TRADUCCIONES LÓGICAS

DE LA LÓGICA HÍBRIDA DE SEGUNDO ORDEN A LA LÓGICA MULTIVARIADA

Máster en Lógica y Filosofía de la Ciencia

Directora: MANZANO ARJONA, María Gracia

Alumno: ORDÓÑEZ MIGUÉNS, Ismael

Abstract En la actualidad la lógica se constituye como una disciplina intrínsecamente plural, albergando diversos sistemas diseñados para razonar sobre objetos muy diferentes. En este contexto las traducciones han venido cobrando cada vez un mayor protagonismo, con la esperanza de clarificar las relaciones entre ellos. El objetivo de este trabajo es ayudar a comprender qué es una traducción y destacar su importancia, matemática, filosófica y aplicada. Se prestará atención al origen y desarrollo de las traducciones en el siglo XX y se comentará cada una de las tres principales líneas de investigación: aquella que descansa en la teoría de categorías, el empleo de sistemas deductivos etiquetados y las aproximaciones modelo-teóricas. Finalmente, se profundizará en el procedimiento de traducción a la lógica multivariada y se aplicará a la lógica híbrida de segundo orden. Se podrá comprobar así que los estudios sobre la traducción forman un campo rico y saludable, pero no unificado; que la identidad de una lógica y la identidad de una traducción dependen la una de la otra; y que las traducciones desempeñan un papel esencial en el transporte de metapropiedades y metateoremas.

Palabras clave: **RC**-morfismo, comorfismo, sistema deductivo etiquetado, teoría de la correspondencia.

Abstract Nowadays logic is constituted as an intrinsically plural discipline, which harbors a variety of systems designed to reasoning about very different objects. In this context translations have become increasingly important, hoping for a better understanding of their relations. The purpose of this work is helping to understand what a translation is and to highlight its mathematical, philosophical and applied importance. Attention will be paid to the origin and development of translations in the twenty century and each of the three main research programs will be discussed: the one that rests on category theory, the use of labelled deductive systems and the model-theoretic approaches. Finally, the procedure of translation to manysorted logic will be carefully analyzed and it will be applied to second order hybrid logic. All this allows to checking that: studies on translations shape a rich and healthy, but not unified, field; the identity of a logic and the identity of a translation depend on each other; and translations play an essential role in transporting of metaproperties and metatheorems.

Keywords: entailment relation-morphism, comorphism, labelled deductive system, correspondence theory.

Índice

Introducción

El siglo pasado ha visto un desarrollo sin precedentes en los estudios sobre lógica y, como consecuencia, la proliferación de una gran cantidad de lógicas ligadas a las matemáticas, la filosofía, las ciencias de la computación y la lingüística. Lógicas cada vez más diferentes de la lógica clásica, diseñadas para razonar sobre objetos de naturaleza muy distinta. Esta pluralidad es lo que, de manera más inmediata, caracteriza el estado actual de la disciplina. Sin embargo, a pesar de la aceptación tácita de todos esos sistemas formales, la comprensión global que se tiene sobre ellos es limitada. Su disparidad exige el replanteamiento de la pregunta por la identidad y parentesco de los mismos. ¿Qué es *una* lógica y en qué factores descansa su identidad? ¿Qué relaciones mantienen entre sí las lógicas existentes? Preguntas con una vocación teórica, justificada por el interés matemático y filosófico intrínseco a esa diversidad, y práctica, obedeciendo a la necesidad de transportar procedimientos de prueba, metapropiedades y metateoremas con el objetivo de facilitar su estudio y empleo.

Históricamente, uno de los recursos pioneros empleados en el estudio de tales relaciones han sido las *traducciones* o *interpretaciones*. Concebidas como herramientas para la prueba de metapropiedades, su uso se hizo cada vez más frecuente y la investigación sobre ellas se desarrolló hasta dar lugar a los primeros intentos de una definición formal en el último tercio del siglo. El estudio de la traducción muestra de forma clara la integración de las dos preguntas anteriores. Es decir, lo que se entienda por una traducción depende de lo que se considere que es una lógica. Precisamente por esto, por la multiplicidad de posiciones y perspectivas acerca de la condición de estas últimas, no existe una teoría de la traducción generalmente aceptada en la comunidad de investigadores.

El objetivo principal del presente texto es contribuir al estudio de la traducción lógica, ayudando a entender qué son las traducciones y su importancia, teórica y práctica, en el contexto actual. Para lograrlo, la tarea será dividida en tres subobjetivos que permitan su concreción. En primer lugar se tratará de elaborar, a modo de estado de la cuestión, una visión comprehensiva del desarrollo histórico de las traducciones y de las principales líneas de investigación sobre las mismas. De este modo, se pondrán de manifiesto las diferentes ideas de lo que es una traducción, posibilitando una futura identificación de sus semejanzas y sus diferencias. En segundo lugar, se analizará la relevancia que la traducción tiene respecto a la definición e identificación de *una* lógica, así como para el transporte de cálculos, metapropiedades y metateoremas; consistencia, expresividad, corrección, completud, Löwenheim-Skolem y compacidad serán algunas de estas últimas. Nótese el empleo que se viene haciendo del artículo indefinido. Lo que se investiga no es la relación entre las traducciones y la lógica en cuanto disciplina, sino entre las traducciones y las lógicas entendidas como sistemas formales. Finalmente, en tercer lugar se profundizará en una de las propuestas de traducción, la desarrollada por Manzano (1996), y se aplicará a un caso particular: la lógica híbrida de segundo orden.

Los primeros trabajos sobre la traducción se encuentran en los textos de Kolmogorov (1967), Gödel (1986a, 1986b) y Gentzen (1969). En estos, las traducciones son construidas como funciones para probar la consistencia de la lógica y la aritmética clásicas relativamente a sus homólogas intuicionistas. Pero, en ninguno se ofrece una reflexión teórica sobre la traducción. Los intentos de dilucidar su significado y su naturaleza habrían de esperar a las investigaciones de Prawitz y Malmnäs (1968), quienes fueron los primeros en proporcionar una definición formal. En los años posteriores aflorarían nuevas propuestas, entre las que destacan las de Wójcicki y Epstein, quienes pueden ser considerados los primeros en llevar a cabo una aproximación sistemática (Carnielli *et al*., 2009; de Araujo Feitosa & D'Ottaviano, 2002). En la actualidad conviven tres grandes formas de pensar la traducción. Una se basa en la teoría matemática de categorías (Carnielli & D'Ottaviano, 1997; Carnielli *et al*., 2009; de Araujo Feitosa & D'Ottaviano, 2002) y, especialmente, en la teoría de instituciones desarrollada a partir de aquella para sistematizar la lógica (Meseguer, 1989; Mossakowski *et al*., 2007, 2009). Otra descasa en la teoría de la prueba (Gabbay 1993, 1994, 2014). Por su parte, la tercera recurre a la teoría de modelos, otorgando a la traducción un carácter eminentemente semántico (Manzano 1996, 2014; Manzano & Urtubey, 2013; van Benthem, 2011). En cuanto a la lógica híbrida que aquí será traducida, consiste en una reducción a segundo orden de la teoría de tipos híbrida desarrollada por Areces *et al*. (2011, 2014). Para simplificar las pruebas se trata de una lógica puramente relacional y sólo se han considerado modelos estándar.

El texto se divide en dos grandes partes que se articulan en tres apartados. La primera parte corresponde a los apartados 1 y 2. En el apartado 1 se analiza el desarrollo de las traducciones en el siglo XX, dedicando especial atención a las contribuciones de Kolmogorov y Gödel. También se exponen las definiciones de Prawitz y Malmnäs, Wójcicki y Epstein. El apartado 2 se centra en las tres perspectivas actuales, reservando un espacio exclusivo para el tratamiento de cada una de ellas. La segunda parte se corresponde con el apartado 3, donde se comentará con detalle el método de traducción definido por Manzano (1996, 2014) y Manzano & Urtubey (2013) y se aplicará a la lógica híbrida de segundo orden. De esta forma, se podrá obtener una imagen más precisa del funcionamiento de las traducciones, así como comprobar su utilidad para el transporte de resultados metalógicos bien conocidos. Sin embargo, la traducción sólo será realizada hasta un estadio, ciertamente, elemental. El motivo es la necesidad de ulterior investigación sobre la lógica híbrida a traducir, aislando un conjunto manejable de axiomas y precisando la clase de estructuras que caracterizan. A pesar de esto, el ejercicio sienta las bases para una posible traducción completa y muestra los principales atributos del enfoque semántico introducido por la teoría de modelos.

Lo que se espera es que se haga evidente la riqueza y la heterogeneidad presentes en el estudio de la traducción y, al mismo tiempo, la necesidad de abrir un diálogo entre las diversas propuestas. Sólo así, identificando sus puntos en común y sus aspectos positivos, será posible esbozar los cimientos de una teoría o, al menos, de un campo de investigación con derecho propio. En general el texto pretende destacar la triple importancia de la traducción: matemática, ayudando a comprender la relación formal entre las lógicas existentes y qué elementos constituyen su identidad; filosófica, aportando razones para aceptar o rechazar el pluralismo lógico y herramientas conceptuales para precisar en qué sentido se entiende la tesis; y aplicada, reduciendo el número de procedimientos de prueba y facilitando nuevos recursos para la prueba de metapropiedades y metateoremas.

1. Origen y desarrollo de la traducción en el siglo XX

El estudio sistemático de las traducciones lógicas tiene un origen relativamente reciente. Sin embargo, han sido empleadas desde mucho antes. Sus orígenes se pueden situar en la tercera década del pasado siglo, en el trabajo de Kolmogorov, Glivenko, Gödel y Gentzen (Carnielli & D'Ottaviano, 1997; Carnielli *et al.*, 2009; de Araujo Feitosa & D'Ottaviano, 2002; Mossakowski *et al.*, 2009). Su uso ha de ser entendido en el contexto de investigación sobre la consistencia de la lógica y las matemáticas, concepto central en la época. De este modo, las traducciones se ponían al servicio de pruebas relativas de consistencia entre lógicas y teorías aritméticas, especialmente de la lógica y aritmética clásicas en función de sus versiones intuicionistas. Como se ha dicho, el concepto de traducción lógica presupone, al menos en cierto grado, la identificación de lo que sea *una* lógica. Por entonces, a falta del desarrollo de los conceptos semánticos proporcionados por la teoría de modelos, las lógicas se entendían fundamentalmente como relaciones de consecuencia definidas en el lenguaje.

> **Definición 1**: una *relación tarskiana de consecuencia* (**RC**) definida sobre **S**, $\langle \mathbf{S}, \vdash\rangle$, donde **S** es un conjunto de sentencias, es una relación binaria $\vdash \subseteq \wp(\mathbf{S}) \times \mathbf{S}$ tal que para todo $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathbf{S}$ se cumple:
>
> i) reflexividad: $\{\varphi\} \vdash \varphi$
> ii) monotonicidad: si $\Gamma \vdash \varphi$ y $\Gamma \subseteq \Gamma'$, entonces $\Gamma' \vdash \varphi$
> iii) transitividad: si $\Gamma \vdash \varphi_i$, para $i \in I$, y $\Gamma \cup \{\varphi_i / i \in I\} \vdash \psi$, entonces $\Gamma \vdash \psi$
>
> Si para todo $\Gamma \vdash \varphi$ existe un subconjunto finito $\Delta \subseteq \Gamma$ tal que $\Delta \vdash \varphi$, se dice que **RC** es *compacta* (Gabbay, 1993, 1994, 2014; Mossakowski *et al.*, 2009). □

Posteriormente Scott ampliaría φ a conjuntos de sentencias. Nótese que **S** es un conjunto de sentencias, pero **RC** puede ser definida igualmente para fórmulas. De acuerdo a esta idea sobre lo que era una lógica, las primeras traducciones consistían en funciones definidas sobre **S** que preservaban la relación de consecuencia.

Actualmente se considera que la primera traducción fue la llevada a cabo por Kolmogorov (1967) en 1925. Su objetivo era demostrar que el principio del tercero excluido en la lógica clásica, que, de acuerdo con Brower consideraba ilegítimo, no producía contradicciones y que a toda prueba matemática que hiciese uso de él correspondía otra prueba exclusivamente intuicionista. Para esto definió dos sistemas proposicionales $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{H}$ que formalizasen respectivamente lo que denominó *lógica general de los juicios* y *lógica especial de los juicios*.

Definición 2 (sistema $\mathfrak{B}$):

Alfabeto
i) variables proposicionales: p, q, r,…
ii) conectivas: $\rightarrow$, $\neg$
iii) paréntesis:),(

Axiomas:
1. $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
2. $(\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow \varphi \rightarrow \psi$
3. $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma)) \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \sigma))$
4. $(\psi \rightarrow \sigma) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \sigma))$
5. $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \neg\varphi)$

Reglas de inferencia
Modus Ponens: $\varphi, \varphi \rightarrow \psi \vdash \psi$
Sustitución: $\vdash \varphi(p) \Longrightarrow \vdash \varphi(\beta/p)$, donde p es una variable y β una fórmula □

Los axiomas 1-4 coinciden con los cuatro axiomas clásicos propuestos por Hilbert para el condicional. $\mathfrak{B}$ es equivalente al sistema intuicionista *minimal* desarrollado posteriormente por Johansson (de Araujo Feitosa & D'Ottaviano, 2002).

Definición 3 (sistema $\mathfrak{H}$): se añade un sexto axioma a $\mathfrak{B}$

6. $\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$ □

Kolmogorov señala que $\mathfrak{H}$ es equivalente al sistema proposicional clásico de Hilbert. Su traducción consiste en una función K definida recursivamente que a cada fórmula de $\mathfrak{H}$ asigna una fórmula de $\mathfrak{B}$, la doble negación de cada una las partes de la primera.

Definición 4 (traducción de Kolmogorov):

$$K\text{: } \mathbf{FOR}(\mathfrak{H}) \longrightarrow \mathbf{FOR}(\mathfrak{B})$$

$$K(p) \equiv \neg\neg p$$
$$K(\neg\varphi) \equiv \neg\neg(\neg K\varphi)$$
$$K(\varphi \rightarrow \psi) \equiv \neg\neg(K(\varphi) \rightarrow K(\psi))$$

FOR($\mathfrak{H}$) y **FOR**($\mathfrak{B}$) denotan el conjunto de fórmulas de $\mathfrak{H}$ y $\mathfrak{B}$.[1] □

A partir de *K* Kolmogorov demuestra los dos siguientes teoremas.

Teorema 5: si $\vdash_{\mathfrak{H}} \varphi$ entonces $\vdash_{\mathfrak{B}} K(\varphi)$.

Teorema 6: sea $\Gamma \subseteq$ **FOR**($\mathfrak{H}$) un conjunto de axiomas, si $\Gamma \vdash_{\mathfrak{H}} \varphi$ entonces $K(\Gamma) \vdash_{\mathfrak{B}} K(\varphi)$, siendo $K(\Gamma) = \{K(\gamma) / \gamma \in \Gamma\}$.

En el **Teorema 6** Γ puede ser el conjunto de los axiomas de las matemáticas, obteniendo así el resultado que buscaba. La traducción de Kolmogorov es una clara muestra de cómo las traducciones eran empleadas en la época. El procedimiento y los resultados expuestos en su artículo anticiparon los de Glivenko y Gödel aunque, en un primer momento, el texto pasó desapercibido (de Araujo Feitosa & D'Ottaviano, 2002).

