suficiente para** q

Resumen

p es cond. **suficiente** para q	$p \Rightarrow q$
p es cond. **necesaria** para q	$q \Rightarrow p$
p es cond. necesaria y suficiente para q	$p \Leftrightarrow q$

Clases de proposiciones

Directa	$p \Rightarrow q$
Recíproca	$q \Rightarrow p$
Contraria	$\neg p \Rightarrow \neg q$
Contrarecíproca	$\neg q \Rightarrow \neg p$

Clases de proposiciones

Directa	$p \Rightarrow q$
Recíproca	$q \Rightarrow p$
Contraria	$\neg p \Rightarrow \neg q$
Contrarecíproca	$\neg q \Rightarrow \neg p$

Recordar

$$\boxed{p \Rightarrow q \quad \Leftrightarrow \quad \neg q \Rightarrow \neg p}$$

Obsevaciones finales

- **Reducción al absurdo** Para demostar que $p \Rightarrow q$, se puede demostrar $\neg q \Rightarrow \neg p$
- **Contraejemplo** Para probar que $p \Rightarrow q$ es falso basta con encontrar una situación en la que se tenga p y $\neg q$

Tema 2

Lógica y teoría de conjuntos

Nociones básicas

Definiciones

- Conjunto X
- Notación pertenece, $x \in X$
- Conjunto vacío $\emptyset$
- Subconjunto, $Y \subset X$
- Cardinal
- Complementario, X^c

Nota: Dos conjuntos X e Y se dicen iguales si:

$$X \subset Y \text{ e } Y \subset X$$

Nociones básicas. Cuantificadores

- Universal $\forall$ ("para todo ")
- Existencial $\exists$ ("existe")

Proposición

Notación: "$p(x) \equiv$ el elemento x verifica la propiedad p"

$$\boxed{\begin{array}{l} \neg\{\forall x \in X \,:\, p(x)\} = \{\exists x \in X \,:\, \neg p(x)\} \\ \neg\{\exists x \in X \,:\, p(x)\} = \{\forall x \in X \,:\, \neg p(x)\} \end{array}}$$

Tema 2

Lógica y teoría de conjuntos

Operaciones y propiedades

- Unión

$$\boxed{A \cup B = \{x : x \in A \text{ ó } x \in B\}}$$

- Intersección

$$\boxed{A \cap B = \{x : x \in A \text{ y } x \in B\}}$$

- Propiedades

Conmutativa	$A \cup B = B \cup A$,	$A \cap B = B \cap A$
Asociativa	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,	
	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	
Distributiva	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,	
	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	
Absorción	$A \cup (A \cap A) = A$,	$A \cap (A \cup A) = A$
Idempotencia	$A \cup A = A$,	$A \cap A = A$
Leyes de Morgan	$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$,	
	$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$	

Tema 2

Lógica y teoría de conjuntos

Producto Cartesiano

Definición Dados dos conjunto A y B se llama producto cartesiano y se denota $A \times B$ al conjunto

$$\boxed{A \times B = \{(a, b) \, : \, a \in A, \; b \in B\}}$$

Ejemplos $\mathbb{N}^2, \mathbb{R}^2$

Tema 2

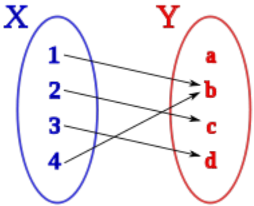
Lógica y teoría de conjuntos

Aplicaciones

Definición Dados dos conjuntos X e Y se denomina **aplicación de conjuntos** a toda ley o asignación f

$$f : X \longrightarrow Y$$

tal que para cada $x \in X$ existe un único $y \in Y$ tal que $f(x) = y$.



Existe una definición alternativa de aplicación como subconjunto de producto cartesiano $X \times Y$.

Aplicaciones

Definiciones

- Conjunto Imagen, $Im f$
- Imagen inversa, $f^{-1}(y)$

Composición

$$\left\{ \begin{array}{l} f : X \longrightarrow Y \\ g : Z \longrightarrow T \\ Im f \subset Z \end{array} \right. \qquad \Rightarrow \qquad g \circ f : X \longrightarrow T$$

donde $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Clases de aplicaciones

f es Inyectiva $\quad\Leftrightarrow\quad x \neq \bar{x} \Rightarrow f(x) \neq f(\bar{x})$

$$(f(x) = f(\bar{x}) \Rightarrow x = \bar{x})$$

f es Epiyectiva $\quad\Leftrightarrow\quad \forall y \in Y \, \exists x \in X$ tal que $f(x) = y$

f es Biyectiva $\quad\Leftrightarrow\quad$ si f es inyectiva y epiyectiva

Ejemplos

Definición Aplicación Inversa.

Tema 2

Lógica y teoría de conjuntos

Relaciones binarias

Definición. Dado un conjunto A se denomina relación binaria a cualquier subconjunto R del producto cartesiano, $R \subset A \times A$

Notación: $(x, y) \in R \Leftrightarrow xRy$

Propiedades

R es reflexiva	$\Leftrightarrow xRx, \quad \forall x \in A$
R es simétrica	$\Leftrightarrow$ Si $xRy \Rightarrow yRx$
R es antisimétrica	$\Leftrightarrow xRy, \quad yRx \Rightarrow x = y$
R es transitiva	$\Leftrightarrow xRy$ e $yRz \Rightarrow xRz$

Relaciones de equivalencia

Definición R es relación de equivalencia en A si es reflexiva, simétrica y transitiva

Notación. $x \sim y$

Ejemplos

Definiciones

- Clase de equivalencia.
- Conjunto cociente

Ejemplos

Relaciones de orden

Definición R es relación de orden en A si es reflexiva antisimétrica y transitiva

Notación $(A, \leqslant)$ conjunto ordenado.

Ejemplos

Definiciones

- Orden total (o completo), orden parcial, orden bueno
- Cota superior/inferior
- Conjunto acotado superiormente/inferiormente
- Conjunto acotado
- Supremo, máximo
- Ínfimo, mínimo

Proposición

$$\text{Buen orden} \quad \Rightarrow \quad \text{orden total}$$

Tema 3

Espacios vectoriales

Tema 3

Espacios vectoriales

Espacio Vectorial. Definición y ejemplos

Definición Sea E un conjunto. Se dice que (E,+,·) es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ (o un $\mathbb{R}$- espacio vectorial) si + y · son dos operaciones definidas sobre E que verifican:

+ es una operación interna (suma de vectores):

$$\begin{aligned} + : E \times E &\longrightarrow E \\ (e, e') &\longrightarrow e + e' \end{aligned}$$

1. Asociativa : $e + (e' + e'') = (e + e') + e'', \quad \forall e, e', e'' \in E$
2. Elemento neutro : $\exists 0 \in E : e + 0 = 0 + e = e, \quad e \in E$
3. Elemento opuesto : $\forall e \in E, \exists -e \in E : e + (-e) = (-e) + e = 0$
4. Conmutativa : $e + e' = e' + e \quad \forall e, e' \in E$

· es una operación externa (producto por escalar):

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times E &\longrightarrow E \\ (\lambda, e) &\longrightarrow \lambda \cdot e = \lambda\, e \end{aligned}$$

5. Distributiva I : $\lambda(e + e') = \lambda e + \lambda e', \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},\ e, e' \in E$
6. Distributiva II : $(\lambda + \mu)e = \lambda e + \mu e, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ e \in E$
7. Mixta : $(\lambda\mu)e = \lambda(\mu e), \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ e \in E$
8. Identidad : $1e = e, \forall e \in E$

Espacio Vectorial. Definición y ejemplos

Definición Sea E un conjunto. Se dice que (E,+,·) es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ (o un $\mathbb{R}$- espacio vectorial) si + y · son dos operaciones definidas sobre E que verifican:

+ es una operación interna (suma de vectores):

$$\begin{aligned} + : E \times E &\longrightarrow E \\ (e, e') &\longrightarrow e + e' \end{aligned}$$

· es una operación externa (producto por escalar):

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times E &\longrightarrow E \\ (\lambda, e) &\longrightarrow \lambda \cdot e = \lambda\, e \end{aligned}$$

1. Asociativa : $e + (e' + e'') = (e + e') + e'', \quad \forall e, e', e'' \in E$
2. Elemento neutro : $\exists 0 \in E : e + 0 = 0 + e = e, \quad e \in E$
3. Elemento opuesto : $\forall e \in E, \exists -e \in E : e + (-e) = (-e) + e = 0$
4. Conmutativa : $e + e' = e' + e \quad \forall e, e' \in E$
5. Distributiva I : $\lambda(e + e') = \lambda e + \lambda e', \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ e, e' \in E$
6. Distributiva II : $(\lambda + \mu)e = \lambda e + \mu e, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \ e \in E$
7. Mixta : $(\lambda\mu)e = \lambda(\mu e), \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \ e \in E$
8. Identidad : $1e = e, \forall e \in E$

Espacio Vectorial. Definición y ejemplos

Definición Sea E un conjunto. Se dice que (E,+,·) es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ (o un $\mathbb{R}$- espacio vectorial) si + y · son dos operaciones definidas sobre E que verifican:

+ es una operación interna (suma de vectores):

$$\begin{aligned} + : E \times E &\longrightarrow E \\ (e, e') &\longrightarrow e + e' \end{aligned}$$

· es una operación externa (producto por escalar):

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times E &\longrightarrow E \\ (\lambda, e) &\longrightarrow \lambda \cdot e = \lambda\, e \end{aligned}$$

1. Asociativa : $e + (e' + e'') = (e + e') + e'', \quad \forall e, e', e'' \in E$
2. Elemento neutro : $\exists\, 0 \in E : \; e + 0 = 0 + e = e, \quad e \in E$
3. Elemento opuesto : $\forall e \in E, \exists -e \in E \, : \, e + (-e) = (-e) + e = 0$
4. Conmutativa : $e + e' = e' + e \quad \forall e, e' \in E$
5. Distributiva I : $\lambda(e + e') = \lambda e + \lambda e', \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \; e, e' \in E$
6. Distributiva II : $(\lambda + \mu)e = \lambda e + \mu e, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \; e \in E$
7. Mixta : $(\lambda\mu)e = \lambda(\mu e), \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \; e \in E$
8. Identidad : $1e = e, \forall e \in E$

Espacio Vectorial. Definición y ejemplos

Definición Sea E un conjunto. Se dice que (E,+,·) es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ (o un $\mathbb{R}$- espacio vectorial) si + y · son dos operaciones definidas sobre E que verifican:

+ es una operación interna (suma de vectores):

$$\begin{aligned} + : E \times E &\longrightarrow E \\ (e, e') &\longrightarrow e + e' \end{aligned}$$

· es una operación externa (producto por escalar):

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times E &\longrightarrow E \\ (\lambda, e) &\longrightarrow \lambda \cdot e = \lambda e \end{aligned}$$

1. Asociativa : $e + (e' + e'') = (e + e') + e'', \quad \forall e, e', e'' \in E$
2. Elemento neutro : $\exists 0 \in E : e + 0 = 0 + e = e, \quad e \in E$
3. Elemento opuesto : $\forall e \in E, \exists -e \in E : e + (-e) = (-e) + e = 0$
4. Conmutativa : $e + e' = e' + e \quad \forall e, e' \in E$
5. Distributiva I : $\lambda(e + e') = \lambda e + \lambda e', \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, e, e' \in E$
6. Distributiva II : $(\lambda + \mu)e = \lambda e + \mu e, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, e \in E$
7. Mixta : $(\lambda\mu)e = \lambda(\mu e), \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, e \in E$
8. Identidad : $1e = e, \forall e \in E$

Espacio Vectorial. Definición y ejemplos

Definición Sea E un conjunto. Se dice que (E,+,·) es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ (o un $\mathbb{R}$- espacio vectorial) si $+$ y $\cdot$ son dos operaciones definidas sobre E que verifican:

$+$ es una operación interna (suma de vectores):

$$\begin{aligned} + : E \times E &\longrightarrow E \\ (e, e') &\longrightarrow e + e' \end{aligned}$$

1. Asociativa : $e + (e' + e'') = (e + e') + e'', \quad \forall e, e', e'' \in E$
2. Elemento neutro : $\exists 0 \in E : \; e + 0 = 0 + e = e, \quad e \in E$
3. Elemento opuesto : $\forall e \in E, \exists -e \in E \; : \; e + (-e) = (-e) + e = 0$
4. Conmutativa : $e + e' = e' + e \quad \forall e, e' \in E$

$\cdot$ es una operación externa (producto por escalar):

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times E &\longrightarrow E \\ (\lambda, e) &\longrightarrow \lambda \cdot e = \lambda e \end{aligned}$$

5. Distributiva I : $\lambda(e + e') = \lambda e + \lambda e', \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \; e, e' \in E$
6. Distributiva II : $(\lambda + \mu)e = \lambda e + \mu e, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \; e \in E$
7. Mixta : $(\lambda\mu)e = \lambda(\mu e), \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \; e \in E$
8. Identidad : $1e = e, \forall e \in E$

Espacio Vectorial. Definición y ejemplos

Definición Sea E un conjunto. Se dice que (E,+,·) es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ (o un $\mathbb{R}$- espacio vectorial) si $+$ y $\cdot$ son dos operaciones definidas sobre E que verifican:

$+$ es una operación interna (suma de vectores):

$$\begin{aligned} + : E \times E &\longrightarrow E \\ (e, e') &\longrightarrow e + e' \end{aligned}$$

1. Asociativa : $e + (e' + e'') = (e + e') + e'', \quad \forall e, e', e'' \in E$
2. Elemento neutro : $\exists 0 \in E : \ e + 0 = 0 + e = e, \quad e \in E$
3. Elemento opuesto : $\forall e \in E, \exists -e \in E \ : \ e + (-e) = (-e) + e = 0$
4. Conmutativa : $e + e' = e' + e \quad \forall e, e' \in E$

$\cdot$ es una operación externa (producto por escalar):

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times E &\longrightarrow E \\ (\lambda, e) &\longrightarrow \lambda \cdot e = \lambda\, e \end{aligned}$$

5. Distributiva I : $\lambda(e + e') = \lambda e + \lambda e', \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ e, e' \in E$
6. Distributiva II : $(\lambda + \mu)e = \lambda e + \mu e, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \ e \in E$
7. Mixta : $(\lambda\mu)e = \lambda(\mu e), \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \ e \in E$
8. Identidad : $1e = e, \forall e \in E$

Espacio Vectorial. Definición y ejemplos

Definición Sea E un conjunto. Se dice que (E,+,·) es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ (o un $\mathbb{R}$- espacio vectorial) si + y · son dos operaciones definidas sobre E que verifican:

\+ es una operación interna (suma de vectores):

$$\begin{aligned} + : E \times E &\longrightarrow E \\ (e, e') &\longrightarrow e + e' \end{aligned}$$

· es una operación externa (producto por escalar):

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times E &\longrightarrow E \\ (\lambda, e) &\longrightarrow \lambda \cdot e = \lambda\, e \end{aligned}$$

1. Asociativa : $e + (e' + e'') = (e + e') + e'', \quad \forall e, e', e'' \in E$
2. Elemento neutro : $\exists 0 \in E : e + 0 = 0 + e = e, \quad e \in E$
3. Elemento opuesto : $\forall e \in E, \exists -e \in E \, : \, e + (-e) = (-e) + e = 0$
4. Conmutativa : $e + e' = e' + e \quad \forall e, e' \in E$
5. Distributiva I : $\lambda(e + e') = \lambda e + \lambda e', \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \; e, e' \in E$
6. Distributiva II : $(\lambda + \mu)e = \lambda e + \mu e, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \; e \in E$
7. Mixta : $(\lambda\mu)e = \lambda(\mu e), \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \; e \in E$
8. Identidad : $1e = e, \forall e \in E$

Espacio Vectorial. Definición y ejemplos

Definición Sea E un conjunto. Se dice que (E,+,·) es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ (o un $\mathbb{R}$- espacio vectorial) si + y · son dos operaciones definidas sobre E que verifican:

\+ es una operación interna (suma de vectores):

$$+ : E \times E \longrightarrow E$$
$$(e, e') \longrightarrow e + e'$$

1. Asociativa : $e + (e' + e'') = (e + e') + e'', \quad \forall e, e', e'' \in E$
2. Elemento neutro : $\exists 0 \in E : e + 0 = 0 + e = e, \quad e \in E$
3. Elemento opuesto : $\forall e \in E, \exists -e \in E \ : \ e + (-e) = (-e) + e = 0$
4. Conmutativa : $e + e' = e' + e \quad \forall e, e' \in E$

· es una operación externa (producto por escalar):

$$\cdot : \mathbb{R} \times E \longrightarrow E$$
$$(\lambda, e) \longrightarrow \lambda \cdot e = \lambda e$$

5. Distributiva I : $\lambda(e + e') = \lambda e + \lambda e', \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ e, e' \in E$
6. Distributiva II : $(\lambda + \mu)e = \lambda e + \mu e, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \ e \in E$
7. Mixta : $(\lambda\mu)e = \lambda(\mu e), \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \ e \in E$
8. Identidad : $1e = e, \forall e \in E$

Espacio Vectorial. Definición y ejemplos

Definición Sea E un conjunto. Se dice que (E,+,·) es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ (o un $\mathbb{R}$- espacio vectorial) si + y · son dos operaciones definidas sobre E que verifican:

\+ es una operación interna (suma de vectores):

$$+ : E \times E \longrightarrow E$$
$$(e, e') \longrightarrow e + e'$$

· es una operación externa (producto por escalar):

$$\cdot : \mathbb{R} \times E \longrightarrow E$$
$$(\lambda, e) \longrightarrow \lambda \cdot e = \lambda e$$

1. Asociativa :
$e + (e' + e'') = (e + e') + e'', \quad \forall e, e', e'' \in E$
2. Elemento neutro :
$\exists 0 \in E : e + 0 = 0 + e = e, \quad e \in E$
3. Elemento opuesto :
$\forall e \in E, \exists -e \in E \; : \; e + (-e) = (-e) + e = 0$
4. Conmutativa : $e + e' = e' + e \quad \forall e, e' \in E$
5. Distributiva I :
$\lambda(e + e') = \lambda e + \lambda e', \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \; e, e' \in E$
6. Distributiva II :
$(\lambda + \mu)e = \lambda e + \mu e, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \; e \in E$
7. Mixta : $(\lambda\mu)e = \lambda(\mu e), \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \; e \in E$
8. Identidad : $1e = e, \forall e \in E$

Espacio Vectorial. Definición y ejemplos

Ejemplos: $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$, $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$

Proposición: Sean $E_1, \ldots, E_n$ espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$ y sea $E = E_1 \times \cdots \times E_n$.
En E definimos las operaciones de suma de vectores y producto por escalares de modo canónico, es decir, $\forall (u_1, \ldots, u_n), (v_1, \ldots, v_n) \in E$ y $\forall \lambda \in \mathbb{R}$:

- $(u_1, \ldots, u_n) + (v_1, \ldots, v_n) = (u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n)$
- $\lambda(u_1, \ldots, u_n) = (\lambda u_1, \ldots, \lambda u_n)$

Con estas definiciones E es un espacio vectorial real.

Espacio Vectorial. Definición y ejemplos

Ejemplos: $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$, $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$

Proposición: Sean $E_1, \ldots, E_n$ espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$ y sea $E = E_1 \times \cdots \times E_n$.
En E definimos las operaciones de suma de vectores y producto por escalares de modo canónico, es decir, $\forall (u_1, \ldots, u_n), (v_1, \ldots, v_n) \in E$ y $\forall \lambda \in \mathbb{R}$:

- $(u_1, \ldots, u_n) + (v_1, \ldots, v_n) = (u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n)$
- $\lambda(u_1, \ldots, u_n) = (\lambda u_1, \ldots, \lambda u_n)$

Con estas definiciones E es un espacio vectorial real.

Espacio Vectorial. Propiedades

Proposición: Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, y sean $u, v \in E$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Se verifica:

- $\lambda(u - v) = \lambda u - \lambda v$
- $\lambda 0_E = 0_E$
- $\lambda(-u) = -\lambda u$
- $(\lambda - \mu)u = \lambda u - \mu u$
- $0u = 0_E$
- $(-\lambda)u = -(\lambda u)$
- $\lambda u = 0_E \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ o } u = 0_E$

Espacio Vectorial. Propiedades

Proposición: Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, y sean $u, v \in E$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Se verifica:

- $\lambda(u - v) = \lambda u - \lambda v$
- $\lambda 0_E = 0_E$
- $\lambda(-u) = -\lambda u$
- $(\lambda - \mu)u = \lambda u - \mu u$
- $0u = 0_E$
- $(-\lambda)u = -(\lambda u)$
- $\lambda u = 0_E \Leftrightarrow \lambda = 0$ o $u = 0_E$

Espacio Vectorial. Propiedades

Proposición: Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, y sean $u, v \in E$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Se verifica:

- $\lambda(u - v) = \lambda u - \lambda v$
- $\lambda 0_E = 0_E$
- $\lambda(-u) = -\lambda u$
- $(\lambda - \mu)u = \lambda u - \mu u$
- $0u = 0_E$
- $(-\lambda)u = -(\lambda u)$
- $\lambda u = 0_E \Leftrightarrow \lambda = 0$ o $u = 0_E$

Espacio Vectorial. Propiedades

Proposición: Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, y sean $u, v \in E$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Se verifica:

- $\lambda(u - v) = \lambda u - \lambda v$
- $\lambda 0_E = 0_E$
- $\lambda(-u) = -\lambda u$
- $(\lambda - \mu)u = \lambda u - \mu u$
- $0u = 0_E$
- $(-\lambda)u = -(\lambda u)$
- $\lambda u = 0_E \Leftrightarrow \lambda = 0$ o $u = 0_E$

Espacio Vectorial. Propiedades

Proposición: Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, y sean $u, v \in E$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Se verifica:

- $\lambda(u - v) = \lambda u - \lambda v$
- $\lambda 0_E = 0_E$
- $\lambda(-u) = -\lambda u$
- $(\lambda - \mu)u = \lambda u - \mu u$
- $0u = 0_E$
- $(-\lambda)u = -(\lambda u)$
- $\lambda u = 0_E \Leftrightarrow \lambda = 0$ o $u = 0_E$

Espacio Vectorial. Propiedades

Proposición: Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, y sean $u, v \in E$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Se verifica:

- $\lambda(u - v) = \lambda u - \lambda v$
- $\lambda 0_E = 0_E$
- $\lambda(-u) = -\lambda u$
- $(\lambda - \mu)u = \lambda u - \mu u$
- $0u = 0_E$
- $(-\lambda)u = -(\lambda u)$
- $\lambda u = 0_E \Leftrightarrow \lambda = 0$ o $u = 0_E$

Espacio Vectorial. Propiedades

Proposición: Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, y sean $u, v \in E$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Se verifica:

- $\lambda(u - v) = \lambda u - \lambda v$
- $\lambda 0_E = 0_E$
- $\lambda(-u) = -\lambda u$
- $(\lambda - \mu)u = \lambda u - \mu u$
- $0u = 0_E$
- $(-\lambda)u = -(\lambda u)$
- $\lambda u = 0_E \Leftrightarrow \lambda = 0$ o $u = 0_E$

Espacio Vectorial. Propiedades

Proposición: Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, y sean $u, v \in E$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Se verifica:

- $\lambda(u - v) = \lambda u - \lambda v$
- $\lambda 0_E = 0_E$
- $\lambda(-u) = -\lambda u$
- $(\lambda - \mu)u = \lambda u - \mu u$
- $0u = 0_E$
- $(-\lambda)u = -(\lambda u)$
- $\lambda u = 0_E \Leftrightarrow \lambda = 0$ o $u = 0_E$

Subespacios.

Definición Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. $E' \subset E$ es subespacio vectorial de E si E' es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con las operaciones de E.

$\Rightarrow$ *las operaciones de E son estables en E'*

Proposición

$$E' \subset E \text{ es subespacio} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ll} 1.\ \forall e, e' \in E' & e + e' \in E' \\ 2.\ \forall e \in E',\ \lambda \in \mathbb{R} & \lambda e \in E', \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall e, e' \in E',\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \qquad \lambda e + \mu e' \in E'$$

Toda combinación lineal de elementos de E' pertenece a E'

Subespacios.

Definición Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. $E' \subset E$ es subespacio vectorial de E si E' es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con las operaciones de E.

$\Rightarrow$ *las operaciones de E son estables en E'*

Proposición

$$E' \subset E \text{ es subespacio} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ll} 1.\ \forall e, e' \in E' & e + e' \in E' \\ 2.\ \forall e \in E',\ \lambda \in \mathbb{R} & \lambda e \in E', \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall e, e' \in E',\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \qquad \lambda e + \mu e' \in E'$$

Toda combinación lineal de elementos de E' pertenece a E'

Subespacios.

Definición Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. $E' \subset E$ es subespacio vectorial de E si E' es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con las operaciones de E.

$\Rightarrow$ *las operaciones de E son estables en E'*

Proposición

$$E' \subset E \text{ es subespacio} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ll} 1.\ \forall e, e' \in E' & e + e' \in E' \\ 2.\ \forall e \in E',\ \lambda \in \mathbb{R} & \lambda e \in E', \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall e, e' \in E',\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \qquad \lambda e + \mu e' \in E'$$

Toda combinación lineal de elementos de E' pertenece a E'

Subespacios. Ejemplos

- El conjunto $E = \{(a, b, 0), a, b \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$
- El conjunto $E = \{(a, b, 1), a, b \in \mathbb{R}\}$ no es un subespacio de $\mathbb{R}^3$
- Si $m \leqslant n$ entonces $\mathbb{P}_m(\mathbb{R})$ es un subespacio de $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$
- El conjunto de polinomios de grado 2 no es un subespacio del espacio de polinomios de grado 3.
- El conjunto de matrices cuadradas de orden n que son triangulares inferiores es un subespacio de $\mathbb{M}_{n\times\ n}(\mathbb{R})$
- El conjunto de matrices cuadradas de orden n que son simétricas es un subespacio de $\mathbb{M}_{n\times\ n}(\mathbb{R})$
- El conjunto de matrices cuadradas de orden n que son invertibles no un subespacio de $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$

Subespacios. Ejemplos

- El conjunto $E = \{(a, b, 0), a, b \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$
- El conjunto $E = \{(a, b, 1), a, b \in \mathbb{R}\}$ no es un subespacio de $\mathbb{R}^3$
- Si $m \leqslant n$ entonces $\mathbb{P}_m(\mathbb{R})$ es un subespacio de $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$
- El conjunto de polinomios de grado 2 no es un subespacio del espacio de polinomios de grado 3.
- El conjunto de matrices cuadradas de orden n que son triangulares inferiores es un subespacio de $\mathbb{M}_{n\times\, n}(\mathbb{R})$
- El conjunto de matrices cuadradas de orden n que son simétricas es un subespacio de $\mathbb{M}_{n\times\, n}(\mathbb{R})$
- El conjunto de matrices cuadradas de orden n que son invertibles no un subespacio de $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$

Subespacios. Ejemplos

- El conjunto $E = \{(a, b, 0), a, b \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$
- El conjunto $E = \{(a, b, 1), a, b \in \mathbb{R}\}$ no es un subespacio de $\mathbb{R}^3$
- Si $m \leqslant n$ entonces $\mathbb{P}_m(\mathbb{R})$ es un subespacio de $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$
- El conjunto de polinomios de grado 2 no es un subespacio del espacio de polinomios de grado 3.
- El conjunto de matrices cuadradas de orden n que son triangulares inferiores es un subespacio de $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$
- El conjunto de matrices cuadradas de orden n que son simétricas es un subespacio de $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$
- El conjunto de matrices cuadradas de orden n que son invertibles no un subespacio de $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$

Subespacios. Ejemplos

- El conjunto $E = \{(a, b, 0), a, b \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$
- El conjunto $E = \{(a, b, 1), a, b \in \mathbb{R}\}$ no es un subespacio de $\mathbb{R}^3$
- Si $m \leqslant n$ entonces $\mathbb{P}_m(\mathbb{R})$ es un subespacio de $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$
- El conjunto de polinomios de grado 2 no es un subespacio del espacio de polinomios de grado 3.
- El conjunto de matrices cuadradas de orden n que son triangulares inferiores es un subespacio de $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$
- El conjunto de matrices cuadradas de orden n que son simétricas es un subespacio de $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$
- El conjunto de matrices cuadradas de orden n que son invertibles no un subespacio de $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$

Subespacios. Ejemplos

- El conjunto $E = \{(a, b, 0), a, b \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$
- El conjunto $E = \{(a, b, 1), a, b \in \mathbb{R}\}$ no es un subespacio de $\mathbb{R}^3$
- Si $m \leqslant n$ entonces $\mathbb{P}_m(\mathbb{R})$ es un subespacio de $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$
- El conjunto de polinomios de grado 2 no es un subespacio del espacio de polinomios de grado 3.
- El conjunto de matrices cuadradas de orden n que son triangulares inferiores es un subespacio de $\mathbb{M}_{n\times\ n}(\mathbb{R})$
- El conjunto de matrices cuadradas de orden n que son simétricas es un subespacio de $\mathbb{M}_{n\times\ n}(\mathbb{R})$
- El conjunto de matrices cuadradas de orden n que son invertibles no un subespacio de $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$

Subespacios. Ejemplos

- El conjunto $E = \{(a, b, 0), a, b \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$
- El conjunto $E = \{(a, b, 1), a, b \in \mathbb{R}\}$ no es un subespacio de $\mathbb{R}^3$
- Si $m \leqslant n$ entonces $\mathbb{P}_m(\mathbb{R})$ es un subespacio de $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$
- El conjunto de polinomios de grado 2 no es un subespacio del espacio de polinomios de grado 3.
- El conjunto de matrices cuadradas de orden n que son triangulares inferiores es un subespacio de $\mathbb{M}_{n\times\ n}(\mathbb{R})$
- El conjunto de matrices cuadradas de orden n que son simétricas es un subespacio de $\mathbb{M}_{n\times\ n}(\mathbb{R})$
- El conjunto de matrices cuadradas de orden n que son invertibles no un subespacio de $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$

Subespacios. Ejemplos

- El conjunto $E = \{(a, b, 0), a, b \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$
- El conjunto $E = \{(a, b, 1), a, b \in \mathbb{R}\}$ no es un subespacio de $\mathbb{R}^3$
- Si $m \leqslant n$ entonces $\mathbb{P}_m(\mathbb{R})$ es un subespacio de $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$
- El conjunto de polinomios de grado 2 no es un subespacio del espacio de polinomios de grado 3.
- El conjunto de matrices cuadradas de orden n que son triangulares inferiores es un subespacio de $\mathbb{M}_{n\times\ n}(\mathbb{R})$
- El conjunto de matrices cuadradas de orden n que son simétricas es un subespacio de $\mathbb{M}_{n\times\ n}(\mathbb{R})$
- El conjunto de matrices cuadradas de orden n que son invertibles no un subespacio de $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$

Subespacios. Propiedades

Sean E' y E'' subespacios de E

- $0_E \in E'$
- Si $u \in E'$ entonces $-u \in E'$
- $E' \cap E''$ es un subespacio de E
- $E' \cup E''$ es un subespacio de $E \Leftrightarrow E' \subseteq E''$ o $E'' \subseteq E'$

Subespacios. Propiedades

Sean E' y E'' subespacios de E

- $0_E \in E'$
- Si $u \in E'$ entonces $-u \in E'$
- $E' \cap E''$ es un subespacio de E
- $E' \cup E''$ es un subespacio de $E \Leftrightarrow E' \subseteq E''$ o $E'' \subseteq E'$

Subespacios. Propiedades

Sean E' y E'' subespacios de E

- $0_E \in E'$
- Si $u \in E'$ entonces $-u \in E'$
- $E' \cap E''$ es un subespacio de E
- $E' \cup E''$ es un subespacio de $E \Leftrightarrow E' \subseteq E''$ o $E'' \subseteq E'$

Subespacios. Propiedades

Sean E' y E'' subespacios de E

- $0_E \in E'$
- Si $u \in E'$ entonces $-u \in E'$
- $E' \cap E''$ es un subespacio de E
- $E' \cup E''$ es un subespacio de $E \Leftrightarrow E' \subseteq E''$ o $E'' \subseteq E'$

Subespacios. Propiedades

Sean E' y E'' subespacios de E

- $0_E \in E'$
- Si $u \in E'$ entonces $-u \in E'$
- $E' \cap E''$ es un subespacio de E
- $E' \cup E''$ es un subespacio de $E \Leftrightarrow E' \subseteq E''$ o $E'' \subseteq E'$

Combinaciones Lineales

Definición: Sea E un $\mathbb{R}$ espacio vectorial. Sean $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_p \in E$. Se llama combinación lineal de los vectores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_p$ a todo vector de la forma:

$$\boxed{\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 + \ldots + \lambda_p \mathbf{e}_p}$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ son escalares cualesquiera.

Proposición: Sea $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_p \rangle$ el conjunto de combinaciones lineales de los vectores de E $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_p$, es decir:

$$\boxed{\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_p \rangle = \{\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 + \ldots + \lambda_p \mathbf{e}_p : \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}\}}$$

$\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_p \rangle$ es un subespacio de E al que llamaremos subespacio generado por los vectores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_p$. Además, si E' es un subespacio de E y $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_p \in E'$ entonces $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_p \rangle \subseteq E'$, es decir $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_p \rangle$ es el menor subespacio que contiene a $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_p$.

