Introducción al lenguaje formal y técnicas de demostración orientadas a las Titulaciones de la Facultad de Economía y Empresa

Proyecto ID2018/128 [1] [2]

VNiVERSiDAD
Ð SALAMANCA

M. AURORA MANRIQUE, amg@usal.es
FEDERICO CESTEROS, fcesteros@usal.es
BERNARDO GARCÍA-BERNALT, bgarcia@usal.es
J. MANUEL CASCÓN, casbar@usal.es
M. DOLORES GARCÍA, dgarcia@usal.es
GUSTAVO SANTOS, santos@usal.es

Dpto. Economía e Historia Económica
Facultad de Economía y Empresa
Edificio FES
Campus Miguel de Unamuno, Salamanca

Salamanca, 28 de junio de 2019

[1] Este proyecto ha sido parcialmente financiado por el Programa de Ayudas de la Universidad de Salamanca a Proyectos de Innovación y Mejora Docente Curso 2018-2019 y por la Facultad de Economía y Empresa de la Universidad de Salamanca.

[2] Repositorio Gredos: http://hdl.handle.net/10366/139614

Contenido

Prefacio

Hace casi trescientos años el filósofo inglés Francis Hutcheson (1694-1746) publicó en Londres el que es considerado como el primer tratado sistemático sobre Estética, esa rama de la Filosofía que estudia la belleza, tanto en sí misma como relacionada con la percepción que tenemos de ella. El título de esta pequeña obra, de apenas un centenar de páginas, es muy explícito: *Una investigación acerca del origen de nuestra idea de belleza*. Tras el prefacio, el autor desarrolla en ocho secciones su teoría. Hasta ahí todo entra dentro de lo esperado. Pero quizá te sorprenda saber que la tercera de estas secciones tiene por título *Sobre la belleza de los teoremas*. ¡Así que, el primer tratado de Estética que se escribe dedica una parte sustancial de su contenido a la belleza de los teoremas, que es casi como decir a la belleza de las Matemáticas! Suponemos que si llevas peleando con las funciones, las derivadas, los límites o los vectores desde la enseñanza secundaria, y afrontas con una cierta aprensión cualquier materia de contenido matemático que vayas a encontrarte en tus estudios universitarios, la idea de Hutcheson te parecerá un tanto excéntrica. ¡A quién se le ocurre disertar sobre la belleza de los teoremas! Pero, además, si comienzas a leer esa sección, en el primer parágrafo dice algo todavía más contundente: *La belleza de los teoremas, o verdades universales demostradas, merece una consideración distinta, pues es de una naturaleza muy diferente de los anteriores tipos de belleza. Sin embargo, en ninguno de ellos se ve tan asombrosa variedad con uniformidad, y de aquí emana un enorme placer, distinto del que produce la previsión de cualquier provecho ulterior*. Un teorema no solamente es bello, según Hutcheson, sino que además de él emana un enorme placer.

Es muy probable que a medida que has ido leyendo lo anterior te hayas ido volviendo cada vez más escéptico. Es perfectamente entendible, puesto que en muchos sentidos tus conocimientos matemáticos se centran en un cúmulo de técnicas y herramientas que usas con mayor o menor acierto, pero que para ti no son más una especie de recetas, cuyo significado esencial desconoces, y que además se expresan en un lenguaje simbólico que no te resultan nada agradable. Siendo así, ¿cómo se puede hablar de belleza o de placer?

En los últimos años la enseñanza de las Matemáticas en nuestro país ha ido derivando paulatinamente hacia terrenos puramente instrumentales, dejando de lado muchas veces la esencia del hacer matemático: la demostración. Seguro que conoces unos cuantos resultados matemáticos, es posible que incluso muchos, pero si te preguntas su por qué, si quieres demostrar que son ciertos, entonces la cosa cambia. Y esto ocurre incluso con proposiciones básicas que llevas utilizando desde hace ya muchos años. ¿Sabrías demostrar el teorema de Pitágoras? ¿Por qué hay infinitos números primos? ¿Por qué la suma de los cuadrados del seno y coseno de un ángulo vale uno? ¿Por qué la derivada de x^3 es $3x^2$?... La lista de preguntas de este tipo podría ser muy larga. No nos cabe ninguna duda de que sabes hallar la hipotenusa de un triángulo rectángulo si conoces sus catetos, o derivar perfectamente funciones de una variable. Pero la cuestión no es esa ahora. Muchas veces sabes responder al *cómo*, pero muchas menos veces al *por qué*. Y sin duda eso es un problema, porque, por ejemplo, cualquier alteración que modifique mínimamente las condiciones iniciales requeridas para el uso de una técnica te priva de poder utilizarla.

Este es el principal motivo de haber escrito las páginas que siguen. En ellas pretendemos, en primer término, acercarte al lenguaje y la escritura matemática. En muchas ocasiones la escritura formal y simbólica supone un obstáculo importante en tu estudio, y te predispone en contra de los propios contenidos impidiendo aproximarte a ellos. Como cualquier otro idioma, el lenguaje matemático tiene sus códigos, sus reglas del juego que hay que conocer, así como todo un sistema de notación simbólica que es necesario manejar. Y no hay que confundir toda esta estructura formal con el contenido en sí. En ocasiones, al estudiar y hacer matemáticas, los árboles no nos dejan ver el bosque. Revisaremos también brevemente algunas cuestiones elementales de lógica, de esa lógica que todos utilizamos (o deberíamos utilizar) en nuestra vida diaria. Los tipos de proposiciones, el valor de un ejemplo o un contraejemplo, los sistemas inductivos, etc.

La parte central de este documento se dedica a la demostración en sí, con sus distintos tipos y clasificaciones. Pero lo que es sustancial es el ofrecerte estrategias de demostración, muchas de las cuales surgen de nuestra propia experiencia como estudiantes y como profesores de Matemáticas aplicadas a la Economía y la Empresa. Obviamente, estas páginas no pueden ser un manual de instrucciones para hacer demostraciones. Si así fuera estaríamos contradiciendo nuestro propio objetivo. Es un material que pretende ir al fondo del propio proceso creativo (y por tanto bello y placentero) que hay en la demostración matemática, sugiriendo ayudas y lugares donde buscar o donde dirigir la mirada. Como la Beatriz de Dante solo pretendemos ser guías que te acompañan en un viaje que, ciertamente, puede ser fascinante.

Encontrarás en estas páginas numerosos ejemplos, algunas referencias a la historia de las Matemáticas y, cómo no, menciones a varios matemáticos y alguna de sus aportaciones. Y también hallarás unos cuantos ejercicios que te servirán para poner en práctica algunas de las habilidades que, esperamos, puedas adquirir. Este es un aspecto fundamental porque, al igual que uno aprende a caminar caminando, también se aprende a demostrar demostrando. Lo importante, como nos recuerda Cavafis en su conocido poema *Ítaca* no es tanto el destino como el propio camino; te deseamos, por tanto, un hermoso y largo viaje.

Los autores

Agradecimientos

Este proyecto ha sido parcialmente financiado por el Programa de Ayudas de la Universidad de Salamanca a Proyectos de Innovación y Mejora Docente Curso 2018-2019 y por la Facultad de Economía y Empresa de la Universidad de Salamanca.

Capítulo 1

Los sistemas matemáticos de símbolos y la escritura matemática

1.1. Introducción: algún ejemplo y un círculo vicioso

Con seguridad cualquiera de los que vamos a leer estas páginas sabemos resolver una ecuación de segundo grado. Lo aprendimos cuando teníamos doce o trece años, y es una de las cosas que no se olvidan. Pero pensemos por un momento que tuviéramos que explicar con palabras, sin utilizar símbolo alguno, cuáles son las soluciones de la ecuación. Tendríamos que organizar un poco nuestras ideas y finalmente llegaríamos a redactar un párrafo que, más o menos, se parecería a este:

> *Las soluciones de la ecuación son dos. Una de ellas es un cociente en el que el numerador es el coeficiente que multiplica a la incógnita, cambiado de signo, más la raíz cuadrada de ese mismo coeficiente al cuadrado menos cuatro veces el producto del coeficiente que multiplica a la incógnita elevada al cuadrado y el término independiente, y el denominador es el doble del coeficiente que multiplica a la incógnita elevada al cuadrado. La segunda solución es otro cociente en el que el numerador es el coeficiente que multiplica a la incógnita, cambiado de signo, menos la raíz cuadrada de ese mismo coeficiente al cuadrado menos cuatro veces el producto del coeficiente que multiplica a la incógnita elevada al cuadrado y el término independiente, y el denominador es el doble del coeficiente que multiplica a la incógnita elevada al cuadrado. Esta segunda solución coincidirá con la primera, cuando lo que hay bajo la raíz (que se llama el discriminante de la ecuación) es nulo.*

Es muy posible que si le damos el párrafo anterior a un alumno de enseñanza secundaria que comienza a estudiar las ecuaciones de segundo grado, y después le pedimos que resuelva una, sea incapaz de hacerlo. Lo más probable es que ni siquiera tenga ánimos para leer todo el párrafo y a la mitad haya desistido de entenderlo. A pesar de ello la información que le hemos proporcionado es correcta y resulta suficiente y pertinente para dar las soluciones.

Sin embargo, si hubiéramos dicho

$$\textit{Las soluciones de la ecuación } ax^2 + bx + c = 0 \textit{ son } \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

explicando con claridad qué queremos indicar con el signo $\pm$, entonces el resultado posiblemente hubiera sido otro, y el alumno de secundaria hubiera resuelto el ejercicio siempre que no tuviera cálculos demasiado complicados y las raíces fueran reales. De hecho, cuando vamos a resolver una ecuación de este tipo, lo que se nos viene a la cabeza es, precisamente, la expresión simbólica $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, que es la que permanece en nuestra memoria.

En esta segunda manera de enunciar la solución general del problema hemos utilizado signos que representan objetos (los coeficientes de la ecuación) que se relacionan por medio de operaciones, también representadas por símbolos que siguen ciertas reglas o, si se prefiere, que se ajustan, como nuestro lenguaje cotidiano, a una cierta sintaxis (estas son las operaciones de suma y resta, el producto, el cociente, elevar al cuadrado y hallar la raíz cuadrada, no en este orden, obviamente). Esta expresión simbólica ha sustituido un párrafo prolijo y confuso por un objeto que nos resulta mucho más fácil de recordar, de aplicar y también de transmitir. Realmente el sistema de símbolos ha actuado en este caso concreto como una especie de lenguaje esquemático que nos ha permitido traducir de modo literal el largo texto del comienzo a una sola línea más sencilla.

Pero no es raro encontrar situaciones en las que, al menos aparentemente, sucede lo contrario. Por ejemplo, si tenemos una sucesión $\{a_n\}$ de números reales, un número ℓ será límite de la misma si fuera de cualquier intervalo centrado en ℓ solo hay un número finito de puntos de la sucesión. La idea es muy intuitiva, y mediante un dibujo aclaratorio, puede quedar perfectamente entendida y fijada en la memoria. Por su parte, una representación simbólica formal de esta misma idea sería:

$$\ell \textit{ es límite de la sucesión } \{a_n\} \Leftrightarrow \forall\, \epsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N}; n \geqslant n_0 \Rightarrow |x_n - \ell| < \epsilon$$

Ahora se han invertido los papeles. En este caso es la expresión simbólica la que nos parece prolija y difícil de recordar, y no resulta inmediato el poder conectarla con el objeto matemático antes definido que aquella representa. Para ello, entre otras cosas, es necesario hacer un proceso previo de conexión entre algunos símbolos *clave* de la expresión y lo que están representando. Por ejemplo, hemos de caer en la cuenta de que ϵ representa un tamaño (una longitud de radio del entorno), n_0 una cierta posición de un término en la sucesión y $|x_n - \ell|$ la distancia entre x_n y ℓ.

Algunos de los problemas con los que se enfrenta un estudiante en las materias de matemáticas tienen mucho que ver con todo lo anterior. Y las dificultades se hacen aún mayores si lo que estudia tiene para él un carácter fundamentalmente instrumental, como es el caso de los estudiantes de una Facultad de Economía y Empresa. Las matemáticas se ven entonces exclusivamente como una herramienta para resolver ciertos ejercicios y problemas, dejando de lado otra de sus capacidades fuertemente instrumentales: la de ser un lenguaje de modelización y análisis especialmente eficaz. No es raro que alguien sepa derivar y, sin embargo, no tenga una idea medianamente clara de lo que es la derivada de una función, a pesar de ser algo que está en el núcleo de conceptos económicos como las funciones marginales o la elasticidad. Es como si entre símbolo y significado hubiera en ocasiones un abismo infranqueable, y a priori renunciáramos a entender un enunciado (ya sea una definición, una proposición, un problema o incluso un mero ejercicio técnico) si su expresión simbólica tiene un aspecto que nos parece complejo.

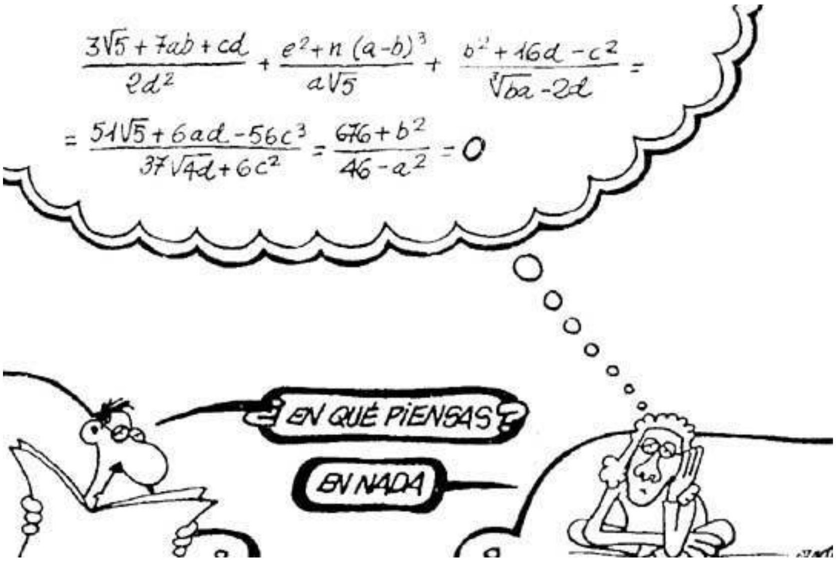
Vamos a hacer una prueba. Supón que en un examen has de optar por contestar a una de estas dos cuestiones:

a.- Halla la derivada de $f_1(x) = e^{\ln \frac{2x^2+sen x}{x^2+2}} \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg}(x^2+2)) - \operatorname{sen} x$

b.- Halla la derivada de $f_2(x) = (x+2)^{2x}$

Es prácticamente seguro que después de haber mirado ambas opciones te habrías decantado por realizar el ejercicio *b*. Realmente $f_2(x)$ es una expresión sencilla, pero si no has memorizado bien la tabla de derivadas, o ha pasado un poco de tiempo desde que la estudiaste, es posible que cometas algún error. La expresión que aparece en *b* es una función elevada a otra función, $y = f(x)^{g(x)}$, y entonces $y' = f(x)^{g(x)}(g'(x)ln(f(x)) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)})$, que es una fórmula difícil de memorizar (en todo caso recuerda que la puedes deducir tomando logaritmos y derivando). Por su parte, el aspecto de la función que aparece en la opción *a* te habría hecho desestimarla sin tomarte ni medio minuto para mirarla con cierto detenimiento. Sin embargo hubiera valido la pena porque $e^{\ln \frac{2x^2+\operatorname{sen} x}{x^2+2}} = \frac{2x^2+\operatorname{sen} x}{x^2+2}$ y $\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg}(x^2+2)) = x^2+2$ (la función exponencial y el logaritmo son funciones inversas, como también lo son el arco tangente y la tangente) con lo que $f_1(x) = 2x^2$, y de modo inmediato habrías deducido $f_1'(x) = 4x$.

Con toda seguridad en tus años de estudiante de matemáticas te habrás visto en situaciones parecidas, y es posible que la mera apariencia de una expresión simbólica



te haya asustado y ni siquiera hayas sido capaz de empezar. Está claro que es preciso conocer bien los símbolos y su sintaxis (las reglas del juego, si prefieres llamarlo así), para poder entender y manejar estas expresiones, pero además de eso es imprescindible evitar la actitud de rechazo inicial. En ocasiones basta simplemente con observar durante un tiempo el enunciado, la fórmula o lo que sea, y no ponerse inmediatamente a hacer transformaciones. Ese sería un primer consejo: *mira atentamente la expresión antes que cualquier otra cosa, y mírala además sin anticipar las operaciones que creas que vas a tener que hacer.*

Pongamos un ejemplo más que nos puede servir para aclarar lo que acabamos de decir. Te proponemos un nuevo ejercicio:

$$\textit{Estudia la siguiente ecuación: } \frac{2x^2+8x+8}{(x+2)^2} = 1$$

Seguramente tu primer impulso será desarrollar el denominador, multiplicar por él en ambos lados y resolver la ecuación resultante. La solución obtenida así es $x = -2$.

En vez de ello observa de nuevo la expresión con calma. Si lo haces quizás te des cuenta de que el numerador es $2(x^2+4x+4) = 2(x+2)^2$, es decir, que es el doble que el denominador, de modo que esa fracción vale 2, nunca puede ser igual a 1. La ecuación no tiene solución. ¿Qué ocurre entonces si hacemos las cuentas y obtenemos que $x = -2$? Simplemente que ese valor no tiene sentido en este caso, pues anula el denominador y una de las *reglas del juego* es que no se puede dividir por 0. Probablemente si te hubieras lanzado a hacer cálculos nada más ver el problema habrías dado la solución $x = -2$ por válida sin percatarte de esto. En muchas ocasiones los automatismos (*hacer cuentas* puede considerarse un proceso automático) obstaculizan tener una visión real de lo que se está haciendo. Alguien dijo, quizá siendo un poco exagerado, que *cuando empiezan los cálculos se acaba el pensar*; que sea o no así depende, claro está, de uno mismo. El matemático Hans Freudenthal (1905-1990) brinda un segundo consejo; *debemos estar siempre vigilantes e interrumpir las rutinas de los procesos de desarrollo y cálculo para cuestionar, profundizar, buscar significados y sacar conclusiones* ([15] p. 468 y ss.).

Cuando hacemos matemáticas -no solo al escribirlas, sino también al pensarlas- estamos constantemente usando signos, palabras o dibujos que representan algunos objetos matemáticos. La actividad matemática se desarrolla en un ámbito de representación simbólica, y este es un contexto que a su vez se transforma siguiendo unas ciertas reglas de procesamiento como pueden ser las de la lógica, la aritmética, el álgebra, etc. Aquí surge un problema de circularidad: en ocasiones accedemos al objeto matemático a través del sistema de representación simbólico que hayamos elegido y su sintaxis, y aunque no acabemos de entender qué es el objeto, el manejo de su representación con las correspondientes reglas de procesamiento acaba acercándonos a él. Por otra parte, el sistema simbólico solo adquiere pleno significado en la medida en que el objeto matemático lo tenga. Es como si el hablar acerca de un ente que no sabemos qué es nos ayudara a dotar de sentido y significado a ese ente; la mera manipulación técnica del símbolo puede servirnos para avanzar en la comprensión del objeto que representa. Y simultáneamente el sentido de esa manipulación deriva del sentido del objeto, y este puede no estar aun desvelado: estamos ante un círculo vicioso.

Por ejemplo, si nos preguntamos qué es una *variable* inmediatamente vendrán a nuestra mente símbolos como x, y o z, así como la multitud de expresiones y desarrollos en los que estos símbolos se nos han presentado. En buena medida hemos adquirido la noción de *variable* haciendo convivir pequeñas reflexiones sobre el sentido de lo que estábamos manejando con el propio manejo de expresiones en las que aparecían esas x, y o z, y es ese concepto de variable el que, a su vez, dota de su pleno significado a esas letras.

En nuestro proceso de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas esta circularidad está presente con mucha frecuencia. Anna Sfard afirma que el significado y los desarrollos discursivos formales son las dos piernas que nos hacen avanzar, precisamente porque nunca están en el mismo lugar y, de hecho, en cada momento, siempre una de ellas está por delante de la otra. ([29], p. 56). Reflexionando sobre este importante hecho el profesor Abraham Arcavi nos ofrece el que tomaremos como tercer consejo: *para* *aprender (y para hacer) matemáticas es necesaria paciencia intelectual para con la comprensión solo parcial de los objetos, y tener la confianza de que acciones futuras (de las que no sabemos de antemano ni cuáles son ni cuándo ocurrirán) harán avanzar nuestro conocimiento* [2].

En las páginas que siguen vamos a tratar de dar algunas herramientas que te ayuden a revisar y mejorar tu manejo y comprensión de los símbolos matemáticos, de modo que puedas sacar mayor partido a su potencialidad. Anotaremos previamente algunas características y problemáticas concretas y después revisaremos algunos de los sistemas simbólicos y abreviaturas que te encontrarás con más frecuencia. Para concluir, en un apéndice te ofreceremos pautas y sugerencias que creemos que te pueden ayudar a mejorar tu *escritura matemática*.

1.1.1. Ejercicios y cuestiones

1. En el contrato de alquiler de un coche se especifica que, aparte de un coste de c euros por cada kilómetro que se recorra con él, se ha de pagar una cantidad diaria que comienza siendo de f euros pero va disminuyendo si se alquila el coche para varios días. Concretamente, la cantidad que se paga cada día es el noventa por ciento de la que se pagó el día anterior. Di qué cantidad ha de pagar una persona que alquila el coche para 3 días y hace x_1 kilómetros el primer día, x_2 el segundo y x_3 el tercero. ¿Y si lo alquila para n días y el día i-ésimo hace x_i kilómetros $(i = 1 \dots n)$?

2. Un industrial fabrica tres tipos de lavadoras, cuyo coste unitario de producción es c_1, c_2, c_3, respectivamente. Si el precio de venta de cada tipo de lavadora es p_1, p_2, p_3, respectivamente ¿cuál es el beneficio del industrial cuando produce x_1 lavadoras del primer tipo, x_2 del segundo y x_3 del tercero? Si no hay ninguna otra restricción, ¿qué condiciones tienen que verificar los costes de producción y los precios de venta para que haya un plan de producción (esto es, una especificación del número de lavadoras de cada tipo que se fabrican) que haga máximo el beneficio? ¿Cuál sería, en ese caso, el plan de producción?

3. Una empresa de consultoría organiza un curso de formación sobre las novedades fiscales para el próximo año. Para ello alquila un aula por 1.250€, que tiene unos gastos de limpieza de 250€. Además, se imputan unos gastos de publicidad que ascienden a 300€. Para impartir dicho curso se debe contratar a un experto en la materia que cobra 40€ por alumno matriculado. Además presupuesta unos gastos de gestión que ascenderán a 10€ por cada alumno que siga el curso.

Por la parte de los ingresos, se estima que la cuota que se debe cobrar a cada alumno es de 200€. Además, se recibe una subvención de la Consejería de Empleo de 30€ por cada alumno matriculado.
Determina el número de alumnos que, como mínimo, deben matricularse en el curso para que se no produzcan pérdidas.

4. Prueba que:

$$\operatorname{sen}^2((x+y)(x-y)+y^{\ln e^2})+ \\ \cos^2(x\ln(e^x)\cos((x+y)^2-2xy-2y^2-(x+y)(x-y))=1$$

5. Plantea y resuelve el siguiente problema. La edad de Juan tiene dos cifras y la de su hermana menor María esas mismas cifras cambiadas de orden. Sabiendo que la suma de ambas edades es 55 y la diferencia 9, halla la edad de cada uno.

1.2. Características y problemática del lenguaje simbólico matemático

Aunque en el epígrafe anterior hemos puesto ya ejemplos de algunas de las ventajas e inconvenientes que presenta la utilización del lenguaje simbólico matemático, vamos a tratar este aspecto de un modo un poco más estructurado comentando algunas de sus características.

1. **Es un lenguaje universal.**
   Cualquier persona, de cualquier cultura, con conocimientos de matemáticas similares a los que en nuestro país tiene un estudiante de enseñanza media, al ver la expresión
   $$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$$
   sabe que C es la circunferencia centrada en el origen y de radio uno.
   La expresión en castellano sería:

   C es el conjunto de puntos del plano tales que la suma de sus coordenadas al cuadrado es 1, es decir aquellos cuya distancia al origen es igual a 1.

   El párrafo anterior será ininteligible sin embargo para cualquiera que no sepa nuestro idioma, como para la mayoría de nosotros lo sería si lo anterior hubiera estado escrito en sueco.

   Junto a otros aspectos relacionados con la capacidad modelizadora del lenguaje matemático, que veremos a continuación, este carácter universal del lenguaje simbólico es también un valor importante para ciencias ajenas a la matemática. En cierto sentido el lenguaje matemático se ha convertido en la lengua franca, la adoptada tácitamente por muchas disciplinas diferentes para facilitar la comunicación, tanto entre personas de distintas culturas, como entre estudiosos procedentes de distintas ramas del saber.

2. **Permite centrarse específicamente en los aspectos que afectan al modelo o problema, dejando de lado otras características no pertinentes. Esto facilita ofrecer soluciones generales aplicables a distintas situaciones**.

   Pongamos un caso que ilustre esta afirmación:

   Ejemplo 1.1. *Estás haciendo una ruta por el desierto y has de trasladarte desde un campamento a un oasis que está a una distancia de 200 kilómetros, pero no tienes agua para el viaje. Afortunadamente el campamento y el oasis están en el mismo margen de un canal cuyo trazado es recto y que dista 40 kilómetros del campamento y 90 del oasis. Has de planear tu ruta de modo que pases por el canal a recoger agua, pero como estás escaso de gasolina debes hacerlo de modo que el recorrido total sea lo menor posible.*

   Lo primero que harás será dibujar un mapa/esquema que dará un resultado parecido al de la Fig. 1.1. Este esquema es una representación

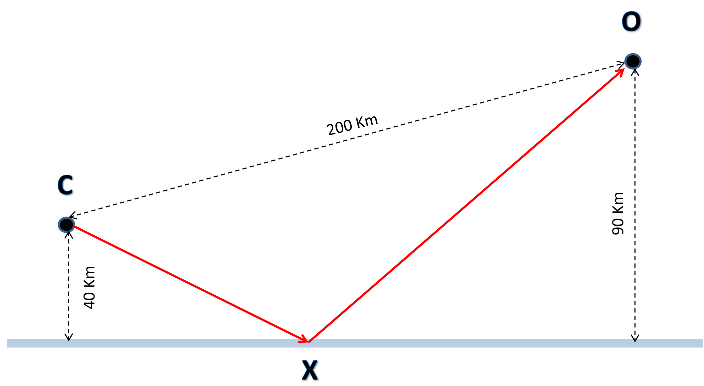


Figura 1.1: Problema de la ruta en el desierto

simbólica de carácter matemático, típica en la geometría. En él aparecen solamente los datos pertinentes al problema. No importa que estés en el desierto, que vayas de un campamento a un oasis, que haya agua o no... Para dar con la solución del problema van a ser fundamentales datos como la distancia entre los puntos C y O, y la distancia de estos al canal, al que hemos representado en la recta.

Y el esquema nos ha permitido también ver con claridad qué tipo de respuesta hemos de dar. Para definir una ruta de C a O que pase por el canal lo que hemos de decir es a qué punto concreto X del canal hemos de dirigirnos, de modo que la suma de longitudes $\overline{CX} + \overline{XO}$ sea mínima. Esa solución va a depender de los datos que nos han dado, pero en realidad las magnitudes concretas no van a intervenir en el proceso de solución, lo resolveremos con magnitudes genéricas (aparecerán nuevos símbolos) y una vez resuelto simplemente hemos de introducir los datos que nos han dado. En definitiva, nuestro problema ha pasado a convertirse en el siguiente:

Dados dos puntos que no pertenecen a una recta, y están ambos en el mismo semiplano de los dos que esta delimita, calcular la trayectoria más corta de uno a otro que pase por la recta.

La solución a este problema la tienes en la Fig. 1.2. Sea C' un punto simétrico a C respecto a la recta r. Si unimos C' con O el punto de corte de este segmento con la recta r es el X buscado. Basta con darse cuenta

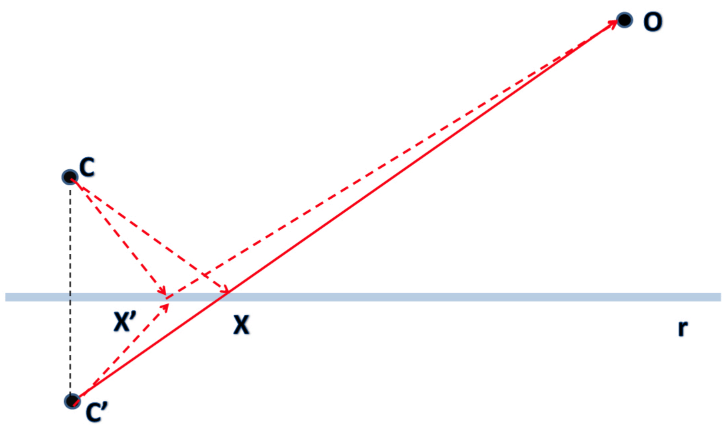


Figura 1.2: Distancia más corta entre dos puntos pasando por una recta

de que si tomamos cualquier otro $X' \neq X$ entonces

$$\overline{CX'} + \overline{X'O} = \overline{C'X'} + \overline{X'O} > \overline{C'O} = \overline{CX} + \overline{XO}$$

Observa que el procedimiento es general, sean cuales sean las distancias que nos han dado.

Ejemplo 1.2. Seguro que alguna vez habrás jugado al billar. Si es así, sabes que una de las primeras cosas que se han de practicar es dar con una bola a otra rebotando previamente en una banda de la mesa. Es decir, nos planteamos la siguiente pregunta:

A qué punto de la banda he de apuntar para que la bola B_1 rebote en ese punto y después vaya a dar a la bola B_2.

Nuevamente el lenguaje simbólico más adecuado para modelizar este problema es típico de la geometría. En esta ocasión lo que sabemos es que el ángulo menor de los que forma la banda con la trayectoria de llegada de la bola B_1 (α) es igual al ángulo menor de los que forma con la trayectoria de salida después de rebotar (β). Este ángulo depende, obviamente, del punto X de la banda donde golpee la bola, con lo que nos encontramos con el siguiente planteamiento:

Dados dos puntos B_1 y B_2 que no pertenecen a una recta, y están ambos en el mismo semiplano de los dos que esta delimita, calcular el punto X que verifica que el ángulo α que forman el segmento B_1X y la recta coincida con el ángulo

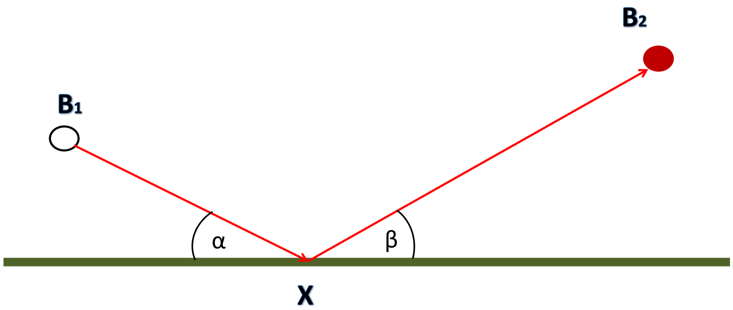


Figura 1.3: Práctica para la carambola a una banda

β que forma esta con XB_2. (Fig. 1.3)

El planteamiento tiene muchas similitudes con el del problema anterior; los dibujos de ambos parecen idénticos. De hecho, si vamos al esquema de la solución (Fig. 1.2) vemos que la recta es bisectriz del ángulo $\widehat{CXC'}$ y como consecuencia los correspondientes a α y β en la Fig. 1.3 son iguales. La solución es exactamente la misma (Fig. 1.4) y vemos que problemas distintos pueden ser resueltos con el mismo lenguaje simbólico y de la misma manera, puesto que desde el punto de vista puramente geométrico son en realidad el mismo problema.

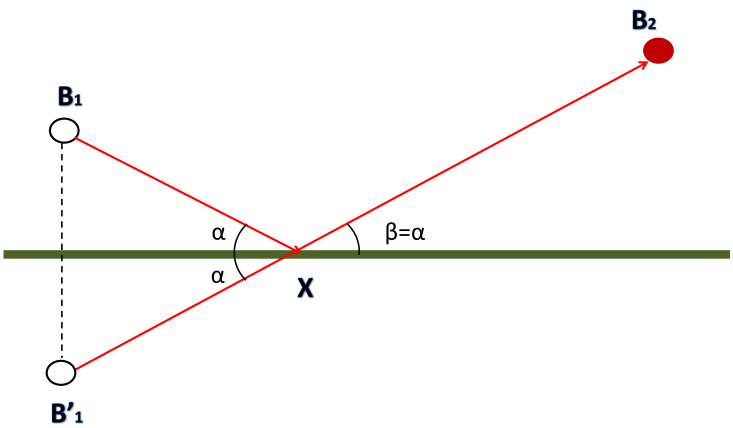


Figura 1.4: Solución del problema del billar

3. **Los símbolos y sistemas simbólicos no son una mera representación taquigráfica. En general están construidos sobre una cierta ordenación de las ideas que facilita los procesos**

   Un ejemplo muy esclarecedor en este sentido es el de la numeración. El matemático italiano Giuseppe Peano (1852-1932) publicó en 1915 un pequeño artículo titulado *Importanza dei simboli in Matematica* [22] donde se refiere a este asunto y lo explica con mucha claridad:

   > *Los símbolos más antiguos y hoy más difundidos son las cifras de la aritmética 0, 1, 2, etc., que nosotros recibimos de los árabes cerca del 1200 y estos, a su vez, de los hindúes, que las utilizaban desde el año 400. La primera ventaja que se observa en las cifras es su brevedad; los números escritos en cifras indo/árabes son mucho más breves que los mismos números escritos con todas sus letras en nuestro idioma, y también son en general más breves que los mismos números escritos con las cifras romanas I, X, C, M. Pero un examen ulterior nos hace ver que las cifras no son solo puros símbolos taquigráficos, es decir simples abreviaturas del lenguaje común, sino que constituyen una nueva clasificación de las ideas. Así si las cifras 1, 2, ... 9 corresponden a las palabras « uno, dos, ... nueve ». Sin embargo las palabras «diez o cien» ya no corresponden a símbolos simples, sino a los símbolos compuestos «10, 100». Y el símbolo 0 no tiene ningún equivalente en el lenguaje vulgar; nosotros lo leemos con la palabra del árabe cero; los alemanes y los rusos usan la palabra latina nulla [null/noll]. El simbolismo no consiste en la forma de los símbolos; los europeos usamos las cifras con una forma fijada después de la invención de la imprenta, y muy distinta de la forma de las cifras indo-árabigas[...] La utilización de las cifras no solo sirve para abreviar la escritura, sino que sirve esencialmente para que los cálculos aritméticos sean más fáciles, y por lo tanto sean posibles ciertos trabajos, y permite obtener resultados que, de otra manera, prácticamente no se podrían obtenter.*

   Peano sigue poniendo el ejemplo de cómo la sustitución de las cifras griegas por las hindúes permitió hacer aproximaciones del valor del número π considerablemente mejores en poco tiempo. Algo similar a lo que ocurre con la numeración pasa también con los signos aritméticos $(+, -, ../\ =, > \ \ldots)$ que no solo reducen enormemente las expresiones (ya lo vimos en el primer ejemplo que pusimos), sino que además permiten operar cómodamente en ellas. Estos signos representan ideas y procedimientos, no meras palabras.

Figura 1.5: Giuseppe Peano

4. **Los símbolos pueden tener significados distintos dependiendo del contexto en que se utilizan**.
   Algunos autores señalan cómo el poder de las matemáticas reside realmente en que un pequeño número de símbolos y de afirmaciones simbólicas pueden ser utilizados para representar un conjunto amplio de situaciones distintas ([28], p. 374). Que el conjunto de símbolos no sea excesivamente grande se debe, en parte, a la multiplicidad de significados que pueden tener, lo que reduce la cantidad de notación. Pero hay otro aspecto interesante derivado de esta multiplicidad: en ocasiones un símbolo puede actuar como referencia a un sistema ajeno al que se está utilizando, creando o analizando, y pone en evidencia conexiones con aquel. Un ejemplo es la utilización del símbolo de cociente en la diferencial de una función $y = f(x)$, es decir, la expresión $\frac{dy}{dx}$ que no tiene un sentido aritmético pero nos recuerda que en la base de la idea hay una razón (un cociente) entre la variación de la función y la de la variable.

   Los ejemplos de múltiples significados de la misma expresión son abundantes. Así, dependiendo del contexto en que esté siendo usado (a, b) puede ser un intervalo abierto de la recta real, un vector de $\mathbb{R}^2$ o un punto del plano. En todo momento debes ser consciente de estas posibilidades y saber a cuál de todas ellas se refiere una expresión concreta. El análisis de las cercanías del símbolo suele dar datos suficientes. Si lees la frase: «sea c un número real que pertenece a (a, b)», está claro que (a, b) se refiere a un intervalo; no tendría sentido decir que un número real pertenece a un vector, o a un punto del plano. Es decir, lo que siga a la expresión *pertenece a* debe ser necesariamente un conjunto, luego (a, b) será un conjunto con números reales, precisamente el intervalo abierto (a, b). Incluso, dentro de una misma fórmulación un símbolo puede tener dos significados distintos dependiendo de su contexto. Si f y g son funciones reales de una variable como las que tú conoces, en la expresión $y = (f + g)(x)$ los paréntesis que encierran la suma de f y g hacen referencia al resultado de una operación entre dos funciones (la función suma de ambas), mientras que los que encierran a x indican aquel elemento al que se ha de aplicar la función, es decir aquel elemento cuya imagen hallamos.

5. **El mismo objeto puede ser representado con símbolos y sistemas simbólicos distintos, y en ocasiones la elección del sistema de representación adecuado es el punto clave para alcanzar un resultado o entender un concepto**

   Podemos volver sobre el mismo ejemplo anterior: el intervalo (a, b) podría también representarse por $]a, b[$ o por el conjunto $I = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$. Aunque dos representaciones simbólicas distintas definan el mismo objeto, puede que una sea más adecuada que la otra para una situación concreta.

   Pongamos otro ejemplo: es muy habitual que cuando alguna expresión tiene radicales de algún tipo te encuentres incómodo. Muchos estudiantes al ver una expresión algebraica con raíces cuadradas, cúbicas, etc., tienden de modo inmediato a tratar de eliminarlas de algún modo. Supón que tuvieras que realizar el siguiente ejercicio:

Ejemplo 1.3. *Halla*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\sqrt[3]{n^7}\sqrt[6]{n^4}} - \sqrt{n^3}}{\sqrt{n^3 - n^2 + \sqrt[3]{n^2 - 2}}}$$

Como sabes otro modo de escribir la expresión $\sqrt[n]{a^m}$ *es* $a^{\frac{m}{n}}$. *Si lo escribimos así podemos utilizar unas «reglas del juego» bien conocidas (para multiplicar potencias de la misma base se suman los exponentes, potencia de potencia se multiplican exponentes...). La expresión anterior pasa a ser*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n^{7/3}n^{4/6})^{1/2} - n^{3/2}}{(n^3 - n^2 + (n^2-2)^{1/3})^{1/2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{3/2} - n^{3/2}}{(n^3 - n^2 + (n^2-2)^{1/3})^{1/2}} = 0$$

El poder representar el mismo objeto de distintos modos, aunque parece que puede crear confusión, suele jugar a nuestro favor. Volvamos de nuevo al ejemplo 2 del apartado anterior (el problema del billar). Para resolverlo utilizamos un lenguaje simbólico muy particular: un dibujo. Supón que te hubieras encontrado con ese problema en un momento en el que estabas aprendiendo las ecuaciones de las rectas en el plano, pendientes, ángulos que forman con los ejes, etc. Es muy probable que entonces tus esfuerzos se hubieran centrado en determinar analíticamente el punto X, poniendo ecuaciones de rectas, hallando puntos de corte,... El problema se resolvería pero de un modo posiblemente más engorroso y, sobre todo, menos intuitivo.

1.2.1. Ejercicios y cuestiones

1. Lewis Carroll (1832-1898), conocido como autor de *Alicia en el país de las maravillas* o *Alicia a través del espejo*, era, entre otras cosas, un matemático especialmente interesado por la lógica y por la enseñanza. Entre 1880 y 1885 publicó en la revista *The Monthly Packet*, una serie de problemas y acertijos matemáticos que reunió en un pequeño libro que tituló *A tangled tail* (Un cuento enmarañado [5]). Muchos de estos problemas/acertijos ilustran lo que hemos dicho hasta ahora, y evidencian el poder de las construcciones simbólicas en los planteamientos. Por supuesto te recomendamos su lectura (puedes encontrar la referencia al final del texto), pero como aperitivo te dejamos aquí alguna muestra.

Figura 1.6: Charles Ludwitge Dogson (Lewis Carroll)

   a) Una plaza cuadrada tiene a cada lado 20 puertas que lo dividen en 21 partes iguales. Se han numerado todas empezando por una esquina. ¿Desde cuál de las cuatro puertas nº 9, 25, 52 y 73, es menor la suma de las distancias a las otras tres?

   b) Un vaso de limonada, 3 sandwiches y 7 galletas cuestan 14 peniques. Un vaso de limonada, 4 sandwiches y 10 galletas cuestan 17 peniques. Da el precio de:

      - Un vaso de limonada, un sandwich y una galleta.
      - Dos vasos de limonada, 3 sandwiches y 5 galletas.

c) Entre los enfermos del hospital para mutilados de guerra de Chelsea el 70 % ha perdido un ojo, el 75 % una oreja, el 80 % un brazo y el 85 % una pierna. ¿Qué porcentaje, como mínimo, ha perdido las cuatro cosas?

2. Plantea y resuelve los dos problemas que te damos a continuación, y explica por qué en realidad ambos se resuelven por el mismo procedimiento.

   a) Una pelota se deja caer desde una altura de 3 metros. Sabiendo que en cada bote la pelota sube hasta una altura que es dos terceras partes de aquella desde la que cayó, calcula cuántos metros ha recorrido la pelota en trayectorias ascendentes y descendentes cuando toca por novena vez el suelo.

   b) Una persona recibe en un sorteo un sueldo anual de 30.000 euros durante 10 años. Como prefiere tener todo el capital en el momento actual a ir recibiéndolo anualmente decide ir a su banco. La entidad le ofrece una cantidad de dinero en la que ha retenido un 5 % anual de los futuros sueldos. ¿Qué cantidad le ofrece el banco?

