

**APLICACIÓN DEL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS A PROBLEMAS
PARABÓLICOS**

LUIS FERRAGUT CANALS

Salamanca, Marzo, 2018
(Primera edición: Madrid, Octubre, 1985)

INDICE

1. Ejemplo Físico.
2. Formulación clásica.
3. Formulación Variacional.
4. Semidiscretización espacial mediante el Método de Elementos Finitos.
5. Matrices elementales, matriz diagonal de Capacidad Calorífica.
6. Forma práctica de tener en cuenta las condiciones de contorno de Dirichlet no homogéneas.
7. Métodos de resolución del sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias resultante.
8. Resolución de un ejemplo práctico. Puesta en marcha de un horno.
9. Análisis del error.

2. FORMULACION CLASICA DEL PROBLEMA.

Hallar $u(x,t)$ tal que verifique:

$$\left. \begin{aligned} \rho \bar{c} \frac{\partial u}{\partial t} - \vec{\nabla} k \vec{\nabla} u &= f && \text{en } \Omega \\ -k \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1} &= h(u - u_\infty) \\ u \Big|_{\Gamma_0} &= \bar{u} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$
$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{en } \Omega$$

donde ρ = densidad, \bar{c} = capacidad calorífica, k = conductividad térmica, $f(x,t)$ = fuentes volumétricas de calor, h = coeficiente de convección en la pared, \bar{u} = temperatura conocida, u_0 = temperatura inicial. En adelante pondremos $\rho \bar{c} = c$

3. FORMULACION VARIACIONAL.

Trataremos a continuación de precisar matemáticamente el problema (1). Supongamos que la solución u es suficientemente regular y para simplificar en una primera etapa tomaremos $\bar{u} = 0$; multipliquemos la primera ecuación en (1) por una función "test"

$$v \in V = \{w \in H^1(\Omega); w|_{\Gamma_0} = 0\}$$

e integremos en Ω ; obtenemos:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} c \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) v(x) dx - \int_{\Omega} \vec{\nabla}(k(x) \vec{\nabla}u(x,t)) v(x) dx = \\ & = \int_{\Omega} f(x,t) v(x) dx \end{aligned}$$

Utilizando la fórmula de Green y teniendo en cuenta la condición sobre Γ_1 :

$$\left. \begin{aligned} & \int_{\Omega} c \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) v(x) dx + \int_{\Omega} k(x) \vec{\nabla}u(x,t) \vec{\nabla}v(x) dx + \\ & + \int_{\Gamma_1} h u(\gamma,t) v(\gamma) d\gamma = \int_{\Omega} f(x,t) v(x) dx + \\ & + \int_{\Gamma_1} h u_{\infty}(\gamma,t) v(\gamma) d\gamma \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Las variables x y t juegan papeles diferentes; las separaremos de la manera siguiente:

Dada una función $u: (x,t) \in Q_T = \Omega \times]0,T[\rightarrow u(x,t) \in \mathbb{R}$ introducimos para todo $t \in]0,T[$ la función $u(t): x \in \Omega \rightarrow u(x,t) \in \mathbb{R}$, de modo que la función u puede identificarse a la función $t \rightarrow u(t)$ definida sobre $]0,T[$ y que toma valores en un espacio de funciones de Ω en \mathbb{R} . Más precisamente designaremos mediante $L^2(0,T; V)$ el espacio de funciones $t \rightarrow v(t)$ fuertemente medibles sobre $]0,T[$ para la medida dt (es decir, las funciones escalares $t \rightarrow \|v(t)\|_V$

son medibles para la medida dt) y tales que:

$$\|v\|_{L^2(0,T;V)} = \left(\int_0^T \|v(t)\|_V^2 dt \right)^{1/2} < +\infty$$

que es un espacio de Hilbert cuyo producto escalar es

$$(u,v)_{L^2(0,T;V)} = \int_0^T (u(t), v(t))_V dt$$

Estamos en disposición de dar un sentido preciso a la expresión (2); el problema a resolver será pues, el siguiente:

Dado $f \in L^2(0,T; L^2(\Omega)) = L^2(Q_T)$, hallar $u \in L^2(0,T;V)$; $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T; L^2(\Omega))$ tal que verifique (2) cualquiera que sea v perteneciente a V .

No es objeto de este tema el estudiar la existencia y unicidad de solución del problema anterior, sino sólo su aproximación numérica; antes de ello veamos las modificaciones a efectuar cuando $\bar{u} \neq 0$. Consideramos una función:

$$\hat{u} \in L^2(0,T;V) ; \quad \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$$

tal que $\hat{u}|_{\Gamma_0} = \bar{u}$ (tales funciones existen para Ω de frontera regular) y pongamos $w = u - \hat{u}$, tendremos $w|_{\Gamma_0} = 0$ y de ese modo w verifica la siguiente expresión:

$$\left. \begin{aligned} & \int_{\Omega} c \frac{\partial w}{\partial t} v dx + \int_{\Omega} k(x) \vec{\nabla} w \vec{\nabla} v dx + \int_{\Gamma_1} h w v d\gamma = \int_{\Omega} f v dx + \\ & + \int_{\Gamma_1} h u_{\infty} v d\gamma - \int_{\Omega} c \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} v dx - \int_{\Omega} k(x) \vec{\nabla} \hat{u} \vec{\nabla} v dx - \int_{\Gamma_1} h \hat{u} v d\gamma \end{aligned} \right\} (3)$$

$$\forall v \in V$$

con lo que nos hemos trasladado al caso anterior.

Acercas de los aspectos prácticos de cómo realizar esta traslación insistiremos más adelante.