Combinaciones Lineales

Definición: Sea E un $\mathbb{R}$ espacio vectorial. Sean $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_p \in E$. Se llama combinación lineal de los vectores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_p$ a todo vector de la forma:

$$\boxed{\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 + \ldots + \lambda_p \mathbf{e}_p}$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ son escalares cualesquiera.

Proposición: Sea $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_p \rangle$ el conjunto de combinaciones lineales de los vectores de E $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_p$, es decir:

$$\boxed{\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_p \rangle = \{\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 + \ldots + \lambda_p \mathbf{e}_p \, : \, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}\}}$$

$\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_p \rangle$ es un subespacio de E al que llamaremos subespacio generado por los vectores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_p$.
Además, si E' es un subespacio de E y $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_p \in E'$ entonces $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_p \rangle \subseteq E'$, es decir $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_p \rangle$ es el menor subespacio que contiene a $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_p$.

Subespacios. Subespacio generado

Definición: $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ es un sistema generador de E si

$$\boxed{E = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_p \rangle}$$

es decir, si cualquier elemento de E es combinación lineal de $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_p\}$.

Tema 3

Espacios vectoriales

Dependencia e Independencia Lineal

Definiciones Sea E un $\mathbb{R}$ espacio vectorial.

- Se dice que los vectores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_p$ son linealmente independientes (l.i.) si la única combinación lineal de ellos igual al vector cero es la trivial (todos los coeficientes nulos).

$$\boxed{\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 + \ldots + \lambda_p \mathbf{e}_p = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_p = 0}$$

- Se dice que los vectores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_p$ son linealmente dependientes (l.d.) si existe una combinación lineal no trivial igual al vector cero.

$$\boxed{\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_p \text{ con algún } \lambda_i \neq 0 \text{ tal que } \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \ldots + \lambda_p \mathbf{e}_p = \mathbf{0}}$$

- Se dice que $\mathbf{e}$ depende linealmente de $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_p$ si y sólo si

$$\boxed{\mathbf{e} \in \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_p \rangle}$$

Ejemplos

Dependencia e Independencia Lineal. Proposición

Sea E un $\mathbb{R}$ espacio vectorial.

1. $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ es l.d $\Leftrightarrow$ alguno de ellos es combinación del resto.
2. $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ es l.i $\Leftrightarrow$ ninguno de ellos es combinación del resto.

Dem.

1. $\boxed{\Rightarrow}$ Basta despejar $\mathbf{e}_i$ siendo $\lambda_i \neq 0$ para obtener:

$$\mathbf{e}_i = \frac{\lambda_1}{\lambda_i}\mathbf{e}_1 + \ldots + \frac{\lambda_p}{\lambda_i}\mathbf{e}_p.$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos $\mathbf{e}_1 \in \langle \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_p \rangle$, por tanto:

$$\mathbf{e}_1 = \lambda_2\mathbf{e}_2 + \ldots + \lambda_p\mathbf{e}_p \Rightarrow -\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2 + \ldots + \lambda_p\mathbf{e}_p = \mathbf{0}$$

Dependencia e Independencia Lineal. Propiedades

Sea E un $\mathbb{R}$ espacio vectorial.

- Todo sistema de vectores es l.i. o l.d.
- Todo sistema que contiene al vector cero es l.d.
- $\{\mathbf{e}\}$ es l.i. $\Leftrightarrow$ $\mathbf{e} \neq 0$
- $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ es l.d. $\Leftrightarrow$ uno de los vectores es proporcional al otro
- $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ son l.d. $\Rightarrow$ $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p, \mathbf{e}\}$ es l.d $\forall \mathbf{e} \in E$
- $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ son l.i $\Rightarrow$ $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \widehat{\mathbf{e}_i}, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ es l.i. $\forall i = 1, \ldots, p$
- $\left.\begin{array}{l} \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\} \text{ es l.i} \\ \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p, \mathbf{e}\} \text{ es l.d.} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{e}$ depende linealmente de $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$
- $\left.\begin{array}{l} \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\} \text{ es l.i} \\ \mathbf{e} \text{ no depende linealmente de } \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\} \end{array}\right\} \Rightarrow \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p, \mathbf{e}\}$ es l.i.
- $\left.\begin{array}{l} \mathbf{e} \in \langle \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p \rangle \\ \mathbf{e}_i \in \langle \mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_q \rangle, \quad \forall i = 1, \ldots, p \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{e} \in \langle \mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_q \rangle$
- $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ son l.i $\Rightarrow$ Todo vector de $\langle \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p \rangle$ se escribe de forma única como combinación lineal de $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$

Dependencia e Independencia Lineal. Propiedades

Sea E un $\mathbb{R}$ espacio vectorial.

- Todo sistema de vectores es l.i. o l.d.
- Todo sistema que contiene al vector cero es l.d.
- $\{\mathbf{e}\}$ es l.i. $\Leftrightarrow \mathbf{e} \neq 0$
- $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ es l.d. $\Leftrightarrow$ uno de los vectores es proporcional al otro
- $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ son l.d. $\Rightarrow \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p, \mathbf{e}\}$ es l.d $\forall \mathbf{e} \in E$
- $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ son l.i $\Rightarrow \{\mathbf{e}_1, \ldots, \widehat{\mathbf{e}_i}, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ es l.i. $\forall i = 1, \ldots, p$
- $\left.\begin{array}{l}\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\} \text{ es l.i} \\ \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p, \mathbf{e}\} \text{ es l.d.}\end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{e}$ depende linealmente de $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$
- $\left.\begin{array}{l}\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\} \text{ es l.i} \\ \mathbf{e} \text{ no depende linealmente de } \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}\end{array}\right\} \Rightarrow \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p, \mathbf{e}\}$ es l.i.
- $\left.\begin{array}{l}\mathbf{e} \in \langle \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\rangle \\ \mathbf{e}_i \in \langle \mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_q\rangle, \quad \forall i = 1, \ldots, p\end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{e} \in \langle \mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_q\rangle$
- $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ son l.i $\Rightarrow$ Todo vector de $\langle \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\rangle$ se escribe de forma única como combinación lineal de $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$

Dependencia e Independencia Lineal. Propiedades

Sea E un $\mathbb{R}$ espacio vectorial.

- Todo sistema de vectores es l.i. o l.d.
- Todo sistema que contiene al vector cero es l.d.
- $\{\mathbf{e}\}$ es l.i. $\Leftrightarrow \mathbf{e} \neq 0$
- $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ es l.d. $\Leftrightarrow$ uno de los vectores es proporcional al otro
- $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ son l.d. $\Rightarrow \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p, \mathbf{e}\}$ es l.d $\forall \mathbf{e} \in E$
- $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ son l.i $\Rightarrow \{\mathbf{e}_1, \ldots, \widehat{\mathbf{e}_i}, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ es l.i. $\forall i = 1, \ldots, p$
- $\left.\begin{array}{l} \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\} \text{ es l.i} \\ \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p, \mathbf{e}\} \text{ es l.d.} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{e}$ depende linealmente de $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$
- $\left.\begin{array}{l} \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\} \text{ es l.i} \\ \mathbf{e} \text{ no depende linealmente de } \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\} \end{array}\right\} \Rightarrow \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p, \mathbf{e}\}$ es l.i.
- $\left.\begin{array}{l} \mathbf{e} \in \langle \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p \rangle \\ \mathbf{e}_i \in \langle \mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_q \rangle, \quad \forall i = 1, \ldots, p \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{e} \in \langle \mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_q \rangle$
- $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ son l.i $\Rightarrow$ Todo vector de $\langle \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p \rangle$ se escribe de forma única como combinación lineal de $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$

Dependencia e Independencia Lineal. Propiedades

Sea E un $\mathbb{R}$ espacio vectorial.

- Todo sistema de vectores es l.i. o l.d.
- Todo sistema que contiene al vector cero es l.d.
- $\{\mathbf{e}\}$ es l.i. $\Leftrightarrow \mathbf{e} \neq 0$
- $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ es l.d. $\Leftrightarrow$ uno de los vectores es proporcional al otro
- $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ son l.d. $\Rightarrow \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p, \mathbf{e}\}$ es l.d $\forall \mathbf{e} \in E$
- $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ son l.i $\Rightarrow \{\mathbf{e}_1, \ldots, \widehat{\mathbf{e}}_i, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ es l.i. $\forall i = 1, \ldots, p$
- $\left.\begin{array}{l}\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\} \text{ es l.i} \\ \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p, \mathbf{e}\} \text{ es l.d.}\end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{e}$ depende linealmente de $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$
- $\left.\begin{array}{l}\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\} \text{ es l.i} \\ \mathbf{e} \text{ no depende linealmente de } \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}\end{array}\right\} \Rightarrow \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p, \mathbf{e}\}$ es l.i.
- $\left.\begin{array}{l}\mathbf{e} \in \langle \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p \rangle \\ \mathbf{e}_i \in \langle \mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_q \rangle, \quad \forall i = 1, \ldots, p\end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{e} \in \langle \mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_q \rangle$
- $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ son l.i $\Rightarrow$ Todo vector de $\langle \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p \rangle$ se escribe de forma única como combinación lineal de $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$

Dependencia e Independencia Lineal. Propiedades

Sea E un $\mathbb{R}$ espacio vectorial.

- Todo sistema de vectores es l.i. o l.d.
- Todo sistema que contiene al vector cero es l.d.
- $\{\mathbf{e}\}$ es l.i. $\Leftrightarrow$ $\mathbf{e} \neq 0$
- $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ es l.d. $\Leftrightarrow$ uno de los vectores es proporcional al otro
- $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ son l.d. $\Rightarrow$ $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p, \mathbf{e}\}$ es l.d $\forall \mathbf{e} \in E$
- $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ son l.i $\Rightarrow$ $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \widehat{\mathbf{e}_i}, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ es l.i. $\forall i = 1, \ldots, p$
- $\left.\begin{array}{l}\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\} \text{ es l.i} \\ \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p, \mathbf{e}\} \text{ es l.d.}\end{array}\right\} \Rightarrow$ $\mathbf{e}$ depende linealmente de $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$
- $\left.\begin{array}{l}\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\} \text{ es l.i} \\ \mathbf{e} \text{ no depende linealmente de } \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}\end{array}\right\} \Rightarrow \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p, \mathbf{e}\}$ es l.i.
- $\left.\begin{array}{l}\mathbf{e} \in \langle \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p \rangle \\ \mathbf{e}_i \in \langle \mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_q \rangle, \quad \forall i = 1, \ldots, p\end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{e} \in \langle \mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_q \rangle$
- $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ son l.i $\Rightarrow$ Todo vector de $\langle \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p \rangle$ se escribe de forma única como combinación lineal de $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$

Dependencia e Independencia Lineal. Propiedades

Sea E un $\mathbb{R}$ espacio vectorial.

- Todo sistema de vectores es l.i. o l.d.
- Todo sistema que contiene al vector cero es l.d.
- $\{\mathbf{e}\}$ es l.i. $\Leftrightarrow \mathbf{e} \neq 0$
- $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ es l.d. $\Leftrightarrow$ uno de los vectores es proporcional al otro
- $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ son l.d. $\Rightarrow \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p, \mathbf{e}\}$ es l.d $\forall \mathbf{e} \in E$
- $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ son l.i $\Rightarrow \{\mathbf{e}_1, \ldots, \widehat{\mathbf{e}_i}, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ es l.i. $\forall i = 1, \ldots, p$
- $\left.\begin{array}{l}\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\} \text{ es l.i} \\ \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p, \mathbf{e}\} \text{ es l.d.}\end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{e}$ depende linealmente de $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$
- $\left.\begin{array}{l}\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\} \text{ es l.i} \\ \mathbf{e} \text{ no depende linealmente de } \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}\end{array}\right\} \Rightarrow \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p, \mathbf{e}\}$ es l.i.
- $\left.\begin{array}{l}\mathbf{e} \in \langle \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p \rangle \\ \mathbf{e}_i \in \langle \mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_q \rangle, \quad \forall i = 1, \ldots, p\end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{e} \in \langle \mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_q \rangle$
- $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ son l.i $\Rightarrow$ Todo vector de $\langle \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p \rangle$ se escribe de forma única como combinación lineal de $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$

Dependencia e Independencia Lineal. Propiedades

Sea E un $\mathbb{R}$ espacio vectorial.

- Todo sistema de vectores es l.i. o l.d.
- Todo sistema que contiene al vector cero es l.d.
- $\{\mathbf{e}\}$ es l.i. $\Leftrightarrow \mathbf{e} \neq 0$
- $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ es l.d. $\Leftrightarrow$ uno de los vectores es proporcional al otro
- $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ son l.d. $\Rightarrow \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p, \mathbf{e}\}$ es l.d $\forall \mathbf{e} \in E$
- $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ son l.i $\Rightarrow \{\mathbf{e}_1, \ldots, \widehat{\mathbf{e}_i}, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ es l.i. $\forall i = 1, \ldots, p$
- $\left.\begin{array}{l} \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\} \text{ es l.i} \\ \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p, \mathbf{e}\} \text{ es l.d.} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{e}$ depende linealmente de $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$
- $\left.\begin{array}{l} \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\} \text{ es l.i} \\ \mathbf{e} \text{ no depende linealmente de } \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\} \end{array}\right\} \Rightarrow \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p, \mathbf{e}\}$ es l.i.
- $\left.\begin{array}{l} \mathbf{e} \in \langle \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p \rangle \\ \mathbf{e}_i \in \langle \mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_q \rangle, \quad \forall i = 1, \ldots, p \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{e} \in \langle \mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_q \rangle$
- $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ son l.i $\Rightarrow$ Todo vector de $\langle \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p \rangle$ se escribe de forma única como combinación lineal de $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$

Dependencia e Independencia Lineal. Propiedades

Sea E un $\mathbb{R}$ espacio vectorial.

- Todo sistema de vectores es l.i. o l.d.
- Todo sistema que contiene al vector cero es l.d.
- $\{\mathbf{e}\}$ es l.i. $\Leftrightarrow \mathbf{e} \neq 0$
- $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ es l.d. $\Leftrightarrow$ uno de los vectores es proporcional al otro
- $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ son l.d. $\Rightarrow \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p, \mathbf{e}\}$ es l.d $\forall \mathbf{e} \in E$
- $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ son l.i $\Rightarrow \{\mathbf{e}_1, \ldots, \widehat{\mathbf{e}_i}, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ es l.i. $\forall i = 1, \ldots, p$
- $\left.\begin{array}{l} \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\} \text{ es l.i} \\ \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p, \mathbf{e}\} \text{ es l.d.} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{e}$ depende linealmente de $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$
- $\left.\begin{array}{l} \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\} \text{ es l.i} \\ \mathbf{e} \text{ no depende linealmente de } \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\} \end{array}\right\} \Rightarrow \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p, \mathbf{e}\}$ es l.i.
- $\left.\begin{array}{l} \mathbf{e} \in \langle \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p \rangle \\ \mathbf{e}_i \in \langle \mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_q \rangle, \quad \forall i = 1, \ldots, p \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{e} \in \langle \mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_q \rangle$
- $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ son l.i $\Rightarrow$ Todo vector de $\langle \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p \rangle$ se escribe de forma única como combinación lineal de $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$

Dependencia e Independencia Lineal. Propiedades

Sea E un $\mathbb{R}$ espacio vectorial.

- Todo sistema de vectores es l.i. o l.d.
- Todo sistema que contiene al vector cero es l.d.
- $\{\mathbf{e}\}$ es l.i. $\Leftrightarrow \mathbf{e} \neq 0$
- $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ es l.d. $\Leftrightarrow$ uno de los vectores es proporcional al otro
- $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ son l.d. $\Rightarrow \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p, \mathbf{e}\}$ es l.d $\forall \mathbf{e} \in E$
- $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ son l.i $\Rightarrow \{\mathbf{e}_1, \ldots, \widehat{\mathbf{e}_i}, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ es l.i. $\forall i = 1, \ldots, p$
- $\left.\begin{array}{l} \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\} \text{ es l.i} \\ \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p, \mathbf{e}\} \text{ es l.d.} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{e}$ depende linealmente de $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$
- $\left.\begin{array}{l} \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\} \text{ es l.i} \\ \mathbf{e} \text{ no depende linealmente de } \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\} \end{array}\right\} \Rightarrow \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p, \mathbf{e}\}$ es l.i.
- $\left.\begin{array}{l} \mathbf{e} \in \langle \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p \rangle \\ \mathbf{e}_i \in \langle \mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_q \rangle, \quad \forall i = 1, \ldots, p \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{e} \in \langle \mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_q \rangle$
- $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ son l.i $\Rightarrow$ Todo vector de $\langle \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p \rangle$ se escribe de forma única como combinación lineal de $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$

Dependencia e Independencia Lineal. Propiedades

Sea E un $\mathbb{R}$ espacio vectorial.

- Todo sistema de vectores es l.i. o l.d.
- Todo sistema que contiene al vector cero es l.d.
- $\{\mathbf{e}\}$ es l.i. $\Leftrightarrow$ $\mathbf{e} \neq 0$
- $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ es l.d. $\Leftrightarrow$ uno de los vectores es proporcional al otro
- $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p\}$ son l.d. $\Rightarrow$ $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p, \mathbf{e}\}$ es l.d $\forall \mathbf{e} \in E$
- $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p\}$ son l.i $\Rightarrow$ $\{\mathbf{e}_1, \dots, \widehat{\mathbf{e}_i}, \dots, \mathbf{e}_p\}$ es l.i. $\forall i = 1, \dots, p$
- $\left.\begin{array}{l} \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p\} \text{ es l.i} \\ \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p, \mathbf{e}\} \text{ es l.d.} \end{array}\right\} \Rightarrow$ $\mathbf{e}$ depende linealmente de $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p\}$
- $\left.\begin{array}{l} \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p\} \text{ es l.i} \\ \mathbf{e} \text{ no depende linealmente de } \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p\} \end{array}\right\} \Rightarrow \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p, \mathbf{e}\}$ es l.i.
- $\left.\begin{array}{l} \mathbf{e} \in \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p \rangle \\ \mathbf{e}_i \in \langle \mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_q \rangle, \quad \forall i = 1, \dots, p \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{e} \in \langle \mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_q \rangle$
- $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p\}$ son l.i $\Rightarrow$ Todo vector de $\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p \rangle$ se escribe de forma única como combinación lineal de $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p\}$

Teorema de Independencia Lineal

Teorema. Sea E un $\mathbb{R}$ espacio vectorial.

$$\left.\begin{array}{l} \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_q\} \text{ es generador} \\ \{\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_p\} \text{ es l.i.} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad p \leqslant q$$

Teorema de Independencia Lineal

Teorema. Sea E un $\mathbb{R}$ espacio vectorial.

$$\left.\begin{array}{l}\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_q\} \text{ es generador}\\ \{\mathbf{e}'_1,\ldots,\mathbf{e}'_p\} \text{ es l.i.}\end{array}\right\} \Rightarrow \quad p \leqslant q$$

Demo. Supongamos $p > q$. Trabajando por etapas es posible demostrar que (eventualmente es necesario reordenar los vectores):

$$\begin{array}{l}\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_q\} \text{ s.g.}\\ \{\mathbf{e}'_1,\ldots,\mathbf{e}'_p\} \text{ l.i.}\end{array} \Rightarrow \begin{array}{l}\{\mathbf{e}'_1,\ldots,\mathbf{e}_q\} \text{ s.g.}\\ \{\mathbf{e}'_1,\ldots,\mathbf{e}'_p\} \text{ l.i.}\end{array} \Rightarrow \begin{array}{l}\{\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_2,\ldots,\mathbf{e}_q\} \text{ s.g.}\\ \{\mathbf{e}'_1,\ldots,\mathbf{e}'_p\} \text{ l.i.}\end{array}$$

$$\ldots \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l}\{\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_2,\ldots,\mathbf{e}'_q\} \text{ s.g.}\\ \{\mathbf{e}'_1,\ldots,\mathbf{e}'_p\} \text{ l.i.}\end{array} \Rightarrow \begin{array}{l}\text{mientras } p > q \text{ resulta:}\\ \mathbf{e}'_{q+1} \in \langle \mathbf{e}'_1,\ldots,\mathbf{e}'_q\rangle\end{array}$$

Lo cual es una **contradicción** pues $\{\mathbf{e}'_1,\ldots,\mathbf{e}'_p\}$ son l.i. Por tanto debe ser $\boxed{p \leqslant q}$

Tema 3

Espacios vectoriales

Bases

Sea E un $\mathbb{R}$- espacio vectorial.

Definición E se dice de tipo finito si existe un sistema generador formado por un número finito de vectores.

Definición Sea E de tipo finito. Se dice que los vectores $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ forman una base si

1. Son generadores
2. Son linealmente independientes

Nota: En este curso sólo trataremos con espacios vectoriales de tipo finito. Es decir, E siempre será un $\mathbb{R}$ espacio vectorial de tipo finito.

Base. Caracterización

Proposición Las siguientes condiciones son equivalentes.

1. $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ es base.
2. Todo vector de E se escribe de forma única como combinación lineal de $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$
3. $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ son l.i. y dejan de serlo al añadir otro vector.
4. $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ son generadores y dejan de serlo al prescindir de alguno de ellos.

Demo.

Base. Caracterización

Proposición Las siguientes condiciones son equivalentes.

1. $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ es base.
2. Todo vector de E se escribe de forma única como combinación lineal de $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$
3. $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ son l.i. y dejan de serlo al añadir otro vector.
4. $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ son generadores y dejan de serlo al prescindir de alguno de ellos.

Demo. $\boxed{1 \Rightarrow 2}$

$$\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\} \text{ es base } \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{son generadores} \\ \text{son l.i.} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{todo } \mathbf{e} \in E \text{ se escribe como c.l. } \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\} \\ \mathbf{e} \in \langle \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \rangle \text{ se escribe de forma única} \end{array} \right.$$

Base. Caracterización

Proposición Las siguientes condiciones son equivalentes.

1. $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ es base.
2. Todo vector de E se escribe de forma única como combinación lineal de $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$
3. $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ son l.i. y dejan de serlo al añadir otro vector.
4. $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ son generadores y dejan de serlo al prescindir de alguno de ellos.

Demo. $\boxed{2 \Rightarrow 3}$
$\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ son l.i. pues el vector $\mathbf{0}$ se escribe de forma única.
$\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ dejan de ser l.i al añadir otro pues el nuevo vector $\mathbf{e}$ se puede escribir como combinación lineal de $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ por hipótesis.

Base. Caracterización

Proposición Las siguientes condiciones son equivalentes.

1. $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ es base.
2. Todo vector de E se escribe de forma única como combinación lineal de $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$
3. $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ son l.i. y dejan de serlo al añadir otro vector.
4. $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ son generadores y dejan de serlo al prescindir de alguno de ellos.

Demo.
$\boxed{3 \Rightarrow 4}$ Veamos que $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ son generadores. Sea $\mathbf{e} \in E$, por $\boxed{3}$ tenemos:

$$\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \ldots + \lambda_n \mathbf{e}_n + \mu \mathbf{e} = \mathbf{0}$$

con $\mu \neq \mathbf{0}$ despejando se tiene $\mathbf{e} \in \langle \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \rangle = E$.
Si se prescinde de uno dejan de ser generadores, pues el eliminado no puede ser generado por los demás, ya que por $\boxed{3}$ son l.i.

Base. Caracterización

Proposición Las siguientes condiciones son equivalentes.

1. $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ es base.
2. Todo vector de E se escribe de forma única como combinación lineal de $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$
3. $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ son l.i. y dejan de serlo al añadir otro vector.
4. $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ son generadores y dejan de serlo al prescindir de alguno de ellos.

Demo.
$\boxed{4 \Rightarrow 1}$ Razonado por reducción al absurdo supongamos que $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ no son l.i.. Es decir, existe una combinación lineal:

$$\lambda_1\mathbf{e}_1 + \ldots + \lambda_i\mathbf{e}_i + \ldots + \lambda_n\mathbf{e}_n = \mathbf{0}, \qquad \text{con } \lambda_i \neq 0$$

despejando tenemos $\mathbf{e}_i \in \langle \mathbf{e}_1, \ldots, \widehat{\mathbf{e}_i} \ldots, \mathbf{e}_n \rangle = E$. Lo cual contradice $\boxed{4}$.

Teoremas

Teorema de la base

Todo $\mathbb{R}$-espacio vectorial de tipo finito tiene una base.

Teoremas

Teorema de la base
Todo $\mathbb{R}$-espacio vectorial de tipo finito tiene una base.

Demo. Por ser de tipo finito tiene un sistema generador formado por un número finito de vectores. Para obtener una base basta utilizar la propiedad 4 de la proposición anterior.

Teoremas

Teorema de la base

Todo $\mathbb{R}$-espacio vectorial de tipo finito tiene una base.

Teorema de la dimensión

Todas las bases de un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de tipo finito tienen el mismo número de vectores.

Teoremas

Teorema de la base

Todo $\mathbb{R}$-espacio vectorial de tipo finito tiene una base.

Teorema de la dimensión

Todas las bases de un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de tipo finito tienen el mismo número de vectores.

Demo. Sean $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ y $\{\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_m\}$ veamos que $n = m$. Por el teorema de independencia lineal (ambos cojuntos son generadores y l.i):

$$\left.\begin{array}{l} m \leqslant n \\ n \leqslant m \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{n = m}$$

Teoremas

Teorema de la base
Todo $\mathbb{R}$-espacio vectorial de tipo finito tiene una base.

Teorema de la dimensión
Todas las bases de un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de tipo finito tienen el mismo número de vectores.

Definición Se llama dimensión de un $\mathbb{R}$ espacio vectorial, E, al número de vectores que la componen. Se denota $\boxed{\dim \mathrm{E}}$.

Nota: Si $E = \{\mathbf{0}\}$, $\dim E = 0$

Ejemplos

Propiedades

Sea E un $\mathbb{R}$ espacio vectorial de dimensión finita.

- Si $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ es un s.g. $\Rightarrow p \geqslant \dim E$
- Si $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ son l.i. $\Rightarrow p \leqslant \dim E$
- Si $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ es s.g. y $p = \dim E \Rightarrow \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ es base.
- Si $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ son l.i. y $p = \dim E \Rightarrow \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ es base.
- $\dim E$ es el número máximo de vectores de E l.i
- $\dim E$ es el número mínimo de vectores de E que forman un s.g.

Demo. Todas los resultados anteriores son consecuencia directa del teorema de independencia lineal y de la proposición de la pág. 16.

Propiedades

Sea E un $\mathbb{R}$ espacio vectorial de dimensión finita.

- Si $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ es un s.g. $\Rightarrow p \geqslant \dim E$
- Si $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ son l.i. $\Rightarrow p \leqslant \dim E$
- Si $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ es s.g. y $p = \dim E \Rightarrow \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ es base.
- Si $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ son l.i. y $p = \dim E \Rightarrow \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ es base.
- $\dim E$ es el número máximo de vectores de E l.i
- $\dim E$ es el número mínimo de vectores de E que forman un s.g.

Demo. Todas los resultados anteriores son consecuencia directa del teorema de independencia lineal y de la proposición de la pág. 16.

Propiedades

Sea E un $\mathbb{R}$ espacio vectorial de dimensión finita.

- Si $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ es un s.g. $\Rightarrow p \geqslant \dim E$
- Si $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ son l.i. $\Rightarrow p \leqslant \dim E$
- Si $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ es s.g. y $p = \dim E \Rightarrow \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ es base.
- Si $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ son l.i. y $p = \dim E \Rightarrow \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ es base.
- $\dim E$ es el número máximo de vectores de E l.i
- $\dim E$ es el número mínimo de vectores de E que forman un s.g.

Demo. Todas los resultados anteriores son consecuencia directa del teorema de independencia lineal y de la proposición de la pág. 16.

Propiedades

Sea E un $\mathbb{R}$ espacio vectorial de dimensión finita.

- Si $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ es un s.g. $\Rightarrow p \geqslant \dim E$
- Si $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ son l.i. $\Rightarrow p \leqslant \dim E$
- Si $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ es s.g. y $p = \dim E \Rightarrow \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ es base.
- Si $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ son l.i. y $p = \dim E \Rightarrow \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ es base.
- $\dim E$ es el número máximo de vectores de E l.i
- $\dim E$ es el número mínimo de vectores de E que forman un s.g.

Demo. Todas los resultados anteriores son consecuencia directa del teorema de independencia lineal y de la proposición de la pág. 16.

Propiedades

Sea E un $\mathbb{R}$ espacio vectorial de dimensión finita.

- Si $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ es un s.g. $\Rightarrow p \geqslant \dim E$
- Si $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ son l.i. $\Rightarrow p \leqslant \dim E$
- Si $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ es s.g. y $p = \dim E \Rightarrow \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ es base.
- Si $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ son l.i. y $p = \dim E \Rightarrow \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ es base.
- $\dim E$ es el número máximo de vectores de E l.i
- $\dim E$ es el número mínimo de vectores de E que forman un s.g.

Demo. Todas los resultados anteriores son consecuencia directa del teorema de independencia lineal y de la proposición de la pág. 16.

Propiedades

Sea E un $\mathbb{R}$ espacio vectorial de dimensión finita.

- Si $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ es un s.g. $\Rightarrow p \geqslant \dim E$
- Si $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ son l.i. $\Rightarrow p \leqslant \dim E$
- Si $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ es s.g. y $p = \dim E \Rightarrow \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ es base.
- Si $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ son l.i. y $p = \dim E \Rightarrow \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ es base.
- $\dim E$ es el número máximo de vectores de E l.i
- $\dim E$ es el número mínimo de vectores de E que forman un s.g.

Demo. Todas los resultados anteriores son consecuencia directa del teorema de independencia lineal y de la proposición de la pág. 16.

Propiedades

Sea E un $\mathbb{R}$ espacio vectorial de dimensión finita.

- Si $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ es un s.g. $\Rightarrow p \geqslant \dim E$
- Si $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ son l.i. $\Rightarrow p \leqslant \dim E$
- Si $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ es s.g. y $p = \dim E \Rightarrow \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ es base.
- Si $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ son l.i. y $p = \dim E \Rightarrow \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ es base.
- $\dim E$ es el número máximo de vectores de E l.i
- $\dim E$ es el número mínimo de vectores de E que forman un s.g.

Demo. Todas los resultados anteriores son consecuencia directa del teorema de independencia lineal y de la proposición de la pág. 16.

Teorema de la base incompleta

Teorema Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n. Todo sistema linealmente independiente puede ampliarse hasta obtener una base de E.

Demo La demostración se basa en añadir vectores de una base al sistema l.i. hasta completar una base.

Proposición Si E' es un subespacio de E entonces:

$$\begin{aligned} &\dim E' \leqslant \dim E \\ &\dim E = \dim E' \quad \Leftrightarrow \quad E' = E. \end{aligned}$$

Coordenadas y rango

Definición Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, y $B = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. Se llaman coordenadas de un vector $\mathbf{e}$ en la base B a la n-tupla $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ tal que:

$$\boxed{\mathbf{e} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 + \ldots + \lambda_n \mathbf{e}_n}$$

Nota Las coordenadas en una base son únicas.

Ejemplos Base canónica.

Definición Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, y $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ un sistema de vectores. Se llama rango de $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ a la dimensión del espacio que generan, i.e.

$$\boxed{\operatorname{rang}(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p) = \dim \langle \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p \rangle}$$

Propiedad (Cálculo efectivo del rango)

$$\operatorname{rang}(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p) = \operatorname{rang}(A)$$

siendo A la matriz de coordenadas de $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$

Coordenadas y rango

Definición Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, y $B = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. Se llaman coordenadas de un vector $\mathbf{e}$ en la base B a la n-tupla $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ tal que:

$$\boxed{\mathbf{e} = \lambda_1\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{e}_n}$$

Nota Las coordenadas en una base son únicas.

Ejemplos Base canónica.

Definición Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, y $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ un sistema de vectores. Se llama rango de $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ a la dimensión del espacio que generan, i.e.

$$\boxed{\operatorname{rang}(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p) = \dim \langle \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p \rangle}$$

Propiedad (Cálculo efectivo del rango)

$$\operatorname{rang}(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p) = \operatorname{rang}(A)$$

siendo A la matriz de coordenadas de $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$

Rango. Propiedades

Propiedades Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, y $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ un sistema de vectores.

- $\mathrm{rang}(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p)$ es el mayor número de vectores l.i. en $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$
- $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ son l.i. $\Leftrightarrow \mathrm{rang}(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p) = p$
- $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ es s.g. $\Leftrightarrow \mathrm{rang}(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p) = \dim E$

Demo. Es consecuencia directa de la definición de rango.

Tema 3

Espacios vectoriales

Suma de Subespacios

Definición Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y sean E_1 y E_2 subespacios de E. Se llama suma de E_1 y E_2, y se denota $E_1 + E_2$, al conjunto:

$$\boxed{E_1 + E_2 = \{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \, : \, \mathbf{e}_1 \in E_1, \, \mathbf{e}_2 \in E_2\}}$$

Proposición $E_1 + E_2$ es el menor subespacio que contiene a E_1 y E_2.