A diferencia de este, la traducción de Glivenko sí acabaría siendo influyente. Su principal aportación fue un nuevo teorema que relacionaba la lógica proposicional clásica (**LPC**) y la lógica proposicional intuicionista (**LPI**) (en de Araujo Feitosa & D'Ottaviano, 2002):

Teorema 7: si $\vdash_{\mathbf{LPC}} \varphi$ entonces $\vdash_{\mathbf{LPI}} \neg\neg\varphi$.

Corolario 8: $\vdash_{\mathbf{LPC}} \neg\varphi$ *syss* $\vdash_{\mathbf{LPI}} \neg\varphi$.

Estos resultados fueron conocidos por Gödel (1986a, 1986b), quien definió dos nuevas traducciones. En primer lugar (Gödel, 1986a), otra traducción de la lógica clásica en la lógica intuicionista. En el texto no especifica los sistemas formales para los que se define, pero parece que se trata de los sistemas de Hilbert y Heyting.

Definición 9 (traducción de Gödel):

$$G\colon \mathbf{FOR(LPC)} \longrightarrow \mathbf{FOR(LPI)}$$

$$\begin{aligned}
&G(\mathrm{p}) \equiv \mathrm{p}\\
&G(\neg\varphi) \equiv \neg(G\varphi)\\
&G(\varphi \wedge \psi) \equiv G\varphi \wedge G\psi\\
&G(\varphi \vee \psi) \equiv \neg(\neg G(\varphi) \wedge \neg G(\psi))\\
&G(\varphi \rightarrow \psi) \equiv \neg(G(\varphi) \wedge \neg G(\psi))
\end{aligned}$$

donde p es una variable proposicional. □

De esta traducción se sigue, a partir del **Corolario 8**, una nueva versión del **Teorema 5**.

Teorema 10: para toda $\varphi \in$ **FOR**(**LPC**) que contenga como conectivas "¬" y "∧" y solo ellas, si $\vdash_{\mathbf{LPC}} \varphi$ entonces $\vdash_{\mathbf{LPI}} \varphi$.

Corolario 11: si $\vdash_{\mathbf{LPC}} \varphi$ entonces $\vdash_{\mathbf{LPI}} G(\varphi)$.

[1] De aquí en adelante **FOR**(**X**) denotará el conjunto de las fórmulas de **X**; **SEN**(**X**) el conjunto de sus sentencias.

En el mismo artículo, Gödel extiende la **definición 9** y el **corolario 11** a las aritméticas, clásica e intuicionista, de Herbrand y Heyting. La segunda de las traducciones (Gödel, 1986b) involucra a **LPI** y al sistema $\mathfrak{S}$, que consiste en **LPC** ampliado con un nuevo operador monario "B", cuyo significado es "ser probable", tres nuevos axiomas

1. $Bp \rightarrow p$
2. $Bp \rightarrow B(p \rightarrow q) \rightarrow Bq$
3. $Bp \rightarrow BBp$

y una nueva regla de inferencia: $\varphi \vdash B\varphi$. El sistema es equivalente al sistema de Lewis para la implicación estricta si se añade el axioma de Becker: $B\varphi \rightarrow BB\varphi$.

Definición 12 (segunda traducción de Gödel):

$$G_2\text{: } \mathbf{FOR}(\mathbf{LPI}) \rightarrow \mathbf{FOR}(\mathfrak{S})$$

$$G_2(p) \equiv p$$
$$G_2(\neg\varphi) \equiv \neg B\varphi$$
$$G_2(\varphi \wedge \psi) \equiv G_2(\varphi) \wedge G_2(\psi)$$
$$G_2(\varphi \vee \psi) \equiv B(G_2(\varphi)) \vee B(G_2(\psi))$$
$$G_2(\varphi \rightarrow \psi) \equiv B(G_2(\varphi)) \rightarrow B(G_2(\psi)) \qquad \square$$

Gödel también considera otra posible traducción e hipotetiza, pero no prueba, que una fórmula es un teorema en **LPI** si y solamente si su traducción lo es en $\mathfrak{S}$. La prueba sería encontrada posteriormente por Tarski y McKinsey. Las traducciones de Gödel, en concreto la segunda, fueron de gran importancia y en la segunda mitad del siglo XX dieron lugar al estudio de la traducción de las lógicas modales en la lógica intuicionista (de Araujo Feitosa & D'Ottaviano, 2002).

El cuarto de los protagonistas fue Gentzen (1969). Lo destacable de su artículo es la prueba de un teorema que contiene una función de la aritmética clásica en la aritmética intuicionista. Con ella logra probar la consistencia relativa de la primera.

Teorema 13: una prueba en la aritmética clásica de φ es transformable en una prueba intuicionista de φ^*, donde φ^* se obtiene de φ de la siguiente maera: cada subfórmula de φ con la forma $\gamma\vee\chi$ se sustituye por $\neg(\neg\gamma\wedge\chi)$; cada subfórmula $\exists x\gamma$ pasa a ser $\neg\forall x\neg\gamma$; finalmente, toda fórmula atómica con una variable proposicional es precedida con dos negaciones.

A pesar de que en todas estas investigaciones se hace un uso explícito de la traducción, en ningún caso existe la intención de analizar el concepto y ofrecer una definición precisa del mismo. Sin embargo, es importante notar que todas las traducciones expuestas poseen una característica común: consisten en funciones que preservan la relación de consecuencia. Esta característica es la que destacaron los primeros intentos de definición. La primera fue la propuesta por Prawitz y Malmnäs (1968).

Definición 14: dados dos sistemas lógicos S_1 y S_2, una *interpretación* de S_1 en S_2 es una función f de **FOR**(S_1) en **FOR**(S_2) tal que para toda $\varphi \in$ **FOR**(S_1)

$$\vdash_{S_1} \varphi \textit{ syss } \vdash_{S_2} f(\varphi).$$

Si además para todo $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq$ **FOR**(S1)

$$\Gamma \vdash_{S_1} \varphi \textit{ syss } f(\Gamma) \vdash_{S_2} f(\varphi)$$

siendo $f(\Gamma) = \{f(\gamma) / \gamma \in \Gamma\}$, entonces se dice que S_1 es interpretable en S_2 mediante f *respecto a la derivabilidad*. Si en S_2 existe un conjunto de esquemas tal que f asigna uno a cada fórmula atómica y para cada constante c_i permiten definir inductivamente el valor de f para fórmulas con c_i como conectiva principal, se dice que f es *definida mediante esquemas*.[2] □

No obstante, son Wójcicki y Epstein (Carnielli & D'Ottaviano, 1997; Carnielli *et al.*, 2009; de Araujo Feitosa & D'Ottaviano, 2002) quienes pueden ser considerados los primeros en tratar de desarrollar una investigación sistemática. Ambos propusieron sendas definiciones. La definición de Wójcicki es semejante a la definición mediante esquemas de Prawitz y Malmnäs.

Definición 15: dados dos lenguajes proposicionales S_1 y S_2 con el mismo conjunto de variables, una *traducción de S_1 en S_2* es una función f que cumple:

i) para toda variable p existe en S_2 una fórmula $\varphi(p_0)$ en la variable p_0 tal que $f(p) \equiv \varphi(p)$;

ii) para toda conectiva *n*-aria c_i en S_1 existe una fórmula $\varphi_i \in S_2$ tal que, para toda $\psi_1,\ldots,\psi_n \in S_1$

$$f(c_i(\psi_1,\ldots,\psi_n) \equiv \varphi_i(f(\psi_1),\ldots,f(\psi_n)).$$

Dados dos cálculos $C_1 = \langle S_1,\vdash_1\rangle$ y $C_2 = \langle S_2,\vdash_2\rangle$, siendo $\vdash$ una relación de consecuencia, una *traducción de C_1 en C_2* es una traducción de S_1 en S_2 tal que para todo $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq S_1$

$$\Gamma \vdash_1 \varphi \textit{ syss } f(\Gamma) \vdash_2 f(\varphi).$$ □

Esta definición es mucho más restrictiva que las definiciones **13** y **15**, ya que exige que: 1) el conjunto de las variables de S_1 debe ser un subconjunto de las variables de S_2 y 2) f ha de ser definida mediante esquemas. Condiciones que no cumplen muchas de las funciones que han sido consideradas traducciones. Por su parte, Epstein ofrece una definición análoga a la de Prawitz y Malmnäs en términos semánticos.

Definición 16: una *función de validez* de una lógica $\mathbf{L}_1$ en una lógica $\mathbf{L}_2$, es una función f de **FOR**($\mathbf{L}_1$) en **FOR**($\mathbf{L}_2$) tal que para toda $\varphi \in$ **FOR**($\mathbf{L}_1$)

$$\vDash_{L_1} \varphi \textit{ syss } \vDash_{L_2} f(\varphi),$$

donde "$\vDash$" denota la relación de consecuencia definida mediante la semántica de atribución de conjuntos (véase de Araujo Feitosa &

[2] Prawitz y Malmnäs no especifican que quieren decir con la palabra "esquema". Pero un esquema se puede definir como un conjunto de fórmulas que comparten cierta secuencia de operadores lógicos y paréntesis.

D'Ottaviano, 2002, 155-158). Una *traducción* es una función de validez tal que para todo $\Gamma\cup\{\varphi\} \subseteq \mathbf{FOR}(\mathbf{L}_1)$

$$\Gamma \vDash_{L_1} \varphi \textit{ syss } f(\Gamma) \vDash_{L_2} f(\varphi). \qquad \square$$

Mientras que las traducciones de Kolmogorov y Gentzen son traducciones de acuerdo a cualquiera de estas definiciones, la traducción de Gödel sólo lo es en el sentido débil de la **definición 14**.

La idea de preservar la consecuencia mediante funciones se ha mantenido en el programa de teoría de categorías. Pero, en la actualidad, han surgido otras dos líneas de investigación muy diferentes: una descansa en la teoría de la prueba y otra en la teoría de modelos. A pesar de sus divergencias, ambas comparten la intención de generar un marco unificador en el que las lógicas tengan cabida. En cualquiera de los tres casos, la traducción implica una visión particular de lo que sea *una* lógica.

2. Perspectivas actuales

2.1. Estudio de las traducciones mediante la teoría de categorías

El primero de los tres programas de investigación que aquí se expondrán es aquel que estudia la traducción empleando la teoría matemática de categorías. Para este, el factor definitorio de una traducción sigue siendo la conservación de la relación de consecuencia *bajo determinadas funciones*. Por lo tanto, la idea básica es la misma que la propuesta por Prawitz y Malmnäs, pero, ahora, se pretende precisar lo que son esas funciones recurriendo al concepto de *morfismo*. De este modo, una traducción es un morfismo entre relaciones de consecuencia.

Definición 17: dadas dos relaciones de consecuencia $\mathbf{RC}_1 = \langle \mathbf{S}_1,\vdash\rangle$ y $\mathbf{RC}_2 = \langle \mathbf{S}_2,\vdash\rangle$, un ***RC**-morfismo* o *función continua* α: $\mathbf{RC}_1 \longrightarrow \mathbf{RC}_2$ es una función α: $\mathbf{S}_1 \longrightarrow \mathbf{S}_2$ tal que para todo $\Gamma\cup\{\varphi\} \subseteq \mathbf{S}_1$

$$\text{si } \Gamma \vdash \varphi \text{ entonces } \alpha(\Gamma) \vdash \alpha(\varphi)$$

siendo $\alpha(\Gamma) = \{\alpha(\gamma)/ \gamma \in \Gamma\}$. Si la conversa también se cumple se dice que el **RC**-morfismo es *conservativo* (Carnielli & D'Ottaviano, 1997; Carnielli *et al*., 2009; de Araujo Feitosa & D'Ottaviano, 2002; Mossakowski *et al*., 2009). □

Como se verá más adelante, algunas de las propuestas sobre lo que es una traducción, y lo que es una lógica, son mucho más complejas. Pero, las versiones más simples se mantienen en este nivel, definiendo a una lógica fundamentalmente como una **RC** en un conjunto abstracto, despreocupándose de su naturaleza lingüística y su gramática (Carnielli & D'Ottaviano, 1997; Carnielli *et al.*, 2009; de Araujo Feitosa & D'Ottaviano, 2002).

> **Definición 18**: *una lógica* $\mathcal{A}$ es un par $\langle \mathbf{A}, C_{\mathbf{A}} \rangle$ donde **A** es un conjunto cualquiera, denominado el dominio o universo de $\mathcal{A}$ y $C_{\mathbf{A}}$ es una relación que cumple las condiciones i-iii de la **definición 1** entre los elementos de **A**. □

Las lógicas así entendidas y los **RC**-morfismos entre ellas forman una categoría denominada $\mathbb{Tr}$ o $\mathbb{RC}$. Mossakowski *et al.* (2009), quienes defienden un concepto diferente de lógica, también consideran que los **RC**-morfismos forman una categoría, pero, en este caso, sus objetos sólo serían relaciones de consecuencia.

A pesar de la, en principio, aparente sencillez de estas ideas, las investigaciones han dado lugar a ciertos resultados que involucran conceptos metalógicos tan notorios como los de consistencia o expresividad (Mossakowski *et al.*, 2009). Es importante tener en cuenta que tales conceptos son entendidos en el contexto de la literatura del programa, de modo que su lectura ha de ser necesariamente limitada.

> **Definición 19**: si la consistencia de una teoría Γ, o una relación de consecuencia $\mathbf{RC}_1$, implica la consistencia de otra teoría Γ', o relación de consistencia $\mathbf{RC}_2$, entonces la primera es *más fuertemente consistente* que la segunda, $\Gamma \succcurlyeq \Gamma'$ o $\mathbf{RC}_1 \succcurlyeq \mathbf{RC}_2$. □

Dado un **RC**-morfismo de $\mathbf{RC}_1$ en $\mathbf{RC}_2$, si la consistencia de $\mathbf{RC}_1$ implica la consistencia de $\mathbf{RC}_2$ se dice que *transporta* la consistencia. Si la conversa es cierta, entonces *refleja* la consistencia.

> **Proposición 20**: sea α: $\mathbf{RC}_1 \longrightarrow \mathbf{RC}_2$ un RC-morfismo, entonces
> i) si es conservativo, transporta la consistencia
> ii) si α es suprayectiva, refleja la consistencia. ■

> **Definición 21**: dadas dos relaciones de consecuencia $\mathbf{RC}_1$ y $\mathbf{RC}_2$, $\mathbf{RC}_1$ es *como máximo tan expresiva* como $\mathbf{RC}_2$ o $\mathbf{RC}_2$ es *como mínimo tan expresiva* como $\mathbf{RC}_1$, $\mathbf{RC}_1 \leq^{\mathrm{RC}} \mathbf{RC}_2$, *syss* existe un **RC**-morfismo conservativo α: $\mathbf{RC}_1 \longrightarrow \mathbf{RC}_2$. □

De acuerdo a esta definición, la traducción de Kolmogorov muestra que $\mathfrak{H} \leq^{\mathrm{RC}} \mathfrak{B}$. El resultado más interesante se sigue inmediatamente de **19**, **20** y **21**, relacionando los conceptos de consistencia y expresividad al probar la correlación inversa entre ambos. Este resultado, considerado muchas veces paradójico, ha sido corroborado con generalidad más allá de esta particular propuesta de investigación. De una forma intuitiva, se puede pensar que un conjunto mayor de axiomas supone un aumento de las condiciones estipuladas sobre la relación de consecuencia lógica, lo que concuerda con una disminución en el número de consecuencias de los mismos y, así, la menor capacidad expresiva.