4. SEMIDISCRETIZACION ESPACIAL MEDIANTE EL M.E.F.

Consideramos ahora un subespacio $V_h \subset V$ de dimensión finita; formularemos así el problema aproximado de (2) siguiente: Dado $u_{0,h} \in V_h$ y $u_{\infty,h}(t)$ (ε traza de funciones de V_h sobre Γ_1), hallar una función $u_h: t \in]0, T[\rightarrow u_h(t) \in V_h$ solución del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{aligned} \forall v_h \in V_h \\ \int_{\Omega} c \frac{\partial u_h}{\partial t} v_h dx + \int_{\Omega} k \vec{\nabla} u_h \cdot \vec{\nabla} v_h dx + \int_{\Gamma_1} h u_h v_h d\gamma = \\ = \int_{\Omega} q v_h dx + \int_{\Gamma_1} h u_{\infty,h} v_h d\gamma \end{aligned} \quad (4)$$

$$u_h(0) = u_{0,h}$$

Siendo V_h de dimensión finita bastará que se verifique (4) para las N funciones $\{\psi_i\}_{i=1}^N$ de una base de V_h ; del mismo modo, u_h y $\frac{\partial u_h}{\partial t}$ se podrán expresar en función de la base de la forma:

$$\begin{aligned} u_h &= \sum_{j=1}^N u_h^j(t) \psi_j(x) \\ \frac{\partial u_h}{\partial t} &= \sum_{j=1}^N \frac{\partial u_h^j}{\partial t}(t) \psi_j(x) \end{aligned}$$

Sustituyendo en (4) resulta:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Omega} c \psi_i \psi_j dx \right) \frac{\partial u_h^j}{\partial t} + \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Omega} k \vec{\nabla} \psi_i \cdot \vec{\nabla} \psi_j dx \right) u_h^j + \\ + \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Gamma_1} h \psi_i \psi_j d\gamma \right) u_h^j = \int_{\Omega} \bar{f} \psi_i dx + \int_{\Gamma_1} h u_{\infty,h} \psi_i d\gamma \end{aligned} \quad (5)$$

$i = 1, \dots, N.$

que en forma matricial se puede expresar de la forma:

$$[M] \frac{d}{dt} \{u\} + [K] \{u\} = \{F\} \quad (6)$$

donde el término general de $[M]$ viene dado por:

$$[M]_{ij} = \int_{\Omega} c \psi_i \psi_j dx$$

el término general de $[K]$ es

$$[K]_{ij} = \int_{\Omega} k \vec{\nabla} \psi_i \cdot \vec{\nabla} \psi_j dx + \int_{\Gamma_1} h \psi_i \psi_j d\gamma$$

y las componentes de $\{F\}$ son

$$\{F\}_i = \int_{\Omega} f \psi_i dx + \int_{\Gamma_1} h u_{\infty, h} \psi_i d\gamma$$

5. MATRICES ELEMENTALES. MATRIZ DIAGONAL DE CAPACIDAD CALORIFICA

En el contexto de la aproximación mediante elementos finitos, los términos de las matrices $[M]$ y $[K]$ se calculan elemento a elemento y luego se suman, así llamando ϕ_i la restricción de ψ_i a un elemento genérico T la contribución de este elemento T a un término de $[M]$ vendría dada por la expresión:

$$m_{ij} = \int_T c \phi_i \phi_j dx \quad (7)$$

y para la matriz $[K]$

$$k_{ij} = \int_T k \vec{\nabla} \phi_i \vec{\nabla} \phi_j dx + \int_{T \cap \Gamma_1} h \phi_i \phi_j d\gamma \quad (8)$$

Observemos que utilizando una integración numérica tal que los puntos de apoyo sean los nodos la matriz $[M]$ es diagonal pues en un nodo x_k se tiene $\phi_i(x_k) = \delta_{ik}$ y así los únicos términos no nulos serán los términos con $i=j$:

$$\left. \begin{aligned} m_{ii} &= \sum_{k=1}^m W_k c(x_k) \phi_i(x_k) \phi_i(x_k) \\ m_{ij} &= 0 \quad \text{si } i \neq j \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

6. FORMA PRACTICA DE TENER EN CUENTA LAS CONDICIONES DE CONTORNO DE DIRICHLET NO HOMOGENEAS.

La forma de tener en cuenta las condiciones de Dirichlet no homogéneas se basan en la expresión (3). De hecho, hay muchas posibilidades en la elección de \hat{u} tal que $\hat{u}|_{\Gamma_0} = \bar{u}$. En la práctica, en el caso discreto elegimos una función \hat{u} tal que $\hat{u} = \bar{u}$ en los nodos situados sobre Γ_0 y $\hat{u} = 0$ en el resto de los nodos, así el segundo miembro $\{F\}$ del sistema (6) está formado por:

$$\left. \begin{aligned} \{F\}_i &= \int_{\Omega} f \psi_i \, dx + \int_{\Gamma_1} h u_{\infty, h} \psi_i \, d\gamma - \int_{\Omega} c \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \psi_i \, dx \\ &- \int_{\Omega} k(x) \vec{\nabla} \hat{u} \vec{\nabla} \psi_i \, dx - \int_{\Gamma_1} h \hat{u} \psi_i \, dx \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$i = 1, \dots, N$$

En cuya expresión todos los términos se calculan en cada elemento y luego se suman.

Aclaremos también que las ecuaciones correspondientes a nodos situados en la frontera Γ_0 , es decir, sobre la que tomamos las condiciones de Dirichlet han sido implícitamente eliminadas al limitarnos a una base de V_h , subespacio de V .

Un método alternativo consiste en penalizar la condición de Dirichlet:

$$u|_{\Gamma_0} = \bar{u}$$

de la siguiente forma:

$$-\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma_0} = \omega (u - \bar{u})$$

donde $\omega \approx 10^{10}$

Que en la práctica equivale a modificar la matriz $[K]$ y el segundo miembro de la manera siguiente:

Si en la i -ésima ecuación conocemos el valor de $u^i = \bar{u}^i$ - pondremos modificando el valor de k_{ij}

$$\sum_{j=1}^N m_{ij} \frac{du^j}{dt} + \sum_{j < i} k_{ij} u^j + \omega u^i + \sum_{j > i} k_{ij} u^j = \omega \bar{u}^i$$

una ventaja del primer método con respecto al segundo radica en el menor tamaño de las matrices del sistema final de ecuaciones.

7. MÉTODOS DE RESOLUCIÓN DEL SISTEMA DE E.D.O. RESULTANTE.

En los apartados anteriores hemos reducido el problema original, mediante la discretización por elementos finitos de las variables espaciales, a la resolución de un sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

$$[M] \frac{d}{dt} \{u\} + [K] \{u\} = \{F\} \quad 0 \leq t \leq T \quad (11)$$

$$\{u(0)\} = \{u_0\}$$

que podría ser resuelto por métodos analíticos en el caso lineal ($[M]$ y $[K]$ no dependen de $\{u\}$) o más generalmente utilizando esquemas numéricos del tipo Runge-Kutta o de pasos múltiples. Aquí estudiaremos un método sencillo de un paso para resolver (11).