Demo

1. $E_1 + E_2$ es subespacio. Es fácil comprobar que cualquier combinación lineal de elementos de $E_1 + E_2$ pertenece a $E_1 + E_2$.

2. $E_1 + E_2$ es el menor subespacio que contiene a E_1 y a E_2. Si E' es un subespacio que contiene a E_1 y a E_2 debe contener sus combinaciones lineales, en particular a

$$\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \text{ con } \mathbf{e}_1 \in E_1, \, \mathbf{e}_2 \in E_2$$

es decir, $E_1 + E_2 \subset E'$.

Suma de subespacios

Proposición Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y sean E_1 y E_2 dos subespacios vectoriales de E.
Si $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ es un sistema generador de E_1 y $\{\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_q\}$ es un sistema generador de E_2, entonces

$$\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p, \mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_q\}$$

es un sistema generador de $E_1 + E_2$

Demo Dado $\mathbf{e} \in E_1 + E_2$, por definición $\mathbf{e} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$, siendo $\mathbf{u}_1 \in E_1$ y $\mathbf{u}_2 \in E_2$. Utilizando que los sistemas $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ y $\{\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_q\}$ son generadores podemos escribir:

$$\mathbf{e} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = (\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \ldots + \lambda_p \mathbf{e}_p) + (\mu_1 \mathbf{e}'_1 + \ldots + \mu_q \mathbf{e}'_q)$$

Lo cual prueba el resultado.

Suma directa

Definición Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y sean E_1 y E_2 dos subespacios vectoriales de E. Se dice que E_1 y E_2 están en posición de suma directa y se denota $E_1 \oplus E_2$ si todo vector de $E_1 + E_2$ se escribe de forma única como suma de un vector de E_1 y otro de E_2

$$\forall \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1' \in E_1,\ \forall \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2' \in E_2 : \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1' + \mathbf{e}_2' \Rightarrow \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1' \text{ y } \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2'$$

Proposición

$$E_1 \oplus E_2 \Leftrightarrow E_1 \cap E_2 = \{\mathbf{0}\}$$

Demo $\boxed{\Rightarrow}$ Sea $\mathbf{e} \in E_1 \cap E_2$ veamos que $\mathbf{e} = \mathbf{0}$. Notar que $\mathbf{e}$ se puede escribir

$$\mathbf{e} = \mathbf{e} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{e},$$

y por definición de suma directa $\mathbf{e} = \mathbf{0}$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Sean $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1' \in E_1$ y $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2' \in E_2$ tales que

$$\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1' + \mathbf{e}_2'$$

veamos que $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1'$ y $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2'$. Operando tenemos:

$$\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1' + \mathbf{e}_2' \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2' \in E_1 \cap E_2$$

y por hipótesis resulta $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1'$ y $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2'$

Suma directa

Definición Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y sean E_1 y E_2 dos subespacios vectoriales de E. Se dice que E_1 y E_2 están en posición de suma directa y se denota $E_1 \oplus E_2$ si todo vector de $E_1 + E_2$ se escribe de forma única como suma de un vector de E_1 y otro de E_2

$$\boxed{\forall \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1' \in E_1,\ \forall \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2' \in E_2\ :\ \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1' + \mathbf{e}_2' \ \Rightarrow\ \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1' \text{ y } \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2'}$$

Proposición

$$\boxed{E_1 \oplus E_2 \Leftrightarrow E_1 \cap E_2 = \{\mathbf{0}\}}$$

Demo $\boxed{\Rightarrow}$ Sea $\mathbf{e} \in E_1 \cap E_2$ veamos que $\mathbf{e} = \mathbf{0}$. Notar que $\mathbf{e}$ se puede escribir

$$\mathbf{e} = \mathbf{e} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{e},$$

y por definición de suma directa $\mathbf{e} = \mathbf{0}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Sean $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1' \in E_1$ y $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2' \in E_2$ tales que

$$\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1' + \mathbf{e}_2'$$

veamos que $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1'$ y $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2'$. Operando tenemos:

$$\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1' + \mathbf{e}_2' \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2' \in E_1 \cap E_2$$

y por hipótesis resulta $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1'$ y $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2'$

Suma directa

Propiedades Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y sean E_1 y E_2 dos subespacios vectoriales de E.

1. $E_1 \oplus E_2$ si y sólo si la únion de una base de E_1 y una base de E_2 es una base de $E_1 + E_2$
2. $\dim E_1 \oplus E_2 = \dim E_1 + \dim E_2$

Demo

Suma directa

Propiedades Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y sean E_1 y E_2 dos subespacios vectoriales de E.

1. $E_1 \oplus E_2$ si y sólo si la únion de una base de E_1 y una base de E_2 es una base de $E_1 + E_2$
2. $\dim E_1 \oplus E_2 = \dim E_1 + \dim E_2$

Demo

1. $\boxed{\Rightarrow}$ Si $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ es base de E_1, y $\{\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_q\}$ es base de E_2, veamos que $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p, \mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_q\}$ es base de $E_1 + E_2$. Basta comprobar que son l.i. En efecto:

$$\begin{aligned}
&\lambda_1\mathbf{e}_1 + \ldots + \lambda_p\mathbf{e}_p + \mu_1\mathbf{e}'_1 + \ldots + \mu_q\mathbf{e}'_q = \mathbf{0}\\
&\quad \Rightarrow \quad \lambda_1\mathbf{e}_1 + \ldots + \lambda_p\mathbf{e}_p = -(\mu_1\mathbf{e}'_1 + \ldots + \mu_q\mathbf{e}'_q)\\
&\quad \xRightarrow[E_1\cap E_2=\{\mathbf{0}\}]{} \begin{cases} \lambda_1\mathbf{e}_1 + \ldots + \lambda_p\mathbf{e}_p = \mathbf{0}\\ \mu_1\mathbf{e}'_1 + \ldots + \mu_q\mathbf{e}'_q = \mathbf{0}\end{cases}\\
&\quad \xRightarrow[\begin{array}{c}\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_p\}\\ \{\mathbf{e}'_1,\ldots,\mathbf{e}'_q\}\end{array}\text{ son l.i.}]{} \begin{cases} \lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0,\\ \mu_1 = \ldots = \mu_q = 0,\end{cases}
\end{aligned}$$

Suma directa

Propiedades Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y sean E_1 y E_2 dos subespacios vectoriales de E.

1. $E_1 \oplus E_2$ si y sólo si la únion de una base de E_1 y una base de E_2 es una base de $E_1 + E_2$
2. $\dim E_1 \oplus E_2 = \dim E_1 + \dim E_2$

Demo

1. $\boxed{\Leftarrow}$ Si $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ es base de E_1, $\{\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_q\}$ es base de E_2, y $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p, \mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_q\}$ es base de $E_1 + E_2$, veamos que $E_1 \oplus E_2$.

Sea $\mathbf{e} \in E_1 \cap E_2$, basta probar que $\mathbf{e} = \mathbf{0}$. Por estar $\mathbf{e}$ en la intersección tenemos:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{e} &= \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \ldots + \lambda_p \mathbf{e}_p \\ \mathbf{e} &= \mu_1 \mathbf{e}'_1 + \ldots + \mu_q \mathbf{e}'_q \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \ldots \lambda_p \mathbf{e}_p - (\mu_1 \mathbf{e}'_1 + \ldots + \mu_q \mathbf{e}'_q) = \mathbf{0}$$

y por ser $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p, \mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_q\}$ base de $E_1 \oplus E_2$ y en particular l.i. concluimos que $\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = \mu_1 = \ldots = \mu_q = 0$ y por tanto

$$\mathbf{e} = \mathbf{0}$$

Suma directa

Propiedades Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y sean E_1 y E_2 dos subespacios vectoriales de E.

1. $E_1 \oplus E_2$ si y sólo si la únion de una base de E_1 y una base de E_2 es una base de $E_1 + E_2$
2. $\dim E_1 \oplus E_2 = \dim E_1 + \dim E_2$

Demo
2. Es una consecuencia directa de 1.

Suplementario

Definición Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y sean E_1 y E_2 dos subespacios vectoriales de E. Se dice que E_1 y E_2 son suplementarios si todo vector de E se escribe de forma única como suma de un vector de E_1 y otro de E_2

Proposición

$$E_1 \text{ y } E_2 \text{ son suplementarios} \overset{(1)}{\Longleftrightarrow} E_1 \oplus E_2 = E \overset{(2)}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} E_1 + E_2 = E \\ E_1 \cap E_2 = \{\mathbf{0}\} \end{cases}$$

Demo

$\boxed{\overset{1}{\Leftrightarrow}}$ Por definición se deducen ambas implicaciones.

$\boxed{\overset{2}{\Leftrightarrow}}$ La demostración es la misma que la homóloga para el caso de suma directa con la observación de que $E = E_1 + E_2$.

Suplementario

Definición Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y sean E_1 y E_2 dos subespacios vectoriales de E. Se dice que E_1 y E_2 son suplementarios si todo vector de E se escribe de forma única como suma de un vector de E_1 y otro de E_2

Proposición

$$E_1 \text{ y } E_2 \text{ son suplementarios} \overset{(1)}{\Longleftrightarrow} E_1 \oplus E_2 = E \overset{(2)}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} E_1 + E_2 = E \\ E_1 \cap E_2 = \{\mathbf{0}\} \end{array} \right.$$

Demo

$\boxed{\overset{1}{\Longleftrightarrow}}$ Por definición se deducen ambas implicaciones.

$\boxed{\overset{2}{\Longleftrightarrow}}$ La demostración es la misma que la homóloga para el caso de suma directa con la observación de que $E = E_1 + E_2$.

Suplementario

Proposición

1. E_1 y E_2 son suplementarios si y sólo si la únion de una base de E_1 y una base de E_2 es una base de E
2. Si E_1 y E_2 son suplementarios:

$$\dim E = \dim E_1 + \dim E_2$$

3. Todo subespecio vectorial E' de E tiene algún subespacio suplementario.

Demo

1. La demostración es la misma que la homóloga para el caso de suma directa con la observación de que $E_1 + E_2 = E$
2. Es consecuencia de 1.
3. Basta usar el teorema de la base incompleta.

Suplementario

Proposición

1. E_1 y E_2 son suplementarios si y sólo si la únion de una base de E_1 y una base de E_2 es una base de E
2. Si E_1 y E_2 son suplementarios:

$$\dim E = \dim E_1 + \dim E_2$$

3. Todo subespecio vectorial E' de E tiene algún subespacio suplementario.

Demo

1. La demostración es la misma que la homóloga para el caso de suma directa con la observación de que $E_1 + E_2 = E$
2. Es consecuencia de 1.
3. Basta usar el teorema de la base incompleta.

Fórmula de Grassmann

Proposicion Sea E_1 y E_2 dos subespacios vectoriales de E. Entonces:

$$\dim E_1 + E_2 = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim E_1 \cap E_2$$

Demo Sea $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p\}$ una base de $E_1 \cap E_2$. Utilizando el teorema de la base incompleta, se construyen sendas bases de E_1 y E_2:

$$\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p\} \text{ base de } E_1 \cap E_2 \Rightarrow \quad \begin{cases} \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r\} \text{ base de } E_1 \\ \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q\} \text{ base de } E_2 \end{cases}$$

Veamos que $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q\}$ es base de $E_1 + E_2$.

Fórmula de Grassmann

Proposicion Sea E_1 y E_2 dos subespacios vectoriales de E. Entonces:

$$\dim E_1 + E_2 = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim E_1 \cap E_2$$

Demo Sea $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ una base de $E_1 \cap E_2$. Utilizando el teorema de la base incompleta, se construyen sendas bases de E_1 y E_2:

$$\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\} \text{ base de } E_1 \cap E_2 \Rightarrow \quad \begin{cases} \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r\} \text{ base de } E_1 \\ \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q\} \text{ base de } E_2 \end{cases}$$

Veamos que $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q\}$ es base de $E_1 + E_2$.

Fórmula de Grassmann

Proposicion Sea E_1 y E_2 dos subespacios vectoriales de E. Entonces:

$$\dim E_1 + E_2 = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim E_1 \cap E_2$$

Demo Sea $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ una base de $E_1 \cap E_2$. Utilizando el teorema de la base incompleta, se construyen sendas bases de E_1 y E_2:

$$\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\} \text{ base de } E_1 \cap E_2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r\} \text{ base de } E_1 \\ \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q\} \text{ base de } E_2 \end{array} \right.$$

Veamos que $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q\}$ es base de $E_1 + E_2$. Es claro que son generadores (por construcción). Ademas son l.i.

$$\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \ldots + \lambda_p \mathbf{e}_p + \mu_1 \mathbf{u}_1 + \ldots + \mu_r \mathbf{u}_r + \gamma_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \gamma_r \mathbf{v}_r = \mathbf{0} \qquad (1)$$

$$E_1 \ni \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \ldots + \lambda_p \mathbf{e}_p + \mu_1 \mathbf{u}_1 + \ldots + \mu_r \mathbf{u}_r = -\gamma_1 \mathbf{v}_1 - \ldots - \gamma_r \mathbf{v}_r \in E_2$$

Luego $-\gamma_1 \mathbf{v}_1 - \ldots - \gamma_r \mathbf{v}_r \in E_1 \cap E_2$ y por tanto se puede escribir:

$$-\gamma_1 \mathbf{v}_1 - \ldots - \gamma_r \mathbf{v}_r = \lambda_1' \mathbf{e}_1 + \ldots + \lambda_p' \mathbf{e}_p$$

Por ser $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ base de E_2, se obtiene $\gamma_1 = \ldots = \gamma_r = 0$. Sustituyendo esto en (1) y usando que $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r\}$ es base de E_2, deducimos: $\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = \mu_1 = \ldots = \mu_r = 0$ y concluímos la l.i.

Fórmula de Grassmann

Proposicion Sea E_1 y E_2 dos subespacios vectoriales de E. Entonces:

$$\dim E_1 + E_2 = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim E_1 \cap E_2$$

Demo Sea $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ una base de $E_1 \cap E_2$. Utilizando el teorema de la base incompleta, se construyen sendas bases de E_1 y E_2:

$$\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\} \text{ base de } E_1 \cap E_2 \Rightarrow \begin{cases} \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r\} \text{ base de } E_1 \\ \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q\} \text{ base de } E_2 \end{cases}$$

Veamos que $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q\}$ es base de $E_1 + E_2$.
Para finalizar basta observar:

$$\begin{aligned} & p + r + q = (p + r) + (p + q) - p \\ \Rightarrow \quad & \dim E_1 + E_2 = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim E_1 \cap E_2 \end{aligned}$$

Tema 4

Aplicaciones lineales

Tema 4

Aplicaciones lineales

Aplicación Lineal

Definición Sean E, E' dos $\mathbb{R}$ espacios vectoriales. Se dice que $f : E \to E'$ es una aplicación lineal (u *homomorfismo de* $\mathbb{R}$*-espacios vectoriales*) si:

$$\boxed{f(\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2) = \lambda_1 f(\mathbf{e}_1) + \lambda_2 f(\mathbf{e}_2), \qquad \forall \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in E,\ \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}}$$

Nota:

- La condición anterior es equivalente a:
  1. $f(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = f(\mathbf{e}_1) + f(\mathbf{e}_2), \quad \forall \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in E$
  2. $f(\lambda \mathbf{e}) = \lambda f(\mathbf{e}), \quad \forall \mathbf{e} \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$
- Si $f : E \to E$ es una aplicación lineal de un espacio en sí mismo se denomina endomorfismo.

Ejemplos

Aplicación Lineal. Propiedades

Proposición Sea $f : E \to E'$ una aplicación lineal. Entonces:

1. $f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \mathbf{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(\mathbf{e}_i)$. En particular:

$$f(\mathbf{0}_E) = \mathbf{0}_{E'}, \qquad f(-\mathbf{e}) = -f(\mathbf{e})$$

2. $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ es l.d. $\quad \Rightarrow \quad \{f(\mathbf{e}_1), \ldots, f(\mathbf{e}_p)\}$ es l.d.
3. La composición de aplicaciones lineales es lineal.
4. Si una aplicación lineal es biyectiva su inversa es también una aplicación lineal.

Demo

Aplicación Lineal. Propiedades

Proposición Sea $f : E \to E'$ una aplicación lineal. Entonces:

1. $f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \mathbf{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(\mathbf{e}_i)$. En particular:
$$f(\mathbf{0}_E) = \mathbf{0}_{E'}, \qquad f(-\mathbf{e}) = -f(\mathbf{e})$$
2. $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p\}$ es l.d. $\quad \Rightarrow \quad \{f(\mathbf{e}_1), \dots, f(\mathbf{e}_p)\}$ es l.d.
3. La composición de aplicaciones lineales es lineal.
4. Si una aplicación lineal es biyectiva su inversa es también una aplicación lineal.

Demo

1.

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \mathbf{e}_i\right) &= f\left(\lambda_1 \mathbf{e}_1 + (\lambda_2 \mathbf{e}_2 + \ldots + \lambda_p \mathbf{e}_p)\right) \\ &\overset{f-lineal}{=} \lambda_1 f(\mathbf{e}_1) + f\left(\lambda_2 \mathbf{e}_2 + (\lambda_2 \mathbf{e}_2 + \ldots, \lambda_p \mathbf{e}_p)\right) \\ &\overset{f-lineal}{=} \ldots \\ &\overset{f-lineal}{=} \lambda_1 f(\mathbf{e}_1) + \ldots + \lambda_p f(\mathbf{e}_p) \end{aligned}$$

Aplicación Lineal. Propiedades

Proposición Sea $f : E \to E'$ una aplicación lineal. Entonces:

1. $f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \mathbf{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(\mathbf{e}_i)$. En particular:

$$f(\mathbf{0}_E) = \mathbf{0}_{E'}, \qquad f(-\mathbf{e}) = -f(\mathbf{e})$$

2. $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ es l.d. $\quad \Rightarrow \quad \{f(\mathbf{e}_1), \ldots, f(\mathbf{e}_p)\}$ es l.d.
3. La composición de aplicaciones lineales es lineal.
4. Si una aplicación lineal es biyectiva su inversa es también una aplicación lineal.

Demo

2.

$$\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \ldots + \lambda_p \mathbf{e}_p = \mathbf{0}_E \quad \xrightarrow{\text{Tomando } f}$$

$$f(\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \ldots + \lambda_p \mathbf{e}_p) = f(\mathbf{0}_E) \xrightarrow{\text{f-lineal}}$$

$$\lambda_1 f(\mathbf{e}_1) + \ldots + \lambda_p f(\mathbf{e}_p) = \mathbf{0}_{E'}$$

Aplicación Lineal. Propiedades

Proposición Sea $f : E \to E'$ una aplicación lineal. Entonces:

1. $f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \mathbf{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(\mathbf{e}_i)$. En particular:

$$f(\mathbf{0}_E) = \mathbf{0}_{E'}, \qquad f(-\mathbf{e}) = -f(\mathbf{e})$$

2. $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ es l.d. $\quad\Rightarrow\quad$ $\{f(\mathbf{e}_1), \ldots, f(\mathbf{e}_p)\}$ es l.d.
3. La composición de aplicaciones lineales es lineal.
4. Si una aplicación lineal es biyectiva su inversa es también una aplicación lineal.

Demo

3. Sean $f : E \to E'$ y $g : E' \to E''$

$$\begin{aligned}(g \circ f)(\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2) &= g(f(\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2)) \overset{f-lineal}{=} g(\lambda_1 f(\mathbf{e}_1) + \lambda_2 f(\mathbf{e}_2)) \\ &\overset{g-lineal}{=} \lambda_1 g(f(\mathbf{e}_1)) + \lambda_2 g(f(\mathbf{e}_2)) \\ &= \lambda_1 (g \circ f)(\mathbf{e}_1) + \lambda_2 (g \circ f)(\mathbf{e}_2).\end{aligned}$$

Aplicación Lineal. Propiedades

Proposición Sea $f : E \to E'$ una aplicación lineal. Entonces:

1. $f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \mathbf{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(\mathbf{e}_i)$. En particular:

$$f(\mathbf{0}_E) = \mathbf{0}_{E'}, \qquad f(-\mathbf{e}) = -f(\mathbf{e})$$

2. $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ es l.d. $\quad \Rightarrow \quad \{f(\mathbf{e}_1), \ldots, f(\mathbf{e}_p)\}$ es l.d.
3. La composición de aplicaciones lineales es lineal.
4. Si una aplicación lineal es biyectiva su inversa es también una aplicación lineal.

Demo

4.Es consecuencia directa de la definición de aplicación inversa.

El espacio vectorial Hom (E, E')

Definición Sean E, E' dos $\mathbb{R}-$ espacios vectoriales, y sean f y g sendas aplicaciones lineales de E en E'. Se definen

$$\begin{aligned} (f+g) : E \longrightarrow E', &\quad (f+g)(\mathbf{u}) = f(\mathbf{u}) + g(\mathbf{u}), &\quad \forall \mathbf{u} \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \\ (\lambda f) : E \longrightarrow E', &\quad (\lambda f)(\mathbf{u}) = \lambda f(\mathbf{u}), &\quad \forall \mathbf{u} \in E \end{aligned}$$

Proposición Con las definiciones anteriores el conjunto $\mathrm{Hom}(E, E')$ de aplicaciones lineales de E en E' es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Demo Al lector.

Observación Nótese que la aplicación lineal 0, se define naturalmente $0(\mathbf{u}) = \mathbf{0}_{E'}, \forall \mathbf{u} \in E$

Análogamente la aplicación $(-f)$ tiene la definición natural: $(-f)(\mathbf{u}) = -f(\mathbf{u}), \forall \mathbf{u} \in E$

Ejemplos

El espacio vectorial Hom (E, E')

Definición Sean E, E' dos $\mathbb{R}-$ espacios vectoriales, y sean f y g sendas aplicaciones lineales de E en E'. Se definen

$$\boxed{\begin{array}{lll} (f+g): E \longrightarrow E', & (f+g)(\mathbf{u}) = f(\mathbf{u}) + g(\mathbf{u}), & \forall \mathbf{u} \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \\ (\lambda f): E \longrightarrow E', & (\lambda f)(\mathbf{u}) = \lambda f(\mathbf{u}), & \forall \mathbf{u} \in E \end{array}}$$

Proposición Con las definiciones anteriores el conjunto $\mathrm{Hom}(E, E')$ de aplicaciones lineales de E en E' es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Demo Al lector.

Observación Nótese que la aplicación lineal 0, se define naturalmente $0(\mathbf{u}) = \mathbf{0}_{E'}, \forall \mathbf{u} \in E$

Análogamente la aplicación $(-f)$ tiene la definición natural: $(-f)(\mathbf{u}) = -f(\mathbf{u}), \forall \mathbf{u} \in E$

Ejemplos

El espacio vectorial Hom (E, E')

Definición Sean E, E' dos $\mathbb{R}-$ espacios vectoriales, y sean f y g sendas aplicaciones lineales de E en E'. Se definen

$$\begin{array}{lll} (f+g): E \longrightarrow E', & (f+g)(\mathbf{u}) = f(\mathbf{u}) + g(\mathbf{u}), & \forall \mathbf{u} \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \\ (\lambda f): E \longrightarrow E', & (\lambda f)(\mathbf{u}) = \lambda f(\mathbf{u}), & \forall \mathbf{u} \in E \end{array}$$

Proposición Con las definiciones anteriores el conjunto $\mathrm{Hom}(E, E')$ de aplicaciones lineales de E en E' es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Demo Al lector.

Observación Nótese que la aplicación lineal 0, se define naturalmente $0(\mathbf{u}) = \mathbf{0}_{E'}, \forall \mathbf{u} \in E$

Análogamente la aplicación $(-f)$ tiene la definición natural: $(-f)(\mathbf{u}) = -f(\mathbf{u}), \forall \mathbf{u} \in E$

Ejemplos

El espacio vectorial Hom (E, E')

Definición Sean E, E' dos $\mathbb{R}-$ espacios vectoriales, y sean f y g sendas aplicaciones lineales de E en E'. Se definen

$$\begin{aligned} (f+g): E \longrightarrow E', &\quad (f+g)(\mathbf{u}) = f(\mathbf{u}) + g(\mathbf{u}), &\quad \forall \mathbf{u} \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \\ (\lambda f): E \longrightarrow E', &\quad (\lambda f)(\mathbf{u}) = \lambda f(\mathbf{u}), &\quad \forall \mathbf{u} \in E \end{aligned}$$

Proposición Con las definiciones anteriores el conjunto $\mathrm{Hom}(E, E')$ de aplicaciones lineales de E en E' es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Demo Al lector.

Observación Nótese que la aplicación lineal 0, se define naturalmente $0(\mathbf{u}) = \mathbf{0}_{E'}, \forall \mathbf{u} \in E$

Análogamente la aplicación $(-f)$ tiene la definición natural: $(-f)(\mathbf{u}) = -f(\mathbf{u}), \forall \mathbf{u} \in E$

Ejemplos

El espacio vectorial Hom (E, E')

Definición Sean E, E' dos $\mathbb{R}-$ espacios vectoriales, y sean f y g sendas aplicaciones lineales de E en E'. Se definen

$$\boxed{\begin{array}{lll} (f+g): E \longrightarrow E', & (f+g)(\mathbf{u}) = f(\mathbf{u}) + g(\mathbf{u}), & \forall \mathbf{u} \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \\ (\lambda f): E \longrightarrow E', & (\lambda f)(\mathbf{u}) = \lambda f(\mathbf{u}), & \forall \mathbf{u} \in E \end{array}}$$

Proposición Con las definiciones anteriores el conjunto $\mathrm{Hom}(E, E')$ de aplicaciones lineales de E en E' es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Demo Al lector.

Observación Nótese que la aplicación lineal 0, se define naturalmente $0(\mathbf{u}) = \mathbf{0}_{E'}, \forall \mathbf{u} \in E$

Análogamente la aplicación $(-f)$ tiene la definición natural: $(-f)(\mathbf{u}) = -f(\mathbf{u}), \forall \mathbf{u} \in E$

Ejemplos

El espacio vectorial Hom (E, E')

Definición Sean E, E' dos $\mathbb{R}-$ espacios vectoriales, y sean f y g sendas aplicaciones lineales de E en E'. Se definen

$$\boxed{\begin{array}{lll} (f+g): E \longrightarrow E', & (f+g)(\mathbf{u}) = f(\mathbf{u}) + g(\mathbf{u}), & \forall \mathbf{u} \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \\ (\lambda f): E \longrightarrow E', & (\lambda f)(\mathbf{u}) = \lambda f(\mathbf{u}), & \forall \mathbf{u} \in E \end{array}}$$

Proposición Con las definiciones anteriores el conjunto $\mathrm{Hom}(E, E')$ de aplicaciones lineales de E en E' es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Demo Al lector.

Observación Nótese que la aplicación lineal 0, se define naturalmente $0(\mathbf{u}) = \mathbf{0}_{E'}, \forall \mathbf{u} \in E$

Análogamente la aplicación $(-f)$ tiene la definición natural: $(-f)(\mathbf{u}) = -f(\mathbf{u}), \forall \mathbf{u} \in E$

Ejemplos

Tema 4

Aplicaciones lineales

Núcleo e Imagen

Sea $f : E \to E'$ una aplicación lineal.

- Se llama **Núcleo** de f y se denota por $\operatorname{Ker} f$, al conjunto:

$$\boxed{\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{e} \in E : f(\mathbf{e}) = \mathbf{0}_{E'}\}}$$

- Se llama **Imagen** de f y se denota por $\operatorname{Im} f$, al conjunto

$$\boxed{\operatorname{Im} f = \{\mathbf{e}' \in E' : \exists\, \mathbf{e} \in E \text{ con } f(\mathbf{e}) = \mathbf{e}'\}}$$

Propiedad $\operatorname{Ker} f \subset E$ e $\operatorname{Im} f \subset E'$ son subespacios vectoriales

Demo Al lector.

Ejemplos

Núcleo e Imagen

Sea $f : E \to E'$ una aplicación lineal.

- Se llama **Núcleo** de f y se denota por $\operatorname{Ker} f$, al conjunto:

$$\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{e} \in E : f(\mathbf{e}) = \mathbf{0}_{E'}\}$$

- Se llama **Imagen** de f y se denota por $\operatorname{Im} f$, al conjunto

$$\operatorname{Im} f = \{\mathbf{e}' \in E' : \exists\, \mathbf{e} \in E \text{ con } f(\mathbf{e}) = \mathbf{e}'\}$$

Propiedad $\operatorname{Ker} f \subset E$ e $\operatorname{Im} f \subset E'$ son subespacios vectoriales

Demo Al lector.

Ejemplos

Núcleo e Imagen

Sea $f : E \to E'$ una aplicación lineal.

- Se llama **Núcleo** de f y se denota por $\operatorname{Ker} f$, al conjunto:

$$\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{e} \in E : f(\mathbf{e}) = \mathbf{0}_{E'}\}$$

- Se llama **Imagen** de f y se denota por $\operatorname{Im} f$, al conjunto

$$\operatorname{Im} f = \{\mathbf{e}' \in E' : \exists\, \mathbf{e} \in E \text{ con } f(\mathbf{e}) = \mathbf{e}'\}$$

Propiedad $\operatorname{Ker} f \subset E$ e $\operatorname{Im} f \subset E'$ son subespacios vectoriales

Demo Al lector.

Ejemplos

Tema 4

Aplicaciones lineales

Propiedades

Sea $f : E \to E'$ una aplicación lineal.

Proposición

$$\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\} \quad \text{s.g de } E \quad \Rightarrow \quad \{f(\mathbf{e}_1), \ldots, f(\mathbf{e}_p)\} \quad \text{s.g de } \operatorname{Im} f$$

Definición Se llama rango de f a la dimensión de $\operatorname{Im} f$

Propiedades

Sea $f : E \to E'$ una aplicación lineal.

Proposición

$$\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\} \quad \text{s.g de } E \quad \Rightarrow \quad \{f(\mathbf{e}_1), \ldots, f(\mathbf{e}_p)\} \quad \text{s.g de } \operatorname{Im} f$$

Demo Sea $\mathbf{e}' \in \operatorname{Im} f$ veamos que existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ tal que

$$\mathbf{e}' = \lambda_1 f(\mathbf{e}_1) + \ldots + \lambda_p f(\mathbf{e}_p)$$

Por ser $\mathbf{e}' \in \operatorname{Im} f$, existe $\mathbf{e} \in E$ tal que $f(\mathbf{e}) = \mathbf{e}'$. Mientras $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ es s.g deducimos la existencia de escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ tales que:

$$\mathbf{e} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \ldots + \lambda_p \mathbf{e}_p,$$

Tomando f y aplicando que f es lineal se deduce el resultado.

Definición Se llama rango de f a la dimensión de $\operatorname{Im} f$

Propiedades

Sea $f : E \to E'$ una aplicación lineal.

Proposición

$$\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\} \quad \text{s.g de } E \quad \Rightarrow \quad \{f(\mathbf{e}_1), \ldots, f(\mathbf{e}_p)\} \quad \text{s.g de } \operatorname{Im} f$$

Demo Sea $\mathbf{e}' \in \operatorname{Im} f$ veamos que existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ tal que

$$\mathbf{e}' = \lambda_1 f(\mathbf{e}_1) + \ldots + \lambda_p f(\mathbf{e}_p)$$

Por ser $\mathbf{e}' \in \operatorname{Im} f$, existe $\mathbf{e} \in E$ tal que $f(\mathbf{e}) = \mathbf{e}'$. Mientras $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ es s.g deducimos la existencia de escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ tales que:

$$\mathbf{e} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \ldots + \lambda_p \mathbf{e}_p,$$

Tomando f y aplicando que f es lineal se deduce el resultado.

Definición Se llama rango de f a la dimensión de $\operatorname{Im} f$

Propiedades

Sea $f : E \to E'$ una aplicación lineal.

Proposición

$$\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\} \quad \text{s.g de } E \quad \Rightarrow \quad \{f(\mathbf{e}_1), \ldots, f(\mathbf{e}_p)\} \quad \text{s.g de } \operatorname{Im} f$$

Demo Sea $\mathbf{e}' \in \operatorname{Im} f$ veamos que existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ tal que

$$\mathbf{e}' = \lambda_1 f(\mathbf{e}_1) + \ldots + \lambda_p f(\mathbf{e}_p)$$

Por ser $\mathbf{e}' \in \operatorname{Im} f$, existe $\mathbf{e} \in E$ tal que $f(\mathbf{e}) = \mathbf{e}'$. Mientras $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ es s.g deducimos la existencia de escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ tales que:

$$\mathbf{e} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \ldots + \lambda_p \mathbf{e}_p,$$

Tomando f y aplicando que f es lineal se deduce el resultado.

Definición Se llama rango de f a la dimensión de $\operatorname{Im} f$

Propiedades

Sea $f : E \to E'$ una aplicación lineal.