Proposición 22: si $\mathbf{RC}_1 \overset{RC}{\geq} \mathbf{RC}_2$ entonces $\mathbf{RC}_1 \preccurlyeq^{RC} \mathbf{RC}_2$. ■

Sin embargo, la conversa no se cumple en todos los casos. Por ejemplo, la lógica modal **L** tiene una axiomatización más débil que la lógica modal **K**, pero no existe un **RC**-morfismo conservativo α: **K** ⟶ **L**.

No todas las investigaciones se han limitado a estudiar morfismos entre relaciones de consecuencia definidas sobre un conjunto abstracto. Algunas también se han hecho cargo de las contribuciones realizadas por la teoría de modelos. De este modo, se ha tratado de acomodar los conceptos de modelo, satisfacibilidad y consecuencia (semántica) al marco de la teoría de categorías (Meseguer, 1989; Mossakowski *et al.*, 2004; Mossakowski *et al.*, 2009).

Definición 23: una *unidad* (*room*) $\mathbf{U} = \langle \mathbf{S}, \mathfrak{M}, \vDash \rangle$ consiste en

i) un conjunto **S** de sentencias,
ii) un conjunto $\mathfrak{M}$ de modelos y
iii) una relación binaria de satisfacibilidad $\vDash \subseteq \mathcal{M} \times \mathbf{S}$

Un conjunto $\Gamma \subseteq \mathbf{S}$ es satisfacible *syss* para todo $\varphi \in \Gamma$ existe un $\mathcal{M} \in \mathfrak{M}$ tal que $\mathcal{M} \vDash \varphi$. La relación de satisfacibilidad define una relación binaria de *consecuencia semántica*, denotada habitualmente mediante el mismo símbolo "⊨", $\vDash \subseteq \wp(\mathbf{S})\times\mathbf{S}$:

$\Gamma \vDash \varphi$ *syss* para todo $\mathcal{M} \in \mathfrak{M}$ y todo $\gamma \in \Gamma$, si $\mathcal{M} \vDash \gamma$ entonces $\mathcal{M} \vDash \varphi$ (Mossakowski *et al.*, 2009). □

La idea de unidad pretende resumir en un único objeto matemático el lenguaje, el conjunto de modelos y la relación entre ambos. Se define así una nueva categoría, ℝ*oom*, cuyos objetos son unidades relacionadas mediante una nueva clase de morfismos denominados "corredores".

Definición 24: un *corredor* (*corridor*) $\langle \alpha, \beta \rangle$: $\langle \mathbf{S}_1, \mathfrak{M}_1, \vDash_1 \rangle \longrightarrow \langle \mathbf{S}_2, \mathfrak{M}_2, \vDash_2 \rangle$ consiste en

i) una función de traducción α: $\mathbf{S}_1 \longrightarrow \mathbf{S}_2$ y
ii) una función reductora de modelos (*model reduction function*) β: $\mathfrak{M}_2 \longrightarrow \mathfrak{M}_1$, tal que

$\mathcal{M}_2 \vDash_2 \alpha(\varphi)$ *syss* $\beta(\mathcal{M}) \vDash_1 \varphi$ (condición de satisfacción)

para todo $\mathcal{M}_2 \in \mathfrak{M}_2$ y toda $\varphi \in \mathbf{S}_1$ (Mossakowski *et al.*, 2009). □

Los corredores pueden ser entendidos como traducciones entre unidades, análogas a los **RC**-morfismos, que se hacen cargo de la semántica. Nótese la diferencia respecto a la definición propuesta por Epstein, que no incluye una función reductora. El estudio sobre corredores también ha involucrado a los conceptos de consistencia y expresevidad, de tal forma que la **definición 21** y la **proposición 22** se extienden a los mismos (Mossakowski *et al.*, 2009).

Definición 25: un corredor es *modelo-expansivo* si su función reductora es suprayectiva. □

Definición 26: $\mathbf{U}_1 \leq^{SAT} \mathbf{U}_2$ *syss* existe un corredor modelo-expansivo $\langle \alpha, \beta \rangle$: $\mathbf{U}_1 \longrightarrow \mathbf{U}_2$. □

Proposición 27: si $\mathbf{U}_1 \leq^{SAT} \mathbf{U}_2$ entonces $\mathbf{RC}_1 \leq^{RC} \mathbf{RC}_2$, donde $\mathbf{RC}_1$ y $\mathbf{RC}_2$ son relaciones de consecuencia inducidas por $\mathbf{U}_1$ y $\mathbf{U}_2$ respectivamente.

Prueba: véase Mossakowski *et al.* (2009) p. 108. ■

Corolario 28: si $\mathbf{U}_1 \leq^{SAT} \mathbf{U}_2$ entonces $\mathbf{RC}_2 \preccurlyeq \mathbf{RC}_1$. ■

Claro está, la aceptación de las conclusiones depende de la aceptación de las definiciones, propias de la teoría de categorías, que se han expuesto. Los conceptos de unidad y corredor dejan de lado tanto la gramática como la estructura interna de los modelos. Por lo que quizá sean demasiado abstractos como para ofrecer una definición aceptable de lo que intuitivamente se entiende por "expresividad" y traducción o, al menos, para ofrecer una comprensión precisa de sus detalles concretos. A pesar de que la teoría de modelos no vincula el lenguaje y los modelos en un único objeto, sus análisis sí profundizan en la gramática, en los modelos apropiados para la ella y en como diferentes clases de modelos, por ejemplo, estándar y no estándar, afectan a su expresividad. A favor de las definiciones se podrían aducir, precisamente, los resultados a los que han dado lugar.

Los conceptos de **RC**-morfismo y corredor permiten desarrollar una nueva definición de lógica que, de acuerdo con la perspectiva introducida por la teoría de categorías, no la identifica con un objeto o estructura particular, sino con un cierto grupo de invariancias. En este caso, invariancias relativas a las relaciones de consecuencia, sintáctica y semántica. Para ello es necesario exponer las nociones de sistema de consecuencia (*entailment system*) e institución[3], vinculando ambos tipos de morfismo a una categoría de *signaturas*. Una signatura (de primer orden) es un par ⟨R,F⟩, donde R y F son conjuntos indexados de relaciones y funciones, que define el vocabulario no lógico. Entre estas se dan ciertos morfismos que conservan la ariedad, denominados *s*-morfismos (*signature morfisms*), los cuales definen la categoría $\mathbb{S}$*ign*. Las signaturas se tornan ahora en elemento central, hasta tal punto que la relación de satisfacibilidad no se entiende, a la manera de Tarski, como una relación binaria, sino como una relación ternaria entre una sentencia, un modelo y una signatura (Mossakowski *et al.*, 2004). La idea básica detrás de las siguientes definiciones es que ciertas variaciones en el vocabulario no lógico empleado no suponen un cambio de lógica (Meseguer, 1989). Las variaciones aceptables vienen dadas por una categoría $\mathbb{S}$*ign*, de tal modo que los **RC**-morfismos y los corredores pueden ser empleados para determinar, una vez dada dicha categoría, el límite de las variaciones respecto a la relación de consecuencia y el conjunto de modelos. A su vez, la perspectiva de la teoría

[3] Es posible definir estos conceptos independientemente de los de **RC**-morfismo y corredor, como se hace en Meseguer (1989) y Mossakowski *et al.* (2004).

de categorías dota a las invariancias de una unidad con la que se identifica a las diferentes lógicas.

Definición 29: un *sistema de consecuencia* o *Π-istitución* es un functor $\mathcal{E}$: $\mathbb{S}ign^{\mathcal{E}} \longrightarrow \mathbb{RC}$ tal que:

i) $\mathbb{S}ign^{\mathcal{E}}$ es una categoría formada por signaturas y *s*-morfismos;

ii) para cada signatura $\Sigma \in |\mathbb{S}ign^{\mathcal{E}}|$, existe una RC = $\langle sen^{\mathcal{E}}(\Sigma), \vdash_{\Sigma}^{\mathcal{E}}\rangle$, donde $|\mathbb{S}ign^{\mathcal{E}}|$ denota el conjunto de objetos de $\mathbb{S}ign^{\mathcal{E}}$ y $sen^{\mathcal{E}}$ es un functor $sen^{\mathcal{E}}$: $\mathbb{S}ign^{\mathcal{E}} \longrightarrow \mathbb{S}et$ de la categoría de signaturas en la categoría de conjuntos;

iii) para cada *s*-morfismo σ: $\Sigma_1 \longrightarrow \Sigma_2$ existe un RC-morfismo α:

$$\langle sen^{\mathcal{E}}(\Sigma_1), \vdash_{\Sigma_1}^{\mathcal{E}}\rangle \longrightarrow \langle sen^{\mathcal{E}}(\Sigma_2), \vdash_{\Sigma_2}^{\mathcal{E}}\rangle. \qquad \square$$

Definición 30: una *institución* es un functor $\mathcal{I}$: $\mathbb{S}ign^{\mathcal{I}} \longrightarrow \mathbb{R}oom$ tal que:

i) $\mathbb{S}ign^{\mathcal{I}}$ es una categoría de signaturas y *s*-morfismos;

ii) para cada signatura $\Sigma \in |\mathbb{S}ign^{\mathcal{I}}|$ existe una unidad U = $\langle sen^{\mathcal{I}}(\Sigma), mod^{\mathcal{I}}(\Sigma), \vDash_{\Sigma}^{\mathcal{I}}\rangle$, siendo $mod^{\mathcal{I}}$ un functor $mod^{\mathcal{I}}$: $\mathbb{S}ign^{\mathcal{I}} \longrightarrow \mathbb{CAT}$ y $\mathbb{CAT}$ una categoría cuyos objetos son modelos y sus morfismos se denominan *m*-morfismos (*model-morfisms*);

iii) para cada *s*-morfismo σ: $\Sigma_1 \longrightarrow \Sigma_2$ existe un corredor

$$\langle sen^{\mathcal{I}}(\Sigma_1), mod^{\mathcal{I}}(\Sigma_1), \vDash_{\Sigma_1}^{\mathcal{I}}\rangle \longrightarrow \langle sen^{\mathcal{I}}(\Sigma_2), mod^{\mathcal{I}}(\Sigma_2), \vDash_{\Sigma_2}^{\mathcal{I}}\rangle. \qquad \square$$

Ambas definiciones son expuestas en Mossakowski *et al*. (2009). Definiciones ligeramente diferentes se pueden encontrar en Meseguer (1989) y Mossakowski *et al*. (2004).

Definición 31: una *lógica* es un par $\langle \mathcal{E}, \mathcal{I}\rangle$, tal que $\mathcal{E}$ es un sistema de consecuencia, $\mathcal{I}$ es una institución, $\mathbb{S}ign^{\mathcal{E}} = \mathbb{S}ign^{\mathcal{I}}$ y $sen^{\mathcal{E}} = sen^{\mathcal{I}}$. □

Nótese el carácter abstracto de la definición. El functor *sen* relaciona las signaturas no con lenguajes, sino con conjuntos aleatorios. Así mismo, la relación ⊢ es considerada con independencia de cálculos particulares que la generen. La principal razón aducida para hacerlo es que diferentes cálculos pueden generar la misma relación, considerando entonces que no son esenciales (Meseguer, 1989). Como se verá en la próxima sección, esto choca fuertemente con las ideas de Gabbay.

Una vez que las lógicas han sido definidas de esta manera es obvio que se necesita una nueva forma de entender las traducciones acorde con su complejidad. Las traducciones pasan a identificarse con comorfismos entre sistemas de consecuencia e instituciones.

Definición 32: dados dos sistemas de consecuencia $\mathcal{E}$ y $\mathcal{F}$, un ***RC-comorfismo*** $\langle\Phi, \alpha\rangle: \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ consiste en:

i) un functor Φ: $\mathbb{S}ing^{\mathcal{E}} \longrightarrow \mathbb{S}ing^{\mathcal{F}}$, y

ii) para cada $\Sigma \in |\mathbb{S}ign^{\mathcal{E}}|$, un **RC**-morfismo

$$\alpha_\Sigma: \langle sen^{\mathcal{E}}(\Sigma), \vdash^{\mathcal{E}}_{\Sigma}\rangle \longrightarrow \langle sen^{\mathcal{F}}(\Phi(\Sigma)), \vdash^{\mathcal{F}}_{\Phi(\Sigma)}\rangle$$

natural en Σ. □

Definición 33: dados dos instituciones $\mathcal{I}$ y $\mathcal{J}$, un *comorfismo entre instituciones* $\langle\Phi, \alpha, \beta\rangle: \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{J}$ consiste en:

i) un functor Φ: $\mathbb{S}ing^{\mathcal{I}} \longrightarrow \mathbb{S}ing^{\mathcal{J}}$, y

ii) para cada $\Sigma \in |\mathbb{S}ign^{\mathcal{I}}|$, un corredor

$\langle\alpha_\Sigma,\beta_\Sigma\rangle: \langle sen^{\mathcal{I}}(\Sigma), mod^{\mathcal{I}}(\Sigma), \vDash^{\mathcal{I}}_{\Sigma}\rangle \longrightarrow \langle sen^{\mathcal{J}}(\Phi(\Sigma)), mod^{\mathcal{J}}(\Phi(\Sigma)), \vDash^{\mathcal{J}}_{\Phi(\Sigma)}\rangle$

natural en Σ. □

De nuevo se sigue aquí el texto de Mossakowski *et al*. (2009). Definiciones semejantes se pueden encontrar en Meseguer (1989) y Mossakowski *et al*. (2004).

Definición 34: un *comorfismo entre lógicas* es un par $\langle\langle\Phi, \alpha\rangle, \langle\Phi, \alpha, \beta\rangle\rangle$, tal que $\langle\Phi, \alpha\rangle$ es un **RC**-comorfismo y $\langle\Phi, \alpha, \beta\rangle$ un comorfismo entre instituciones. □

Como se puede ver, la teoría de categorías introduce un contexto en el que las nociones de lógica y traducción reciben un tratamiento matemático preciso y general. Sin embargo, su principal problema es el carácter sumamente abstracto que se ha venido destacando a lo largo de la sección. Esta es una constante en la literatura del programa, donde abiertamente se reconoce que se pretende estudiar la traducción sin comprometerse con lo que sea un lenguaje, un cálculo o la estructura de los modelos. Una traducción se entiende tan sólo como la preservación de la relación de consecuencia *bajo morfismos*. Pero, entonces, surge la duda acerca de cuáles son los aspectos concretos de la idea intuitiva de traducción que la propuesta recoge. Al menos en principio, parece que una traducción involucra a la gramática y a la semántica de los lenguajes traducidos y, así, exige prestar atención a sus modelos y a la estructura de las pruebas en las que las fórmulas participan. Algunos morfismos podrían no respetar estos elementos. Especialmente, el significado de las expresiones lógicas. Restringir la traducción a sistemas donde su significado es el mismo quizá sea excesivo, pero ¿son los criterios ofrecidos por el programa suficientes para discriminar lo que es una traducción de lo que no lo es? Si todo esto se deja de lado no resulta raro que puedan aparecer casos que difícilmente sean considerados traducciones. Esta abstracción es algo de lo que se alejan los programas de investigación que se expondrán en las dos siguientes secciones.