3. Dos trenes están a 200 km de distancia viajando el uno hacia el otro a 50 km por hora cada uno. Desde un tren una mosca parte al encuentro del otro, volando sobre los rieles a una velocidad de 75 km por hora, toca el tren que viene hacia ella y regresa al encuentro del primer tren de nuevo. Esto se repite hasta que los trenes chocan. ¿Qué distancia recorre la mosca hasta que es aplastada por ambos trenes? Resuelve este problema e indica si pertenece a la misma familia de problemas del ejercicio anterior. Si es así, ¿puedes encontrar un modelo de solución más sencillo?

4. Indica qué significa la expresión (a, b) en cada uno de los siguientes enunciados

   a) Si (a, b) es un elemento de $\mathbb{R}^2$ entonces para cualquier número real λ se verifica que $\lambda(a, b)$ también es un elemento de $\mathbb{R}^2$.

   b) (a, b) pertenece a $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 = y\}$.

   c) Sean a, b y c números reales. Si c pertenece a (a, b) entonces $a < c < b$.

1.3. Símbolos matemáticos

Antes de pasar a enumerar algunos de los símbolos matemáticos que utilizarás con más frecuencia observa que, tal y como se ha comentado antes, mientras algunos sustituyen objetos definidos otros, sin embargo, representan ideas o reglas de transformación. Entre los primeros están, por ejemplo, el número 2, la letra π o el intervalo de números reales $[0,1]$. Sin embargo el símbolo x, la *variable* x, en la expresión $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ representa todo un conjunto de números (de hecho puede ser cualquier número real) y en la expresión $x^2 - 4x + 3 = 0$ representa número(s) desconocido(s) (incógnitas) cuyo valor podemos determinar (solución). Por otro lado símbolos como $+$, $\times$ están representando acciones. Sobre la historia de los símbolos matemáticos puede resultarte curioso e interesante el libro de Raúl Rojas cuya referencia tienes al final de este trabajo [23].

1.3.1. Denominación de constantes y variables

Letras

Si cualquiera de nosotros ve la ecuación $ax + b = 0$ inmediatamente resolvemos dando el valor para x. No nos paramos a pensar que cualquiera de las tres letras que aparecen puede ser la incógnita, porque estamos completamente acostumbrados a utilizar las letras x, y o z para designar las incógnitas y las variables. El origen de esta costumbre lo encontramos en el tratado *La Geometrie* de René Descartes (1596-1650), que es uno de los tres textos científicos que siguen al *Discurso del método*, publicado en 1637 ([8]). Este trabajo es el primero que se lee como un libro de álgebra de los que tenemos en nuestros días; en él se utiliza un sistema simbólico que permite abordar problemas geométricos con lenguaje algebraico, y problemas algebraicos con lenguaje geométrico, tal y como hemos hecho en algunos de los ejemplos anteriores. En *La Geometrie*, Descartes decide utilizar las primeras letras del alfabeto latino para nombrar las constantes y las últimas para las variables, y esa costumbre ha permanecido ya en los textos matemáticos desde entonces.

Ya sabes que las letras del alfabeto latino (tanto mayúsculas como minúsculas) se usan para denominar constantes o variables. Habitualmente *la misma letra cuando es mayúscula designa una cosa y cuando es minúscula otra distinta.* En este sentido, dependiendo de la rama de las matemáticas se siguen distintas convenciones. Te enumeramos aquí algunas:

- Es habitual que los conjuntos se designen por letras mayúsculas y sus elementos con minúsculas ($A = \{a, b, c, d, e\}$).

- En trigonometría los vértices de los triángulos se suelen designar con letras mayúsculas y sus lados opuestos con la misma letra, pero minúscula.

- Es frecuente denotar las constantes con k o con c.
- Cuando una variable pertenece al conjunto de los números naturales lo habitual es que se designe con las letras n o m (por ejemplo en $e = \lim_{n\to\infty}(1 + 1/n)^n$).
- Las funciones se designan normalmente con las letras f, g y h.
- En matemática financiera la variable tiempo suele designarse por t, el tipo de interés efectivo por i, el tipo de interés nominal por $j(m)$ y el tipo de descuento por d. Los capitales financieros suelen denotarse C_t, donde C será la cuantía del capital y t su vencimiento, de modo que en una operación financiera con n periodos C_0 será el capital inicial y C_n el final.

Estas y otras similares son puras convenciones, al igual que lo es el uso de la x o la y para designar variables; seguir estos acuerdos tácitos hace que nuestros textos matemáticos sean más fáciles de entender y tengan un carácter aún más universal.

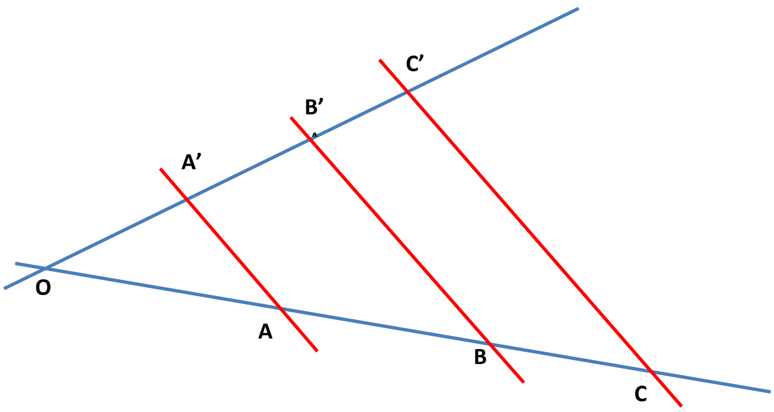
Has de tener cuidado con el uso de la letra e en contextos que se puedan prestar a confusión, puesto que como sabes e representa el número de Euler (o contante de Napier) $2,7182818284\ldots$ Aunque la primera referencia a esta constante es del matemático escocés John Napier (1550-1617), introductor del concepto de logaritmo, sería Leonhard Euler (1707-1783) quien generalizara el uso de la letra e y determinara varias de sus propiedades fundamentales.

Asimismo, cuando se trabaja con números complejos la unidad imaginaria se representa por $i = \sqrt{-1}$, por lo que deberás evitar utilizar esta letra con otro significado cuando estés en ese contexto.

Cuando las variables son pocas a veces se designan a todas con la misma letra añadiendo apóstrofos, (a, a', a'', a''' y leeremos *a, a prima, a segunda, a tercera*, etc.). Esta notación es útil cuando existen relaciones especiales entre las variables o magnitudes que tienen la misma letra asociada. Un caso que ejemplifica muy bien la utilidad de esta notación es el teorema de Thales (Fig. 1.7). Has de tener cuidado y no usar los apóstrofos para diferenciar funciones, puesto que, como sabes, si f es una función real de variable real, f' designa su función derivada, f'' la derivada segunda y así sucesivamente.

También es muy frecuente usar en matemáticas letras griegas. En lel cuadro 1.1 tienes el alfabeto griego y el nombre castellanizado de cada una de esas letras. Nuevamente hay algunas de ellas que tienen ya un significado muy concreto.

- El número representado por π es la razón entre la longitud de la circunferencia y su diámetro ($\pi = 3,14159\ldots$).



$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{OA}{OA'} = \frac{OC}{OC'} = \frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{BC}{BC'}$$

Figura 1.7: Teorema de Thales

- El número representado por ϕ el número áureo ($\phi = 1,61803\ldots$).
- La sigma mayúscula Σ se utiliza como símbolo de sumatorio y la pi mayúscula Π como símbolo del producto.
- En Estadística las letras β y Γ se utilizan para denotar cierto tipo de distribuciones.
- Normalmente en análisis matemático se denotan con ϵ números reales mayores que cero que son arbitrariamente pequeños, es decir, ϵ representa un *tamaño* (longitud) tan pequeño como queramos (quizá lo recuerdes de la definición de límite de una sucesión).
- La letra delta mayúscula Δ se emplea para denotar diferencias finitas. Si recuerdas, la has utilizado en la definición de derivada para expresar el incremento de la variable x:
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x)}{\Delta x}$$

Emparentado con la forma de la letra Δ está el *operador nabla* cuyo símbolo es ∇, es decir, la delta mayúscula girada ciento ochenta grados. La nabla ($\nu\alpha\beta\lambda\alpha$) era un instrumento musical de la antigua Grecia, con diez o doce cuerdas, parecido al arpa, con

May.	**min.**	**En castellano**
A	α	Alfa
B	β	Beta
Γ	γ	Gamma
Δ	δ	Delta
E	ϵ, ε	Epsilon
Z	ζ	Dseta, zeta
H	η	Eta
Θ	θ, ϑ	Theta
I	ι	Iota
K	κ	Kappa
Λ	λ	Lambda
M	μ	Mi, mu
N	ν	Ni, nu
Ξ	ξ	Xi
O	o	Ómicron
Π	π	Pi
P	ρ	Rho
Σ	σ, ς	Sigma
T	τ	Tau
Υ	υ	Ípsilon
Φ	ϕ, φ	Fi (phi)
X	χ	Ji, chi
Ψ	ψ	Psi
Ω	ω	Omega

Cuadro 1.1: El alfabeto griego

una forma similar a ∇. El símbolo fue intruducido por el matemático irlandés William R. Hamilton (1805-1865). Te encontrarás con ∇ en el cálculo diferencial con funciones de varias variables, designando el vector gradiente de una función en un punto, cuyas coordenadas son las derivadas parciales en ese punto. Si f es una función real de n variables, $x_1, \ldots x_n$, entonces $\nabla f(a) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a))$, que es un vector que marca la dirección de máxima variación de la función en el punto a.

En matemáticas se utiliza también la primera letra del alfabeto hebreo, $\aleph$, que se llama *aleph*, para referirse a algunos números transfinitos. $\aleph_0$ representa el cardinal del conjunto de los números naturales (que coincide con el de los enteros y los racionales). Por su parte $\aleph_1 = 2^{\aleph_o}$ representa el cardinal de los números reales, es decir, el número de puntos de la recta real.

Índices

Cuando las variables son muchas -eventualmente infinitas- no es práctico (ni siquiera posible en ocasiones) asignar una letra a cada una. En ese caso utilizaremos subíndices o superíndices para designarlas. Este modo de proceder no solo sirve para denominar todas las variables sino también para disponer de ellas de un modo ordenado. Es importante indicar cuál es el recorrido que tienen esos índices, es decir, qué valores pueden tomar. Así, por ejemplo, si tenemos doscientos bienes, cada uno con su precio, podemos ordenarlos de algún modo y después denotar por p_i el precio del bien que hemos colocado en el *i-ésimo* lugar. En este caso los valores que puede tomar i serán todos los números naturales del 1 al 200 ($i = 1 \ldots 200$). Observa que un paso previo a denominar los precios ha sido el ordenar los bienes o, si prefieres etiquetarlos con los números entre el 1 y el 200.

Veamos otro ejemplo. Si tenemos una sucesión de números reales lo habitual es designar al término de la sucesión que ocupa el lugar *n-ésimo* por a_n. En este caso el orden de los objetos, los términos de la sucesión, nos viene dado y n puede tomar cualquier valor entre los números naturales ($n \in \mathbb{N}$). Cuando se utiliza esta notación no debe olvidarse que n no toma un valor concreto, sino cualquier valor de entre los naturales. Así, por ejemplo, la expresión $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ debe interpretarse como sigue: *cada término de la sucesión es suma de los dos que le preceden*.

También podemos necesitar indicar los elementos de conjuntos de objetos que no pueden numerarse. En ese caso el conjunto de índices no podrá ser el de los números naturales. Por ejemplo, el conjunto de circunferencias de radio 1 que hay en el plano no puede numerarse, pero podríamos poner un índice a cada una asignándoles el punto que es su centro, es decir C_p sería la circunferencia de radio 1 centrada en el punto p del plano ($p \in \mathbb{R}^2$). También hubiera sido posible haber utilizado un doble subíndice escribiendo las coordenadas del punto p. Entonces $C_{(a,b)}$ denotaría la circunferencia de radio 1 centrada en el punto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

El uso de índices múltiples, como el caso anterior, a veces es muy útil para tener perfectamente clasificadas e identificadas las variables. Por ejemplo, supón que mezclando 200 ingredientes distintos has de fabricar 100 tipos de productos que se diferencian por la distinta proporción de esos ingredientes que cada uno de ellos tiene. Si numeramos ingredientes y productos podemos denotar por $x_{n,m}$ la proporción del ingrediente $n-$ésimo que tiene el producto $m-$ésimo, es decir, si $x_{120,75} = 0,05$ esto indica que en la composición del producto 75º hay un 5 % del ingrediente 120º.

La notación con dobles índices es habitual en el álgebra matricial. Si A es una matriz que tiene n filas y m columnas, habitualmente se denota por a_{ij} al término genérico que está en la columna j-ésima de la i-ésima fila, y escribiríamos $A = (a_{ij})$. Esta notación simplifica notablemente algunas definiciones. Por ejemplo, si $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ son dos matrices cuadradas con n filas y m columnas, entonces definiríamos la suma de ambas como la matriz con n filas y m columnas $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$.

Todo lo que hemos hecho con subíndices podríamos haberlo hecho también con superíndices, o incluso podemos hacer indicación múltiple mezclando ambos. Por ejemplo podríamos haber denotado el término a_{ij} de la matriz por a_i^j y, en este caso, el subíndice indicaría la fila y el superíndice la columna donde se encuentra el término. Has de tener cuidado al utilizar o leer los superíndices, puesto que pueden confundirse con una potencia; la expresión anterior podría leerse como *el número a_i elevado a j*. Como ya indicamos antes, si es una cosa u otra se inferirá del contexto.

La utilización de subíndices se combina a veces, como veremos más adelante, con símbolos que denotan alguna transformación u operación como la suma, el producto, la intersección, la unión, etc.

1.3.2. Símbolos matemáticos más comunes

$\boxed{\mathbb{N} \mid \mathbb{Z} \mid \mathbb{Q} \mid \mathbb{I} \mid \mathbb{R} \mid \mathbb{C}}$ Conjunto de los números: *naturales* | *enteros* | *racionales* | *irracionales* | *reales* | *complejos*

Esta es la tipografía con la que se designan normalmente los conjuntos de números. La letra coincide con la inicial del nombre en castellano, salvo en el caso de los números enteros y los racionales. Los enteros se denotan por $\mathbb{Z}$ tomando la primera letra de la palabra *número* en alemán: Zahl. Racional deriva de la palabra latina *ratio* (razón) y los números racionales son, como sabes, razones, cocientes de números enteros; la palabra latina para cociente es *quotus*, de donde deriva directamente el término *quotient* que se utiliza en inglés, francés o alemán; por eso a los números racionales los designamos por $\mathbb{Q}$.

$\boxed{\infty \mid -\infty}$ *infinito* | *menos infinito*

Quien propuso utilizar el símbolo ∞ para representar el infinito fue el matemático inglés John Wallis (1616-1703), y enseguida fue adoptado por la comunidad científica. En realidad el símbolo es la gráfica de una curva llamada lemniscata cuya gráfica está en la Fig. 1.8.

El concepto de infinito es algo muy complejo. Puede verse como un proceso iterativo que nunca termina (infinito potencial), o bien como un todo, como una unidad existente (infinito actual). Siempre ha atraído a muchos matemáticos, especialmente desde finales del siglo XIX. Entre ellos están Georg Cantor (1845-1918), Richard Dedekind (1831-1916), L. E. J. Brower (1881-1966), Henri Poincaré (1854-1912), o David Hilbert (1862-1943). Este último aseguraba que la idea del infinito es la que más ha espoleado la imaginación de los hombres y la que más ha movido y fructificado a la razón. Es, sin duda, un tema apasionante, pero que escapa completamente de nuestro objetivo en estos apuntes. Solamente recuerda que ∞ y $-\infty$ no se comportan como números reales, sino que tienen propiedades singulares como por ejemplo $\infty + \infty = \infty$ o $x\infty = -\infty$ si x es un número real negativo, entre otras.

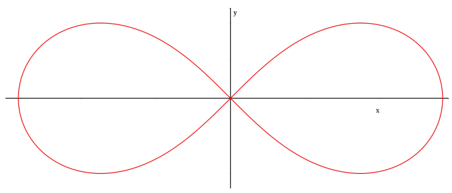


Figura 1.8: Curva lemniscata de ecuación $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$

$\boxed{= \mid \neq}$ *igual a* | *distinto a*

El símbolo $=$ aparece en más del noventa por ciento de las expresiones matemáticas. Se sitúa siempre entre dos términos que designan o definen el mismo objeto, y que, por tanto, han de ser de la misma categoría. Por ejemplo $3 + 4 = 6 + 1$ indica que la suma de los números 3 y 4 da el mismo resultado que la suma de los números 6 y 1. La expresión $2x = y$ indica que la variable y toma el doble del valor que la variable x. No tiene sentido una expresión en la que el símbolo $=$ se sitúe entre objetos de categorías distintas, como, por ejemplo, $(a, b) = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{2n^2+n}{n^3}$.

Muy frecuentemente las igualdades se encadenan, y entonces todos los miembros de la cadena son iguales entre sí ($3 + 2 = 5 = \sqrt{25}$).

El símbolo $\neq$ es la negación del anterior. Se ha de tener en cuenta que si se encadenan varios términos con el signo $\neq$ no todos los miembros han de ser distintos dos a dos. Es decir, si $a \neq b \neq c$ no tiene por qué verificarse que $a \neq c$; puede ser que $a = c$.

$\boxed{+ \mid - \mid *, \times, \cdot \mid \div, /}$ *suma, más* | *resta, menos* | *producto, por* | *división, partido por*

Junto con la igualdad estos son los primeros símbolos matemáticos que aprendiste y llevas utilizando mucho tiempo. No nos vamos a detener en ellos, solo haremos algunas observaciones puntuales.

Es habitual, como sabes, que el símbolo del producto se omita, es decir, no escribimos $a \times b$ ni $a \cdot b$ sino simplemente ab y leemos a por b o solo ab. Hemos incluido entre los signos del producto el asterisco $*$ puesto que este es el que se utiliza en algunos de los programas informáticos de matemáticas.

El cociente entre a y b lo expresamos normalmente como a/b o $\frac{a}{b}$ y leemos *a partido por b* o *a entre b*. La expresión a/b no tiene sentido alguno si $b = 0$.

Recuerda que estas operaciones están jerarquizadas (el producto y el cociente se realizan antes que la suma o la resta si no hay símbolos de agrupamiento como paréntesis o corchetes).

$\boxed{\pm \mid \mp}$ *más menos* | *menos más*

Estos símbolos permiten agrupar dos fórmulas en una sola. Si aparecen en alguna formulación, esta se desdobla leyendo primero los signos superiores y posteriormente los inferiores. Por ejemplo la expresión

$$a \pm b \mp c + 2d = 0$$

es equivalente al sistema:

$$a + b - c + 2d = 0 \text{ y } a - b + c + 2d = 0$$

$\boxed{(\ ) \mid [\ ] \mid \{\ \} \mid \langle\rangle \mid |\,|}$ *paréntesis* | *corchetes* | *llaves* | *corchetes angulares* | *valor absoluto de*

Los tres primeros se utilizan frecuentemente como símbolos de agrupamiento para operaciones algebraicas, e indican un nivel de preferencia, señalando la secuencia en la que se han de realizar las operaciones. En primer lugar se debe resolver la operación que está entre paréntesis ( ), después la comprendida entre corchetes [ ] y finalmente la que encierran las llaves { }, como puedes ver en la siguiente expresión:

$$\{2 \cdot [3 \cdot (2+4)2 \cdot (1+3)] + 5\} \cdot (3+4) = \{2 \cdot [3 \cdot 6 + 2 \cdot 3] + 5\} \cdot 7$$

$$= \{2 \cdot 24 + 5\} \cdot 7 = \{48 + 5\} \cdot 7 = 53 \cdot 7 = 371$$

Como sabes es muy habitual utilizar solamente el paréntesis como signo de agrupamiento en las operaciones algebraicas. En ese caso se ha de proceder comenzando por resolver las operaciones desde los paréntesis interiores hacia fuera, como en el siguiente ejemplo:

$$5 \cdot (3 \cdot (5 \cdot (6+2) + 2)) = 5 \cdot (3 \cdot (5 \cdot 8 + 2)) = 5 \cdot (3 \cdot 42) = 5 \cdot 45 = 225$$

Recuerda que estos símbolos de agrupamiento siempre van por parejas simétricas, de manera que no tiene ningún sentido que quede uno de ellos aislado; cualquier paréntesis, corchete o llave que se abre debe cerrarse.

Los paréntesis y corchetes se utilizan también, como ya sabes, para representar intervalos de la recta real. Así, $[a, b]$ es el intervalo cerrado de extremos a y b, (a, b) el intervalo abierto, $[a, b)$ el cerrado por la izquierda y abierto por la derecha y, $(a, b]$ el abierto por la izquierda y cerrado por la derecha.

Los paréntesis tienen muchos usos para agrupar elementos, por ejemplo designando una matriz así: $A = (a_{ij})$, o para indicar que un operador actúa sobre el objeto que le sigue que está entre paréntesis, por ejemplo la expresión $f(x)$ indica que hallamos la imagen del elemento x por la función f.

Las llaves { } tienen también otro uso relacionado con los conjuntos que veremos un poco más adelante.

Los corchetes angulares tienen significados específicos que dependen del contexto. En tu caso los encontrarás para denotar el subespacio generado por un conjunto de vectores, $\langle e_1, \dots, e_n \rangle$.

Los delimitadores de valor absoluto || deben tener entre ellos una expresión que defina un número real, y su significado es $|a| = a$ cuando $a > 0$ y $|a| = -a$ cuando $a < 0$. Dicho de otro modo: $|a| = \sqrt{a^2}$. Recuerda que el valor absoluto tiene algunas propiedades características de las distancias como $|a - b| = |b - a|$, $|a + b| \leqslant |a| + |b|$ o $|a - b| \leqslant |a - c| + |c - b|$.

$\boxed{\sum \mid \prod}$ *sumatorio (suma desde... hasta...)* | *producto desde... hasta... (¿productorio?)*

El sumatorio ($\sum$) es un operador que permite representar abreviadamente sumas con muchos sumandos (incluso infinitos). Los sumandos se expresan generalmente como una variable con un índice, o una expresión algebraica que contiene un índice. Este recorre un subconjunto de los números enteros (que puede ser de cardinal finito o infinito); empieza tomando el valor que aparece en la parte inferior del sumatorio y se va incrementando en una unidad hasta llegar al valor que aparece en la parte superior del sumatorio. Por ejemplo:

$$\sum_{i=1}^{5} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

$$\sum_{i=1}^{5} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$$

El operador $\prod$ sigue una sintaxis completamente análoga pero en esta ocasión los términos no se suman sino que se multiplican (queremos señalarte que la palabra productorio no está recogida en el diccionario de la Real Academia de la Lengua Española, y sin embargo sumatorio sí).

Estos operadores no son más que abreviaturas de la suma y producto respectivamente, de modo que siguen las mismas reglas que estas operaciones y tienen las mismas propiedades que ellas.

A veces, cuando las variables tienen varios índices, los operadores pueden ir anidados. Siempre ejecutaremos primero el que está más próximo a la variable. Por ejemplo:

$$\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{2} a_{ij} = \sum_{j=1}^{3}(a_{1j} + a_{2j}) = a_{11} + a_{21} + a_{12} + a_{22} + a_{13} + a_{23}$$

$$\sum_{j=1}^{3}\prod_{i=1}^{4} a_{ij} = \sum_{j=1}^{3}(a_{1j}a_{2j}a_{3j}a_{4j}) = a_{11}a_{21}a_{31}a_{41} + a_{12}a_{22}a_{32}a_{42} + a_{13}a_{23}a_{33}a_{43}$$

$\boxed{\ldots, \vdots, \ddots}$ *y así sucesivamente hasta* | *etc.*

Estos símbolos se utilizan en sucesiones o progresiones con un número arbitrario (finito o no) de términos, que pueden estar indexados con subíndices o superíndices. El símbolo evita escribir todos ellos. En el caso de una cantidad finita de términos al lado izquierdo del símbolo $\dots$ (encima en el caso de $\vdots$ y encima a la izquierda en el caso de $\ddots$) se colocan los primeros términos y a la derecha (abajo, abajo a la derecha, respectivamente) los últimos. Por ejemplo, en la lista $1, 2, 3, \dots, 18$ los puntos se ponen en lugar de la sucesión de números naturales mayores que 3 y menores que 18. Leeríamos *1, 2, 3, y así sucesivamente hasta 18*. En $2, 4, \dots, 2n$ lo puntos sustituyen a los números pares mayores que 4 y menores que 2n. En la siguiente matriz con 7 filas y 8 columnas se utilizan las tres posiciones (horizontal, vertical y diagonal) de este símbolo:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{18} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{28} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{71} & a_{72} & \cdots & a_{78} \end{pmatrix}$$

En otras ocasiones el símbolo tiene el mismo sentido que en nuestro lenguaje la expresión etcétera (etc.). Por ejemplo si escribimos:

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,61803\dots$$

los puntos indican que la sucesión de números decimales sigue hasta el infinito (este número que acabamos de escribir es, como sabes, la razón áurea y su nombre es la letra griega phi, ϕ). Si escribo

$$l = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

los primeros puntos indican que seguimos sumando las fracciones con numerador 1 y denominador las potencias de 2 desde 2^4 hasta llegar a 2^{n-1}, y los segundos indican que seguimos sumando todas las fracciones con numerador 1 y denominador 2^m donde m es cualquier número natural mayor que n.

$\boxed{! \mid \binom{n}{m}}$ *factorial de* | *símbolo binomial n sobre m*

El símbolo de factorial «!» se sitúa después de un número entero $n \geqslant 0$ y significa: $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$. Recuerda que $n!$ es el número de permutaciones que pueden hacerse con n elementos distintos. Por convenio $0! = 1$. Observa que hecha esa afirmación para 0! podríamos definir $n! = n((n-1)!)$; así a partir de 0! definimos 1!, una vez definido este podemos definir 2! y así sucesivamente. El símbolo «!» fue introducido a finales del siglo XVIII por el matemático alemán Chirisian Kramp (1760-1826), e inicialmente fue rechazado por algún matemático. Augustus de Morgan (1806-1871) por ejemplo decía que al usarlo parecía que nos sorprendía que los números $1, 2$ o 3 aparecieran en resultados matemáticos ([17] p. 444).

Por su parte, si n y m son números naturales y $n \geqslant m$ el símbolo binomial $\binom{n}{m}$ denota el número de combinaciones que pueden hacerse con n objetos tomados de m en m. Fue introducido con algunas variantes primero por Euler, y más tarde fue simplificado por Andreas F. von Ettingshaussen (1796-1878). Recuerda que:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

$\boxed{< \mid \leq, <= \mid > \mid \geq, >=}$ *menor que* | *menor o igual que* | *mayor que* | *mayor o igual que*

Estos símbolos deben estar siempre entre dos elementos que pertenezcan a un conjunto ordenado (es decir, dotado de una relación binaria reflexiva, antisimétrica y transitiva) y hacen referencia precisamente a esa relación. Lo habitual es que tú los utilices comparando números reales, racionales, enteros o naturales.

Los símbolos se pueden encadenar en desigualdades e igualdades sucesivas siempre que tengan el mismo sentido, es decir $<$ se puede encadenar consigo mismo y con uno o varios $\leq$ o $=$, y $>$ consigo mismo y con uno o varios $\geq$ o $=$. Si en una de estas cadenas de números y desigualdades los extremos son iguales entonces todas las desigualdades han de ser igualdades o, en caso contrario, hay una contradicción: si $a \leqslant b \leqslant a$ entonces $a = b$; la cadena $a < b < a$ no es posible. Observa que si en la misma cadena se mezclan símbolos en mayor (o igual) con otros en menor (o igual) no hay información alguna relativa al sentido de la desigualdad entre los extremos (si $a \leqslant b \geqslant c$ entonces pueden ocurrir todas las posibilidades entre a y c es decir podría ser que $a = c$, $a < c$ o $c < a$).

$\boxed{\prec \mid \preceq \mid \sim \mid \succ \mid \succeq}$ *estrictamente menos preferido a* | *menos preferido o indiferente a* | *indiferente a* | *estrictamente preferido a* | *preferido o indiferente a*

Estos símbolos se utilizan habitualmente en Economía para designar las relaciones de preferencia. Por tanto se sitúan siempre entre dos posibilidades de elección de un agente económico (dos bienes que se pueden consumir, dos cestas de la compra...). En un sentido muy general se podría establecer un paralelismo entre ellos y las desigualdades del apartado anterior. Por su parte el símbolo $\sim$ sería similar a $=$. Sin embargo has de tener cuidado y no manejarlos exactamente igual, puesto que, dependiendo del modelo que se esté estudiando, las propiedades de las relaciones de preferencia pueden variar y no coinciden con las que verifican las relaciones de orden en los conjuntos de números que manejas habitualmente. Así, por ejemplo, algún modelo puede contemplar relaciones de indiferencia que no sean transitivas; el bien a puede ser indiferente al b y el b indiferente al c, y sin embargo a y c no ser indiferentes entre sí (por el contrario, la relación de igualdad es transitiva siempre).

$\boxed{\vee \mid \wedge \mid \neg}$ *disyunción, o | conjunción, y | negación, no*

Los símbolos de disyunción y conjunción han de estar siempre entre dos proposiciones (enunciados que son verdaderos o falsos y no ambas cosas) y el signo de negación precede siempre a una proposición. En el siguiente capítulo te recordaremos cuáles son las reglas del juego con estas operaciones lógicas y algunas propiedades que las relacionan, por lo que no vamos a detenernos aquí en este aspecto. Nos limitaremos a ponerte algún ejemplo. Que $(a = b) \vee (b = c)$ quiere decir que b es igual a a o a c (ambas cosas pueden ser también ciertas). $(x^2 = 4) \wedge (x \geqslant 0)$, equivale a decir que x^2 vale 4 y x es positivo (por tanto necesariamente $x = 2$). La proposición $\neg(a = b)$ equivale a $a \neq b$.

$\boxed{\Rightarrow \mid \Leftarrow \mid \Leftrightarrow}$ *implica, si ... entonces ... | para ... es suficiente ... | si y solo si*

Estos símbolos aparecen en la mayoría de las proposiciones, lemas y teoremas matemáticos. Son conectores lógicos, por tanto siempre se encuentran entre dos proposiciones. El símbolo $\Leftrightarrow$ es la identidad lógica; es decir, cuando se verifica $a \Leftrightarrow b$ en cualquier enunciado a puede ser sustituido por b y viceversa.

Se pueden construir cadenas con los signos $\Rightarrow$ y $\Leftrightarrow$ simultáneamente, y también con $\Leftarrow$ y $\Leftrightarrow$, pero no con $\Rightarrow$ y $\Leftarrow$ simultáneamente. Si hay una cadena de $\Rightarrow$ entonces la primera proposición de la cadena implica la última. Si la cadena tiene el sentido contrario ($\Leftarrow$), para la primera proposición de la cadena será suficiente la última. Por ejemplo: si $a \Leftrightarrow b \Leftrightarrow c$ entonces $a \Leftrightarrow c$; si $a \Rightarrow b \Leftrightarrow c \Rightarrow d$, entonces $a \Rightarrow d$; si $a \Leftarrow b \Leftarrow c$, entonces para a es suficiente c. Si tenemos la cadena $a \Rightarrow b \Leftarrow c$ entre a y c no tiene por qué existir un nexo lógico implicativo Por ejemplo: si llueve (a) cojo un paraguas (b); para coger el paraguas (b) es suficiente que me vaya de viaje (c); sin embargo de aquí no se deduce relación alguna entre que llueva y me vaya de viaje.

$\boxed{\{\ \} \mid \in \mid \notin}$ *conjunto formado por/definido por | pertenece a | no pertenece a*

La definición de un conjunto siempre se hace entre dos llaves $\{\ \}$. En el interior de ellas o bien se enumeran todos los elementos del conjunto separados por comas (definición por extensión), o bien se enuncia una propiedad que caracteriza a los elementos del conjunto, es decir, que todos ellos y solamente ellos la verifican (definición por comprensión). Por ejemplo puedo escribir que el conjunto $A = \{2, 4, 6\}$ o bien

$$A = \{\text{números naturales pares mayores que 1 y menores que 7}\}.$$

En este mismo ejemplo puedes ver que la definición de un conjunto por comprensión a veces puede hacerse de muchas maneras y lo habitual es que se haga utilizando simbología matemática.

En ocasiones los elementos del conjunto se subindican (o superindican) y se hace una definición por extensión poniendo entre las llaves el nombre de un elemento y fuera de ellas el recorrido de los subíndices. Por ejemplo $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sería el conjunto de los elementos de una sucesión de término general a_n. El recorrido de este conjunto de índices se podria haber escrito también así $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Los símbolos $\in$ y $\notin$ han de tener a su izquierda un elemento y a su derecha un conjunto. $a \in A$ indica que a es un elemento del conjunto A; $a' \notin A$ indica que a' no es un elemento del conjunto A. Observa que si A y B son conjuntos las expresiones $A \in B$ o $A \notin B$ carecen de sentido, pues a la izquierda de los símbolos de pertenencia y no pertenencia no hemos escrito un elemento, sino un conjunto.

El símbolo de pertenencia aparece en muchas definiciones. El conjunto A de los pares $2, 4$ y 6, que definimos antes, podríamos escribirlo:

$$A = \{n \in \mathbb{N}; n \text{ es par y } 1 < n < 7\}$$

Otro ejemplo puede ser la definición de un intervalo:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \text{ tal que } a \leqslant x \leqslant b\}$$

$\boxed{\forall \mid \exists \mid \nexists}$ *para todo* | *existe algún* | *no existe ningún*

Tras estos símbolos siempre aparece un elemento de algún conjunto, y se indicará que verifica una propiedad. Estos símbolos se denominan cuantificadores ($\forall$ es el cuantificador universal y $\exists$ el existencial), y aparecen en muchas de las definiciones y proposiciones que se dan en matemáticas. Si A denota el conjunto de los múltiplos de 4 y quiero escribir que todo múltiplo de cuatro es múltiplo de 2 podría hacerlo así:

$$\forall a \in A, \exists b \in \mathbb{Z} \text{ tal que } a = 2b$$

Como ves en este mismo ejemplo, no es nada extraño que en la misma definición o proposición aparezcan varios cuantificadores distintos. Más adelante vamos a estudiar los cuantificadores y sus propiedades desde distintos puntos de vista. Por el momento nos centramos solamente en su sintaxis, poniendo un par de ejemplos más.

Supongamos que has de escribir utilizando símbolos matemáticos esta proposición: «si me dan cualquier número real mayor que 0, por pequeño que sea, siempre existe un número natural tal que $\frac{1}{n}$ es más pequeño que él». Utilizando los símbolos y convenciones que han aparecido hasta ahora escribiríamos:

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } \epsilon < \frac{1}{n}$$

El símbolo $\nexists$ es la negación del cuantificador existencial. En el siguiente ejemplo puedes ver su relación con un cuantificador universal.

> La proposición «Si A es el conjunto de números naturales comprendidos entre 20 y 30, puedo afirmar que no hay ningún elemen-

to de A que sea múltiplo de 16» podría escribirla de esta manera:

$$\nexists a \in A \text{ tal que } \exists b \in N \text{ que verifica } a = 16b$$

Y también podría haberlo formulado de este otro modo:

$$\forall a \in A, \nexists b \in \mathbb{N}, \text{ tal que } a = 16b$$

$\boxed{\subset | \subseteq | \not\subseteq}$ *incluido estrictamente en* | *incluido en* | *no incluido en*

Estos símbolos han de estar situados siempre entre dos conjuntos. $A \subset B$ indica que A es un subconjunto estricto de B, es decir, que todos los elementos de A están en B, y hay algún elemento de B que no es de A, o lo que es lo mismo

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall a \in A \text{ se verifica que } a \in B \text{ y } \exists b \in B \text{ tal que } b \notin A$$

Por su parte $A \subseteq B$ solamente indica que todo elemento de A está en B (con lo cual se podría dar el caso de que ambos conjuntos sean iguales).

La expresión $A \not\subseteq B$ es la negación de lo anterior, es decir, que hay algún elemento de A que no está en B. Podríamos escribirlo:

$$A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists a \in A \text{ tal que } a \notin B$$

Por último observa que podríamos dar la siguiente definición: *Dados dos conjuntos A y B diremos que son iguales y escribiremos $A = B$ cuando*

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$$

Los símbolos de inclusión siempre han de situarse entre dos conjuntos, no entre un elemento y un conjunto. Si $a \in A$ no tendría sentido escribir $a \subseteq A$. Sin embargo si se considera el subconjunto de A formado exclusivamente por el elemento a sí puedo decir que ese subconjunto está incluido en A y tendría que escribir: $\{a\} \subseteq A$.

$\boxed{\bigcup | \bigcap | \varnothing}$ *unión* | *intersección* | *conjunto vacío*

Los símbolos de unión ($\cup$) e intersección ($\cap$) son operadores entre conjuntos. Como sabes $A \cup B$ es un nuevo conjunto cuyos elementos son todos aquellos que pertenecen a A o a B:

$$A \cup B = \{c \text{ tal que } c \in A \ \lor \ c \in B\}$$

Por su parte $A \cap B$ es el conjunto formado por aquellos elementos que pertenecen a A y a B:

$$A \cap B = \{c \text{ tal que } c \in A \ \land \ c \in B\}$$

El conjunto que no contiene ningún elemento, al que llamamos conjunto vacío, se representa por $\varnothing$.

Es interesante señalar la relación que los signos de unión e intersección tienen con los operadores lógicos de disyunción y conjunción. Esta relación se ha intentado representar con las propias formas de los símbolos, que claramente están emparentadas: $\cup$ con $\lor$ y $\cap$ con $\land$. A su vez el símbolo del conjunto vacío tiene una relación clara con el número entero 0.

Cuando hay varios conjuntos (eventualmente infinitos), y los tenemos indexados, podemos representar la unión e intersección de todos ellos poniendo el símbolo correspondiente al comienzo en un tamaño grande, indicando el recorrido del índice y tras esto el nombre genérico del conjunto. Es decir:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$

1.3.3. Abreviaturas

Algunas funciones y operadores (especialmente los que afectan solamente a la magnitud que les sigue) no tienen un símbolo específico y en su lugar se emplea una abreviatura. Esta está formada normalmente por las primeras letras del nombre del operador o función. En el cuadro 1.2 tienes una lista de las que utilizarás más comúnmente.

1.3.4. Ejercicios y cuestiones

1. Utilizando los símbolos que hemos visto define:

Abreviatura	**Se lee**	**Ejemplos de uso**
sen	seno de	$\operatorname{sen}\pi = 0$; $\operatorname{sen}(\frac{k\pi}{2})$
cos	coseno de	$\cos\pi = 1$; $\cos(\frac{k\pi}{2})$
tg, tan	tangente	$\operatorname{tg}(\pi/2) = \infty$; $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$
sec	secante de	$\sec\pi = 1$; $\sec(x) = \cos^{-1}(x)$
cosec	cosecante de	$\operatorname{cosec}\pi = \infty$; $\cos x \operatorname{cosec} x = 1/\operatorname{tg} x$
cotg, cot, ctg	ctangente de	$\cot(\pi/4) = 1$; $\cot x \operatorname{sen} x = \cos x$
log, lg, ln	logaritmo neperiano de logaritmo natural de	$\ln 3 = 1,0986\ldots$; $\log e^{\operatorname{sen} x} = 1/\operatorname{cosec} x$ Observación: En algunos contextos la abreviatura log puede hacer referencia al logaritmo en base 10
$\log_a$	logaritmo en base a de	$\log_a 2 = 0,301029\ldots$ $\log_a(bc^2) = \log_a b + 2\log_a c$
arcsen	arco seno de	$\operatorname{arcsen} 0 = k\pi$; $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} a) = a$
arccos	arco coseno de	$\operatorname{arcsen} 0 = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $\operatorname{arcos}(\operatorname{sen} a) = \frac{\pi}{2} - a$
arctg, arctan	arco tangente de	$\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} + k\pi$; $\operatorname{arctg}(\operatorname{sen} x/\cos x) = x$
arcsec	arco secante de	$\operatorname{arcsec} 0 = k\pi\frac{\pi}{2} + k\pi$; $\operatorname{arcsec}(\operatorname{cosec} a) = \frac{\pi}{2} - a$
arccosec	arco cosecante de	$\operatorname{arccosec} 1 = k\pi\frac{\pi}{2} + k\pi$; $\operatorname{arccosec}(1/\operatorname{sen} a) = a$
arccotg, arcctg, arccot	arco cotangente de	$\operatorname{arcctg} 1 = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $\operatorname{arcctg}(\cos x/\sin x) = x$
máx	máximo	$\text{máx}\{2,5,9\} = 9$; $\text{máx}\,[2,8] = 8$
mín	mínimo	$\text{mín}\ x^2 = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$; $\text{mín}\,[-2,\infty] = -2$
sup	supremo	$\sup\ \{1/n\}_{n=1}^{9} = 1$; $\sup\,[0,33) = 33$
ínf	ínfimo	$\text{ínf}\,(0,1) = 0$; $\text{ínf}\,\{1/n\}_{n=1}^{\infty} = 0$
lím	límite de	$\lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n^2})^{n^2} = e$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

Cuadro 1.2: Abreviaturas más comunes

a) El conjunto de provincias del País Vasco.

b) El conjunto de números enteros múltiplos de 3

c) El conjunto de números reales cuyo cuadrado es menor o igual que su valor absoluto. ¿Puedes definir este conjunto de dos maneras?

d) El conjunto de números enteros divisibles por un número natural n.

2. Sea a un número entero. Definimos $A = \{x \in \mathbb{Z} \text{ tal que } \exists b \in \mathbb{Z} \text{ tal que } x = ab\}$. Expresa con el menor número de palabras posible qué es el conjunto A.

3. Dos números enteros son primos entre sí cuando el único divisor común que tienen es el 1. Utilizando los símbolos estudiados define qué quiere decir que p y q son primos entre sí.

4. Utilizando lenguaje simbólico escribe qué quiere decir que el número natural m es el mínimo común múltiplo de los números naturales a y b.

5. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz con m filas y n columnas y $B = (b_{ij})$ una matriz con n filas y p columnas. Escribe la fórmula más breve que puedas para expresar el término que está en la fila i-ésima y columna j-ésima en la matriz producto de ambas, AB.

6. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Estudia y discute si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos.

   a) $a + b = a + c \Rightarrow b = c$

   b) $ab = ac \Rightarrow b = c$

   c) $ab = ac \Leftarrow b = c$

   d) $a = b = c \neq d \Rightarrow a \neq d$

   e) $a \geqslant b \geqslant c = d \Rightarrow a \geqslant d$

   f) $a \geqslant b \geqslant c = d \Leftarrow a \geqslant d$

   g) $(a \geqslant b) \vee (b \geqslant a) \Rightarrow a = b$

   h) $(a \geqslant b) \vee (b \geqslant a) \Leftrightarrow a = b$

   i) $(ab = 0) \ \wedge \ (bc = 0) \Leftrightarrow b = 0$ (siendo a, b y c distintos entre sí)

   j) $a + b \pm c = a \Rightarrow a = 0$

   k) $a \pm b \pm c = 0 \Rightarrow b = -c$

7. Sea $n \in \mathbb{N}$. Decide si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos.

   a) $(n!)^2 = (n^2)!$

   b) Si $x_n = (3n)!$ entonces $x_{n-1} = (3n-1)!$

   c) $(an)! = an!$

d) Si $x_n = (2n)!$ entonces $\dfrac{x_n}{x_{n-1}} = 4n^2 - 2n$

8. Sean $n, m \in \mathbb{N}, n \geqslant m$. Prueba que

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$$

9. Como recordarás, si n es un número natural y a y b son reales, se verifica:

$$(a+b)^n = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} a^{(n-i)} b^i$$

(Esta fórmula es conocida como el *binomio de Newton*). Desarrolla $(a+b)^5$.

10. Desarrolla:

$$\prod_{k=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \prod_{i=1}^{3} a_{ijk}$$

11. Halla:

$$\prod_{j=1}^{2} \prod_{i=1}^{3} 2^{i+j}$$

12. Sean A, B y C conjuntos. Escribe con símbolos los siguientes enunciados y discute si son ciertos o no.

    a) Si A está contenido estrictamente en B y B está contenido en C entonces A está contenido en C.

    b) Si A no está contenido en B ni en C entonces B y C son distintos.

    c) Si A está contenido en la intersección de B y C entonces A está contenido en la unión de B y C.

    d) Si A está contenido en B y B está contenido en A, entonces $A = B$.

    e) Si A está contenido en B y A está contenido en C, entonces $B \cap C$ es igual a A.

    f) A está contenido en B y A está contenido en C si y solo si A está contenido en $B \cap C$.

    g) $A = C$ si y solo si A está contenido en B y A está contenido en C.

13. Sean $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ infinitos conjuntos. Expresa con símbolos la siguiente proposición: *Si la intersección de todos esos conjuntos es distinta del conjunto vacío y hay algún*

elemento de la unión de todos ellos que no está en la intersección entonces alguno de los conjuntos tiene por lo menos dos elementos. ¿Es cierta esta afirmación? ¿Por qué?

1.4. APÉNDICE: Sugerencias para escribir matemáticas

> El problema básico para escribir matemáticas es el mismo que para escribir biología, una novela, o las instrucciones para montar un clavicémbalo: el problema es comunicar una idea. Para hacerlo, y para hacerlo con claridad, debes tener algo que decir, y debes tener alguien a quien decírselo; debes organizar lo que quieres decir, y organizarlo en el orden en que quieres decirlo; debes escribirlo, reescribirlo, y re-reescribirlo varias veces, y debes estar dispuesto a pensar mucho en ello y a trabajar firmemente en los detalles mecánicos como la dicción, la notación, y la puntuación. Eso es todo lo que hay que hacer.

La cita pertenece al matemático húngaro Paul R. Halmos (1916-2006)[16], y en realidad resume mucho de lo fundamental de esta sección. En tus estudios has tenido que escribir muchas veces matemáticas, y vas a tener que hacerlo también muchas veces a lo largo del grado que ahora empiezas. Escribirás en ese mismo lenguaje, además, en muchas asignaturas que no son matemáticas. Si abres cualquier manual de teoría económica, por ejemplo, te encontrarás con multitud de fórmulas y figuras intercaladas en el texto. Entre los editores de textos científicos, quizá el más utilizado es LaTeX, que es precisamente el que hemos usado para escribir estas notas. Si necesitas escribir un texto con muchas fórmulas, tablas, proposiciones, etc., por ejemplo para tu trabajo de fin de grado, posiblemente tengas que recurrir a ese editor. Pero, aparte de eso, diariamente has de tomar notas, elaborar tus apuntes de clase (esto es algo que es realmente importante en las disciplinas matemáticas), o entregar ejercicios y exámenes en los que has de escribir matemáticas correctamente. Lo cierto es que todos hemos aprendido a hacerlo viendo a nuestros profesores y leyendo libros de matemáticas, pero en estas líneas que siguen queremos darte algunas pautas de estilo para que tus escritos no sólo sean correctos sino que también tengan un aspecto agradable, sean claros y sigan los usos y convenciones comúnmente admitidos. Dado el tema de este primer capítulo, dedicaremos especial atención a las convenciones en cuanto al uso de los símbolos y fórmulas y como deben intercalarse con las palabras.

1.4.1. Cuestiones generales

1. Antes que cualquier otra cosa *tienes que tener muy claro qué es lo que quieres decir*. No puedes redactar a medida que se te van ocurriendo las cosas, entre otras razones porque a veces se llega a la resolución de un problema por un camino muy tortuoso, y una vez resuelto, hallas un método más directo. Debes organizar muy bien tus materiales y elegir siempre los caminos y expresiones más sencillas y que evidencien más el significado de lo que estás diciendo.

2. Debes *tener en cuenta para quién estás escribiendo*. No es lo mismo redactar tu trabajo de fin de grado, que escribir un ejercicio para explicárselo a tu hermano pequeño. Estas notas que estás leyendo están redactadas pensando en un alumno de primer curso de una Facultad de Economía y Empresa; la redacción (y contenido) hubieran sido distintos si estuvieran destinadas a alumnos de último curso de la ESO, o a estudiantes del grado en Matemáticas.

3. En cualquiera de los casos has de *usar un buen lenguaje*. Un texto de matemáticas no debe ser un compendio de símbolos y fórmulas, también hay muchas palabras. Tampoco es una estricta sucesión de lemas y teoremas sin reflexión y observación alguna. Tu estilo debe ser elegante y académico (sin caer en la pedantería), con una buena gramática, buena puntuación, riqueza de vocabulario, etc. Las palabras tienen muchos matices, úsalas correctamente.

4. *Las reglas que se utilizan para la redacción de textos se siguen manteniendo al escribir matemáticas*. Los signos de puntuación, los sangrados, los entrecomillados, el uso de las mayúsculas, etc. sigue exactamente las mismas reglas que si estuvieras escribiendo una carta, una redacción o una novela. Eso, como veremos, puede afectar a algún aspecto concreto del empleo de los símbolos.

5. *No utilices abreviaturas* en los escritos que han de leer otras personas. El uso masivo de los teléfonos móviles hace que la escritura se esté comprimiendo y empiece a ser general el empleo de abreviaturas como k por *que*, sk por *es que*, pk o $\times k$ en lugar de *porque*, *tb* por *también*, $+$ por *más*, $-$ por *menos*, $\times$ en vez de *por*... Aparte de que esto es un lenguaje coloquial no generalizado, y puede ser que alguien no te entienda, es posible crear confusión con los símbolos y letras con significado matemático. Sirva de ejemplo esta frase: *pq no es 0 pq p+q es + grande que p y q*.

6. Baltasar Gracián, en su *Oráculo manual y arte de prudencia* daba socarronamente este consejo :«No allanarse sobrado en el concepto», dando la siguiente razón:

«los más no estiman lo que entienden, y lo que no perciben lo veneran. Las cosas, para que se estimen, han de costar. Será celebrado cuando no fuere entendido». No le faltaba razón, y obviamente no debemos caer en este tópico. Por un lado *no identifiques lo confuso con lo profundo* y, por otro, intenta que tus explicaciones sean lo más claras posibles y, como ya hemos dicho, adaptadas a los conocimientos de quien va a leerte. Guíate por la afirmación del geómetra francés Joseph Diaz Gergonne (1771-1859), quien al parecer dijo: *una teoría matemática no está completa hasta que no se la puedes explicar a la primera persona que pase por la calle*.

1.4.2. Generalidades sobre el uso de los símbolos

En este apartado seguimos fundamentalmente las sugerencias hechas en el capítulo introductorio del manual de Chartrand, Polimeni y Zhang [7] junto con algunas observaciones hechas en el artículo de estilo de Javier Bezos [4] y el conjunto de normas generales relativas a números y numeración de la RAE [27].

1. Las normas relativas a la escritura de números arábigos son las de uso común en castellano:

    a) Si una cifra tiene una parte entera y una decimal ambas van separadas por una coma o un punto (no por un apóstrofo) sin espacios entre ellos y las cifras. Por ejemplo escribiremos $2,75$ o 2,75 pero no 2, 75 ni tampoco 2'75.

    b) Si tienes un número con bastantes cifras y quieres separarlo por millares para facilitar su lectura no utilices el punto, puesto que puede prestarse a confusión. La norma internacional es que en números de más de cuatro cifras estas pueden agruparse de tres en tres empezando por la derecha, y dejando un pequeño espacio en blanco entre los grupos. Por ejemplo el número 56734 puede escribirse 56 734 pero no 56.734.

    c) Incluso en los textos matemáticos a veces los números se escriben con palabras. Esto ocurre especialmente cuando funcionan como adjetivos y son números pequeños, fáciles de escribir. Así, escribiremos *las cinco proposiciones anteriores* y no *las 5 proposiciones anteriores*. También se escriben con palabras las cifras aproximadas: *escribió unos cien artículos* y no *escribió unos 100 artículos*.

    Por el contrario, siempre escribirás con cifras los códigos identificadores y los que pospuestos al sustantivo sirven para identificar un elemento concreto de una serie. Escribiremos *según vimos en la proposición 2* y no *según vimos en la proposición dos*, o *página 3* y no *página tres*.

Los porcentajes superiores a diez se escriben con cifras siempre, y los inferiores tanto con cifras como con palabras, si bien la primera es la forma más habitual en los textos científicos.

2. *No comiences nunca una frase con un símbolo*. Recuerda que las frases comienzan siempre con una palabra con la primera letra en mayúscula. Así, en vez de escribir

   > a y b son las raíces del polinomio $x^2 - (a+b)x + ab$.

   escribe, por ejemplo, esto otro

   > Las raíces del polinomio $x^2 - (a+b)x + ab$ son a y b.

3. *Utiliza palabras entre los símbolos para facilitar la lectura y evitar confusiones*. Por ejemplo, en vez de

   > Si tenemos un número natural p, q será primo con p si no tienen divisores comunes salvo la unidad.

   escribe, por ejemplo, esto otro

   > Si tenemos un número natural p, el número natural q será primo con p si no tienen divisores comunes salvo la unidad.

4. Cada vez que introduzcas un símbolo que puede denotar distintas cosas explica claramente cuál es el significado que tiene en ese caso.

5. No mezcles de modo inapropiado palabras y símbolos. Por ejemplo no escribas *a es un número natural $>$ que 2*, sino *a es un número natural estrictamente mayor que dos* o bien $a \in \mathbb{N}; a > 2$.

6. Evita los símbolos innecesarios, especialmente en los encunciados. Por ejemplo, no escribas toda *función f derivable es continua*, sino simplemente *toda función derivable es continua*. El añadir el nombre de la función, f, no aporta absolutamente nada al enunciado.

7. Mantén las convenciones en el uso de los símbolos. Hemos mencionado antes algunas al hablar del empleo de las letras del alfabeto latino. Por ejemplo n y m suelen designar números naturales, x suele denotar una variable o una incógnita, etc.

8. Mantén una notación consistente y coherente. Por ejemplo, si estás considerando constantes y las has llamado a y b y necesitas denominar a otra más, lo más indicado sería llamarla c. Si A y A' son conjuntos y has denominado $a, b, c \ldots$ a los elementos de A lo consistente es que denomines $a', b', c' \ldots$ a los elementos de A'.

9. Las expresiones simbólicas cortas pueden ir intercaladas en las líneas de texto, pero si son largas o especialmente relevantes se suelen escribir en una línea o líneas aparte, que además están normalmente centradas entre los márgenes. Por ejemplo en vez de:

   Por el criterio de Stolz: $\lim_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+\cdots+n^2-(1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2)}{n^3-(n-1)^3}$.

   escribiremos

   Por el criterio de Stolz:

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+\cdots+n^2-(1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2)}{n^3-(n-1)^3}$$

   .

   En el caso en que una fórmula ocupe varias líneas es prácticamente seguro que la escribirás del modo que acabamos de indicar. Si las expresiones están relacionadas por igualdades o desigualdades, la apariencia suele ser más clara si se alinean los signos de comparación, como en este ejemplo:

   Cuando el número a es par y b es impar tendríamos que:

   $$\begin{aligned} (a+b)^3 &= (2n+(2m+1))^3 \\ &= 8n^3+12n^2(2m+1)^2+6n(2m+1)^2+(2m+1)^3 \\ &= 8n^3+48n^2m^2+12n^2+48n^2m+24nm^2+24nm \\ &\quad +6n+8m^3+12m^2+6m+1 \end{aligned}$$

10. Cuando por algún motivo en un texto ha de hacerse un salto de línea en medio de una expresión matemática, acaba la línea con el símbolo de una operación o una comparación ($+, -, \geq, =, \neq$, etc.) pues de esta manera el lector sabe cuando acaba la línea que la expresión continúa y se evitan posibles confusiones.

    Por ejemplo:

    Vamos a hacer una aproximación al binomio de Newton. $(a+b)^3 =$
    $(a^3+3a^2b+3ab^2+b) =$

y no así

> Vamos a hacer una aproximación al binomio de Newton. $(a+b)^3 =$
> $(a^3 + 3a^2b$
> $+3ab^2 + b) =$

11. Si hay una expresión que vas a citar alguna vez, debes escribirla en una línea independiente, centrada entre márgenes, y añadirle una etiqueta (un número normalmente), que te servirá para hacer fácilmente la referencia. Por ejemplo

> Si f es una función real de una variable y x_0 es un punto de su dominio definimos la derivada de la función f en x_0 y denotaremos $f'(x_0)$ como el límite (si existe):
>
> $$f'(x_0) = \lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x_0)}{\Delta x_0} \qquad \textbf{[1]}$$
>
> La expresión **[1]** deja claro como la derivada en un punto es una medida de la capacidad de variación de la función en ese punto.

Capítulo 2

Lógica de proposiciones

2.1. Introducción

Según el diccionario de la Real Academia Española de la Lengua, además de otras definiciones como “modo de pensar y actuar sensato” al referirse a la palabra *lógico/lógica*, cuando se refiere a ésta como nombre, la *lógica es la ciencia que expone las leyes, modos y formas de las proposiciones en relación con su verdad o falsedad*. En cualquier caso podemos encontrar numerosas definiciones de este concepto, a veces considerado una ciencia, y otras como parte de una ciencia, ya sean la Filosofía o las Matemáticas (quizás por su origen muy ligado a esta, por lo que resulta particularmente importante para los fundamentos de dicha disciplina). De hecho hoy en día es importante para otras muchas ciencias, como Informática y Teoría de la Computación, por el razonamiento mecánico mediante una serie de reglas fijas; o como Inteligencia Artificial, por ser una herramienta para el análisis y representación del conocimiento, etc., constituyendo así un nexo común entre ellas.

La lógica nació en la Grecia del Siglo V a.C. y culmina con Sócrates, Platón y Aristóteles hace más de 2300 años. Es Aristóteles (384-322 a.C.) quien introduce el uso de variables, las proposiciones, el raciocinio deductivo, las formalizaciones y el desarrollo silogístico. La lógica antiguo-medieval y gran parte de la moderna se desarrolla a partir de la aristotélica, siempre unida a los problemas filosóficos, y era considerada una parte de la filosofía, un tema introductorio de la misma o un instrumento para su desarrollo. Citando textualmente:

> *La evolución de la ciencia moderna y, muy especialmente, el desarrollo del pensamiento matemático, da origen a la lógica como disciplina exacta. La lógica matemática se considera hoy una importante realización de nuestro mundo cultural y su crédito aumentó por las aplicaciones a computadores y mecanismos automáticos. Es*

> *una lógica matemática, construida principalmente por matemáticos, que emplean métodos aritméticos, algebraicos, analíticos, topológicos, axiomáticos, etc. Se logra así un mayor tipo de abstracción y una mayor autonomía de lo formal, respecto a los contenidos. La lógica matemática ya no es puramente formal, está formalizada* ([21], pp. 86-96).

No obstante, la palabra va acompañada muchas veces por un adjetivo o se habla de 'distintos tipos de lógica': proposicional, formal, matemática, aristotélica, difusa,...

La **lógica formal o aristotélica** podemos decir, simplificando enormemente, que estudia los conceptos y se completa con el análisis de los juicios y formas de razonamiento, prestando especial atención a los razonamientos deductivos o silogismos como formas de demostración especialmente adecuadas para el conocimiento científico. No insistimos más en este concepto y lo dejamos con un ejemplo de silogismo aristotélico.

Ejemplo 2.1. *En un silogismo se parte de varias premisas para llegar a una conclusión.*

> *Premisa 1. Todos los hombres son mortales.*
>
> *Premisa 2. Sócrates es un hombre.*
>
> *Conclusión. Sócrates es mortal.*

La **lógica proposicional** estudia proposiciones, afirmaciones u oraciones, los métodos de vincularlas mediante conectores, y las relaciones y propiedades que se derivan de esos procedimientos. Cada enunciado es o verdadero o falso, y tan cierta es la afirmación 'El Duero desemboca en el Océano Atlántico' como la afirmación '2+2=4'. Es en este tipo de lógica en la que nos vamos a centrar y a la que dedicamos el presente capítulo. No obstante, no queremos terminar esta introducción sin mencionar que, según algunos autores, hay que diferenciar entre la 'lógica clásica', que considera proposiciones que se clasifican como verdaderas o falsas, y la 'lógica no clásica', que considera otro tipo de proposiciones. Quede claro que no hay una distinción temporal entre ambas ya que el propio Aristóteles reflexionaba sobre la existencia de 'ciertos grados de valor de verdad' comprendidos entre los dos extremos, verdadero y falso. En este sentido podemos hablar, por ejemplo, de **la lógica difusa**, que trabaja con proposiciones cuyo grado de verdad o falsedad no está del todo claro, o que pueden ser consideradas ciertas o no según quién y/o cuándo las esté utilizando. Se basa en el hecho de que la gente piensa de un modo que podemos calificar como 'difuso', y las clasificaciones en 'verdadero' y 'falso' no resultan tan claras como puede parecer. Por ejemplo, ¿cuándo podemos decir que una persona es 'alta'? Habrá quien marque la distinción entre 'ser alto' y 'ser bajo' con la altura de 1,70 metros como el punto que separa ambas categorías. Pero habrá quien diga que una persona de 1,75 metros de altura es baja, que sería alta si midiera 1,85 metros o más. Y, sin embargo, esta altura para otros puede suponer una nueva categoría (la de ser 'muy alto', por ejemplo). La lógica difusa permite que los elementos estén en una categoría (o conjunto) con un cierto grado de pertenencia.

Pero como hemos dicho ya, nos vamos a centrar en la lógica de proposiciones o lógica matemática (hablaremos de *lógica* sin más), que será la que utilizaremos en los razonamientos que aparecerán en las asignaturas a las que vas a enfrentarte desde el primer día del inicio de tu Grado en alguna de las titulaciones de la Facultad de Economía y Empresa.

2.2. Lógica de proposiciones

Cuando se nombra la palabra *Matemáticas* fuera del mundo académico, y no tan fuera, casi todas las personas tienden a pensar en números, y en aquello que se recuerda sobre "hacer cuentas, ecuaciones,..." y algunas otras cuestiones básicas de los primeros estudios de la enseñanza primaria y secundaria. De hecho, es posible que a menudo te sorprendas y comentes haber salido de una clase de Matemáticas en la que ¡no has visto ni un solo número!. Hay que tener claro desde el principio que las Matemáticas tienen mucho que ver con los números, sí, pero que cada concepto matemático tiene una definición formal en la que se utilizan palabras del lenguaje habitual (natural), aunque siempre expresada con claridad y sin dejar dudas sobre qué es lo que se está diciendo. En estas definiciones los números no suelen aparecer salvo que de ellos mismos se esté hablando, o se escriba algún ejemplo clarificador.

El lenguaje matemático es formal y riguroso. Hemos visto ya la importancia de los símbolos y de su universalidad, y su utilización en la escritura de teoría matemática. También cuando redactamos documentos matemáticos tenemos que ser igual de rigurosos, de modo que distinguimos distintos tipos de enunciados, estableciendo algo parecido a categorías que ayudan a conseguir ese rigor en cada uno de los conceptos y sus propiedades, y a que no haya ningún tipo de duda sobre qué es lo que se está haciendo. Aprender a traducir al lenguaje matemático es algo que, como todo, se adquiere con la práctica. Como ya hemos visto, además de ser una escritura universal, en numerosas ocasiones (acordémonos de la resolución de la ecuación de segundo grado en el primer apartado del Capítulo 1) conseguimos una expresión más simple y aclaratoria. Al enfrentarnos a una demostración (debemos tener siempre presente que el objetivo de estas notas es tratar de aprender cómo hacer una demostración), escribir cada una de las definiciones, datos, qué es lo que queremos demostrar, las relaciones entre los conceptos que vamos escribiendo, etc., resulta de gran ayuda. La precisión del lenguaje es necesaria ya que este es una herramienta para nuestros objetivos, por lo que debemos aprenderlo y asimilarlo cuanto antes. El lenguaje de la lógica que ahora introducimos ayuda enormemente a ser preciso, además de ser único y unívoco para todos. En cualquier lugar del mundo debe entenderse lo mismo y sin ninguna ambigüedad. La precisión inicial es fundamental para que los razonamientos posteriores sean correctos.

Comencemos introduciendo los distintos tipos de proposiciones que utilizamos habitualmente, a las que damos nombres diferentes atendiendo fundamentalmente a si deben o no demostrarse para admitirlas como ciertas:

Definición. Definir no es más que 'dar nombre', de modo que una definición, tal y como aparece en el diccionario de la Real Academia Española (RAE) "expone con claridad y exactitud los caracteres genéricos y diferenciales de algo material o inmaterial".

Cuando introducimos un nuevo concepto, lo definimos (exponemos sus características) y le damos un nombre que, a partir de ese momento, debemos ser capaces de utilizar adecuadamente, tal y como hacemos con cualquiera de los nombres de los objetos y conceptos en nuestra vida cotidiana. Por citar un ejemplo, cada vez que oímos la palabra 'mesa' nuestra cabeza inmediatamente asocia la palabra escuchada a un significado, pero si por alguna razón se estableciera un convenio en el que se le diera otro nombre al mismo concepto, lo aprenderíamos (de hecho eso es lo que hacemos cuando estudiamos un idioma -nuestro objeto pasa a llamarse, por ejemplo, 'table', en inglés) y nos olvidaríamos de la palabra anterior. Está claro que si utilizáramos los conceptos matemáticos que aprendemos de modo habitual, seríamos capaces de manejarlos exactamente igual que cualquiera de las palabras de nuestro vocabulario. Su 'no utilización' hace que nos resulten extraños, como ocurre con cualquier otro lenguaje específico, como puede ser el que utilizan los médicos, los informáticos o los inversores en bolsa cuando hablan entre ellos.

Axioma. Es un enunciado tan claro y evidente que se admite sin demostración. Su grado de certeza es indiscutible.

En Matemáticas los axiomas son principios indiscutibles a partir de los cuales se desarrolla una teoría. Por ejemplo, el matemático griego Euclides (325-265 a.C.) desarrolló la conocida como **geometría euclidiana** basándose en 5 axiomas. A modo de ejemplo citamos dos de ellos: 1) Dos puntos cualesquiera determinan un segmento de recta, y 2) Un segmento de recta se puede extender indefinidamente en una línea recta.

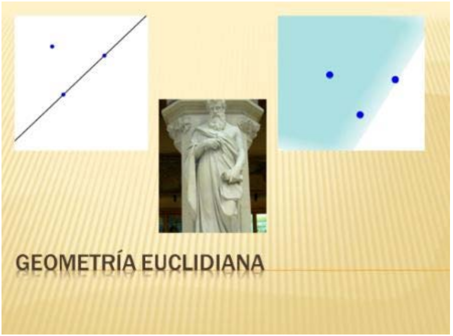


Figura 2.1: El matemático griego Euclides (325-265 a.C.) desarrolló la conocida como **geometría euclidiana** basándose en 5 axiomas

Los axiomas no solo aparecen en matemáticas, sino que podemos encontrarlos en cualquier otro contexto. Aquí tienes varios ejemplos: 'el todo siempre es más grande que cualquiera de sus partes', 'un enunciado no puede ser verdadero y falso al mismo tiempo para la misma persona' o 'un ser humano recién nacido no puede valerse por sí mismo',...

Proposición. Es un enunciado que puede ser verdadero o falso. Así cada proposición tiene asignado un valor de **verdad** (lo representaremos como V) o **falsedad** (F).[1]

Por ejemplo, 'hoy es miércoles', es una proposición que será verdadera o falsa según el día de la semana en el que digamos o leamos tal enunciado. En matemáticas, las proposiciones se demuestran, no se admiten como ciertas directamente, independientemente de que establezcan propiedades que, a priori, puedan resultarnos evidentes (ciertas o falsas, sin ninguna duda). Este aspecto las diferencia de las definiciones y los axiomas. No basta con dar el enunciado de una proposición, además hay que probar su verdad o falsedad.

Ejemplo 2.2. *Un profesor de segundo de bachillerato manda rellenar a sus estudiantes una ficha con nombre y apellidos y el grado universitario al que querrían acceder, pudiendo rellenar dos si tienen dudas. Entre otros datos aparecen:*

[1] Ya hemos dicho que la lógica difusa trata proposiciones atendiendo a su grado de verdad o falsedad, pero nosotros no consideramos esta posibilidad.

Apellidos y nombre: *Hernández García, Pedro ;* ***Grado:*** *Economía o Derecho*
Apellidos y nombre: *Gracia López, María ;* ***Grado:*** *Medicina*

Cualquiera que lea las fichas va a dar por sentado que las proposiciones p ≡'me llamo Pedro' y q ≡'quiero estudiar Economía o Derecho' son ciertas y le asignará a ambas el valor V. No necesita ningún tipo de comprobación. Lo mismo ocurre con 'me llamo María' y 'quiero estudiar Medicina'.

En otros casos el enunciado de una proposición puede exigir algún tipo de comprobación, más o menos sencilla, antes de poder afirmar si es verdadera o falsa.

Ejemplo 2.3.

- *'6 es múltiplo de 3'. Es una proposición (q) verdadera porque podemos escribir* $6 = 3 \cdot 2$. *A esta proposición p le asignaríamos el valor V.*
- *'7 es múltiplo de 3'. Es una proposición (q) falsa porque no podemos escribir* $7 = 3n$ *para ningún valor entero de n. A la proposición q le asignaríamos el valor F.*

A las proposiciones, en Matemáticas, se les da también otros nombres: Lemas, Teoremas, Corolarios y Conjeturas.

Un **Lema** es una proposición cuyo enunciado se utilizará posteriormente en la demostración de otra proposición considerada, en principio, 'de categoría superior' y que denominamos **Teorema**. También a veces se utiliza un lema en la demostración de otro lema posterior. Un **Corolario** es una proposición que se demuestra de modo inmediato a partir de un teorema o una proposición anterior, o que se deduce inmediatamente de él sin ninguna demostración añadida. Por su parte una **Conjetura** es una proposición que todos los indicios indican que es cierta, pero cuya demostración aún no ha sido realizada.

También podemos clasificar las proposiciones atendiendo a su enunciado:

- Una proposición es **universal** si afirma que todos los elementos de un cierto conjunto verifican una determinada propiedad. El símbolo cuantificador asociado a estas proposiciones es $\forall$, que se lee **para todo** o **todo** (ya nos hemos referido a él en el apartado 1.3.2). Son proposiciones que se enuncian para todos los objetos de un determinado conjunto. Por ejemplo

$$\forall x \in \mathbb{Z} \text{ es divisible por } 1$$

que leeríamos, más o menos, como *todos los números enteros son divisibles por 1.*

También sería una proposición universal la que afirma el profesor al decir: "Todos los estudiantes han rellenado una ficha diciendo qué grado quieren estudiar el próximo curso".

- Una proposición es **existencial** si afirma que algún elemento de un cierto conjunto verifica una propiedad. El símbolo cuantificador asociado a estas proposiciones es $\exists$, que se lee **existe** y que fue también introducido en el capítulo anterior (sección 1.3.2). Por ejemplo, *existe algún número entero que es divisible por 35*:

  $$\exists x \in \mathbb{Z} \text{ que es divisible por } 35$$

  O en el caso del profesor, si algún estudiante aún no ha rellenado la correspondiente ficha: "Algunos de vosotros aún no me habéis entregado la ficha diciendo qué grado queréis estudiar el próximo curso".

  Queremos que tengas claro que las proposiciones existenciales no suponen unicidad, es decir, no expresan la existencia de un único elemento verificando una determinada propiedad. Así decimos que en el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ existen números pares (hay uno) y también que en el conjunto $B = \{1, 2, 3, 4\}$ existen números pares (dos, en este caso):

  $$\exists x \in A \text{ tal que } x \text{ es par y } \exists y \in B; \text{ tal que } y \text{ es par}$$

  Algunas proposiciones existenciales niegan la existencia de elementos con determinadas propiedades. Por ejemplo, en el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ no hay (no existen) múltiplos de 5:

  $$\nexists x \in A \text{ con } x = 5n \text{ para algún } n \in \mathbb{Z}$$

  Ya vimos también en 1.3.2 el símbolo que acabamos de utilizar, ($\nexists$), que niega la existencia.

2.3. Operaciones con proposiciones

Cuando trabajamos con números, las herramientas que todo el mundo asocia con el lenguaje matemático (aunque ya a esta alturas debemos tener claro que solo son símbolos que utiliza esta ciencia y muchas otras), una parte importante de su interés está en sus propiedades y las operaciones que con ellos se realizan (suma, cálculo del opuesto, etc.). Con las proposiciones también realizamos distintas operaciones para construir otras nuevas. Lo hacemos a través de los operadores (o conectores) y cuantificadores lógicos, que vendrían a ser lo que para los números son $+$, $\cdot$, etc. Antes de introducir cada uno de estos conectores recordemos que trabajamos con proposiciones que son verdaderas (V) o falsas (F), pero no ambas cosas al mismo tiempo. En este sentido resulta muy útil asignar a las proposiciones un valor numérico en función de la verdad o falsedad de las mismas, ya que en numerosas ocasiones esto nos facilitará el saber si una proposición obtenida a través de diversas operaciones con las iniciales es verdadera o falsa. Así, dada una proposición p podemos asignarle un valor de verdad $v(p)$[2]:

$$\text{Si } p \text{ es cierto } v(p) = 1, \text{ y si es falso } v(p) = 0$$

Esta asignación nos permite aplicar aritmética básica al estudio de la lógica, lo que, insistimos, facilita las cosas cuando trabajamos con varias proposiciones y varios conectores simultáneamente.

2.3.1. Negación: $(\neg)$

Dada una proposición p, al negarla, $\neg p$, estamos diciendo que 'no es cierto p'. Esto supone que cuando p es cierto, $\neg p$ es falso, y al revés. Utilizando la aritmética sería

$$v(\neg p) = 1 - v(p)$$

y recogido en una tabla:

p	$\neg p$
V	F
F	V

p	$\neg p$
1	0
0	1

Cuadro 2.1: Negación

En el ejemplo 2.2, al negar las proposiciones tendremos:

- $\neg p$ supone que no es verdad la afirmación 'me llamo Pedro' y, por lo tanto, 'no me llamo Pedro' (si el estudiante no mintió al rellenar su ficha, el valor de esta proposición sería 'falso'). Análogamente para el caso de María.

[2] En la lógica difusa, una de las formas de trabajar consiste en asignar a las proposiciones valores de verdad en el intervalo $[0, 1]$.

- $\neg q$ supone que 'no es cierto que quiero estudiar Economía o Derecho', es decir, 'no quiero estudiar Economía o Derecho', que de nuevo sería falsa si el estudiante no mintió al rellenar sus datos. Análogamente para el caso de María.

Si volvemos al ejemplo 2.3, al negar las proposiciones tendríamos:

- $\neg p$ sería 'no es verdad que 6 es múltiplo de 3'$\Leftrightarrow$'6 no es múltiplo de 3', cuyo valor es F.

- $\neg q$ sería 'no es verdad que 7 es múltiplo 3'$\Leftrightarrow$'7 no es múltiplo de 3', cuyo valor es V.

Algunas propiedades de $\neg$:

- La doble negación de una proposición es equivalente a ella misma $(\neg(\neg p)) = p)$.

  En el ejemplo 2.2, $\neg(\neg p)$ $\equiv$'no es cierto[no es cierto (Me llamo Pedro)]' es equivalente a decir que 'no es cierto[No me llamo Pedro]' y, por lo tanto, 'Me llamo Pedro'.

  Análogamente, $\neg(\neg q)$ $\equiv$'no es cierto[no es cierto (Estudio Economía o Derecho)]' es equivalente a decir que 'no es cierto[No estudio Economía o Derecho]' y, por lo tanto, 'Estudio Economía o Derecho'.

  En el ejemplo 2.3:

  - $\neg(\neg p)$ $\equiv$'no es cierto [no es cierto (6 es múltiplo de 3)]' es equivalente a 'no es cierto [6 no es múltiplo de 3]', que a su vez es lo mismo que '6 es múltiplo de 3'.
  - $\neg(\neg q)$ $\equiv$'no es cierto [no es cierto (7 es múltiplo de 3)]' es equivalente a 'no es cierto [7 no es múltiplo de 3]', que a su vez es lo mismo que $\Leftrightarrow$'7 es múltiplo de 3'.

  Fíjate que $v(\neg(\neg p)) = 1 - v(\neg p) = 1 - (1 - v(p)) = v(p)$, es decir, p y $\neg(\neg p)$ tienen el mismo valor de verdad.

  Debemos mencionar aquí que la doble negación de p no es siempre p en el lenguaje natural en castellano, dado que la doble negación está permitida y se utiliza habitualmente. Por ejemplo, si decimos, 'no iré nunca', estamos expresando lo mismo que si decimos 'nunca iré'.

- La negación de una proposición universal es una proposición existencial: $\neg\forall = \exists$

  Utilicemos un ejemplo para aclarar esta idea: supongamos que dentro de un aula de primer curso durante la primera clase de Álgebra el profesor dice: "todos en este aula somos mayores de edad". Es muy probable que alguno de los nuevos estudiantes universitarios levante la mano y diga: "No, a mí me quedan un par de meses, porque no cumplo 18 hasta diciembre". Esto permitirá a todos, profesor incluido, afirmar que 'el profesor estaba equivocado', que su enunciado era falso. ¿Era preciso para afirmar que la proposición era falsa que 'todos NO fueran mayores de edad'? Parece claro, por lo dicho anteriormente, que no, que ha sido suficiente con que uno de los estudiantes no cumpla la propiedad 'tener 18 años' para poder decir que es falso que 'todos somos mayores de edad'.

  Algo similar ocurre cuando negamos la proposición 'Todos los estudiantes han entregado su ficha'. Basta con que uno (o alguno) de ellos no lo haya hecho, aunque el resto sí.

- La negación de una proposición existencial es una proposición universal: $\neg\exists = \forall$

  Siguiendo con el mismo caso anterior, si en el mismo aula, en enero del año siguiente el profesor dice: "En este aula hay algún estudiante menor de edad" y pide que levante la mano el que lo sea, se encontrará con que nadie lo hace. Todos los estudiantes habrán cumplido 18 años antes del 1 de enero (damos por sentado que el año en que se cumplen 18 es el año de acceso a los estudios universitarios y que no hay ningún estudiante aventajado al que se le ha permitido el acceso con menos edad), y TODOS en la clase serán mayores de edad. Si 'no es verdad que alguno verifique una determinada propiedad (por ejemplo ser menor de edad)' es porque 'todos NO verifican dicha propiedad', o lo que es lo mismo, 'ninguno verifica esa propiedad'.

En el Capítulo 1, al introducir los símbolos $\forall$ y $\exists$ también nos referimos al símbolo $\nexists$ como negación de $\exists$. Esto no contradice en absoluto lo qeu acabamos de decir. Si negamos que 'existe algún estudiante que es menor de edad' estamos diciendo que 'no existe algún estudiante que es menor de edad' y, por tanto, 'todos son NO menores de edad', es decir, 'todos son mayores de edad'.

Ejercicios.

Te proponemos que antes de seguir resuelvas algún ejercicio para dedicarle un tiempo a pensar sobre lo que hasta aquí has leído. En concreto, que niegues los siguientes enunciados, escribiendo el resultado del modo más simple posible.

1. Me gusta estudiar matemáticas.

2. He aprobado todas las asignaturas.

3. No iré a visitar todos esos museos.

4. Los números naturales m y n son pares.

5. $x = 0 \quad \text{e} \quad y \geqslant 0$.

6. Algún x verifica $x = y$.

7. Ni x ni y valen 7.

8. Existen sistemas de 3 vectores de $\mathbb{R}^3$ linealmente independientes.

9. Para cada $\epsilon > 0$ existe $\partial > 0$ que verifica B.

10. Existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $\partial > 0$ es $f(\epsilon) < \partial$.

2.3.2. Conjunción: $(\wedge)$

Dadas dos proposiciones p y q, la proposición conjunción de ambas, $p \wedge q$ (leemos 'p y q'), solo es cierta cuando son ciertas tanto p como q. La expresión aritmética es

$$v(p \wedge q) = v(p)v(q)$$

y la tabla de verdad quedará:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Cuadro 2.2: Conjunción

Recuperamos aquí el ejemplo 2.3 para que veas cómo se construyen proposiciones por conjunción.

Ejemplo 2.4. *Consideremos las proposiciones p y q del ejemplo 2.3. En este caso, p es cierta y q falsa, de modo que $p \wedge q$ es falsa. Sin embargo, $p \wedge \neg q$ es verdadera, dado que tanto p como $\neg q$ son verdaderas.*

Si te resulta más sencillo recordar fórmulas, puedes recurrir a la expresión $v(p \wedge q) = v(p)v(q)$, pues en tal caso, sabiendo que $v(p) = 1$ y $v(q) = 0$, resulta sencillo ver que $v(p \wedge q) = v(p)v(q) = 1 \cdot 0 = 0$, de modo que $p \wedge q$ es falsa.

Análogamente, sería cierto 'Me llamo Pedro y quiero estudiar Economía o Derecho', siguiendo con el ejemplo 2.2.

Cabe destacar aquí alguna diferencia con el lenguaje cotidiano. En matemáticas, las proposiciones:

Iré y compraré comida
Compraré comida e iré

son equivalentes. Sin embargo, para nosotros tienen un sentido distinto en cuanto a temporalidad. Este caso nos resulta muy adecuado para resaltar la importancia de las tablas que hemos incluido (y que incluiremos con el resto de operaciones), ya que para decidir si una proposición obtenida a partir de otras es verdadera o falsa, resulta mucho más seguro recurrir a ellas que tratar de hacerlo recurriendo al significado de la nueva proposición. En este caso nosotros pensaríamos:

$$v(p) = 1 \text{ (p es cierta)}, v(q) = 1 \text{ (q es cierta), luego } v(p \wedge q) = 1 \text{ ($p \wedge q$ cierta)}$$

Recuerda que ya hemos hablado del símbolo $\wedge$ en el Capítulo 1, y lo hemos relacionado con la intersección de conjuntos (símbolo $\cap$).

Ejercicios.

Prueba ahora a resolver el ejercicio que consiste en decidir si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas.

1. Un conjunto es vacío y tiene como único elemento el 0.
2. Los números 7 y 10 no son pares.
3. Los números 1 y 3 son impares.
4. Hoy es lunes y mañana domingo.
5. Hoy es domingo y no hay clase en el instituto.

2.3.3. Disyunción: $(\vee)$

Dadas dos proposiciones p y q, la proposición disyunción de ambas, $p \vee q$ (leemos 'p o q'), es cierta cuando es cierta al menos una de las dos, esto es o p es cierta o q es cierta o son ciertas ambas. En este caso

$$v(p \vee q) = v(p) + v(q) - v(p)v(q)$$

y tenemos:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Cuadro 2.3: Disyunción

Ejemplo 2.5. *Consideremos las proposiciones p y q del ejemplo 2.3. En este caso, p es cierta y q falsa, de modo que $p \vee q$ es cierta. Sin embargo, $\neg p \vee q$ es falsa, dado que tanto $\neg p$ como q son falsas.*

Recurriendo a la expresión $v(p \vee q) = v(p) + v(q) - v(p)v(q)$ tendríamos:

$$v(p) = 1, v(q) = 0 \Rightarrow v(p \vee q) = v(p) + v(q) - v(p)v(q) = 1 + 0 - 0 = 1$$

Si después de leer la ficha el profesor habla con un compañero y le dice "No recuerdo bien: María quiere estudiar Economía o Medicina", diremos que es correcto (porque quiere estudiar Medicina). Sin embargo si dice: "No recuerdo bien: María quiere estudiar Economía o Derecho", entonces es falso, se equivoca, porque "María quiere estudiar Economía" es falso y ''María quiere estudiar Derecho" también.

Debemos mencionar en este caso que en muchas ocasiones, en el lenguaje habitual la disyunción supone exclusión. En la proposición 'llegaré el lunes o el martes', resulta obvio que solo puede ocurrir una de las dos cosas. Este no es el caso de las proposiciones matemáticas. La 'o' no es excluyente de modo obligatorio. Por ejemplo:

$$\text{Si } xy = 0, \text{ entonces debe ser } x = 0 \text{ o } y = 0$$

puede ocurrir que $x = 0$, que $y = 0$, o que ambas sean 0 a la vez $(x, y = 0)$. Si queremos dejar claro que las proposiciones unidas por $\vee$ son excluyentes diremos: 'o bien p, o bien q' (no 'o').

El símbolo $\vee$ fue ya introducido en el Capítulo 1 y relacionado con la unión de conjuntos (símbolo $\cup$).

Ejercicios.

Comprueba la (posible, sin personalizar) verdad o falsedad de las siguientes proposiciones.

1. El número 1 es impar o el 3 es par.
2. El 2 es un número primo o el 9 no es número primo.
3. El 2 es un número impar o el 3 es un número par.
4. Un coche es blanco o es negro.
5. Estás conmigo o estás contra mí.