Proposición

$$\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\} \quad \text{s.g de } E \quad \Rightarrow \quad \{f(\mathbf{e}_1), \ldots, f(\mathbf{e}_p)\} \quad \text{s.g de } \operatorname{Im} f$$

Definición Se llama rango de f a la dimensión de $\operatorname{Im} f$

Propiedades

Proposición Sea $f : E \to E'$ una aplicación lineal.

$$\boxed{f \text{ es inyectiva} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}\}}$$

Demo

$\boxed{\Rightarrow}$ Sea $\mathbf{e} \in \operatorname{Ker} f$, veamos que $\mathbf{e} = \mathbf{0}$. En efecto:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{e} \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow f(\mathbf{e}) = \mathbf{0} \\ f - \text{lineal} \Rightarrow f(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \end{array}\right\} \Rightarrow f(\mathbf{e}) = f(\mathbf{0}) \xrightarrow[f \text{ es inyectiva}]{} \mathbf{e} = \mathbf{0}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Sean $\mathbf{e}, \bar{\mathbf{e}} \in E$ tales que $f(\mathbf{e}) = f(\bar{\mathbf{e}})$, veamos que $\mathbf{e} = \bar{\mathbf{e}}$. En efecto:

$$f(\mathbf{e}) = f(\bar{\mathbf{e}}) \xrightarrow[f \text{ lineal}]{} f(\mathbf{e} - \bar{\mathbf{e}}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{e} - \bar{\mathbf{e}} \in \operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}\}$$

$$\Rightarrow \mathbf{e} = \bar{\mathbf{e}}$$

Propiedades

Proposición Sea $f : E \to E'$ una aplicación lineal.

$$\boxed{f \text{ es inyectiva} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}\}}$$

Demo

$\boxed{\Rightarrow}$ Sea $\mathbf{e} \in \operatorname{Ker} f$, veamos que $\mathbf{e} = \mathbf{0}$. En efecto:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{e} \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow f(\mathbf{e}) = \mathbf{0} \\ f - \text{lineal} \Rightarrow f(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \end{array}\right\} \Rightarrow f(\mathbf{e}) = f(\mathbf{0}) \xrightarrow[f \text{ es inyectiva}]{} \mathbf{e} = \mathbf{0}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Sean $\mathbf{e}, \bar{\mathbf{e}} \in E$ tales que $f(\mathbf{e}) = f(\bar{\mathbf{e}})$, veamos que $\mathbf{e} = \bar{\mathbf{e}}$. En efecto:

$$f(\mathbf{e}) = f(\bar{\mathbf{e}}) \xrightarrow[f \text{ lineal}]{} f(\mathbf{e} - \bar{\mathbf{e}}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{e} - \bar{\mathbf{e}} \in \operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}\}$$

$$\Rightarrow \mathbf{e} = \bar{\mathbf{e}}$$

Propiedades

Proposición Sea $f : E \to E'$ una aplicación lineal.

$$\boxed{f \text{ es inyectiva} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}\}}$$

Demo

$\boxed{\Rightarrow}$ Sea $\mathbf{e} \in \operatorname{Ker} f$, veamos que $\mathbf{e} = \mathbf{0}$. En efecto:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{e} \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow f(\mathbf{e}) = \mathbf{0} \\ f - \text{lineal} \Rightarrow f(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \end{array}\right\} \Rightarrow f(\mathbf{e}) = f(\mathbf{0}) \xrightarrow[f \text{ es inyectiva}]{} \mathbf{e} = \mathbf{0}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Sean $\mathbf{e}, \bar{\mathbf{e}} \in E$ tales que $f(\mathbf{e}) = f(\bar{\mathbf{e}})$, veamos que $\mathbf{e} = \bar{\mathbf{e}}$. En efecto:

$$f(\mathbf{e}) = f(\bar{\mathbf{e}}) \xrightarrow[f \text{ lineal}]{} f(\mathbf{e} - \bar{\mathbf{e}}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{e} - \bar{\mathbf{e}} \in \operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}\}$$

$$\Rightarrow \mathbf{e} = \bar{\mathbf{e}}$$

Propiedades

Proposición Sea $f: E \to E'$ una aplicación lineal.

$$\boxed{f \text{ es inyectiva} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}\}}$$

Demo

$\boxed{\Rightarrow}$ Sea $\mathbf{e} \in \operatorname{Ker} f$, veamos que $\mathbf{e} = \mathbf{0}$. En efecto:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{e} \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow f(\mathbf{e}) = \mathbf{0} \\ f - \text{lineal} \Rightarrow f(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \end{array}\right\} \Rightarrow f(\mathbf{e}) = f(\mathbf{0}) \xrightarrow[f \text{ es inyectiva}]{} \mathbf{e} = \mathbf{0}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Sean $\mathbf{e}, \bar{\mathbf{e}} \in E$ tales que $f(\mathbf{e}) = f(\bar{\mathbf{e}})$, veamos que $\mathbf{e} = \bar{\mathbf{e}}$. En efecto:

$$f(\mathbf{e}) = f(\bar{\mathbf{e}}) \xrightarrow[f \text{ lineal}]{} f(\mathbf{e} - \bar{\mathbf{e}}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{e} - \bar{\mathbf{e}} \in \operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}\}$$

$$\Rightarrow \mathbf{e} = \bar{\mathbf{e}}$$

Propiedades

Proposición Sea $f : E \to E'$ una aplicación lineal.

$$\boxed{f \text{ es inyectiva} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}\}}$$

Demo

$\boxed{\Rightarrow}$ Sea $\mathbf{e} \in \operatorname{Ker} f$, veamos que $\mathbf{e} = \mathbf{0}$. En efecto:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{e} \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow f(\mathbf{e}) = \mathbf{0} \\ f - \text{lineal} \Rightarrow f(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \end{array}\right\} \Rightarrow f(\mathbf{e}) = f(\mathbf{0}) \xrightarrow[f \text{ es inyectiva}]{} \mathbf{e} = \mathbf{0}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Sean $\mathbf{e}, \bar{\mathbf{e}} \in E$ tales que $f(\mathbf{e}) = f(\bar{\mathbf{e}})$, veamos que $\mathbf{e} = \bar{\mathbf{e}}$.
En efecto:

$$f(\mathbf{e}) = f(\bar{\mathbf{e}}) \xrightarrow[f \text{ lineal}]{} f(\mathbf{e} - \bar{\mathbf{e}}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{e} - \bar{\mathbf{e}} \in \operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}\}$$

$$\Rightarrow \mathbf{e} = \bar{\mathbf{e}}$$

Propiedades

Proposición Sea $f : E \to E'$ una aplicación lineal.

$$\boxed{f \text{ es inyectiva} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}\}}$$

Demo

$\boxed{\Rightarrow}$ Sea $\mathbf{e} \in \operatorname{Ker} f$, veamos que $\mathbf{e} = \mathbf{0}$. En efecto:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{e} \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow f(\mathbf{e}) = \mathbf{0} \\ f - \text{lineal} \Rightarrow f(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \end{array}\right\} \Rightarrow f(\mathbf{e}) = f(\mathbf{0}) \xrightarrow[f \text{ es inyectiva}]{} \mathbf{e} = \mathbf{0}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Sean $\mathbf{e}, \bar{\mathbf{e}} \in E$ tales que $f(\mathbf{e}) = f(\bar{\mathbf{e}})$, veamos que $\mathbf{e} = \bar{\mathbf{e}}$. En efecto:

$$f(\mathbf{e}) = f(\bar{\mathbf{e}}) \xrightarrow[f \text{ lineal}]{} f(\mathbf{e} - \bar{\mathbf{e}}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{e} - \bar{\mathbf{e}} \in \operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}\}$$

$$\Rightarrow \mathbf{e} = \bar{\mathbf{e}}$$

Propiedades

Proposición Sea $f : E \to E'$ una aplicación lineal.

$$\boxed{f \text{ es inyectiva} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}\}}$$

Demo

$\boxed{\Rightarrow}$ Sea $\mathbf{e} \in \operatorname{Ker} f$, veamos que $\mathbf{e} = \mathbf{0}$. En efecto:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{e} \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow f(\mathbf{e}) = \mathbf{0} \\ f - \text{lineal} \Rightarrow f(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \end{array}\right\} \Rightarrow f(\mathbf{e}) = f(\mathbf{0}) \xrightarrow[f \text{ es inyectiva}]{} \mathbf{e} = \mathbf{0}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Sean $\mathbf{e}, \bar{\mathbf{e}} \in E$ tales que $f(\mathbf{e}) = f(\bar{\mathbf{e}})$, veamos que $\mathbf{e} = \bar{\mathbf{e}}$. En efecto:

$$f(\mathbf{e}) = f(\bar{\mathbf{e}}) \xrightarrow[f \text{ lineal}]{} f(\mathbf{e} - \bar{\mathbf{e}}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{e} - \bar{\mathbf{e}} \in \operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}\}$$

$$\Rightarrow \mathbf{e} = \bar{\mathbf{e}}$$

Propiedades

Proposición Sea $f : E \to E'$ una aplicación lineal.

$$\boxed{f \text{ es inyectiva} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}\}}$$

Demo

$\boxed{\Rightarrow}$ Sea $\mathbf{e} \in \operatorname{Ker} f$, veamos que $\mathbf{e} = \mathbf{0}$. En efecto:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{e} \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow f(\mathbf{e}) = \mathbf{0} \\ f - \text{lineal} \Rightarrow f(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \end{array}\right\} \Rightarrow f(\mathbf{e}) = f(\mathbf{0}) \xRightarrow[f \text{ es inyectiva}]{} \mathbf{e} = \mathbf{0}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Sean $\mathbf{e}, \bar{\mathbf{e}} \in E$ tales que $f(\mathbf{e}) = f(\bar{\mathbf{e}})$, veamos que $\mathbf{e} = \bar{\mathbf{e}}$. En efecto:

$$f(\mathbf{e}) = f(\bar{\mathbf{e}}) \xRightarrow[f \text{ lineal}]{} f(\mathbf{e} - \bar{\mathbf{e}}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{e} - \bar{\mathbf{e}} \in \operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}\}$$

$$\Rightarrow \mathbf{e} = \bar{\mathbf{e}}$$

Propiedades

Proposición Sea $f : E \to E'$ aplicación lineal inyectiva

$$\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\} \text{ son l.i.} \Rightarrow \{f(\mathbf{e}_1), \ldots, f(\mathbf{e}_p)\} \text{ son l.i.}$$

Demo Veamos que una combinación lineal de $\{f(\mathbf{e}_1), \ldots, f(\mathbf{e}_p)\}$ igualdada a $\mathbf{0}$ sólo puede ser la trivial.

$$\mathbf{0} = \lambda_1 f(\mathbf{e}_1) + \ldots + \lambda_p f(\mathbf{e}_p) = f(\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \ldots + \lambda_p \mathbf{e}_p)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \ldots + \lambda_p \mathbf{e}_p \in \operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}\}$$

$$\xRightarrow[\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_p\}\text{l.i.}]{} \lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0$$

Propiedades

Proposición Sea $f : E \to E'$ aplicación lineal inyectiva

$$\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\} \text{ son l.i.} \Rightarrow \{f(\mathbf{e}_1), \ldots, f(\mathbf{e}_p)\} \text{ son l.i.}$$

Demo Veamos que una combinación lineal de $\{f(\mathbf{e}_1), \ldots, f(\mathbf{e}_p)\}$ igualdada a $\mathbf{0}$ sólo puede ser la trivial.

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \lambda_1 f(\mathbf{e}_1) + \ldots + \lambda_p f(\mathbf{e}_p) = f(\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \ldots + \lambda_p \mathbf{e}_p) \\ &\Rightarrow \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \ldots + \lambda_p \mathbf{e}_p \in \operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}\} \\ &\underset{\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_p\}\text{l.i.}}{\Longrightarrow} \lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0 \end{aligned}$$

Propiedades

Sea $f : E \to E'$ una aplicación lineal.

Proposición

$$\boxed{\dim E = \dim \operatorname{Kef} f + \dim \operatorname{Im} f} \tag{1}$$

Demo Sea $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r\}$ una base de $\operatorname{Ker} f$, que completamos (Teorema base incompleta) hasta construir una base de E $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_{r+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. Para concluir el resultado basta con probar que $\{f(\mathbf{e}_{r+1}), \ldots, f(\mathbf{e}_n)\}$ es base de $\operatorname{Im} f$. En efecto:

- $\{f(\mathbf{e}_{r+1}), \ldots, f(\mathbf{e}_n)\}$ s.g.. Es una consecuencia de la proposición anterior, y del hecho que:

  $$\langle f(\mathbf{e}_1), \ldots, f(\mathbf{e}_r), f(\mathbf{e}_{r+1}), \ldots, f(\mathbf{e}_n)\rangle = \langle f(\mathbf{e}_{r+1}), \ldots, f(\mathbf{e}_n)\rangle$$

  pues $f(\mathbf{e}_1) = \ldots = f(\mathbf{e}_r) = \mathbf{0}_{E'}$

- $\{f(\mathbf{e}_{r+1}), \ldots, f(\mathbf{e}_n)\}$ l.i.

  $$\lambda_{r+1} f(\mathbf{e}_{r+1}) + \cdots + \lambda_n f(\mathbf{e}_n) = \mathbf{0}_{E'} \xRightarrow[\text{f-lineal}]{} f(\lambda_{r+1}\mathbf{e}_{r+1} + \ldots + \lambda_n \mathbf{e}_n) = \mathbf{0}_{E'}$$

  $$\Rightarrow \lambda_{r+1}\mathbf{e}_{r+1} + \ldots + \lambda_n \mathbf{e}_n \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow \lambda_{r+1}\mathbf{e}_{r+1} + \ldots + \lambda_p \mathbf{e}_p = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbf{e}_i$$

  $$\xRightarrow[\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\} \text{ es base}]{} \lambda_r = \ldots = \lambda_n = 0$$

Propiedades

Sea $f : E \to E'$ una aplicación lineal.

Proposición

$$\boxed{\dim E = \dim \text{Kef}\, f + \dim \text{Im}\, f} \tag{1}$$

Demo Sea $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r\}$ una base de Ker f, que completamos (Teorema base incompleta) hasta construir una base de E $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_{r+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$.
Para concluir el resultado basta con probar que $\{f(\mathbf{e}_{r+1}), \ldots, f(\mathbf{e}_n)\}$ es base de Im f. En efecto:

- $\{f(\mathbf{e}_{r+1}), \ldots, f(\mathbf{e}_n)\}$ s.g.. Es una consecuencia de la proposición anterior, y del hecho que:

  $$\langle f(\mathbf{e}_1), \ldots, f(\mathbf{e}_r), f(\mathbf{e}_{r+1}), \ldots, f(\mathbf{e}_n)\rangle = \langle f(\mathbf{e}_{r+1}), \ldots, f(\mathbf{e}_n)\rangle$$

  pues $f(\mathbf{e}_1) = \ldots = f(\mathbf{e}_r) = \mathbf{0}_{E'}$

- $\{f(\mathbf{e}_{r+1}), \ldots, f(\mathbf{e}_n)\}$ l.i.

  $$\lambda_{r+1} f(\mathbf{e}_{r+1}) + \cdots + \lambda_n f(\mathbf{e}_n) = \mathbf{0}_{E'} \xRightarrow[\text{f-lineal}]{} f(\lambda_{r+1}\mathbf{e}_{r+1} + \ldots + \lambda_n \mathbf{e}_n) = \mathbf{0}_{E'}$$

  $$\Rightarrow \lambda_{r+1}\mathbf{e}_{r+1} + \ldots + \lambda_n \mathbf{e}_n \in \text{Ker}\, f \Rightarrow \lambda_{r+1}\mathbf{e}_{r+1} + \ldots + \lambda_p \mathbf{e}_p = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbf{e}_i$$

  $$\xRightarrow[\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\}\text{ es base}]{} \lambda_r = \ldots = \lambda_n = 0$$

Propiedades

Sea $f : E \to E'$ una aplicación lineal.

Proposición

$$\boxed{\dim E = \dim \operatorname{Kef} f + \dim \operatorname{Im} f} \tag{1}$$

DemoSea $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r\}$ una base de $\operatorname{Ker} f$, que completamos (Teorema base incompleta) hasta construir una base de E $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_{r+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. Para concluir el resultado basta con probar que $\{f(\mathbf{e}_{r+1}), \ldots, f(\mathbf{e}_n)\}$ es base de $\operatorname{Im} f$. En efecto:

- $\{f(\mathbf{e}_{r+1}), \ldots, f(\mathbf{e}_n)\}$ s.g.. Es una consecuencia de la proposición anterior, y del hecho que:

  $$\langle f(\mathbf{e}_1), \ldots, f(\mathbf{e}_r), f(\mathbf{e}_{r+1}), \ldots, f(\mathbf{e}_n)\rangle = \langle f(\mathbf{e}_{r+1}), \ldots, f(\mathbf{e}_n)\rangle$$

  pues $f(\mathbf{e}_1) = \ldots = f(\mathbf{e}_r) = \mathbf{0}_{E'}$

- $\{f(\mathbf{e}_{r+1}), \ldots, f(\mathbf{e}_n)\}$ l.i.

  $$\lambda_{r+1} f(\mathbf{e}_{r+1}) + \cdots + \lambda_n f(\mathbf{e}_n) = \mathbf{0}_{E'} \xrightarrow[\text{f-lineal}]{} f(\lambda_{r+1}\mathbf{e}_{r+1} + \ldots + \lambda_n \mathbf{e}_n) = \mathbf{0}_{E'}$$

  $$\Rightarrow \lambda_{r+1}\mathbf{e}_{r+1} + \ldots + \lambda_n \mathbf{e}_n \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow \lambda_{r+1}\mathbf{e}_{r+1} + \ldots + \lambda_p \mathbf{e}_p = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbf{e}_i$$

  $$\xrightarrow[\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\} \text{ es base}]{} \lambda_r = \ldots = \lambda_n = 0$$

Propiedades

Sea $f : E \to E'$ una aplicación lineal.

Proposición

$$\boxed{\dim E = \dim \operatorname{Kef} f + \dim \operatorname{Im} f} \qquad (1)$$

Demo Sea $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r\}$ una base de $\operatorname{Ker} f$, que completamos (Teorema base incompleta) hasta construir una base de E $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_{r+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. Para concluir el resultado basta con probar que $\{f(\mathbf{e}_{r+1}), \ldots, f(\mathbf{e}_n)\}$ es base de $\operatorname{Im} f$. En efecto:

- $\{f(\mathbf{e}_{r+1}), \ldots, f(\mathbf{e}_n)\}$ s.g.. Es una consecuencia de la proposición anterior, y del hecho que:

  $$\langle f(\mathbf{e}_1), \ldots, f(\mathbf{e}_r), f(\mathbf{e}_{r+1}), \ldots, f(\mathbf{e}_n)\rangle = \langle f(\mathbf{e}_{r+1}), \ldots, f(\mathbf{e}_n)\rangle$$

  pues $f(\mathbf{e}_1) = \ldots = f(\mathbf{e}_r) = \mathbf{0}_{E'}$

- $\{f(\mathbf{e}_{r+1}), \ldots, f(\mathbf{e}_n)\}$ l.i.

  $$\lambda_{r+1} f(\mathbf{e}_{r+1}) + \cdots + \lambda_n f(\mathbf{e}_n) = \mathbf{0}_{E'} \xrightarrow[\text{f-lineal}]{} f(\lambda_{r+1}\mathbf{e}_{r+1} + \ldots + \lambda_n \mathbf{e}_n) = \mathbf{0}_{E'}$$

  $$\Rightarrow \lambda_{r+1}\mathbf{e}_{r+1} + \ldots + \lambda_n \mathbf{e}_n \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow \lambda_{r+1}\mathbf{e}_{r+1} + \ldots + \lambda_p \mathbf{e}_p = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbf{e}_i$$

  $$\xrightarrow[\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\} \text{ es base}]{} \lambda_r = \ldots = \lambda_n = 0$$

Propiedades

Sea $f : E \to E'$ una aplicación lineal.

Proposición

$$\boxed{\dim E = \dim \text{Kef}\, f + \dim \text{Im}\, f} \qquad (1)$$

DemoSea $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r\}$ una base de Ker f, que completamos (Teorema base incompleta) hasta construir una base de E $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_{r+1}, \dots, \mathbf{e}_n\}$. Para concluir el resultado basta con probar que $\{f(\mathbf{e}_{r+1}), \dots, f(\mathbf{e}_n)\}$ es base de Im f. En efecto:

- $\{f(\mathbf{e}_{r+1}), \dots, f(\mathbf{e}_n)\}$ s.g.. Es una consecuencia de la proposición anterior, y del hecho que:

$$\langle f(\mathbf{e}_1), \dots, f(\mathbf{e}_r), f(\mathbf{e}_{r+1}), \dots, f(\mathbf{e}_n)\rangle = \langle f(\mathbf{e}_{r+1}), \dots, f(\mathbf{e}_n)\rangle$$

  pues $f(\mathbf{e}_1) = \dots = f(\mathbf{e}_r) = \mathbf{0}_{E'}$

- $\{f(\mathbf{e}_{r+1}), \dots, f(\mathbf{e}_n)\}$ l.i.

$$\lambda_{r+1} f(\mathbf{e}_{r+1}) + \cdots + \lambda_n f(\mathbf{e}_n) = \mathbf{0}_{E'} \xRightarrow[\text{f-lineal}]{} f(\lambda_{r+1}\mathbf{e}_{r+1} + \dots + \lambda_n \mathbf{e}_n) = \mathbf{0}_{E'}$$

$$\Rightarrow \lambda_{r+1}\mathbf{e}_{r+1} + \dots + \lambda_n \mathbf{e}_n \in \text{Ker}\, f \Rightarrow \lambda_{r+1}\mathbf{e}_{r+1} + \dots + \lambda_p \mathbf{e}_p = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbf{e}_i$$

$$\xRightarrow[\{\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n\} \text{ es base}]{} \lambda_r = \dots = \lambda_n = 0$$

Propiedades

Sea $f : E \to E'$ una aplicación lineal.

Proposición

$$\boxed{\dim E = \dim \operatorname{Kef} f + \dim \operatorname{Im} f} \qquad (1)$$

DemoSea $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r\}$ una base de $\operatorname{Ker} f$, que completamos (Teorema base incompleta) hasta construir una base de E $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_{r+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. Para concluir el resultado basta con probar que $\{f(\mathbf{e}_{r+1}), \ldots, f(\mathbf{e}_n)\}$ es base de $\operatorname{Im} f$. En efecto:

- $\{f(\mathbf{e}_{r+1}), \ldots, f(\mathbf{e}_n)\}$ s.g.. Es una consecuencia de la proposición anterior, y del hecho que:

  $$\langle f(\mathbf{e}_1), \ldots, f(\mathbf{e}_r), f(\mathbf{e}_{r+1}), \ldots, f(\mathbf{e}_n)\rangle = \langle f(\mathbf{e}_{r+1}), \ldots, f(\mathbf{e}_n)\rangle$$

  pues $f(\mathbf{e}_1) = \ldots = f(\mathbf{e}_r) = \mathbf{0}_{E'}$

- $\{f(\mathbf{e}_{r+1}), \ldots, f(\mathbf{e}_n)\}$ l.i.

  $$\lambda_{r+1} f(\mathbf{e}_{r+1}) + \cdots + \lambda_n f(\mathbf{e}_n) = \mathbf{0}_{E'} \underset{\text{f-lineal}}{\Longrightarrow} f(\lambda_{r+1}\mathbf{e}_{r+1} + \ldots + \lambda_n \mathbf{e}_n) = \mathbf{0}_{E'}$$

  $$\Rightarrow \lambda_{r+1}\mathbf{e}_{r+1} + \ldots + \lambda_n \mathbf{e}_n \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow \lambda_{r+1}\mathbf{e}_{r+1} + \ldots + \lambda_p \mathbf{e}_p = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbf{e}_i$$

  $$\underset{\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\} \text{ es base}}{\Longrightarrow} \lambda_r = \ldots = \lambda_n = 0$$

Propiedades

Sea $f : E \to E'$ una aplicación lineal.

Proposición

$$\boxed{\dim E = \dim \mathrm{Kef}\, f + \dim \mathrm{Im}\, f} \tag{1}$$

Demo Sea $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r\}$ una base de $\mathrm{Ker}\, f$, que completamos (Teorema base incompleta) hasta construir una base de E $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_{r+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. Para concluir el resultado basta con probar que $\{f(\mathbf{e}_{r+1}), \ldots, f(\mathbf{e}_n)\}$ es base de $\mathrm{Im}\, f$. En efecto:

- $\{f(\mathbf{e}_{r+1}), \ldots, f(\mathbf{e}_n)\}$ s.g.. Es una consecuencia de la proposición anterior, y del hecho que:

  $$\langle f(\mathbf{e}_1), \ldots, f(\mathbf{e}_r), f(\mathbf{e}_{r+1}), \ldots, f(\mathbf{e}_n)\rangle = \langle f(\mathbf{e}_{r+1}), \ldots, f(\mathbf{e}_n)\rangle$$

  pues $f(\mathbf{e}_1) = \ldots = f(\mathbf{e}_r) = \mathbf{0}_{E'}$

- $\{f(\mathbf{e}_{r+1}), \ldots, f(\mathbf{e}_n)\}$ l.i.

  $$\lambda_{r+1} f(\mathbf{e}_{r+1}) + \cdots + \lambda_n f(\mathbf{e}_n) = \mathbf{0}_{E'} \xRightarrow[\text{f-lineal}]{} f(\lambda_{r+1}\mathbf{e}_{r+1} + \ldots + \lambda_n \mathbf{e}_n) = \mathbf{0}_{E'}$$

  $$\Rightarrow \lambda_{r+1}\mathbf{e}_{r+1} + \ldots + \lambda_n \mathbf{e}_n \in \mathrm{Ker}\, f \Rightarrow \lambda_{r+1}\mathbf{e}_{r+1} + \ldots + \lambda_p \mathbf{e}_p = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbf{e}_i$$

  $$\xRightarrow[\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\} \text{ es base}]{} \lambda_r = \ldots = \lambda_n = 0$$

Propiedades

Sea $f : E \to E'$ una aplicación lineal.

Proposición

$$\boxed{\dim E = \dim \operatorname{Kef} f + \dim \operatorname{Im} f} \tag{1}$$

DemoSea $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r\}$ una base de $\operatorname{Ker} f$, que completamos (Teorema base incompleta) hasta construir una base de E $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_{r+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. Para concluir el resultado basta con probar que $\{f(\mathbf{e}_{r+1}), \ldots, f(\mathbf{e}_n)\}$ es base de $\operatorname{Im} f$. En efecto:

- $\{f(\mathbf{e}_{r+1}), \ldots, f(\mathbf{e}_n)\}$ s.g.. Es una consecuencia de la proposición anterior, y del hecho que:

  $$\langle f(\mathbf{e}_1), \ldots, f(\mathbf{e}_r), f(\mathbf{e}_{r+1}), \ldots, f(\mathbf{e}_n)\rangle = \langle f(\mathbf{e}_{r+1}), \ldots, f(\mathbf{e}_n)\rangle$$

  pues $f(\mathbf{e}_1) = \ldots = f(\mathbf{e}_r) = \mathbf{0}_{E'}$

- $\{f(\mathbf{e}_{r+1}), \ldots, f(\mathbf{e}_n)\}$ l.i.

  $$\lambda_{r+1} f(\mathbf{e}_{r+1}) + \cdots + \lambda_n f(\mathbf{e}_n) = \mathbf{0}_{E'} \xRightarrow[\text{f-lineal}]{} f(\lambda_{r+1}\mathbf{e}_{r+1} + \ldots + \lambda_n \mathbf{e}_n) = \mathbf{0}_{E'}$$

  $$\Rightarrow \lambda_{r+1}\mathbf{e}_{r+1} + \ldots + \lambda_n \mathbf{e}_n \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow \lambda_{r+1}\mathbf{e}_{r+1} + \ldots + \lambda_p \mathbf{e}_p = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbf{e}_i$$

  $$\xRightarrow[\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\} \text{ es base}]{} \lambda_r = \ldots = \lambda_n = 0$$

Propiedades

Corolario Sea $f : E \to E'$ aplicación lineal.

$$f \text{ es inyectiva} \quad \Leftrightarrow \quad \dim E = \dim \operatorname{Im} f$$

Demo Al lector.

Corolario Sea $f : E \to E'$ aplicación lineal

$$f \text{ es inyectiva} \quad \Leftrightarrow \quad \text{La imagen de una base de } E \text{ es base de } \operatorname{Im} f$$

Demo Al lector.

Corolario Sea $f : E \to E$ un endomorfismo

$$f \text{ es inyectiva} \quad \Leftrightarrow \quad \text{f es epiyectiva}$$

Demo Consecuencia de que $\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$

Nota A los endomorfismos biyectivos los denominaremos automorfismos

Propiedades

Corolario Sea $f : E \to E'$ aplicación lineal.

$$f \text{ es inyectiva} \quad \Leftrightarrow \quad \dim E = \dim \operatorname{Im} f$$

Demo Al lector.

Corolario Sea $f : E \to E'$ aplicación lineal

$$f \text{ es inyectiva} \quad \Leftrightarrow \quad \text{La imagen de una base de } E \text{ es base de } \operatorname{Im} f$$

Demo Al lector.

Corolario Sea $f : E \to E$ un endomorfismo

$$f \text{ es inyectiva} \quad \Leftrightarrow \quad \text{f es epiyectiva}$$

Demo Consecuencia de que $\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$

Nota A los endomorfismos biyectivos los denominaremos automorfismos

Propiedades

Corolario Sea $f : E \to E'$ aplicación lineal.

$$f \text{ es inyectiva} \quad \Leftrightarrow \quad \dim E = \dim \operatorname{Im} f$$

Demo Al lector.

Corolario Sea $f : E \to E'$ aplicación lineal

$$f \text{ es inyectiva} \quad \Leftrightarrow \quad \text{La imagen de una base de } E \text{ es base de } \operatorname{Im} f$$

Demo Al lector.

Corolario Sea $f : E \to E$ un endomorfismo

$$f \text{ es inyectiva} \quad \Leftrightarrow \quad \text{f es epiyectiva}$$

Demo Consecuencia de que $\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$

Nota A los endomorfismos biyectivos los denominaremos automorfismos

Propiedades

Corolario Sea $f : E \to E'$ aplicación lineal.

$$f \text{ es inyectiva} \quad \Leftrightarrow \quad \dim E = \dim \operatorname{Im} f$$

Demo Al lector.

Corolario Sea $f : E \to E'$ aplicación lineal

$$f \text{ es inyectiva} \quad \Leftrightarrow \quad \text{La imagen de una base de } E \text{ es base de } \operatorname{Im} f$$

Demo Al lector.

Corolario Sea $f : E \to E$ un endomorfismo

$$f \text{ es inyectiva} \quad \Leftrightarrow \quad \text{f es epiyectiva}$$

Demo Consecuencia de que $\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$

Nota A los endomorfismos biyectivos los denominaremos automorfismos

Isomorfismos

Definición Una aplicación lineal $f : E \to E'$ se dice isomorfismo si la aplicación es biyectiva.

Proposición Sea $f : E \to E'$ aplicación lineal:

1. f es isomorfismo $\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Ker} f = \mathbf{0} \\ \operatorname{Im} f = E' \end{cases}$
2. f es isomorfismo $\Leftrightarrow \quad \dim E = \dim \operatorname{Im} f = \dim E'$
3. La composición de isomorfismos es isomorfismo
4. Si $f : E \to E'$ es isomorfismo también lo es f^{-1}
5. Si $\dim E = n$, entonces E es isomorfo a $\mathbb{R}^n$

Demo 1 y 2 son consecuencia de la fórmula (1) y de la definición de aplicación biyectiva. Puesto que la composción de aplicaciones biyectiva es biyectiva se obtiene 3. Para obtener 4, basta demostar que la inversa de una aplicación lineal también es lineal. Por último, la relación 5 se obtiene fijada una base en E.

Isomorfismos

Definición Una aplicación lineal $f : E \to E'$ se dice isomorfismo si la aplicación es biyectiva.

Proposición Sea $f : E \to E'$ aplicación lineal:

1. f es isomorfismo $\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Ker} f = \mathbf{0} \\ \operatorname{Im} f = E' \end{cases}$
2. f es isomorfismo $\Leftrightarrow \quad \dim E = \dim \operatorname{Im} f = \dim E'$
3. La composición de isomorfismos es isomorfismo
4. Si $f : E \to E'$ es isomorfismo también lo es f^{-1}
5. Si $\dim E = n$, entonces E es isomorfo a $\mathbb{R}^n$

Demo 1 y 2 son consecuencia de la fórmula (1) y de la definición de aplicación biyectiva. Puesto que la composción de aplicaciones biyectiva es biyectiva se obtiene 3. Para obtener 4, basta demostar que la inversa de una aplicación lineal también es lineal. Por último, la relación 5 se obtiene fijada una base en E.

Isomorfismos

Definición Una aplicación lineal $f : E \to E'$ se dice isomorfismo si la aplicación es biyectiva.

Proposición Sea $f : E \to E'$ aplicación lineal:

1. f es isomorfismo $\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Ker} f = \mathbf{0} \\ \operatorname{Im} f = E' \end{cases}$
2. f es isomorfismo $\Leftrightarrow \quad \dim E = \dim \operatorname{Im} f = \dim E'$
3. La composición de isomorfismos es isomorfismo
4. Si $f : E \to E'$ es isomorfismo también lo es f^{-1}
5. Si $\dim E = n$, entonces E es isomorfo a $\mathbb{R}^n$

Demo 1 y 2 son consecuencia de la fórmula (1) y de la definición de aplicación biyectiva. Puesto que la composción de aplicaciones biyectiva es biyectiva se obtiene 3. Para obtener 4, basta demostar que la inversa de una aplicación lineal también es lineal. Por último, la relación 5 se obtiene fijada una base en E.