Dividimos el intervalo $[0, T]$ en subintervalos de longitud Δt y pongamos:

$$\frac{d}{dt} \{u\} \approx \frac{\{u^{i+1}\} - \{u^i\}}{\Delta t} \quad (12)$$

y para $0 \leq \theta \leq 1$

$$\{u^{i+\theta}\} = (1-\theta) \{u^i\} + \theta \{u^{i+1}\} = \{u^i\} + \theta \{\delta^i\} \quad (13)$$

donde $\{\delta^i\} = \{u^{i+1}\} - \{u^i\}$

Insertando (12) y (13) en (11) resulta

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{1}{\Delta t} [M] + \theta [K] \right) \{\delta^i\} &= \{F^{i+\theta}\} - [K] \{u^i\} \\ \{u^{i+1}\} &= \{u^i\} + \{\delta^i\} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

y donde $\{F^{i+\theta}\} \approx (1-\theta)\{F^i\} + \theta\{F^{i+1}\}$; si las matrices $[M]$ y $[K]$ no dependen del tiempo basta factorizar $\frac{1}{\Delta t} [M] + \theta [K]$ una sola vez y en cada paso de tiempo resolver dos sistemas triangulares.

Utilizando el desarrollo de Taylor se ve fácilmente que el anterior esquema presenta un error de consistencia de orden 1 para todo valor de θ excepto para $\theta = 0.5$ que es de orden 2. Pasemos ahora a estudiar la estabilidad; pongamos (14) de la siguiente forma:

$$\left(\frac{1}{\Delta t} [M] + \theta [K]\right) \{u^{i+1}\} = \{F^{i+\theta}\} - \left(\frac{1}{\Delta t} [M] - (1-\theta)[K]\right) \{u^i\}$$

si en el cálculo de $\{u^i\}$ cometemos un error $\{e^i\}$ obtenemos gracias a la linealidad que los errores verifican la ecuación:

$$\left(\frac{1}{\Delta t} [M] + \theta [K]\right) \{e^{i+1}\} = \left(\frac{1}{\Delta t} [M] - (1-\theta) [K]\right) \{e^i\}$$

multiplicando por $\Delta t [M]^{-1}$ y designando $[A] = [M]^{-1} [K]$ obtenemos

$$([I] + \Delta t \theta [A]) \{e^{i+1}\} = ([I] - \Delta t(1-\theta) [A]) \{e^i\}$$

donde $[I]$ es la matriz unidad. El error en el paso i , $\{e^i\}$ se traduce en un error $\{e^{i+1}\}$ dado por:

$$\{e^{i+1}\} = ([I] + \Delta t \theta [A])^{-1} ([I] - \Delta t(1-\theta) [A]) \{e^i\}$$

y por recurrencia

$$\{e^i\} = \left[([I] + \Delta t \theta [A])^{-1} ([I] - \Delta t(1-\theta) [A]) \right]^i \{e^0\}$$

si expresamos $\{e^0\}$ en función de los vectores propios $\{w_k\}$ de $[A] = [M]^{-1} [K]$ tendremos $\{e^0\} = \sum_{k=1}^N \alpha_k w_k$ y para cada vector propio $\{w_k\}$

$$\left[[I] + \Delta t \theta [A] \right]^{-1} \{w_k\} = (1 + \Delta t \theta \lambda_k)^{-1} \{w_k\}$$

$$\left[[I] - \Delta t (1-\theta) [A] \right] \{w_k\} = (1 - \Delta t (1-\theta) \lambda_k) \{w_k\}$$

siendo λ_k el valor propio correspondiente a $\{w_k\}$.

Así podremos concluir

$$\{e^i\} = \sum_{k=1}^N \rho_k^i \alpha_k \{w_k\} \quad (15)$$

siendo
$$\rho_k = \frac{1 - \Delta t (1-\theta) \lambda_k}{1 + \Delta t \theta \lambda_k} \quad (16)$$

si una de las componentes del error $\alpha_k \{w_k\}$ es tal que su factor de amplificación ρ_k verifica $|\rho_k| > 1$ esta componente crecerá con el tiempo y el método será inestable; así pues la condición de estabilidad se expresará $|\rho_k| \leq 1$ para $k = 1, \dots, N$. Estudiemos los diferentes casos.

a) $\theta = 0$ (Euler explícito).

$$|1 - \Delta t \lambda_k| \leq 1 \quad (17)$$

La condición de estabilidad es entonces

$$\Delta t \leq \frac{2}{\lambda_k} \quad k = 1, \dots, N \quad (18)$$

Aunque alguna componente $\{w_k\}$ no esté presente en el desarrollo de $\{e^0\}$ los errores de redondeo generarán inevitablemente un coeficiente α_k distinto de cero y para $\Delta t > \frac{2}{\lambda_k}$ el crecimiento del error en esta componente sería para valores de i suficientemente grandes catastrófico. Podemos relacionar la condición (18) directamente con el paso h de la discretización mediante elementos finitos; por ejemplo para elementos lineales se obtienen expresiones para el máximo valor propio

λ_N de la forma $\lambda_N = \beta h^{-2}$ siendo β una constante, obtenemos así la condición de estabilidad

$$\Delta t \leq \frac{2}{\beta} h^2$$

b) $\theta=1$ (Euler implícito)

En este caso resulta

$$|\rho_k| = \left| \frac{1}{1+\Delta t \lambda_k} \right| \leq 1$$

Cualquiera que sea el valor de Δt y el método es incondicionalmente estable

c) $\theta=0.5$ (Crank-Nicholson)

Tendremos:

$$|\rho_k| = \left| \frac{1 - \frac{\Delta t}{2} \lambda_k}{1 + \frac{\Delta t}{2} \lambda_k} \right| \leq 1$$

cualquiera que sea el valor de Δt y el método es incondicionalmente estable. Sin embargo en este caso el valor de ρ_k es negativo si $\Delta t > \frac{2}{\lambda_k}$ en cuyo caso se producen oscilaciones de esta componente que no son realistas.