2.3.4. Leyes de De Morgan: relación entre conjunción, disyunción y negación.

Cuando negamos una conjunción de proposiciones estamos diciendo que 'no es cierto $p \wedge q$', es decir, 'no es verdad que sean ciertas al mismo tiempo las dos proposiciones, p y q', de modo que al menos una de las dos ha de ser falsa y, de este modo, o bien ha de ser cierta $\neg p$ (la negación de p) o bien $\neg q$ (la negación de q). Esto es lo que dice la **primera ley de De Morgan**:

$$\boxed{\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q}$$

Fíjate que en un caso como este, si queremos saber la verdad o falsedad de una proposición como $\neg(p \wedge q)$, partiendo de la verdad o falsedad de p y q, podríamos proceder de la siguiente forma:

$$v(\neg(p \wedge q)) \underset{v(\neg p)=1-v(p)}{=} 1 - v(p \wedge q) \underset{v(p \wedge q)=v(p)v(q)}{=} 1 - v(p)v(q)$$

Estas expresiones resultan muy prácticas para las tablas de verdad ya que obtenemos su verdad (1) o falsedad (0) directamente solo a partir de $v(p)$ y $v(q)$, es decir, solo conociendo el valor de verdad de las proposiciones iniciales. Este tipo de práctica puede utilizarse para cualquier proposición resultante de operar con otras.

Análogamente, si negamos una disyunción de proposiciones decimos que 'no es cierto $p \vee q$', esto es, 'no es verdad que al menos una de los dos proposiciones, o p o q, sea cierta', así que deben ser las dos falsas y, por lo tanto, deben ser ciertas las dos negaciones, $\neg p$ y $\neg q$. Obtenemos así la **segunda ley de De Morgan**:

$$\boxed{\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q}$$

En este caso, la expresión para el valor de verdad sería:

$$v(\neg(p \vee q)) \underset{v(\neg p)=1-v(p)}{=} 1 - v(p \vee q) \underset{v(p\vee q)=v(p)+v(q)-v(p)v(q)}{=} 1 - v(p) - v(q) + v(p)v(q)$$

Volvamos a las proposiciones del ejemplo 2.2. Una de las estudiantes tenía clara su opción para el próximo curso: 'Me llamo María y quiero Medicina $(p \wedge q)$', de modo que damos por cierto tanto que la estudiante se llama María como que quiere estudiar Medicina. Neguemos tal afirmación:

'No es cierto (me llamo María y quiero estudiar Medicina)', es decir, aquello que habíamos dado por cierto, no lo es. ¿Esto supone que son falsas las dos afirmaciones? ¿Podría ocurrir que fuera solo falsa una de las dos? Parece que ese es el caso. Si la estudiante en un momento dado cambia de opción y dice que lo que quiere estudiar es Fisioterapia, irá a ver a su profesor y le dirá que 'la ficha está mal'. ¿Eso supone que todos los datos de su ficha están mal? En absoluto, todos los demás datos son correctos, no se van a modificar. Solo cambiará el dato del grado que quiere estudiar, su nombre y apellidos seguirán siendo los mismos. De modo que p seguirá siendo cierto, pero ahora será cierto $\neg q$. Además podría haberse equivocado también al rellenar su nombre, y haber puesto 'Gracia' cuando en realidad era 'García'. En este caso, las dos afirmaciones serían falsas y tendría que modificar los dos datos en la ficha: no se llama María Gracia y no quiere estudiar Medicina. Finalmente, puede haberse equivocado al rellenar el nombre, pero no cambiar de titulación. De nuevo dirá que la ficha está mal, pero solo cambiará uno de los datos que aparecen en la misma. Si aplicamos la ley de De Morgan correspondiente, $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$, debe ser cierta o $\neg p$ o $\neg q$ (o falsa p o falsa q, o falsas ambas).

Ejemplo 2.6. *Al inicio del curso siguiente el profesor se encuentra con Pedro y le pregunta qué está estudiando finalmente.*

- *Dice que estudia Economía. Esta respuesta no sorprende al profesor en absoluto, dado que era una de las posibilidades que aparecía en la ficha. El estudiante no mintió, aunque no estudie Derecho.*

- *Dice que estudia Derecho. La reacción es análoga a la del caso anterior por idénticas razones.*

- *Dice que estudia Economía-Derecho. La respuesta tampoco debe sorprender, dado que las dos opciones que ponía el estudiante en su ficha no eran excluyentes.*

- *Dice que estudia ADE. La reacción del profesor sería seguramente de extrañeza, y casi seguro que le preguntará: "¿No me dijiste que ibas a estudiar Economía o Derecho?". Es muy probable que simplemente cambiara de idea, que su intención no fuera mentir. Sin embargo su afirmación fue falsa, tiene valor 0 para nosotros, porque no estudia ni Economía ni Derecho.*

A continuación tienes las tablas que recogen la verdad y falsedad de las distintas proposiciones construidas a partir de dos iniciales cuyos valores de verdad conocemos. Fíjate que las columnas 7 y 10, y 8 y 9 son iguales respectivamente, algo que tiene que ocurrir ya que se corresponden con proposiciones equivalentes según las leyes de De Morgan.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg p \vee \neg q$
V	V	F	F	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V	F	F	V
F	V	V	F	F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	F	F	V	V	V	V

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg p \vee \neg q$
1	1	0	0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	0	1	1	0	0	1
0	0	1	1	0	0	1	1	1	1

Cuadro 2.4: Tablas de verdad

Ejercicios.

Prueba ahora a determinar la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones. Te sugerimos que previamente identifiques las proposiciones iniciales y le asignes valores de verdad teniendo en cuenta que son verdad las afirmaciones del ejemplo 2.2.

1. María quiere estudiar Medicina y Pedro Economía o ADE.

2. María quiere estudiar Medicina y Pedro Economía o Derecho.
3. No es verdad que María quiera estudiar Medicina y Pedro Economía o Derecho.
4. Ni María quiere estudiar Economía ni Pedro Medicina.
5. Ni María quiere estudiar Medicina ni Pedro Derecho o Economía.
6. Pedro quiere estudiar Economía o Derecho o María quiere estudiar Medicina.
7. Pedro o María quieren estudiar Medicina.
8. Pedro no quiere estudiar Medicina o María no quiere estudiar ADE.
9. Pedro no quiere estudiar ni Economía ni Derecho o María no quiere estudiar Medicina.
10. Pedro o María no quieren estudiar Medicina.

2.4. Proposiciones condicionales. La implicación

Aunque este tipo de proposiciones también se obtienen a partir de otras dos, hemos preferido dedicarles una sección propia por la importancia de las mismas en el lenguaje matemático. En sucesivos capítulos vamos a aprender a demostrar fundamentalmente enunciados con este tipo de escritura.

Una **proposición condicional** es una proposición compuesta por otras dos, p y q, que se relacionan por el conector lógico $\Rightarrow$

$$\boxed{p \Rightarrow q}$$

Leeremos 'si p entonces q' o 'p implica q'. La proposición p suele llamarse **hipótesis** y la proposición q **tesis**.
Que la proposición $p \Rightarrow q$ sea cierta supone solamente que siempre que la proposición p es cierta, entonces también lo es la proposición q, independientemente del significado de p y q. Es decir, solo se afirma la conexión lógica entre ambas proposiciones, sin asegurar nada sobre la verdad o falsedad de cada una de ellas. Por tanto lo único que no puede ocurrir es que p sea verdadera y q sea falsa. En este caso

$$v(p \Rightarrow q) = 1 - v(p) + v(p)v(q)$$

La tabla de valores de la implicación queda:

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Cuadro 2.5: Implicación

Ejemplo 2.7. *Volvamos a nuestro ejemplo de estudiantes de bachillerato (ejemplo 2.2). Teníamos el caso de una estudiante, María, que quería estudiar el Grado en Medicina.*

María habla con su profesor. No es fácil acceder a la Facultad de Medicina y le dice lo siguiente de acuerdo con lo que ha ocurrido en cursos anteriores:

"Si tengo una nota superior a 12.5 tras la EBAU, puedo estudiar Medicina"

En este caso, las proposiciones son: $p \equiv$'Saco una nota superior a 12.5 en la EBAU', y $q \equiv$'Puedo estudiar medicina'.

En el momento en que se hagan públicas las calificaciones y María vea su nota final, podrá o no asegurar si puede estudiar medicina.

¿Qué ocurre si la nota obtenida es de 12.4? Es muy posible que en este caso también pueda optar a una plaza en Medicina. ¿Supone esto que la proposición 'Si tengo una nota superior al 12.5 tras la EBAU, puedo estudiar Medicina' es falsa?. En absoluto. La proposición es completamente cierta. No dice nada sobre qué ocurre si la nota es inferior a 12.5, de modo que en tal caso no sabemos qué ocurrirá, o al menos María no lo sabe (o no lo dice). Tampoco, por lo tanto, de la implicación enunciada debemos presumir que la proposición 'Si no tengo una nota superior a 12.5, no puedo estudiar medicina', es cierta. Debemos tener claro que solo estamos diciendo 'p implica q'. Es decir, si p es falso, pero q es cierto, la implicación $p \Rightarrow q$ también tiene valor V. $p \Rightarrow q$ solo tiene valor F cuando siendo cierta p es falsa q (supongamos que la nota final de acceso a la Universidad de los estudiantes sube enormemente ese curso y María, con un 12.6, no obtiene plaza en Medicina. En este caso sería falsa la proposición).

Vamos a mencionar aquí también alguna situación que puede resultarte confusa, aunque es posible que, después de pensarla un poco, te aclare lo que supone una implicación.

Las siguientes proposiciones son implicaciones:

Si tienes sed, hay agua fresca en el frigorífico

Si llueve, me quedo en casa

En el primer caso, si tú no tienes sed, ¿no hay agua fresca en el frigorífico? Parece claro que no debe ser así. Hay agua fresca si tú la quieres, pero no se dice nada de qué pasa si no la quieres. Solo sería falsa la afirmación si tú tienes sed y cuando vas al frigorífico, no hay agua fresca.

En el segundo caso, si quien dijo la proposición está en casa, ¿podemos afirmar que llueve? La respuesta es 'no', ya que no dijo nada sobre qué haría si no llovía. Esta implicación solo sería falsa si está lloviendo y ha salido.

Otra forma de 'leer' implicaciones. Condiciones necesarias y suficientes.

Es **suficiente** con $\underbrace{\text{tener una nota superior a 12.5}}_{p}$ para $\underbrace{\text{poder estudiar Medicina}}_{q}$

De modo que es suficiente saber que 'tengo una nota superior a 12.5' para que yo (María) me vaya a celebrar que 'puedo estudiar Medicina'.

En la implicación $p \Rightarrow q$, la proposición p **es condición suficiente** para q. Es suficiente con saber que p es cierto para concluir que q también lo es.

Por otro lado, solo si María sabe que puede estudiar Medicina podrá ser cierto que tiene una nota superior a 12.5. No puede ocurrir que q sea falso, siendo cierto p. De modo que $p \Rightarrow q$ también se lee: p solo si q. Dicho de otra manera, es **necesario** que María pueda estudiar Medicina para que también pueda ser cierto que María ha tenido una nota superior a 12.5, porque

$$\text{Si María } \underbrace{\textbf{no}\text{ puede estudiar Medicina}}_{\neg q} \text{ entonces}$$
$$\underbrace{\textbf{no}\text{ ha obtenido una nota superior al 12.5}}_{\neg p}$$

Es decir, q es **condición necesaria** para p (no es suficiente, pues como mencionamos antes, cabe la posibilidad de que estudie Medicina y la calificación sea inferior al 12.5).

Consideremos ahora la siguiente proposición: 'Si paso la nota de corte, estudiaré Medicina'.

En este caso, $p \equiv$'Paso la nota de corte' y $q \equiv$'Estudiaré medicina', y tenemos:

$$\text{Es } \textbf{suficiente} \text{ con } \underbrace{\text{pasar la nota de corte}}_{p} \text{ para } \underbrace{\text{estudiar Medicina}}_{q}.$$

Pero además, si sabemos que estudia Medicina, concluimos inmediatamente que ha superado la nota de corte, esto es

$$\text{Es \textbf{suficiente} con saber que } \underbrace{\text{estudia medicina}}_{q} \text{ para concluir que}$$
$$\underbrace{\text{ha superado la nota de corte.}}_{p}$$

Por lo tanto $p \Rightarrow q$ y $q \Rightarrow p$, de modo que tenemos una doble implicación, que representamos

$$\boxed{p \Leftrightarrow q}$$

y leemos: p es **condición necesaria y suficiente** de q o p **si y solo si** q. También decimos que p y q son equivalentes, ya que o las dos son ciertas o las dos son falsas.

Vamos a ilustrar esta doble implicación con un ejemplo del mundo de la Economía y la Empresa, del que vas a formar parte en poco tiempo.

Ejercicios.

Solamente unos ejercicios de aplicación antes de completar el tema para que practiques a la vez que recuerdas algunos conceptos.

1. Decide si las siguientes implicaciones son ciertas o falsas, señalando previamente cada proposición, cuál es la hipótesis y cuál la tesis.
   - Si los precios de los bienes se alteran las preferencias de los consumidores varían.
   - Si reinicio el ordenador en modo seguro no se abre ningún ítem de arranque.
   - No es posible curar una enfermedad si se la ignora.
   - Si tú me dices "¡ven!", lo dejo todo.
2. Decide si son verdaderas o falsas las siguientes implicaciones (x, y, z son números reales):

   $a)$ $x = 1$ e $y = 5 \Longrightarrow x/y = 1/5$.
   $b)$ $(x-y)(x-2y) = 0 \Longrightarrow x = y$.
   $c)$ $x^2 + y^2 \neq 0 \Longrightarrow x \neq 0$ e $y \neq 0$.
   $d)$ $xy = xz \Longrightarrow y = z$.
   $e)$ $x^3 > y^2 \Longrightarrow x > 0$.
   $f)$ $\sqrt{x} = \pm y \Longrightarrow x > 0$.
3. Sean A, B y C conjuntos. Discute si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) $(A \subseteq B) \vee (B \subseteq A) \Rightarrow A = B$.

b) $A \subset B \Rightarrow A \neq B$.

c) $(A \subset B) \wedge (B \subset C) \Rightarrow A \subset C$.

d) $(A \subset B) \wedge (A \subset C) \Rightarrow B \cap C = A$.

e) $(A \subset B) \wedge (A \subseteq C) \Leftrightarrow A = B \cap C$.

f) $(A \subset B) \wedge (A \subseteq C) \Leftrightarrow A \subseteq B \cap C$.

g) $(A \subset B) \wedge (A \subseteq C) \Leftrightarrow A = C$.

4. El punto de equilibrio en Economía indica el volumen de ventas que debe alcanzar una empresa para cubrir sus costes totales (fijos + variables). Consideramos las siguientes variables (símbolos) para representar los distintos conceptos:

   V =volumen de ventas

   CT =costes totales

   R =resultados (pérdidas o beneficios)

   Enuncia la condición necesaria y suficiente de existencia de punto de equilibrio de acuerdo con la definición dada.

2.4.1. Relaciones entre implicaciones.

Siempre que tenemos una implicación $p \Rightarrow q$, a la que llamamos **implicación directa**, como por ejemplo: 'Si he sacado una nota superior a 12.5, estudio Medicina', podemos escribir, con independencia de su veracidad o falsedad las implicaciones:

Recíproca: $q \Rightarrow p$. En el ejemplo, 'Si estudio Medicina, he sacado una nota superior a 12.5'.

Contraria: $\neg p \Rightarrow \neg q$. 'Si no he sacado una nota superior a 12.5, no estudio Medicina'.

Contrarrecíproca: $\neg q \Rightarrow \neg p$. 'Si no estudio Medicina, no he sacado una nota superior a 12.5'.

La verdad o falsedad de las implicaciones recíproca y contraria no depende del valor de la implicación directa. En el ejemplo, si partimos de que la implicación es cierta, mirando a la recíproca, del hecho de que 'estudie Medicina' no podemos concluir que 'la nota haya sido superior a 12.5', ya que puede haber sacado un 12.4 y haber obtenido plaza con esa calificación. Por la misma razón, en la implicación contraria, si es cierto que 'no he sacado una nota superior a 12.5', no tiene que ser cierto 'no estudio Medicina'.

Veamos qué ocurre con la contrarrecíproca:

Sabemos que siempre que p es cierta, q también lo es, de modo que en el momento en que la evidencia muestra que q es falso, debe ser también falso p, esto es, si es cierto $\neg q$, entonces es cierto $\neg p$, lo que supone que las proposiciones directa y contrarrecíproca son equivalentes:

$$p \Rightarrow q \quad \Leftrightarrow \quad \neg q \Rightarrow \neg p$$

Este resultado es fundamental en nuestro propósito de 'aprender a demostrar' ya que no son pocas las ocasiones en las que a la hora de probar la proposición $p \Rightarrow q$ lo que haremos será demostrar su contrarrecíproca $\neg q \Rightarrow \neg p$, como veremos en la sección 3.3.3.

En nuestro ejemplo parece claro que si no estudio Medicina deduzco inmediatamente que no he sacado una nota superior a 12.5. Si añadiéramos una columna en la tabla de la verdad para $\neg q \Rightarrow \neg p$, los valores serían idénticos a los de la columna $p \Rightarrow q$.

Ejercicios.

Terminamos la sección con un par de ejercicios en los que puedes aplicar todo lo aprendido en este capítulo.

1. Prueba que la proposición $(p \wedge q) \implies (r \vee s)$ es lógicamente equivalente a la proposición $(\neg r \wedge \neg s) \implies (\neg p \vee \neg q)$
2. En los ejercicios 1 y 2 de la sección 2.4 escribe las implicaciones contrarias, recíprocas y contrarrecíprocas y decide, en cada caso, si son verdaderas o falsas.

Capítulo 3

Técnicas de demostración

3.1. Introducción

Abordamos ahora la parte fundamental de este documento. En los capítulos anteriores nos hemos centrado en motivar y discutir la necesidad del razonamiento matemático e introducir el lenguaje de la lógica; ha llegado el momento de afrontar el objetivo clave: **la demostración** en Matemáticas.

Según el diccionario de la Real Academia Española (RAE) demostar es: "hacer ver la verdad de algo mediante un razonamiento o prueba". Parafraseando esta definición, una demostración en Matemáticas constite en hacer ver el valor (de verdad o falsedad) de una proposición utilizando la lógica como herramienta fundamental.

La demostración es ante todo un proceso creativo que requiere de capacidad de sintésis y abstracción. Esta es la principal razón por la que las demostraciones suelen provocar rechazo entre los estudiantes. Durante las etapas de educación primaria y secundaria, las Matemáticas básicamente han consistido para ti en aprender una determinada técnica que después repetías para asimilarla convenientemente. Esta reiteración tiene por objetivo que adquieras determinadas destrezas (por ejemplo de cálculo). En un determinado momento, los contenidos matemáticos evolucionan, aparecen ejercicios o problemas que no se resuelven con un procedimiento establecido (algoritmo o *receta*), sino que requieren de cierta creatividad o imaginación. Esta situación puede desconcertarte inicialmente, e incluso generarte frustración; de hecho, en ocasiones, alumnos que habían obtenido buenos resultados en Matemáticas en cursos de formación básica, tienen un fracaso inicial en cursos posteriores. Una situación similar se plantea cuando en Matemáticas comienzan a aparecer teoremas y sus demostraciones.

Por lo comentado anteriormente, nuestro objetivo se antoja complicado: *¿cómo se puede enseñar a ser creativo?* No pretendemos crear genios (ellos nacen solos), nuestro propósito es más modesto, nuestro afán se centra en presentar ciertas estrategias que pueden ayudarte en primer lugar a entender una demostración y posteriormente a desarrollar nuevas pruebas. Es decir, estamos convencidos de que se puede **aprender a demostrar**, y ese es el objetivo de este documento. No obstante, como en casi todas las facetas de la vida, existen dos factores determinantes para alcanzar el éxito:

- Esfuerzo, dedicación. La asimilación de los razonamientos utilizados en una demostración es un trabajo personal que require tiempo.
- Experiencia. Al enfrentarse a una demostración, identificar un problema similar del que se conoce la resolución es de gran ayuda.

El capítulo se organiza de la siguiente manera. En primer lugar daremos algunas pautas para afrontar una demostración. Se trata de una serie de recomendaciones para organizar la información y decidir la estrategia a seguir. En realidad, nuestro *algoritmo* se podría aplicar en la resolución de problemas en otros ámbitos de nuestra vida cotidiana (ver Fig. 3.1).

Resolución Problema	**Esquema demostración**
1. Entender el problema	1. Analizar y clasificar la proposición
2. Buscar herramientas	2. Revisar contenidos relacionados
3. Diseñar un plan	3. Seleccionar estrategia de demostración
4. Ejecutar el plan	4. Desarrollar la demostración
5. Mirar hacia atrás	5. Revisar y mejorar

Figura 3.1: Esquema de demostración

En una segunda parte de este capítulo, describiremos las principales técnicas de demostración que se utilizan en Matemáticas y las ilustraremos con numerosos ejemplos:

- Prueba directa
- Proceso progresivo-regresivo
- Paso al contrarrecíproco o contraposición
- Demostración por reducción al absurdo o por contradicción
- Inducción
- Demostración por casos
- Método constructivo


Figura 3.2: David Hilbert (izquierda) y Carl Friedrich Gauss (derecha)

- *Idea feliz*

Ante de comenzar te animamos a que reflexiones sobre dos citas de dos grandes matemáticos relacionadas con el tema que nos ocupa [6, 1]:

> *Una demostración consiste en una sucesión de fórmulas que, o bien son axiomas, o bien son teoremas, o se han obtenido de estas mediante inferencias admisibles.* ***David Hibert*** *(1862-1943).*
>
> *Los encantos de esta ciencia sublime, las matemáticas, solo se le revelan a aquellos que tiene el valor de profundizar en ella.* ***Carl Friedrich Gauss*** *(1777-1855).*

3.2. Preparando una demostración

Como ante cualquier problema cotidiano, cuando se aborda una demostración se debe realizar una primera etapa de análisis que nos permita construir un plan para alcanzar el objetivo. A continuación describimos unas pautas, que aun siendo básicas, consideramos fundamentales para abordar una demostración con garantías. Estas etapas aparecen enumeradas en la Fig. 3.1.

Con el objetivo de ilustrar cada uno de estos pasos, proponemos ahora una serie de enunciados o proposiciones a los que haremos referencia durante el resto de este capítulo:

$\mathbf{P_1}$: Si n es un entero impar entonces $3n + 7$ es entero par

$\mathbf{P_2}$: Un triángulo rectángulo XYZ con hipotenusa z tiene área $z^2/4$ si y solo si es isósceles

$\mathbf{P_3}$: Sea $n \in \mathbb{N}$. Si n^2 es par entonces n es par

$\mathbf{P_4}$: $\sqrt{2}$ es irracional

$\mathbf{P_5}$: $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{(1+n)n}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\mathbf{P_6}$: Si $n \in \mathbb{Z}$, entonces $n^2 + n$ es par

$\mathbf{P_7}$: Existen $a, b \in \mathbb{I}$ tal que $a^b \in \mathbb{Q}$.

$\mathbf{P_8}$: Sea $\{a_n = cr^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión (progresión) geométrica de razón $r > 0$

Determina la suma de los n primeros términos.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

3.2.1. Analizar y clasificar la proposición

Antes de resolver un problema, hay que entenderlo, saber las herramienta con las que contamos y tener claro el objetivo final. Este primer paso es fundamental pues marcará la estrategia a seguir. Siendo más precisos, en esta etapa se deben responder tres cuestiones:

- ¿A qué tipo de proposición nos enfrentamos (*implicación/doble implicación; universal/existencial*)?
- ¿Qué resultados se están asumiendo (*hipótesis*)?
- ¿Qué se debe demostrar (*tesis*)?

La primera cuestión hace referencia a la clasificación del enunciado o proposición. Existen diferentes criterios para clasificar proposiciones ([18]), aunque en este momento solo nos interesa la relación del enunciado con respecto a la implicación y al cuantificador. En relación a la implicación distinguimos:

- **Implicación simple (condición necesaria o suficiente)**. Se trata de resultados que pueden ser reescritos en la forma:

  Si se asume . . . **entonces** . . .

La estructura lógica asociada es $\boxed{p \Rightarrow q}$, que fue descrita en 2.4. Recuerda que la expresión anterior también admite la lectura, p es condición suficiente para q, o q es condición necesaria de p.

- **Doble implicación (condicion necesaria y suficiente)**. En este caso el enunciado establece una equivalencia entre dos resultados. Podrían ser reescritos de la forma:

  Bajo ciertos supuestos.
  Se tiene .... **si y solo si** se tiene ...

  La estructura lógica asociada es $\boxed{p \Leftrightarrow q}$, que fue descrita en 2.4. La expresión anterior también se lee, p es condición necesaria y suficiente para q. Piensa que todo problema con esta estructura siempre puede ser descompuesto en dos implicaciones simples ($p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow p$). De hecho, como veremos después, esta suele ser una estrategia bastante usual para abordar la demostración de una doble implicación.

Por otro lado, con respecto al cuantificador (secciones 1.3.2 y 2.2) distinguimos:

- **Cuantificador universal**. Se trata de proposiciones que se enuncian para todos los *objetos* de un determinado dominio (digamos aquellos que satisfacen determinadas condiciones). A menudo el cuantificador viene expresado en forma implícita, no obstante, el enunciado siempre se podría reescribir de la forma:

  Para todo ... que satisface ... se verifica....

- **Cuantificador existencial**. En este tipo de proposiciones se **busca** un elemento particular dentro del dominio que satisface determinada propiedad. En general, siempre podrán ser reescritas de la forma

  Bajo cierto supuestos
  Existe ... que verifica ...

  Este tipo de proposiciones, a su vez pueden ser de existencia simple, existencia y unicidad o de imposibilidad (niegan la existencia).

Date cuenta que toda proposición expresada en términos del cuantificador universal puede expresarse en términos del cuantificador exitencial utilizando la negación (ver sección 2.3), y recíprocamente.

Una vez clasificada la proposición, se debe establecer qué enunciados se asumen como ciertos, es decir, aceptamos como **hipótesis**, y qué resultados se deben demostrar, es decir, constituyen la **tesis**. En ocasiones las hipótesis pueden aparecer de forma implícita y las tesis formar parte del problema. Corresponden a este segundo tipo los enunciados o problemas que plantean una cuestión. La solución del problema es la tesis (o parte de ella), y obviamente desconocida.

Analizamos ahora cada una de las proposiciones que enuciábamos al inicio de esta sección:

$\mathbf{P_1}$: Si n es un número entero impar entonces $3n+7$ es entero par

- Clasificación: Implicación simple ($p \Rightarrow q$), cuantificador universal (*Todo/cualquier número entero que es impar ...*)
- Hipótesis: Sea $n \in \mathbb{N}$ impar.
- Tesis: $3n+7$ es impar.

$\mathbf{P_2}$: Un triángulo rectángulo XYZ con hipotenusa z tiene área $z^2/4$ si y solo es isósceles.

- Clasificación: Doble implicación ($p \Leftrightarrow q$), cuantificador universal.
- Suficiencia, $\boxed{p \Rightarrow q}$
  - Hipótesis: Sea T=XYZ un triángulo rectángulo, de hipotenusa z y área $\frac{z^2}{4}$.
  - Tesis: T es isósceles.
- Necesidad, $\boxed{p \Leftarrow q}$
  - Hipótesis: Sea T=XYZ un triángulo rectángulo isósceles de hipotenusa z.
  - Tesis: El área de T es $z^2/4$.

$\mathbf{P_3}$: Sea $n \in \mathbb{N}$. Si n^2 es par entonces n es par.

- Clasificación: Implicación simple ($p \Rightarrow q$), cuantificador universal.
- Hipótesis: Sea $n \in \mathbb{N}$, con n^2 par.
- Tesis: El número n es par.

$\mathbf{P_4}$: $\sqrt{2}$ es irracional.

- Clasificación: Implicación simple ($p \Rightarrow q$), cuantificador universal.
- Hipótesis: Sea $x \in \mathbb{R}$, tal que $x^2 - 2 = 0$.
- Tesis: El número x es irracional.

$\mathbf{P_5}$: $1 + 2 + \ldots + n = \frac{(1+n)n}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- Clasificación: Implicación simple ($p \Rightarrow q$) (*Sea* $n \in \mathbb{N}$, *entonces para todo* n *se satisface la relación* $1 + 2 + \ldots + n = \frac{(1+n)n}{2}$), cuantificador universal.
- Hipótesis: Sea $n \in \mathbb{N}$.
- Tesis: $1 + 2 + \ldots + n = \frac{(1+n)n}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

P$_6$: Si $n \in \mathbb{Z}$, entonces $n^2 + n$ es par.

- Clasificación: Implicación simple ($p \Rightarrow q$), cuantificador universal.
- Hipótesis: Sea $n \in \mathbb{Z}$.
- Tesis: $n^2 + n$ es par.

P$_7$: Existen $a, b \in \mathbb{I}$ tal que $a^b \in \mathbb{Q}$.

- Clasificación: Implicación simple ($p \Rightarrow q$), cuantificador existencial.
- Hipótesis: Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales. $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.
- Tesis: Existen $a, b \in \mathbb{I}$ tal que $a^b \in \mathbb{Q}$. (a^b es un número racional).

P$_8$: Sea $\{a_n = cr^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión (progresión) geométrica de razón $r > 0$. Determina la suma de los primeros n términos.

- Clasificación: Simple implicación ($p \Rightarrow q$), cuantificador universal.
- Hipótesis: Sea $\{a_n = cr^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión (progresión) geométrica de razón $r > 0$
- Tesis: Desconocida, se trata de la solución del problema.

3.2.2. Revisar contenidos relacionados

Tras clasificar y asimilar el enunciado que perseguimos demostrar, es de gran ayuda recopilar todas las herramientas que nos permitan llevar a cabo nuestro propósito. Por herramientas entendemos aquí todos los contenidos relacionados adquiridos durante etapas previas de la formación en Matemáticas. Es conveniente por tanto relacionar el enunciado con alguno de los campos matemáticos (geometría, álgebra, análisis, probabilidad, etc.) y buscar (o recordar) información relevante relacionada. Esta etapa está ligada a los conocimientos adquiridos y asimilados (lo que habitualmente solemos denominar *base*). Evidentemente, una buena formación será una garantía de éxito, de forma análoga, disponer de más y mejores herramientas contribuyen a la resolución eficiente de un problema (en sentido amplio).

A continuación, analizamos los contenidos asociados a cada uno de los enunciados que utilizamos como hilo conductor de este capítulo:

P$_1$: Si n es un número entero impar entonces $3n+7$ es entero par.

- Aritmética básica de números naturales: propiedad distributiva, factor común.
- Definición de números pares e impares: los números pares son de la forma $2k$ con $k \in \mathbb{Z}$, los números impares son de la forma $2k+1$ con $k \in \mathbb{Z}$.

P$_2$: Un triángulo rectángulo XYZ con hipotenusa z tiene área $z^2/4$ si y solo es isósceles.

- Área de un triángulo ($A = \frac{bh}{2}$).
- El triángulo rectángulo tiene uno de sus ángulos recto.
- Teorema de Pitágoras ($x^2 + y^2 = z^2$).
- Un triángulo isósceles tiene dos de sus lados iguales.

P$_3$: Sea $n \in \mathbb{N}$. Si n^2 es par entonces n es par.

- Aritmética básica.
- Definición de números pares e impares.

P$_4$: $\sqrt{2}$ es irracional.

- $x = \sqrt{2}$ si y solo si es solución de la ecuación $x^2 - 2 = 0$.
- Un número es irracional ($\mathbb{I}$) si es real y no racional.
- Todo número racional $x \in \mathbb{Q}$ puede ser expresado como $x = \frac{n}{m}$ siendo n y m enteros primos entre sí.

P$_5$: $1 + 2 + \ldots + n = \frac{(1+n)n}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- Aritmética básica.

P$_6$: Si $n \in \mathbb{Z}$, entonces $n^2 + n$ es par.

- Aritmética básica.
- Definición de números pares e impares.
- Identidades notables: $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$.

P$_7$: Existen $a, b \in \mathbb{I}$ tal que $a^b \in \mathbb{Q}$.

- Un número es irracional ($\mathbb{I}$) si es real no racional ($\mathbb{Q}$).
- Todo número racional $x \in \mathbb{Q}$ puede ser expresado como $x = \frac{n}{m}$ siendo n y m enteros primos entre sí.
- Basta encontrar dos números irracionales que satisfagan el enunciado. ¿Qué números irracionales conocemos y son *manejables*? $\sqrt{2}, \pi, e$.

P$_8$: Sea $\{a_n = cr^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión (progresión) geométrica de razón $r > 0$. Determina la suma de los n primeros términos.

- Sucesión geométrica: definición, propiedades (el término general de una sucesión geométrica es de la forma $a_n = cr^n$, con $c \in \mathbb{R}$).
- Aritmética básica.

3.2.3. Seleccionar estrategia de demostración

Hasta este momento las indicaciones que hemos apuntado son totalmente objetivas y unívocas. Presentaremos ahora algunas de las ténicas de demostración más usuales, que serán convenientemente desarrolladas en la siguiente sección, y proporcionaremos algunas pautas que pueden permitir seleccionar la más adecuada en cada caso. Se trata de una serie de recomendaciones o sugerencias que deben servir de guía para iniciar el proceso de demostración, pero que **no pueden** ser tomadas de forma categórica y que son difícilmente generalizables. Es decir, no existe un algoritmo, procedimiento o receta que permita demostrar. No obstante, existen algunos avances en esta línea en los nuevos desarrollos de inteligencia artificial basados en la potencia de cálculo y de almacenamiento de los grandes ordenadores, técnicas que no son aplicables al ser humano.

Como apuntábamos al inicio de este capítulo, la demostración es un proceso creativo y por lo tanto resulta complicado determinar un itinerario general para abordarla. Por otro lado, es bien conocido que una demostración en Matemáticas puede realizarse de diversos modos (en el libro [19] se presentan hasta 367 demostraciones diferentes del teorema de Pitágoras). Además, dentro de una misma demostración es habitual que se combinen diferentes técnicas (la demostración clásica del teorema de Bolzano involucra una demostración por casos, un proceso por inducción y finalmente emplea el método reducción al absurdo o por contradicción).

Antés de seleccionar, o quiza deberíamos decir intentar, un método de demostración, sugerimos un par de recomendaciones motivadas por otros tantos *dichos populares*:

- *La experiencia es un grado*. Al enfrentarse a una demostración es especialmente recomendable tratar de recordar afirmaciones semejantes que han sido estudiadas con anterioridad. Con mucha frecuencia, las técnicas empleadas pueden proporcionar estrategias que pueden ser extrapoladas al caso en cuestión. Por ejemplo, la demostración de la proposición $\mathbf{P_1}$ presenta ciertas analogías con la de la proposición $\mathbf{P_3}$, a pesar de utilizar diferente técnica.

- *Divide y vencerás*. Para abordar la demostración de una proposición es recomendable trabajar con una simplificación, construir un esquema, dividir el proceso en etapas. Este consejo está directamente relacionado con la técnica que más abajo denominamos demostración por casos. Por otro lado, la proposición $\mathbf{P_5}$, se puede comprobar de forma directa para los primeros números naturales,

$$\begin{aligned}
n = 1: &\qquad 1 = \frac{(1+1)1}{2} \\
n = 2: &\qquad 1+2 = 3 = \frac{(2+1)2}{2} \\
n = 3: &\qquad 1+2+3 = 6 = \frac{(3+1)3}{2}
\end{aligned}$$

  Esta observación, veremos después que es fundamental para abordar una demostración por medio de una técnica denominada *inducción matemática*.

En lo que sigue, asumiremos que nos enfrentamos a proposiciones del tipo implicación simple ($p \Rightarrow q$). Esto no supone ninguna limitación, pues como ya comentamos antes la doble implicación se puede reescribir como dos implicaciones simples.

Pasamos ahora, a describir los métodos de demostración, para después dar algunas pautas sobre su utilización. Agruparemos las técnicas de demostración en tres grandes grupos:

- **Grupo 1**: Trabajan sobre la implicación. Tras identificar la proposición $p \Rightarrow q$, estos métodos *manipulan* las hipótesis hasta obtener la tesis. Existen dos subgrupos: los que trabajan directamente con la proposición $p \Rightarrow q$ (prueba directa y proceso progresivo-regresivo) y los que modifican la proposición para su tratamiento (paso al contrarecíproco y reducción al absurdo o demostración por contradicción).

  La prueba directa es la estrategía básica y más sencilla; parte de las hipótesis y las manipula convenientemente con las correspondientes herramientas para obtener la tesis:

$$\boxed{p \Rightarrow p_1 \Rightarrow p_2 \ldots\ldots \Rightarrow p_n \Rightarrow q}$$

El proceso progresivo regresivo supone una generalización del método anterior. En este caso se trabaja de forma bidireccional, tanto con la hipótesis p como con la tesis q con el objetivo de obtener enunciados equivalentes que permitan concluir:

$$\boxed{p \Leftrightarrow p_1 \Leftrightarrow p_2 \ldots\ldots \Leftrightarrow p_n \quad \Rightarrow \quad q_n \Leftrightarrow \ldots\ldots \Leftrightarrow q_2 \Leftrightarrow q_1 \Leftrightarrow q}$$

El paso entre enunciados se realiza a través de la denominada pregunta de abstracción (ver [31]). Estos métodos serán tratados en las secciones 3.3.1 y 3.3.2. Las proposiciones $\mathbf{P_1}$ y $\mathbf{P_2}$ serán respectivamente demostradas con estos procedimientos.

El método de paso al contrarecíproco demuestra $\neg\, q \Rightarrow \neg\, p$ (en lugar de $p \Rightarrow q$), que como ya vimos en 2.4.1 son proposiciones equivalentes. La proposición $\mathbf{P_3}$ será analizada con este procedimiento, es decir, se reescribirá: "Sea $n \in \mathbb{N}$, si n es impar entonces n^2 es impar". Ver sección 3.3.3 para más detalles.

Por último, la demostración por reducción al absurdo asume p y $\neg q$ y trata de obtener una contradicción (o absurdo), desde el que se concluye que $\neg q$ no es posible y por lo tanto debe serlo q. Se trata de un método indirecto y de gran potencia. La demostración de la proposición $\mathbf{P_4}$ se abordará con este método: se asumira que $\sqrt{2}$ es racional, y por tanto se puede escribir como fracción irreducible. Tras un razonamiento lógico (y correcto) se probará que la fracción no puede ser irreducible. Para más detalles ver la sección 3.3.4.

- **Grupo 2**: Aplican un método de *reducción*. Este tipo de procedimientos tratan de reducir la complejidad del problema. Bien porque el problema puede dividirse en casos o bien porque depende de un parámetro (dimensión, grado de polinomio, $n \in \mathbb{N}$) que hace que para valores bajos del mismo el resultado sea sencillo de demostrar.

  En el primer subgrupo estaríamos hablando de la demostración por casos. El problema se divide en diferentes casos que deben ser más fáciles de tratar. Este procedimiento debe después combinarse con otras estrategias (Grupo 1 o Grupo 3). La demostración de la proposición $\mathbf{P_6}$ ilustra este procedimiento (sección 3.3.6).

  En el segundo subgrupo nos referimos a la denominada *inducción matemática*. Básicamente se demuestra la proposición para un primer valor del parámetro, y después se debe demostrar que si la proposición es verdadera para cierto valor de parámetro también los será para el siguiente. La concatenación de ambos resultados permite concluir que el resultado es cierto para cualquier valor de parámetro.

La proposición $\mathbf{P_5}$ utiliza esta técnica. Este procedimiento es muy clásico en Matemáticas y se suele estudiar en los primeros cursos de formación universitaria. Será tratado en la sección 3.3.5.

- **Grupo 3**: Otros métodos. Pertenecen a este grupo procedimientos como el método constructivo, o el denominado *idea feliz*. El método constructivo es apropiado en proposiciones en las que interviene el cuantificador existencial, consiste en *fabricar* un objeto que resuelva el problema. Por ejemplo, la demostración del enunciado $\mathbf{P_7}$, que será tratada en la sección 3.3.7.

  Por último, el procedimiento catalogado como *idea feliz*, tal y como su nombre indica es una idea, un concepto, un artificio que simplifica el problema o cambia el punto de vista del mismo, de modo que facilita drásticamente su resolución. Sin duda se trata del método más difícil de *enseñar*, pues es fruto del ingenio, creatividad o imaginación del individuo. Dedicaremos la sección 3.3.8 a este procedimiento, que utilizaremos para demostar $\mathbf{P_8}$.

Para finalizar, proponemos una serie de pautas que pueden servir de ayuda para decidir la estrategia más apropiada para acometer una demostración. Como comentábamos al inicio, no deben tomarse estas indicaciones como un *algoritmo*, pues es muy complicado *empaquetar* toda la casuística a la que nos enfrentamos en una simple *receta*.

1. Si la proposición utiliza el cuantificador existencial, el método constructivo debe ser considerado.

2. Si el enunciado permite una clasificación por casos o depende de un parámetro, se debe analizar la viabilidad de los procedimientos del grupo 2 (demostración por casos, inducción).

3. Para trabajar con la implicación, primero se explorarán los métodos que analizan la implicación directa (prueba directa, proceso progresivo-regresivo). Si este tratamiento no es viable o resulta complejo, se abordará primero el método de paso al contrarecíproco y por último la demostración por reducción al absurdo.