Isomorfismos

Definición Una aplicación lineal $f : E \to E'$ se dice isomorfismo si la aplicación es biyectiva.

Proposición Sea $f : E \to E'$ aplicación lineal:

1. f es isomorfismo $\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Ker} f = \mathbf{0} \\ \operatorname{Im} f = E' \end{cases}$
2. f es isomorfismo $\Leftrightarrow \quad \dim E = \dim \operatorname{Im} f = \dim E'$
3. La composición de isomorfismos es isomorfismo
4. Si $f : E \to E'$ es isomorfismo también lo es f^{-1}
5. Si $\dim E = n$, entonces E es isomorfo a $\mathbb{R}^n$

Demo 1 y 2 son consecuencia de la fórmula (1) y de la definición de aplicación biyectiva. Puesto que la composción de aplicaciones biyectiva es biyectiva se obtiene 3. Para obtener 4, basta demostar que la inversa de una aplicación lineal también es lineal. Por último, la relación 5 se obtiene fijada una base en E.

Isomorfismos

Definición Una aplicación lineal $f : E \to E'$ se dice isomorfismo si la aplicación es biyectiva.

Proposición Sea $f : E \to E'$ aplicación lineal:

1. f es isomorfismo $\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Ker} f = \mathbf{0} \\ \operatorname{Im} f = E' \end{cases}$
2. f es isomorfismo $\Leftrightarrow \quad \dim E = \dim \operatorname{Im} f = \dim E'$
3. La composición de isomorfismos es isomorfismo
4. Si $f : E \to E'$ es isomorfismo también lo es f^{-1}
5. Si $\dim E = n$, entonces E es isomorfo a $\mathbb{R}^n$

Demo 1 y 2 son consecuencia de la fórmula (1) y de la definición de aplicación biyectiva. Puesto que la composción de aplicaciones biyectiva es biyectiva se obtiene 3. Para obtener 4, basta demostar que la inversa de una aplicación lineal también es lineal. Por último, la relación 5 se obtiene fijada una base en E.

Isomorfismos

Definición Una aplicación lineal $f : E \to E'$ se dice isomorfismo si la aplicación es biyectiva.

Proposición Sea $f : E \to E'$ aplicación lineal:

1. f es isomorfismo $\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Ker} f = \mathbf{0} \\ \operatorname{Im} f = E' \end{cases}$
2. f es isomorfismo $\Leftrightarrow \quad \dim E = \dim \operatorname{Im} f = \dim E'$
3. La composición de isomorfismos es isomorfismo
4. Si $f : E \to E'$ es isomorfismo también lo es f^{-1}
5. Si $\dim E = n$, entonces E es isomorfo a $\mathbb{R}^n$

Demo 1 y 2 son consecuencia de la fórmula (1) y de la definición de aplicación biyectiva. Puesto que la composción de aplicaciones biyectiva es biyectiva se obtiene 3. Para obtener 4, basta demostar que la inversa de una aplicación lineal también es lineal. Por último, la relación 5 se obtiene fijada una base en E.

Tema 4

Aplicaciones lineales

Matriz Asociada a una Apliación Lineal

Observación Una aplicación lineal $f : E \to E'$ queda determinada si se conocen las imágenes de los vectores de una base de E.

Ejemplos

Definición Sea $f : E \to E'$ una aplicación lineal, y sean $B = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, $B' = \{\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_m\}$ sendas bases de E y E' respectivamente.
Se denomina matriz asociada a f en las bases B y B' y se denota $M_f(B, B')$ a la matriz $m \times n$ que tiene por columnas las imágenes de los vectores de la base B expresados en función de la base B'.

$$M_f(B, B') = \begin{pmatrix} | & \ldots & | \\ f(\mathbf{e}_1) & \ldots & f(\mathbf{e}_n) \\ | & \ldots & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$$

siendo $f(\mathbf{e}_i) = (a_{i1}, \ldots, a_{im})_{B'}$

Matriz Asociada a una Apliación Lineal

Observación Una aplicación lineal $f : E \to E'$ queda determinada si se conocen las imágenes de los vectores de una base de E.

Ejemplos

Definición Sea $f : E \to E'$ una aplicación lineal, y sean $B = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$, $B' = \{\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_m\}$ sendas bases de E y E' respectivamente.
Se denomina matriz asociada a f en las bases B y B' y se denota $\boxed{M_f(B, B')}$ a la matriz $m \times n$ que tiene por columnas las imágenes de los vectores de la base B expresados en función de la base B'.

$$M_f(B, B') = \begin{pmatrix} | & \dots & | \\ f(\mathbf{e}_1) & \dots & f(\mathbf{e}_n) \\ | & \dots & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$$

siendo $f(\mathbf{e}_i) = (a_{i1}, \dots, a_{im})_{B'}$

Matriz Asociada a una aplicación lineal

Propiedad Dados $f : E \to E'$, $B = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, $B' = \{\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_m\}$ según la página anterior, sea $A = M_f(B, B')$.

Para cualquier $\mathbf{e} \in E$, las coordenadas de $\mathbf{e}$ en la base B, $\mathbf{e} \equiv (x_1, \ldots, x_n)_B$, y las de su imagen $f(\mathbf{e})$ en B', $f(\mathbf{e}) \equiv (y_1, \ldots, y_m)_{B'}$, están relacionadas por:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Demo Es consecuencia de la linealidad de f y de la definición de matriz asociada a una aplicación lineal.

Ejemplos Matriz asociada en bases canónicas. Matriz de cambio de base.

Matriz Asociada a una aplicación lineal

Propiedad Dados $f : E \to E'$, $B = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, $B' = \{\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_m\}$ según la página anterior, sea $A = M_f(B, B')$.

Para cualquier $\mathbf{e} \in E$, las coordenadas de $\mathbf{e}$ en la base B, $\mathbf{e} \equiv (x_1, \ldots, x_n)_B$, y las de su imagen $f(\mathbf{e})$ en B', $f(\mathbf{e}) \equiv (y_1, \ldots, y_m)_{B'}$, están relacionadas por:

$$\boxed{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}$$

Demo Es consecuencia de la linealidad de f y de la definición de matriz asociada a una aplicación lineal.

Ejemplos Matriz asociada en bases canónicas. Matriz de cambio de base.

Matriz Asociada a una aplicación lineal

Propiedad Dados $f : E \to E'$, $B = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, $B' = \{\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_m\}$ según la página anterior, sea $A = M_f(B, B')$.

Para cualquier $\mathbf{e} \in E$, las coordenadas de $\mathbf{e}$ en la base B, $\mathbf{e} \equiv (x_1, \ldots, x_n)_B$, y las de su imagen $f(\mathbf{e})$ en B', $f(\mathbf{e}) \equiv (y_1, \ldots, y_m)_{B'}$, están relacionadas por:

$$\boxed{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}$$

Demo Es consecuencia de la linealidad de f y de la definición de matriz asociada a una aplicación lineal.

Ejemplos Matriz asociada en bases canónicas. Matriz de cambio de base.

Aplicaciones lineales y matrices

Sean E, E', E'' con bases B, B' y B'', y dimensiones n, m, y r, respectivamente.

Suma

$$\left.\begin{array}{l} f : E \to E' \\ g : E \to E' \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad M_{f+g}(B,B') = M_f(B,B') + M_g(B,B')$$

Producto por escalar

$$\left.\begin{array}{l} f : E \to E' \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad M_{\lambda f}(B,B') = \lambda M_f(B,B')$$

Proposición

$\mathrm{Hom}(E,E') \xrightarrow{\sim} \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ es un isomorfismo de esp. vect.

Composición

$$\left.\begin{array}{l} f : E \to E' \\ g : E' \to E'' \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad M_{g\circ f}(B,B'') = M_g(B',B'') \cdot M_f(B,B')$$

Aplicaciones lineales y matrices

Sean E, E', E'' con bases B, B' y B'', y dimensiones n, m, y r, respectivamente.

Suma

$$\left.\begin{array}{r} f: E \to E' \\ g: E \to E' \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad M_{f+g}(B,B') = M_f(B,B') + M_g(B,B')$$

Producto por escalar

$$\left.\begin{array}{l} f: E \to E' \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad M_{\lambda f}(B,B') = \lambda M_f(B,B')$$

Proposición

$$\mathrm{Hom}(E,E') \xrightarrow{\sim} \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \quad \text{es un isomorfismo de esp. vect.}$$

Composición

$$\left.\begin{array}{r} f: E \to E' \\ g: E' \to E'' \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad M_{g\circ f}(B,B'') = M_g(B',B'') \cdot M_f(B,B')$$

Aplicaciones lineales y matrices

Sean E, E', E'' con bases B, B' y B'', y dimensiones n, m, y r, respectivamente.

Suma

$$\left.\begin{array}{l} f : E \to E' \\ g : E \to E' \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad M_{f+g}(B, B') = M_f(B, B') + M_g(B, B')$$

Producto por escalar

$$\left.\begin{array}{l} f : E \to E' \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad M_{\lambda f}(B, B') = \lambda M_f(B, B')$$

Proposición

$\operatorname{Hom}(E, E') \xrightarrow{\sim} \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ es un isomorfismo de esp. vect.

Composición

$$\left.\begin{array}{l} f : E \to E' \\ g : E' \to E'' \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad M_{g\circ f}(B, B'') = M_g(B', B'') \cdot M_f(B, B')$$

Aplicaciones lineales y matrices

Sean E, E', E'' con bases B, B' y B'', y dimensiones n, m, y r, respectivamente.

Suma

$$\left.\begin{array}{l} f : E \to E' \\ g : E \to E' \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad M_{f+g}(B, B') = M_f(B, B') + M_g(B, B')$$

Producto por escalar

$$\left.\begin{array}{l} f : E \to E' \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad M_{\lambda f}(B, B') = \lambda M_f(B, B')$$

Proposición

$\mathrm{Hom}(E, E') \xrightarrow{\sim} \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ es un isomorfismo de esp. vect.

Composición

$$\left.\begin{array}{l} f : E \to E' \\ g : E' \to E'' \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad M_{g\circ f}(B, B'') = M_g(B', B'') \cdot M_f(B, B')$$

Aplicaciones lineales y matrices

Sean E, E', E'' con bases B, B' y B'', y dimensiones n, m, y r, respectivamente.

Suma

$$\left.\begin{array}{l} f : E \to E' \\ g : E \to E' \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad M_{f+g}(B, B') = M_f(B, B') + M_g(B, B')$$

Producto por escalar

$$\left.\begin{array}{l} f : E \to E' \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad M_{\lambda f}(B, B') = \lambda M_f(B, B')$$

Proposición

$\mathrm{Hom}(E, E') \xrightarrow{\sim} \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ es un isomorfismo de esp. vect.

Composición

$$\left.\begin{array}{l} f : E \to E' \\ g : E' \to E'' \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad M_{g\circ f}(B, B'') = M_g(B', B'') \cdot M_f(B, B')$$

Propiedades

Proposición Sean E y E' espacios vectoriales con bases B y B', y dimensiones n y m respectivamente.
Sea $f : E \to E'$ aplicación lineal tal que $A = M_f(B, B')$, entonces:

1. f es inyectiva $\Leftrightarrow$ rang$(A) = n$
2. f es epiyectiva $\Leftrightarrow$ rang$(A) = m$
3. Si f es isomorfismo $\Rightarrow M_{f^{-1}}(B', B) = A^{-1}$
4. f es isomorfismo $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

Demo 1 y 2 son consecuencia de la fórmula (1) y de la definición de rango. 3 es consecuencia de la relación entre composición y producto matricial y el hecho de que $M_{Id}(B, B) = Id$. Por último 4 se obtiene tras observar que una matriz es invertible si su determinante es distinto de cero.

Propiedades

Proposición Sean E y E' espacios vectoriales con bases B y B', y dimensiones n y m respectivamente.
Sea $f : E \to E'$ aplicación lineal tal que $A = M_f(B, B')$, entonces:

1. f es inyectiva $\Leftrightarrow \text{rang}(A) = n$
2. f es epiyectiva $\Leftrightarrow \text{rang}(A) = m$
3. Si f es isomorfismo $\Rightarrow M_{f^{-1}}(B', B) = A^{-1}$
4. f es isomorfismo $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

Demo 1 y 2 son consecuencia de la fórmula (1) y de la definición de rango. 3 es consecuencia de la relación entre composición y producto matricial y el hecho de que $M_{Id}(B, B) = Id$. Por último 4 se obtiene tras observar que una matriz es invertible si su determinante es distinto de cero.

Propiedades

Proposición Sean E y E' espacios vectoriales con bases B y B', y dimensiones n y m respectivamente.
Sea $f : E \to E'$ aplicación lineal tal que $A = M_f(B, B')$, entonces:

1. f es inyectiva $\Leftrightarrow \operatorname{rang}(A) = n$
2. f es epiyectiva $\Leftrightarrow \operatorname{rang}(A) = m$
3. Si f es isomorfismo $\Rightarrow M_{f^{-1}}(B', B) = A^{-1}$
4. f es isomorfismo $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

Demo 1 y 2 son consecuencia de la fórmula (1) y de la definición de rango. 3 es consecuencia de la relación entre composición y producto matricial y el hecho de que $M_{Id}(B, B) = Id$. Por último 4 se obtiene tras observar que una matriz es invertible si su determinante es distinto de cero.

Propiedades

Proposición Sean E y E' espacios vectoriales con bases B y B', y dimensiones n y m respectivamente.
Sea $f : E \to E'$ aplicación lineal tal que $A = M_f(B, B')$, entonces:

1. f es inyectiva $\Leftrightarrow \text{rang}(A) = n$
2. f es epiyectiva $\Leftrightarrow \text{rang}(A) = m$
3. Si f es isomorfismo $\Rightarrow M_{f^{-1}}(B', B) = A^{-1}$
4. f es isomorfismo $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

Demo 1 y 2 son consecuencia de la fórmula (1) y de la definición de rango. 3 es consecuencia de la relación entre composición y producto matricial y el hecho de que $M_{Id}(B, B) = Id$. Por último 4 se obtiene tras observar que una matriz es invertible si su determinante es distinto de cero.

Propiedades

Proposición Sean E y E' espacios vectoriales con bases B y B', y dimensiones n y m respectivamente.
Sea $f : E \to E'$ aplicación lineal tal que $A = M_f(B, B')$, entonces:

1. f es inyectiva $\Leftrightarrow \operatorname{rang}(A) = n$
2. f es epiyectiva $\Leftrightarrow \operatorname{rang}(A) = m$
3. Si f es isomorfismo $\Rightarrow M_{f^{-1}}(B', B) = A^{-1}$
4. f es isomorfismo $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

Demo 1 y 2 son consecuencia de la fórmula (1) y de la definición de rango. 3 es consecuencia de la relación entre composición y producto matricial y el hecho de que $M_{Id}(B, B) = Id$. Por último 4 se obtiene tras observar que una matriz es invertible si su determinante es distinto de cero.

Propiedades

Proposición Sean E y E' espacios vectoriales con bases B y B', y dimensiones n y m respectivamente.
Sea $f : E \to E'$ aplicación lineal tal que $A = M_f(B, B')$, entonces:

1. f es inyectiva $\Leftrightarrow \operatorname{rang}(A) = n$
2. f es epiyectiva $\Leftrightarrow \operatorname{rang}(A) = m$
3. Si f es isomorfismo $\Rightarrow M_{f^{-1}}(B', B) = A^{-1}$
4. f es isomorfismo $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

Demo 1 y 2 son consecuencia de la fórmula (1) y de la definición de rango. 3 es consecuencia de la relación entre composición y producto matricial y el hecho de que $M_{Id}(B, B) = Id$. Por último 4 se obtiene tras observar que una matriz es invertible si su determinante es distinto de cero.

Tema 4

Aplicaciones lineales

Fórmula de cambio de base

Teorema Sean E y E' espacios vectoriales con bases B_1 y B_1'. Sea $f : E \to E'$ aplicación lineal con matriz asociada en bases B_1 y B_1': $M_f(B_1, B_1')$.

Si B_2 y B_2' son otras bases de E y E', entonces:

$$\boxed{M_f(B_2, B_2') = [M_{Id}(B_2', B_1')]^{-1} \cdot M_f(B_1, B_1') \cdot M_{Id}(B_2, B_1)}$$

Demo

$\Rightarrow$

$$E_{B_2} \xrightarrow{f} E'_{B_2'}$$

$$E_{B_1} \xrightarrow{f} E'_{B_1'}$$

Ejemplos

Fórmula de cambio de base

Teorema Sean E y E' espacios vectoriales con bases B_1 y B_1'. Sea $f : E \to E'$ aplicación lineal con matriz asociada en bases B_1 y B_1': $M_f(B_1, B_1')$.

Si B_2 y B_2' son otras bases de E y E', entonces:

$$\boxed{M_f(B_2, B_2') = [M_{Id}(B_2', B_1')]^{-1} \cdot M_f(B_1, B_1') \cdot M_{Id}(B_2, B_1)}$$

Demo

$\Rightarrow$

$$E_{B_2} \xrightarrow{f} E'_{B_2'}$$

$$E_{B_1} \xrightarrow{f} E'_{B_1'}$$

Ejemplos

Fórmula de cambio de base

Teorema Sean E y E' espacios vectoriales con bases B_1 y B_1'. Sea $f : E \to E'$ aplicación lineal con matriz asociada en bases B_1 y B_1': $M_f(B_1, B_1')$.

Si B_2 y B_2' son otras bases de E y E', entonces:

$$\boxed{M_f(B_2, B_2') = [M_{Id}(B_2', B_1')]^{-1} \cdot M_f(B_1, B_1') \cdot M_{Id}(B_2, B_1)}$$

Demo

$\Rightarrow$

$$E_{B_2} \xrightarrow{f} E'_{B_2'}$$

$$E_{B_1} \xrightarrow{f} E'_{B_1'}$$

Ejemplos

Fórmula de cambio de base

Teorema Sean E y E' espacios vectoriales con bases B_1 y B_1'. Sea $f : E \to E'$ aplicación lineal con matriz asociada en bases B_1 y B_1': $M_f(B_1, B_1')$.

Si B_2 y B_2' son otras bases de E y E', entonces:

$$\boxed{M_f(B_2, B_2') = [M_{Id}(B_2', B_1')]^{-1} \cdot M_f(B_1, B_1') \cdot M_{Id}(B_2, B_1)}$$

Demo

$\Rightarrow$

$$\begin{tikzcd}
E_{B_2} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "Id"'] & E'_{B_2'} \\
E_{B_1} \arrow[r, "f"] & E'_{B_1'} \arrow[u, "Id"']
\end{tikzcd}$$

Ejemplos

Fórmula de cambio de base

Teorema Sean E y E' espacios vectoriales con bases B_1 y B'_1. Sea $f : E \to E'$ aplicación lineal con matriz asociada en bases B_1 y B'_1: $M_f(B_1, B'_1)$.

Si B_2 y B'_2 son otras bases de E y E', entonces:

$$\boxed{M_f(B_2, B'_2) = [M_{Id}(B'_2, B'_1)]^{-1} \cdot M_f(B_1, B'_1) \cdot M_{Id}(B_2, B_1)}$$

Demo

$$f = Id \circ f \circ Id \Rightarrow$$

$$\begin{tikzcd}
E_{B_2} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "Id"'] & E'_{B'_2} \\
E_{B_1} \arrow[r, "f"] & E'_{B'_1} \arrow[u, "Id"']
\end{tikzcd}$$

Ejemplos

Fórmula de cambio de base

Teorema Sean E y E' espacios vectoriales con bases B_1 y B_1'. Sea $f : E \to E'$ aplicación lineal con matriz asociada en bases B_1 y B_1': $M_f(B_1, B_1')$.

Si B_2 y B_2' son otras bases de E y E', entonces:

$$\boxed{M_f(B_2, B_2') = [M_{Id}(B_2', B_1')]^{-1} \cdot M_f(B_1, B_1') \cdot M_{Id}(B_2, B_1)}$$

Demo

$$\begin{tikzcd} E_{B_2} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "Id"'] & E'_{B_2'} \\ E_{B_1} \arrow[r, "f"] & E'_{B_1'} \arrow[u, "Id"'] \end{tikzcd}$$

$$f = Id \circ f \circ Id \Rightarrow$$

$$M_f(B_2, B_2') =$$

Ejemplos

Fórmula de cambio de base

Teorema Sean E y E' espacios vectoriales con bases B_1 y B_1'. Sea $f : E \to E'$ aplicación lineal con matriz asociada en bases B_1 y B_1': $M_f(B_1, B_1')$.

Si B_2 y B_2' son otras bases de E y E', entonces:

$$\boxed{M_f(B_2, B_2') = [M_{Id}(B_2', B_1')]^{-1} \cdot M_f(B_1, B_1') \cdot M_{Id}(B_2, B_1)}$$

Demo

$$f = Id \circ f \circ Id \Rightarrow$$

$$\begin{tikzcd}
E_{B_2} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "Id"'] & E'_{B_2'} \\
E_{B_1} \arrow[r, "f"] & E'_{B_1'} \arrow[u, "Id"']
\end{tikzcd}$$

$$M_f(B_2, B_2') = M_{Id}(B_1', B_2') \cdot M_f(B_1, B_1') \cdot M_{Id}(B_2, B_1)$$

Ejemplos

Fórmula de cambio de base

Teorema Sean E y E' espacios vectoriales con bases B_1 y B_1'. Sea $f : E \to E'$ aplicación lineal con matriz asociada en bases B_1 y B_1': $M_f(B_1, B_1')$.

Si B_2 y B_2' son otras bases de E y E', entonces:

$$\boxed{M_f(B_2, B_2') = [M_{Id}(B_2', B_1')]^{-1} \cdot M_f(B_1, B_1') \cdot M_{Id}(B_2, B_1)}$$

Demo

$$f = Id \circ f \circ Id \Rightarrow$$

$$\begin{tikzcd} E_{B_2} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "Id"'] & E'_{B_2'} \\ E_{B_1} \arrow[r, "f"] & E'_{B_1'} \arrow[u, "Id"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} M_f(B_2, B_2') &= M_{Id}(B_1', B_2') \cdot M_f(B_1, B_1') \cdot M_{Id}(B_2, B_1) \\ &= [M_{Id}(B_2', B_1')]^{-1} \cdot M_f(B_1, B_1') \cdot M_{Id}(B_2, B_1) \end{aligned}$$

Ejemplos

Fórmula de cambio de base

Teorema Sean E y E' espacios vectoriales con bases B_1 y B_1'. Sea $f : E \to E'$ aplicación lineal con matriz asociada en bases B_1 y B_1': $M_f(B_1, B_1')$.

Si B_2 y B_2' son otras bases de E y E', entonces:

$$\boxed{M_f(B_2, B_2') = [M_{Id}(B_2', B_1')]^{-1} \cdot M_f(B_1, B_1') \cdot M_{Id}(B_2, B_1)}$$

Demo

$$f = Id \circ f \circ Id \Rightarrow$$

$$\begin{tikzcd} E_{B_2} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "Id"'] & E'_{B_2'} \\ E_{B_1} \arrow[r, "f"] & E'_{B_1'} \arrow[u, "Id"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} M_f(B_2, B_2') &= M_{Id}(B_1', B_2') \cdot M_f(B_1, B_1') \cdot M_{Id}(B_2, B_1) \\ &= [M_{Id}(B_2', B_1')]^{-1} \cdot M_f(B_1, B_1') \cdot M_{Id}(B_2, B_1) \end{aligned}$$

Ejemplos

Tema 4

Aplicaciones lineales

Matrices Equivalentes

Definición Las matrices A y A' se dicen equivalentes si están asociadas a la misma aplicación lineal.

Proposición

$$A \text{ y } A' \text{ son equivalentes} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{existe } P \text{ y } Q \text{ no singulares tal que} \\ \qquad A = P^{-1} \cdot A' \cdot Q \end{cases}$$

Demo La demostración se basa en la formula de cambio de base

Observación De la proposición anterior se deduce que el rango de la matriz asociada a una aplicación lineal es independiente de las bases escogidas para su construcción.

Matrices Equivalentes

Definición Las matrices A y A' se dicen equivalentes si están asociadas a la misma aplicación lineal.

Proposición

$$A \text{ y } A' \text{ son equivalentes} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{existe } P \text{ y } Q \text{ no singulares tal que} \\ \qquad A = P^{-1} \cdot A' \cdot Q \end{array} \right.$$

Demo La demostración se basa en la formula de cambio de base

Observación De la proposición anterior se deduce que el rango de la matriz asociada a una aplicación lineal es independiente de las bases escogidas para su construcción.

Matrices Equivalentes

Definición Las matrices A y A' se dicen equivalentes si están asociadas a la misma aplicación lineal.

Proposición

$$A \text{ y } A' \text{ son equivalentes} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{existe } P \text{ y } Q \text{ no singulares tal que} \\ \qquad A = P^{-1} \cdot A' \cdot Q \end{array} \right.$$

Demo La demostración se basa en la formula de cambio de base

Observación De la proposición anterior se deduce que el rango de la matriz asociada a una aplicación lineal es independiente de las bases escogidas para su construcción.

Matrices Equivalentes

Definición Las matrices A y A' se dicen equivalentes si están asociadas a la misma aplicación lineal.

Proposición

$$A \text{ y } A' \text{ son equivalentes} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{existe } P \text{ y } Q \text{ no singulares tal que} \\ \qquad A = P^{-1} \cdot A' \cdot Q \end{cases}$$

Demo La demostración se basa en la formula de cambio de base

Observación De la proposición anterior se deduce que el rango de la matriz asociada a una aplicación lineal es independiente de las bases escogidas para su construcción.

Matrices Semejantes

Definición Las matrices A y A' se dicen semejantes si están asociadas al mismo endomorfismo.

Proposición

$$A \text{ y } A' \text{ son semejantes} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{existe } Q \text{ no singular tal que} \\ \qquad A = Q^{-1} \cdot A' \cdot Q \end{array} \right.$$

Demo Al lector.

Proposición

$$A \text{ y } A' \text{ son semejantes} \Rightarrow \det(A) = \det(A')$$

Demo Usando la proposición anterior y tomando determiantes obtenemos:

$A = Q^{-1} \cdot A' \cdot Q \Rightarrow \det(A) = \det(Q^{-1} \cdot A' \cdot Q) = \det(Q^{-1}) \cdot \det(A') \cdot \det(Q)$

mientras $\det(Q^{-1}) = [\det(Q)]^{-1}$ concluimos:

$$\boxed{\det(A) = \det(A')}$$

Matrices Semejantes

Definición Las matrices A y A' se dicen semejantes si están asociadas al mismo endomorfismo.

Proposición

$$A \text{ y } A' \text{ son semejantes} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{existe } Q \text{ no singular tal que} \\ \qquad A = Q^{-1} \cdot A' \cdot Q \end{array} \right.$$

Demo Al lector.

Proposición

$$A \text{ y } A' \text{ son semejantes} \Rightarrow \det(A) = \det(A')$$

Demo Usando la proposición anterior y tomando determiantes obtenemos:

$A = Q^{-1} \cdot A' \cdot Q \Rightarrow \det(A) = \det(Q^{-1} \cdot A' \cdot Q) = \det(Q^{-1}) \cdot \det(A') \cdot \det(Q)$

mientras $\det(Q^{-1}) = [\det(Q)]^{-1}$ concluimos:

$$\boxed{\det(A) = \det(A')}$$

Matrices Semejantes

Definición Las matrices A y A' se dicen semejantes si están asociadas al mismo endomorfismo.

Proposición

$$A \text{ y } A' \text{ son semejantes} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{existe } Q \text{ no singular tal que} \\ \qquad A = Q^{-1} \cdot A' \cdot Q \end{array} \right.$$

Demo Al lector.

Proposición

$$A \text{ y } A' \text{ son semejantes} \Rightarrow \det(A) = \det(A')$$

Demo Usando la proposición anterior y tomando determiantes obtenemos:

$A = Q^{-1} \cdot A' \cdot Q \Rightarrow \det(A) = \det(Q^{-1} \cdot A' \cdot Q) = \det(Q^{-1}) \cdot \det(A') \cdot \det(Q)$

mientras $\det(Q^{-1}) = [\det(Q)]^{-1}$ concluimos:

$$\boxed{\det(A) = \det(A')}$$

Matrices Semejantes

Definición Las matrices A y A' se dicen semejantes si están asociadas al mismo endomorfismo.

Proposición

$$A \text{ y } A' \text{ son semejantes} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{existe } Q \text{ no singular tal que} \\ \qquad A = Q^{-1} \cdot A' \cdot Q \end{cases}$$

Demo Al lector.

Proposición

$$A \text{ y } A' \text{ son semejantes} \Rightarrow \det(A) = \det(A')$$

Demo Usando la proposición anterior y tomando determiantes obtenemos:

$A = Q^{-1} \cdot A' \cdot Q \Rightarrow \det(A) = \det(Q^{-1} \cdot A' \cdot Q) = \det(Q^{-1}) \cdot \det(A') \cdot \det(Q)$

mientras $\det(Q^{-1}) = [\det(Q)]^{-1}$ concluimos:

$$\boxed{\det(A) = \det(A')}$$

Matrices Semejantes

Definición Las matrices A y A' se dicen semejantes si están asociadas al mismo endomorfismo.

Proposición

$$A \text{ y } A' \text{ son semejantes} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{existe } Q \text{ no singular tal que} \\ \qquad A = Q^{-1} \cdot A' \cdot Q \end{array} \right.$$

Demo Al lector.

Proposición

$$A \text{ y } A' \text{ son semejantes} \Rightarrow \det(A) = \det(A')$$

Demo Usando la proposición anterior y tomando

determiantes obtenemos:

$A = Q^{-1} \cdot A' \cdot Q \Rightarrow \det(A) = \det(Q^{-1} \cdot A' \cdot Q) = \det(Q^{-1}) \cdot \det(A') \cdot \det(Q)$

mientras $\det(Q^{-1}) = [\det(Q)]^{-1}$ concluimos:

$$\boxed{\det(A) = \det(A')}$$

Matrices Semejantes

Definición Las matrices A y A' se dicen semejantes si están asociadas al mismo endomorfismo.

Proposición

$$A \text{ y } A' \text{ son semejantes} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{existe } Q \text{ no singular tal que} \\ \qquad A = Q^{-1} \cdot A' \cdot Q \end{cases}$$

Demo Al lector.

Proposición

$$A \text{ y } A' \text{ son semejantes} \Rightarrow \det(A) = \det(A')$$

Demo Usando la proposición anterior y tomando determiantes obtenemos:

$A = Q^{-1} \cdot A' \cdot Q \Rightarrow \det(A) = \det(Q^{-1} \cdot A' \cdot Q) = \det(Q^{-1}) \cdot \det(A') \cdot \det(Q)$

mientras $\det(Q^{-1}) = [\det(Q)]^{-1}$ concluimos:

$$\boxed{\det(A) = \det(A')}$$

Matrices Semejantes

Definición Las matrices A y A' se dicen semejantes si están asociadas al mismo endomorfismo.

Proposición

$$A \text{ y } A' \text{ son semejantes} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{existe } Q \text{ no singular tal que} \\ \qquad A = Q^{-1} \cdot A' \cdot Q \end{cases}$$

Demo Al lector.

Proposición

$$A \text{ y } A' \text{ son semejantes} \Rightarrow \det(A) = \det(A')$$

Demo Usando la proposición anterior y tomando determiantes obtenemos:

$A = Q^{-1} \cdot A' \cdot Q \Rightarrow \det(A) = \det(Q^{-1} \cdot A' \cdot Q) = \det(Q^{-1}) \cdot \det(A') \cdot \det(Q)$

mientras $\det(Q^{-1}) = [\det(Q)]^{-1}$ concluimos:

$$\boxed{\det(A) = \det(A')}$$

Matrices Semejantes

Definición Las matrices A y A' se dicen semejantes si están asociadas al mismo endomorfismo.

Proposición

$$A \text{ y } A' \text{ son semejantes} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{existe } Q \text{ no singular tal que} \\ \qquad A = Q^{-1} \cdot A' \cdot Q \end{array} \right.$$

Demo Al lector.

Proposición

$$A \text{ y } A' \text{ son semejantes} \Rightarrow \det(A) = \det(A')$$

Demo Usando la proposición anterior y tomando

determiantes obtenemos:

$A = Q^{-1} \cdot A' \cdot Q \Rightarrow \det(A) = \det(Q^{-1} \cdot A' \cdot Q) = \det(Q^{-1}) \cdot \det(A') \cdot \det(Q)$

mientras $\det(Q^{-1}) = [\det(Q)]^{-1}$ concluimos:

$$\boxed{\det(A) = \det(A')}$$

Matrices Semejantes

Definición Las matrices A y A' se dicen semejantes si están asociadas al mismo endomorfismo.