2.2. Sistemas deductivos etiquetados

El estudio de la traducción lógica desde la teoría de la prueba ha sido desarrollado por Gabbay (1993, 1994, 2014). Gabbay repara en la gran cantidad de sistemas formales desarrollados a lo largo del siglo XX, especialmente en las lógicas no clásicas y en la aparición de relaciones de consecuencia no monótonas. Mientras que en las relaciones monótonas, de acuerdo a la condición ii) de la **definición 1**, para todo $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathbf{S}$, $\Gamma \vdash \varphi$ *syss* existe un $\Delta \subseteq \Gamma$ tal que $\Delta \vdash \varphi$, en las relaciones no monótonas esta condición no se cumple. "φ" se sigue del conjunto Γ *al completo*. La aceptación de este nuevo tipo de relaciones como relaciones de consecuencia significa que las caracterizaciones tradicionales de la misma dejan ser válidas o, al menos, resultan parciales. De acuerdo a esta preocupación, su proyecto tiene como objetivo la comprensión de lo que es una lógica mediante la pregunta por aquello que las vincula, tratando de generar un marco unificador al que puedan traducirse y en el que reciban un tratamiento uniforme. De nuevo se puede ver aquí la íntima conexión que existe entre identidad y traducción lógica.

La investigación llevada a cabo en la teoría de la prueba automática ha puesto de manifiesto las semejanzas estructurales que existen entre muchas lógicas. Un pequeño cambio en el cálculo de una puede dar lugar al cálculo de otra conceptualmente muy diferente. Por ejemplo, a partir del procedimiento de tablas de verdad para la lógica clásica se puede pasar a un procedimiento análogo para una lógica multievaluada; pero, no sucede lo mismo con la lógica intuicionista. En el caso del cálculo de secuentes ocurre lo contrario, es el cálculo de la lógica intuicionista el que es fácilmente obtenido. Incluso ciertos cálculos no monótonos son obtenibles de esta manera a partir de un cálculo monótono. Por lo tanto, las relaciones estructurales entre cálculos pueden ser tomadas como la base para abordar el estudio de la traducción lógica. Ahora bien, asumir esta idea implica otorgar al cálculo y, en general, a los procedimientos de decisión, un lugar esencial y definitorio. Una perspectiva muy alejada de la que adopta el programa de teoría de categorías. Para Gabbay el par $\langle \vdash, \mathbf{S}_{\vdash} \rangle$, donde $\vdash$ es la relación de consecuencia clásica y $\mathbf{S}_{\vdash}$ un cálculo de secuentes, es una lógica diferente de la misma relación vinculada al procedimiento de tablas de verdad, $\langle \vdash, \mathbf{T}_{\vdash} \rangle$. Un cálculo diferente conlleva una lógica diferente.[4] Al incorporar el cálculo a la traducción se dota de contenido y concreción a la misma, de forma que no se ve reducida a la preservación abstracta de una relación de consecuencia. Ahora es necesario tener en cuenta la gramática del lenguaje y, a través de las reglas de inferencia, el significado de las expresiones lógicas.

Sin embargo, la constatación de este tipo de conversiones no proporciona de forma inmediata un estándar comparativo. A pesar de las semejanzas entre los cálculos de ciertas lógicas, las consideraciones metalógicas sobre los mismos y sobre sus

[4] La definición de lo que es una lógica de acuerdo al programa de Gabbay será expuesta más adelante. Lo que se dice en este párrafo es completamente válido, pero es necesario ampliar el concepto de cálculo al de sistema deductivo etiquetado.

semánticas son muy diferentes, como también lo son sus aplicaciones. Aquí es donde entra en juego la propuesta de Gabbay. Esta consiste en resituar el metalenguaje al nivel del lenguaje-objeto mediante lo que denomina "sistema deductivo etiquetado" (*labelled deductive system*), que proporciona "a concept of logic where the passage from one system to another is natural, and along predefined acceptable modes of variation" (Gabbay, 1993, 188) Se sigue la definición contenida en Gabbay (1994).

Definición 35: $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A}, R_1,\ldots, R_m, f_1,\ldots, f_k\rangle$ es el lenguaje de un álgebra tal que **A** es el conjunto de los términos simples de un lenguaje de primer orden dado **L** (variables y constantes individuales), $R_1,\ldots, R_m$ es un conjunto de relatores *n*-arios y $f_1,\ldots, f_k$ un conjunto de functores *n*-arios definidos sobre **A**. Los elementos de **A** son *etiquetas atómicas* y las diferentes f_i permiten generar *etiquetas complejas*. □

Definición 36: una *unidad declarativa* es un par t : φ donde t es una etiqueta y φ una fórmula de **L**. □

Definición 37: un *diagrama de etiquetas* es un conjunto **M** que contiene un conjunto $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$, está cerrado mediante las operaciones $f_i,\ldots,f_k$ y contiene todas las fórmulas $\pm R_i t_1,\ldots,t_n$, tal que $t_i \in \mathbf{M}$. □

Definición 38: una *database* es una unidad declarativa o es un triplete $\langle a, \mathbf{M}, g\rangle$ donde **M** es un diagrama de etiquetas finito, $a \in \mathbf{M}$ es una etiqueta destacada y *g* es una función que asocia cada etiqueta $t \in \mathbf{M}$ a un conjunto finito de fórmulas de **L** o a una database. Si sólo asocia etiquetas a fórmulas se trata de una *database simple*. □

Definición 39: un *sistema deductivo etiquetado* (SDE), prototípico, es un triplete $\langle \mathbf{L}, \mathcal{A}, \mathfrak{M}\rangle$, donde **L** es un lenguaje de primer orden, $\mathcal{A}$ es un álgebra de acuerdo a la **definición 35** y $\mathfrak{M}$ contiene un cálculo vinculado a un conjunto de databases y un mecanismo que transmite, de acuerdo a las diferentes f_i, las etiquetas a través de la aplicación de las reglas de inferencia. □

La definición contempla un SDE básico. A mayores, Gabbay estipula varias restricciones adicionales sobre su empleo: 1) las reglas del cálculo serán sólo las habituales; 2) los mecanismos de propagación de las etiquetas serán, salvo ligeras variaciones, uniformes para todas las lógicas. Por ejemplo, en el caso del condicional:

$$t : (\varphi \rightarrow \psi) \textit{ syss } \text{para todo } x \in \Delta, \text{ si } x : \varphi \text{ entonces se puede probar } t{+}x : \psi$$

donde Δ es un conjunto de etiquetas que caracteriza al condicional; 3) las reglas para los cuantificadores son las mismas para todas las lógicas.

El uso de etiquetas permite representar información adicional que no está contenida en las fórmulas, en este caso, información habitualmente tratada en el metalenguaje. De este modo, la tradicional relación de consecuencia (**definición 1**) es sustituida por una relación entre conjuntos de unidades declarativas y unidades declarativas:

$$\{t_1 : \varphi_1,\ldots, t_n : \varphi_n\} \vdash s : \psi.$$

Esta nueva relación es generada tanto por las reglas del cálculo como por las operaciones del álgebra, en las que queda recogida la metateoría.

Ejemplo 40: $\{\{t : \Box\Box\varphi, s : \Diamond(\varphi \rightarrow \psi)\}, t < s\} \vdash t : \Diamond\Diamond\psi$ (Gabbay 1993, 2014).

Reglas de inferencia:

MP $$\frac{t : \varphi;\ t : \varphi \rightarrow \psi}{t : \psi}$$

RE□ $$\frac{t < s;\ t: \Box\varphi}{s : \varphi}$$

RI◊ $$\frac{t < s;\ s : \varphi}{t : \Diamond\varphi}$$

RE◊ $$\frac{t : \Diamond\varphi}{\text{crear un nuevo mundo } s\text{, tal que } t < s\text{, y } s : \varphi}$$

Prueba:

1. $t : \Box\Box\varphi$	Premisa
2. $s : \Diamond(\varphi \rightarrow \psi)$	Premisa
3. $t < s$	Premisa
4. $s < r;\ r : \varphi \rightarrow \psi$	RE◊ 2
5. $s : \Box\varphi$	RE□ 1-3
6. $r : \varphi$	RE□ 4-5
7. $r: \psi$	MP 4-6
8. $s : \Diamond\ \psi$	RI◊ 4-7
9. $t : \Diamond\Diamond\psi$	RI◊ 3-8

Los SDE constituyen un marco integrador en el que el metalenguaje recibe un tratamiento matemático preciso al ser explicitado en un álgebra. Las lógicas son entonces analizadas de forma equivalente, de manera que sus diferencias y semejanzas pueden ser determinadas con cuidado para, así, llevar a cabo procedimientos generales de comparación, transformación y traducción. No sólo eso. Además, para Gabbay, el hecho de que sistemas tan diferenciados sean susceptibles de un mismo análisis dice algo sobre lo que es una lógica.

Definición 41: una *lógica* es un par $\langle\vdash, SDE_{\vdash}\rangle$ donde $\vdash$ es una relación de consecuencia (posiblemente discordante con la **definición 1**) y $SDE_{\vdash}$ es un sistema deductivo etiquetado para generarla. □

Como se ha dicho, las herramientas proporcionadas por la teoría de la prueba hacen posible que las traducciones tengan en cuenta la gramática y el significado de las expresiones lógicas. Lo que podría suponer la propuesta de criterios más rigurosos y concretos que los estipulados desde la teoría de categorías. No obstante, cabe preguntarse, ¿es suficiente la conversión a un SDE para que las lógicas sean traducidas mutuamente? Los SDE proporcionan un tratamiento universal del metalenguaje a partir del cual estudiar las relaciones entre ellas, pero no propiamente una definición o una propuesta de traducción. Al fin y al cabo, la explicitación del metalenguaje no elimina las diferencias entre los metalenguajes de lógicas distintas y, muy probablemente, no todas las transformaciones entre sus cálculos sean traducciones. Si esto es así, serán necesarias nuevas condiciones que liguen sus metateorías, descritas algebraicamente, y delimiten el subconjunto de transformaciones que constituyen una traducción. Sólo entonces se podrá empezar a desarrollar una teoría de la misma a partir de los SDE.

2.3. Traducción y teoría de modelos

Los estudios modelo-teóricos sobre la traducción se caracterizan por la asunción de su perspectiva semántica y algebraica. De esta forma, y en contraste con la centralidad que el cálculo tiene en los SDE, la traducción se vincula al estudio de los modelos y a la relación de satisfacibilidad[5] que se establece entre ellos y el lenguaje. Esto significa que pasa a ser entendida como una relación entre la capacidad expresiva, precisada mediante los conceptos de definibilidad y axiomatizabilidad (véase Manzano 1989, 1996), de las lógicas implicadas; es decir, las expresiones traducidas y traductoras se identifican a partir de las entidades conjuntistas que denotan. Se podría lograr así un análisis más acorde con lo que intuitivamente es una traducción que los cimentados en la preservación, *meramente matemática y abstracta*, de la relación de consecuencia o las relaciones estructurales entre cálculos. Además, la relación de consecuencia y su preservación siguen ocupando un lugar central. Pero ahora, de acuerdo a su definición modelo-teórica (véase la **definición 22**; también Manzano 1989, 1996), se trata de una preservación que atiende a la estructura de los modelos y respeta, en un sentido aún por precisar, la relación de satisfacibilidad y el significado de las expresiones.

Estas son las ideas que articulan el examen de las relaciones existentes entre la lógica modal y la lógica clásica en el que consiste la teoría de la correspondencia. Desarrollada por van Benthem, parte de la observación de que ciertos axiomas modales axiomatizan propiedades ordinarias de la relación de accesibilidad. Por ejemplo, el axioma T, “$\Box p \rightarrow p$”, es satisfecho sólo por modelos y *frames* en los que la relación es reflexiva, mientras que el axioma S4, “$\Box p \rightarrow \Box\Box p$”, lo es por modelos y *frames* transitivos. Propiedades que también son axiomatizables mediante las fórmulas de primer orden “$\forall xRxx$” y “$\forall xy(Rxy \rightarrow \forall z(Ryz \rightarrow Rxz))$”. Es este paralelismo el que genera la pregunta a la que la teoría busca dar respuesta: “¿cuál es el conjunto de las

[5] En Manzano (1989) se expone su definición para lógica de primer orden y en Manzano (1996) para varias lógicas de orden superior.

fórmulas modales que se *corresponden* con fórmulas de primer orden?". Actualmente, la "teoría" se constituye como un conjunto diverso de procedimientos heurísticos y criterios destinados a la identificación de tales fórmulas. Dentro de los últimos son destacables los resultados relativos a la preservación de la satisfacibilidad bajo construcciones modelo-teóricas bien conocidas. Las fórmulas de la lógica clásica de primer orden preservan la satisfacibilidad bajo la construcción de submodelos y subframes, bajo modelos y frames conectados en zigzag y, especialmente, bajo la construcción de ultra-productos. Lo que quiere decir que las fórmulas modales susceptibles de traducción también han de hacerlo. Se logra así una caracterización general, aunque abstracta, del conjunto buscado (van Benthem, 2011).

La teoría de la correspondencia muestra claramente la naturaleza semántica que la traducción adquiere al vincularse a la teoría de modelos. Las fórmulas traducidas lo son en virtud de los modelos que las satisfacen, lo que a su vez abre la puerta a la prservación de la relación de consecuencia, modelo-teóricamente definida, entre ambos conjuntos de fórmulas. Sin embargo, a pesar de su importancia, en este texto se prestará atención a las investigaciones de Manzano (1996, 2014) y Manzano & Urtubey (2013). Como la propia autora señala, sus bases se encuentran en dos pequeños artículos de Henkin, (1950) y (1953). En el primero, Henkin expone su prueba de completud basada en la distinción entre estructuras estándar y estructuras generales. Una distinción fundamental que permitió comprender como los modelos afectan a lo que expresa el lenguaje y al conjunto de fórmulas y argumentos válidos. El segundo contiene la exposición de un cálculo alternativo al de Church para la lógica de segundo orden. Su relevancia consiste en que, como el propio Henkin hace notar, puede ser adaptado a la lógica multivariada si se elimina el axioma de comprehensión. Otras influencias son los trabajos ya vistos de van Benthen y Gabbay. No hay que pensar en la propuesta como un intento de definir lo que es una traducción. Más bien, dando por sentada cierta idea de la misma, su objetivo consiste en especificar un algoritmo para la traducción de una lógica cualquiera a la lógica multivariada. La exposición pormenorizada del proyecto es a lo que se dedicará el apartado siguiente.

3. La lógica multivariada como lógica universal

El planteamiento que aquí se expondrá descansa en la plasticidad de la lógica multivariada (**LM**) y en su capacidad de razonar sobre diversas clases de objetos. Además, su cálculo es correcto y completo. Todo lo cual hace pensar en ella como una lógica en la que puedan estar contenidas muchas otras lógicas. En principio, algunas de ellas parecen ser: distintas lógicas de orden superior, varias lógicas no clásicas, la lógica infinitaria y algunas lógicas empleadas en programación. En Manzano (1996) se lleva a cabo la traducción de la lógica clásica de segundo orden, la lógica modal proposicional S4, la lógica modal de primer orden S5 y la lógica dinámica. La idea básica consiste en instituir a **LM** en una lógica universal con capacidad de integrar varias lógicas que, al ser traducidas, son obtenidas como teorías. Puede que esta idea recuerde a los SDE de Gabbay, que también actúan como un marco unificador. No obstante, hay que tener presentes dos diferencias: por un lado, ahora sí se contempla un procedimiento concreto de traducción (a la lógica multivariada); por otro, la obtención de las lógicas en forma de teorías hace pensar en su comparación, e incluso traducción, a través de los recursos proporcionados por la teoría de modelos. De modo que el proyecto no se limita a esbozar un marco general a partir del cual estudiar la traducción. En cuanto a sus objetivos, estos tienen un carácter esencialmente utilitario: 1) el empleo de un único cálculo y 2) el transporte de metapropiedades.