3.2.4. Desarrollar la demostración

Tras todo este preámbulo, llega el momento de actuar, de concatenar hipótesis y conocimientos previos por medio de desarrollos lógicos motivados por el método de

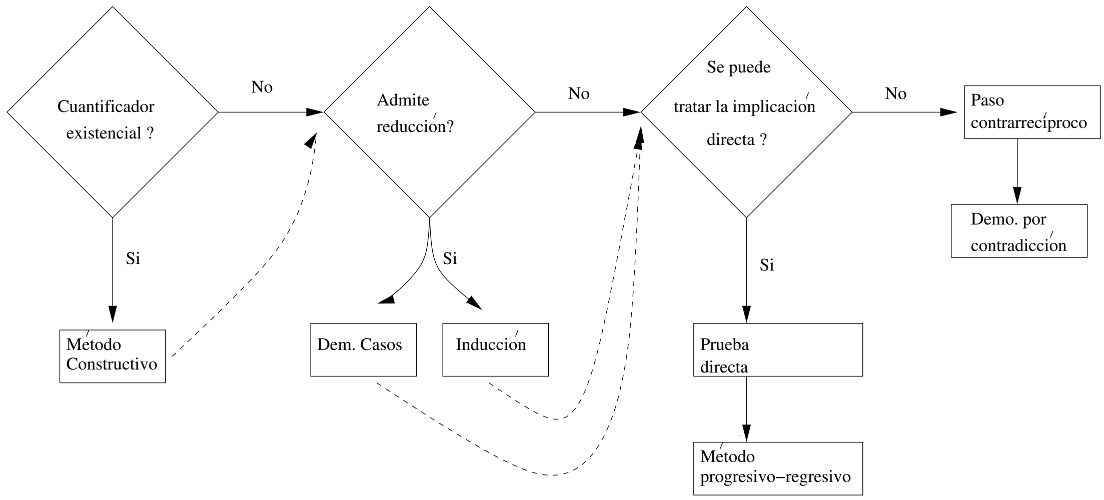


Figura 3.3: Esquema selección método de demostración

demostración seleccionado. No hay mucho más que decir al respecto. Como si se tratara de un manual de autoayuda, nos permitimos apuntar una serie de consejos que conviene tener en cuenta:

- *No pierdas de vista el objetivo.* En la resolución de un problema es habitual *perderse* en las manipulaciones algebraicas, y olvidar el verdadero objetivo. Es conveniente tener presente en todo momento *dónde estamos* y a *dónde queremos llegar*.

- *Aprende del fracaso.* Contribuyen más a la formación aquellos problemas que se intentan de forma reiterada que los que se resuelven de forma directa (*a la primera*). Al fracasar en el proceso de demostración, se están desarrollando estrategias, que no están funcionando en este caso, pero que pueden ser útiles en el futuro. Por otro lado, la solución de los problemas que requieren de mucho esfuerzo (o sucesivos intentos) se fija mejor en nuestra memoria.

- *Tolera la frustración.* Realizar demostraciones involucra manejar un (nuevo) lenguaje y utilizar sus reglas (lógicas) para construir argumentos: no es un proceso sencillo y requiere su tiempo. Son habituales comentarios del tipo: *¿por dónde empiezo?*, *¡no se me ocurre nada!*. Las ideas requieren un tiempo de maduración, y se consiguen con paciencia y esfuerzo.

3.2.5. Revisar y mejorar

Finalmente, se insta a revisar el trabajo efectuado en busca de posibles errores y, sobre todo, en busca de mejoras y simplificaciones. En general, cuando se aborda la demostración de una proposición, la primera solución contiene etapas redundantes o superfluas que pueden ser eliminadas para una lectura más sencilla. Tras construir la demostración se entiende mejor el enunciado, sus consecuencias e implicaciones y ello puede ayudar a depurar el resultado.

Ejercicios

Presentamos a continuación una serie de cuestiones. El primer ejercicio se centrará en el análisis de diversas proposiciones, después presentamos algunas estrategias clásicas inspiradas en [9] que es conveniente tener en cuenta al abordar un problema.

1. Clasifica las siguientes proposiciones:

   a) Existe un entero n tal que $n^2 - 5\frac{n}{2} + \frac{3}{2} = 0$.

   b) Sea r una recta y P un punto no contenido en ella. Demuestra que existe una recta r', que pasa a través de P y es paralela a r.

   c) Toda función real definida sobre un intervalo $[a, b]$ y continua, que toma distinto signo en los extremos tiene al menos una raíz real.

   d) Sea A un conjunto de $\mathbb{R}^2$. Entonces A es compacto si y solo A es cerrado y acotado.

   e) Existen infinitos números primos.

   f) La longitud de una circunferencia de radio r es $2\pi r$.

   g) El número áureo es irracional.

2. (*Comienza con un problema más sencillo*) Cuando un problema resulta complejo, es conveniente construir uno semejante lo más sencillo posible y tratar de resolverlo, para después volver al original con la experiencia adquirida.

   a) Consideremos un juego de dos jugadores A y B. Inicialmente se colocan 45 monedas sobre una mesa. En cada turno, cada jugador puede quitar entre 1 y 7 monedas. Gana quien se lleve la última moneda. ¿Qué jugador parte con ventaja?, ¿cuál es la estrategia óptima?

   <u>Indicación</u>: Modifica las reglas: menos monedas, solo se pueden quitar 1 o 2 cada vez.

b) ¿Cuántas diagonales tiene un polígono de 85 lados?

c) Consideremos una región poligonal del plano sin agujeros (los matemáticos lo llaman conjunto abierto simplemente conexo). Se denomina triangulación de la región anterior a una subdivisión en triángulos de modo que la intersección de dos de ellos es un vértice, una arista, o el vacío. Si T, A y V denotan el número de triángulos, artistas y vértices, respectivamente, se verifica:

$$T + V = A - 1$$

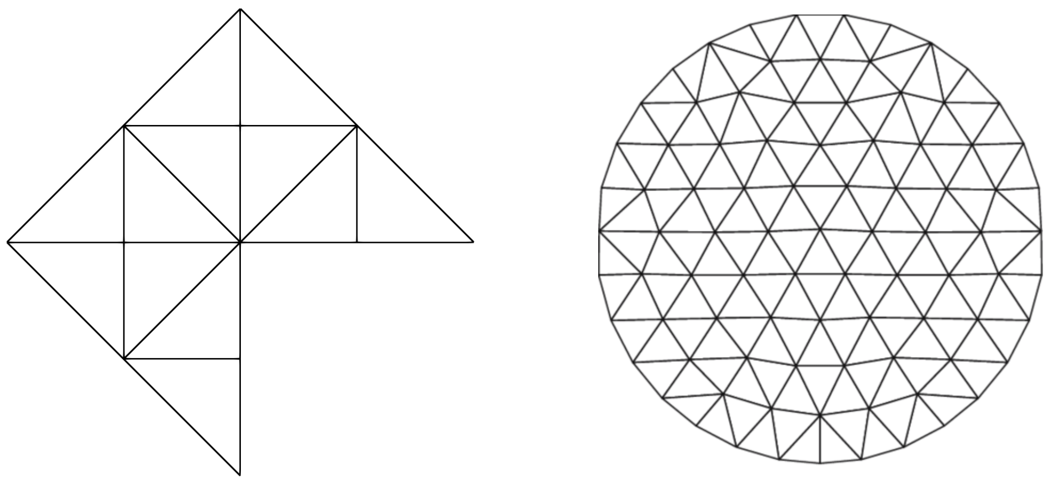


Figura 3.4: Diversas triangulaciones de regiones *simplemente conexas*. $T + V = A - 1$

Indicación: Comienza con un triángulo, y estudia cómo evoluciona la fórmula al añadir nuevos triángulos (los triángulos añadidos siempre deben compartir al menos una arista con la región anterior, pues en otro caso se violaría la condicición de abierto simplemente conexo).

3. (*Un buen esquema facilita la resolución*) Un buen esquema nos permite entender el problema y después afrontar su resolución. En ocasiones el propio esquema ofrece la demostración rigurosa, y en otros casos es una clave fundamental para abordar el proceso análitico.

a) Tres estudiantes X, Y y Z juegan a las cartas en la cafetería de la Facultad.

Se sabe que uno estudia Economía, otro ADE y el tercero *PYMEs*. Cada uno pasa una carta al que se sienta a la derecha. Si el estudiante Y ha pasado al alumno de ADE, y el estudiante X se la ha pasado al estudiante que ha pasado la carta al estudiante de *PYMEs*, ¿qué estudian X, Y y Z?.

Indicación *Dibuja* la mesa y las diferentes posibilidades, después descarta las que no sean posibles.

b) Demuestra que los tres ángulos de un triángulo suman 180^{o}.

Indicación Observa la Fig 3.5.

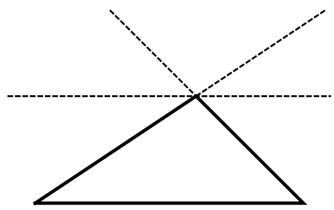


Figura 3.5: Los ángulos de un triángulo suman 180^{o}

c) Demuestra que para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

Indicación Observa la Fig 3.6. Este problema también se demostrará utilizando inducción matemática (ejercicio 1, sección 3.3.5).

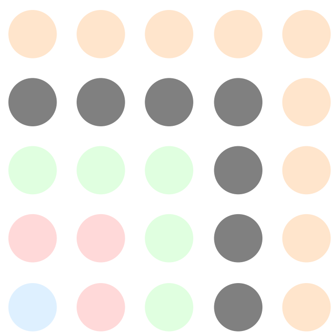


Figura 3.6: $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$

4. (*La notación/lenguaje es fundamental*) En el primer capitulo de este manual ya recordamos la importancia de la notación o el lenguaje para resolver un problema. Volvemos ahora sobre ello, con un par de ejemplos clásicos.

a) Un monje decide caminar desde su ermita a lo alto de una montaña. Inicia su camino a las 9 de la mañana y tras llegar a la cima pasa allí la noche. Al día siguiente inicia el descenso a la misma hora por el mismo camino. ¿Podrías demostrar que existe un lugar en el camino en el que el monje estuvo a la misma hora ambos días?

Indicación *Utiliza* dos monjes que caminan el mismo día.

b) Demuestra que el producto de 4 números enteros consecutivos más 1 es un cuadrado perfecto.

Indicación Tras una primera lectura, probablemente el lector trataría de demostrar que

$$a(a+1)(a+2)(a+3)(a+4)+1 \text{ donde } a \in \mathbb{Z} \text{ es cuadrado perfecto,}$$

sin embargo, no es sencillo como puede comprobarse. Por otro lado si se escoge m como el centro de los cuatro números consecutivos el problema puede escribirse:

$$\begin{gathered}\left(m-\frac{3}{2}\right)\left(m-\frac{1}{2}\right)\left(m+\frac{1}{2}\right)\left(m+\frac{3}{2}\right)+1, \\ m=\frac{a+(a+1)+(a+2)+(a+3)}{4}\end{gathered}$$

c) Sea $\mathcal{C}$ una circunferencia y en ella dos puntos distintos, no diametralmente opuestos, A y B. Demuestra que los ortocentros de los triángulos ABC, siendo C un punto de $\mathcal{C}$ distinto de A y B están situados sobre una circunferencia del mismo radio que la original.

Indicación Tras un giro, rotación y escalado, y renombrando los puntos si fuera necesario, se puede suponer que $A(-1,0)$, $B(1,0)$, y que el centro de la circunferencia está localizado en el eje OY, es decir $O=(0,\lambda)$ con $\lambda \in \mathbb{R}^+$ (ver Fig. 3.7).

5. (*Principio del palomar*) En Matemáticas existen estrategias extremadamente sencillas pero de gran potencia. Una de ellas es la denominada el principio del palomar (o principio de Dirichlet (1805-1859)). Se basa en la siguiente observación:

> Imaginemos que estamos observando un grupo de 21 palomas, que en un determinado momento se asuntan y se refugian en un palomar en el que existen 20 huecos. Es claro, que al menos 2 se metieron por el mismo

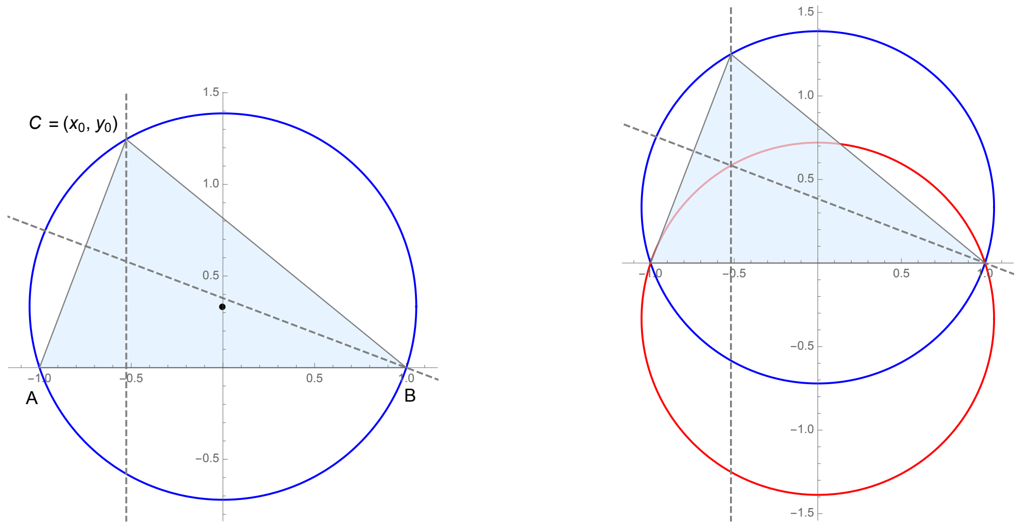


Figura 3.7: Circunferencia $\mathcal{C}$, triángulo ABC y su ortocentro (izquierda). Lugar geométrico de los ortocentros (derecha).

hueco.

Esta sencilla observación, permite afrontar problemas muy interesantes, que a priori pueden resultar complejos.

a) Demostar que en Madrid al menos hay 10 personas con el mismo número de pelos en la cabeza (según la medicina el número de pelos en la cabeza humana no supera los 200 000).

b) Considerar un triángulo equilátero de lado 2. Demuestra que dados 5 puntos cualesquiera en el interior del triángulo, al menos dos se encuentran a una distancia inferior a 1.

c) Dados 11 número enteros, demuestra que la diferencia entre dos de ellos es múltiplo de 10.

3.3. Principales técnicas

Dedicaremos esta sección a presentar las principales técnicas de demostración que aparecen en Matemáticas. Utilizaremos como hilo conductor las proposiciones/enunciados presentados en la sección 3.2. Nuestro objetivo **no es demostrar** estos resultado clásicos, que por otro lado pueden encontrarse en cualquier manual, nuestro propósito es describir de dónde surgen y cuáles son los razonamientos lógicos que nos permiten llevar a cabo estas demostraciones. Por supuesto, los argumentos no son únicos, y existen otras alternativas que se podrían explorar. Esto dará lugar a que nuestras exposiciones puedan parecer demasiado extensas (o incluso tediosas) a un lector *avanzado*. Si es tu caso, sugerimos que intentes realizar las demostraciones por ti mismo y después compares el resultado.

Al terminar la exposición de cada una de las proposiciones presentaremos la demostración tal y como podría aparecer en un libro de Matemáticas. A menudo estas pruebas son demasiado concisas, omiten cálculos intermedios y presuponen determinados conocimientos. Estas son las principales razones, por las cuales la lectura de un manual de Matemáticas no es sencilla y requiere de cierto entrenamiento. Por otro lado, cuando leemos una demostración se nos descubre *la ruta correcta*, pero no se comentan los intentos infructuosos, los ensayos estériles que son la base del método científico (*ensayo y error*). En estas notas trataremos de ilustrar estos aspectos, algo que sería inviable en un libro común.

3.3.1. Prueba directa

La prueba directa es la estrategia básica y más sencilla: parte de las hipótesis y las manipula convenientemente con las correspondientes herramientas para obtener la tesis. La prueba directa se basa en el *modus ponendo ponens* o *modus ponens*, que es una forma de argumento clásica y una regla de inferencia de la lógica proposicional que establece de forma simbólica: $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$. Dicho de otra forma, el *modus ponens* establece que si p implica q y si p es verdadero, entonces q también es verdadero.

Es un método de demostración natural, claro y transparente en el que se trabaja sobre la implicación. Después de identificar la proposición $p \Rightarrow q$, este método *manipula* la hipótesis p hasta llegar a la conclusión q. Esquemáticamente:

$$\boxed{p \Rightarrow p_1 \Rightarrow p_2 \ldots\ldots \Rightarrow p_n \Rightarrow q}$$

Es decir, en este tipo de demostración se aceptan las hipótesis como verdaderas y, a partir de estas, la veracidad de la conclusión se deduce mediante un proceso lógico deductivo, indicado arriba por las proposiciones intermedias $p_1, \ldots, p_n$. Estos pasos intermedios dependen de la habilidad y experiencia, y pueden ser dirigidos por la denominada *pregunta de abstacción* (ver [31]), a la que dedicaremos especial atención en la siguiente sección. Por el momento, digamos que la estrategia básica de este método consiste en llegar a la tesis de la forma más directa y sencilla posible. Para conseguir este fin podemos ayudarnos de resultados previos conocidos (axiomas, teoremas, proposiciones y lemas).

La prueba directa nos permite demostrar implicaciones del tipo $p(x) \Rightarrow q(x)$, donde x es un elemento de un conjunto S. En numerosas ocasiones el valor verdadero de $q(x)$ para cada x puede depender del valor verdadero de $p(x)$ para ese mismo elemento. Nosotros solo estamos interesados en demostrar que $p(x) \Rightarrow q(x)$ es verdadero para todos los elementos $x \in S$ para los cuales $p(x)$ es verdadero.

La prueba directa de $p(x) \Rightarrow q(x)$ para todos los elementos $x \in S$ consiste en tomar un elemento arbitrario $x \in S$, suponer que $p(x)$ es verdadero para ese elemento arbitrario $x \in S$ y entonces mostrar que $q(x)$ debe ser verdadero también para este elemento $x \in S$.

Ilustraremos este procedimiento con la proposición $\mathbf{P_1}$, de la que recordaremos además del enunciado toda la información que se ha comentado en la sección 3.2.

Ejemplo. $\mathbf{P_1}$ Si n es un número entero impar entonces $3n + 7$ es entero par.

En priner lugar, analizamos esta proposición:

- Clasificación: Implicación simple ($p \Rightarrow q$), cuantificador universal
- Hipótesis: Sea $n \in \mathbb{N}$ impar.
- Tesis: $3n + 7$ es impar.
- Conocimientos previos:
  - Aritmética básica de números naturales: propiedad distributiva, factor común.
  - Definición de números pares e impares: los números pares son de la forma $2k$ con $k \in \mathbb{Z}$, los números impares son de la forma $2k + 1$ con $k \in \mathbb{Z}$.
- Estrategia de demostración: Utilizaremos el método de prueba directa.

Este resultado es muy sencillo y directo. Solo tienes que pensar en cómo se puede escribir un número n par, y sustituir esa expresión en $3n + 7$ para deducir que es impar. Estas tres etapas que estamos describiendo, constituyen en este caso el *proceso lógico deductivo* al que hacíamos referencia en el apartado anterior. Veamos cómo hacerlo con todo detalle:

- **Paso 1**. Como n es par será de la forma $2k$, donde $k \in \mathbb{Z}$.

- **Paso 2**. Sustituimos en la expresión:

$$3n + 7 = 3(2k) + 7 = 6k + 7$$

- **Paso 3.** Veamos que el resultado anterior es impar: para ello tratamos de escribir el resultado anterior de la forma $2m + 1$, con $m \in \mathbb{Z}$. Un *poco* de aritmética básica nos permite concluir:

$$6k + 7 = 6k + 6 + 1 = 2(3k + 3) + 1 = 2m + 1, \quad \text{donde } m = 3k + 3 \in \mathbb{Z}$$

La demostración formal de este resultado, podría ser algo del tipo:

Demostración $\mathbf{P}_1$ *Puesto que n es par, se puede expresar de la forma $n = 2k$ para cierto $k \in \mathbb{Z}$, sustituyendo y agrupando:*

$$3n + 7 = 3(2k) + 7 = 6k + 7 = 2(3k + 3) + 1$$

que es impar, por se de la forma $2m + 1$ con $m \in \mathbb{Z}$. □

Como ya comentamos en el capítulo 1, en ocasiones la mayor dificultad está en el lenguaje que usan los *matemáticos*. Presentamos a continuación un ejemplo muy sencillo, pero que en una primera lectura podría alarmar al lego en la materia.

Ejemplo 3.1 (Ecuación de la circunferencia)**.** *Demuestra que el lugar geométrico de los puntos del plano (x, y) que equidistan de otro, de coordenadas (a, b) una distancia r, verifica:*

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Un enunciado alternativo sería:

Determina la ecuación de la circunferencia de centro (a, b) y radio r.

Recuerda, que cuando hablamos de *lugar geométrico de los puntos del plano*, nos referimos simplemente a un conjunto de puntos que satisfacen una propiedad (en este caso que están a la misma distancia de otro, que se denomina centro).

Procedemos a analizar esta proposición antes de afrontrar su demostración.

- <u>Clasificación</u>: Implicación simple ($p \Rightarrow q$), cuantificador universal

- <u>Hipótesis</u>: Sea $\mathcal{C}((a, b); r)$ la circunferencia de centro (a, b) y radio r.

- Tesis: Los puntos de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que pertenecen a $\mathcal{C}((a, b); r)$ satisfacen:

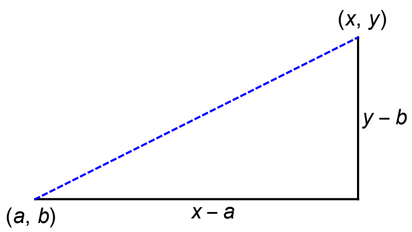
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

- Conocimientos previos:
  - Aritmética básica.
  - Distancia entre dos puntos en el plano (Teorema de Pitágoras).
- Estrategia de demostración: Prueba directa.

De nuevo, la demostración es muy sencilla, en realidad tan solo es necesario escribir de forma simbólica la información que nos proporciona el ejercicio: buscamos *todos* los puntos del plano que estén a distancia r del punto de coordenadas (a, b), es decir:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, d((x, y), (a, b)) = r\}$$

donde $d((x, y), (a, b))$ denota la distancia entre los puntos: (x, y), (a, b). Dado que estamos asumiendo que los puntos están expresados en coordenadas cartesianas, la distancia entre ellos viene dada por la siguiente expresión, que es una consecuencia directa del Teorema de Pitágoras como se observa en la Fig. 3.8:



$$d((x, y), (a, b)) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

Figura 3.8: Distancia entre los puntos (x, y), (a, b)

Utilizando esta expresión y elevando al cuadrado tenemos el resultado buscado:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\}$$

La demostración formal de este resultado podría ser la siguiente.

Demostración *Sea (x, y) un punto de la circunferencia $\mathcal{C}((a, b); r)$. De la defini-*

ción de circunferencia se infiere:

$$d((a,b),(x,y)) = r \Rightarrow \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = r \Rightarrow \boxed{(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2}$$

$\square$

Probablemente el cálculo integral y la trigonometría son dos de los campos que generan más animadversión en las matemáticas de secundaria. Presentamos ahora el conocido como teorema del seno, un resultado que relaciona los ángulos y lados de cualquier triángulo. Como podrás comprobar a continuación, la demostración es muy sencilla, y básicamente es una consecuencia directa de la definición del seno.

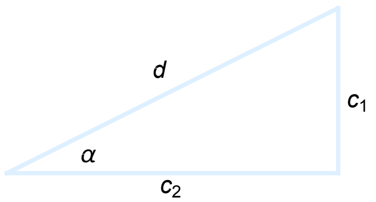
Ejemplo 3.2 (Teorema del seno)**.** *Sea T un triángulo de ángulos A, B y C, y lados opuestos de longitudes a, b y c. Demostar que se satisface:*

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$$

Analizamos la proposición:

- Clasificación: Implicación simple ($p \Rightarrow q$).
- Hipótesis: Sea T un triángulo ángulos de A, B y C, y lados opuestos de longitudes a, b y c.
- Tesis: $\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$.
- Resultados/conocimientos previos:
  - Geometría básica del triángulo: altura.
  - Razones trigonométricas: seno, coseno.
- Estrategia de demostración: Utilizaremos el método de prueba directa.

En este tipo de resultados geométricos, es recomendable dibujar un esquema, ver Fig. 3.10 (izquierda), que nos ayude durante el proceso de razonamiento. Puede ser que el esquema no sea suficientemente general, pero eso no debe preocuparnos en un primer momento (por ejemplo, en este caso, uno podría pensar que habría que considerar el caso de triángulos rectángulos, acutángulos y obtusángulos, aunque no será el caso). Si observamos la tesis, buscamos la relación entre ángulos y lados vía la función seno. Por lo tanto, lo primero debería ser recordar la definición de la función seno. La razones



$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{c_1}{d}$$
$$\cos\alpha = \frac{c_2}{d}$$
$$\tan\alpha = \frac{c_1}{c_2}$$

Figura 3.9: Razones trigonométricas seno, coseno y tangente.

Figura 3.10: Triángulo T de ángulos A, B y C y lados a, b y c (izquierda). Altura del triángulo T asociada al lado c (derecha.

trigonométricas se introducen sobre un triángulo rectángulo, como puedes ver en la Fig. 3.9. En concreto, el seno de un ángulo es la ratio entre las longitudes del cateto opuesto y la hipotenusa. Probablemente, estés pensando que el triángulo de nuestro enunciado no tiene por qué ser rectángulo y, por tanto, lo expuesto anteriormente no es aplicable. En cierto modo, tienes razón, a menos que consigamos hacer *aparecer* triángulos rectángulos no podremos aplicar la definición de seno. Estamos ante el paso clave de esta prueba, que consisten en introducir la altura (perpendicular desde el vértice de un triángulo al lado opuesto) de uno de los lados. Por ejemplo, en la Fig. 3.10 (derecha) hemos trazado la altura asociada al lado c. Esto genera dos triángulos rectángulos, que nos permiten escribir los senos de los ángulos A y B en función de la altura y los lados a y b:

$$\operatorname{sen} A = \frac{h}{b}, \qquad \operatorname{sen} B = \frac{h}{a}$$

Si ahora despejamos h de ambas relaciones e igualamos obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} h = b \operatorname{sen} A \\ \\ h = a \operatorname{sen} B \end{array}\right\} \Rightarrow \quad b \operatorname{sen} A = a \operatorname{sen} B \Rightarrow \quad \frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b}$$

Trabajando de forma análoga con otra de las alturas, obtenemos el resultado buscado. Nuestro razonamiento no depende del tipo de triángulo, o de si la altura *cae* o no sobre el lado opuesto. Dejamos los detalles al lector. Finalizamos con la demostración formal de este resultado.

Demostración *Sea h, la altura asociado al vértice C. Utilizando la definición de seno se tiene (ver Fig. 3.10 (derecha)):*

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen} A = \dfrac{h}{b} \\ \\ \operatorname{sen} B = \dfrac{h}{a} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad b \operatorname{sen} A = a \operatorname{sen} B \Rightarrow \quad \frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b}$$

Razonando de forma semejante con otra de las alturas, se concluye. □

Ejemplo 3.3. *Si $n \in \mathbb{Z}$, entonces $4n^3 + 2n - 1$ es impar.*

Analizamos esta proposición:

- Clasificación: Implicación simple ($p \Rightarrow q$).
- Hipótesis: Sea $n \in \mathbb{Z}$.
- Tesis: $4n^3 + 2n - 1$ es impar.
- Resultados/conocimientos previos:
  - Aritmética básica.
  - Definición de números pares e impares.
- Estrategia de demostración: Utilizaremos el método de prueba directa.

Nuestro objetivo es demostrar que la expresión dada es un número impar, esto es, que se puede escribir como $2k + 1$ para cierto $k \in \mathbb{Z}$. Si observamos

$$4n^3 + 2n - 1$$

es inmediato que los dos primeros sumandos son de la forma $2k$ con $k = 2n^3 + n$. Nos queda el -1, que es lo mismo que $-2+1$. Por supuesto, también podríamos haber razonado que los impares son de la forma $2k-1$, con $k \in \mathbb{Z}$, y concluiríamos directamente. Formalmente:

Demostración *Obseva que:*

$$4n^3 + 2n - 1 \;=\; 4n^3 + 2n - 2 + 1 \;=\; 2(2n^3 + n - 1) + 1$$

y, por tanto, de la forma $2k+1$ con $k \in \mathbb{Z}$, luego impar. □

Una forma alternativa de demostar esta proposición seria distinguir dos casos: n par ($n = 2k$), y n impar ($n = 2k+1$), sustituir en la expresión y manipular algebraicamente. Sería una demostración por casos, que se abordará en la sección 3.3.6.

A continuación presentamos un ejemplo que, a priori, podría considerar más complicado de lo que en realidad es. Toda la "dificultad" se concentra en interpretar la información que nos proporciona la hipótesis, hecho esto, el ejercicio es inmediato.

Ejemplo 3.4. *Sean $S = \{1,2,3\}$ y $n \in S$. Si $\frac{n(n+3)}{2}$ es par, entonces $\frac{(n+2)(n-5)}{2}$ es par.*

Analizamos esta proposición:

- Clasificación: Implicación simple ($p \Rightarrow q$).
- Hipótesis: Sea $n \in S = \{1,2,3\}$ tal que $\frac{n(n+3)}{2}$ es un número par.
- Tesis: $\frac{(n+2)(n-5)}{2}$ es un número par.
- Resultados/conocimientos previos:
  - Aritmética básica.
  - Definición de números pares e impares.

Como S es un conjunto finito, si reinterpretamos la hipótesis solo nos interesan los elementos de S para los cuales $\frac{n(n+3)}{2}$ es par. Sustituyendo, te habrás dado cuenta de que solo si n es igual a 1 se obtiene un número par, con lo que la proposición se transforma en:

Si $n = 1$ entonces $\frac{(n+2)(n+5)}{2}$ es par, que no merece más atención.

No insistiremos más en demostraciones basadas en la prueba directa en este apartado, porque, al fin y al cabo, es la base de muchas de las técnicas que expondremos en las siguientes secciones: método progresivo-regresivo, paso al contrarecíproco, redución al absurdo, ...

Ejercicios

Utiliza el método de demostración por prueba directa para demostrar cada una de las siguientes proposiciones:

1. Si n es un número entero par, entonces $-5n - 3$ es un número entero impar.

2. Si n es un entero par, entonces $3n^5$ es un número entero par.

3. Si n y m son enteros impares, entonces $np + mp$ es par para cada número entero p.

4. Sean $S = \{0, 1, 2\}$ y $n \in S$. Demuestra que si $\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$ es par, entonces $\frac{(n+2)^2(n+3)^2}{4}$ es par.

5. Sea T un triángulo rectángulo. Demuestra el teorema de la altura: *La altura asociada a la hipótenusa es media proporcional entre los dos segmentos que determina.*

6. Determina el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante (elipse, ver Fig. 3.11).

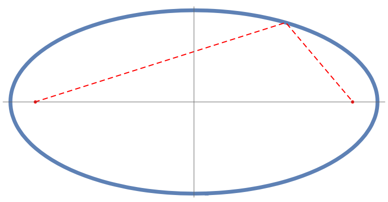


Figura 3.11: Elipse

3.3.2. Método progresivo-regresivo

Dedicamos este apartado al método progresivo-regresivo. Se trata de una generalización del procedimiento analizado en el epígrafe anterior. Si en la prueba directa se parte de la hipótesis, y tras una concatenación de pasos lógicos se obtiene la tesis, en el método progresivo-regresivo se trabaja con tesis e hipótesis al mismo tiempo para producir un *acercamiento* que permita concluir. Esquemáticamente:

$$\boxed{p \Leftrightarrow p_1 \Leftrightarrow p_2 \ldots\ldots \Leftrightarrow p_n \qquad \Rightarrow \qquad q_n \Leftrightarrow \ldots\ldots \Leftrightarrow q_2 \Leftrightarrow q_1 \Leftrightarrow q}$$

El paso entre enunciados equivalentes se realiza a traves de la denominada *pregunta de abstracción* (ver [31]). Se trata una cuestión que debe permitir modificar el enunciado transformándolo en uno más sencillo o manejable. Esta pregunta es abierta, no es única y, de nuevo, depende de la habilidad y la experiencia. Una vez que los enunciados se han transformado convenientemente, se aplica la prueba directa (etapa marcada en rojo en el esquema anterior).

En otras ocasiones, en este tipo de demostración se trabaja de forma progresiva con hipótesis y tesis hasta llegar a un enunciado común; esquemáticamente:

$$\boxed{p \Leftrightarrow p_1 \Leftrightarrow p_2 \ldots\ldots \Leftrightarrow p_n \Leftrightarrow r \Leftrightarrow q_n \Leftrightarrow \ldots\ldots \Leftrightarrow q_2 \Leftrightarrow q_1 \Leftrightarrow q}$$

Ilustraremos este procedimiento con la proposción $\mathbf{P_2}$:

Ejemplo. $\mathbf{P_2}$ Un triángulo rectángulo XYZ con hipotenusa z tiene área $z^2/4$ si y solo si es isósceles.

- Clasificación: Doble implicación ($p \Leftrightarrow q$), cuantificador universal.
- Suficiencia, $\boxed{p \Rightarrow q}$
  - Hipótesis: Sea T=XYZ un triángulo rectángulo, de hipotenusa z y área $\frac{z^2}{4}$.
  - Tesis: T es isósceles.
- Necesidad, $\boxed{p \Leftarrow q}$
  - Hipótesis: Sea T=XYZ un triángulo rectángulo isósceles de hipotenusa z.
  - Tesis: El área de T es $z^2/4$.
- Resultados/conocimientos previos:
  - Área de un triángulo ($A = \frac{bh}{2}$).
  - El triángulo rectángulo tiene uno de sus ángulos recto.
  - Teorema de Pitágoras ($x^2 + y^2 = z^2$).
  - Un triángulo isósceles tiene dos de sus lados iguales.
- Estrategia de demostración: Descartamos el método constructivo, y los métodos de reducción (inducción, casos), y tratamos directamente la implicación con el método progresivo-regresivo.

Dado que la implicación es doble, centrémonos en un primer momento en la suficiencia $\boxed{p \Rightarrow q}$ (el otro razonamiento es similar, y de hecho podrían hacerse de forma conjunta, aunque lo evitaremos). Como indicábamos en la sección anterior, es recomendable construir un esquema (o dibujo) que ayuda en los razonamientos posteriores (ver Fig. 3.12).

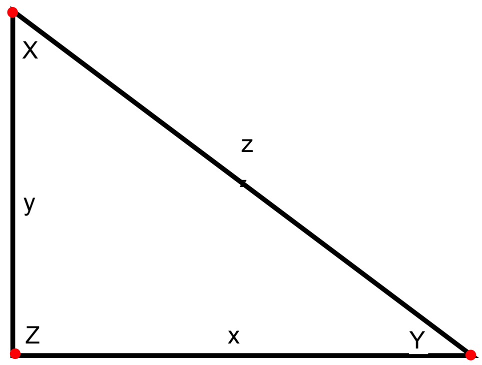


Figura 3.12: Triángulo rectángulo XYZ, con hipotenusa z. Hemos utilizado el convenio de denotar a los vértices (puntos) con letras mayúsculas y nombrar a las aristas opuestas con las letras minúsculas respectivas.

Comenzamos el proceso de demostración y para ello en primer lugar trabajaremos sobre la proposición $q \equiv$ "T es isósceles". En este caso la pregunta de abstracción parece clara:

¿Qué significa que T es isósceles?

Está claro que la respuesta es que dos de sus lados son iguales. Ahora bien, existen tres posibles alternativas:

$$x = y, \qquad x = z, \qquad y = z$$

Un poco de geometría básica del triángulo (*a lados iguales corresponden ángulos iguales*) nos lleva a descartar la segunda y tercera opción (*el ángulo opuesto a* z *es de* 90^0, *y en un triángulo no pueden existir dos ańgulos de* 90^0). Por lo tanto hemos obtenido:

$$q \equiv T \text{ es isósceles} \quad \Leftrightarrow \quad q_1 \equiv x = y$$

que aritméticamente ofrece más posibilidades. Ahora bien, qué significa que x e y sean iguales. Observa que esta podría ser la nueva pregunta de abstracción. Tres posibles respuestas:

- Los ángulos opuestos a x e y son iguales
- $x \geqslant y, \quad y \geqslant x$
- $x - y = 0$

La primera respuesta viene motivada por la observación del paso anterior. Sin embargo, no parece que en este caso pueda ayudarnos (*a priori resulta más complicado trabajar con ángulos que con aristas*). La segunda opción podría ayudarnos cuando trabajaramos con desigualdades, pero no ofrece ninguna ventaja en el caso que estamos considerando. De modo que nos quedamos con la tercera respuesta (que por otro lado tampoco ha mejorado drásticamente el enunciado anterior):

$$q \equiv T \text{ es isósceles} \quad \Leftrightarrow \quad q_1 \equiv x = y \quad \Leftrightarrow \quad q_2 \equiv x - y = 0$$

Dado que todo parece indicar que no podemos avanzar más en esta dirección, procedemos con la hipótesis:

$$p \equiv \text{“}T = XYZ \text{ triángulo rectángulo y área } \tfrac{z^2}{4}\text{”}$$

En este caso la pregunta de abstracción podría ser:

¿Cómo se puede expresar el área de T en términos de las aristas?

La respuesta es clara, puesto que el triángulo es rectángulo, y por tanto, x e y son la base y altura, respectivamente, de T (ver Fig. 3.12), tenemos:

$$\text{Área} = \frac{b\,h}{2} = \frac{x\,y}{2} = \frac{z^2}{4}$$

Manipulando la expresión anterior, obtenemos que las aristas del triángulo deben por tanto satisfacer:

$$\frac{x\,y}{2} = \frac{z^2}{4} \quad \Rightarrow \quad 2xy = z^2$$

Observa que el enunciado anterior no es equivalente a p, puesto que p además afirma que el triángulo también es rectángulo. Esta observación, aunque simple, es vital, pues es común *olvidar* en el proceso lógico hipótesis que podrían ser necesarias en futuros pasos. Con esto obtenemos:

$$p \Leftrightarrow p_1 \equiv T = XYZ \text{ triángulo rectangulo tal que } 2xy = z^2$$

La última pregunta de abstracción debe permitirnos traducir la afirmación "triángulo rectángulo" en términos de las longitudes de las aristas. Como el lector se habrá percatado, hacemos referencia al teorema de Pitágoras que nos permite escribir:

$$p \Leftrightarrow p_1 \Leftrightarrow p_2 \equiv \begin{cases} 2xy = z^2 \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases}$$

Recapitulando, hemos transformado la proposición $p \Rightarrow q$, en otra equivalente:

$$p_2 \equiv \begin{cases} 2xy = z^2 \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad x - y = 0 \equiv q_2$$

Un simple cálculo (que se basa en utilizar la segunda ecuación para sustituir el valor de z en la primera, y el empleo del cuadrado de una resta, $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$, nos permite concluir por el método directo:

$$\begin{cases} 2xy = z^2 \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases} \Rightarrow 2xy = x^2 + y^2 \Rightarrow 0 = x^2 + y^2 - 2xy \Rightarrow 0 = (x-y)^2 \Rightarrow \boxed{0 = x - y}$$

En un manual de Matemáticas la demostración que acabamos de comentar podría aparecer escrita del siguiente modo:

> **Demostración P$_2$** ($\Rightarrow$). *Si denotamos por x e y los catetos del triángulo, el área viene dada por $A = xy/2$, utilizando la hipótesis $A = z^2/4$, y el teorema de Pitágoras ($x^2 + y^2 = z^2$), obtenemos por una simple manipulación algebraica $(x-y)^2 = 0$, lo cual implica que el triángulo es isósceles.* □

Fíjate que en el párrafo anterior no hay rastro del método progresivo-regresivo que hemos descrito con detalle en las páginas anteriores. Queremos insistir que el método es un procedimiento para llevar a cabo la demostración, pero que después suele ser drásticamente simplificado cuando la prueba es transcrita.

La demostración del recíproco de la proposición **P$_2$** es similar y te será propuesta como ejercicio.

Ejemplo 3.5. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$, demostrar que, si $0 < a < b < e$ entonces $a^b < b^a$.*

- Clasificación: Implicación simple ($p \Rightarrow q$), cuantificador universal.
- Hipótesis: Sea $a, b \in \mathbb{R}$, verificando $0 < a < b < e$.

- Tesis: $a^b < b^a$.
- Resultados/conocimientos previos:
  - Función exponencial y función logaritmo.
  - Crecimiento/decrecimiento de funciones.
  - Relación de la derivada y el crecimiento/decrecimiento de funciones.
- Estrategia de demostración: Utilizaremos el método progresivo-regresivo.

Comenzamos trabajando con la tesis: el objetivo es transformar $a^b < b^a$ en una expresión más sencilla o al menos más manejable (pregunta de abstracción: *¿es posible expresar* $a^b < b^a$ *de forma elemental?* Una posibilidad sería modificar $a^b < b^a$ para que la a solo aparezca en el primer término, y la b solo en el segundo. Pero "despejar", cuanto tenemos exponentes puede resultar dificil. Ahora bien, *¿se pueden "eliminar" exponentes?* En este punto, deberíamos recordar que el logaritmo es una función creciente definida en los números reales positivos que satisface [1]:

$$\log x^y = y \log x, \qquad x, y \in \mathbb{R}^+$$

Por lo tanto, en nuestro caso:

$$\left.\begin{array}{ccc} a^b & \to & b \log a \\ b^a & \to & a \log b \end{array}\right\}$$

Además, dado que la función logaritmo es creciente ($0 < x < y \Rightarrow \log x < \log y$) podemos transformar la tesis en la proposición equivalente:

$$a^b < b^a \quad \Leftrightarrow \quad b \log a < a \log b \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\log a}{a} < \frac{\log b}{b}$$

En este punto, nuestro objetivo puede reescribirse como:

$$a < b < e \quad \Rightarrow \quad \frac{\log a}{a} < \frac{\log b}{b}$$

[1] Denotaremos con $\log x$ al logaritmo en base e (constante de Euler), también denominado logaritmo natural:

$$y = \log x \quad \Leftrightarrow \quad e^y = x.$$

Quizá te sorprenda el uso de un logaritmo con base un número irracional (¿por qué no usar base 10?), sin embargo, esta elección ofrece simplificaciones relevantes en el cálculo diferencial e integral.

Si ahora nos fijamos de nuevo en la tesis, podemos observar que la expresión que aparece a ambos lados de la desigualdad corresponde a evaluaciones de la función $f(x) = \frac{\log x}{x}$, es decir:

$$a < b < e \quad \Rightarrow \quad f(a) < f(b)$$

y este enunciado es equivalente a afirmar que la función $f(x) = \frac{\log x}{x}$ es creciente en el intervalo $(0, e)$:

$$x \in (0, e) \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{\log x}{x} \text{ es creciente}$$

La nueva pregunta de abstracción está clara: *¿cómo es posible demostrar que una función es creciente?*, y la respuesta también debería estar clara para un estudiante universitario. Dado que $f(x)$ es continua y derivable en $(0, +\infty)$, para concluir el crecimiento de $f(x)$ en $(0, e)$ basta con comprobar que $f'(x) > 0$ en $(0, e)$. Es decir, hemos reducido el problema a:

$$x \in (0, e) \quad \text{entonces} \quad f'(x) > 0$$

Recapitulando, hemos transformado la proposición original en otra equivalente:

$$0 < a < b < e \text{ entonces } a^b < b^a \qquad \Leftrightarrow \qquad x \in (0, e) \quad \text{entonces} \quad f'(x) > 0$$

Procedemos al cálculo de la derivada:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - 1 \log x}{x^2} = \frac{1 - \log x}{x^2}$$

y dado que si $x \in (0, e)$ entonces $\log x < 1$ ($\Leftrightarrow e^{\log x} < e^1 \Leftrightarrow x < e$) concluimos el resultado buscado.