Proposición

$$A \text{ y } A' \text{ son semejantes} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{existe } Q \text{ no singular tal que} \\ \qquad A = Q^{-1} \cdot A' \cdot Q \end{array} \right.$$

Demo Al lector.

Proposición

$$A \text{ y } A' \text{ son semejantes} \Rightarrow \det(A) = \det(A')$$

Demo Usando la proposición anterior y tomando determiantes obtenemos:

$A = Q^{-1} \cdot A' \cdot Q \Rightarrow \det(A) = \det(Q^{-1} \cdot A' \cdot Q) = \det(Q^{-1}) \cdot \det(A') \cdot \det(Q)$

mientras $\det(Q^{-1}) = [\det(Q)]^{-1}$ concluimos:

$$\boxed{\det(A) = \det(A')}$$

Matrices Semejantes

Definición Las matrices A y A' se dicen semejantes si están asociadas al mismo endomorfismo.

Proposición

$$A \text{ y } A' \text{ son semejantes} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{existe } Q \text{ no singular tal que} \\ \qquad A = Q^{-1} \cdot A' \cdot Q \end{array} \right.$$

Demo Al lector.

Proposición

$$A \text{ y } A' \text{ son semejantes} \Rightarrow \det(A) = \det(A')$$

Demo Usando la proposición anterior y tomando determiantes obtenemos:

$A = Q^{-1} \cdot A' \cdot Q \Rightarrow \det(A) = \det(Q^{-1} \cdot A' \cdot Q) = \det(Q^{-1}) \cdot \det(A') \cdot \det(Q)$

mientras $\det(Q^{-1}) = [\det(Q)]^{-1}$ concluimos:

$$\boxed{\det(A) = \det(A')}$$

Tema 5

Diagonalización de endomorfismos

Tema 5

Diagonalización de endomorfismos

Vectores y valores propios

Polinomio característico

Multiplicidad algebraica y geométrica

Teorema de diagonalización de endomorfismos

Vectores y valores propios

Definición Sea $f : E \to E$ un endomorfismo.

- Se dice que $\lambda \in \mathbb{R}$ es un valor propio de f si

$$\boxed{\text{existe } \mathbf{e} \in E \text{ con } \mathbf{e} \neq \mathbf{0}, \text{ tal que } f(\mathbf{e}) = \lambda \mathbf{e}}$$

- Se dice que $\mathbf{e} \in E$ es un vector propio (o autovalor) asociado al valor propio λ si

$$\boxed{f(\mathbf{e}) = \lambda \mathbf{e}}$$

Ejemplos

Observación En lo que sigue denotaremos $(\lambda, \mathbf{e})$ al par valor-vector propio.

Vectores y valores propios

Definición Sea $f : E \to E$ un endomorfismo.

- Se dice que $\lambda \in \mathbb{R}$ es un valor propio de f si

$$\boxed{\text{existe } \mathbf{e} \in E \text{ con } \mathbf{e} \neq \mathbf{0}, \text{ tal que } f(\mathbf{e}) = \lambda \mathbf{e}}$$

- Se dice que $\mathbf{e} \in E$ es un vector propio (o autovalor) asociado al valor propio λ si

$$\boxed{f(\mathbf{e}) = \lambda \mathbf{e}}$$

Ejemplos

Observación En lo que sigue denotaremos $(\lambda, \mathbf{e})$ al par valor-vector propio.

Vectores y valores propios

Definición Sea $f : E \to E$ un endomorfismo.

- Se dice que $\lambda \in \mathbb{R}$ es un valor propio de f si

$$\boxed{\text{existe } \mathbf{e} \in E \text{ con } \mathbf{e} \neq \mathbf{0}, \text{ tal que } f(\mathbf{e}) = \lambda \mathbf{e}}$$

- Se dice que $\mathbf{e} \in E$ es un vector propio (o autovalor) asociado al valor propio λ si

$$\boxed{f(\mathbf{e}) = \lambda \mathbf{e}}$$

Ejemplos

Observación En lo que sigue denotaremos $(\lambda, \mathbf{e})$ al par valor-vector propio.

Propiedades

Proposición Sea $f : E \to E$ endomorfismo.

1. λ es valor propio de $f \Leftrightarrow f - \lambda Id : E \to E$ no es inyectiva.
2. Si λ es valor propio, el conjunto de vectores propios asociados a λ es un subespacio vectorial, que denotaremos por $V(\lambda)$. Además $V(\lambda) = \text{Ker } (f - \lambda Id)$.
3. Un vector $\mathbf{e} \in E$ no nulo, no puede ser vector propio asociado a dos valores propios diferentes.

Demo

1. $$\lambda \text{ es v.p de } f \Leftrightarrow \exists \mathbf{e} \neq \mathbf{0}, f(\mathbf{e}) = \lambda \mathbf{e} \Leftrightarrow (f - \lambda Id)(\mathbf{e}) = \mathbf{0}$$
$$\Leftrightarrow \mathbf{e} \in \text{Ker } (f - \lambda Id) \Leftrightarrow (f - \lambda Id) \text{ no es inyectiva}$$
2. Al lector.
3. $$\mathbf{e} \neq \mathbf{0}, \mathbf{e} \in V(\lambda) \cap V(\mu) \Rightarrow f(\mathbf{e}) = \lambda \mathbf{e} = \mu \mathbf{e} \Rightarrow \lambda = \mu.$$

Propiedades

Proposición Sea $f : E \to E$ endomorfismo.

1. λ es valor propio de $f \Leftrightarrow f - \lambda Id : E \to E$ no es inyectiva.
2. Si λ es valor propio, el conjunto de vectores propios asociados a λ es un subespacio vectorial, que denotaremos por $V(\lambda)$. Además $V(\lambda) = \text{Ker } (f - \lambda Id)$.
3. Un vector $\mathbf{e} \in E$ no nulo, no puede ser vector propio asociado a dos valores propios diferentes.

Demo

1.

$$\lambda \text{ es v.p de } f \Leftrightarrow \exists \mathbf{e} \neq \mathbf{0}, f(\mathbf{e}) = \lambda \mathbf{e} \Leftrightarrow (f - \lambda Id)(\mathbf{e}) = \mathbf{0}$$
$$\Leftrightarrow \mathbf{e} \in \text{Ker } (f - \lambda Id) \Leftrightarrow (f - \lambda Id) \text{ no es inyectiva}$$

2. Al lector.
3.

$$\mathbf{e} \neq \mathbf{0}, \mathbf{e} \in V(\lambda) \cap V(\mu) \Rightarrow f(\mathbf{e}) = \lambda \mathbf{e} = \mu \mathbf{e} \Rightarrow \lambda = \mu.$$

Propiedades

Proposición Sea $f : E \to E$ endomorfismo.

1. λ es valor propio de $f \Leftrightarrow f - \lambda Id : E \to E$ no es inyectiva.
2. Si λ es valor propio, el conjunto de vectores propios asociados a λ es un subespacio vectorial, que denotaremos por $\boxed{V(\lambda)}$. Además $\boxed{V(\lambda) = \text{Ker } (f - \lambda Id)}$.
3. Un vector $\mathbf{e} \in E$ no nulo, no puede ser vector propio asociado a dos valores propios diferentes.

Demo

1. $$\lambda \text{ es v.p de } f \Leftrightarrow \exists \mathbf{e} \neq \mathbf{0}, f(\mathbf{e}) = \lambda \mathbf{e} \Leftrightarrow (f - \lambda Id)(\mathbf{e}) = \mathbf{0}$$
$$\Leftrightarrow \mathbf{e} \in \text{Ker } (f - \lambda Id) \Leftrightarrow (f - \lambda Id) \text{ no es inyectiva}$$
2. Al lector.
3. $$\mathbf{e} \neq \mathbf{0}, \mathbf{e} \in V(\lambda) \cap V(\mu) \Rightarrow f(\mathbf{e}) = \lambda \mathbf{e} = \mu \mathbf{e} \Rightarrow \lambda = \mu.$$

Propiedades

Proposición Sea $f : E \to E$ endomorfismo.

1. λ es valor propio de $f \Leftrightarrow f - \lambda Id : E \to E$ no es inyectiva.
2. Si λ es valor propio, el conjunto de vectores propios asociados a λ es un subespacio vectorial, que denotaremos por $\boxed{V(\lambda)}$. Además $\boxed{V(\lambda) = \text{Ker }(f - \lambda Id)}$.
3. Un vector $\mathbf{e} \in E$ no nulo, no puede ser vector propio asociado a dos valores propios diferentes.

Demo

1. $$\lambda \text{ es v.p de } f \Leftrightarrow \exists \mathbf{e} \neq \mathbf{0}, f(\mathbf{e}) = \lambda\mathbf{e} \Leftrightarrow (f - \lambda Id)(\mathbf{e}) = \mathbf{0}$$
$$\Leftrightarrow \mathbf{e} \in \text{Ker }(f - \lambda Id) \Leftrightarrow (f - \lambda Id) \text{ no es inyectiva}$$
2. Al lector.
3. $$\mathbf{e} \neq \mathbf{0}, \mathbf{e} \in V(\lambda) \cap V(\mu) \Rightarrow f(\mathbf{e}) = \lambda\mathbf{e} = \mu\mathbf{e} \Rightarrow \lambda = \mu.$$

Propiedades

Proposición Sea $f : E \to E$ endomorfismo.

1. λ es valor propio de $f \Leftrightarrow f - \lambda Id : E \to E$ no es inyectiva.
2. Si λ es valor propio, el conjunto de vectores propios asociados a λ es un subespacio vectorial, que denotaremos por $\boxed{V(\lambda)}$. Además $\boxed{V(\lambda) = \text{Ker } (f - \lambda Id)}$.
3. Un vector $\mathbf{e} \in E$ no nulo, no puede ser vector propio asociado a dos valores propios diferentes.

Demo

1. $$\lambda \text{ es v.p de } f \Leftrightarrow \exists \mathbf{e} \neq \mathbf{0}, f(\mathbf{e}) = \lambda \mathbf{e} \Leftrightarrow (f - \lambda Id)(\mathbf{e}) = \mathbf{0}$$
$$\Leftrightarrow \mathbf{e} \in \text{Ker } (f - \lambda Id) \Leftrightarrow (f - \lambda Id) \text{ no es inyectiva}$$
2. Al lector.
3. $$\mathbf{e} \neq \mathbf{0}, \mathbf{e} \in V(\lambda) \cap V(\mu) \Rightarrow f(\mathbf{e}) = \lambda \mathbf{e} = \mu \mathbf{e} \Rightarrow \lambda = \mu.$$

Propiedades

Proposición Sea $f : E \to E$ endomorfismo.

1. λ es valor propio de $f \Leftrightarrow f - \lambda Id : E \to E$ no es inyectiva.
2. Si λ es valor propio, el conjunto de vectores propios asociados a λ es un subespacio vectorial, que denotaremos por $\boxed{V(\lambda)}$. Además $\boxed{V(\lambda) = \text{Ker } (f - \lambda Id)}$.
3. Un vector $\mathbf{e} \in E$ no nulo, no puede ser vector propio asociado a dos valores propios diferentes.

Demo

1.
$$\lambda \text{ es v.p de } f \Leftrightarrow \exists \mathbf{e} \neq \mathbf{0}, f(\mathbf{e}) = \lambda \mathbf{e} \Leftrightarrow (f - \lambda Id)(\mathbf{e}) = \mathbf{0}$$
$$\Leftrightarrow \mathbf{e} \in \text{Ker } (f - \lambda Id) \Leftrightarrow (f - \lambda Id) \text{ no es inyectiva}$$

2. Al lector.
3.
$$\mathbf{e} \neq \mathbf{0}, \mathbf{e} \in V(\lambda) \cap V(\mu) \Rightarrow f(\mathbf{e}) = \lambda \mathbf{e} = \mu \mathbf{e} \Rightarrow \lambda = \mu.$$

Propiedades

Proposición Sea $f : E \to E$ endomorfismo.

1. λ es valor propio de $f \Leftrightarrow f - \lambda Id : E \to E$ no es inyectiva.
2. Si λ es valor propio, el conjunto de vectores propios asociados a λ es un subespacio vectorial, que denotaremos por $V(\lambda)$. Además $V(\lambda) = \text{Ker } (f - \lambda Id)$.
3. Un vector $\mathbf{e} \in E$ no nulo, no puede ser vector propio asociado a dos valores propios diferentes.

Demo

1.

$$\lambda \text{ es v.p de } f \Leftrightarrow \exists \mathbf{e} \neq \mathbf{0}, f(\mathbf{e}) = \lambda\mathbf{e} \Leftrightarrow (f - \lambda Id)(\mathbf{e}) = \mathbf{0}$$
$$\Leftrightarrow \mathbf{e} \in \text{Ker } (f - \lambda Id) \Leftrightarrow (f - \lambda Id) \text{ no es inyectiva}$$

2. Al lector.
3.

$$\mathbf{e} \neq \mathbf{0}, \mathbf{e} \in V(\lambda) \cap V(\mu) \Rightarrow f(\mathbf{e}) = \lambda\mathbf{e} = \mu\mathbf{e} \Rightarrow \lambda = \mu.$$

Proposición

Proposición Sea $f : E \to E$ endomorfismo:

1. Si $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$ son dos vectores no nulos, asociados a valores propios λ_1 y λ_2 diferentes, entonces $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$ son linealmente independientes
2. Si $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ son n vectores no nulos, asociados a valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ diferentes, entonces $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ son linealmente independientes

Proposición

Proposición Sea $f : E \to E$ endomorfismo:

1. Si $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$ son dos vectores no nulos, asociados a valores propios λ_1 y λ_2 diferentes, entonces $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$ son linealmente independientes

2. Si $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ son n vectores no nulos, asociados a valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ diferentes, entonces $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ son linealmente independientes

Proposición

Proposición Sea $f : E \to E$ endomorfismo:

1. Si $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$ son dos vectores no nulos, asociados a valores propios λ_1 y λ_2 diferentes, entonces $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$ son linealmente independientes
2. Si $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ son n vectores no nulos, asociados a valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ diferentes, entonces $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ son linealmente independientes

Demo

1. Dada la combinación lineal $\alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2 = \mathbf{0}$, veamos que $\alpha = \beta = 0$.

$$\left.\begin{array}{rcl} \alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2 & = & \mathbf{0} \\ f(\alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2) & = & f(\mathbf{0}) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} \alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2 & = & \mathbf{0} \\ \alpha\lambda_1\mathbf{e}_1 + \beta\lambda_2\mathbf{e}_2) & = & \mathbf{0} \end{array}\right\}$$

$$\xRightarrow{*\lambda_1} \left.\begin{array}{rcl} \alpha\lambda_1\mathbf{e}_1 + \beta\lambda_1\mathbf{e}_2 & = & \mathbf{0} \\ \alpha\lambda_1\mathbf{e}_1 + \beta\lambda_2\mathbf{e}_2) & = & \mathbf{0} \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{Restando}} \beta(\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{e}_2 = \mathbf{0} \xRightarrow[\mathbf{e}_2 \neq \mathbf{0}]{\lambda_1 \neq \lambda_2} \beta = 0$$

Susituyendo $\beta = 0$ en $\alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2 = \mathbf{0}$ se deduce $\alpha = 0$ y se concluye.

2. Por inducción.

Proposición

Proposición Sea $f : E \to E$ endomorfismo:

1. Si $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$ son dos vectores no nulos, asociados a valores propios λ_1 y λ_2 diferentes, entonces $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$ son linealmente independientes

2. Si $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ son n vectores no nulos, asociados a valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ diferentes, entonces $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ son linealmente independientes

Demo

1. Dada la combinación lineal $\alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2 = \mathbf{0}$, veamos que $\alpha = \beta = 0$.

$$\left.\begin{array}{rcl} \alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2 & = & \mathbf{0} \\ f(\alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2) & = & f(\mathbf{0}) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} \alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2 & = & \mathbf{0} \\ \alpha\lambda_1\mathbf{e}_1 + \beta\lambda_2\mathbf{e}_2) & = & \mathbf{0} \end{array}\right\}$$

$$\overset{*\lambda_1}{\Longrightarrow} \left.\begin{array}{rcl} \alpha\lambda_1\mathbf{e}_1 + \beta\lambda_1\mathbf{e}_2 & = & \mathbf{0} \\ \alpha\lambda_1\mathbf{e}_1 + \beta\lambda_2\mathbf{e}_2) & = & \mathbf{0} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Restando}} \beta(\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{e}_2 = \mathbf{0} \xrightarrow[\mathbf{e}_2 \neq \mathbf{0}]{\lambda_1 \neq \lambda_2} \beta = 0$$

Susituyendo $\beta = 0$ en $\alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2 = \mathbf{0}$ se deduce $\alpha = 0$ y se concluye.

2. Por inducción.

Proposición

Proposición Sea $f : E \to E$ endomorfismo:

1. Si $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$ son dos vectores no nulos, asociados a valores propios λ_1 y λ_2 diferentes, entonces $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$ son linealmente independientes

2. Si $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ son n vectores no nulos, asociados a valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ diferentes, entonces $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ son linealmente independientes

Demo

1. Dada la combinación lineal $\alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2 = \mathbf{0}$, veamos que $\alpha = \beta = 0$.

$$\left.\begin{array}{rcl} \alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2 & = & \mathbf{0} \\ f(\alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2) & = & f(\mathbf{0}) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} \alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2 & = & \mathbf{0} \\ \alpha\lambda_1\mathbf{e}_1 + \beta\lambda_2\mathbf{e}_2) & = & \mathbf{0} \end{array}\right\}$$

$$\xRightarrow{*\lambda_1} \left.\begin{array}{rcl} \alpha\lambda_1\mathbf{e}_1 + \beta\lambda_1\mathbf{e}_2 & = & \mathbf{0} \\ \alpha\lambda_1\mathbf{e}_1 + \beta\lambda_2\mathbf{e}_2) & = & \mathbf{0} \end{array}\right\} \xRightarrow{\textit{Restando}} \beta(\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{e}_2 = \mathbf{0} \xRightarrow[\mathbf{e}_2 \neq \mathbf{0}]{\lambda_1 \neq \lambda_2} \beta = 0$$

Susituyendo $\beta = 0$ en $\alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2 = \mathbf{0}$ se deduce $\alpha = 0$ y se concluye.

2. Por inducción.

Proposición

Proposición Sea $f : E \to E$ endomorfismo:

1. Si $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$ son dos vectores no nulos, asociados a valores propios λ_1 y λ_2 diferentes, entonces $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$ son linealmente independientes

2. Si $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ son n vectores no nulos, asociados a valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ diferentes, entonces $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ son linealmente independientes

Demo

1. Dada la combinación lineal $\alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2 = \mathbf{0}$, veamos que $\alpha = \beta = 0$.

$$\left.\begin{array}{rcl} \alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2 & = & \mathbf{0} \\ f(\alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2) & = & f(\mathbf{0}) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} \alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2 & = & \mathbf{0} \\ \alpha\lambda_1\mathbf{e}_1 + \beta\lambda_2\mathbf{e}_2) & = & \mathbf{0} \end{array}\right\}$$

$$\overset{*\lambda_1}{\Longrightarrow} \left.\begin{array}{rcl} \alpha\lambda_1\mathbf{e}_1 + \beta\lambda_1\mathbf{e}_2 & = & \mathbf{0} \\ \alpha\lambda_1\mathbf{e}_1 + \beta\lambda_2\mathbf{e}_2) & = & \mathbf{0} \end{array}\right\} \xrightarrow{\textit{Restando}} \beta(\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{e}_2 = \mathbf{0} \xrightarrow[\mathbf{e}_2 \neq \mathbf{0}]{\lambda_1 \neq \lambda_2} \beta = 0$$

Susituyendo $\beta = 0$ en $\alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2 = \mathbf{0}$ se deduce $\alpha = 0$ y se concluye.

2. Por inducción.

Proposición

Proposición Sea $f : E \to E$ endomorfismo:

1. Si $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$ son dos vectores no nulos, asociados a valores propios λ_1 y λ_2 diferentes, entonces $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$ son linealmente independientes

2. Si $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ son n vectores no nulos, asociados a valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ diferentes, entonces $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ son linealmente independientes

Observación Si $f : E \to E$ es un endomorfismo, y $\dim E = n$, entonces f no tiene más de n valores propios

Tema 5

Diagonalización de endomorfismos

Polinomio característico

Definición Sea A una matriz cuadrada de orden n se llama polinomio característico de A al polinomio:

$$C_A(x) = \det(A - x\,Id) = |A - x\,Id|$$

Nota : Id denota aquí la matriz identidad de orden n.

Proposición $C_A(x)$ es un polinomio mónico (coeficiente de mayor grado es ± 1) de grado n.

Proposición Si A y A' son matrices semejantes entonces tienen el mismo polinomio característico.

Observación La proposición anterior, permite hablar de polinomio característico asociado a un endormofismo pues éste es independiente de la base que se utilice.

Polinomio característico

Definición Sea A una matriz cuadrada de orden n se llama polinomio característico de A al polinomio:

$$C_A(x) = \det(A - x\,Id) = |A - x\,Id|$$

Nota : Id denota aquí la matriz identidad de orden n.

Proposición $C_A(x)$ es un polinomio mónico (coeficiente de mayor grado es ± 1) de grado n.

Proposición Si A y A' son matrices semejantes entonces tienen el mismo polinomio característico.

Observación La proposición anterior, permite hablar de polinomio característico asociado a un endormofismo pues éste es independiente de la base que se utilice.

Polinomio característico

Definición Sea A una matriz cuadrada de orden n se llama polinomio característico de A al polinomio:

$$C_A(x) = \det(A - x\,Id) = |A - x\,Id|$$

Nota : Id denota aquí la matriz identidad de orden n.

Proposición $C_A(x)$ es un polinomio mónico (coeficiente de mayor grado es ± 1) de grado n.

Proposición Si A y A' son matrices semejantes entonces tienen el mismo polinomio característico.

Observación La proposición anterior, permite hablar de polinomio característico asociado a un endormofismo pues éste es independiente de la base que se utilice.

Polinomio característico

Definición Sea A una matriz cuadrada de orden n se llama polinomio característico de A al polinomio:

$$C_A(x) = \det(A - x\,Id) = |A - x\,Id|$$

Nota : Id denota aquí la matriz identidad de orden n.

Proposición $C_A(x)$ es un polinomio mónico (coeficiente de mayor grado es ± 1) de grado n.

Proposición Si A y A' son matrices semejantes entonces tienen el mismo polinomio característico.
Demo Si A y A' son semejantes existe Q no singular tal que $A = Q^{-1}A'Q$. Entonces

$$C_A(x) = \det\,(A - x\,Id) \overset{A=Q^{-1}A'Q}{=} \det\,(Q^{-1}A'Q - x\,Q^{-1}Q)$$
$$= \det\,(Q^{-1}(A' - x\,Id)Q) = \det\,(Q^{-1})\det\,(A' - x\,Id)\det\,(Q)$$
$$\overset{\det\,(Q^{-1})=\det\,(Q^{-1})}{=} \det\,(A' - x\,Id) = C_{A'}(x)$$

Polinomio característico

Definición Sea A una matriz cuadrada de orden n se llama polinomio característico de A al polinomio:

$$C_A(x) = \det(A - x\,Id) = |A - x\,Id|$$

Nota : Id denota aquí la matriz identidad de orden n.

Proposición $C_A(x)$ es un polinomio mónico (coeficiente de mayor grado es ± 1) de grado n.

Proposición Si A y A' son matrices semejantes entonces tienen el mismo polinomio característico.

Demo Si A y A' son semejantes existe Q no singular tal que $A = Q^{-1}A'Q$. Entonces

$$C_A(x) = \det\,(A - x\,Id) \overset{A=Q^{-1}A'Q}{=} \det\,(Q^{-1}A'Q - x\,Q^{-1}Q)$$

$$= \det\,(Q^{-1}(A' - x\,Id)Q) = \det\,(Q^{-1})\det\,(A' - x\,Id)\det\,(Q)$$

$$\overset{\det\,(Q^{-1})=\det\,(Q^{-1})}{=} \det\,(A' - x\,Id) = C_{A'}(x)$$

Observación La proposición anterior, permite hablar de polinomio característico asociado a un endomorfismo pues

Polinomio característico

Definición Sea A una matriz cuadrada de orden n se llama polinomio característico de A al polinomio:

$$C_A(x) = \det(A - x\,Id) = |A - x\,Id|$$

Nota : Id denota aquí la matriz identidad de orden n.

Proposición $C_A(x)$ es un polinomio mónico (coeficiente de mayor grado es ± 1) de grado n.

Proposición Si A y A' son matrices semejantes entonces tienen el mismo polinomio característico.
Demo Si A y A' son semejantes existe Q no singular tal que $A = Q^{-1}A'Q$. Entonces

$$C_A(x) = \det\,(A - x\,Id) \overset{A=Q^{-1}A'Q}{=} \det\,(Q^{-1}A'Q - x\,Q^{-1}Q)$$

$$= \det\,(Q^{-1}(A' - x\,Id)Q) = \det\,(Q^{-1})\det\,(A' - x\,Id)\det\,(Q)$$

$$\overset{\det\,(Q^{-1})=\det\,(Q^{-1})}{=} \det\,(A' - x\,Id) = C_{A'}(x)$$

Polinomio característico

Definición Sea A una matriz cuadrada de orden n se llama polinomio característico de A al polinomio:

$$C_A(x) = \det(A - x\,Id) = |A - x\,Id|$$

Nota : Id denota aquí la matriz identidad de orden n.

Proposición $C_A(x)$ es un polinomio mónico (coeficiente de mayor grado es ± 1) de grado n.

Proposición Si A y A' son matrices semejantes entonces tienen el mismo polinomio característico.
Demo Si A y A' son semejantes existe Q no singular tal que $A = Q^{-1}A'Q$. Entonces

$$\begin{aligned} C_A(x) &= \det\,(A - x\,Id) \overset{A=Q^{-1}A'Q}{=} \det\,(Q^{-1}A'Q - x\,Q^{-1}Q) \\ &= \det\,(Q^{-1}(A' - x\,Id)Q) = \det\,(Q^{-1})\det\,(A' - x\,Id)\det\,(Q) \\ &\overset{\det\,(Q^{-1})=\det\,(Q^{-1})}{=} \det\,(A' - x\,Id) = C_{A'}(x) \end{aligned}$$

Observación La proposición anterior permite hablar de polinomio característico asociado a un endomorfismo pues

Polinomio característico

Definición Sea A una matriz cuadrada de orden n se llama polinomio característico de A al polinomio:

$$C_A(x) = \det(A - x\,Id) = |A - x\,Id|$$

Nota : Id denota aquí la matriz identidad de orden n.

Proposición $C_A(x)$ es un polinomio mónico (coeficiente de mayor grado es ± 1) de grado n.

Proposición Si A y A' son matrices semejantes entonces tienen el mismo polinomio característico.
Demo Si A y A' son semejantes existe Q no singular tal que $A = Q^{-1}A'Q$. Entonces

$$\begin{aligned} C_A(x) &= \det\,(A - x\,Id) \overset{A=Q^{-1}A'Q}{=} \det\,(Q^{-1}A'Q - x\,Q^{-1}Q) \\ &= \det\,(Q^{-1}(A' - x\,Id)Q) = \det\,(Q^{-1})\det\,(A' - x\,Id)\det\,(Q) \\ &\overset{\det\,(Q^{-1})=\det\,(Q^{-1})}{=} \det\,(A' - x\,Id) = C_{A'}(x) \end{aligned}$$

Polinomio característico

Definición Sea A una matriz cuadrada de orden n se llama polinomio característico de A al polinomio:

$$C_A(x) = \det(A - x\,Id) = |A - x\,Id|$$

Nota : Id denota aquí la matriz identidad de orden n.

Proposición $C_A(x)$ es un polinomio mónico (coeficiente de mayor grado es ± 1) de grado n.

Proposición Si A y A' son matrices semejantes entonces tienen el mismo polinomio característico.

Demo Si A y A' son semejantes existe Q no singular tal que $A = Q^{-1}A'Q$. Entonces

$$C_A(x) = \det\,(A - x\,Id) \overset{A=Q^{-1}A'Q}{=} \det\,(Q^{-1}A'Q - x\,Q^{-1}Q)$$

$$= \det\,(Q^{-1}(A' - x\,Id)Q) = \det\,(Q^{-1})\det\,(A' - x\,Id)\det\,(Q)$$

$$\overset{\det\,(Q^{-1})=\det\,(Q^{-1})}{=} \det\,(A' - x\,Id) = C_{A'}(x)$$

Observación La proposición anterior permite hablar de polinomio característico asociado a un endomorfismo pues

Polinomio característico

Definición Sea A una matriz cuadrada de orden n se llama polinomio característico de A al polinomio:

$$C_A(x) = \det(A - x\,Id) = |A - x\,Id|$$

Nota : Id denota aquí la matriz identidad de orden n.

Proposición $C_A(x)$ es un polinomio mónico (coeficiente de mayor grado es ± 1) de grado n.

Proposición Si A y A' son matrices semejantes entonces tienen el mismo polinomio característico.

Demo Si A y A' son semejantes existe Q no singular tal que $A = Q^{-1}A'Q$. Entonces

$$\begin{aligned} C_A(x) &= \det\,(A - x\,Id) \overset{A=Q^{-1}A'Q}{=} \det\,(Q^{-1}A'Q - x\,Q^{-1}Q) \\ &= \det\,(Q^{-1}(A' - x\,Id)Q) = \det\,(Q^{-1})\det\,(A' - x\,Id)\det\,(Q) \\ &\overset{\det\,(Q^{-1})=\det\,(Q^{-1})}{=} \det\,(A' - x\,Id) = C_{A'}(x) \end{aligned}$$

Observación La proposición anterior permite hablar de polinomio característico asociado a un endormofismo pues

Polinomio característico

Definición Sea A una matriz cuadrada de orden n se llama polinomio característico de A al polinomio:

$$C_A(x) = \det(A - x\,Id) = |A - x\,Id|$$

Nota : Id denota aquí la matriz identidad de orden n.

Proposición $C_A(x)$ es un polinomio mónico (coeficiente de mayor grado es ± 1) de grado n.

Proposición Si A y A' son matrices semejantes entonces tienen el mismo polinomio característico.

Observación La proposición anterior, permite hablar de polinomio característico asociado a un endormofismo pues éste es independiente de la base que se utilice.

Polinomio caractéristico

Definición Dada una matriz cuadrada de orden n se dice que $\lambda \in \mathbb{R}$ es un valor propio de A, si λ es raíz de su polinomio característico, es decir $C_A(\lambda) = \det\,(A - \lambda\, Id) = 0$

Proposición Sea $f : E \to E$ un endomorfismo, y sea A la matriz asociada a f en una base cualquiera. Entonces

$$\boxed{\lambda \text{ es valor propio de } f \Leftrightarrow \lambda \text{ es valor propio de } A}$$

Demo

$$\begin{aligned} &\lambda \text{ es v.p. de } f \Leftrightarrow (f - \lambda\, Id) \text{ no es inyectiva} \\ &\Leftrightarrow (f - \lambda\, Id) \text{ no es isomorfismo} \Leftrightarrow \det\,(A - \lambda\, Id) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda \text{ es v.p. de } A. \end{aligned}$$

Corolario $f : E \to E$, $\dim E = n$, A matriz asociada en una base, y $\lambda \in \mathbb{R}$ valor propio, entonces:

$$\boxed{\dim V(\lambda) = n - \text{rang}(A - \lambda\, Id)}$$

Demo Al lector.

Polinomio caractéristico

Definición Dada una matriz cuadrada de orden n se dice que $\lambda \in \mathbb{R}$ es un valor propio de A, si λ es raíz de su polinomio característico, es decir $C_A(\lambda) = \det\,(A - \lambda\, Id) = 0$

Proposición Sea $f : E \to E$ un endomorfismo, y sea A la matriz asociada a f en una base cualquiera. Entonces

$$\boxed{\lambda \text{ es valor propio de } f \Leftrightarrow \lambda \text{ es valor propio de } A}$$

Demo

$$\begin{aligned} &\lambda \text{ es v.p. de } f \Leftrightarrow (f - \lambda\, Id) \text{ no es inyectiva} \\ &\Leftrightarrow (f - \lambda\, Id) \text{ no es isomorfismo} \Leftrightarrow \det\,(A - \lambda\, Id) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda \text{ es v.p. de } A. \end{aligned}$$

Corolario $f : E \to E$, $\dim E = n$, A matriz asociada en una base, y $\lambda \in \mathbb{R}$ valor propio, entonces:

$$\boxed{\dim V(\lambda) = n - \operatorname{rang}(A - \lambda\, Id)}$$

Demo Al lector.

Polinomio caractéristico

Definición Dada una matriz cuadrada de orden n se dice que $\lambda \in \mathbb{R}$ es un valor propio de A, si λ es raíz de su polinomio característico, es decir $C_A(\lambda) = \det\,(A - \lambda\, Id) = 0$

Proposición Sea $f : E \to E$ un endomorfismo, y sea A la matriz asociada a f en una base cualquiera. Entonces

$$\boxed{\lambda \text{ es valor propio de } f \Leftrightarrow \lambda \text{ es valor propio de } A}$$

Demo

$$\lambda \text{ es v.p. de } f \Leftrightarrow (f - \lambda\, Id) \text{ no es inyectiva}$$
$$\Leftrightarrow (f - \lambda\, Id) \text{ no es isomorfismo} \Leftrightarrow \det\,(A - \lambda\, Id) = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda \text{ es v.p. de } A.$$

Corolario $f : E \to E$, $\dim E = n$, A matriz asociada en una base, y $\lambda \in \mathbb{R}$ valor propio, entonces:

$$\boxed{\dim V(\lambda) = n - \operatorname{rang}(A - \lambda\, Id)}$$

Demo Al lector.