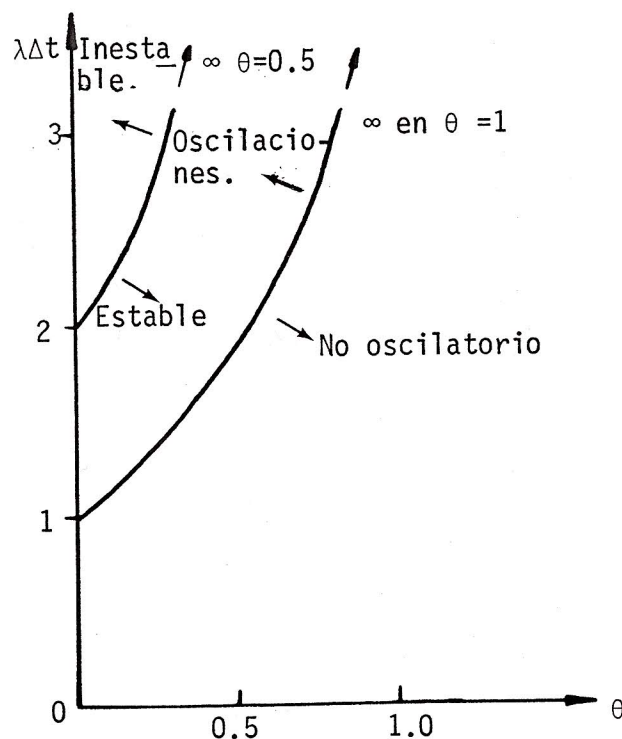


Figura 2.- Regiones de estabilidad.

Comentarios

A la vista de las consideraciones expuestas sobre orden de consistencia y estabilidad cabe pensar que el método de Crank-Nicholson es el método óptimo entre todos los de la familia estudiada y en todo caso si queremos evitar oscilaciones elegiríamos el método de Euler implícito. Examinemos no obstante las ventajas que podría ofrecernos el método de Euler explícito ($\theta=0$); en cada paso de tiempo hay que resolver el sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} [M] \{\delta^i\} &= \{F^i\} - [K] \{u^i\} \\ \{u^{i+1}\} &= \{u^i\} + \{\delta\} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

si hemos calculado la matriz $[M]$ en su forma consistente hay que factorizar una vez $[M]$ y en cada paso resolver dos sistemas triangulares, igual que en los casos $\theta > 0$. Sin embargo si utilizamos la expresión (9) (Integración numérica con puntos soporte en los nodos) la matriz $[M]$ es diagonal y la resolución de (19) es inmediata

$$\{\delta^i\}_k = \frac{\Delta t}{m_{kk}} \left(\{F^i\}_k - ([K]\{u^i\})_k \right) \quad k=1, \dots, N \quad (20)$$

Además no se necesitan almacenar matrices globales pues el producto $[K] \{u^i\}$ se puede realizar al nivel de cada elemento. El método puede servir además para resolver problemas estacionarios; tomando por ejemplo $[M] = \text{diag } [K]$ es el método de Jacobi, el cual utilizando un adecuado parámetro de aceleración puede ser competitivo con un método directo. Finalmente el método es aplicable a problemas no lineales donde la matriz $[K]$ dependa de la solución $[K] = [K(u)]$.

8. RESOLUCION CON MINIMEF DEL EJEMPLO DEL HORNO

Se ha resuelto con el programa MINIMEF el ejemplo planteado en el apartado 1. En la siguiente tabla se indican los datos físicos del problema

	<u>Refractario</u>	<u>Aislante</u>
Densidad(Kg/m ³)	3000	1500
Cap. Calorífica(KJ/Kg°C)	0.840	1
Cond. Térmica(KJ/hm°C)	72	1.8

Coeficiente de convección en la pared exterior = 36 KJ/h m²°C.

Temperatura en la pared interior (°C)

$$\left\{ \begin{array}{ll} 20. + 19.6t & \text{si } \underline{0} < t < 50. \text{ (t en horas)} \\ 1000 & \text{si } t > 50. \text{ (t en horas)} \end{array} \right.$$

El programa de marcoinstrucciones MINIMEF correspondiente al método de Euler implícito será el siguiente:

INIC		Inicializar la solución
DT	5.	Define el paso de tiempo
PROP	1.	Lee la función temporal de los datos del problema
CMAS		Forma la matriz de masa consistente
TANG		Forma la matriz de conductividad
CRNI	1.	Forma la combinación lineal de matrices con $\theta=1$.
LOOP	10.	Comienza el bucle de tiempo
TIME		Cuenta el tiempo
FORM		Forma el segundo miembro de las -- ecuaciones.
SOLV		Resuelve el sistema de ecuaciones (factoriza solo la 1ª vez).

DIB1	Dibuja las isothermas
NEXT	Fin del bucle de tiempo
END	Fin del programa

En la figura 3 se muestra el mallado utilizado correspondiente a una interpolación bilineal en cada cuadrilátero y - en las figuras 4 a 8 se presenta la solución obtenida en distintos pasos de tiempo; finalmente en la figura 9 se representa la solución correspondiente a la situación estacionaria.