En el apartado 3.1. será expuesto el plan general de acuerdo a Manzano (1996, 2014) y Manzano & Urtubey (2013). El procedimiento consta de un conjunto de teoremas mutuamente dependientes que dan lugar a su articulación en tres niveles jerárquicamente ordenados. En el primer nivel el objetivo es el **Teorema de representación**. Este garantiza la existencia de un conjunto recursivo de sentencias en **LM** que caracterice a los modelos de la lógica a traducir. En el segundo nivel se prueba el **Teorema principal**, estableciendo la equivalencia entre consecuencia en la lógica a traducir y consecuencia entre las fórmulas traducidas. Finalmente, en el tercer nivel se prueba la consistencia y la completud del cálculo empleando la consistencia y la completud de **LM**. En el apartado 3.2. se aplicará el procedimiento a la lógica híbrida de segundo orden, definida mediante la restricción de la teoría de tipos híbrida de Areces *et al*. (2011, 2014). Sin embargo, a falta de mayor investigación sobre ella, la traducción sólo será desarrollada hasta un nivel elemental. Se sientan así las bases para una futura traducción completa, al mismo tiempo que se puede observar su naturaleza semántica. No se ofrecerá aquí una definición de la lógica multivariada en general. Para ello véase Manzano (1996), capítulo VI. Pero, en el apartado 3.2. se define la lógica multivariada que allí se emplea.

3.1. Procedimiento general[6]

3.1.1. Nivel 1: Teorema de representación

En primer lugar hay que definir una signatura ($\boldsymbol{\Sigma}^{\#}$) y un lenguaje multivariados directamente relacionados con la lógica a traducir (**XL**). Una vez hecho esto, es posible asociar las expresiones de **XL** con expresiones de la lógica multivariada en la será traducida ($\mathbf{LM}^{\#}$). Al mismo tiempo, la clase de las estructuras de **XL** (**ST**(**XL**)) debe ser

[6] En este apartado no se continuará con la numeración de las definiciones y teoremas de los apartados anteriores. La razón es que los resultados expuestos reciben un nombre en Manzano (1996, 2014) que aquí será respetado.

transformada en un subconjunto de las estructuras de $\mathbf{LM}^{\#}$ ($\mathbf{ST}(\mathbf{LM}^{\#})$). Es decir, hay que definir una función recursiva **TRANS** para la traducción de las expresiones

$$\mathbf{TRANS}: \mathbf{EXPR}(\mathbf{XL}) \longrightarrow \mathbf{EXPR}(\mathbf{LM}^{\#})$$

y otra función $\mathbf{CONV}_1$ para la conversión directa de las estructuras

$$\mathbf{CONV}_1: (\mathbf{ST}(\mathbf{XL})) \longrightarrow \mathbf{ST}(\mathbf{LM}^{\#})$$

En estas dos funciones recaerá todo el peso de la traducción. En algunos casos **FUNC** puede introducir un nuevo conjunto *finito* de variables libres en las expresiones de **XL**. Una vez definidas, hay que probar la equivalencia semántica entre **ST**(**XL**) y $\mathbf{CONV}_1(\mathbf{ST}(\mathbf{XL}))$ relativamente a las fórmulas traducidas.

Lema 1: para todo $\mathcal{A} \in \mathbf{ST}(\mathbf{XL})$ existe una estructura $\mathbf{CONV}_1(\mathcal{A}) \in \mathbf{ST}(\mathbf{LM}^{\#})$ tal que:

i) $[\mathbf{v}_1 \ldots \mathbf{v}_n] \vDash \varphi$ *syss* $\mathbf{CONV}_1(\mathcal{A})^{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n}_{\mathrm{v}_1\ldots\mathrm{v}_n}(\mathbf{TRANS}(\varphi)[\mathrm{v}_1\ldots\mathrm{v}_n]) = \mathrm{V}$;

ii) $\mathcal{A} \vDash \varphi$ *syss* $\mathbf{CONV}_1(\mathcal{A})$ es modelo de $\forall\mathbf{TRANS}(\varphi)$,

para toda $\varphi \in \mathbf{SEN}(\mathbf{XL})$, donde $\mathcal{A}[\mathbf{v}_1\ldots\mathbf{v}_n] \vDash \varphi$ significa que φ es verdadera en $\mathcal{A}$ relativamente a los parámetros $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$, y $\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n$ es un conjunto de variables nuevas introducidas en la traducción.

A partir del **Lema 1** se sigue inmediatamente el **Teorema 1**, obteniendo así la equivalencia entre validez en **XL** y validez en la imagen de sus fórmulas y estructuras bajo **FUNC** y $\mathbf{CONV}_1$.

Teorema 1: $\vDash_{\mathbf{XL}}\varphi$ *syss* $\vDash_{\mathbf{CONV1}(\mathbf{ST}(\mathbf{XL}))} \forall\mathbf{TRANS}(\varphi)$, para toda $\varphi \in \mathbf{SEN}(\mathbf{XL})$.

Prueba:

Se sigue del **Lema 1**, ya que sólo afirma la validez de $\forall\mathbf{TRANS}(\varphi)$ en la clase de modelos $\mathbf{CONV}_1(\mathbf{ST}(\mathbf{XL}))$. ■

El éxito de la prueba depende de la "coherencia" existente entre $\mathbf{CONV}_1(\mathbf{ST}(\mathbf{XL}))$ y $\mathbf{MOD}(\mathbf{TRANS}(\mathbf{VAL}(\mathbf{XL})))$, donde $\mathbf{VAL}(\mathbf{XL})$ es el conjunto de las fórmulas válidas en **XL** y $\mathbf{MOD}(\Delta)$ es el conjunto de modelos de Δ. Además, será preferible que las expresiones $\mathbf{TRANS}(e)$ denoten en $\mathbf{CONV}_1(\mathcal{A})$ *casi el mismo objeto* que $e \in \mathbf{EXP(XL)}$ en $\mathcal{A} \in \mathbf{ST}(\mathbf{XL})$.

Obtenido el **Teorema 1**, el paso siguiente es probar, con su ayuda, el **Teorema de representación**. Esto supone encontrar un conjunto de sentencias de $\mathbf{LM}^{\#}$ que caracterice y haga manejable la consecuencia en $\mathbf{CONV}_1(\mathbf{ST}(\mathbf{XL}))$.

Teorema de representación: Existe un conjunto recursivo de sentencias $\Delta \subseteq$ **SEN**(**LM**$^{\#}$), siendo **CONV**$_1$(**ST**(**XL**)) $\subseteq$ **MOD**(Δ), tal que:

$$\vDash_{\mathbf{XL}} \varphi \textit{ syss } \Delta \vDash_{\mathbf{LM}^{\#}} \forall\mathbf{TRANS}(\varphi),$$

para toda $\varphi \in$ **SEN**(**XL**).

Del **Teorema de representación** se sigue que **VAL**(**XL**) es numerable.

Corolario: **VAL**(**XL**) es recursivamente numerable.

Prueba:

El **Teorema de representación** afirma que una fórmula es válida en **XL** *syss* $\Delta \vDash_{\mathbf{LM}^{\#}} \forall$**TRANS**($\varphi$), siendo Δ un conjunto recursivo de fórmulas. Entonces, el conjunto de sus consecuencias, **CON**(Δ) = {$\varphi \in$ **SEN**(**LM**$^{\#}$)/ $\Delta \vDash \varphi$}, también es recursivo. Por la equivalencia, {**TRANS**(φ)/ $\vDash_{\mathbf{XL}} \varphi$} $\subseteq$ **CON**(Δ), de lo que se sigue que es un conjunto recursivo. Finalmente, la función **TRANS** es recursiva, lo que significa que también lo es su inversa. ■

Este resultado significa que **XL** admite cálculos y que pueden reproducirse en el cálculo de **LM**$^{\#}$. En este punto es posible ir un poco más allá del **Teorema de representación** probando el **Teorema 2**, antesala del **Teorema principal**.

Teorema 2: Existe un conjunto recursivo de sentencias $\Delta \subseteq$ **SEN**(**LM**$^{\#}$), siendo **CONV**$_1$(**ST**(**XL**)) $\subseteq$ **MOD**(Δ), tal que:

$$\text{si } \mathbf{TRANS}(\Gamma)\cup\Delta \vDash_{\mathbf{LM}^{\#}} \mathbf{TRANS}(\varphi) \text{ entonces } \Gamma \vDash_{\mathbf{XL}} \varphi,$$

para todo $\Gamma\cup\{\varphi\} \subseteq$ **SEN**(**XL**).

Prueba:

Se sigue del **Lema 1** y del **Teorema de representación**. Asúmanse ambos resultados y sea $\Gamma\cup\{\varphi\}\subseteq$ **SEN**(**XL**).

Asúmase 1) **TRANS**(Γ)$\cup\Delta \vDash_{\mathbf{LM}^{\#}}$ **TRANS**(φ) y 2) para todo $\gamma \in \Gamma$, $\mathcal{A} \in$ **ST**(**XL**), $\mathcal{A}[\mathbf{v}_1\ldots\mathbf{v}_n] \vDash \gamma$. Por el **Lema 1**, existe una estructura **CONV**$_1$($\mathcal{A}$) $\in$ **ST**(**LM**$^{\#}$) tal que **CONV**$_1(\mathcal{A})^{\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n}_{\mathrm{v}_1\ldots\mathrm{v}_n}$(**TRANS**($\gamma$)[$\mathrm{v}_1\ldots\mathrm{v}_n$]) = V, para todo $\gamma \in \Gamma$. Por el **Teorema de representación**, **CONV**$_1$($\mathcal{A}$) $\in$ **MOD**(Δ). De esto y el supuesto 1) se sigue **CONV**$_1(\mathcal{A})^{\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n}_{\mathrm{v}_1\ldots\mathrm{v}_n}$(**TRANS**($\varphi$)[$\mathrm{v}_1\ldots\mathrm{v}_n$]) = V. De nuevo, por el **Lema 1**, [$\mathbf{v}_1\ldots\mathbf{v}_n$] $\vDash \varphi$. ■

3.1.2. Nivel 2: Teorema principal

En este nivel el objetivo es el **Teorema principal**, que se sigue del **Lema 2**. A su vez, para probar este último es necesario definir una conversión inversa $\mathbf{CONV}_2$: $\mathbf{MOD}(\Delta) \longrightarrow \mathbf{ST}(\mathbf{XL})$, donde Δ es un conjunto recursivo de sentencias de $\mathbf{LM}^{\#}$ que caracteriza a $\mathbf{CONV}_1(\mathbf{ST}(\mathbf{XL}))$. Al hacerlo se pueden dar dos casos: 1) Δ *axiomatiza* a $\mathbf{CONV}_1(\mathbf{ST}(\mathbf{XL}))$, de modo que $\mathbf{CONV}_1(\mathbf{ST}(\mathbf{XL}))=\mathbf{MOD}(\Delta)$. En este caso $\mathbf{CONV}_2 = \mathbf{CONV}_1^{-1}$; 2) Δ *axiomatiza categóricamente* a $\mathbf{CONV}_1(\mathbf{ST}(\mathbf{XL}))$. Lo que hay que hacer en esta situación es definir una función $\mathbf{H}$: $\mathbf{MOD}(\Delta) \longrightarrow \mathbf{CONV}_1(\mathbf{ST}(\mathbf{XL}))$, tal que para toda $\mathcal{C} \in \mathbf{MOD}(\Delta)$, $\mathcal{C} \cong \mathbf{H}(\mathcal{C})$ o $\mathcal{C} \cong \mathbf{H}(\mathcal{C}) \in \mathbf{CONV}_1(\mathbf{ST}(\mathbf{XL}))$. Entonces se puede definir una función $\mathbf{F}$: $\mathbf{H}(\mathbf{MOD}(\Delta)) \longrightarrow \mathbf{ST}(\mathbf{XL})$ y, generalmente, $\mathbf{CONV}_2$ será la composición de $\mathbf{H}$ y $\mathbf{F}$.

Lema 2:[7] Existe un conjunto recursivo de sentencias $\Delta \subseteq \mathbf{SEN}(\mathbf{LM}^{\#})$, siendo $\mathbf{CONV}_1(\mathbf{ST}(\mathbf{XL})) \subseteq \mathbf{MOD}(\Delta)$, que satisface: para toda estructura multivariada $\mathcal{C} \in \mathbf{MOD}(\Delta)$ existe una estructura $\mathbf{CONV}_2(\mathcal{C}) \in \mathbf{ST}(\mathbf{XL})$ tal que:

i) $\mathbf{CONV}_2(\mathcal{C})[\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n] \vDash \varphi$ *syss* $\mathcal{C}^{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n}_{\mathrm{v}_1\ldots\mathrm{v}_n}(\mathbf{TRANS}(\varphi)[\mathrm{v}_1\ldots\mathrm{v}_n]) = \mathrm{V}$

ii) $\mathbf{CONV}_2(\mathcal{C}) \vDash \varphi$ *syss* $\mathcal{C}$ es modelo de $\forall\mathbf{TRANS}(\varphi)$,

para toda $\varphi \in \mathbf{SEN}(\mathbf{XL})$, donde $\mathbf{CONV}_2(\mathcal{C})[\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n] \vDash \varphi$ significa que φ es verdadera en $\mathbf{CONV}_2(\mathcal{C})$ relativamente a los parámetros $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$, y $\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_n$ es un conjunto de nuevas variables introducidas en la traducción.

El **Lema 2** asegura una suerte de equivalencia semántica inversa. Como se puede ver, algunos de los teoremas se parecen a los morfismos introducidos mediante teoría de categorías. Sin embargo, la perspectiva semántica de la teoría de modelos evita que las relaciones establecidas sean meramente matemáticas y estructurales. Con el **Teorema principal** queda asegurada la equivalencia entre consecuencia en **XL** y consecuencia en su imagen bajo **FUNC** y $\mathbf{CONV}_1$. Nótese que esto sólo es posible gracias a Δ.

Teorema principal[8]: existe un conjunto recursivo de sentencias $\Delta \subseteq \mathbf{SEN}(\mathbf{LM}^{\#})$, siendo $\mathbf{CONV}_1(\mathbf{ST}(\mathbf{XL})) \subseteq \mathbf{MOD}(\Delta)$, tal que:

$$\Gamma \vDash_{\mathbf{XL}} \varphi \textit{ syss } \mathbf{TRANS}(\Gamma)\cup\Delta \vDash_{\mathbf{LM}^{\#}} \mathbf{TRANS}(\varphi),$$

para todo $\Gamma\cup\{\varphi\} \subseteq \mathbf{SEN}(\mathbf{XL})$.

Prueba:

Se sigue del **Lema 1** y del **Lema 2**. Asúmanse ambos resultados y sea $\Gamma\cup\{\varphi\} \subseteq \mathbf{SEN}(\mathbf{XL})$.

---

[7] En Manzano (1996) este lema recibe el nombre "versión fuerte del Lema 2". Aquí se ha omitido dicho lema por no revestir un carácter esencial, de ahí el cambio de nombre en el primero.
[8] Existe una versión global de este teorema, así como de los teoremas 3 y 4 de la sección 3.1.3. Basta con añadir el cuantificador universal en las fórmulas traducidas. Aquí no serán expuestas por cuestiones de espacio.

[⇒] Asúmase 1) $\Gamma \vDash_{\mathbf{XL}} \varphi$ y 2) $\mathcal{C}^{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n}_{\mathrm{v}_1\dots\mathrm{v}_n}$ sea modelo de **TRANS**(Γ)∪Δ. De esto se sigue $\mathcal{C}$ ∈ **MOD**(Δ), dado que Δ es un conjunto de sentencias (lo relevante es que si contienen variables v_1,..,v_n, inexistentes en XL, estarán cuantificadas). Por el **Lema 2** existe una estructura **CONV**$_2$($\mathcal{C}$) ∈ **ST**(**XL**) tal que **CONV**$_2$($\mathcal{C}$)[$\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$] ⊨ γ, para todo $\gamma \in \Gamma$. Por el supuesto 1), **CONV**$_2$($\mathcal{C}$)[$\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$] ⊨ φ. De nuevo, por el **Lema 2** $\mathcal{C}^{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n}_{\mathrm{v}_1\dots\mathrm{v}_n}$(**TRANS**($\varphi$)[$v_1\dots v_n$]) = V.