Demostración *Tomando logaritmos y operando, podemos escribir*

$$a^b < b^a \quad \Leftrightarrow \quad b \log a < a \log b \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\log a}{a} < \frac{\log b}{b}.$$

De modo que demostrar el resultado es equivalente a analizar el crecimiento/decrecimiento de la función $f(x) = \frac{\log x}{x}$. *Un simple cálculo revela:*

$$f'(x) = \frac{1 - \log x}{x^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \log x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \log x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = e,$$

y puesto que $\log x < 1$ *si* $x \in (0, e)$ *y* $\log x > 1$ *si* $x > e$, *concluimos:*

	$0 < x < e$	$e < x < \infty$
sign$(f'(x))$	$+$	$-$
Carácter	*Creciente*	*Decreciente*

y la proposición queda demostrada. En la siguiente Fig. 3.13 aparece representada la función $f(x) = \frac{\log x}{x}$. □

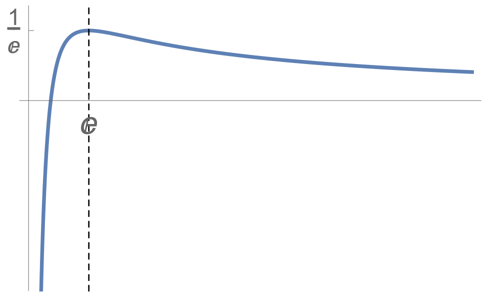


Figura 3.13: Gráfica de la función $f(x) = \frac{\log x}{x}$

En ocasiones, en el método progresivo-regresivo se trabaja únicamente con la tesis, hasta reducir la expresión a una tautología. Es el caso del ejemplo que presentamos a continuación.

Ejemplo 3.6. *Demuestra que la semisuma de dos números reales positivos es mayor o igual que la raíz cuadrada de su producto.*

- Clasificación: Implicación simple, cuantificador universal.
- Hipótesis: Sean $x, y \in \mathbb{R}$, positivos
- Tesis: $\frac{1}{2}(x+y) \geqslant \sqrt{xy}$.
- Resultados/conocimientos previos:
  - Aritmética básica.
  - Igualdades notables: $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta$.
- Estrategia de demostración: Método progresivo-regresivo.

La primera dificultad de este enunciado puede ser escribirlo formalmente. Si lo revisamos detenidamente aparecen:

- Dos números positivos: $x, y > 0$.
- Semisuma: $\frac{1}{2}(x+y)$.
- Raíz cuadrada del producto: $\sqrt{xy}$.
- Relación ente ellos:

$$x, y > 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{2}(x+y) \geqslant \sqrt{xy}.$$

Comenzamos por manipular la tesis, para tratar de obtener una expresión más sencilla:

$$\frac{1}{2}(x+y) \geqslant \sqrt{xy} \quad \Leftrightarrow \quad x+y \geqslant 2\sqrt{xy} \quad \Leftrightarrow \quad x+y-2\sqrt{xy} \geqslant 0$$

Hasta aquí, tan solo hemos realizado una simple manipulación algebraica que no debería presentar ninguna dificultad. El siguiente paso es el fundamental y prácticamente resolverá el problema. Trataremos de motivarlo convenientemente. Observa que en la fórmula aparecen números positivos y sus raíces cuadradas, elevar al cuadrado y sus propiedades podría ser la clave (suma/resta de cuadrados, relación raíz cuadrada y cuadrados, ...). Comencemos por la raíz cuadrada del producto; dado que estamos trabajando con números positivos, podemos escribir:

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}.$$

Visto esto, nos preguntamos si sería posible escribir la expresión anterior solo en términos de raíces cuadradas, y dado que x e y son positivos:

$$x = (\sqrt{x})^2 \qquad y = (\sqrt{y})^2$$

Con todo ello, podemos escribir:

$$x+y-2\sqrt{xy} \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2 - 2\sqrt{x}\sqrt{y} \geqslant 0$$

En principio, podría parecer una expresión más compleja que la anterior, pero un inspección más detenida debería revelar que se trata el cuadrado de una resta:

$$(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2 - 2\sqrt{x}\sqrt{y} \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geqslant 0$$

Tras esto, la proposición inicial es equivalente a:

$$x, y > 0 \qquad \Rightarrow \qquad (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geqslant 0$$

que es cierta, pues la raíz cuadrada de un número real es un número real, y el cuadrado de un número real siempre es positivo.

Demostración *Manipulando la expresión obtenemos:*

$$\frac{1}{2}(x + y) \geqslant \sqrt{xy} \quad \Leftrightarrow \quad (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geqslant 0$$

lo cual es cierto para números $x, y > 0$*.* □

Ejercicios

Utiliza el método progresivo-regresivo para demostrar cada una de las siguientes proposiciones. En todos los casos deberás analizar la proposición, y determinar las preguntas de abstracción necesarias que permitan resolver el problema.

1. Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces $n(n + 1)(n + 2)$ es divisible por 6.

2. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, demuestra que, si $e < a < b$ entonces $a^b > b^a$.

3. Si a, b y c son números reales tales que $a > 0$, $b < 0$ y $b^2 - 4ac = 0$, entonces la solución de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ es positiva.

4. Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x^2 + 6y^2 - 25 = 0$, $y^2 + x = 3$. Demuestra que entonces, $|y| = 2$.

5. Demuestra que si $x > 0$ entonces $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$.

6. Demuestra que para tres números $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$ se tiene:

$$3(\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma) \leqslant (\alpha + \beta + \gamma)^2$$

7. Consideremos una competición con n equipos. Durante el transcurso de la misma cada equipo jugó con todos los demás una sola vez (competición a una vuelta), y no se produjeron empates. Sean v_i y d_i el número de victorias y derrotas del equipo i-ésimo. Demuestra que:

$$\sum_{i=1}^{n} v_i^2 = \sum_{i=1}^{n} d_i^2$$

8. Sean a, b, c, d números naturales, tales que:

$$m = a^2 + b^2 \qquad \text{y} \qquad n = c^2 + d^2$$

entonces el producto nm es también suma de los cuadrados de dos números naturales.

9. Se define un número perfecto como aquel que es igual a la suma de todos sus divisores excepto él mismo. Demuestra que la suma de los inversos de los divisores de un número perfecto es 2 [2].

10. Si r y s son rectas tangentes a una circunferencia en los puntos extremos P y Q del diámetro de una circunferencia, entonces r y s son paralelas (ver Fig. 3.14).

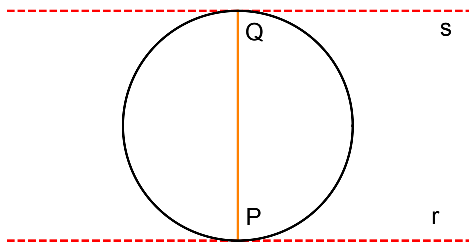


Figura 3.14: Rectas tangentes a una circunferencia en los puntos extremos de un diámetro

3.3.3. Paso al contrarrecíproco o contraposición

La demostración por paso al contrarrecíproco o por contraposición consiste en probar que una implicación $p \Rightarrow q$ es cierta viendo que su contrarrecíproca $\neg q \Rightarrow \neg p$ lo es, o equivalentemente, en demostrar que si q es falsa, entonces p también lo es. Por lo tanto, demostrar la implicación $p \Rightarrow q$ por paso al contrarrecíproco es hacer la *prueba directa* de la implicación $\neg q \Rightarrow \neg p$.

Es importante recordar que una proposición $p \Rightarrow q$ y su contrarrecíproca $\neg q \Rightarrow \neg p$ son lógicamente equivalentes, esto es, $p \Rightarrow q$ es cierta si y sólo si $\neg q \Rightarrow \neg p$ lo es. (ver 2.4.1).

[2] Euler demostró que todos los números perfectos pares son de la forma $2^{p-1}(2^p - 1)$ con 2^{p-1} y p números primos. En la actualidad se conocen 50 números perfectos pares: 6, 28, 496, 8128, ... El quincuagésimo tiene más de 46 millones de cifras. Se desconoce si existen números perfectos impares.

En la sección 3.3.4 se desarrolla el método de demostración por reducción al absurdo o por contradicción. En ambos métodos se usa la negación de la proposición q. Ahora bien, en el método de reducción al absurdo se trata de demostrar que $\neg q$ junto con p llevan a una contradicción (falsedad obvia) con cualquier otra proposición, axioma, definición, postulado, etc., mientras que en la demostración por paso al contrarrecíproco se trata de obtener $\neg p$ a partir de $\neg q$.

La demostración por paso al contrarrecíproco suele utilizarse en aquellas implicaciones en las que el método directo para obtener q a partir de p no es inmediato de aplicar. Es especialmente útil si la proposición q es la negación de una proposición o si la proposición q establece una propiedad que cumplen todos los elementos de un conjunto porque entonces $\neg q$ establece que existe algún elemento de ese conjunto para el que no se cumple esa propiedad. Recuerda que la negación de una proposición universal es una proposición existencial (ver sección 2.3).

Ilustraremos este procedimiento con la proposición $\mathbf{P_3}$.

Ejemplo. $\mathbf{P_3}$ Sea $n \in \mathbb{N}$. Si n^2 es par entonces n es par.

- Clasificación: Implicación simple ($p \Rightarrow q$), cuantificador universal.
- Hipótesis: Sea $n \in \mathbb{N}$, con n^2 par.
- Tesis: El número n es par.
- Resultados/conocimientos previos:
  - Aritmética básica.
  - Definición de números pares e impares.
- Estrategia de demostración: Descartamos el método constructivo, los métodos de reducción (inducción, casos) y la prueba directa, y utilizamos el método de paso al contrarrecíproco.

La *contrarrecíproca* de la proposición que queremos demostrar es

si $n \in \mathbb{N}$ no es par, entonces n^2 no es par,

esto es,

si $n \in \mathbb{N}$ es impar, entonces n^2 es impar.

Analizamos esta proposición:

- Clasificación: Implicación simple ($p \Rightarrow q$), cuantificador universal.
- Hipótesis: Sea $n \in \mathbb{N}$, con n impar.
- Tesis: El número n^2 es impar.
- Resultados/conocimientos previos:
    - Aritmética básica.
    - Definición de numeros pares e impares.
    - Identidades notables: $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$.
- Estrategia de demostración: Descartamos el método constructivo, y los métodos de reducción (inducción, casos) y utilizamos la prueba directa.

Demostración $\mathbf{P_3}$ *Comenzamos con el hecho de que n es impar. Esto significa que n no es múltiplo de* 2 *y, por lo tanto, puede escribirse como* $n = 2k + 1$ *para algún* $k \in \mathbb{N}$ *(único).*
Elevando al cuadrado, se obtiene

$$n^2 = (2k+1)^2 = (2k)^2 + 2 \cdot 2k \cdot 1 + 1^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2) + 1$$

donde hemos aplicado la identidad notable y, por lo tanto, se concluye que n^2 *es impar porque se escribe como el doble de un número* ($2k^2 + 2$) *más uno.* □

De hecho, la proposición enunciada en el ejemplo $\mathbf{P_3}$ es una equivalencia como se demuestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.7. *Sea* $n \in \mathbb{N}$. *Demuestra que n es un número par si y sólo si* n^2 *es par.*

La información relevante sobre esta proposición es la siguiente:

- Clasificación: Doble implicación ($p \Leftrightarrow q$), cuantificador universal.
- Suficiencia, $\boxed{p \Rightarrow q}$
    - Hipótesis: Sea $n \in \mathbb{N}$ un número par.
    - Tesis: El número n^2 es par.
    - Resultados/conocimientos previos:

   - Aritmética básica.
   - Definición de números pares e impares.
 - Estrategia de demostración: Descartamos el método constructivo y los métodos de reducción (inducción, casos) y utilizamos la prueba directa.

- Necesidad, $\boxed{p \Leftarrow q}$ (**ejemplo $\mathbf{P_3}$**)

Dado que la implicación es doble y la necesidad $\boxed{q \Leftarrow p}$ ya ha sido probada por paso al contrarrecíproco, nos centramos en la suficiencia $\boxed{p \Rightarrow q}$.

Demostración *Comenzamos con el hecho de que n es par, es decir, $n = 2k$ para algún $k \in \mathbb{N}$ (único). Elevando al cuadrado se obtiene $n^2 = 4k^2 = 2 \cdot 2k^2$ y se concluye que n^2 es múltiplo de 2.* □

Observa que la proposición "n es un número par si y sólo si n^2 es par" es equivalente a la proposición "n es un número impar si y sólo si n^2 es impar" porque una es la contrarrecíproca de la otra.

La información relevante (clasificación, hipótesis y tesis) sobre la proposición "n es un número impar si y sólo si n^2 es impar" es la siguiente:

- Clasificación: Doble implicación ($p \Leftrightarrow q$), cuantificador universal.

- Suficiencia, $\boxed{p \Rightarrow q}$
  - Hipótesis: Sea $n \in \mathbb{N}$ un número impar.
  - Tesis: El número n^2 es impar.

- Necesidad, $\boxed{p \Leftarrow q}$
  - Hipótesis: Sea $n \in \mathbb{N}$ con n^2 impar.
  - Tesis: El número n es impar.

Ejemplo 3.8. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Demuestra que si n es un número primo mayor que 2, entonces n es impar.*

La información relevante sobre esta proposición es la siguiente:

- Clasificación: Implicación simple ($p \Rightarrow q$), cuantificador universal.

- Hipótesis: Sea $n \in \mathbb{N}$, con n primo mayor que 2.
- Tesis: El número n es impar.
- Resultados/conocimientos previos:
  - Definición de número primo.
  - Definición de números pares e impares.
- Estrategia de demostración: Descartamos el método constructivo y los métodos de reducción (inducción, casos), y utilizamos el método de paso al contrarrecíproco.

La *contrarrecíproca* de la proposición que queremos demostrar es

si $n \in \mathbb{N}$ no es impar, entonces n no es un primo mayor que 2,

esto es,

si $n \in \mathbb{N}$ es par, entonces n no es un primo mayor que 2,

esto es,

si $n \in \mathbb{N}$ es par, entonces o n no es un primo o n no es mayor que 2,

esto es,

si $n \in \mathbb{N}$ es par, entonces o n no es un primo o n es menor o igual que 2,

donde hemos utilizado las leyes de De Morgan (la negación de $p \wedge q$ es $\neg\, p \vee \neg\, q$) siendo p la proposición n es primo y q la proposición n es mayor que 2. (ver 2.3).

Analizamos esta proposición:

- Clasificación: Implicación simple ($p \Rightarrow q$), cuantificador universal.
- Hipótesis: Sea $n \in \mathbb{N}$, con n par.
- Tesis: El número n no es un primo o es un número primo menor o igual que 2.
- Resultados/conocimientos previos:
  - Definición de número primo.
  - Definición de números pares e impares.
- Estrategia de demostración: Descartamos el método constructivo, y los métodos de reducción (inducción, casos) y utilizamos la prueba directa.

Demostración *Comenzamos con el hecho de que n es par. Puede ser $n = 2$ o $n > 2$. Si n es mayor que 2, no es primo por ser divisible por 2 y si n es igual a 2, es un número menor o igual que 2.* $\square$

Observa que en este caso también es sencillo aplicar la demostración por reducción al absurdo que veremos en la sección 3.3.4. En efecto, si n es un número primo mayor que 2 y no es impar, es decir, si n es un número primo par mayor que 2, entonces n es divisible por 2 y, por lo tanto, no es primo (*contradicción*).

Como hemos mencionado, la demostración por paso al contrarrecíproco es útil si la proposición q es la negación de una proposición. Es el caso del siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.9. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Demuestra que si n^2 no es múltiplo de 3, entonces n no es un múltiplo de 3.*

La información relevante sobre esta proposición es la siguiente:

- Clasificación: Implicación simple ($p \Rightarrow q$), cuantificador universal.
- Hipótesis: Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que n^2 no es múltiplo de 3.
- Tesis: El número n no es múltiplo de 3.
- Resultados/conocimientos previos:
  - Definición de múltiplo de un número.
  - Aritmética básica.
- Estrategia de demostración: Descartamos el método constructivo, los métodos de reducción (inducción, casos) y la prueba directa, y utilizamos el método de paso al contrarrecíproco.

La *contrarrecíproca* de la proposición que queremos demostrar es:

si $n \in \mathbb{N}$ es múltiplo de 3, entonces n^2 es múltiplo de 3.

Analizamos esta proposición:

- Clasificación: Implicación simple ($p \Rightarrow q$), cuantificador universal.
- Hipótesis: Sea $n \in \mathbb{N}$, con n múltiplo de 3.

- Tesis: El número n^2 es múltiplo de 3.
- Resultados/conocimientos previos:
  - Definición de múltiplo de un número.
  - Aritmética básica.
- Estrategia de demostración: Descartamos el método constructivo, y los métodos de reducción (inducción, casos) y utilizamos la prueba directa.

  Demostración *Comenzamos con el hecho de que n es múltiplo de* 3*, es decir,* $n = 3k$ *para algún* $k \in \mathbb{N}$ *(único). Elevando al cuadrado se obtiene* $n^2 = 9k^2 = 3 \cdot 3k^2$ *y se concluye que* n^2 *es múltiplo de* 3*.* □

Observa que en este caso se puede aplicar la demostración por casos que veremos en la sección 3.3.6 para demostrar que $p \Rightarrow q$. Si n no es múltiplo de 3, entonces $n = 3k + r$ para un cierto $k \in \mathbb{Z}$ (único) y $r = 1$ o 2, de forma que distinguiremos dos casos: $r = 1$ y $r = 2$.

Ejercicios

Utiliza el método de paso al contrarrecíproco para demostrar las siguientes proposiciones.

1. En el juego del ajedrez, cada peón se mueve a lo sumo seis veces antes de coronar (llegar a la octava fila).
2. Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Si $x^2 + y^2 = 0$ entonces $x = 0$ e $y = 0$.
3. Si el producto de dos números naturales es impar, entonces los dos números son impares. (Esta proposición se probará utilizando el método de reducción al absurdo en la sección 3.3.4).
4. Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Si $x \cdot y$ es un número irracional, entonces x o y es un número irracional.
5. Si $c \in \mathbb{Z}$ es un número impar, la ecuación $n^2 + n + c$ no tiene ninguna solución entera.
6. Demuestra que si en un cuadrilátero no hay ningún ángulo obtuso, es decir de más de 90^o, entonces ese cuadrilátero es un rectángulo.

7. Sean A, B dos conjuntos. Si $A \cup B \subset B$, entonces $A - B = \varnothing$.

8. Sean $S, T \subset \mathbb{N}$ tales que $S \subset T$. Si S no está acotado, entonces T no está acotado.

3.3.4. Demostración por reducción al absurdo o por contradicción

El método de reducción al absurdo, también conocido como demostración por contradicción o con la expresión latina *reductio ad absurdum*, consiste en suponer que el resultado a demostrar es falso para llegar a una contradicción a partir de esta suposición.

Dicho de otra manera, si queremos demostrar con este método que una proposición p implica una proposición q (es decir, $p \Rightarrow q$), intentaremos demostrar que si p es verdadero y q es falso, entonces obtenemos una contradicción.

Este método se basa en que la proposición "*p implica q*" es verdadera en todos los casos posibles excepto cuando la proposición p es verdadera y la proposición q es falsa. De esta forma, en el método de reducción al absurdo se supone que esta situación ocurre y se llega a una contradicción.

Habitualmente la forma de establecer la contradicción no es inmediata. Cada demostración tiene su propia contradicción y encontrar la contradicción requiere normalmente una cierta dosis de ingenio y creatividad. Sin embargo, el análisis de que la proposición p sea verdadera y la proposición q sea falsa puede ayudar a encontrar la contradicción.

El método progresivo-regresivo únicamente supone que la proposición p es verdadera, mientras que en el método de demostración por contradicción suponemos que la proposición A es verdadera y la proposición q es falsa. De esta forma, tenemos dos proposiciones para realizar un análisis progresivo.

Se suele preferir el método de reducción al absurdo frente al método progresivo-regresivo cuando la falsedad de la proposición p nos proporciona alguna información de utilidad. Otra situación en la que se prefiere el método de reducción al absurdo es aquella en la que la proposición q está expresada como una negación (por ejemplo, "$\sqrt{2}$ es irracional" o lo que es lo mismo "$\sqrt{2}$ no es racional"). De esta forma, la negación de q tiene forma positiva (en el ejemplo anterior, la negación de q es "$\sqrt{2}$ es racional").

Este tipo de demostración puede ser un buen principio cuando no sabes cómo empezar una demostración. Tal vez tampoco esta opción te lleve a la solución, pero, como ya hemos mencionado, probar distintas opciones te obliga a manejar los conceptos, y esto a su vez, a afianzarlos.

Ilustramos este procedimiento con la proposición $\mathbf{P_4}$.

Ejemplo: $\mathbf{P_4}$ $\sqrt{2}$ es irracional.

El número $\sqrt{2}$ es probablemente el primer número irracional conocido. Geométricamente equivale a la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 1, como se comprueba fácilmente aplicando el teorema de Pitágoras. Como sabrás su expresión decimal tiene infinitos dígitos, que no cumplen ningún patrón. A continuación escribimos las primeras cifras:

$$\sqrt{2} \approx 1{,}414213562\ldots$$

Si abordáramos la demostración de esta proposición mediante una prueba directa, deberíamos probar que $\sqrt{2}$ no se puede expresar como cociente de dos números enteros, algo que, a priori, no parece nada sencillo. Parece razonable intentar la demostración por otro método. Por lo comentado en el párrafo anterior, y dado que la proposición está expresada como negación, utilizaremos el método de reducción al absurdo.

La irracionalidad de $\sqrt{2}$ es otro de los ejemplos clásicos de demostración por contradicción, y constituyó uno de los grandes retos de la Escuela Pitagórica.

Analizamos en primer lugar esta proposición:

- <u>Clasificación</u>: Implicación simple ($p \Rightarrow q$, $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \Rightarrow \sqrt{2}$ es irracional).
- <u>Hipótesis</u>: Sea $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$.
- <u>Tesis</u>: $\sqrt{2}$ es un número irracional.
- <u>Resultados/conocimientos previos</u>:
  - Números racionales e irracionales.
  - Divisibilidad de números.
- <u>Estrategia de demostración</u>: Utilizaremos el método de demostración por reducción al absurdo.

La negación de la proposición "$\sqrt{2}$ es irracional" es

$\sqrt{2}$ es un número racional.

Por definición de número racional debe poder escribirse de la forma $\frac{a}{b}$, donde a y b son números enteros primos entre sí. Es decir,

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}, \text{ donde } a \text{ y } b \text{ no tienen divisores comunes}$$

Tratemos de manipular la expresión anterior hasta conseguir otra más sencilla. Comenzamos elevando al cuadrado para eliminar la raíz y obtenemos:

$$\left(\sqrt{2}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad 2 = \frac{a^2}{b^2} \quad \Rightarrow \quad 2b^2 = a^2$$

De aqui se deduce que a^2 es par, y en virtud de $\mathbf{P_3}$, también lo es a y, por lo tanto, $a = 2m$. Utilicemos esta información en la expresión anterior:

$$2b^2 = a^2 = (2m)^2 = 4m^2 \quad \Rightarrow \quad b^2 = 2m^2$$

De donde resulta que b^2 es par, y si utilizamos de nuevo $\mathbf{P_3}$ resulta que b también es par. Es decir, nuestro razonamiento nos ha llevado a que a y b son **números pares**, lo que contradice la hipótesis de que no tenían divisores comunes. La contradicción la hemos obtenido partiendo de que $\sqrt{2}$ es racional, así que esta afirmación no puede ser cierta y, por la tanto, $\sqrt{2}$ es un número real no racional, luego irracional.

Formalmente.

Demostración $\mathbf{P_4}$ *Supongamos que $\sqrt{2}$ no es irracional y, por lo tanto, se puede escribir como $\frac{a}{b}$, donde a y b son números enteros primos entre sí. Elevando al cuadrado y manipulando se obtiene:*

$$\left(\sqrt{2}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad 2 = \frac{a^2}{b^2} \quad \Rightarrow \quad 2b^2 = a^2$$

Por tanto, a^2 es par y también lo será a, esto es, $a = 2m$, para un cierto número entero m. Sustituyendo y operando, resulta: $2b^2 = (2m)^2 = 4m^2$, con lo que se obtiene $b^2 = 2m^2$, por lo que b^2 es un número par, y por lo tanto b también lo es. Resulta que a y b son ambos pares, en contra de que no tenían factores comunes. $\square$

En el siguiente ejemplo proponemos la demostración de otro enunciado clásico.

Ejemplo 3.10. *Prueba la siguiente proposición: "existen infinitos números primos".*

Se conocen numerosas formas distintas de demostrar que hay infinitos números primos. La primera de las demostraciones emplea el método de reducción al absurdo y se le atribuye a Euclides (325-265 a.C.), matemático y geómetra de la Grecia clásica. Su obra *Elementos* es uno de los trabajos más influyentes en la historia de las Matemáticas. En la proposición 20 del Libro IX de *Elementos* se enuncia:

Proposición 20. Hay más números primos que cualquier cantidad propuesta de números primos.

Una reescritura de esta proposicion de Euclides establece que hay infinitos números primos. Para demostrarlo por reducción al absurdo suponemos que es cierta su negación: no hay infinitos números primos. O lo que es lo mismo, que la cantidad de números primos es finita.

Analizamos esta proposición:

- Clasificación: Implicación simple ($p \Rightarrow q$).
- Hipótesis: Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales.
- Tesis: Hay infinitos números primos.
- Resultados/conocimientos previos:
  - Números primos.
  - Divisibilidad de números.
- Estrategia de demostración: Método de demostración por reducción al absurdo.

La negación de la proposición es

Hay un número finito n de números primos.

Supongamos que hay un número finito n de números primos. Los escribimos como

$$\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}.$$

A partir de esta lista construimos un nuevo número p de la siguiente forma:

$$p = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1,$$

es decir, p es el producto de todos los números primos más 1.

Como p es distinto de todos los números primos p_i, $i = 1, \ldots, n$, p no es primo (recuerda que hemos supuesto supuesto que hay solamente n números primos, los mencionados en la lista).

Como recordarás, cualquier número no primo descompone como producto de potencias de números primos. Por tanto, el número p será divisible por alguno de los números primos en $\{p_1, \ldots, p_n\}$.

Vamos a comprobar que esto nos lleva a una contradicción. En efecto, el resto de dividir p por p_1 es 1, luego p no es divisible por p_1. De la misma forma, el resto de dividir p por p_2 es 1, luego tampoco es divisible por p_2. Y así, de forma sucesiva, comprobamos que p no es divisible por ninguno de los n números primos $p_1, p_2, \ldots, p_n$ que suponíamos que eran los únicos números existentes.

Así pues, hemos construido un número p que no es primo y que no es divisible por ninguno de los números primos $p_1, \ldots, p_n$.

Esto supone que al menos existe un número primo que no está en la lista $\{p_1, \ldots, p_n\}$, contradiciendo que los únicos números primos son los que aparecen en la lista de números primos $\{p_1, \ldots, p_n\}$.

Hemos alcanzado esta contradicción al suponer que **no** hay infinitos números primos, de modo que dicha suposición debe ser falsa. Concluimos entonces que hay infinitos números primos.

Demostración. *Supongamos que hay un número finito n de números primos:*

$$\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}.$$

A partir de esta lista construimos un nuevo número $p = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$. Como p es distinto de todos los números primos no es primo, por tanto, será divisible por alguno de los números primos. Esto genera una contradicción porque el resto de dividir p por cualquiera de los primos es 1. □

Ejemplo 3.11. *Si el producto de dos números naturales a y b es impar, entonces los dos números son impares.*

Analizamos esta proposición:

- Clasificación: Implicación simple ($p \Rightarrow q$).
- Hipótesis: Sean a y b números naturales tales que $a\,b$ es impar.
- Tesis: a y b son impares.
- Estrategia de demostración: Método de demostración por reducción al absurdo.

La negación de a y b son impares es

a o b no son impares

o equivalentemente

a o b son pares

Supongamos, por ejemplo, que es el número a el que es par, es decir, $a = 2m$ para algún número natural m. Por tanto,

$$a\,b = (2m)\,b = 2\,(m\,b),$$

luego $a\,b$ es múltiplo de 2 y, por tanto, es par. Esto contradice nuestra hipótesis, esto es, que $a\,b$ es impar. Lo mismo ocurre cuando b es par, de modo que nuestra suposición no puede ser cierta y ni a ni b son pares, o lo que es lo mismo, los dos son impares.

Se deja al lector la demostración formal.

En el siguiente ejemplo te proponemos un juego lógico que puede resolverse utilizando la técnica descrita en esta sección.

Ejemplo 3.12. *(Enigma de los sombreros): En una cárcel hay cuatro prisioneros según muestra la Fig. 3.15. Todos están en fila y mirando en la misma dirección. El cuarto prisionero está separado del resto por un muro. El primer prisionero ve al segundo y al tercero; el segundo prisionero ve al tercero, y el tercer y el cuarto prisionero no pueden ver a ningún otro. El carcelero les dice que dos prisioneros tienen sombreros blancos y los otros dos tienen sombreros negros. El carcelero liberará al prisionero que adivine el color del sombrero que lleva puesto, pero deben seguir las siguientes normas:*

- *No pueden moverse ni girarse.*
- *No pueden comunicarse entre sí.*
- *No pueden quitarse el sombrero.*

Al cabo de un minuto, uno de los prisioneros consigue averiguar el color de su sombrero. ¿Sabes cuál de ellos ha sido?

Claramente los prisioneros 3 y 4 no tienen ninguna información para deducir el color de su sombrero, pues no ven a ningún otro prisionero.

El prisionero 1 está viendo un sombrero de color blanco y otro de color negro de los prisioneros 2 y 3, respectivamente. El prisionero 1 no puede conocer el color de su sombrero, pues el color de su sombrero puede ser blanco o negro, dependiendo del color del sombrero del prisionero 4, al que no ve, y teniendo en cuenta que hay dos sombreros blancos y dos negros.

El prisionero número 2 puede razonar de la siguiente forma:

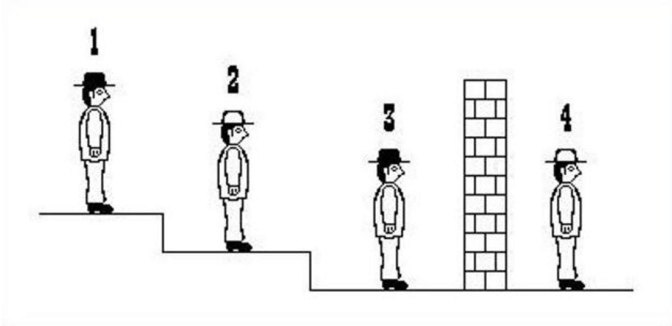


Figura 3.15: Enigma de los sombreros.

Supongo que llevo sombrero negro. En tal caso mi compañero número 1 *ve dos sombreros negros, dado que el prisionero número* 3 *lleva sombrero negro y él ve a este prisionero y a mí. En tal caso debe concluir inmediatamente que él lleva un sombrero blanco, cosa que comunicará inmediatamente al carcelero y quedará liberado. Pero como el prisionero número* 1 *no dice nada, yo (el prisionero número* 2*) inmediatamente deduzco que mi suposición es falsa de modo que no llevo un sombrero negro y, por lo tanto, lo llevo blanco. Inmediatamente se lo digo al carcelero y quedo libre.*

Ejercicios

Utiliza el método de reducción al absurdo para demostrar cada una de las siguientes proposiciones.

1. Sean A, B dos conjuntos. Si $A \cup B \subset B$, entonces $A - B = \varnothing$.

2. Sean A, B dos conjuntos. Si $A \subset B$, entonces $A - B = \varnothing$.

3. Para cualquier conjunto A, se cumple que $A \cap A^c = \varnothing$.

4. Si en un triángulo dos ángulos son iguales entre sí, entonces los lados opuestos a los ángulos iguales también son iguales entre sí (Proposición 6 del Libro primero de los Elementos de Euclides).

5. No existe un número racional mínimo mayor que cero.

6. Demuestra por reducción al absurdo las proposiciones y ejercicios planteados en la sección 3.3.3.

3.3.5. Inducción

El principio de inducción se utiliza en proposiciones en las que intervienen números naturales cuando se sabe, por ejemplo, que las proposiciones son válidas para los primeros números (e.g., $1, 2, 3$), y se sospecha o conjetura que son válidas para todos los números naturales.

El principio de inducción es útil para demostrar que una proposición de la forma $p(n)$ donde n es un número natural es cierta para todo número natural a partir de uno dado, por ejemplo, para todo número natural, esto es $\forall n \in \mathbb{N}$ o $\forall n \geqslant 1$.

El matemático francés Pascal (1663-1662) establece la primera formulación explícita sobre el principio de inducción. Después, el suizo Jakob Bernoulli (1654-1705) aplicó el principio al estudio de las series y la combinatoria en su *Ars conjectandi* publicada en 1713. En el siglo XIX importantes matemáticos como Boole (1815-1864), De Morgan (1806-1871), Peano (1858-1932) o Dedekind (1831-1916) formulan de forma sistemática el principio de inducción.

Figura 3.16: Blaise Pascal y Jakob Bernoulli

Figura 3.17: Augustus De Morgan, George Boole y Richard Dedekind

Principio de inducción: Dada una proposición de la forma $p(n)$ con $n \in \mathbb{N}$, si se cumplen las condiciones *a*.- $p(1)$ es cierta

b.- $\forall k \in \mathbb{N}$ se cumple que si la implicación $p(k)$ es cierta, entonces $p(k+1)$ también lo es

entonces $p(n)$ es cierta $\forall n \in \mathbb{N}$

Así pues, al aplicar el principio de inducción para demostrar que una proposición de la forma $p(n)$ con $n \in \mathbb{N}$ es cierta $\forall n \in \mathbb{N}$, se han de dar los siguientes pasos:

1.- *Verificar* la proposición para $n = 1$ (se sustituye n por 1 y se *comprueba* que la proposición en este caso es cierta)

2.- Formular la *hipótesis de inducción*, que consiste en suponer que $p(k)$ es cierta, donde k es un número natural mayor o igual que 1.

3.- A partir de la hipótesis de inducción, se *demuestra* que $p(k+1)$ es cierta.

El principio de inducción permite afirmar que ,entonces, $p(n)$ es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$: como $p(1)$ es cierta por el paso 1, $p(2)$ es cierta por el paso 3, y, por tanto, $p(3)$ es cierta por el paso 3 de nuevo, y también $p(4)$ es cierta por el paso 3 una vez más, y así sucesivamente, se concluye que $p(n)$ es cierta $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Podemos pensar en que la inducción consiste en ir subiendo peldaños en una escalera con infinitos escalones, por lo que no basta con subir un número determinado de escalones (por ejemplo, los 100 primeros). Si subimos el primer escalón y sabemos cómo pasar de un escalón al siguiente (es decir, cómo deducir la tesis a partir de la hipótesis de inducción), habremos subido todos los peldaños porque del primero pasamos al segundo, del segundo al tercero y así sucesivamente. La etapa 1, fundamental en la demostración por inducción, se corresponde con comprobar que sabemos subir el primer escalón, y la etapa 3 con demostrar que sabemos cómo pasar de un escalón al siguiente.

Ilustraremos este procedimiento con la proposición $\mathbf{P_5}$.

Ejemplo. $\mathbf{P_5}$ Prueba que

$$P(n): \quad 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Esta fórmula permite calcular la suma de los n primeros números naturales.

Es muy conocida la anécdota en la que el matemático alemán Carl Friedrich Gauss (1777-1855) resolvió de forma brillante el cálculo que su maestro, J. B. Büttner les había propuesto: hallar la suma de los 100 primeros números naturales. Gauss respondió casi de inmediato que la suma es igual a 5050. La historia cuenta que Gauss se dio cuenta de que $1 + 100 = 2 + 99 = 3 + 98$ y así sucesivamente. Como la suma de cada par es igual a 101 y hay 50 pares, la suma total es igual a $50 \cdot 101 = 5050$.

Utilizando el símbolo del sumatorio la proposición se escribe como

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

La información relevante sobre esta proposición es la siguiente:

- Clasificación: Implicación simple, cuantificador universal.
- Hipótesis: Sea $n \in \mathbb{N}$.
- Tesis: $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- Resultados/conocimientos previos
  - Aritmética básica.
- Estrategia de demostración: Utilizamos el método de inducción. En la sección 3.3.6 demostraremos esta proposición utilizando una *idea feliz*.

Para subir el primer escalón (etapa 1 del método de inducción) sustituimos n por 1 en la expresión dada. Para resolver el problema planteado por el profesor de Gauss sustituimos n por 100. En la etapa 2 suponemos que sabemos llegar al escalón k-ésimo (la igualdad se cumple para $k \geqslant 1$). En la etapa 3 para pasar del escalón k-ésimo al siguiente deducimos la igualdad para $k + 1$ a partir de la expresión para k.

Demostración $\mathbf{P}_5$

1.- *Verificar que la proposición es cierta para $n = 1$.*
En efecto, *sustituyendo n por* 1 *en* $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, *se obtiene*

$$P(1): \quad 1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

que es cierto.

2.- *Formular la hipótesis de inducción H_{ind}:*

$$P(k): \quad 1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2} \quad \textit{con } k \geqslant 1$$

3.- *A partir de H_{ind}, demostar que*

$$P(k+1): \quad 1+2+\cdots+(k+1) = \frac{(k+1)(k+1+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

es cierta.

En efecto,

$$1+2+\cdots+(k+1) = (1+2+\cdots+k)+(k+1) \underset{H_{ind}}{=} \frac{k(k+1)}{2}+(k+1) =$$

$$= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

□

En el siguiente ejemplo, la proposición $p(n)$ con $n \in \mathbb{N}$ no es cierta para todos los números naturales sino solo a partir de de un número estrictamente mayor que 1.

El principio de inducción para demostrar que una proposición de la forma $p(n)$ con $n \in \mathbb{N}$ es cierta $\forall n \geqslant n_0$ consiste en los siguientes pasos:

1.- Verificar la proposición para $n = n_0$ (se sustituye n por n_0 y se comprueba que $p(n_0)$ es cierta).

2.- Formular la *hipótesis de inducción*, que consiste en suponer que $p(k)$ es cierta, donde k es un número natural mayor o igual que n_0.

3.- A partir de la hipótesis de inducción, se demuestra que $p(k+1)$ es cierta.

Ejemplo 3.13. *Prueba que* $2n < 2^n - 1$ *para* $n \geqslant 3$.

La información relevante sobre esta proposición es la siguiente:

- Clasificación: Implicación simple ($p \Rightarrow q$), cuantificador universal.
- Hipótesis: Sea $n \geqslant 3$.
- Tesis: $2n < 2^n - 1$.
- Resultados/conocimientos previos:
  - Aritmética básica.
- Estrategia de demostración: Utilizamos el método de inducción.

Para subir el primer escalón (etapa 1 del método de inducción) sustituimos n por 3 en la expresión dada. En la etapa 2 suponemos que sabemos llegar al escalón k-ésimo (la desigualdad se cumple para $k \geqslant 3$). En la etapa 3 para pasar del escalón k-ésimo al siguiente deducimos la desigualdad para $k+1$ a partir de la expresión para k.

Demostración

1.- *Verificar que la proposición es cierta para* $n = 3$.
En efecto, *sustituyendo* n *por* 3 *en* $2n < 2^n - 1$, *se obtiene*

$$2 \cdot 3 = 6 < 2^3 - 1 = 7$$

que es cierto.

2.- *Formular la hipótesis de inducción* H_{ind}:

$$2k < 2^k - 1 \text{ con } k \geqslant 3.$$

3.- *A partir de* H_{ind}, *demostrar que* $2(k+1) < 2^{k+1} - 1$ *es cierta.*
En efecto,

$$2(k+1) = 2k + 2 \underset{H_{ind}}{<} (2^k - 1) + 2 < (2^k - 1) + 2^k = 2^{k+1} - 1$$

□

Se suele pensar que la inducción solo permite demostrar proposiciones que se refieren a números naturales. El lector puede encontrar en [9, pp. 73-74], una proposición sobre el número de vértices de grado impar en un grafo que puede demostrarse por inducción sobre el número de arcos del grafo.

Ejercicios

Utiliza el método de inducción para demostrar las siguientes proposiciones.

1.
$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Nota: En la sección 3.2.5 presentamos una forma alternativa de afrontar la demostración de este enunciado.

2.
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Nota: En la sección 3.3.8 presentaremos una forma alternativa de afrontar la demostración de este enunciado.

3.
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

4.
$$\sum_{k=1}^{n} k\,k! = (n+1)! - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

5. $n! \geqslant 2^n \ \forall n \in \geqslant 2$.

6. $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ es divisible por 133 $\forall n \in \mathbb{N}$.

7. $x^n - y^n$ es divisible por $x - y \ \forall n \in \mathbb{N}$.

8. La equivalencia de capitales financieros $(C_0, t_0) \sim (C_n, t_n)$ aplicando la ley financiera de capitalización compuesta exige

$$C_n = C_0(1+i)^n \ \forall n \geqslant 1$$

Prueba por inducción sobre n que

$$C_n = C_{n-1} + I(t_{n-1}, t_n) \ \forall n \in \mathbb{N}$$

siendo $I(t_{s-1}, t_s) = C_{s-1}i$ los intereses generados en el periodo t_s e i el tipo de interés efectivo de dicho periodo.

Principio de inducción fuerte

El método de inducción fuerte o inducción completa es un método que demuestra que una proposición de la forma $p(n)$ donde es cierta para todo número natural ($\forall n \in \mathbb{N}$). Similar al método de inducción difiere de este en el razonamiento de lo que queremos demostrar. Al formular la hipótesis de inducción en la etapa 2 se supone que la proposición es cierta para un número $k \geqslant 1$ y para todos los números naturales entre 1 y k, es decir, para demostrar que $p(k+1)$ es cierto no basta con saber que $p(k)$ es cierto, sino que hay que utilizar que $p(1), p(2), \ldots, p(k)$ son ciertas.