MEF ** PUESTA EN MARCHA DE UN HORNO **

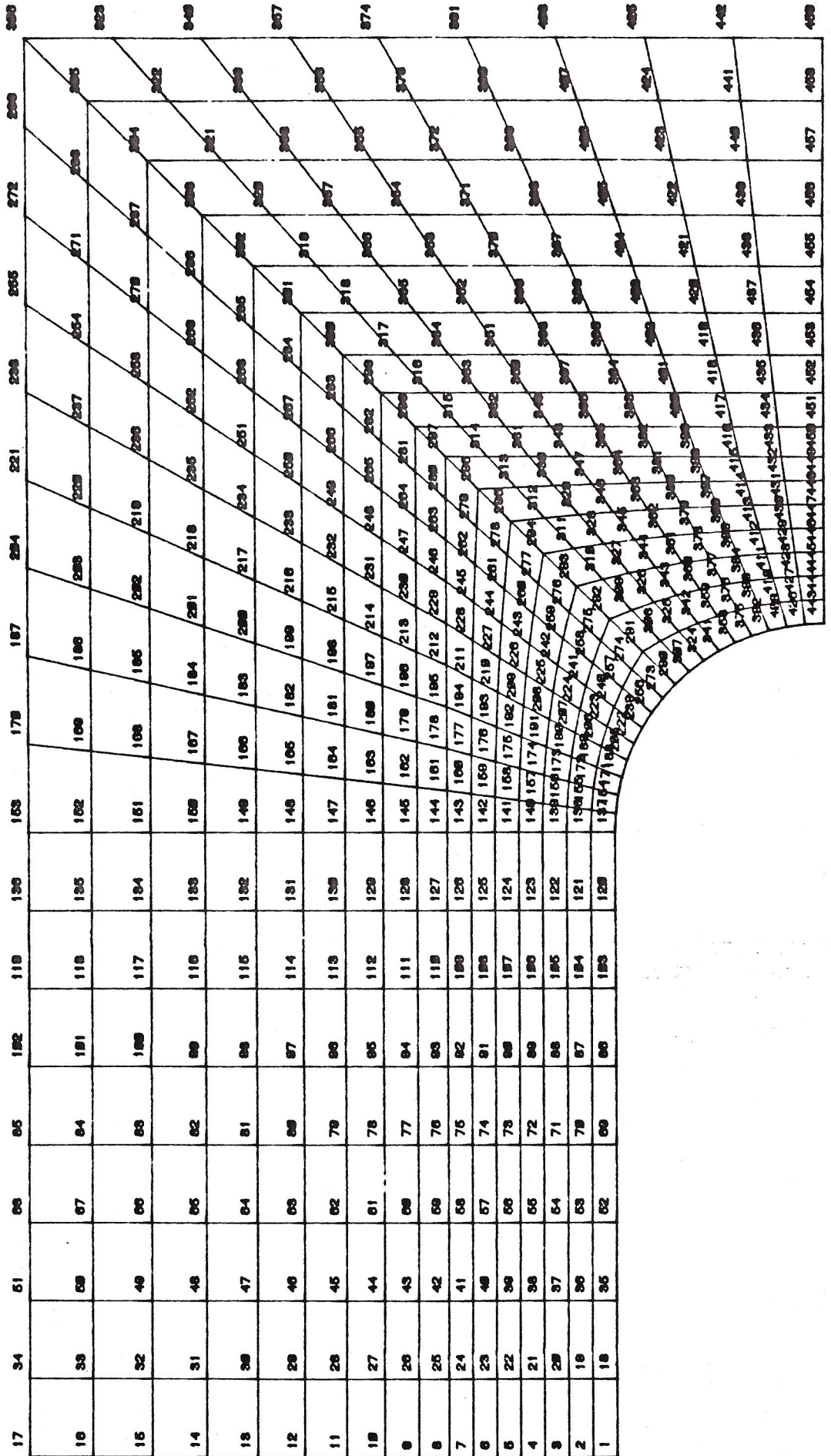


Figura 3.- Malla

MEF ** PUESTA EN MARCHA DE UN HORNO **

VALORES EN EL TIEMPO 10.00

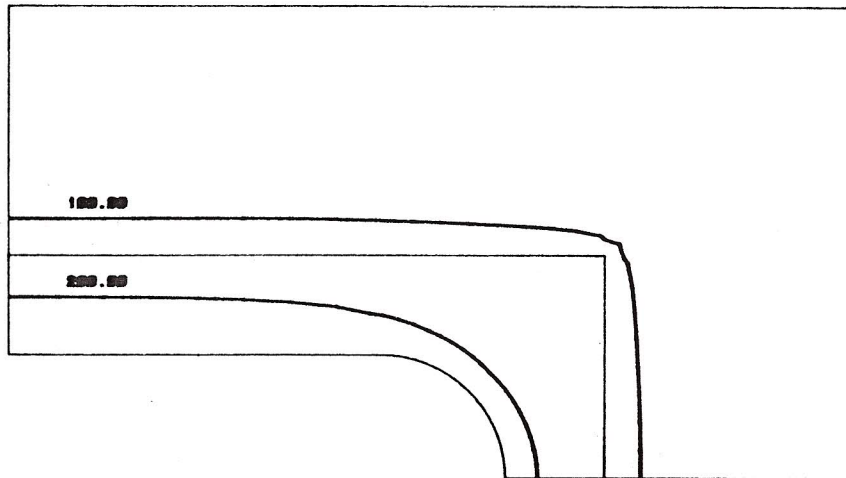


Figura 4.- Temperatura a las 10 horas

MEF ** PUESTA EN MARCHA DE UN HORNO **

VALORES EN EL TIEMPO 20.00

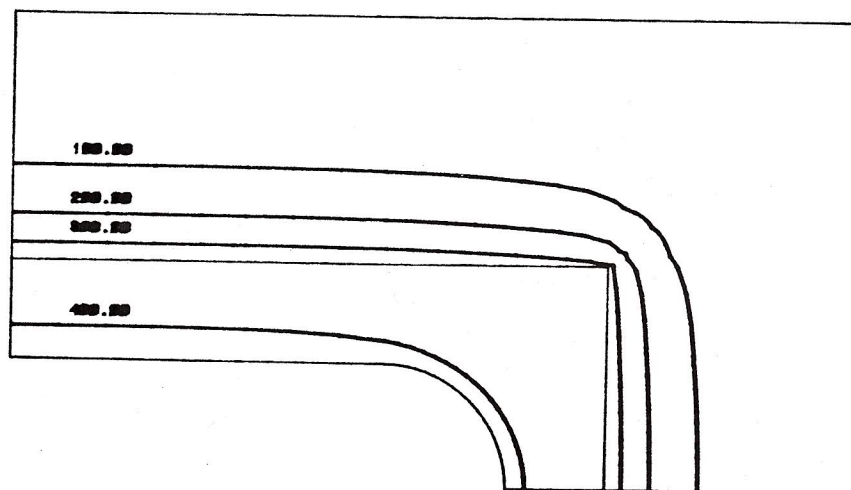


Figura 5.- Temperatura a las 20 horas

MEF ** PUESTA EN MARCHA DE UN HORNO **

VALORES EN EL TIEMPO 30.00

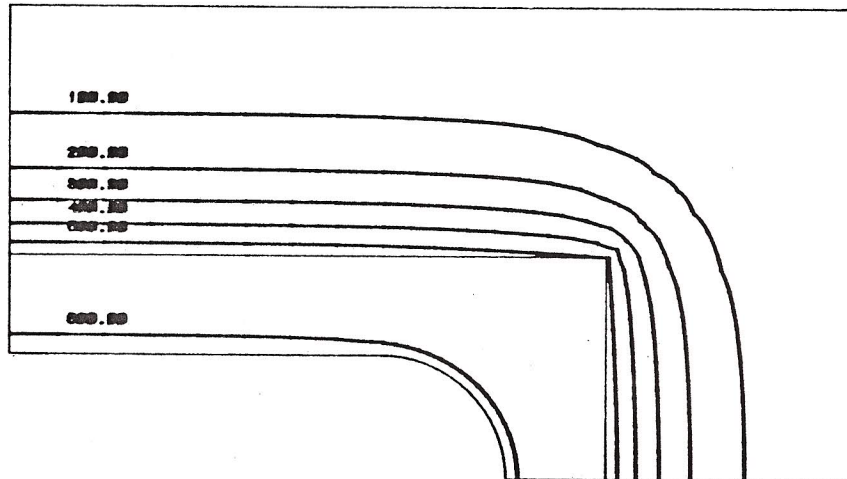


Figura 6.- Temperatura a las 30 horas

MEF ** PUESTA EN MARCHA DE UN HORNO **

VALORES EN EL TIEMPO 40.00

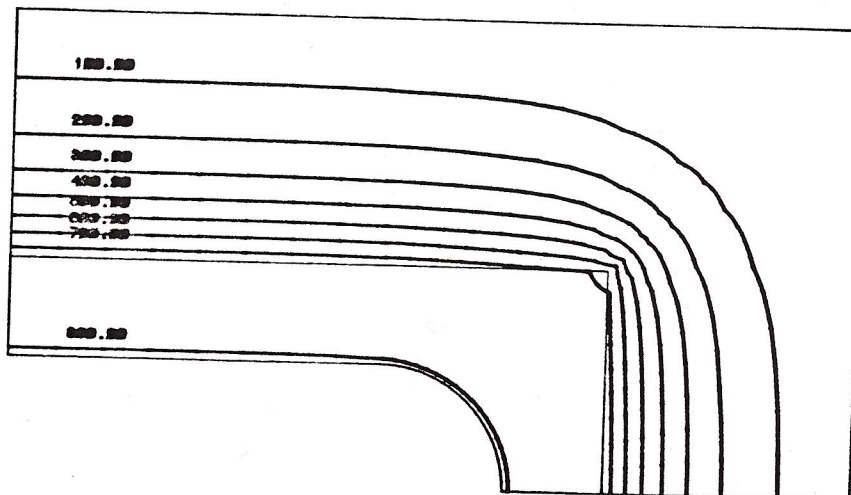


Figura 7.- Temperatura a las 40 horas

PIEF ** PUESTA EN MARCHA DE UN HORNO **

VALORES EN EL TIEMPO 50.00

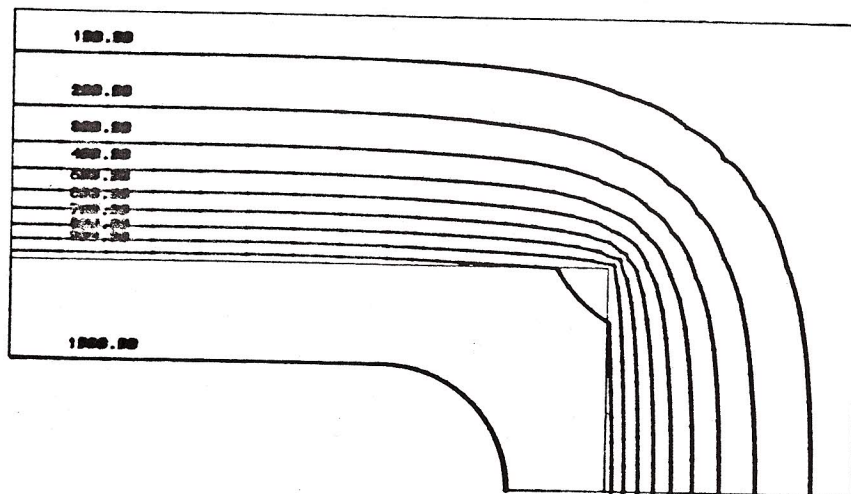


Figura 8.- Temperatura a las 50 horas

MEF ** PUESTA EN MARCHA DE UN HORNO **
 REGIMEN ESTACIONARIO

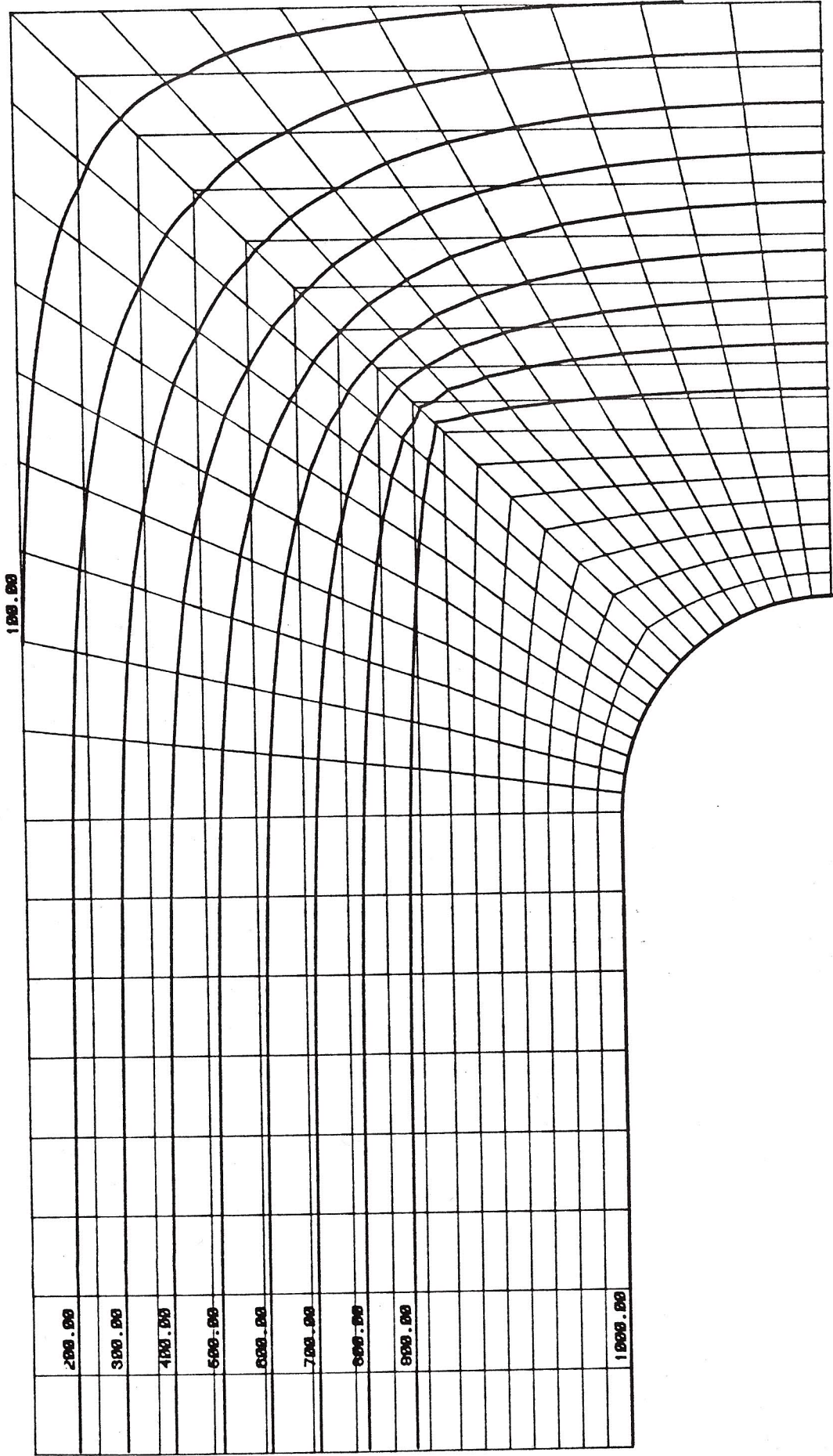


Figura 9.- Solución estacionaria

9. ANALISIS DEL ERROR

En el estudio del error consideraremos el problema con condiciones de contorno de Dirichlet homogéneas y que expresaremos de forma general así:

Hallar $u = u(t) \in V$ para $t \in]0, T[$

$$\left. \begin{aligned} (u', v) + a(u, v) &= (f, v) & \forall v \in V \\ u(0) &= u_0 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

donde $V = H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} (u, v) &= \int_{\Omega} u v \, dx \\ a(u, v) &= \int_{\Omega} k \vec{\nabla} u \vec{\nabla} v \, dx \end{aligned}$$