Polinomio caractéristico

Definición Dada una matriz cuadrada de orden n se dice que $\lambda \in \mathbb{R}$ es un valor propio de A, si λ es raíz de su polinomio característico, es decir $C_A(\lambda) = \det\,(A - \lambda\, Id) = 0$

Proposición Sea $f : E \to E$ un endomorfismo, y sea A la matriz asociada a f en una base cualquiera. Entonces

$$\boxed{\lambda \text{ es valor propio de } f \Leftrightarrow \lambda \text{ es valor propio de } A}$$

Demo

$$\lambda \text{ es v.p. de } f \Leftrightarrow (f - \lambda\, Id) \text{ no es inyectiva}$$
$$\Leftrightarrow (f - \lambda\, Id) \text{ no es isomorfismo} \Leftrightarrow \det\,(A - \lambda\, Id) = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda \text{ es v.p. de } A.$$

Corolario $f : E \to E$, $\dim E = n$, A matriz asociada en una base, y $\lambda \in \mathbb{R}$ valor propio, entonces:

$$\boxed{\dim V(\lambda) = n - \operatorname{rang}(A - \lambda\, Id)}$$

Demo Al lector.

Polinomio caractéristico

Definición Dada una matriz cuadrada de orden n se dice que $\lambda \in \mathbb{R}$ es un valor propio de A, si λ es raíz de su polinomio característico, es decir $C_A(\lambda) = \det\,(A - \lambda\, Id) = 0$

Proposición Sea $f : E \to E$ un endomorfismo, y sea A la matriz asociada a f en una base cualquiera. Entonces

$$\boxed{\lambda \text{ es valor propio de } f \Leftrightarrow \lambda \text{ es valor propio de } A}$$

Demo

$$\lambda \text{ es v.p. de } f \Leftrightarrow (f - \lambda\, Id) \text{ no es inyectiva}$$
$$\Leftrightarrow (f - \lambda\, Id) \text{ no es isomorfismo} \Leftrightarrow \det\,(A - \lambda\, Id) = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda \text{ es v.p. de } A.$$

Corolario $f : E \to E$, $\dim E = n$, A matriz asociada en una base, y $\lambda \in \mathbb{R}$ valor propio, entonces:

$$\boxed{\dim V(\lambda) = n - \mathrm{rang}(A - \lambda\, Id)}$$

Demo Al lector.

Polinomio caractéristico

Definición Dada una matriz cuadrada de orden n se dice que $\lambda \in \mathbb{R}$ es un valor propio de A, si λ es raíz de su polinomio característico, es decir $C_A(\lambda) = \det\,(A - \lambda\, Id) = 0$

Proposición Sea $f : E \to E$ un endomorfismo, y sea A la matriz asociada a f en una base cualquiera. Entonces

$$\boxed{\lambda \text{ es valor propio de } f \Leftrightarrow \lambda \text{ es valor propio de } A}$$

Demo

$$\lambda \text{ es v.p. de } f \Leftrightarrow (f - \lambda\, Id) \text{ no es inyectiva}$$
$$\Leftrightarrow (f - \lambda\, Id) \text{ no es isomorfismo} \Leftrightarrow \det\,(A - \lambda\, Id) = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda \text{ es v.p. de } A.$$

Corolario $f : E \to E$, $\dim E = n$, A matriz asociada en una base, y $\lambda \in \mathbb{R}$ valor propio, entonces:

$$\boxed{\dim V(\lambda) = n - \operatorname{rang}(A - \lambda\, Id)}$$

Demo Al lector.

Polinomio caractéristico

Definición Dada una matriz cuadrada de orden n se dice que $\lambda \in \mathbb{R}$ es un valor propio de A, si λ es raíz de su polinomio característico, es decir $C_A(\lambda) = \det\,(A - \lambda\, Id) = 0$

Proposición Sea $f : E \to E$ un endomorfismo, y sea A la matriz asociada a f en una base cualquiera. Entonces

$$\boxed{\lambda \text{ es valor propio de } f \Leftrightarrow \lambda \text{ es valor propio de } A}$$

Demo

$$\lambda \text{ es v.p. de } f \Leftrightarrow (f - \lambda\, Id) \text{ no es inyectiva}$$
$$\Leftrightarrow (f - \lambda\, Id) \text{ no es isomorfismo} \Leftrightarrow \det\,(A - \lambda\, Id) = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda \text{ es v.p. de } A.$$

Corolario $f : E \to E$, $\dim E = n$, A matriz asociada en una base, y $\lambda \in \mathbb{R}$ valor propio, entonces:

$$\boxed{\dim V(\lambda) = n - \operatorname{rang}(A - \lambda\, Id)}$$

Demo Al lector.

Polinomio caractéristico

Definición Dada una matriz cuadrada de orden n se dice que $\lambda \in \mathbb{R}$ es un valor propio de A, si λ es raíz de su polinomio característico, es decir $C_A(\lambda) = \det\,(A - \lambda\, Id) = 0$

Proposición Sea $f : E \to E$ un endomorfismo, y sea A la matriz asociada a f en una base cualquiera. Entonces

$$\boxed{\lambda \text{ es valor propio de } f \Leftrightarrow \lambda \text{ es valor propio de } A}$$

Demo

$$\begin{aligned} &\lambda \text{ es v.p. de } f \Leftrightarrow (f - \lambda\, Id) \text{ no es inyectiva} \\ &\Leftrightarrow (f - \lambda\, Id) \text{ no es isomorfismo} \Leftrightarrow \det\,(A - \lambda\, Id) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda \text{ es v.p. de } A. \end{aligned}$$

Corolario $f : E \to E$, $\dim E = n$, A matriz asociada en una base, y $\lambda \in \mathbb{R}$ valor propio, entonces:

$$\boxed{\dim\, V(\lambda) = n - \text{rang}(A - \lambda\, Id)}$$

Demo Al lector.

Cálculo efectivo de valores y vectores propios

La proposición de la página anterior proporciona un método para el cálculo de valores y vectores propios de un endomorfismo:

- Valores propios: raíces de $C_A(x)$
- Vectores propios: subespacios $V(\lambda) = \text{Ker }(f - \lambda Id)$.
  Además, $\dim V(\lambda) = n - \text{rang}(A - \lambda Id)$

donde A es la matriz asociada a f en una base cualquiera.

Ejemplos

Tema 5

Diagonalización de endomorfismos

Vectores y valores propios

Polinomio característico

Multiplicidad algebraica y geométrica

Teorema de diagonalización de endomorfismos

Multiplicidad algebraica y geomética

En lo que sigue, $f : E \to E$ denota un endomorfismo donde $\dim E = n$ y A es la matriz asociada a f en una base cualquiera.

Definición Sea λ un valor propio de f, entonces se definen:

- Multiplicidad geométrica de λ, $m_g(\lambda)$, a la dimensión del subespacio $V(\lambda)$.
- Multiplicidad algebraica de λ, $m_a(\lambda)$ a la multiplicidad de λ como raíz de $C_A(x)$.

Ejemplos

Multiplicidad algebraica y geométrica

Proposición Para todo λ valor propio de f se tiene:

$$\boxed{1 \leqslant m_g(\lambda) \leqslant m_a(\lambda)}$$

Demo

$\boxed{1 \leqslant m_g(\lambda)}$ Si λ es v.p., entonces $V(\lambda) = \text{Ker }(f - \lambda\, Id) \neq 0$, por tanto su dimensión es mayor que cero.

$\boxed{m_g(\lambda) \leqslant m_a(\lambda)}$ Sea $r = m_g(\lambda)$, y $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r\}$ una base de Ker $(f - \lambda\, Id)$, que se completa hasta obtener una base de E: B= $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_{r+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. La matriz asociada a f en la base B tiene la forma: $A = \left(\begin{array}{c|c} \lambda Id_r & A_{12} \\ \hline \mathbf{0} & A_{22} \end{array}\right)$, donde Id_r es la matriz identidad de orden r y A_{12} y A_{22} son matrices. El polinomio característico de A tiene la forma:

$$C_A(x) = \det\,(A - x\, Id) = (\lambda - x)^r p(x)$$

donde $p(x)$ es un polinomio de grado $n - r$. De la fórmula anterior se deduce que λ es una raíz de $C_A(x)$ de al menos multiplicidad r, es decir:

$$m_g(\lambda) \leqslant m_a(\lambda)$$

Multiplicidad algebraica y geométrica

Proposición Para todo λ valor propio de f se tiene:

$$\boxed{1 \leqslant m_g(\lambda) \leqslant m_a(\lambda)}$$

Demo

$\boxed{1 \leqslant m_g(\lambda)}$ Si λ es v.p., entonces $V(\lambda) = \text{Ker } (f - \lambda\, Id) \neq 0$, por tanto su dimensión es mayor que cero.

$\boxed{m_g(\lambda) \leqslant m_a(\lambda)}$ Sea $r = m_g(\lambda)$, y $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r\}$ una base de Ker $(f - \lambda\, Id)$, que se completa hasta obtener una base de E: B= $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_{r+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. La matriz asociada a f en la base B tiene la forma: $A = \left(\begin{array}{c|c} \lambda Id_r & A_{12} \\ \hline \mathbf{0} & A_{22} \end{array}\right)$, donde Id_r es la matriz identidad de orden r y A_{12} y A_{22} son matrices. El polinomio característico de A tiene la forma:

$$C_A(x) = \det\, (A - x\, Id) = (\lambda - x)^r p(x)$$

donde $p(x)$ es un polinomio de grado $n - r$. De la fórmula anterior se deduce que λ es una raíz de $C_A(x)$ de al menos multiplicidad r, es decir:

$$m_g(\lambda) \leqslant m_a(\lambda)$$

Multiplicidad algebraica y geométrica

Proposición Para todo λ valor propio de f se tiene:

$$\boxed{1 \leqslant m_g(\lambda) \leqslant m_a(\lambda)}$$

Demo

$\boxed{1 \leqslant m_g(\lambda)}$ Si λ es v.p., entonces $V(\lambda) = \text{Ker } (f - \lambda\, Id) \neq 0$, por tanto su dimensión es mayor que cero.

$\boxed{m_g(\lambda) \leqslant m_a(\lambda)}$ Sea $r = m_g(\lambda)$, y $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r\}$ una base de Ker $(f - \lambda\, Id)$, que se completa hasta obtener una base de E: B= $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_{r+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$.

La matriz asociada a f en la base B tiene la forma: $A = \left(\begin{array}{c|c} \lambda Id_r & A_{12} \\ \hline \mathbf{0} & A_{22} \end{array}\right)$,

donde Id_r es la matriz identidad de orden r y A_{12} y A_{22} son matrices. El polinomio característico de A tiene la forma:

$$C_A(x) = \det\,(A - x\, Id) = (\lambda - x)^r p(x)$$

donde $p(x)$ es un polinomio de grado $n - r$. De la fórmula anterior se deduce que λ es una raíz de $C_A(x)$ de al menos multiplicidad r, es decir:

$$m_g(\lambda) \leqslant m_a(\lambda)$$

Multiplicidad algebraica y geométrica

Proposición Para todo λ valor propio de f se tiene:

$$\boxed{1 \leqslant m_g(\lambda) \leqslant m_a(\lambda)}$$

Demo

$\boxed{1 \leqslant m_g(\lambda)}$ Si λ es v.p., entonces $V(\lambda) = \text{Ker } (f - \lambda\, Id) \neq 0$, por tanto su dimensión es mayor que cero.

$\boxed{m_g(\lambda) \leqslant m_a(\lambda)}$ Sea $r = m_g(\lambda)$, y $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r\}$ una base de Ker $(f - \lambda\, Id)$, que se completa hasta obtener una base de E: B= $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_{r+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. La matriz asociada a f en la base B tiene la forma: $A = \left(\begin{array}{c|c} \lambda Id_r & A_{12} \\ \hline \mathbf{0} & A_{22} \end{array}\right)$, donde Id_r es la matriz identidad de orden r y A_{12} y A_{22} son matrices. El polinomio característico de A tiene la forma:

$$C_A(x) = \det\, (A - x\, Id) = (\lambda - x)^r p(x)$$

donde $p(x)$ es un polinomio de grado $n - r$. De la fórmula anterior se deduce que λ es una raíz de $C_A(x)$ de al menos multiplicidad r, es decir:

$$m_g(\lambda) \leqslant m_a(\lambda)$$

Multiplicidad algebraica y geométrica

Proposición Para todo λ valor propio de f se tiene:

$$\boxed{1 \leqslant m_g(\lambda) \leqslant m_a(\lambda)}$$

Demo

$\boxed{1 \leqslant m_g(\lambda)}$ Si λ es v.p., entonces $V(\lambda) = \text{Ker } (f - \lambda\, Id) \neq 0$, por tanto su dimensión es mayor que cero.

$\boxed{m_g(\lambda) \leqslant m_a(\lambda)}$ Sea $r = m_g(\lambda)$, y $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r\}$ una base de Ker $(f - \lambda\, Id)$, que se completa hasta obtener una base de E: B= $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_{r+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$.
La matriz asociada a f en la base B tiene la forma: $A = \left(\begin{array}{c|c} \lambda Id_r & A_{12} \\ \hline \mathbf{0} & A_{22} \end{array}\right)$,
donde Id_r es la matriz identidad de orden r y A_{12} y A_{22} son matrices. El polinomio característico de A tiene la forma:

$$C_A(x) = \det\, (A - x\, Id) = (\lambda - x)^r p(x)$$

donde $p(x)$ es un polinomio de grado $n - r$. De la fórmula anterior se deduce que λ es una raíz de $C_A(x)$ de al menos multiplicidad r, es decir:

$$m_g(\lambda) \leqslant m_a(\lambda)$$

Multiplicidad algebraica y geométrica

Proposición Para todo λ valor propio de f se tiene:

$$\boxed{1 \leqslant m_g(\lambda) \leqslant m_a(\lambda)}$$

Demo

$\boxed{1 \leqslant m_g(\lambda)}$ Si λ es v.p., entonces $V(\lambda) = \text{Ker } (f - \lambda\, Id) \neq 0$, por tanto su dimensión es mayor que cero.

$\boxed{m_g(\lambda) \leqslant m_a(\lambda)}$ Sea $r = m_g(\lambda)$, y $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r\}$ una base de Ker $(f - \lambda\, Id)$, que se completa hasta obtener una base de E: B= $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_{r+1}, \dots, \mathbf{e}_n\}$.
La matriz asociada a f en la base B tiene la forma: $A = \left(\begin{array}{c|c} \lambda Id_r & A_{12} \\ \hline \mathbf{0} & A_{22} \end{array}\right)$,
donde Id_r es la matriz identidad de orden r y A_{12} y A_{22} son matrices. El polinomio característico de A tiene la forma:

$$C_A(x) = \det\, (A - x\, Id) = (\lambda - x)^r p(x)$$

donde $p(x)$ es un polinomio de grado $n - r$. De la fórmula anterior se deduce que λ es una raíz de $C_A(x)$ de al menos multiplicidad r, es decir:

$$m_g(\lambda) \leqslant m_a(\lambda)$$

Multiplicidad algebraica y geométrica

Sea $f : E \to E$ un endomorfismo donde $\dim E = n$.

Colorarios

1. f tiene a lo sumo n valores propios.
2. Si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ son los valores propios de f, entonces el número de vectores propios l.i. en E es:

$$\dim V(\lambda_1) + \ldots + \dim V(\lambda_p) = m_g(\lambda_1) + \ldots + m_g(\lambda_p).$$

3. Si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ son los valores propios de f, entonces:

$$\begin{aligned} \dim V(\lambda_1) + \ldots + \dim V(\lambda_p) &= m_g(\lambda_1) + \ldots + m_g(\lambda_p) \\ &\leqslant m_a(\lambda_1) + \ldots + m_a(\lambda_p) \leqslant n. \end{aligned}$$

Demo Son consecuencia de la proposición anterior y del hecho de que todo polinomio de grado n tiene a lo sumo n raíces reales (contando multiplicidades).

Multiplicidad algebraica y geométrica

Sea $f : E \to E$ un endomorfismo donde $\dim E = n$.

Colorarios

1. f tiene a lo sumo n valores propios.
2. Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ son los valores propios de f, entonces el número de vectores propios l.i. en E es:

$$\dim V(\lambda_1) + \ldots + \dim V(\lambda_p) = m_g(\lambda_1) + \ldots + m_g(\lambda_p).$$

3. Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ son los valores propios de f, entonces:

$$\begin{aligned}\dim V(\lambda_1) + \ldots + \dim V(\lambda_p) &= m_g(\lambda_1) + \ldots + m_g(\lambda_p)\\ &\leqslant m_a(\lambda_1) + \ldots + m_a(\lambda_p) \leqslant n.\end{aligned}$$

Demo Son consecuencia de la proposición anterior y del hecho de que todo polinomio de grado n tiene a lo sumo n raíces reales (contando multiplicidades).

Multiplicidad algebraica y geométrica

Sea $f : E \to E$ un endomorfismo donde $\dim E = n$.

Colorarios

1. f tiene a lo sumo n valores propios.
2. Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ son los valores propios de f, entonces el número de vectores propios l.i. en E es:

$$\dim V(\lambda_1) + \ldots + \dim V(\lambda_p) = m_g(\lambda_1) + \ldots + m_g(\lambda_p).$$

3. Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ son los valores propios de f, entonces:

$$\begin{aligned}\dim V(\lambda_1) + \ldots + \dim V(\lambda_p) &= m_g(\lambda_1) + \ldots + m_g(\lambda_p) \\ &\leqslant m_a(\lambda_1) + \ldots + m_a(\lambda_p) \leqslant n.\end{aligned}$$

Demo Son consecuencia de la proposición anterior y del hecho de que todo polinomio de grado n tiene a lo sumo n raíces reales (contando multiplicidades).

Multiplicidad algebraica y geométrica

Sea $f : E \to E$ un endomorfismo donde $\dim E = n$.

Colorarios

1. f tiene a lo sumo n valores propios.
2. Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ son los valores propios de f, entonces el número de vectores propios l.i. en E es:

$$\dim V(\lambda_1) + \ldots + \dim V(\lambda_p) = m_g(\lambda_1) + \ldots + m_g(\lambda_p).$$

3. Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ son los valores propios de f, entonces:

$$\begin{aligned}\dim V(\lambda_1) + \ldots + \dim V(\lambda_p) &= m_g(\lambda_1) + \ldots + m_g(\lambda_p) \\ &\leqslant m_a(\lambda_1) + \ldots + m_a(\lambda_p) \leqslant n.\end{aligned}$$

Demo Son consecuencia de la proposición anterior y del hecho de que todo polinomio de grado n tiene a lo sumo n raíces reales (contando multiplicidades).

Multiplicidad algebraica y geométrica

Sea $f : E \to E$ un endomorfismo donde $\dim E = n$.

Colorarios

1. f tiene a lo sumo n valores propios.
2. Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ son los valores propios de f, entonces el número de vectores propios l.i. en E es:

$$\dim V(\lambda_1) + \ldots + \dim V(\lambda_p) = m_g(\lambda_1) + \ldots + m_g(\lambda_p).$$

3. Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ son los valores propios de f, entonces:

$$\begin{aligned}\dim V(\lambda_1) + \ldots + \dim V(\lambda_p) &= m_g(\lambda_1) + \ldots + m_g(\lambda_p) \\ &\leqslant m_a(\lambda_1) + \ldots + m_a(\lambda_p) \leqslant n.\end{aligned}$$

Demo Son consecuencia de la proposición anterior y del hecho de que todo polinomio de grado n tiene a lo sumo n raíces reales (contando multiplicidades).

Multiplicidad algebraica y geométrica

Sea $f : E \to E$ un endomorfismo donde $\dim E = n$.

Colorarios

1. f tiene a lo sumo n valores propios.
2. Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ son los valores propios de f, entonces el número de vectores propios l.i. en E es:

$$\dim V(\lambda_1) + \ldots + \dim V(\lambda_p) = m_g(\lambda_1) + \ldots + m_g(\lambda_p).$$

3. Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ son los valores propios de f, entonces:

$$\begin{aligned} \dim V(\lambda_1) + \ldots + \dim V(\lambda_p) &= m_g(\lambda_1) + \ldots + m_g(\lambda_p) \\ &\leqslant m_a(\lambda_1) + \ldots + m_a(\lambda_p) \leqslant n. \end{aligned}$$

Demo Son consecuencia de la proposición anterior y del hecho de que todo polinomio de grado n tiene a lo sumo n raíces reales (contando multiplicidades).

Tema 5

Diagonalización de endomorfismos

Vectores y valores propios

Polinomio característico

Multiplicidad algebraica y geométrica

Teorema de diagonalización de endomorfismos

Diagonalización de endomorfismos

Definición

- Sea $f : E \to E$ endomorfismo. Se dice que **f es diagonalizable** si existe una base en la que la matriz asociada a f es diagonal.
- Sea A matriz cuadrada, se dice que **A es diagonalizable** si A es semejante a una matriz diagonal, es decir existen P regular y D diagonal tal que $D = P^{-1}AP$ (ó $A = PDP^{-1}$).

Proposición Sea $f : E \to E$ un endomorfismo, y A su matriz asociada en una cierta base. Entonces:

$$\boxed{f \text{ es diagonalizable } \Leftrightarrow A \text{ es diagonalizable}}$$

Demo Se basa en el teorema de cambio de base.

Observación Los elementos de la diagonal de D los valores propios, y las columnas de P los vectores propios asociados.

Diagonalización de endomorfismos

Definición

- Sea $f : E \to E$ endomorfismo. Se dice que f es diagonalizable si existe una base en la que la matriz asociada a f es diagonal.
- Sea A matriz cuadrada, se dice que A es diagonalizable si A es semejante a una matriz diagonal, es decir existen P regular y D diagonal tal que $D = P^{-1}AP$ (ó $A = PDP^{-1}$).

Proposición Sea $f : E \to E$ un endomorfismo, y A su matriz asociada en una cierta base. Entonces:

$$\boxed{f \text{ es diagonalizable } \Leftrightarrow A \text{ es diagonalizable}}$$

Demo Se basa en el teorema de cambio de base.

Observación Los elementos de la diagonal de D los valores propios, y las columnas de P los vectores propios asociados.

Diagonalización de endomorfismos

Definición

- Sea $f : E \to E$ endomorfismo. Se dice que f es diagonalizable si existe una base en la que la matriz asociada a f es diagonal.
- Sea A matriz cuadrada, se dice que A es diagonalizable si A es semejante a una matriz diagonal, es decir existen P regular y D diagonal tal que $D = P^{-1}AP$ (ó $A = PDP^{-1}$).

Proposición Sea $f : E \to E$ un endomorfismo, y A su matriz asociada en una cierta base. Entonces:

$$\boxed{f \text{ es diagonalizable } \Leftrightarrow A \text{ es diagonalizable}}$$

Demo Se basa en el teorema de cambio de base.

Observación Los elementos de la diagonal de D los valores propios, y las columnas de P los vectores propios asociados.

Teorema de diagonalización de endomorfismos

Teorema Sea $f : E \to$ un endomorfismo, con dim $E = n$, y A la matriz asociada en cualquier base. Entonces

f es diagonalizable $\overset{(1)}{\iff}$ Existe una base de E formada por vectores propios de f

$$\overset{(2)}{\iff} \begin{cases} m_g(\lambda_i) = m_a(\lambda_i) & \forall i = 1, \dots, p \\ m_a(\lambda_1) + \dots + m_a(\lambda_p) = n \end{cases}$$

Demo

$\boxed{\overset{(1)}{\iff}}$ Si f es diagonalizable $A = PDP-1$, y las columnas de P son los vectores propios. Reciprocamente, si existe una base de vectores propios, es directo comprobar que la matriz asociada a f en esa base es diagonal.

$\boxed{\overset{(2)}{\Longrightarrow}}$ Como existe base de vectores propios, se verificará:

$$\dim V(\lambda_1) + \dots + \dim V(\lambda_p) = n$$

desde el Corolario-3 de la pág. 14 y la Proposición de la pág. 13, se deducen sendas igualdades.

$\boxed{\overset{(2)}{\Longleftarrow}}$ Ambas igualdad implican que existe una base de vectores propios.

Teorema de diagonalización de endomorfismos

Teorema Sea $f : E \to$ un endomorfismo, con dim $E = n$, y A la matriz asociada en cualquier base. Entonces

f es diagonalizable $\overset{(1)}{\Longleftrightarrow}$ Existe una base de E formada por vectores propios de f

$$\overset{(2)}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} m_g(\lambda_i) = m_a(\lambda_i) & \forall i = 1, \ldots, p \\ m_a(\lambda_1) + \ldots + m_a(\lambda_p) = n \end{cases}$$

Demo

$\boxed{\overset{(1)}{\Longleftrightarrow}}$ Si f es diagonalizable $A = PDP{-}1$, y las columnas de P son los vectores propios. Reciprocamente, si existe una base de vectores propios, es directo comprobar que la matriz asociada a f en esa base es diagonal.

$\boxed{\overset{(2)}{\Longrightarrow}}$ Como existe base de vectores propios, se verificará:

$$\dim V(\lambda_1) + \ldots + \dim V(\lambda_p) = n$$

desde el Corolario-3 de la pág. 14 y la Proposición de la pág. 13, se deducen sendas igualdades.

$\boxed{\overset{(2)}{\Longleftarrow}}$ Ambas igualdad implican que existe una base de vectores propios.

Teorema de diagonalización de endomorfismos

Teorema Sea $f : E \to$ un endomorfismo, con dim $E = n$, y A la matriz asociada en cualquier base. Entonces

$$f \text{ es diagonalizable} \overset{(1)}{\Longleftrightarrow} \begin{array}{l}\text{Existe una base de } E \text{ formada}\\ \text{por vectores propios de } f\end{array}$$

$$\overset{(2)}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} m_g(\lambda_i) = m_a(\lambda_i) & \forall i = 1, \ldots, p \\ m_a(\lambda_1) + \ldots + m_a(\lambda_p) = n \end{cases}$$

Demo

$\boxed{\overset{(1)}{\Longleftrightarrow}}$ Si f es diagonalizable $A = PDP{-}1$, y las columnas de P son los vectores propios. Reciprocamente, si existe una base de vectores propios, es directo comprobar que la matriz asociada a f en esa base es diagonal.

$\boxed{\overset{(2)}{\Longrightarrow}}$ Como existe base de vectores propios, se verificará:

$$\dim V(\lambda_1) + \ldots + \dim V(\lambda_p) = n$$

desde el Corolario-3 de la pág. 14 y la Proposición de la pág. 13, se deducen sendas igualdades.

$\boxed{\overset{(2)}{\Longleftarrow}}$ Ambas igualdad implican que existe una base de vectores propios.

Teorema de diagonalización de endomorfismos

Teorema Sea $f : E \to$ un endomorfismo, con dim $E = n$, y A la matriz asociada en cualquier base. Entonces

$$f \text{ es diagonalizable} \overset{(1)}{\Longleftrightarrow} \begin{array}{l}\text{Existe una base de } E \text{ formada} \\ \text{por vectores propios de } f\end{array}$$

$$\overset{(2)}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} m_g(\lambda_i) = m_a(\lambda_i) & \forall i = 1, \ldots, p \\ m_a(\lambda_1) + \ldots + m_a(\lambda_p) = n \end{cases}$$

Demo

$\boxed{\overset{(1)}{\Longleftrightarrow}}$ Si f es diagonalizable $A = PDP{-}1$, y las columnas de P son los vectores propios. Reciprocamente, si existe una base de vectores propios, es directo comprobar que la matriz asociada a f en esa base es diagonal.

$\boxed{\overset{(2)}{\Longrightarrow}}$ Como existe base de vectores propios, se verificará:

$$\dim V(\lambda_1) + \ldots + \dim V(\lambda_p) = n$$

desde el Corolario-3 de la pág. 14 y la Proposición de la pág. 13, se deducen sendas igualdades.

$\boxed{\overset{(2)}{\Longleftarrow}}$ Ambas igualdad implican que existe una base de vectores propios.

Aplicaciones y caso simétrico

Sea $f : E \to$ un endomorfismo, con dim $E = n$.

Corolario Si f tiene n valores propios entonces f es diagonalizable.

Demo Al lector.

Proposición Si A es diagonalizable, es decir $D = P^{-1}AP$, entonces

$$\boxed{A^n = P\,D^n\,P^{-1}}$$

Demo Al lector.

Proposición Si A es una matriz simétrica (con coeficientes reales). Entonces

- $C_A(x)$ tiene n raíces reales (contando multiplicidades).
- A es diagonalizable.

Demo Fuera de los objetivos de este curso.

Aplicaciones y caso simétrico

Sea $f : E \to$ un endomorfismo, con $\dim E = n$.

Corolario Si f tiene n valores propios entonces f es diagonalizable.

Demo Al lector.

Proposición Si A es diagonalizable, es decir $D = P^{-1}AP$, entonces

$$\boxed{A^n = P\,D^n\,P^{-1}}$$

Demo Al lector.

Proposición Si A es una matriz simétrica (con coeficientes reales). Entonces

- $C_A(x)$ tiene n raíces reales (contando multiplicidades).
- A es diagonalizable.

Demo Fuera de los objetivos de este curso.

Aplicaciones y caso simétrico

Sea $f : E \to$ un endomorfismo, con dim $E = n$.

Corolario Si f tiene n valores propios entonces f es diagonalizable.

Demo Al lector.

Proposición Si A es diagonalizable, es decir $D = P^{-1}AP$, entonces

$$\boxed{A^n = P\,D^n\,P^{-1}}$$

Demo Al lector.

Proposición Si A es una matriz simétrica (con coeficientes reales). Entonces

- $C_A(x)$ tiene n raíces reales (contando multiplicidades).
- A es diagonalizable.

Demo Fuera de los objetivos de este curso.

Aplicaciones y caso simétrico

Sea $f : E \to$ un endomorfismo, con dim $E = n$.

Corolario Si f tiene n valores propios entonces f es diagonalizable.

Demo Al lector.

Proposición Si A es diagonalizable, es decir $D = P^{-1}AP$, entonces

$$\boxed{A^n = P\, D^n\, P^{-1}}$$

Demo Al lector.

Proposición Si A es una matriz simétrica (con coeficientes reales). Entonces

- $C_A(x)$ tiene n raíces reales (contando multiplicidades).
- A es diagonalizable.

Demo Fuera de los objetivos de este curso.

Tema 6

Formas bilineales y cuadráticas

Tema 6

Formas bilineales y cuadráticas

Formas bilineales

Definición Sea E un $\mathbb{R}$- espacio vectorial. Una forma bilineal en E es una aplicación $T : E \times E \to \mathbb{R}$ que satisface las propiedades:

$$T(\lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \lambda T(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \mu T(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in E,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$
$$T(\mathbf{u}, \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w}) = \lambda T(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mu T(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in E,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Definición Fijada una base $B = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ en E se denomina matriz asociada a una aplicación bilineal a:

$$A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), \quad a_{ij} = T(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$$

Observación Si A es la matriz asociada a la forma bilineal T en la base B, y $(u_1, \ldots, u_n)$, $(v_1, \ldots, v_n)$ son las coordenadas de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en la base B entonces:

$$T(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (u_1, \ldots, u_n)\, A \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Formas bilineales

Definición Sea E un $\mathbb{R}$- espacio vectorial. Una forma bilineal en E es una aplicación $T : E \times E \to \mathbb{R}$ que satisface las propiedades:

$$\boxed{\begin{aligned} T(\lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \lambda T(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \mu T(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in E,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \\ T(\mathbf{u}, \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w}) &= \lambda T(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mu T(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in E,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \end{aligned}}$$

Definición Fijada una base $B = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ en E se denomina matriz asociada a una aplicación bilineal a:

$$A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), \quad a_{ij} = T(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$$

Observación Si A es la matriz asociada a la forma bilineal T en la base B, y $(u_1, \ldots, u_n)$, $(v_1, \ldots, v_n)$ son las coordenadas de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en la base B entonces:

$$T(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (u_1, \ldots, u_n)\, A \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Formas bilineales

Definición Sea E un $\mathbb{R}$- espacio vectorial. Una forma bilineal en E es una aplicación $T : E \times E \to \mathbb{R}$ que satisface las propiedades:

$$\boxed{\begin{array}{ll} T(\lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \lambda T(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \mu T(\mathbf{v}, \mathbf{w}) & \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in E,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \\ T(\mathbf{u}, \lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{w}) = \lambda T(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mu T(\mathbf{u}, \mathbf{w}) & \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in E,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \end{array}}$$

Definición Fijada una base $B = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ en E se denomina matriz asociada a una aplicación bilineal a:

$$A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R}), \quad a_{ij} = T(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$$

Observación Si A es la matriz asociada a la forma bilineal T en la base B, y $(u_1, \ldots, u_n)$, $(v_1, \ldots, v_n)$ son las coordenadas de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en la base B entonces:

$$T(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (u_1, \ldots, u_n)\, A \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Formas bilineales

Definición Sea $T : E \times E \to \mathbb{R}$ una forma bilineal.