Principio de inducción fuerte: Dada una proposición de la forma $p(n)$ con $n \in \mathbb{N}$, si se cumplen las condiciones

a.- $p(1)$ es cierta.

b.- $\forall k \in \mathbb{N}$ se cumple que si las proposiciones $p(1)$, $p(2), \ldots p(k)$ son ciertas, entonces $p(k+1)$ también lo es

entonces $p(n)$ es cierta $\forall n \in \mathbb{N}$.

Así pues, el principio de inducción para demostrar que una proposición $p(n)$ con $n \in \mathbb{N}$ es cierta $\forall n \in \mathbb{N}$ consiste en los siguientes pasos:

1.- *Verificar* la proposición para $n = 1$ (se sustituye n por 1 y se comprueba que la igualdad en este caso es cierta)

2.- Formular la *hipótesis de inducción*, que consiste en suponer que las proposiciones $p(1)$, $p(2), \ldots, p(k)$ son ciertas, donde k es un número natural mayor o igual que 1.

3.- A partir de la hipótesis de inducción, se *demuestra* que $p(k+1)$ es cierta.

La etapa 2 puede reescribirse como:

$2'$.- Formular la *hipótesis de inducción*, que consiste en suponer que las proposiciones $p(i)$ son ciertas $\forall i \in \mathbb{N}$ con $1 \leqslant i \leqslant k$, donde k es un número natural mayor o igual que 1.

El principio de inducción fuerte permite afirmar que, entonces, $p(n)$ es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$: $p(1)$ es cierta por el paso 1; si $p(1)$ es cierta, se deduce que $p(2)$ es cierta en el paso 3; si $p(1)$ y $p(2)$ son ciertas, se deduce que $p(3)$ es cierta en el paso 3 de nuevo; si $p(1)$, $p(2)$ y $p(3)$ son ciertas, se deduce que $p(4)$ es cierta de nuevo en el paso 3, y así sucesivamente.

También ahora podemos pensar en que el método de inducción fuerte consiste en ir subiendo peldaños en una escalera con infinitos escalones. Subimos el primer escalón; si subimos el primero, sabemos pasar el segundo; si subimos el primero y segundo, sabemos pasar al tercero; si subimos el primero, segundo y tercero, sabemos pasar al cuarto; y así sucesivamente. La etapa 1 equivale a comprobar que sabemos subir el primer escalón, y la etapa 3 a demostrar que sabemos cómo pasar de un escalón al siguiente si hemos subido todos los anteriores.

Si la proposición $p(n)$ con $n \in \mathbb{N}$ solo se verifica a partir de un número n_0 estrictamente mayor que 1, en la etapa 1 se verifica que la proposición es cierta para n_0 y en la etapa 2 se supone que $p(n_0)$, $p(n_0+1), \ldots, p(k)$ son ciertas, donde k es un número natural mayor o igual que n_0.

Ilustraremos el método de inducción fuerte con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.14 (Teorema fundamental de la aritmética)**.** *Demuestra que todo número natural $n \geqslant 2$ es primo o puede expresarse como producto finito de números primos.*

La información relevante sobre esta proposición es la siguiente:

- Clasificación: Implicación simple ($p \Rightarrow q$), cuantificador universal.
- Hipótesis: Sea $n \geqslant 2$.
- Tesis: n es primo o puede expresarse como producto de números primos.
- Resultados/conocimientos previos:
  - Definición de número primo.
  - Descomposición de un número como producto de otros.
- Estrategia de demostración: Utilizamos el método de inducción.

Demostración

1.- *Verificar que la proposición es cierta para $n = 2$.*
En efecto, 2 *es un número primo.*

2.- *Formular la hipótesis de inducción H_{ind}: los números $2, 3, 4, \ldots, k$ con $k \geqslant 2$ son primos o pueden expresarse como producto de números primos.*

3.- *A partir de H_{ind}, demostrar que $k+1$ es primo o puede expresarse como producto finito de números primos.*
En efecto:
  - Caso 1.
    $k+1$ *es primo. Se concluye.*
  - Caso 2.
    $k+1$ *no es primo. En ese caso,* $k+1$ *se puede escribir como producto de dos números menores que* $k+1$ *y mayores que* 1*. Por hipótesis de inducción, cada uno de ellos es primo o se expresa como producto finito de*

números primos, por lo que $k+1$ puede expresarse como producto de números primos y se concluye.

□

Observa que en la etapa 3 se utiliza la demostración por casos que se detalla en la sección 3.3.6.

El principio de inducción fuerte se suele utilizar en sucesiones definidas por recurrencia, esto es, sucesiones en las que a partir de valores iniciales, cada término se obtiene a partir de los términos anteriores.

Ejemplo 3.15. *Dada la sucesión definida por recurrencia $x_1 = 0, x_2 = 2$ y $x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2}$ para $n \geqslant 3$, prueba que:*

$$x_n = 2^n - 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

La información relevante sobre esta proposición es la siguiente:

- Clasificación: Implicación simple ($p \Rightarrow q$), cuantificador universal.
- Hipótesis: $x_1 = 0, x_2 = 2$ y $x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2}$ para $n \geqslant 3$.
- Tesis: $x_n = 2^n - 2$.
- Resultados/conocimientos previos:
  - Aritmética básica.
- Estrategia de demostración: Utilizamos el método de inducción fuerte.

Demostración

1.- *Verificar que la proposición es cierta para $n = 1$.*
En efecto, *sustituyendo n por 1 en $x_n = 2^n - 2$ se otbiene*

$$x_1 = 2^1 - 2 = 0$$

que es cierto.

2.- *Formular la hipótesis de inducción H_{ind}:*
$x_i = 2^i - 2$ es cierta $\forall i \in \mathbb{N}$ con $1 \leqslant i \leqslant k$ para un número $k \in \mathbb{N}$ con $k \geqslant 1$.

3.- *A partir de H_{ind}, demostrar que $x_{k+1} = 2^{k+1} - 2$ es cierta.*
En efecto:

- Caso 1.
  $k = 1$, hay que probar que $x_2 = 2^{1+1} - 2 = 2^2 - 2 = 2$, que es cierto.
- Caso 2.
  $k \geqslant 2$, entonces $k + 1 \geqslant 3$ y puede aplicarse la fórmula de recurrencia

$$x_{k+1} = 3x_{k+1-1} - 2x_{k+1-2} = 3x_k - 2x_{k-1} \underset{\mathrm{H_{ind}}}{=} 3(2^k - 2) + 2(2^{k-1} - 2) =$$

$$= 3 \cdot 2^k + 6 - 2 \cdot 2^{k-1} - 4 = 3 \cdot 2^k - 2^k - 2 = 2 \cdot 2^k - 2 = 2^{k+1} - 2$$

$\square$

Observa que de nuevo en la etapa 3 se utiliza la demostración por casos que se detalla en la sección 3.3.6.

Ejercicios Utiliza el método de inducción fuerte para demostrar las siguientes proposiciones.

1. Todo número natural se puede escribir como suma de potencias distintas de 2.

2. Dada la sucesión definida por recurrencia con $x_1 = 5, x_2 = 12$ y $x_n = 6x_{n-1} - 9x_{n-2}$ $\forall n \geqslant 3$, prueba que: $x_n = 6^{n-1}(6 - n)\ \forall n \geqslant 3$.

3. Dada la sucesión definida por recurrencia con $x_0 = 1, x_1 = 3, x_n = 5x_{n-1} + 6x_{n-2}$ $\forall n \geqslant 3$ entonces $x_n = \frac{4}{7}6^n + \frac{3}{7}(-1)^n\ \forall n \geqslant 3$.

4. Dada la sucesión definida por recurrencia con $x_0 = 7, x_1 = 3, x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2}$ $\forall n \geqslant 3$ entonces $x_n = 4 + 3(\frac{-1}{3})^n\ \forall n \geqslant 3$.
   Observa que en este caso la expresión general de x_n es válida $\forall n \geqslant 0$.

5. $x_1 = 0, x_2 = 2, \ldots x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2}\ \ \forall n \geqslant 3$ entonces $x_n = 2^n - 2$.

6. Dada la sucesión definida por recurrencia con $f_1 = 1, f_2 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ $\forall n \geqslant 2$ entonces $f_n \leqslant 2\ \forall n \in \mathbb{N}$.

   La sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} = 1, 1, 2, 3, 5, \ldots$, es la llamada *sucesión de Fibonacci*, descrita por Leonardo de Pisa, también llamado Leonardo Pisano, Leonardo Bigollo o Fibonacci (1170-1240). Comenzando con $f_1 = 1$ y $f_2 = 1$, cada término f_n con $n \geqslant 2$ se obtiene como suma de los dos anteriores.

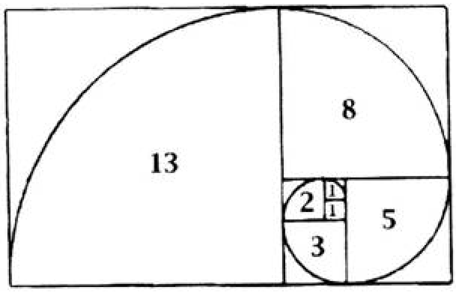


Figura 3.18: Leonardo de Pisa y espiral de Fibonacci (aproximación de la espiral áurea generada dibujando arcos circulares conectando las esquinas opuestas de cuadrados de lado $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$ adosados sucesivamente)

Esta sucesión fue descrita por Fibonacci como la solución a un problema de cría de conejos. En la página 404 de [30], traducción de su *Liber Abaci* publicada en 1202, puede leerse

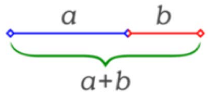
> *Cierto hombre tiene una pareja de conejos juntos en un lugar cerrado y desea saber cuántos son creados a partir de este par en un año cuando, de acuerdo a su naturaleza, cada pareja necesita un mes para envejecer y cada mes posterior procrea otra pareja.*

Así pues, el primer mes hay una pareja de conejos; el segundo mes la pareja envejece pero no procrea (una pareja); el tercer mes la pareja procrea otra pareja (dos parejas); el cuarto mes, la primera pareja vuelve a procrear y la pareja nueva envejece sin procrear (tres parejas); el quinto mes, las dos parejas más viejas vuelven a procrear mientras que la nueva pareja no procrea (cinco parejas) y así sucesivamente.

Tomando el límite del cociente entre entre dos términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci se obtiene el *número áureo* o *proporción áurea* representado por la letra ϕ en honor al escultor griego Fidias

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618033988\ldots$$

El número áureo surge al partir un segmento en dos de forma que el cociente entre la longitud total $a + b$ y la longitud del segmento mayor a es igual al cociente entre la longitud del segmento más largo a y la longitud del cociente más corto b, esto es,



$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \phi$$

y es la raíz cuadrada positiva de la ecuación de segundo grado obtenida escribiendo en la igualdad anterior $\frac{a+b}{a} = 1 + \frac{b}{a}$ de forma que $1 + \frac{b}{a} = \frac{a}{b}$, esto es, $1 + \phi^{-1} = \phi$ y multiplicando por ϕ y agrupando, $\phi^2 - \phi - 1 = 0$.

Entre sus numerosas propiedades destacamos que el número ϕ, su cuadrado y su inverso tienen las mismas cifras decimales (puesto que $\phi^2 = 1 + \phi$ y $\phi^{-1} = \phi - 1$).

El primer estudio formal del número áureo se debe a Euclides (350-265 a,C.), matemático griego conocido como el padre de la geometría. La definición 3 del Libro Sexto de *Los Elementos* (véase [14]) define la proporción áurea

> *Se dice que una recta ha sido cortada en extrema y media razón cuando la recta entera es al segmento mayor como el segmento mayor es al segmento menor.*

Figura 3.19: Euclides y los Seis Libros Primeros de su Geometría

Método de descenso

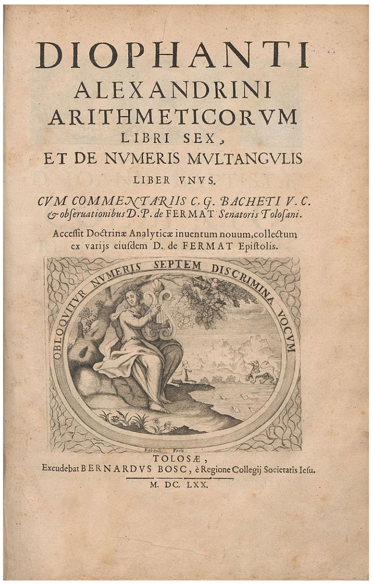
Aunque este procedimiento no se usa habitualmente en demostraciones matemáticas, queremos mencionarlo brevemente en este apartado por su relación con el método de inducción.

Figura 3.20: Pierre de Fermat

El método de descenso fue introducido por el matemático francés Pierre de Fermat (1601-1665), famoso por su conjetura, conocida como el *último teorema de Fermat*, que establece que no existe solución con números enteros no nulos para la ecuación:

$$x^n + y^n = z^n, \quad \text{si } n \text{ es un entero mayor que dos.}$$

Tal como se recoge en la edición de sus obras publicada por su hijo [13], al leer una traducción al latín de la *Aritmética* de Diofanto de Alejandría publicada en 1621 [3], Fermat anotó lo siguiente:



DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX,
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
CVM COMMENTARIIS C. G. BACHETI V. C.
& obseruationibus D. P. de FERMAT Senatoris Tolosani.
Accessit Doctrinæ Analyticæ inuentum nouum, collectum
ex varijs eiusdem D. de FERMAT Epistolis.

TOLOSÆ,
Excudebat BERNARDVS BOSC, è Regione Collegij Societatis Iesu.
M. DC. LXX.

Figura 3.21: Traducción al latín por Bachet de Méziriac de la *Aritmética* de Diofanto de Alejandría

Es imposible encontrar la forma de convertir un cubo en la suma de dos cubos, una potencia cuarta en la suma de dos potencias cuartas, o en general cualquier potencia más alta que el cuadrado, en la suma de dos potencias de la misma clase. He descubierto para el hecho una demostración excelente. Pero este margen es demasiado pequeño para que quepa en él.

Se cree que Fermat había demostrado el teorema para $n = 4$ con el método de descenso. Cien años más tarde, Euler (1707-1783), uno de los matemáticos más prolíficos de todos los tiempos, muy conocido por el número e y la fórmula de Euler ($\forall x \in \mathbb{R}$ se verifica $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$, $e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x$) demostró la conjetura para $n = 3$ utilizando también el método de descenso.

Figura 3.22: Leonhard Euler

La conjetura de Fermat fue demostrada en 1993 en primera instancia por el matemático británico Andrew Wiles. El propio Wiles corrigió la demostración en 1995 y recibió el premio Abel de Matemáticas en 2016 (galardón anual que concede el Rey de Noruega a instancias de la Academia Noruega de Ciencias y Letras).

Figura 3.23: Andrew Wiles

El método de descenso permite demostrar una proposición de la forma $p(n)$ con $n \in \mathbb{N}$ suponiendo que ninguno de los números naturales satisface $p(n)$. El método de descenso se basa en el hecho de que $\mathbb{N}$ es un conjunto bien ordenado, y, por lo tanto, en todo conjunto no vacío de números naturales hay un mínimo, es decir, un número más pequeño que todos los demás.

Esbozaremos en qué consiste el método de descenso en el ejemplo siguiente, tomado de Fermat.

Ejemplo 3.16. *"Todo número primo de la forma* $4n+1$ *con* $n \in \mathbb{N}$ *se puede representar como suma de los cuadrados de dos números naturales".*

La información relevante sobre esta proposición es la siguiente:

- Clasificación: Implicación simple ($p \Rightarrow q$), cuantificador universal.
- Hipótesis: Sea $k \in \mathbb{N}$ un número primo de la forma $k = 4n+1$ para $n \in \mathbb{N}$ (n único).
- Tesis: k se puede representar como suma de los cuadrados de dos números naturales.
- Resultados/conocimientos previos:
  - Definición de número primo.
  - Principio de buena ordenación.
- Estrategia de demostración: Utilizamos el método de descenso.

Para demostrar esta proposición se aplica el método de descenso partiendo de $\neg q$, esto es, que hay un primo de la forma $4n+1$ con $n \in \mathbb{N}$ que no puede representarse como suma de los cuadrados de dos números naturales.

La idea de la demostración es la siguiente. Se demuestra que si k es un número primo de la forma $k = 4n+1$ con $n \in \mathbb{N}$ que no puede representarse como suma de los cuadrados de dos números naturales, entonces existe otro número primo k' más pequeño que k de la forma $k' = 4n'+1$ con $n' \in \mathbb{N}$ que tampoco puede representarse como suma de los cuadrados de dos números naturales. Procediendo así, en un descenso infinito, se llegará a que 5, que es el primer primo de la forma $4n+1$ con $n \in \mathbb{N}$ ($5 = 4 \cdot 1 + 1$) no es suma de cuadrados, pero esto es falso porque $5 = 2^2 + 1^2$. Se concluye entonces que la proposición "todo número primo de la forma $4n+1$ con $n \in \mathbb{N}$ se puede representar como suma de los cuadrados de dos números naturales" es cierta.

El método de descenso, muy utilizado en Teoría de Números, puede ser útil para demostrar proposiciones negativas o la no existencia de determinados objetos matemáticos.

Las siguientes afirmaciones establecen la relación entre el método de inducción y el método de descenso.

- Cualquier demostración por el método de inducción se puede convertir en una demostración por el método de descenso. La idea es la siguiente:
  Si es posible demostrar por el método de inducción que $p(n)$ es cierta $\forall n \geqslant n_0$, en el método de descenso se demuestra que si $p(k)$ no es cierta para algún $k > n_0$, hay un número natural j menor que k para el que $p(j)$ no es cierta (o bien $p(k-1)$ no es cierta -método de inducción- o bien alguna de las proposiciones $p(n_0), p(n_0 + 1), \ldots, p(k-1)$ no es cierta -principio de inducción fuerte-). Así sucesivamente, se desciende hasta concluir que $p(n_0)$ no es cierta. Pero como en la etapa 1 de inducción se ha comprobado que $p(n_0)$ es cierta tendríamos una contradicción.

- Cualquier demostración por el método de descenso se puede convertir en una demostración por el método de inducción fuerte. La idea es la siguiente:
  La demostración por el método de descenso de que $p(n)$ es cierta $\forall n \in \mathbb{N}$ consiste en demostrar que si existe algún número natural k para el que $p(k)$ no es cierta, existe algún número natural $j < k$ para el que $p(j)$ no es cierta. Por paso al contrarrecíproco esto equivale a demostrar que si $p(j)$ es cierta para todo número natural j con $j < k$, entonces $p(k)$ es cierta. Y esto, junto con la comprobación de que $p(1)$ es cierta, es la demostración por el método de inducción fuerte de que $p(n)$ es cierta $\forall n \in \mathbb{N}$, como vimos en 3.3.5.

3.3.6. Demostración por casos

La demostración por casos se puede utilizar cuando la proposición que se quiere probar se puede clasificar en un conjunto de casos posibles.

Si la hipótesis p equivale a una disyunción de un número finito de casos, esto es, si $p \Leftrightarrow p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n$, hay que demostrar que cada uno de ellos implica la tesis q, es decir, que $(p_1 \Rightarrow q) \wedge (p_2 \Rightarrow q) \wedge \ldots \wedge (p_n \Rightarrow q)$.

No hay ningún límite en el número de casos posibles. En matemáticas preferimos evitar demostraciones con un número grande de casos, pero esto no siempre es posible como sucede, entre otros, con el *teorema de los cuatro colores*[3] de teoría de grafos que establece que cualquier mapa geográfico con regiones continuas puede ser coloreado con

[3]El problema de los cuatro colores fue descubierto de forma casual por Francis Guthrie tratando de

cuatro colores diferentes de forma que no queden regiones adyacentes compartiendo frontera en común con el mismo color.

Figura 3.24: Mapa de España coloreado con cuatro colores

Ilustraremos el método de demostración por casos con la proposición $\mathbf{P_6}$.

Ejemplo $\mathbf{P_6}$. Si $n \in \mathbb{Z}$, entonces $n^2 + n$ es par.

- Clasificación: Implicación simple ($p \Rightarrow q$), cuantificador universal.
- Hipótesis: Sea $n \in \mathbb{Z}$.
- Tesis: $n^2 + n$ es par.
- Resultados/conocimientos previos:
    - Aritmética básica.
    - Definición de números pares e impares.
    - Identidades notables $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$.
- Estrategia de demostración: Utilizamos el método de demostración por casos.

Distinguimos dos casos dependiendo de si n es par o impar.

Demostración $\mathbf{P_6}$

- Caso 1. *n es par, esto es, $n = 2k$ con $k \in \mathbb{Z}$. Entonces*

$$n^2 + n = (2k)^2 + (2k) = 4k^2 + 2k = 2(2k^2 + 1)$$

y se concluye que $n^2 + n$ es par porque es el doble de $2k^2 + 1$.

colorear el mapa de Inglaterra con la menor cantidad de colores posibles y fue propuesto oficialmente por Cayley (1821-1875) en 1878. En 1976 los matemáticos Appel (1932-2013) y Haken (1928-) demostraron el teorema mediante un complicado programa de ordenador por lo que muchos matemáticos mostraron sus reservas con respecto a esta demostración y, finalmente, en 1996 Robertson (1938-), Sanders (1940-), Seymour (1950-) y Thomas (1962-) publicaron una nueva demostración con 633 casos.

- Caso 2: *n es impar, esto es, $n = 2k + 1$ con $n \in \mathbb{Z}$. Entonces*

  $$n^2 + n = (2k+1)^2 + (2k+1) = 4k^2 + 4k + 1 + 2k + 1 = 2(2k^2 + 3k + 1)$$

  y se concluye que $n^2 + n$ es par porque es el doble de $2k^2 + 3k + 1$.

$\square$

A veces se utiliza la frase "sin pérdida de generalidad" en una demostración para referirse al hecho de que demostrar solo algunos de los casos es suficiente para demostrar todos los demás. Esto sucede en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.17. *Demuestra que para todo par de números reales positivos x, y, y para todo número real r con $0 < r < 1$ se tiene $(x+y)^r < x^r + y^r$.*

- Clasificación: Implicación simple ($p \Rightarrow q$), cuantificador universal.
- Hipótesis: Sean x, y números reales positivos y sea r un número real con $0 < r < 1$.
- Tesis: $(x+y)^r < x^r + y^r$.
- Resultados/conocimientos previos:
  - Aritmética básica.
- Estrategia de demostración: Utilizamos el método de demostración por casos.

Vamos a demostrar la proposición suponiendo, sin pérdida de generalidad, que $x + y = 1$ porque el caso en que $x + y = z \neq 1$ se reduce a este. En efecto, si $x + y \neq 1$, dividiendo por $x + y$ se obtiene $\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x+y} = 1$ (suma de dos números reales positivos, $\frac{x}{x+y}$ e $\frac{y}{x+y}$, iguales a 1).

Demostración

- Caso 1. $x + y = 1$
  Por ser $x + y = 1$, es $0 < x, y < 1$ y como $0 < 1 - r < 1$ se tiene que $x^{1-r} < 1$ e $y^{1-r} < 1$, con lo que al multiplicar por x^r e y^r respectivamente, $x < x^r$ e $y < y^r$, luego $x + y < x^r + y^r$, esto es, $1 < x^r + y^r$.
  Por ser $1 = (x+y)^r$ se tiene $(x+y)^r < x^r + y^r$, y se concluye.

- Caso 2. $x + y \neq 1$
  Aplicando el resultado demostrado para $x + y = 1$ *a* $\frac{x}{z} + \frac{y}{z} = 1$ *donde* $z = x + y$ *se tiene* $\left(\frac{x}{z} + \frac{y}{z}\right)^r < \left(\frac{x}{z}\right)^r + \left(\frac{y}{z}\right)^r$.
  Multiplicando ambos términos por z^r, *se obtiene* $(x + y)^r < x^r + y^r$, *y se concluye.*

$\square$

En esta sección no analizamos las demostraciones en las que la tesis q equivale a una conjunción de un número finito de casos, esto es, si $q \Leftrightarrow q_1 \wedge q_2 \wedge \ldots \wedge q_n$. En estas situaciones hay que demostrar que la hipótesis implica alguno de los casos, es decir, que $(q \Rightarrow q_1) \vee (q \Rightarrow q_2) \vee \ldots \vee (q \Rightarrow q_n)$.

Ejercicios

Utiliza el método de demostración por casos para demostrar las siguientes proposiciones.

1. Si $x \in \mathbb{R}$, entonces $|x| = |-x|$.

2. Sea $k > 0$, entonces $|x| \leqslant k \Leftrightarrow x \in [-k, k]$ (ver Fig. 3.25).

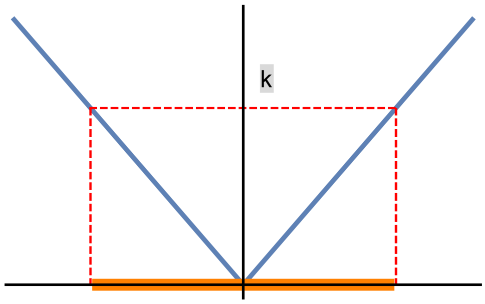


Figura 3.25: Esquema de la proposción $\mathbf{P_8}$.

3. Si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ (desigualdad triangular).

4. Prueba el teorema del coseno que generaliza el teorema de Pitágoras para un triángulo cualquiera. En todo triángulo (ver Fig. 3.26),

   el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los lados restantes menos el doble del producto de dichos lados por el coseno del ángulo que forman,

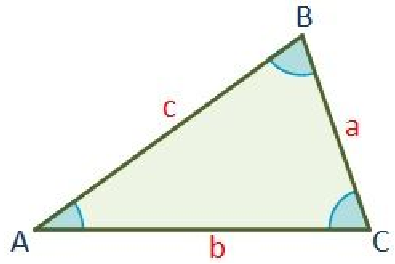


Figura 3.26: Triángulo.

esto es,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ \cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2bc\ \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ \cos C$$

5. Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $n^7 - n$ es divisible por 7.

6. Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $3n^4 + 5n^3 + 7n$ es múltiplo de 15.

7. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n = k^2$ con $k \in \mathbb{N}$. Entonces el resto de dividir n por 4 es igual a 0 o a 1, es decir, n es múltiplo de 4 o es un múltiplo de 4 más uno.

   Un número natural n es un *cuadrado perfecto* si existe $k \in \mathbb{N}$ (único) tal que $n = k^2$.

   Dados dos números $n, m \in \mathbb{N}$ con $m < n$, se llama $n \mod m$ al resto de dividir n por m (ver ejemplo en 3.3.1).

   $$n \mod m = r \text{ si y sólo si existe } q \in \mathbb{N} \text{ (único) tal que } n = mq + r$$

   Los posibles valores de $n \mod m$ son $0, 1, 2, \ldots, m-1$.

   Si $n \mod m = 0$, n es múltiplo de m; si $n \mod m = 1$, n igual a un múltiplo de m más uno; si $n \mod m = 2$, n es igual a un múltiplo de m más dos; y, así sucesivamente, si $n \mod m = m - 1$, n es igual a un múltiplo de m más $m - 1$ (un múltiplo de m menos uno).

   La proposición enunciada puede reescribirse de la siguiente forma:

7′. Si $n \in \mathbb{N}$ es un cuadrado perfecto, entonces $n \mod 4 = 0$ o 1.

   La contrarrecíproca de la proposición enunciada es:

7''. Si $n \in \mathbb{N}$ es tal que $n \mod 4 = 2$ o 3, entonces n no es un cuadrado perfecto.

8. Si $n \in \mathbb{N}$ es un cuadrado perfecto, entonces $n \mod 3 = 0$ o 1.

3.3.7. Método constructivo

Este procedimiento se basa en la *construcción de un objetivo* con las características que indican las hipótesis, y que satisface la tesis, es decir, una solución del problema al que nos enfrentamos. Es apropiado para demostrar una proposición en la que interviene el cuantificador existencial o para demostrar la negación de una proposición universal. Por esta razón este método es a veces denominado *demostración por contraejemplo*.

Corresponde a este tipo de enunciados, la proposición:

> *No es cierto que la suma de números compuestos sea un número compuesto* [4],

que utilizando el operador de negación podría escribirse:

> $\neg$ *[La suma de números compuestos es un número compuesto],*

o si empleamos la relación entre la negación del cuantificador universal y el cuantificador existencial (ver 2.3), tenemos alternativamente:

> *Existen números compuestos cuya suma no es un número compuesto.*

Por lo comentado en el párrafo anterior, la demostración de este enunciado podría afrontarse con el método constructivo, y para ello, bastaría con encontrar una pareja de números compuestos cuya suma sea un número primo. Tras observar que los dos números seleccionados deben ser par e impar, respectivamente (en otro caso su suma sería par, y por tanto en ningún caso podría ser un número primo), probamos con los dos primeros números naturales compuestos que satisfacen estas premisas:

$$\left\{ \begin{array}{ll} 4 & \text{par, compuesto} \\ 9 & \text{impar, compuesto} \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad 4 + 9 = 13, \quad \text{primo}$$

y obtenemos un *contraejemplo*, que nos permite concluir la demostración.

El método constructivo establece la estrategia para abordar la demostración (construir un objeto que satisfaga la tesis). Sin embargo, no aporta información de cómo ha de llevarse a cabo dicha construcción. Para ello se pueden/deben emplear alguna de

[4]Se denomina número compuesto a aquel que no es primo a excepción del 1, es decir, aquel que tiene divisores distintos del uno y él mismo.

las técnicas que ya hemos comentado: prueba directa, método progresivo-regresivo, o incluso reducción al absurdo.

Ejemplo. P$_7$ Existen $a, b \in \mathbb{I}$ tales que $a^b \in \mathbb{Q}$.

- Clasificación: Implicación simple ($p \Rightarrow q$), cuantificador existencial, existencia simple.
- Hipótesis: Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales. $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.
- Tesis: Existen $a, b \in \mathbb{I}$ tal que $a^b \in \mathbb{Q}$. (a^b es un número racional).
- Resultados/conocimientos previos:
  - Un número es irracional ($\mathbb{I}$) si es real no racional ($\mathbb{Q}$).
  - Todo número racional $x \in \mathbb{Q}$ puede ser expresado como $x = \frac{n}{m}$ siendo n y m enteros primos entre sí.
  - Propiedades de la función exponencial: potencia de potencia $\left(a^b\right)^c = a^{bc}$, función inversa (logarítmo) $a^b = c \Leftrightarrow \log_a c = b$.
  - ¿Qué números irracionales conocemos y son *manejables*? $\sqrt{2}, \pi, e$.
- Estrategia de demostración: Método constructivo, buscaremos dos números irracionales que satisfagan la tesis.

Tras analizar el enunciado, y guiados por el método constructivo, nos centramos en *buscar* dos números irracionales a y b, tales que a^b sea racional. En nuestro razonamiento trabajaremos con el método progresivo-regresivo. Comenzamos con la hipótesis, *¿qué números irracionales conocemos?* (pregunta de abstracción). A lo largo de la educación secundaria se han introducido diversos números irracionales, entre ellos:

$$\sqrt{2}, \quad \pi, \quad e.$$

Descartaremos los dos últimos, pues son más difíciles de tratar[5] y decidimos construir nuestro razonamiento con $a = \sqrt{2}$.

Continuamos con el método progresivo-regresivo: *¿Qué sabemos del número $\sqrt{2}$?*. El número $a = \sqrt{2}$ es la solución positiva de la ecuación $x^2 - 2 = 0$, por lo tanto $a^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$. Si el número 2 fuera irracional, habríamos terminado, pero es entero, así que

[5]Los números π y e pertenecen al conjunto de los denominados *números transcendentes*. Un número se denomina transcendente si no es raíz de ninguna ecuación algebraica con coeficientes números enteros. Es decir, no existe ningún polinomio con coeficientes enteros cuya raíz sea π o e.

debemos seguir con la búsqueda de b. Volveremos sobre esta idea más adelante. Por otro lado, utilizando las propiedades de las potencias, existe una forma alternativa de escribir $\sqrt{2}$ que parece más apropiada en el caso que nos ocupa, y es utilizar exponentes racionales para escribir la raíz cuadrada, es decir:

$$a = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$$

Pasamos ahora a analizar la tesis, *¿cómo podemos utilizar lo anterior para obtener que a^b es irracional?* Ten en cuenta que a partir de la expresión anterior resulta que a^b puede escribirse:

$$a^b = \sqrt{2}^b = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^b = 2^{\frac{1}{2}b}.$$

Nos planteamos ahora, *¿Es posible encontrar b para que la expresión anterior sea racional?* Si nos aventuramos a escribirlo, y recordamos la definición de logaritmo, resulta:

$$2^{\frac{1}{2}b} = c \quad \Leftrightarrow \quad \log_2 c = \frac{1}{2}b \qquad\qquad (\alpha^y = x \quad \Leftrightarrow \quad \log_\alpha x = y)$$

Despejando b, de la expresión anterior, y utilizando las propiedades del logaritmo, obtenemos:

$$\log_2 c = \frac{1}{2}b \quad \Leftrightarrow \quad 2\log_2 c = b \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\log_2 c^2 = b}$$

Es posible que los últimos cálculos nos hayan desviado de nuestro objetivo, de modo que, recopilaremos lo que tenemos hasta ahora:

- Buscamos dos números a, b irracionales tales que a^b sea racional.
- Hemos seleccionado $a = \sqrt{2}$ que también podemos escribir $2^{\frac{1}{2}}$.
- Tras imponer $a^b = 2^{\frac{1}{2}b} = c$, hemos obtenido que debe ser $b = \log_2 c^2$.

  Notar que esta elección conduce a:

  $$a^b = 2^{\frac{1}{2}b} = 2^{\frac{1}{2}\log_2 c^2} = 2^{\log_2 (c^2)^{1/2}} = 2^{\log_2 c} = c$$

  donde se han utilizado las propiedades del logaritmo y el hecho de que la función exponencial (2^x) y la función logarítmica ($\log_2 x$) son una la inversa de la otra.

En vista de la observación anterior, si somos capaces de elegir un $c \in \mathbb{Q}$ tal que $\log_2 c^2 \in \mathbb{I}$, hemos concluido. Comencemos con la elección más sencilla, esto es, $c = 3$, de este modo la demostración de $\mathbf{P_7}$ queda supeditada a la siguiente proposición que primero analizaremos y después demostraremos:

$\mathbf{P}_6'$: el número $\log_2 9$ es irracional

- Clasificación: Implicación simple, cuantificador universal.
- Hipótesis: Sea $\log_2 9 \in \mathbb{R}$.
- Tesis: El número $\log_2 9$ es irracional.
- Conocimientos previos:
  - $\log_2 x = y \quad \Leftrightarrow \quad x = 2^y$.
  - Un número es irracional ($\mathbb{I}$) si es real no racional ($\mathbb{Q}$).
  - Todo número racional $x \in \mathbb{Q}$ puede ser expresado como $x = \frac{n}{m}$ siendo n y m enteros primos entre sí.
- Estrategia de demostración. Por analogía a la proposición $\mathbf{P_4}$, que ya fue demostrada en 3.3.4, seleccionamos el procedimiento de demostración por reducción al absurdo o por contradicción.

Esta demostración es semejante a la prueba de $\mathbf{P_4}$, por lo que omitimos todas las motivaciones y consideraciones iniciales. Tal y como esta estrategia de demostración propone, negamos la tesis, es decir, suponemos que $\log_2 9$ es racional, lo cual quiere decir que existen $n, m \in \mathbb{Z}$ primos entre sí, tales que $\log_2 9 = \frac{n}{m}$ y desde ahí, debemos obtener una contradicción. Comencemos por simplificar en la medida de lo posible la expresión anterior, y para ello utilizamos la definición de logaritmo, y las propiedades de la función exponencial:

$$\log_2 9 = \frac{n}{m} \quad \Leftrightarrow \quad 9 = 2^{\left(\frac{n}{m}\right)} \quad \Leftrightarrow \quad 9^m = 2^n,$$

Llegados a este punto, tratamos de buscar alguna incongruencia. Si observamos la última expresión, en el primer término tenemos potencias de un número impar (que son impares), y en el segundo potencias de un número par (que son pares), lo cual provoca que la identidad sea imposible y nos lleva a afirmar que $\log_2 9$ es irracional.

Tras este inciso podemos dar por concluida la prueba de $\mathbf{P_7}$ que hemos abordado por el método constructivo, y que nos lleva a seleccionar:

$$\left.\begin{array}{l} a = \sqrt{2} \in \mathbb{I} \\ b = \log_2 9 \in \mathbb{I} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad a^b = \sqrt{2}^{\log_2 9} = 2^{\frac{1}{2}\log_2 9} = 2^{\log_2 9^{1/2}} = 2^{\log_2 3} = 3 \in \mathbb{Q}$$

Todos los argumentos que hemos desarrollado podrían quedar finalmente escritos de un modo semejante a este:

Demostración $\mathbf{P_7}$ *Asumamos en primer lugar que* $\log_2 9 \in \mathbb{I}$. *Tomando* $a = \sqrt{2}$ *y* $b = \log_2 9$, *un simple cálculo muestra:* $a^b = \sqrt{2}^{\log_2 9} = 2^{\log_2 3} = 3 \in \mathbb{Q}$. *Para terminar, basta probar que* $\log_2 9 \in \mathbb{I}$. *Razonando por reducción al absurdo, obtenemos:*

$$\log_2 9 = \frac{n}{m} \quad \Leftrightarrow \quad 9 = 2^{\left(\frac{n}{m}\right)} \quad \Leftrightarrow \quad 9^m = 2^n,$$

lo cual es imposible, pues el primer término es impar y el segundo par, y se concluye.

□

Para finalizar ofrecemos otra alternativa ingeniosa para probar $\mathbf{P_7}$. Inicialmente esta propuesta fue descartada pues la desmostración no es constructiva desde un punto de vista estricto. El procedimiento que a continuación describimos prueba $\mathbf{P_7}$, pero no ofrece una solución explícitamente, sino que plantea dos alternativas mutuamente excluyentes.

En la página anterior, al analizar $\sqrt{2}$, en algún momento escribíamos:

$$2 = (\sqrt{2})^2$$

o lo que es lo mismo

$$2 = \sqrt{2}\,\sqrt{2}$$

si sustituimos la segunda expresión en el exponente de la primera tenemos:

$$2 = (\sqrt{2})^2 = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\,\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$$

Observa que a^b con $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ y $b = \sqrt{2}$ es racional (de hecho natural). Si $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ fuera irracional (algo que ni los matemáticos aún saben), $\mathbf{P_7}$ estaría demostrada. Sin embargo, si no lo fuera, lo cual querría decir que $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ es racional, tendríamos una solución a nuestro problema (a^b con $a = b = \sqrt{2}$). Es decir:

$$\boxed{¿\ \sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}\ ?} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \textbf{Sí} & \sqrt{2}^{\sqrt{2}} \text{ resuelve } \mathbf{P_7} \text{ con } a = \sqrt{2} \text{ y } b = \sqrt{2}. \\ \textbf{No} & \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} \text{ resuelve } \mathbf{P_7} \text{ con } a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}} \text{ y } b = \sqrt{2}. \end{cases}$$

Date cuenta de que la demostración, aunque correcta, no proporciona explícitamente una solución, y por tanto en sentido estricto no podríamos afirmar que hemos utilizado un procedimiento constructivo. Este tipo de pruebas reciben el calificativo de *indirectas*.

En el siguiente ejemplo abordaremos la demostración de, probablemente, una de las fórmulas más populares en las matemáticas de secundaria: la raíces de la ecuación de segundo grado. Con toda seguridad es familiar a cualquier lector, y aunque su demostración se acometió en algún momento, presumiblemente esta prueba se ha perdido en algún lugar de nuestra memoria. A continuación ilustraremos como el método constructivo puede utilizarse para obtener la citada fórmula.

Ejemplo 3.18. *. Dada la ecuación*

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

demuestra que sus raíces vienen dadas por:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

- Clasificación: Implicación simple ($p \Rightarrow q$), cuantificador universal.
- Hipótesis: Sea el polinomio de coeficientes reales: $ax^2 + bx + c = 0$.
- Tesis: Las raíces de la ecuación vienen dadas por la expresión: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.
- Resultados/conocimientos previos:
  - Aritmética básica.
  - Cuadrado y raíz cuadrada.
  - Identidades notables: $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$.
- Estrategia de demostración: Método constructivo, manipularemos la ecuación de forma conveniente para despejar la incógnita.

Resolver el problema equivale a despejar la incógnita x. La cuestión radica en como hacerlo cuando tenemos un término de grado 2, ax^2, y otro de grado 1, bx, que a priori no podemos *agrupar*. Comencemos por analizar un caso sencillo, que más adelante trataremos de reproducir. Supongamos que $a = 1$, y $b = 0$, en este caso obtenemos:

$$x^2 + c = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \pm\sqrt{-c}}. \tag{3.1}$$

Evidentemente la expresión anterior solo proporciona raíces reales si $c \leqslant 0$, en otro caso estaríamos considerando soluciones complejas [6].

La pregunta de abstracción que surge de lo anterior es: *¿Es posible escribir la ecuación de segundo grado de forma similar a* (3.1)*?* Si la respuesta es positiva, tendremos la solución al problema, en otro caso, deberemos buscar otra alternativa. Transformar la ecuación de segundo grado en algo similar a (3.1) require de dos pasos:

1) <u>Polinomio mónico</u>, es decir, que el coeficiente que acompaña al grado mayor, en este caso 2, sea 1. Con ello conseguiremos algo del tipo:

$$x^2 + \bigcirc x + \bigcirc = 0,$$

donde los círculos indican alguna expresión, en principio distinta en cada aparición, que dependerá de los coeficientes a, b y c.

2) <u>Eliminar término de grado 1</u>. Para lo cual deberíamos expresar la ecuación anterior como algo del tipo:

$$(x + \square)^2 + \triangle = 0.$$

De nuevo, las figuras geométricas representan expresiones que dependen de los coeficientes a, b y c.

Por supuesto, todas las expresiones anteriores deben ser equivalentes, es decir, el paso de unas a otras debe realizarse a través de las reglas de manipulación algebraica que conocemos.

Comencemos con el paso 1), el cual es relativamente sencillo, y como te habraś dado cuenta, basta con dividir la ecuación general de segundo grado por el coeficiente a:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

La operación anterior es válida si $a \neq 0$, lo cual se satisface siempre en una ecuación de segundo grado (fíjate que si $a = 0$, la ecuación sería de grado 1). La etapa 2) es algo más compleja, pero tampoco demasiado. Observa que prentedemos escribir la expresión anterior como el cuadrado de una suma más algo más que dependerá de los coeficientes.