[⇐] Asúmase 1) **TRANS**(Γ)∪Δ $\vDash_{\mathbf{LM}^\#}$ **TRANS**(φ) y 2) sea $\mathcal{A}$ ∈ **ST**(**XL**), tal que $\mathcal{A}$[$\mathbf{v}_1\dots\mathbf{v}_n$] ⊨ γ, para todo $\gamma \in \Gamma$. Por el **Lema 1** existe una estructura **CONV**$_1$($\mathcal{A}$) ∈ **ST**(**LM**$^\#$) tal que **CONV**$_1$($\mathcal{A}$)$^{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n}_{\mathrm{v}_1\dots\mathrm{v}_n}$(**TRANS**($\gamma$)[$v_1\dots v_n$]) = V, para todo $\gamma \in \Gamma$. Por el **Lema 2**, **CONV**$_1$($\mathcal{A}$) ∈ **MOD**(Δ). Por el supuesto 1) **CONV**$_1$($\mathcal{A}$)$^{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n}_{\mathrm{v}_1\dots\mathrm{v}_n}$(**TRANS**($\varphi$)[$v_1\dots v_n$]) = V. De nuevo, por el **Lema 1**, [$\mathbf{v}_1\dots\mathbf{v}_n$] ⊨ φ. ■

El teorema principal implica compacidad, Löwenheim-Skolem y numerabilidad para **XL**. Un resultado central, ya que muestra la función que las traducciones pueden jugar en la prueba de metateoremas.

Proposición: El **Teorema principal** y la compacidad de **LM**$^\#$ implican la compacidad de **XL**.

Prueba:

Asúmase el **Teorema principal** y $\Gamma \vDash_{\mathbf{XL}} \varphi$. De ambos supuestos se sigue que existe un conjunto $\Delta \subseteq$ **SEN**(**LM**$^\#$), siendo **CONV**$_1$(**ST**(**XL**)) ⊆ **MOD**(Δ), tal que: **TRANS**(Γ)∪Δ $\vDash_{\mathbf{LM}^\#}$ **TRANS**(φ). Por compacidad de **LM**$^\#$, existe un conjunto finito Π = {**TRANS**(γ_i)/ $\gamma_i \in \Gamma$}∪{δ_j/ $\delta_j \in \Delta$} ⊆ **TRANS**(Γ)∪Δ tal que $\Pi \vDash_{\mathbf{LM}^\#}$ **TRANS**(φ). Por monotonicidad de **LM**$^\#$, $\Pi\cup\Delta \vDash_{\mathbf{LM}^\#}$ **TRANS**(φ). Lo que es equivalente a {**TRANS**(γ_i)/ $\gamma_i \in \Gamma$}∪Δ $\vDash_{\mathbf{LM}^\#}$ **TRANS**(φ). De nuevo, por el **Teorema principal** {γ_i/ $\gamma_i \in \Gamma$} ⊨XL φ. ■

Proposición: Los lemas **1** y **2** junto con el **Teorema principal** y el hecho de que **LM**$^\#$ cumple Löwnheim-Skolem, implican que **XL** también cumple Löwenheim-Skolem.

Prueba:

Asúmanse el **Lema 1**, el **Lema 2** y el **Teorema principal**. Sea $\Gamma \subseteq$ **SEN**(**XL**) y asúmase que tiene un modelo $\mathcal{A}$. Por el **Lema 1**, {∀**TRANS**(γ)/ $\gamma \in \Gamma$} también tiene un modelo **CONV**$_1$($\mathcal{A}$). Por el Teorema principal **CONV**$_1$($\mathcal{A}$) ∈ **MOD**(Δ). De lo que se sigue **CONV**$_1$($\mathcal{A}$) ∈ **MOD**({∀**TRANS**(γ)/ $\gamma \in \Gamma$}∪Δ). Dado que **LM**$^\#$ cumple Löwenheim-Skolem, {∀**TRANS**(γ)/ $\gamma \in \Gamma$}∪Δ tiene un modelo numerable, $\mathcal{B}$. A partir de esto y el **Lema 2** se obtiene que Γ tiene un modelo numerable **CONV**$_2$($\mathcal{B}$). ■

Proposición: El **Teorema principal** implica la numerabilidad de **XL**.

Prueba:

Asúmase $\Gamma = \emptyset$ en el **Teorema principal** y véase el **Corolario** anterior. ■

3.1.3. Nivel 3: completud y corrección

Una vez obtenido el Teorema principal sólo resta comprobar si se puede emplear el cálculo de **LM**$^{\#}$ para probar la corrección y la completud de **XL**. Para ello hay que estudiar cómo se comporta el cálculo respecto a la teoría Δ, es decir, si esta es suficiente para producir **TRANS**(**VAL**(**XL**)). El cálculo multivariado al que se refieren los resultados es C_2^-, introducido por Henkin (1953) y expuesto en Manzano (1996). Para una prueba de su completud véase el capítulo VI. Se asume que el cálculo de **XL**: 1) es finitario, 2) contiene el cálculo proposicional clásico y que 3) el teorema de deducción es válido para él.

La corrección del cálculo se obtiene una vez probados el **Lema 3** y el **Teorema 3**.

Lema 3: si $\vdash_{\mathbf{XL}} \varphi$, entonces $\Delta \vdash_{\mathbf{LM}^{\#}} \forall$**TRANS**(φ), para toda $\varphi \in$ **SEN**(**XL**), donde Δ es el conjunto de sentencias obtenido en el **LEMA 2**.

Teorema 3: si $\Gamma \vdash_{\mathbf{XL}} \varphi$, entonces **TRANS**(Γ)∪Δ $\vdash_{\mathbf{LM}^{\#}}$ **TRANS**(φ), para todo $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq$ **SEN**(**XL**), donde Δ es el conjunto de sentencias obtenido en el **LEMA 2**.

Prueba (esbozada):

Se sigue del **Lema 3**. Asúmase este resultado y $\Gamma \vdash_{\mathbf{XL}} \varphi$. Entonces existe un conjunto finito $\{\gamma_1,\ldots,\gamma_n\} \subseteq \Gamma$ tal que $\{\gamma_1,\ldots,\gamma_n\} \vdash_{\mathbf{XL}} \varphi$ (véase Manzano (1996), p. 80). Por el teorema de deducción y empleando ciertas reglas del cálculo se puede obtener $\vdash_{\mathbf{XL}} \gamma_1 \wedge\ldots\wedge \gamma_n \rightarrow \varphi$. Por el **Lema 3**, $\Delta \vdash_{\mathbf{LM}^{\#}} \forall$**TRANS**($\gamma_1 \wedge\ldots\wedge \gamma_n \rightarrow \varphi$). De nuevo aplicando ciertas reglas del cálculo, $\Delta \vdash_{\mathbf{LM}^{\#}}$ **TRANS**(γ_1) $\wedge\ldots\wedge$ **TRANS**(γ_n) → **TRANS**(φ). De donde se puede obtener **TRAS**(Γ)∪Δ $\vdash_{\mathbf{LM}^{\#}}$ **TRANS**(φ). ■

Corrección del cálculo de XL: si $\Gamma \vdash_{\mathbf{XL}} \varphi$, entonces $\Gamma \vDash_{\mathbf{XL}} \varphi$.

Prueba:

Asúmase $\Gamma \vdash_{\mathbf{XL}} \varphi$. Por el **Teorema 3**, **TRANS**(Γ)∪Δ $\vdash_{\mathbf{LM}^{\#}}$ **TRANS**(φ), donde es un conjunto de sentencias obtenido en el **Lema 2**. Por la corrección de **LM**$^{\#}$, **TRANS**(Γ)∪Δ $\vDash_{\mathbf{LM}^{\#}}$ **TRANS**(φ). Por el **Teorema 2**, $\Gamma \vdash_{\mathbf{XL}} \varphi$. ■

En caso de que se pueda probar la equivalencia en el **Lema 3** y el **Teorema 3** se obtiene completud.

Lema 4: $\vdash_{\mathbf{XL}}$ φ *syss* Δ $\vdash_{\mathbf{LM}^{\#}}$ ∀**TRANS**(φ), para toda φ ∈ **SEN**(**XL**), donde Δ es el conjunto de sentencias obtenido en el **LEMA 2**.

Teorema 4: Γ $\vdash_{\mathbf{XL}}$ φ *syss* **TRANS**(Γ)∪Δ $\vdash_{\mathbf{LM}^{\#}}$ **TRANS**(φ), para todo Γ∪{φ} ⊆ **SEN**(**XL**), donde Δ es el conjunto de sentencias obtenido en el **LEMA 2**.

Prueba:

Se sigue del **Lema 4**. ■

Completud del cálculo de XL: si Γ $\vDash_{\mathbf{XL}}$ φ, entonces Γ $\vdash_{\mathbf{XL}}$ φ.

Prueba:

Asúmase el **Teorema 4**, el **Teorema principal** y Γ $\vDash_{\mathbf{XL}}$ φ. Por el **Teorema principal**, **TRANS**(Γ)∪Δ $\vDash_{\mathbf{LM}^{\#}}$ **TRANS**(φ). Por la completud de $\mathbf{LM}^{\#}$, **TRANS**(Γ)∪Δ $\vdash_{\mathbf{LM}^{\#}}$ **TRANS**(φ). Por el **Teorema 4**, Γ $\vdash_{\mathbf{XL}}$ φ. ■

3.2. De la lógica híbrida de segundo orden a la lógica multivariada

3.2.1. Lógica híbrida de segundo orden (**LHSO**)

3.2.1.1. Signatura

Una signatura Σ para **LHSO** es un par ordenado ⟨**VAR**, **FUNC**⟩ donde:

1) **VAR** = **VAR**(Σ) es conjunto tal que: a) 1 ∈ **VAR**; b) para todo *n* ∈ ω−{0}, $\langle 0,1,\overset{n}{\ldots},1\rangle$ ∈ **VAR**. Tendremos variables predicativas *n*-arias de cualquier ariedad;

2) **FUNC** = **FUNC**(Σ): **OPER.CONS** ⟶ **VAR**. □

3.2.1.2. Lenguaje

3.2.1.2.1. Alfabeto

El alfabeto del lenguaje contendrá:

1. Un conjunto infinito numerable de variables individuales, $\boldsymbol{V}$: x, y, z,…, x_1, y_1, z_1,…
2) Un conjunto de variables $\boldsymbol{V_1}$ de tipo $\langle 0,1\rangle$: X^1, Y^1, Z^1,…, X_1^1, Y_1^1, Z_1^1,…
   Un conjunto de variables $\boldsymbol{V_2}$ de tipo $\langle 0,1,1\rangle$: X^2, Y^2, Z^2,…, X_1^2, Y_1^2, Z_1^2,…
   y así sucesivamente.

$\boldsymbol{V}^{\#} = \boldsymbol{V} \cup (\bigcup_{n \in \omega - \{0\}} \boldsymbol{V_n})$

3. Para cada $n \in \mathbb{N}$, un conjunto a lo sumo numerable de relatores n-arios, **OPER.CONS**: P^n, S^n, T^n,…, P_1^n, S_1^n, T_1^n, …
4. Conectivas: ¬, ∧, ⊥, ⊤
5. El cuantificador universal: ∀
6. El operador modal de necesidad: □
7. El operador híbrido: @
8. Un conjunto infinito numerable de nominales, **NOM**: *i*, *j*,…, i_1,j_1,…
9. El abstractor lambda: λ
10. Símbolos de igualdad para individuos y relaciones: =, $=_1$, $=_2$,…
11. Paréntesis:),(

No se incluyen functores para simplificar la prueba.

3.2.1.2.2. Expresiones

Términos:

(T1) Todo $x \in \boldsymbol{V}$ es un término.

Predicados:

(P1) Toda variable $X^n \in \boldsymbol{V_n}$ es un predicado n-ario.
(P2) Todo relator n-ario es un predicado n-ario.
(P3) $=_1$, $=_2$, … son predicados binarios.
(P4) Si φ es una fórmula de **LHSO** y x_1,…,x_n son variables individuales diferentes, entonces $\langle \lambda x_1,\ldots,x_n \varphi\rangle$ es un predicado n-ario.
(P5) Si Π es un predicado n-ario e i es un nominal, entonces $@_i\Pi$ es un predicado n-ario.

El conjunto de predicados es denotado mediante **PRED**(**LHSO**).

Fórmulas:

(F1) ⊤ y ⊥ son fórmulas.

(F2) Todo nominal i, j,… es una fórmula.

(F3) Si Π es un predicado n-ario y $x_1,\ldots,x_n$ son variables individuales, entonces $\Pi x_1,\ldots,x_n$ es una fórmula.

En particular $x_1 = x_2$ es una fórmula.

(F4) Si Π_n y Ψ_n son predicados *n-ari*os, entonces $\Pi_n = \Psi_n$ es una fórmula.

(F5) Si φ y ψ son fórmulas, entonces $\neg\varphi$ y $\varphi \wedge \psi$ son fórmulas.

(F6) Si φ es una fórmula y x es una variable individual, entonces $\forall x\varphi$ es una fórmula.

(F7) Si φ es una fórmula y X^n es una variable relacional, entonces $\forall X^n\varphi$ es una fórmula.

(F8) Si φ es una fórmula, entonces $\Box\varphi$ es una fórmula.

(F9) Si φ es una fórmula e i es un nominal, entonces $@_i\varphi$ es una fórmula. □

El conjunto de las fórmulas de **LHSO** es denotado mediante **FOR**(**LHSO**). Tan sólo los operadores "∀" y "λ" ligan variables. Las fórmulas que no contienen variables libres se denominan "sentencias" y su conjunto se denota mediante **SEN**(**LHSO**).

Nótese que el operador "@" se aplica a cualquier predicado o fórmula.

3.2.1.3. Modelos estándar para **LHSO**

Una *estructura estándar* para **LHSO** es un par $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, F\rangle$ tal que:

1. $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A}, \langle \mathbf{A}_n\rangle_{n\geq 1}, \mathbf{W}, \mathbf{R}\rangle$

   (i) $\mathbf{A} \neq \emptyset$ es el universo de individuos

   (ii) Para todo $n\geq 1$, $\mathbf{A}_n = \wp\mathbf{A}^n$

   (iii) $\mathbf{W} \neq \emptyset$ es el universo de mundos posibles

   (iv) $\mathbf{R} = \mathbf{W} \times \mathbf{W}$ es la relación de accesibilidad

2. F es la *función de denotación*, que asigna a cada miembro de **OPER.CONS** (aquí sólo relatores n-arios) una función de **W** en el universo $\mathbf{A}_n$ adecuado y a cada nominal i un subconjunto unitario de **W**:

   (i) F asigna a todo relator n-ario P una función $F_{(P)}$: $\mathbf{W} \longrightarrow \mathbf{A}_n$.

   (ii) para todo nominal i, $F_{(i)}$: $\mathbf{W} \longrightarrow \{V,F\}$, de tal forma que $F_{(i)}(\mathbf{w}) = V$ para un único $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$. Para simplificar la notación se escribirá $F(i) = \{\mathbf{w}\}$, y se dirá que $\mathbf{w}$ es la denotación de i. □

Por cuestiones de espacio no se introducirán los conceptos de *frame* y estructura general. Pero, si la traducción se llevase más allá, habría que hacerlo, restringiendo a segundo orden las definiciones contenidas en Areces *et al*. (2014).