En lo que sigue designaremos mediante $\|\cdot\|$ la norma en $L^2(\Omega)$ y $\|\cdot\|_r$ la norma en $H^r(\Omega)$.

En una semidiscretización mediante elementos finitos -- sustituimos el problema continuo (21) por el siguiente problema discreto:

Sea $V_h \subset V$ un subespacio de dimensión finita, queremos hallar $u_h(t) \in V_h$ $t \in]0, T[$ tal que

$$\left. \begin{aligned} (u_h', v) + a(u_h, v) &= (f, v) & \forall v \in V_h \\ u_h(0) &= u_{0,h} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

La expresión (22) se puede poner también de la forma

$$(u_h', v) + a(u_h, v) = (P_0 f, v) \quad (23)$$

o bien

$$u_h' + A_h u_h = P_0 f \quad \text{en } V_h \quad (24)$$

donde A_h está definida por

$$(A_h u_h, v) = a(u_h, v) \quad \forall v \in V_h$$

y P_0 es el operador de proyección ortogonal con respecto a la norma $||\cdot||$ sobre el subespacio V_h .

La solución de (24) se puede expresar explícitamente de la siguiente manera:

$$u_h(t) = E_h(t) u_h(0) + \int_0^t E_h(t-s) P_0 f(s) ds$$

donde

$$E_h(t) = \exp(-tA_h)$$

Lema

Para el problema homogéneo ($f=0$) se verifica:

$$||u_h(t)|| \leq ||u_h(0)||$$

Demostración

En efecto, tomando $v=u_h$ en (23) con $f=0$ resulta:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} ||u_h||^2 + \alpha ||u_h||_1^2 \leq 0$$

$$\text{o sea } \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_h\|^2 \leq 0$$