[6] Recuerda que el conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$, es una extensión del conjunto de los números reales, que viene definido como:

$$\mathbb{C} = \{a + bi \,|\, a, b \in \mathbb{R},\ i = \sqrt{-1}\}.$$

El número $i = \sqrt{-}$, recibe el nombre de *unidad imaginaria* y aunque podría parecer una argucia matemática, es de vital importancia en campos como el electromagnetismo o la física cuántica.

Si ahora recordamos la expresión del cuadrado de una suma y la comparamos con la expresión anterior:

$$(x+\square)^2+\triangle = x^2+2\,\square\, x+\square^2+\triangle \qquad \leftrightarrow \qquad x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}$$

Para que ambas expresiones sean iguales, los coeficientes de ambos polinomios han de ser iguales, lo que nos lleva al sistema:

$$\left.\begin{aligned} 2\,\square &= \frac{b}{a} \\[2ex] \square^2+\triangle &= \frac{c}{a} \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} &\Rightarrow \square = \frac{b}{2a} \\ &\Rightarrow \triangle = \frac{c}{a}-\square^2 = \frac{c}{a}-\frac{b^2}{(2a)^2} = \frac{-(b^2-4ac)}{(2a)^2} \end{aligned}$$

Es decir, tenemos la igualdad:

$$x^2+\frac{b}{a}x+c = \left(x-\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{(2a)^2} = 0$$

Hemos obtenido una ecuación de la forma (3.1), que manipulamos hasta llegar a la fórmula que estábamos buscando:

$$\begin{aligned} \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{(2a)^2} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \left(x+\frac{b}{2a}\right) = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{(2a)^2}} \\ &\Rightarrow \quad x = -\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ &\Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}} \end{aligned}$$

En la prueba hemos hecho uso de los símbolos $\square$, $\triangle$ que actuan como ingcónitas. En una prueba formal hubiera sido preferible el uso de cualquiera de las letras que habitualmente usamos para este propósito (z, α, β, γ,...), sin embargo, consideramos que en este ámbito el uso de estas figuras geométricas puede resultar clarificador, y evitar el formalismo que en ocasiones supera al principiante. La técnica que hemos usado se denomina *completar cuadrados*, que es habitual en el estudio de las cónicas, y consiste en ajustar un cuadrado (en nuestro caso $(x+\square)^2$), sumando y restando una cantidad $\left(\pm\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)$. Esto quizá se vea con más claridad en la prueba formal que reproducimos a continuación:

Demostración. *Dividimos la ecuación por el coeficiente de grado 2, y completamos el cuadrado en x para obtener:*

$$
\begin{aligned}
ax^2 + bx + c = 0 &\Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \\
&\Rightarrow \left[x^2 + 2\frac{1}{2}\frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0 \\
&\Rightarrow \left(x + \frac{b}{a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{(2a)^2} = 0
\end{aligned}
$$

Finalmente, despejando obtenemos el resultado buscado:

$$\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{(2a)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

□

Ejercicios

Utiliza el método constructivo para demostar las siguientes proposiciones.

1. Se denominan *números perfectos* a aquellos números que son iguales a la suma de todos sus divisores, salvo él mismo, o equivalentemente a aquellos números iguales a la suma de todos sus divisores propios. Si la suma de los divisores propios es inferior al número se denomina *número deficiente*, y si es superior se denomina *número abundante*. Demuestra que ninguno de los conjuntos anteriores es no vacío[7].

2. Dos números naturales a y b se denominan *amigos*, si la suma de los divisores propios de a es igual a b, y la suma de los divisores propios de b es igual a a. Demuestra que existen parejas de números amigos.

   Indicación: No es sencillo encontrar números amigos. Sugerimos buscar ayuda en Internet y realizar la comprobación.

3. Demuestra el teorema de Darboux o de los valores intermedios: *Sea $f(x)$ una función continua definida en un intervalo $[a,b]$, y $k \in (f(a), f(b))$. Entonces existe al menos un valor intermedio $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = k$.*

[7] En realidad se puede demostrar que existen infinitos números abundantes e infinitos números deficientes. Sin embargo, aunque se conjetura, no se conoce si existen infinitos números perfectos. En la actualidad solo se conocen 50 números perfectos.

Indicación. Construye una función cuya raíz sea c y utiliza el teorema de Bolzano.

4. Sea $f(x) = (1-x)^2$. Demuestra que existe un cuadrado con dos vértices en el intervalo $(0,1)$ del eje de abscisas y los otros dos en la gráfica de f.

5. Sea $f : [0,1] \to [0,\infty)$ una función continua y positiva tal que $f(0) = f(1) = 0$. Demuestra que existe un cuadrado con dos vértices en el intervalo $(0,1)$ del eje de abscisas y los otros dos en la gráfica de f (ver Fig. 3.27).

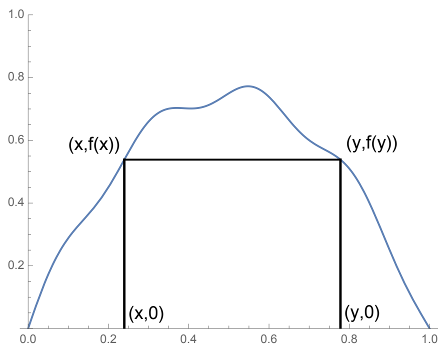


Figura 3.27: Ejemplo de cuadrado construido sobre la gráfica de una función f(x), satisfaciendo las hipótesis del ejercicio 5

6. Demuestra que las tres medianas de un triángulo se cortan en un punto denominado baricentro [8].

   Indicación. Observa que tras un giro, traslación y escalado puede suponerse que los vértices del triángulo están situados en los puntos $(0,0)$, $(1,0)$ y (a,b). Determina las ecuaciones de las tres medianas y verifica que se cortan en un punto.

7. Demuestra que la distancia de un vértice cualquiera del triángulo al baricentro es el doble que la distancia del baricentro al punto medio del lado opuesto. Dicho de otro modo, si la mediana que une el vértice A y el punto medio del lado opuesto P_a es l, se verifica:

$$d(O,A) = \frac{2l}{3} \qquad d(O,P_a) = \frac{l}{3}$$

   siendo O el baricentro.

[8]Recordamos que la mediana es el segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto

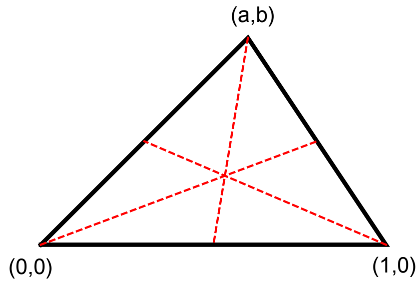


Figura 3.28: Triángulo y sus tres medianas

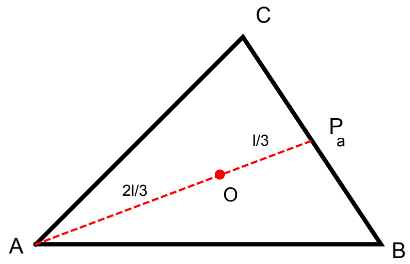


Figura 3.29: Baricentro de un triángulo sobre una de sus medianas

8. Demuestra que el baricentro de un triángulo de vértices (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3), tiene coordenadas:
$$\left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}, \frac{b_1 + b_2 + b_3}{3}\right)$$

9. (*Paradoja de la banda esférica*) Imagínate que tienes una esfera pequeña, por ejemplo del tamaño de una pelota de ping pong. Toma un hilo y la rodeas completamente por su ecuador, quédate con el trocito que has usado para rodearla y le añades un metro más de hilo. Después, coloca el hilo obtenido (el que salió al rodear junto con el metro añadido) alrededor del ecuador. Como quedará espacio entre el hilo y el ecuador, intenta que dicho espacio sea el mismo para todos los puntos (es decir, que el hilo y el ecuador estén a la misma distancia de todos los puntos). Hecho esto, hazte la siguiente pregunta: ¿el hueco que queda entre hilo y pelota es muy grande o muy pequeño? ¿Podrías pasar a través de él un bolígrafo (unos 15 cm de altura)?

   Toma ahora una esfera mayor, por ejemplo una pelota de baloncesto, y haz lo mismo: hilo alrededor del ecuador, añade un metro de hilo al trozo obtenido al rodear y coloca el hilo resultante alrededor del ecuador dejando, en todos los puntos, el mismo espacio. ¿Cómo será ahora el hueco que has obtenido? ¿Podrías ahora hacer pasar el bolígrafo por él?

Finalmente, toma una esfera del tamaño de nuestro planeta y repite la operación: rodea el ecuador con un hilo, después lo aumentas un metro y a continuación lo colocas a distancia uniforme del ecuador. ¿Qué tamaño tendrá este hueco en relación con los anteriores? ¿Pasará ahora el bolígrafo por dicho hueco?

Es muy probable que la respuesta a las tres cuestiones anteriores te sorprenda. Este problema aparece ya en *Los elementos de Euclides*; tiene una solución sorprendente, aunque requiere de matemáticas muy básicas como comprobarás tras resolverlo.

3.3.8. *Idea feliz*

En esta última sección presentamos la estrategia denominada *idea feliz*. Como su nombre indica, este tipo de demostraciones se caracterizan porque incluyen una idea, un concepto, un artificio que simplifica el problema o cambia el punto de vista del mismo, de modo que facilita drásticamente su resolución. Es un procedimiento que depende del ingenio, creatividad o imaginación y, por tanto, poco podemos aportar al respecto en estas notas.

En mayor o menor medida, todas las demostraciones incluyen algún paso fundamental que requiere de cierta pericia, ingenio o conocimientos adicionales, tras el cual el resultado final llega casi a vislumbrase. Con toda seguridad, un neófito englobaría gran parte de las demostraciones en la estrategia que ahora presentamos. Después, a medida que se adquiere experiencia, una idea que en un primer momento resultó genial, puede llegar a considerarse un procedimiento habitual. Esta observación conlleva que sea difícil catalogar cuándo una demostración se basa o no en una idea feliz, pues como hemos dicho, depende de la experiencia y formación matemática de cada uno.

En general, denominaremos *idea feliz* a aquella que cambia drásticamente el enfoque del problema y facilita su resolución, podríamos decir que proporciona un *salto cuántico* hacia la solución. Habitualmente estas ideas pueden venir de otras ramas de la Matemática o de la Ciencia en general, y pueden resultar chocantes e inesperadas.

Es probable que en algun momento hayas oído hablar del Teorema Fundamental del Álgebra, cuyo enunciado es el siguiente:

> ***Teorema*** *(Fundamental del Álgebra) Todo polinomio en una variable de grado mayor o igual que* 1 *con coeficientes reales tiene por lo menos una raíz compleja.*

Este resultado fue originalmente enunciado por Petrus Roth en 1608, y trajo de cabeza a grandes matemáticos durante casi dos siglos (entre otros: Leibniz, Bernoulli, d'Alembert, Euler, Lagrange, Laplace, Gauss). La primera demostración correcta se debe a Jean Robert Argand (1806) y es relativamente sencilla para un estudiante que tenga conocimientos básicos de variable compleja, aunque inabordable para nosotros. La idea de Argand consiste en interpretar el inverso del polinomio como una función de variable compleja. La ausencia de raíces implica (usando resultados clásicos de variable compleja) que el polinomio debe ser una función constante; lo cual es una contradicción con la hipótesis.

No pretendemos discutir cada detalle de esta demostración (tampoco podríamos), el lector interesado puede buscarla en cualquier manual de Análisis Complejo. Queremos simplemente insistir en que el Teorema Fundamental del Álgebra se convierte en un simple ejercicio de variable compleja tras la *idea feliz* de Argand. Antes, matemáticos muy brillantes fracasaron porque quizás abordaron el problema desde la perspectiva equivocada. Para completar esta reseña histórica, añadimos que Gauss publicó en 1816 y 1849 otras dos demostraciones de este teorema, siendo la última una versión de la original de Argand, y la que suele aparecer en los manuales actuales.

Ejemplo. $\mathbf{P_8}$ Sea $\{a_n = cr^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión (progresión) geométrica de razón $r > 0$. Determina la suma de los n primeros términos.

- Clasificación: Simple implicación ($p \Rightarrow q$), cuantificador universal.
- Hipótesis: Sea $\{a_n = cr^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión (progresión) geométrica de razón $r > 0$
- Tesis: Desconocida, se trata de la solución del problema.
- Resultados/conocimientos previos:
  - Sucesión geométrica: definición, propiedades (el término general de una sucesión geométrica es de la forma $a_n = cr^n$, con $c \in \mathbb{R}$).
  - Aritmética básica.
- Estrategia de demostración. *Idea feliz*.

Al analizar el enunciado de la proposición, y teniendo en cuenta el esquema presentado en la Fig.3.3, se podría plantear la resolución de $\mathbf{P_8}$ vía inducción (el número de términos que forman la suma actuaría como el parámetro o variable de inducción). Dejaremos este desarrollo como ejercicio al lector, y nos centraremos en presentar una idea que nos permitirá resolver el problema de forma brillante. Es probable que conozcas esta demostración, pues forma parte de los contenidos de educación secundaria, pero nos parece un ejemplo interesante para ilustrar el concepto de demostración por idea feliz.

El problema nos pide determinar la suma de los n primeros términos, que puesto que $a_n = c\,r^n$, tenemos:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = c\,r + c\,r^2 + \ldots + c\,r^n$$

¿Cómo manejar una suma con n términos?, ¿Es posible manipularla para obtener una suma convencional? La idea que proponemos a continuación nos servirá para resolver el problema y responderá estas dos cuestiones:

> Si multiplicamos S_n por la razón r, observamos que rS_n y S_n tienen $n-2$ términos iguales. Si restamos ambas expresiones obtendremos una simple ecuación en S_n, que nos permitirá determinar su valor.

Procedemos a realizar este cálculo:

$$\begin{array}{rlllll} & S_n & = c\,r + & c\,r^2 + c\,r^3 + \ldots & + c\,r^n & \\ - & r\,S_n & = & c\,r^2 + c\,r^3 + \ldots & + c\,r^n & + c\,r^{n+1} \\ \hline & S_n - rS_n & = c\,r & & & - c\,r^{n+1} \end{array}$$

Despejamos S_n, y volvemos a la notación incial $a_n = c\,r^n$, para obtener el resultado buscado:

$$S_n - rS_n = (1-r)S_n = c\,r - c\,r^{n+1} = a_1 - a_n\,r \quad \Rightarrow \quad \boxed{S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1-r}}$$

Observa que la prueba es elemental cuando se conoce el *truco*, pero en un principio puede resultar inaccesible. Este tipo de procedimientos en los que se busca cancelar los términos de una suma n-ésima es habitual cuando se trabaja con sucesiones o series (a lo largo del próximo año estudiarás conceptos relacionados, como puede ser el Critero de Stolz o las series telescópicas), pero puede resultar sorprendente para un alumno de secundaria.

Demostración $\mathbf{P_8}$ *Nota que $S_n - rS_n = a_1 - ra_n$. Entonces, depejando S_n obtenemos: $S_n = \dfrac{a_1 - a_n r}{1-r}$.* □

Para finalizar esta sección presentaremos otros dos ejemplos. El primero de ellos es la proposición $\mathbf{P_5}$, que ya demostramos por inducción en 3.3.5, y que ahora probaremos utilizando una idea que está inspirada en la que se atribuye a Gauss cuando era niño y que ya hemos relatado anteriormente. En el segundo caso, abordaremos la cardinalidad de los números racionales ($\mathbb{Q}$): con una idea que corresponde al matemático George Cantor (1845-1918) probaremos que se puede construir una correspondencia biunívoca entre los conjuntos $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Q}$. En cierto modo es como afirmar que *existen el mismo número de naturales que de racionales*, si bien las comparaciones entre conjuntos con infinitos elementos deben realizarse con cuidado. Los matemáticos prefieren afirmar que $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Q}$ tienen la misma cardinalidad, o que $\mathbb{Q}$ es un conjunto numerable [9]. En ambos casos omitiremos la demostración formal.

Ejemplo $\mathbf{P_5}$: $1 + 2 + \ldots + n = \frac{(1+n)n}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- Clasificación: Implicación simple, cuantificador universal.
- Hipótesis: Sea $n \in \mathbb{N}$.
- Tesis: $1 + 2 + \ldots + n = \frac{(1+n)n}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- Resultados/conocimientos previos
  - Aritmética básica.
- Estrategia de demostración: En la sección 3.3.5 utilizamos el método de inducción, ahora utilizaremos una *idea feliz*.

Como hemos aconsejado en algún momento, cuando nos enfrentamos a un problema es conveniente realizar algún esquema que nos ayude a entenderlo y nos sugiera como continuar. Optemos por representar gráficamente la suma en la Fig. 3.30.

El resultado de la suma es equivalente a *contar* cada una de las celdas coloreadas en azul. La suma que estamos buscando es el área de ese *cuasi-triángulo* en la unidad celda. El cálculo del área es más sencillo si procedemos a completar el cuasi-triángulo a un cuadrado de lado n como observamos en la Fig. 3.31, izquierda. Sin embargo, este cuadrado de lado n tiene mayor número de celdas azules que blancas. Obseva que si añadimos una columna más, como se ha dibujado en Fig. 3.31, derecha, es evidente deducir que existen el mismo número de celdas azules y blancas y, por tanto, un simple

[9] Un conjunto A se dice numerable (o contable) si existe una correspondencia biunívoca (o biyectiva) entre el conjunto A y un subconjunto de $\mathbb{N}$. Los conjuntos numerables pueden ser finitos o infinitos.

$$1+2+3+\ldots+(n-1)+n \quad \Leftrightarrow$$

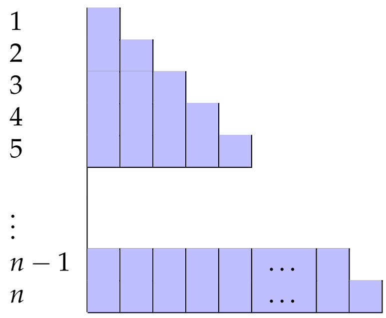


Figura 3.30: Representación gráfica de la suma de los n primeros naturales.

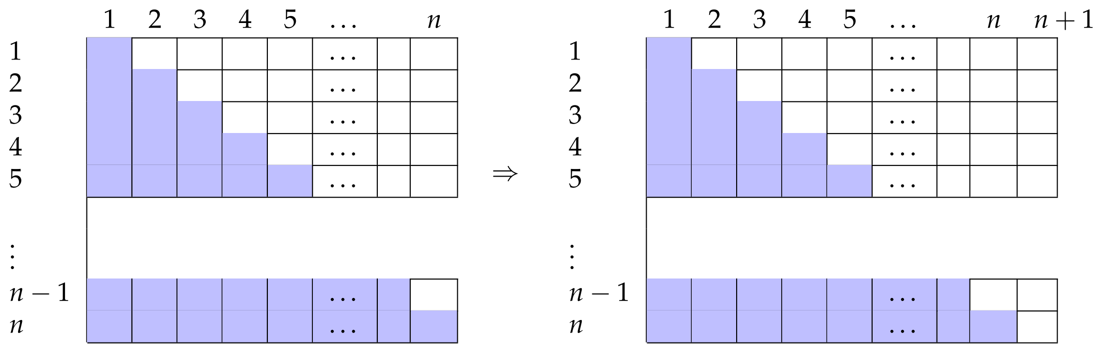


Figura 3.31: El área en azul corresponde con la suma de los n primeros naturales. En la figura de la derecha, el aŕea en azul y blanco es la misma.

cálculo revela:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Celdas azules} + \text{Celdas blancas} = n \times (n+1) \\ \text{Celdas azules} = \text{Celdas blancas}\end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \text{Celdas azules} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

En realidad, también prodríamos haber razonado con el cuasi-triángulo de la Fig. 3.30, que puede dividirse en un triángulo de área $\frac{n^2}{2}$ y n triángulos de área $\frac{1}{2}$ todo ello considerando a la celda como unidad de área (se dejan los detalles al lector), por lo tanto:

$$1+2+\ldots+n = \frac{n^2}{2} + n\frac{1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Tras esta explicación nos atrevemos a aventurar que cualquier lector percibirá la identidad anterior como algo elemental, y su percepción sobre la proposición $\mathbf{P}_5$ habrá cambiado drásticamente. Esto lo consigue una buena idea.

Ejemplo 3.19. *El conjunto de los números racionales, $\mathbb{Q}$, es numerable.*

- Clasificación: Implicación simple, cuantificador existencial.
- Hipótesis: Sea $\mathbb{Q}$ el conjunto de los números racionales.
- Tesis: $\mathbb{Q}$ es numerable $\mathbb{N}$.
- Resultados/conocimientos previos
  - Propiedades de $\mathbb{N}$.
  - Propiedades de $\mathbb{Q}$.
  - Conjuntos numerables: Un conjunto A se dice numerable (o contable) si existe una correspondencia biunívoca (o biyectiva) entre el conjunto A y un subconjunto de $\mathbb{N}$ o el propio $\mathbb{N}$.
- Estrategia de demostración: Método constructivo combinado con *idea feliz*.

Tras analizar el concepto de conjunto numerable (que quizá desconozcas), debe quedar claro que el objetivo que perseguimos es encontrar una correspondencia biunívoca entre los conjuntos $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{N}$:

$$f : \mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}$$

Una correspondencia biunívoca entre conjuntos finitos implica que ambos tiene el mismo número de elementos. Sin embargo, cuando los conjuntos son infinitos, se debe tener cuidado con afirmaciones como la anterior. Los matemáticos prefieren decir que los conjuntos tienen la misma cardinalidad lo que, en cierto modo, significa que son *infinitos comparables o semejantes*. Notar que si el resultado de esta proposición es cierto, estamos afirmando que es posible añadir una etiqueta con un número natural a cada número racional, lo cual es realmente sorprendente. Probablemente te estés preguntando, *¿existen tantos números naturales?*, pues la respuesta es afirmativa. Ahora, si los números naturales son *tantos*, quizá se pueda hacer lo mismo con los números reales. En este caso la respuesta es negativa, los números reales no son numerables, ni siquiera lo son los números irracionales (y sin embargo, ¿apostamos a que no conoces tantos números de este tipo?). Aunque este es un tema muy interesante, no insistiremos más pues tampoco es el objetivo de estas notas. En [12] se puede encontrar una introducción, muy asequible, a este asunto que te recomendamos consultar.

Volvamos a nuestro objetivo: la construcción de una correspondencia biunívoca entre los conjuntos $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{N}$. Tomaremos una idea que corresponde a George Cantor (1845-1918), y que David Hilbert (1862-1943) ilustró como sigue [12]. Hilbert imagino un hotel

(Hotel Hilbert) con tantas habitaciones como números naturales. Al frente de la recepción está Cantor. Al hotel llegan distintos *grupos de números* a los que Cantor debe asignar habitación. Cierto día el hotel recibe un autobús donde viajan todas las fracciones (¡un autobús enorme!). La labor de Cantor es asignar habitación a cada una de ellas. Si lo consigue y nos explica cómo, habremos encontrado la solución al problema que nos ocupa. Cantor, que es un persona muy diligente, decide poner orden, y clasifica las fracciones por filas, en la primera fila todas las que tienen por numerador el uno, en la segunda fila todas las que tienen por numerador el dos, y así sucesivamente (ver Fig. 3.32). Cualquier fracción que pudiéramos imaginar estaría en alguna de las filas, así por ejemplo la fracción $\frac{27}{71}$ estará en la posición 71, de la fila 27. Tras ordenar el conjunto de fracciones, Cantor comienza a asignar llaves de habitaciones. El modo en el que lo hace está ilustrado en la Fig. 3.32. Cantor asigna la habitación 1, a la fracción $\frac{1}{1}$, se mueve a la

$$
\begin{array}{cccccc}
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots \\[2ex]
\frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \frac{2}{5} & \cdots \\[2ex]
\frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \frac{3}{4} & \frac{3}{5} & \cdots \\[2ex]
\frac{4}{1} & \frac{4}{2} & \frac{4}{3} & \frac{4}{4} & \frac{4}{5} & \cdots \\[2ex]
\frac{5}{1} & \frac{5}{2} & \frac{5}{3} & \frac{5}{4} & \frac{5}{5} & \cdots \\[2ex]
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}
$$

Figura 3.32: Secuencia de la correspondencia entre las fracciones positivas y $\mathbb{N}$.

segunda fila y asigna la habitación 2 a la fracción $\frac{2}{1}$, se mueve en diagonal regresa a la fila 1, y asigna la habitación 3 a la fracción $\frac{1}{2}$, avanza una posición y entrega la habitación 4 a la fracción $\frac{1}{3}$, de nuevo desciende en diagonal y entrega la habitación 5 a la fracción $\frac{2}{2}$, y así sucesivamente (ver Fig. 3.32). Con esta estrategia, Cantor recorrerá el conjunto completo de las fracciones (si tuviera tiempo para ello), y todas ellas tendrán acceso a una habitación. Con esto queda demostrado que es posible construir una correspondencia biunívoca entre el conjunto de las fracciones y número naturales. Quizá te inquiete el hecho de que en nuestro enunciado original figuraba el conjunto de los números racionales (fracciones irreducibles) en lugar del conjunto de las fracciones positivas, pero el argumento es fácil de adaptar, ¿podrías ayudar a Cantor?

Llegados a este punto, esperamos que te hayas convencido de que el conjunto de los números raciones es numerable, y que la brillante idea de Cantor haya contribuido a ello.

Ejercicios

Cada una de las siguientes cuestiones debería ser accesible al lector tras la indicación aportada.

1. (*Teorema de Viviani*) *Sea T un triángulo equilátero y P un punto interior cualquiera. La suma de las distancias de P a las aristas de T es igual a la altura del triángulo.*

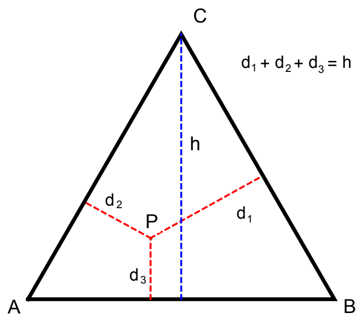


Figura 3.33: Teorema de Viviani

Indicación Dado cualquier punto interior P, el triángulo puede ser dividido en tres triángulos como indica la Fig. 3.34. ¿Qué elemento significativo de estos nuevos triángulos son las distancias de P a los respectivos lados?

2. (*Teorema de Pitágoras*) El teorema de Pitágoras es probablemente uno de los resultamos más famosos de las matemáticas. Existen multitud de demostraciones, siendo alguna de ellas realmente ingeniosas. En este ejercicio, sugerimos que busques en la bibliografía o en la red tres demostraciones de este Teorema que consideres que están basadas en una *idea feliz*.

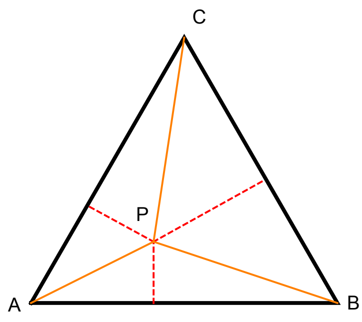


Figura 3.34: División del triángulo T en tres triángulos a partir del punto P

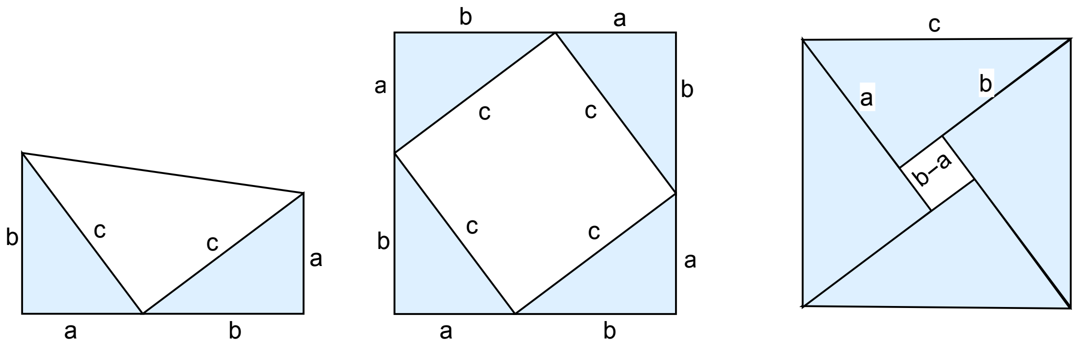


Figura 3.35: Tres demostraciones geométricas del teorema de Pitágoras

3. Estás haciendo una ruta por el desierto y has de trasladarte desde un campamento a un oasis que está a una distancia de 200 kilómetros, pero no tienes agua para el viaje. Afortunadamente el campamento y el oasis están en el mismo margen de un canal cuyo trazado es recto y que dista 40 kilómetros del campamento y 90 del oasis. Has de planear tu ruta de modo que pases por el canal a recoger agua, pero como estás escaso de gasolina debes hacerlo de modo que el recorrido total sea lo menor posible.

   Indicación Este ejercicio ya fue propuesto en el Capítulo 1 (sección 1.2). No obstante, nos parece conveniente incluirlo de nuevo en esta sección. Sin duda, el uso de la simetría es fundamental para obtener una solución sencilla y elegante del problema.

4. (*Cardinalidad de* $\mathbb{R}$) Demuestra que el conjunto de los números reales es no numerable.

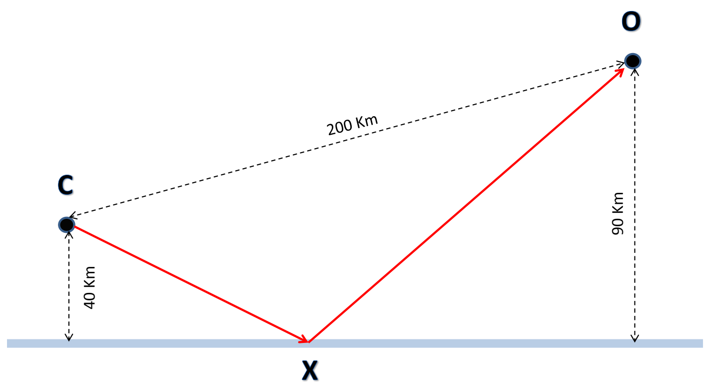


Figura 3.36: Ruta en el desierto

Indicación La clave consiste en que dada cualquier ordenación, se muestra que siempre es posible encontrar un número que no esté en la misma. Es aconsejable trabajar con los números del intervalo $[0, 1]$ y recordar alguna de las propiedades de los números reales que los diferencian de los racionales. En [12] se ofrece una versión de esta demostración que utiliza el "Hotel de Hilbert".

5. (*Suma de series. Paradoja de la dicotomía*) Las paradojas de Zenón son un conjunto de problemas filosóficos debidos a Zenón de Elea (490-430 a. C.), en la Grecia Antigua, para respaldar la doctrina de Parménides de que el movimiento no es más que una ilusión de los sentidos. Entre otras están la paradoja de la dicotomía o la de Aquiles y la tortuga.

   En el caso de la paradoja de la dicotomía, se afirma que para recorrer una determinada distancia antes se debería recorrer la mitad, y antes la mitad de la mitad, y antes la mitad de la mitad de la mitad, y así indefinidamente, y dado que son infinitos trayectos y solo disponemos de un tiempo finito, debemos deducir que el movimiento no existe, y es por tanto una mera ilusión de nuestros sentidos.

   Matemáticamente, la paradoja podría rebatirse si la suma:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots ..$$

   fuera finita. Los sumandos de la suma anterior corresponden a los términos de una sucesión geométrica, y pueden sumarse utilizando la fórmula que veíamos al inicio de esta sección por un paso al límite. ¿Podrías intentarlo y comprobar que la suma vale 1?

El resultado de la suma anterior también se puede deducir de Fig. 3.37:

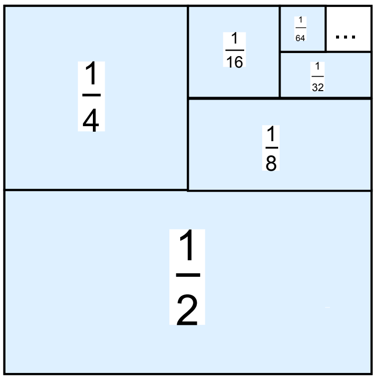


Figura 3.37: Representación gráfica de suma $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$

- Busca información sobre la paradoja de Aquiles y la tortuga y rebátela matemáticamente.
- Utiliza un argumento gráfico similar al anterior para comprobar que:

$$2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\ldots\right)=1$$

6. (*Series divergentes*). Si no has recibido un curso de *sumas infinitas* (series), tras el ejercicio anterior, quizá pienses que la condición para que la suma infinita proporcione un resultado finito es que los sumandos tiendan a cero. En realidad, esta condición que acabamos de exponer es necesaria aunque no suficiente. Para que te convenzas de ello, en este ejercicio te proponemos demostrar que la suma:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots..$$

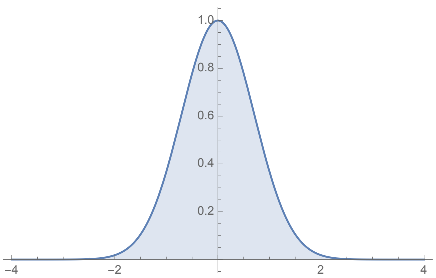
es *divergente*, es decir, es mayor que cualquier número real si se suman suficientes términos.

Indicación Trata de controlar la suma por otra con sumandos menores, que sea claramente divergente. Para ello, puedes agrupar términos.

$$1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{<1/2}+\underbrace{\ldots+\ldots}_{<1/2}+\underbrace{\ldots+\ldots+\ldots}_{<1/2}+\ldots>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ldots....$$

7. (*Integral Gaussiana*). Se denomina integral de Gauss o gaussiana a la *integral impropia* de la función gaussiana e^{-x^2} sobre la recta de los reales:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}.$$



Demuestra la igualdad anterior no es sencillo, pues la función e^{-x^2} no tiene una primitiva expresable en términos de funciones elementales, o dicho de otra forma, no es posible resolver la integral indefinida:

$$\int e^{-x^2} dx$$

en términos de las funciones clásicas que solemos manejar.

El objetivo de este ejercicio es demostrar la igualdad anterior. El procedimiento, que guiaremos, requiere de algunos conocimientos de cálculo integral que podrían superar al lector. Sin embargo, nos ha parecido apropiado introducir este caso aquí, pues para el cálculo de la igualdad anterior se hará uso de integración en varias variables, algo que cuanto menos es sorprendente.

a) Utilizar el teorema de Fubini para demostar:

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx\right)^2$$

b) Prueba que con un cambio a coordenadas polares se tiene:

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} re^{-r^2} drd\theta$$

c) Utilizar el apartado anterior para demostar:

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \pi$$

d) Concluir

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}.$$

8. (*Área del círculo*). Asumiendo que la longitud de la circunferencia es $2\pi r$, donde r respresenta el radio. Demostar que el área del círculo es πr^2

   Indicación. Aproximar el área del círculo por triángulos y pasar al límite (ver Fig. 3.38).

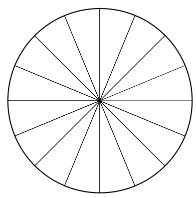


Figura 3.38: Círculo divido en 16 sectores triangulares.

Observación. Los procesos de paso al límite son muy habituales en Matemáticas, pero deben ser tratados con sumo cuidado. Por ejemplo, en la sucesión de arcos de circunferencia representados en la Fig. 3.39 tienen todos la misma longitud. Si el proceso de paso al límite *funcionara* en este caso, la longitud de todos los arcos sería igual a su diámetro, por lo tanto $\pi = 1$!!!, ¿por qué este razoniento es incorrecto?, ¿qué lo diferencia del caso anterior?

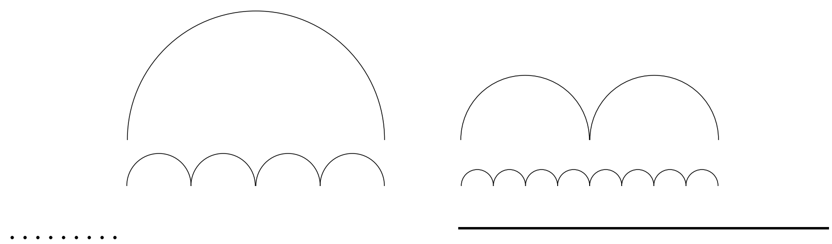


Figura 3.39: Sucesión de arcos de circunferencia de la misma longitud. Si el paso al límite fuera correcto, se tiene $\pi = 1$!!!

9. (*Suma de cuadrados*). Demuestra que:

$$1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

<u>Indicación.</u> El triple de la suma de cuadrados puede organizarse en un rectángulo (ver Fig. 3.40). Este ejercicio también fue planteado en la sección 3.3.5.

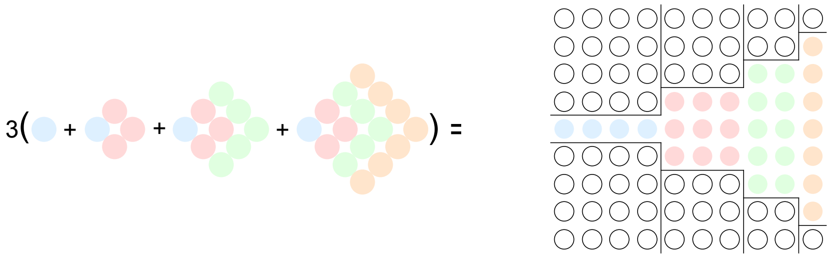


Figura 3.40: El gráfico muestra que el triple de la suma de cuadrados se puede organizar en un rectángulo.

Bibliografía

[1] AMATE POU,J.. *Antología de citas: Paseando por una parte de la Historia.* Caligrama, 2017.

[2] ARCAVI, A. *El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos*, *Uno: revista de didáctica de las matemáticas*, n.º 044, pp. 59-75, enero-marzo 2007.

[3] BACHET DE MÉZIRIAC, C. G. *Diophanti Alexandrini Arithmeticorum libri sex, et de numeris multangulis liber unus. Nunc primum græcé et latiné editi, atque absolutissimis Commentariis ilustrati.* H. Drouart, 1621.

[4] BEZOS, J. *Ortotipografía y notaciones matemáticas*, Versión 0.17 2016-09-01, http://www.texnia.com/archive/ortomatem.pdfNivola, 2016.

[5] CARROLL, L. *Un cuento enmarañado*, Nivola, Madrid, 2002.

[6] CAÑON LOYES, C.. *La Matemática: creación y descubrimiento.* Universidad Politécnica de Comillas, Madrid, 1993.

[7] CHARTTRAND, G., POLIMENI, A. D. y ZHANG, P. *Mathematical Proofs*, tercera edición, Pearson 2013

[8] DESCARTES, R. *Discours de la méthode plus la Dioptrique, les Météores et la Géométrie*, Ian Maire, Leiden, 1637. Puedes descargar el tratado de geometría a través del Proyecto Gutenberg: http://www.gutenberg.org/ebooks/26400

[9] DE GUZMÁN OZÁMIZ, M. *Cómo hablar, demostrar y resolver en Matemáticas.* Base Iniversitaria, Anaya, 2019.

[10] HADAMARD, J. *Psicología de la invención en el campo matemático* Espasa-Calpe, 1947.

[11] HARDY, G.H. *Apología de un Matemático*, Capitán Swing Libros S.l., 2017.

[12] Du Sautoy, M. *Cómo contar hasta infinito. Un viaje a través de la historia de los números.* Blackie Books, 2017.

[13] Fermat, P. *Oeuvres de Fermat, publiées par les soins de MM. Paul Tannery et Charles Henry sous les aspices du Ministère de l'instruction publique.* ed. Tannery et Henry, 1891-1912, Gauthier-Villars et fils.

[14] Fitzpatrick, R. *Euclid's Elements of Geometry.* Richard Fitzpatrick, 2007.

[15] Freudenthal, H. *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, Kluwer Academic Publishers, N. York, 2002.

[16] Halmos, P. R. *How to write Mathematics*, *L'enseignement Mathématique*, vol. 16, pp. 123-152, 1970.

[17] Morgan, A. de «Symbol» en *The Penny Cyclopaedia*,vol xxiii, pp. 442-445, Charles Knight, Londres, 1842.

[18] Ibañes, M.; Orgega, T. *La demostración en Matemáticas. Clasificación y Ejemplos en el Marco de la Educación Secundaria*. Educación Matemática. Vol. 9, no. 2, 1997.

[19] Loomis,E. S. *The Pythagorean Proposition*, NCTM, 1968

[20] Monterde García-Pozuelo, J.L. y García Monera, M. (20/11/2018). *Quod erat demostrandum, "lo que se quería demostrar".* (Archivo de video) Servei de Formació Permanent iInnovació Educativa, Universitat de València. Recuperado de `https://www.youtube.com/watch?v=5Fk9s6fq7lY&list=PLiPJNI1xCP1s2SppRojMMZxxpqzN58gQg&index=1`.

[21] Muñoz Delgado, V.. *Consideraciones sobre la lógica y su historia. El Basilisco, 6.* 1979. http://www.fgbueno.es/bas/pdf/bas10608.pdf

[22] Peano, G. *Importanza dei simboli in matematica*, *Scientia*, n.º 18, pp. 165-173, 1915.

[23] Rojas, R. *El lenguaje de las matemáticas. Historias de sus símbolos*, Fondo de Cultura Económica, Ciudad de México, 2018.

[24] Polya, G. *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*, Princeton Science Library, 2014.

[25] Polya, G. *Matemáticas y razonamiento plausible*, Editorial Tecnos, 1966.

[26] Polster, B. *Q.E.D. Beauty in Mathematical Proof. Walker & Company, 2004.*

[27] REAL ACADEMIA ESPAÑOLA y ASOCIACIÓN DE ACADEMIAS DE LA LENGUA ESPAÑOLA *Ortografía de la lengua española*, Espasa, Madrid, 2010.

[28] ROMBERG, T.A. *Características problemáticas del currículo escolar de Matemáticas*, *Revista de Educación*, n.º 294, pp. 323-406, 1991.

[29] SFARD, A. *Symbolizing Mathematical Reality Into Beeing- Or How Mathematical Discourse and Mathematical Objects Create Each Other*, en COBB, P. et al. *Symbolizing and Communicating in Mathematics Classrooms*, Lawrence Erlbaum Associated Publishers, Londres, pp. 37-98, 2000.

[30] SIGLER, L. E. *Fibonacci's Liber Abaci: A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation*. Springer Verlag, 2003.

[31] SOLOW, D., *Cómo entender y hacer demostraciones en Matemáticas*, Limusa, 1993