3.2.1.5. Interpretación

Antes es necesario definir el concepto de *asignación*: una asignación g es una función del conjunto de las variables en los universos:

$$g\colon \boldsymbol{V}^{\#} \longrightarrow \mathbf{A} \cup (\bigcup_{n\geq 1} \mathbf{A}_n). \qquad \square$$

Una *asignación variante* $g^{\mathbf{x}}_{\mathrm{x}}$: si g es una asignación, "x" es una variable individual y $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$, entonces $g^{\mathbf{x}}_{\mathrm{x}}$ es una asignación que manda "x" a $\mathbf{x}$ y coincide con g para las demás variables diferentes a "x":

$$g^{\mathbf{x}}_{\mathrm{x}} = (g\text{-}\{\langle \mathrm{x}, g(\mathrm{x})\rangle\}) \cup \{\langle \mathrm{x}, \mathbf{x}\rangle\}. \qquad \square$$

Una asignación variante *simultánea* $g^{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}_{\mathrm{x}_1\ldots\mathrm{x}_n}$ se define de la forma evidente:

$$g^{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}_{\mathrm{x}_1\ldots\mathrm{x}_n} = (g\text{-}\{\langle \mathrm{x}_1, g(\mathrm{x}_1)\rangle,\ldots, \langle \mathrm{x}_n, g(\mathrm{x}_n)\rangle\}) \cup \{\langle \mathrm{x}_1, \mathbf{x}_1\rangle,\ldots,\langle \mathrm{x}_n, \mathbf{x}_n\rangle\},$$

siendo $\mathrm{x}_i \neq \mathrm{x}_j$, para cada $i,j \in \{1,\ldots n,\}$ e $i \neq j$. □

Ambas definiciones son análogas para el caso de las variables predicativas. □

Una interpretación $\mathfrak{I} = \langle \mathcal{M}, g\rangle$, donde $\mathcal{M}$ es una estructura estándar y g es una asignación, se define como sigue. Si $\mathfrak{I} = \langle \mathcal{M}, g\rangle$ entonces $\langle \mathcal{M}, g^{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}_{\mathrm{x}_1\ldots\mathrm{x}_n}\rangle = \mathfrak{I}^{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}_{\mathrm{x}_1\ldots\mathrm{x}_n}$.

(T1) $\langle \mathfrak{I},\mathbf{u}\rangle(\mathrm{x}) = g(\mathrm{x})$

(T2) $\langle \mathfrak{I},\mathbf{u}\rangle(@_i\mathrm{x}) = \langle \mathfrak{I},\mathbf{v}\rangle(\mathrm{x})$, siendo $\mathbf{v}$ el único mundo tal que $F(\mathrm{i}) = \{\mathbf{v}\}$

(P1) $\langle \mathfrak{I},\mathbf{u}\rangle(\mathrm{X}^n) = g(\mathrm{X}^n)$

(P2) $\langle \mathfrak{I},\mathbf{u}\rangle(\mathrm{P}) = F_{(\mathrm{P})}(\mathbf{u})$

(P3) $\langle \mathfrak{I},\mathbf{u}\rangle(=) = \{\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle \in \mathbf{A}^2/\mathbf{x} = \mathbf{y}\}\cup(\bigcup_{n\geq 1}\{\langle \mathbf{X}^n,\mathbf{Y}^n\rangle \in \mathbf{A}^2_n/\ \mathbf{X}^n = \mathbf{Y}^n\}$

(P4) $\langle \mathfrak{I},\mathbf{u}\rangle\langle\lambda \mathrm{x}_1,\ldots,\mathrm{x}_n\varphi\rangle = \{\langle \mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n\rangle \in \mathbf{A}_n/\langle \mathfrak{I}^{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}_{\mathrm{x}_1\ldots\mathrm{x}_n},\mathbf{u}\rangle \vDash \varphi\}$

(P5) $\langle \mathfrak{I},\mathbf{u}\rangle(@_i\Pi) = \langle \mathfrak{I},\mathbf{v}\rangle(\Pi)$, siendo $\mathbf{v}$ el único mundo tal que $F(\mathrm{i}) = \{\mathbf{v}\}$

(F1) $\langle \mathfrak{I},\mathbf{u}\rangle$ nunca satisface a $\bot$ y siempre satisface a $\top$

(F2) $\langle \mathfrak{I},\mathbf{u}\rangle \vDash i$ *syss* $F(i) = \{\mathbf{u}\}$

(F3) $\langle \mathfrak{I},\mathbf{u}\rangle \vDash \Pi^n\mathrm{x}_1\ldots\mathrm{x}_n$ *syss* $\langle\langle \mathfrak{I},\mathbf{u}\rangle(\mathrm{x}_1),\ldots,\langle \mathfrak{I},\mathbf{u}\rangle(\mathrm{x}_n)\rangle \in \langle \mathfrak{I},\mathbf{u}\rangle(\Pi^n)$

(F4) $\langle \mathfrak{I},\mathbf{u}\rangle \vDash \neg\varphi$ *syss* $\langle \mathfrak{I},\mathbf{u}\rangle \nvDash \varphi$

(F5) $\langle \mathfrak{I},\mathbf{u}\rangle \vDash \varphi \wedge \psi$ *syss* $\langle \mathfrak{I},\mathbf{u}\rangle \vDash \varphi$ e $\langle \mathfrak{I},\mathbf{u}\rangle \vDash \psi$

(F6) $\langle\mathfrak{I},\mathbf{u}\rangle \vDash \forall x\varphi$ *syss* para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$, $\langle\mathfrak{I}^{\mathbf{x}}_{x},\mathbf{u}\rangle \vDash \varphi$

(F7) $\langle\mathfrak{I},\mathbf{u}\rangle \vDash \forall X^n\varphi$ *syss* para todo $\mathbf{X^n} \in \mathbf{A}_n$, $\langle\mathfrak{I}^{\mathbf{X^n}}_{X^n},\mathbf{u}\rangle \vDash \varphi$

(F8) $\langle\mathfrak{I},\mathbf{u}\rangle \vDash \Box\varphi$ *syss* para todo **v** tal que se cumple **Ruv**, $\langle\mathfrak{I},\mathbf{v}\rangle \vDash \varphi$

(F9) $\langle\mathfrak{I},\mathbf{u}\rangle \vDash @_i\varphi$ *syss* $\langle\mathfrak{I},\mathbf{v}\rangle \vDash \varphi$ siendo **v** el único mundo tal que $F(i) = \{\mathbf{v}\}$ □

Para toda $\varphi \in$ **FOR**(**LHSO**), $\mathfrak{I} \vDash \varphi$ *syss* para todo $\mathbf{u} \in \mathbf{W}$, $\langle\mathfrak{I},\mathbf{u}\rangle \vDash \varphi$. Se dice que $\mathfrak{I}$ *satisface* a o es *modelo* de φ. En caso de que $\varphi \in$ **SEN**(**LHSO**) es posible prescindir de la asignación *g*. En este último caso se dice que φ *es verdadera* en $\langle\mathcal{A},\mathbf{u}\rangle$ o en $\mathcal{A}$. Escribiremos así $\langle\mathcal{A},\mathbf{u}\rangle \vDash \varphi$ o $\mathcal{A} \vDash \varphi$.

Para todo $\Gamma\cup\{\varphi\} \subseteq$ **FOR**(**LHSO**), $\Gamma \vDash_{\mathbf{u}} \varphi$ *syss* para todo $\langle\mathfrak{I},\mathbf{u}\rangle$, si $\langle\mathfrak{I},\mathbf{u}\rangle \vDash \gamma$, para todo $\gamma \in \Gamma$, entonces $\langle\mathfrak{I},\mathbf{u}\rangle \vDash \varphi$. Esto es lo que se conoce como *relación de consecuencia local*. La *relación de consecuencia global* se define como sigue. Para todo $\Gamma\cup\{\varphi\} \subseteq$ **FOR**(**LHSO**), $\Gamma \vDash \varphi$ *syss* para todo $\mathfrak{I}$, si $\mathfrak{I} \vDash \gamma$, para todo $\gamma \in \Gamma$, entonces $\mathfrak{I} \vDash \varphi$. □

3.2.2. Lógica multivariada (**LM***)

3.2.2.1. Signatura

Una signatura Σ* para **LM*** es un par ⟨**SORT**, **FUNC***⟩ donde:

1) **SORT** = **SORT**(Σ*) es un conjunto tal que:

   a) 0, 1, 2 ∈ **SORT**. (0 es el *sort* booleano, 1 el *sort* de los individuos y 2 el *sort* de **W**),

   b) para todo $n \in \omega-\{0\}$, $\langle 0,1,\overset{n}{\ldots},1\rangle \in$ **SORT**,

   b) para todo $n \in \omega-\{0\}$, $\langle 0,2,1,\overset{n}{\ldots},1\rangle \in$ **SORT**;

2) **FUNC*** = **FUNC***(Σ*): **OPER.SIM** ⟶ $[S_\omega($**SORT**$)]\cup[\omega-\{0\}]$,

siendo S_ω(**SORT**) el conjunto de las secuencias finitas de los elementos de **SORT**. Los miembros de S_ω(**SORT**) se denominan "tipos" y los de ω-{0} "ariedades". □

3.2.2.2. Lenguaje

3.2.2.2.1. Alfabeto

1. Un conjunto infinito numerable $\boldsymbol{V}^* = \boldsymbol{V}$ de variables individuales: $x, y, z, \ldots, x_1, y_1, z_1, \ldots$

2. Un conjunto infinito numerable ***VW*** de variables de tipo 2: u, v, w,… u_1, v_1, w_1,…
3. Para todo *n*, un conjunto infinito numerable $\boldsymbol{V}^*_n = \boldsymbol{V}_n$ de variables de tipo $\langle 0,1,\overset{n}{\ldots},1\rangle$: X^n, Y^n, Z^n,…, X^n_1, Y^n_1, Z^n_1,…

$\boldsymbol{V}^{\#}* = \boldsymbol{V}^* \cup \boldsymbol{VW} \cup (\bigcup_{n\geq 1} \boldsymbol{V}^*_n)$

4. Todos los símbolos de **OPER.SIM**:
   3.1. Todos los miembros de **OPER.CONS** (ahora cambian ligeramente su tipo)
   3.2. Un relator binario R
   3.3. Para cada $n \in \omega-\{0\}$ un relator de pertenencia *n*+1-ario ε_{n+1}
   3.4. Las conectivas ¬ y ∧
   3.5. La relación binaria no tipada de igualdad: *E*
   3.6. Un conjunto infinito numerable de nominales **NOM*** = **NOM**: *i*, *j*,…i_1,j_1,…
4. El cuantificador universal: ∀
5. El abstractor λ
6. Paréntesis:), (

Se podría incluir también un conjunto de variables *n*+1-arias con un argumento para mundos, aumentando la capacidad expresiva de **LM*** al poder cuantificar sobre expresiones de tipo $\langle 0,2,1,\overset{n}{\ldots},1\rangle$. Consecuentemente habría que incluir una tupla de universos *n*+1-arios en sus estructuras (definidas más abajo). Esto permitiría tener un principio de comprehensión irrestricto, que posiblemente sea necesario si la traducción se extiende al nivel 2.

FUNC* (P) = $\langle 0,2,1,\overset{n}{\ldots},1\rangle$, para todo P ∈ **OPER.CONS∩OPER.SIM**

FUNC* (R)= $\langle 0,2,2\rangle$

FUNC* (ε_{n+1}) = $\langle 0,1,\ldots,1,\langle 0,1,\overset{n}{\ldots},1\rangle\rangle$

FUNC* (*E*) = **=** (abusando de la notación se empleará el símbolo habitual para la igualdad en lugar de *E*)

FUNC* (¬) = $\langle 0,0\rangle$

FUNC* (∧) = $\langle 0,0,0\rangle$

FUNC* (*i*) = 2

3.2.2.2.2. Expresiones

(E1) Toda variable cuyo *sort* es α es una expresión de tipo α.

(E2) Todo P ∈ **OPER.SIM** ∩ **OPER.CONS** tal que **FUNC*** (P) = $\langle 0,2,1,\overset{n}{\ldots},1\rangle$, es una expresión de tipo $\langle 0,2,1,\overset{n}{\ldots},1\rangle$.

(E3) R es una expresión de tipo $\langle 0,2,2\rangle$.

(E4) Para todo $n \in \omega - \{0\}$, ε_{n+1} es una expresión de tipo $\langle 0,1,\overset{n}{\ldots},1,\langle 0,1,\overset{n}{\ldots},1\rangle\rangle$.

(E5) E es una expresión binaria.

(E6) Las conectivas $\neg$ y $\wedge$ son expresiones de tipo $\langle 0,0\rangle$ y $\langle 0,0,0\rangle$ respectivamente.

(E7) Si $ux_1,\ldots,x_n$, son variables de tipos $2,1,\ldots,1$ y φ es una expresión de tipo 0, $\langle \lambda ux_1\ldots x_n\varphi\rangle$ es una expresión de tipo $\langle 0,2,1,\overset{n}{\ldots},1\rangle$

(E8) Todo $i \in$ **NOM*** es una expresión de tipo 2.

(E9) Si Π es una expresión de tipo $\langle 0,2,1,\overset{n}{\ldots},1\rangle$, y $e_1,\ldots,e_{n+1}$ son expresiones de tipos $2,1,\overset{n}{\ldots},1$ entonces $\Pi e_1\ldots e_n$ es una expresión de tipo 0.

(E10) Si e_1 y e_2 son expresiones de tipo 2, $\mathrm{R}e_1e_2$ es una expresión de tipo 0.

(E11) Si $x_1,\ldots,x_n$ son variables de tipos $1,\ldots,1$ y $X^n \in \boldsymbol{V}^*_n$, $\varepsilon_{n+1}X^nx_1\ldots x_n$ es una expresión de tipo 0.

(E12) Si φ y ψ son expresiones de tipo 0, entonces $\neg\varphi$ y $\varphi \wedge \psi$ son expresiones de tipo 0.

(E13) Si e_1 y e_2 son expresiones del mismo tipo, entonces $e_1 = e_2$ es una expresión de tipo 0.

(E14)Si $e_1,\ldots,e_{n+1}$, son expresiones de tipos $2,1,\ldots,1$, $\langle \lambda ux_1\ldots x_n\varphi\rangle(e_1,\ldots,e_{n+1})$ es una expresión de tipo 0.

(E15) Si φ es una expresión de tipo 0 y x es una variable individual, entonces $\forall x\varphi$ es una expresión de tipo 0.

(E16) Si φ es una expresión de tipo 0, para todo n tal que $X^n \in \boldsymbol{V}^*_n$, $\forall X^n\varphi$ es una expresión de tipo 0.