es decir $\|u_h(t)\|$ es no creciente #

Teorema

Bajo hipótesis de regularidad suficiente de la solución del problema continuo tenemos:

$$\|u_h(t) - u(t)\| \leq \|u_h(0) - u(0)\| + Ch^r \left[\|u(0)\|_r + \int_0^t \|u'(s)\|_r ds \right]$$

Demostración

Introduzcamos la proyección elíptica $P_1 u \in V_h$ de u definida por

$$a(P_1 u, v) = a(u, v) \quad \forall v \in V_h$$

podemos poner

$$\|u_h(t) - u(t)\| \leq \|u_h(t) - P_1 u(t)\| + \|P_1 u(t) - u(t)\|$$

sabemos por la teoría de la aproximación de problemas elípticos

$$\|P_1 u(t) - u(t)\| \leq C h^r \|u(t)\|_r$$

como

$$u(t) = u(0) + \int_0^t u'(s) ds$$

$$\|u(t)\|_r \leq \|u(0)\|_r + \int_0^t \|u'(s)\|_r ds$$

de donde

$$\|P_1 u(t) - u(t)\| \leq Ch^r \left[\|u_0\|_r + \int_0^t \|u'(s)\|_r ds \right]$$

Falta estimar el error $\theta = u_h - P_1 u \in V_h$, tomando $v \in V_h$ en (21) y restando de (22) obtenemos

$$(u_h' - u', v) + a(u_h - u, v) = 0 \quad \forall v \in V_h$$

o bien

$$(u_h' - u', v) + a(u_h - P_1 u, v) = 0 \quad \forall v \in V_h$$

sumando y restando $(P_1 u', v)$

$$(u_h' - P_1 u', v) + (P_1 u' - u', v) + a(u_h - P_1 u, v) = 0 \quad \forall v \in V_h$$

de ahí,

$$(u_h' - P_1 u', v) + a(u_h - P_1 u, v) = (u' - P_1 u', v) = (P_0(u' - P_1 u'), v) \quad \forall v \in V_h$$

que finalmente expresaremos poniendo $\sigma = P_1 u - u$

$$(\theta', v) + a(\theta, v) = - (P_0 \sigma', v) \quad \forall v \in V_h \quad (25)$$

cuya solución es:

$$\theta(t) = E_h(t) \theta(0) - \int_0^t E_h(t-s) P_0 \sigma'(s) ds$$

Entonces gracias al lema:

$$\begin{aligned}
||E_h(t)\theta(0)|| &\leq ||\theta(0)|| = ||u_h(0) - P_1 u(0)|| \leq \\
&\leq ||u_h(0) - u(0)|| + ||u(0) - P_1 u(0)|| \leq \\
&\leq ||u_h(0) - u(0)|| + C h^r ||u(0)||_r
\end{aligned}$$

y por otra parte

$$\begin{aligned}
||E_h(t-s) P_0 \sigma'(s)|| &\leq ||P_0 \sigma'(s)|| \leq ||\sigma'(s)|| = \\
&= ||P_1 u' - u'|| \leq C h^r ||u'||_r
\end{aligned}$$

de ahí finalmente

$$||\int_0^t E_h(t-s) P_0 \sigma' ds|| \leq C h^r \int_0^t ||u'(s)||_r ds$$

lo que completa la demostración del teorema #.

Pasemos a la estimación en la norma $||\cdot||_1$

Teorema

Tenemos

$$\begin{aligned}
||u_h(t) - u(t)||_1 &\leq C ||u_h(0) - u(0)||_1 + C h^{r-1} \left[||u_h(0)||_r + \right. \\
&\quad \left. + \int_0^t ||u'||_r ds + \left(\int_0^t ||u'_i||_{r-1}^2 ds \right)^{1/2} \right]
\end{aligned}$$

Tomemos en la expresión (25) $v = \theta'$

$$||\theta'||^2 + a(\theta, \theta') = - (P_0 \sigma', \theta')$$

como $a(\dots)$ es simétrica (es un producto escalar)

$$\begin{aligned} \|\theta'\|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} a(\theta, \theta) &= - (P_0 \sigma', \theta') \leq \\ &\leq \|P_0 \sigma'\| \|\theta'\| \leq \frac{1}{2} \|\sigma'\|^2 + \frac{1}{2} \|\theta'\|^2 \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} a(\theta, \theta) &\leq \frac{1}{2} \|\sigma'\|^2 \\ a(\theta, \theta) &\leq a(\theta(0), \theta(0)) + \int_0^t \|\sigma'(s)\|^2 ds \end{aligned}$$

y así,

$$\begin{aligned} C_1 \|\theta\|_1^2 &\leq C_2 \|\theta(0)\|_1^2 + \int_0^t \|\sigma'(s)\|^2 ds \leq \\ &\leq C_2 (\|u_h(0) - u(0)\|_1 + C h^{r-1} \|u(0)\|_r)^2 + \int_0^t \|\sigma'(s)\|^2 ds \end{aligned}$$

pues

$$\theta(0) = u_h(0) - P_1 u(0) = (u_h(0) - u(0)) + (u(0) - P_1 u(0))$$

por otra parte:

$$\|\sigma'(s)\| = \|P_1 u'(s) - u'(s)\| \leq C h^{r-1} \|u'(\overset{s}{\theta})\|_{r-1}$$

y sustituyendo en la anterior desigualdad

$$\begin{aligned} \|\theta\|_1^2 &\leq C_3 \left(\|u_h(0) - u(0)\|_1 + h^{r-1} \|u(0)\|_r \right)^2 + \\ &+ C^2 h^{2(r-1)} \int_0^t \|u'(s)\|_{r-1}^2 ds \end{aligned}$$

y como

$$\begin{aligned} \|\sigma(t)\|_1 &= \|P_1 u - u\|_1 \leq C h^{r-1} \|u(t)\|_r \leq \\ &\leq C h^{r-1} \left[\|u(0)\|_r + \int_0^t \|u'(s)\|_r ds \right] \end{aligned}$$

finalmente con

$$\|\tilde{u}_h(t) - u(t)\|_1 \leq \|\theta\|_1 + \|\sigma\|_1$$

concluimos el teorema #.

BIBLIOGRAFIA

1. Becker E.B., Carey G.F., Oden G.T.
Finite Elements. An introduction. Volume I
Ed. Prentice-Hall, New Jersey, 1981.
Apartado 6.5 para una introducción escueta en el tema.
2. Carey G.F., Oden J.T.
Finite Elements. Computational Aspects. Volume III
Ed. Prentice-Hall, New Jersey, 1984.
Apartado 5.2. para el planteamiento y estudio de la estabilidad de los distintos esquemas.
Apartado 5.4. para una discusión sobre las matrices de capacidad calorífica diagonales.
3. Dhatt G., Touzot G.
Une presentation de la méthode des éléments finis.
Ed. Les Presses de l'Université Laval, Québec, 1981.
Apartado 5.4.1., 5.4.2. para los métodos de Euler y apartado 5.4.3. para el método de integración analítica.
4. Ferragut L.
MINIMEF: Un programa de elementos finitos destinado a actividades docentes y de investigación.
Ed. E.T.S. Ingenieros de Minas de Madrid, 1985.
Para la resolución de ejemplos prácticos.
5. Lapidus L., Pinder G.F.
Numerical solution of partial differential equations in --
science and engineering.
Ed. Wiley, New York, 1982.
Apartado 4.11 para un resumen del tema.
6. Michavila F., Winter G., Elorza J.
El método de los elementos finitos y aplicaciones.
Ed. E.T.S.I. Industriales. Universidad Politécnica de Las Palmas, 1984.
Capítulo 5 para un resumen del tema.

7. Raviart P.A., Thomas J.M.
Introduction a l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles.
Ed. Masson, Paris, 1983.
Apartado 7.4. para el estudio del error de semidiscretización en espacio y 7.5 para el estudio de la discretización total.
8. Segerlind L.J.
Applied finite element analysis.
Ed. Wiley, New York, 1976.
Capítulo 11 para un resumen del tema.
9. Zienkiewicz O.C.
El método de los elementos finitos.
Ed. Reverté, Barcelona, 1980.
Capítulo 20 para el planteamiento y resolución por métodos semianalíticos. Capítulo 21 para el estudio de diversos esquemas de discretización de la variable tiempo: los apartados 21.2 a 21.4 están dedicados a ecuaciones de primer orden en la variable tiempo.
10. Zienkiewicz O.C., Morgan K.
Finite elements and approximation.
Ed. Wiley, New York, 1983.
Capítulo 7.