- T es simétrica si $\boxed{T(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = T(\mathbf{v}, \mathbf{u})}$ $\quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E$
- T es hemisimétrica si $\boxed{T(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -\,T(\mathbf{v}, \mathbf{u})}$ $\quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E$

Ejemplos

Proposición Sea $T : E \times E \to \mathbf{R}$ una forma bilineal.

T es simétrica $\Leftrightarrow$ La matriz asociada a T, A, en cualquier base es simétrica,$(A = A^t)$

T es hemisimétrica $\Leftrightarrow$ La matriz asociada a T, A, en cualquier base es hemisimétrica,$(A = -A^t)$

Ejemplos

Formas bilineales

Definición Sea $T : E \times E \to \mathbb{R}$ una forma bilineal.

- T es simétrica si $\boxed{T(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = T(\mathbf{v}, \mathbf{u})}$ $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E$
- T es hemisimétrica si $\boxed{T(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -\, T(\mathbf{v}, \mathbf{u})}$ $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E$

Ejemplos

Proposición Sea $T : E \times E \to \mathbf{R}$ una forma bilineal.

T es simétrica $\Leftrightarrow$ La matriz asociada a T, A, en cualquier base es simétrica,$(A = A^t)$

T es hemisimétrica $\Leftrightarrow$ La matriz asociada a T, A, en cualquier base es hemisimétrica,$(A = -A^t)$

Ejemplos

Tema 6

Formas bilineales y cuadráticas

Formas Cuadráticas

Definición Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y sea T una forma bilineal y simétrica en E. Se llama forma cuadrática asociada a T a la aplicación:

$$\boxed{\begin{aligned} q :& E \to \mathbb{R} \\ & \mathbf{e} \to q(\mathbf{e}) = T(\mathbf{e}, \mathbf{e}) \end{aligned}}$$

Observación Si A es la matriz asociada a T en una base B de E, y $(x_1, \ldots, x_n)$ son las coordenadas de $\mathbf{x}$ en B, entonces:

$$q(\mathbf{x}) = T(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (x_1, \ldots, x_n)\, A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij} x_i x_j$$

$$= \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{ij} x_i x_j$$

Ejemplos Paso de forma polinomial a forma matricial.

Formas Cuadráticas

Definición Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y sea T una forma bilineal y simétrica en E. Se llama forma cuadrática asociada a T a la aplicación:

$$\boxed{\begin{aligned} q : E &\to \mathbb{R} \\ \mathbf{e} &\to q(\mathbf{e}) = T(\mathbf{e}, \mathbf{e}) \end{aligned}}$$

Observación Si A es la matriz asociada a T en una base B de E, y $(x_1, \ldots, x_n)$ son las coordenadas de $\mathbf{x}$ en B, entonces:

$$q(\mathbf{x}) = T(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (x_1, \ldots, x_n)\, A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij} x_i x_j$$

$$= \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{ij} x_i x_j$$

Ejemplos Paso de forma polinomial a forma matricial.

Formas Cuadráticas

Definición Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y sea T una forma bilineal y simétrica en E. Se llama forma cuadrática asociada a T a la aplicación:

$$\boxed{\begin{aligned} q : E &\to \mathbb{R} \\ \mathbf{e} &\to q(\mathbf{e}) = T(\mathbf{e}, \mathbf{e}) \end{aligned}}$$

Observación Si A es la matriz asociada a T en una base B de E, y $(x_1, \ldots, x_n)$ son las coordenadas de $\mathbf{x}$ en B, entonces:

$$q(\mathbf{x}) = T(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (x_1, \ldots, x_n)\, A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij} x_i x_j$$

$$= \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{ij} x_i x_j$$

Ejemplos Paso de forma polinomial a forma matricial.

Formas cuadráticas

Definición (alternativa) Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, y B una base. Si $(x_1, \ldots, x_n)$ denotan las coordenadas en B de un vector $\mathbf{x}$, una forma cuadrática $q(\mathbf{x})$ es un polinomio homogéneo de grado 2 en las variables $(x_1, \ldots, x_n)$.

Si $q(\mathbf{x})$ es una forma cuadrática en E, existe una matriz A simétrica, que se denomina matriz de coeficientes tal que

$$q(\mathbf{x}) = (x_1, \ldots, x_n)\, A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij} x_i x_j$$

$$= \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{ij} x_i x_j$$

Ejemplos Paso de forma polinomial a forma matricial.

Formas cuadráticas

Definición (alternativa) Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, y B una base. Si $(x_1, \ldots, x_n)$ denotan las coordenadas en B de un vector $\mathbf{x}$, una forma cuadrática $q(\mathbf{x})$ es un polinomio homogéneo de grado 2 en las variables $(x_1, \ldots, x_n)$.

Si $q(\mathbf{x})$ es una forma cuadrática en E, existe una matriz A simétrica, que se denomina matriz de coeficientes tal que

$$q(\mathbf{x}) = (x_1, \ldots, x_n)\, A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij} x_i x_j$$

$$= \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{ij} x_i x_j$$

Ejemplos Paso de forma polinomial a forma matricial.

Formas cuadráticas

Definición (alternativa) Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, y B una base. Si $(x_1, \dots, x_n)$ denotan las coordenadas en B de un vector $\mathbf{x}$, una forma cuadrática $q(\mathbf{x})$ es un polinomio homogéneo de grado 2 en las variables $(x_1, \dots, x_n)$.

Si $q(\mathbf{x})$ es una forma cuadrática en E, existe una matriz A simétrica, que se denomina matriz de coeficientes tal que

$$q(\mathbf{x}) = (x_1, \dots, x_n)\, A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij} x_i x_j$$

$$= \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{ij} x_i x_j$$

Ejemplos Paso de forma polinomial a forma matricial.

Formas cuadráticas

Teorema Sea $q : E \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática. Existe una base B' en la cual la matriz asociada a q es diagonal.

Demo Se basa en el hecho de que toda matriz A simétrica es diagonalizable. Utilizando esto es posible demostar que existe una matriz regular, y ortonornal ($P^tP = Id$), tal que

$$A = P^tDP.$$

Además P es la matriz de cambio de base.

Observación El resultado anterior indica que existe una base B' en la cual la forma cuadrática $q(\cdot)$ admite la representación

$$q(\mathbf{x}) = \sum_{i=1,n} a'_{ii}{x'_i}^2$$

siendo $\mathbf{x} = (x'_1, \ldots, x'_n)_{B'}$.

Formas cuadráticas

Teorema Sea $q : E \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática. Existe una base B' en la cual la matriz asociada a q es diagonal.

Demo Se basa en el hecho de que toda matriz A simétrica es diagonalizable. Utilizando esto es posible demostar que existe una matriz regular, y ortonornal ($P^t P = Id$), tal que

$$A = P^t DP.$$

Además P es la matriz de cambio de base.

Observación El resultado anterior indica que existe una base B' en la cual la forma cuadrática $q(\cdot)$ admite la representación

$$q(\mathbf{x}) = \sum_{i=1,n} a'_{ii} {x'_i}^2$$

siendo $\mathbf{x} = (x'_1, \dots, x'_n)_{B'}$.

Formas cuadráticas

Teorema Sea $q: E \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática. Existe una base B' en la cual la matriz asociada a q es diagonal.

Demo Se basa en el hecho de que toda matriz A simétrica es diagonalizable. Utilizando esto es posible demostar que existe una matriz regular, y ortonornal ($P^t P = Id$), tal que

$$A = P^t DP.$$

Además P es la matriz de cambio de base.

Observación El resultado anterior indica que existe una base B' en la cual la forma cuadrática $q(\cdot)$ admite la representación

$$q(\mathbf{x}) = \sum_{i=1,n} a'_{ii} {x'_i}^2$$

siendo $\mathbf{x} = (x'_1, \ldots, x'_n)_{B'}$.

Tema 6

Formas bilineales y cuadráticas

Clasificación de formas cuadráticas

Definición Sea $q : E \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática. Entonces:

- q se dice definida positva si $q(\mathbf{x}) > 0\,\forall \mathbf{x} \in E$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
- q se dice definida negativa si $q(\mathbf{x}) < 0\,\forall \mathbf{x} \in E$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
- q se dice semidefinida positva si $q(\mathbf{x}) \geqslant 0\,\forall \mathbf{x} \in E$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ y $\exists \mathbf{x}' \neq \mathbf{0}$ tal que $q(\mathbf{x}') = 0$
- q se dice semidefinida negativa si $q(\mathbf{x}) \leqslant 0\,\forall \mathbf{x} \in E$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ y $\exists \mathbf{x}' \neq \mathbf{0}$ tal que $q(\mathbf{x}') = 0$
- q se dice indefinida si existen $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}' \in E$ tales que $q(\mathbf{x}) > 0$ y $q(\mathbf{x}') < 0$

Clasificación de formas cuadráticas

Definición Sea $q : E \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática. Entonces:

- q se dice definida positva si $q(\mathbf{x}) > 0\,\forall \mathbf{x} \in E$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
- q se dice definida negativa si $q(\mathbf{x}) < 0\,\forall \mathbf{x} \in E$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
- q se dice semidefinida positva si $q(\mathbf{x}) \geqslant 0\,\forall \mathbf{x} \in E$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ y $\exists \mathbf{x}' \neq \mathbf{0}$ tal que $q(\mathbf{x}') = 0$
- q se dice semidefinida negativa si $q(\mathbf{x}) \leqslant 0\,\forall \mathbf{x} \in E$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ y $\exists \mathbf{x}' \neq \mathbf{0}$ tal que $q(\mathbf{x}') = 0$
- q se dice indefinida si existen $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}' \in E$ tales que $q(\mathbf{x}) > 0$ y $q(\mathbf{x}') < 0$

Clasificación de formas cuadráticas

Definición Sea $q : E \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática. Entonces:

- q se dice definida positva si $q(\mathbf{x}) > 0\, \forall \mathbf{x} \in E$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
- q se dice definida negativa si $q(\mathbf{x}) < 0\, \forall \mathbf{x} \in E$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
- q se dice semidefinida positva si $q(\mathbf{x}) \geqslant 0\, \forall \mathbf{x} \in E$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ y $\exists \mathbf{x}' \neq \mathbf{0}$ tal que $q(\mathbf{x}') = 0$
- q se dice semidefinida negativa si $q(\mathbf{x}) \leqslant 0\, \forall \mathbf{x} \in E$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ y $\exists \mathbf{x}' \neq \mathbf{0}$ tal que $q(\mathbf{x}') = 0$
- q se dice indefinida si existen $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in E$ tales que $q(\mathbf{x}) > 0$ y $q(\mathbf{x}') < 0$

Clasificación de formas cuadráticas

Definición Sea $q : E \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática. Entonces:

- q se dice definida positva si $q(\mathbf{x}) > 0\,\forall \mathbf{x} \in E,\ \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
- q se dice definida negativa si $q(\mathbf{x}) < 0\,\forall \mathbf{x} \in E,\ \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
- q se dice semidefinida positva si $q(\mathbf{x}) \geqslant 0\,\forall \mathbf{x} \in E,\ \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ y $\exists \mathbf{x}' \neq \mathbf{0}$ tal que $q(\mathbf{x}') = 0$
- q se dice semidefinida negativa si $q(\mathbf{x}) \leqslant 0\,\forall \mathbf{x} \in E,\ \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ y $\exists \mathbf{x}' \neq \mathbf{0}$ tal que $q(\mathbf{x}') = 0$
- q se dice indefinida si existen $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in E$ tales que $q(\mathbf{x}) > 0$ y $q(\mathbf{x}') < 0$

Clasificación de formas cuadráticas

Definición Sea $q : E \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática. Entonces:

- q se dice definida positva si $q(\mathbf{x}) > 0 \, \forall \mathbf{x} \in E$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
- q se dice definida negativa si $q(\mathbf{x}) < 0 \, \forall \mathbf{x} \in E$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
- q se dice semidefinida positva si $q(\mathbf{x}) \geqslant 0 \, \forall \mathbf{x} \in E$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ y $\exists \mathbf{x}' \neq \mathbf{0}$ tal que $q(\mathbf{x}') = 0$
- q se dice semidefinida negativa si $q(\mathbf{x}) \leqslant 0 \, \forall \mathbf{x} \in E$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ y $\exists \mathbf{x}' \neq \mathbf{0}$ tal que $q(\mathbf{x}') = 0$
- q se dice indefinida si existen $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}' \in E$ tales que $q(\mathbf{x}) > 0$ y $q(\mathbf{x}') < 0$

Clasificación de formas cuadráticas

Definición Sea $q : E \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática. Entonces:

- q se dice definida positva si $q(\mathbf{x}) > 0 \, \forall \mathbf{x} \in E$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
- q se dice definida negativa si $q(\mathbf{x}) < 0 \, \forall \mathbf{x} \in E$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
- q se dice semidefinida positva si $q(\mathbf{x}) \geqslant 0 \, \forall \mathbf{x} \in E$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ y $\exists \mathbf{x}' \neq \mathbf{0}$ tal que $q(\mathbf{x}') = 0$
- q se dice semidefinida negativa si $q(\mathbf{x}) \leqslant 0 \, \forall \mathbf{x} \in E$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ y $\exists \mathbf{x}' \neq \mathbf{0}$ tal que $q(\mathbf{x}') = 0$
- q se dice indefinida si existen $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in E$ tales que $q(\mathbf{x}) > 0$ y $q(\mathbf{x}') < 0$

Clasificación de formas cuadráticas

Teorema Sea $q : E \to \mathbf{R}$ forma cuadrática. Sea A su matriz asociada en una base B de E, y $C_A(x) = \det(A - x\,Id)$ su polinomio característico. Entonces:

- q es def. positiva si y sólo si todas las raíces de $C_A(x)$ son positivas.
- q es def. negativa si y sólo si todas las raíces de $C_A(x)$ son negativas.
- q es semidef. positiva si y sólo si todas la raíces de $C_A(x)$ son positivas y alguna es cero.
- q es semidef. negativa si y sólo si todas la raíces de $C_A(x)$ son negativas y alguna es cero.
- q es indefinida si y sólo si $C_A(x)$ tiene raíces positivas y negativas.

Demo Se basa en el hecho de que las raíces del polinomio característico asociado a una forma cuadrática tiene siempre el mismo signo, independientemente de la base utilizada (Ley de inercia de Sylvester).

Clasificación de formas cuadráticas

Teorema Sea $q : E \to \mathbf{R}$ forma cuadrática. Sea A su matriz asociada en una base B de E, y $C_A(x) = \det(A - x\,Id)$ su polinomio característico. Entonces:

- q es def. positiva si y sólo si todas las raíces de $C_A(x)$ son positivas.
- q es def. negativa si y sólo si todas las raíces de $C_A(x)$ son negativas.
- q es semidef. positiva si y sólo si todas la raíces de $C_A(x)$ son positivas y alguna es cero.
- q es semidef. negativa si y sólo si todas la raíces de $C_A(x)$ son negativas y alguna es cero.
- q es indefinida si y sólo si $C_A(x)$ tiene raíces positivas y negativas.

Demo Se basa en el hecho de que las raíces del polinomio característico asociado a una forma cuadrática tiene siempre el mismo signo, independientemente de la base utilizada (Ley de inercia de Sylvester).

Clasificación de formas cuadráticas

Teorema Sea $q : E \to \mathbf{R}$ forma cuadrática. Sea A su matriz asociada en una base B de E, y $C_A(x) = \det\,(A - x\,Id)$ su polinomio característico. Entonces:

- q es def. positiva si y sólo si todas las raíces de $C_A(x)$ son positivas.
- q es def. negativa si y sólo si todas las raíces de $C_A(x)$ son negativas.
- q es semidef. positiva si y sólo si todas la raíces de $C_A(x)$ son positivas y alguna es cero.
- q es semidef. negativa si y sólo si todas la raíces de $C_A(x)$ son negativas y alguna es cero.
- q es indefinida si y sólo si $C_A(x)$ tiene raíces positivas y negativas.

Demo Se basa en el hecho de que las raíces del polinomio característico asociado a una forma cuadrática tiene siempre el mismo signo, independientemente de la base utilizada (Ley de inercia de Sylvester).

Clasificación de formas cuadráticas

Teorema Sea $q : E \to \mathbf{R}$ forma cuadrática. Sea A su matriz asociada en una base B de E, y $C_A(x) = \det\,(A - x\,Id)$ su polinomio característico. Entonces:

- q es def. positiva si y sólo si todas las raíces de $C_A(x)$ son positivas.
- q es def. negativa si y sólo si todas las raíces de $C_A(x)$ son negativas.
- q es semidef. positiva si y sólo si todas la raíces de $C_A(x)$ son positivas y alguna es cero.
- q es semidef. negativa si y sólo si todas la raíces de $C_A(x)$ son negativas y alguna es cero.
- q es indefinida si y sólo si $C_A(x)$ tiene raíces positivas y negativas.

Demo Se basa en el hecho de que las raíces del polinomio característico asociado a una forma cuadrática tiene siempre el mismo signo, independientemente de la base utilizada (Ley de inercia de Sylvester).

Clasificación de formas cuadráticas

Teorema Sea $q : E \to \mathbf{R}$ forma cuadrática. Sea A su matriz asociada en una base B de E, y $C_A(x) = \det(A - x\,Id)$ su polinomio característico. Entonces:

- q es def. positiva si y sólo si todas las raíces de $C_A(x)$ son positivas.
- q es def. negativa si y sólo si todas las raíces de $C_A(x)$ son negativas.
- q es semidef. positiva si y sólo si todas la raíces de $C_A(x)$ son positivas y alguna es cero.
- q es semidef. negativa si y sólo si todas la raíces de $C_A(x)$ son negativas y alguna es cero.
- q es indefinida si y sólo si $C_A(x)$ tiene raíces positivas y negativas.

Demo Se basa en el hecho de que las raíces del polinomio característico asociado a una forma cuadrática tiene siempre el mismo signo, independientemente de la base utilizada (Ley de inercia de Sylvester).

Clasificación de formas cuadráticas

Teorema Sea $q : E \to \mathbf{R}$ forma cuadrática. Sea A su matriz asociada en una base B de E, y $C_A(x) = \det\,(A - x\,Id)$ su polinomio característico. Entonces:

- q es def. positiva si y sólo si todas las raíces de $C_A(x)$ son positivas.
- q es def. negativa si y sólo si todas las raíces de $C_A(x)$ son negativas.
- q es semidef. positiva si y sólo si todas la raíces de $C_A(x)$ son positivas y alguna es cero.
- q es semidef. negativa si y sólo si todas la raíces de $C_A(x)$ son negativas y alguna es cero.
- q es indefinida si y sólo si $C_A(x)$ tiene raíces positivas y negativas.

Demo Se basa en el hecho de que las raíces del polinomio característico asociado a una forma cuadrática tiene siempre el mismo signo, independientemente de la base utilizada (Ley de inercia de Sylvester).

Clasificación de formas cuadráticas

Teorema Sea $q : E \to \mathbf{R}$ forma cuadrática. Sea A su matriz asociada en una base B de E, y $C_A(x) = \det\,(A - x\,Id)$ su polinomio característico. Entonces:

- q es def. positiva si y sólo si todas las raíces de $C_A(x)$ son positivas.
- q es def. negativa si y sólo si todas las raíces de $C_A(x)$ son negativas.
- q es semidef. positiva si y sólo si todas la raíces de $C_A(x)$ son positivas y alguna es cero.
- q es semidef. negativa si y sólo si todas la raíces de $C_A(x)$ son negativas y alguna es cero.
- q es indefinida si y sólo si $C_A(x)$ tiene raíces positivas y negativas.

Demo Se basa en el hecho de que las raíces del polinomio característico asociado a una forma cuadrática tiene siempre el mismo signo, independientemente de la base utilizada (Ley de inercia de Sylvester).

Rango y signatura de una forma cuadrática

Sea $q : E \to \mathbf{R}$ forma cuadrática.

Definición Se denomina signatura de q, $sg(q)$, al par de enteros (p_1, p_2) donde

- p_1 es el número de raíces positivas,
- p_2 es el número de raíces negativas,

del polinomio característico de la matriz A asociada a la forma cuadrática en una base.

Definición Se denomina rango, $\mathrm{rang}(q)$ al rango de la matriz A asociada a la forma cuadrática en cualquier base.

Nota Se verifica $p_1 + p_2 = \mathrm{rang}(q)$.

Ejercicio Clasificar una forma cuadrática en términos de su signatura y rango.

Rango y signatura de una forma cuadrática

Sea $q : E \to \mathbf{R}$ forma cuadrática.

Definición Se denomina signatura de q, $sg(q)$, al par de enteros (p_1, p_2) donde

- p_1 es el número de raíces positivas,
- p_2 es el número de raíces negativas,

del polinomio característico de la matriz A asociada a la forma cuadrática en una base.

Definición Se denomina rango, $\text{rang}(q)$ al rango de la matriz A asociada a la forma cuadrática en cualquier base.

Nota Se verifica $p_1 + p_2 = \text{rang}(q)$.

Ejercicio Clasificar una forma cuadrática en términos de su signatura y rango.

Rango y signatura de una forma cuadrática

Sea $q : E \to \mathbf{R}$ forma cuadrática.

Definición Se denomina signatura de q, $sg(q)$, al par de enteros (p_1, p_2) donde

- p_1 es el número de raíces positivas,
- p_2 es el número de raíces negativas,

del polinomio característico de la matriz A asociada a la forma cuadrática en una base.

Definición Se denomina rango, $\mathrm{rang}(q)$ al rango de la matriz A asociada a la forma cuadrática en cualquier base.

Nota Se verifica $p_1 + p_2 = \mathrm{rang}(q)$.

Ejercicio Clasificar una forma cuadrática en términos de su signatura y rango.

Tema 6

Formas bilineales y cuadráticas

Criterio de Sylvester

Sea E un espacio vectorial de dimensión n, $q : E \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática y A la matriz asociada en una base de E. Denotamos Δ_k, el k-ésimo menor principal de A, $1 \leqslant k \leqslant n$:

$$\Delta_1 = |a_{11}|,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix}, \Delta_n = |A|$$

Entonces:

1. q es def. positiva $\Leftrightarrow$ $\Delta_k > 0$ para $1 \leqslant k \leqslant n$.
2. q es def. negativa $\Leftrightarrow$ $(-1)^k \Delta_k > 0$ para $1 \leqslant k \leqslant n$.
3. Si $\Delta_n = \det(A) \neq 0$ y la secuencia $\{\Delta_k\}$ no está en los casos anteriores, entonces q es indefinida

Nota Existen extensiones del criterio de Sylvester que permiten determinar si una forma cuadrática es semidefinida, sin embargo, son sofisticadas y evitaremos su uso. Para clasificar estos casos, será necesario usar otro criterio.

Criterio de Sylvester

Sea E un espacio vectorial de dimensión n, $q : E \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática y A la matriz asociada en una base de E. Denotamos Δ_k, el k-ésimo menor principal de A, $1 \leqslant k \leqslant n$:

$$\Delta_1 = |a_{11}|,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}, \Delta_n = |A|$$

Entonces:

1. q es def. positiva $\Leftrightarrow$ $\Delta_k > 0$ para $1 \leqslant k \leqslant n$.
2. q es def. negativa $\Leftrightarrow$ $(-1)^k \Delta_k > 0$ para $1 \leqslant k \leqslant n$.
3. Si $\Delta_n = \det(A) \neq 0$ y la secuencia $\{\Delta_k\}$ no está en los casos anteriores, entonces q es indefinida

Nota Existen extensiones del criterio de Sylvester que permiten determinar si una forma cuadrática es semidefinida, sin embargo, son sofisticadas y evitaremos su uso. Para clasificar estos casos, será necesario usar otro criterio.

Criterio de Sylvester

Sea E un espacio vectorial de dimensión n, $q : E \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática y A la matriz asociada en una base de E. Denotamos Δ_k, el k-ésimo menor principal de A, $1 \leqslant k \leqslant n$:

$$\Delta_1 = |a_{11}|,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix}, \Delta_n = |A|$$

Entonces:

1. q es def. positiva $\Leftrightarrow$ $\boxed{\Delta_k > 0}$ para $1 \leqslant k \leqslant n$.
2. q es def. negativa $\Leftrightarrow$ $\boxed{(-1)^k \Delta_k > 0}$ para $1 \leqslant k \leqslant n$.
3. Si $\Delta_n = \det(A) \neq 0$ y la secuencia $\{\Delta_k\}$ no está en los casos anteriores, entonces q es indefinida

Nota Existen extensiones del criterio de Sylvester que permiten determinar si una forma cuadrática es semidefinida, sin embargo, son sofisticadas y evitaremos su uso. Para clasificar estos casos, será necesario usar otro criterio.

Criterio de Sylvester

Sea E un espacio vectorial de dimensión n, $q : E \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática y A la matriz asociada en una base de E. Denotamos Δ_k, el k-ésimo menor principal de A, $1 \leqslant k \leqslant n$:

$$\Delta_1 = |a_{11}|,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix}, \ \Delta_n = |A|$$

Entonces:

1. q es def. positiva $\Leftrightarrow$ $\boxed{\Delta_k > 0}$ para $1 \leqslant k \leqslant n$.
2. q es def. negativa $\Leftrightarrow$ $\boxed{(-1)^k \Delta_k > 0}$ para $1 \leqslant k \leqslant n$.
3. Si $\Delta_n = \det(A) \neq 0$ y la secuencia $\{\Delta_k\}$ no está en los casos anteriores, entonces q es indefinida

Nota Existen extensiones del criterio de Sylvester que permiten determinar si una forma cuadrática es semidefinida, sin embargo, son sofisticadas y evitaremos su uso. Para clasificar estos casos, será necesario usar otro criterio.

Criterio de Sylvester

Sea E un espacio vectorial de dimensión n, $q : E \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática y A la matriz asociada en una base de E. Denotamos Δ_k, el k-ésimo menor principal de A, $1 \leqslant k \leqslant n$:

$$\Delta_1 = |a_{11}|,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix}, \ \Delta_n = |A|$$

Entonces:

1. q es def. positiva $\Leftrightarrow$ $\Delta_k > 0$ para $1 \leqslant k \leqslant n$.
2. q es def. negativa $\Leftrightarrow$ $(-1)^k \Delta_k > 0$ para $1 \leqslant k \leqslant n$.
3. Si $\Delta_n = \det(A) \neq 0$ y la secuencia $\{\Delta_k\}$ no está en los casos anteriores, entonces q es indefinida

Nota Existen extensiones del criterio de Sylvester que permiten determinar si una forma cuadrática es semidefinida, sin embargo, son sofisticadas y evitaremos su uso. Para clasificar estos casos, será necesario usar otro criterio.

Regla de Descartes

Proposición Si $P(x)$ es un polinomio con coeficientes reales y todas sus raíces son reales. El número de raíces positivas (contando multiplicidades) es igual al número de cambios de signo de sus coeficientes consecutivos no nulos.

Ejemplos

Aplicación a la clasificiación de formas cuadráticas

1. Calcular el polinomio característico asociado a q: $C_A(x)$
2. Determinar el signo de las raíces de $C_A(x)$:
   - Raíces positivas: n_+ Regla de Descartes (no. cambios de signo).
   - Raíces nulas: n_0 grado del monomio de menor grado no nulo.
   - Raíces negativas: $n_- = n - n_0 - n_+$
3. Clasificar la forma cuadrática

Observación $C_A(x)$ tiene todas sus raíces reales, por ser A matriz simétrica.

Regla de Descartes

Proposición Si $P(x)$ es un polinomio con coeficientes reales y todas sus raíces son reales. El número de raíces positivas (contando multiplicidades) es igual al número de cambios de signo de sus coeficientes consecutivos no nulos.

Ejemplos

Aplicación a la clasificiación de formas cuadráticas

1. Calcular el polinomio característico asociado a q: $C_A(x)$
2. Determinar el signo de las raíces de $C_A(x)$:
   - Raíces positivas: n_+ Regla de Descartes (no. cambios de signo).
   - Raíces nulas: n_0 grado del monomio de menor grado no nulo.
   - Raíces negativas: $n_- = n - n_0 - n_+$
3. Clasificar la forma cuadrática

Observación $C_A(x)$ tiene todas sus raíces reales, por ser A matriz simétrica.

Clasificación de formas cuadráticas. Raíces del característico.

Otro pocedimiento que permite clasificar una forma cuadrátia es el cálculo de las raíces del polinomio característico.

$$C_A(x) \longrightarrow x_1, \ldots, x_n$$

Este procedimiento es desaconsejable pues en general es el más costoso de los presentados.

Sin embargo, puede ser muy útil, si el polinomio característico es facilmente factorizable, o en el caso de problemas con parámetros.

Tema 6

Formas bilineales y cuadráticas

Restricción de una forma cuadrática a un subespacio

Sea E un espacio vectorial con dim $E = n$, $q : E \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática, y A su matriz asociada en la base B.

Sea $E' \subset E$ un subespacio vectorial, dim$E' = m$. La restricción de q al subespacio E', $\boxed{q_{|E'}}$, puede clasificarse siguiendo los pasos:

1. Calcular una base de E', $B' = \{\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_m\}$ expresada en coordenadas de la base B.
2. Calcular la matriz asociada a $q_{E'}$ sobre la base B'

$$A' \in \mathbb{M}_{m\times m}(\mathbb{R}), \qquad a'_{ij} = \mathbf{e}_i^t A \mathbf{e}_j$$

3. Clasificar q_E vía la matriz A' con los criterios descritos en las secciones anteriores.

Restricción de una forma cuadrática a un subespacio

Sea E un espacio vectorial con dim $E = n$, $q : E \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática, y A su matriz asociada en la base B.

Sea $E' \subset E$ un subespacio vectorial, dim$E' = m$. La restricción de q al subespacio E', $\boxed{q_{|E'}}$, puede clasificarse siguiendo los pasos:

1. Calcular una base de E', $B' = \{\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_m\}$ expresada en coordenadas de la base B.
2. Calcular la matriz asociada a $q_{E'}$ sobre la base B'
$$A' \in \mathbb{M}_{m\times m}(\mathbb{R}), \qquad a'_{ij} = \mathbf{e}_i^t A \mathbf{e}_j$$
3. Clasificar q_E vía la matriz A' con los criterios descritos en las secciones anteriores.

Restricción de una forma cuadrática a un subespacio

Sea E un espacio vectorial con dim $E = n$, $q : E \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática, y A su matriz asociada en la base B.

Sea $E' \subset E$ un subespacio vectorial, dim$E' = m$. La restricción de q al subespacio E', $\boxed{q_{|E'}}$, puede clasificarse siguiendo los pasos:

1. Calcular una base de E', $B' = \{\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_m\}$ expresada en coordenadas de la base B.
2. Calcular la matriz asociada a $q_{E'}$ sobre la base B'

$$A' \in \mathbb{M}_{m\times m}(\mathbb{R}), \qquad a'_{ij} = \mathbf{e}_i^t A \mathbf{e}_j$$

3. Clasificar q_E vía la matriz A' con los criterios descritos en las secciones anteriores.

Restricción de una forma cuadrática a un subespacio

Sea E un espacio vectorial con dim $E = n$, $q : E \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática, y A su matriz asociada en la base B.

Sea $E' \subset E$ un subespacio vectorial, dim$E' = m$. La restricción de q al subespacio E', $\boxed{q_{|E'}}$, puede clasificarse siguiendo los pasos:

1. Calcular una base de E', $B' = \{\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_m\}$ expresada en coordenadas de la base B.
2. Calcular la matriz asociada a $q_{E'}$ sobre la base B'

$$A' \in \mathbb{M}_{m\times m}(\mathbb{R}), \qquad a'_{ij} = \mathbf{e}_i^t A \mathbf{e}_j$$

3. Clasificar q_{E} vía la matriz A' con los criterios descritos en las secciones anteriores.

Bibliografía

Bibliografía I

- P. Alegre et al. *Matemáticas empresariales*. Thomson-AC, 1995.
- J. de Burgos. *Algebra lineal*. McGraw-Hill, 1996.
- R. Barbolla y P. Sanz. *Algebra lineal y teoría de matrices*. Prentice-Hall, 1998.
- R. E. Caballero Fernández, et al. *Métodos matemáticos para la economía*. Alhambra 1987.
- M. D. García. B. García Bernalt, M. A. Manrique y J. C. Rodríguez. *Manual práctico de Matemáticas para Economía y Empresa*. Delta Publicaciones 2006
- M. T. García González. *Algebra. Teoría y ejercicios*. Paraninfo 1993.
- Fco J. González Ortiz. Proyecto MaTEX. Matrices, determinantes, resolución de sistemas lineales.

Bibliografía II

- A. Heras y J. L. Villar. *Problemas de álgebra lineal para la economía*. Thomson- AC, 1988.
- M. López y A. Vegas. *Curso básico de matemáticas para la economía y dirección de empresas*. Pirámide 2000.
- J. Rojo. *Algebra lineal*. McGraw Hill 2007.