(E17) Si φ es una expresión de tipo 0 y w es una variable de tipo 2, entonces $\forall w\varphi$ es una expresión de tipo 0. □

3.2.2.3. Función **TRANS**

Definición recursiva:

(F1) $\mathbf{TRANS}(\bot)[u] \equiv u \neq u$

$\mathbf{TRANS}(\top)[u] \equiv u = u$

(F2) $\mathbf{TRANS}(i)[u] \equiv i = u$

(F3) $\mathbf{TRANS}(Px_1\ldots x_n)[u] \equiv Pux_1,\ldots,x_n$ para todo $P \in \mathbf{OPER.CONS} \cap \mathbf{OPER.SIM}$

$\mathbf{TRANS}(X^nx_1\ldots x_n)[u] \equiv \varepsilon_{n+1}X^nx_1\ldots x_n$

$\mathbf{TRANS}(v_1 =_n v_2)[u] \equiv v_1 = v_2$, para toda variable $v_1, v_2 \in \mathbf{V}^{\#}$ n-aria

$\mathbf{TRANS}(\langle\lambda x_1\ldots x_n\varphi\rangle(y_1\ldots y_n))[u] \equiv \langle\lambda s x_1\ldots x_n\mathbf{TRANS}(\varphi)[u]\rangle(u y_1\ldots y_n)$, siendo $s \neq u$

$\mathbf{TRANS}(@_i\Pi x_1\ldots x_n)[u] \equiv \mathbf{TRANS}(\Pi x_1\ldots x_n)[u]\ i/u$

(F4) $\mathbf{TRANS}(\neg\varphi)[u] \equiv \neg\mathbf{TRANS}(\varphi)[u]$

(F5) $\mathbf{TRANS}(\varphi \wedge \psi)[u] \equiv \mathbf{TRANS}(\varphi)[u] \wedge \mathbf{TRANS}(\psi)[u]$

(F6) Para toda $x \in \boldsymbol{V}$, $\mathbf{TRANS}(\forall x\varphi)[u] \equiv \forall x\mathbf{TRANS}(\varphi)[u]$

(F7) Para todo n, tal que $X^n \in \boldsymbol{V}_n$, $\mathbf{TRANS}(\forall X^n\varphi)[u] \equiv \forall X^n\mathbf{TRANS}(\varphi)[u]$

(F8) $\mathbf{TRANS}(\Box\varphi)[u] \equiv \forall w(Ruw \rightarrow \mathbf{TRANS}(\varphi)[w])$

(F9) $\mathbf{TRANS}(@_i\varphi)[u] \equiv \mathbf{TRANS}(\varphi)[u]\ i/u$ □

3.2.2.4. Función **CONV**$_1$

Sea **ST**(**LHSO**) el conjunto de las estructuras de signatura Σ para **LHSO** y **ST**(**LM***) el conjunto de las estructuras de signatura Σ* del lenguaje multivariado definido. **CONV**$_1$ asigna a cada miembro de **ST**(**LHSO**) un miembro de **ST**(**LM***):

$$\mathbf{CONV_1}: \mathbf{ST}(\mathbf{LHSO}) \longrightarrow \mathbf{ST}(\mathbf{LM}^*)$$

$$\langle\mathcal{A},F\rangle \longmapsto \mathbf{CONV1}(\langle\mathcal{A},F\rangle).$$

Definición de $\mathbf{CONV_1}(\langle\mathcal{A},F\rangle) = \mathcal{C}$:

$\mathcal{C} = \langle \mathbf{A}, \langle\mathbf{A}_n\rangle_{n\geq 0}, \mathbf{W}, \langle C^{\mathcal{C}}\rangle_{C \in \mathbf{OPER.SIM}}\rangle$

1. Para cada $n \geq 1$, $\mathbf{A}_n$ es igual al correspondiente universo de relaciones de $\langle\mathcal{A},F\rangle$. Ahora $\mathbf{A}_0 = \{V, F\}$ es el universo booleano.

2. **W** es el universo de mundos posibles de $\mathcal{A}$.

3. $\langle \boldsymbol{C}^{\mathcal{C}}\rangle_{C \in \mathbf{OPER.SIM}}$ es una familia de relaciones.

3.1. Para cada $P \in$ **OPER.CONS**∩**OPER.SIM** y $\mathbf{FUNC}^*(P) = \langle 0,2,1,\overset{n}{\ldots},1\rangle$:

$$\mathbf{P}^{\mathcal{C}}: \mathbf{W} \times \mathbf{A}^n \longrightarrow \mathbf{A}_0$$

tal que $\mathbf{P}^{\mathcal{C}} = \{\langle \mathbf{u},\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n,\mathbf{X}\rangle \in \mathbf{W}\times\mathbf{A}^n\times\mathbf{A}_0 / \mathbf{X}=V$ *syss* $\langle\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n\rangle \in F_{(P)}(\mathbf{u})\}$.

3.2. Para R, $\mathbf{FUNC}^*(R) = \langle 0,2,2\rangle$:

$$\mathbf{R}^{\mathcal{C}}: \mathbf{W}^2 \longrightarrow \mathbf{A}_0$$

tal que $\mathbf{R}^{\mathcal{C}} = \{\langle \mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{X}\rangle \in \mathbf{W}^2\times\mathbf{A}_0 / \mathbf{X}=V$ *syss* $\langle\mathbf{u},\mathbf{w}\rangle \in \mathbf{R}\}$.

3.3. Para ε_{n+1}, $\mathbf{FUNC}^*(\varepsilon_{n+1}) = \langle 0,1,\overset{n}{\ldots},1,\langle 0,1,\overset{n}{\ldots},1\rangle\rangle$:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathcal{C}}_{n+1}: \mathbf{A}_n\times\mathbf{A}^n \longrightarrow \mathbf{A}_0$$

tal que $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathcal{C}}_{n+1} = \{\langle \mathbf{X}^n,\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n,\mathbf{X}\rangle \in \mathbf{A}_n\times\mathbf{A}^n\times\mathbf{A}_0 / \mathbf{X}=V$ *syss* $\langle\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n\rangle \in \mathbf{X}^n\}$.

3.4. Para ¬ y ∧:

$$\neg^{\mathcal{C}}: \mathbf{A}_0 \longrightarrow \mathbf{A}_0$$

$$\wedge^{\mathcal{C}}: \mathbf{A}_0^2 \longrightarrow \mathbf{A}_0$$

La definición de ambas funciones es estándar y refleja el comportamiento de las conectivas de **LHSO** en el modelo ⟨$\mathcal{A}$, *g*⟩.

3.5. Para *E*, **FUNC***(*E*) = **=**:

$$\boldsymbol{E}^{\mathcal{C}}: (\mathbf{A} \cup \mathbf{W} \cup (\bigcup_{n \geq 1} \mathbf{A}_n))^2 \longrightarrow \mathbf{A}_0$$

En todas las estructuras, no sólo las contenidas en el rango de $\mathbf{CONV_1}$, $\boldsymbol{E}^{\mathcal{C}}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ = T *syss* **x** = **y**. Es decir, la igualdad es interpretada como la identidad, de modo que $\mathbf{CONV_1}$(⟨$\mathcal{A}$,*F*⟩) será una estructura *normal*.

3.6. Para *i* ∈ **NOM**:

$$\boldsymbol{i}^{\mathcal{C}} = \mathbf{w}$$

tal que *F*(i) = {**w**}. □

3.2.2.5. Interpretación

Al igual que en el caso de la lógica híbrida, es necesario definir el concepto de asignación: una asignación es una función *g* de las variables en los universos de la estructura

$$g: \boldsymbol{V}^{\#*} \longrightarrow \mathbf{A} \cup \mathbf{W} \cup (\bigcup_{n \geq 1} \mathbf{A}_n)$$

tal que $g[\boldsymbol{V}^*] \subseteq \mathbf{A}$, $g[\boldsymbol{VW}] \subseteq \mathbf{W}$, para todo *n*, $g[\boldsymbol{V}^*_n] \subseteq \mathbf{A}_n$. □

Las asignaciones variante y variante simultánea se definen de la forma esperada. □

Una interpretación $\mathfrak{I}$ = ⟨$\mathcal{A}$, *g*⟩, donde $\mathcal{A}$ es una estructura de signatura Σ* y *g* es una asignación, se define como sigue. Si $\mathfrak{I}$ = ⟨$\mathcal{A}$, *g*⟩, entonces $\langle \mathcal{A}, g^{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}_{x_1 \ldots x_n} \rangle = \mathfrak{I}^{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}_{x_1 \ldots x_n}$.

(E1) $\mathfrak{I}(V) = g(V)$, para toda $V \in \boldsymbol{V}^{\#*}$

(E2) $\mathfrak{I}(\mathrm{P}) = \mathbf{P}^{\mathcal{C}}$, para todo P ∈ **OPER.SIM**∩**OPER.CONS**

(E3) $\mathfrak{I}(\mathrm{R}) = \mathbf{R}^{\mathcal{C}}$

(E4) $\mathfrak{I}(\varepsilon_{n+1}) = \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathcal{C}}_{n+1}$, para todo $n \in \omega - \{0\}$

(E5) $\mathfrak{I}(=) = \boldsymbol{E}^{\mathcal{C}}$

(E6) $\mathfrak{I}(\neg) = \neg^{\mathcal{C}}$

$\mathfrak{I}(\wedge) = \wedge^{\mathcal{C}}$

(E7) $\mathfrak{I}(\langle \lambda u x_1 \ldots x_n \varphi \rangle) = \{\langle \mathbf{u},\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n \rangle \in \mathbf{W} \times \mathbf{A}^n / \mathfrak{I}^{\mathbf{u},\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}_{u x_1 \ldots x_n}(\varphi) = \mathrm{V}\}$

(E8) $\Im(i) = \boldsymbol{i}^{\mathcal{C}}$

(E9) $\Im(\mathrm{P}e_1\ldots e_n) = \mathbf{P}^{\mathcal{C}}(\Im(e_1),\ldots,\Im(e_n))$, para todo $\mathrm{P} \in$ **OPER.SIM∩OPER.CONS**

(E10) $\Im(\mathrm{R}e_1e_2) = \mathbf{R}^{\mathcal{C}}(\Im(e_1),\Im(e_2))$

(E11) $\Im(\varepsilon_{n+1}X^n x_1\ldots x_n) = \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathcal{C}}_{n+1}(\Im(X^n), \Im(x_1),\ldots,\Im(x_n))$

(E12) $\Im(\neg\varphi) = \neg^{\mathcal{C}}(\Im(\varphi))$

$\Im(\varphi \wedge \psi) = \wedge^{\mathcal{C}}(\Im(\varphi),\Im(\psi))$

(E13) $\Im(e_1 = e_2) = \boldsymbol{E}^{\mathcal{C}}(\Im(e_1),\Im(e_2))$

(E14) $\Im(\langle\lambda u x_1\ldots x_n\varphi\rangle(e_1\ldots e_n)) = \mathrm{T}$ *syss* $\langle\Im(e_1),\ldots, \Im(e_n)\rangle \in \Im(\langle\lambda u x_1\ldots x_n\varphi\rangle)$

(E15) $\Im(\forall x\varphi) = \mathrm{T}$ *syss* para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$, $\langle\mathcal{A}, g^{\mathbf{x}}_{\mathrm{x}}\rangle(\varphi) = \mathrm{V}$

(E16) $\Im(\forall X^n\varphi) = \mathrm{T}$ *syss* para todo $\mathbf{X}^n \in \mathbf{A}n$, $\langle\mathcal{A}, g^{\mathbf{X}^n}_{\mathrm{X}^n}\rangle(\varphi) = \mathrm{V}$

(E17) $\Im(\forall v\varphi) = \mathrm{T}$ *syss* para todo $\mathbf{v} \in \mathbf{W}$, $\langle\mathcal{A}, g^{\mathbf{v}}_{\mathrm{v}}\rangle(\varphi) = \mathrm{V}$. □

3.2.3. Traducción

A continuación se prueba el **Lema 1** y, así, el **Teorema 1**. Para ello se prueba un resultado ligeramente diferente, el **Lema 0.1.** Intuitivamente este afirma que, en general, la denotación de las expresiones será casi la misma en **LHSO** y **LM***.

Lema 0.1.

Sea $\Im = \langle\mathcal{M}, g\rangle$ y $\mathcal{M} = \langle\mathcal{A}, F\rangle$. Para todo $\mathcal{M} \in$ **ST**(**LHSO**), $\mathbf{u} \in \mathbf{W}$, $\varphi \in$ **FOR**(**LHSO**) y toda asignación g de $\boldsymbol{V}^{\#}$ en $\langle\mathbf{A}_n\rangle_{n\geq 1}$:

$$\langle\Im,\mathbf{u}\rangle \vDash \varphi \textit{ syss } \langle\mathbf{CONV_1}(\mathcal{M}),g\rangle^{\mathbf{u}}_{\mathrm{u}}\,(\mathbf{TRANS}(\varphi)[\mathrm{u}]) = \mathrm{V}$$

para toda $\varphi \in$ **FOR(LHSO)**.

Prueba:

En la prueba se emplean los lemas de coincidencia y sustitución. Para una prueba de los mismos véase Manzano (1996).

Sea **CONV1**($\mathcal{M}$) = $\mathcal{C}$.

(F1) $\perp$ siempre es falso en todo $\langle\Im,\mathbf{u}\rangle$. Como se están usando estructuras multivariadas normales (apartado 3.2.2.4.) $\mathrm{u} \neq \mathrm{u}$ también será siempre falso en cualquier $\langle\mathcal{C},g\rangle^{\mathbf{u}}_{\mathrm{u}}$.

El argumento para $\top$ y $\mathrm{u} = \mathrm{u}$ es análogo.

(F2) $\langle \mathfrak{I},\mathbf{u}\rangle \vDash i$ *syss* $F(i) = \{\mathbf{u}\}$

syss $\langle \mathcal{C},g\,^{\mathbf{u}}_{\mathrm{u}}\rangle(i = \mathrm{u}) = \mathrm{V}$ [por definición de $\mathcal{C}$]

syss $\langle \mathcal{C},g\rangle^{\mathbf{u}}_{\mathrm{u}}(\mathbf{TRANS}(i)[\mathrm{u}]) = \mathrm{V}$.

(F3) $\langle \mathfrak{I},\mathbf{u}\rangle \vDash \mathrm{P}x_1\ldots x_n$ *syss* $\langle g(x_1),\ldots,g(x_n)\rangle \in \mathrm{F}_{(\mathrm{P})}(\mathbf{u})$

syss $\langle \mathbf{u},g(x_1),\ldots,g(x_n)\rangle \in \mathbf{P}^{\mathcal{C}}$

syss $\langle \mathcal{C},g\,^{\mathbf{u}}_{\mathrm{u}}\rangle(\mathrm{Pu}x_1\ldots x_n) = \mathrm{V}$

syss $\langle \mathcal{C},g\rangle^{\mathbf{u}}_{\mathrm{u}}(\mathbf{TRANS}(\mathrm{P}x_1\ldots x_n)[\mathrm{u}]) = \mathrm{V}$.

$\langle \mathfrak{I},\mathbf{u}\rangle \vDash \mathrm{X}^{n}x_1\ldots x_n$ *syss* $\langle g(x_1),\ldots,g(x_n)\rangle \in g(\mathrm{X}^{n})$

syss $\langle g(\mathrm{X}^{n}),g(x_1),\ldots,g(x_n)\rangle \in \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathcal{C}}_{n+1}$

syss $\langle \mathcal{C},g\,^{\mathbf{u}}_{\mathrm{u}}\rangle(\varepsilon_{n+1}\mathrm{X}^{n+1}x_1\ldots x_n)= \mathrm{V}$

syss $\langle \mathcal{C},g\rangle^{\mathbf{u}}_{\mathrm{u}}(\mathbf{TRANS}(\mathrm{X}^{n}x_1\ldots x_n)[\mathrm{u}]) = \mathrm{V}$.

$\langle \mathfrak{I},\mathbf{u}\rangle \vDash v_1 =_n v_2$ *syss* $g(v_1) =_n g(v_2)$

syss $\langle v_1, v_2\rangle \in \boldsymbol{E}^{\mathcal{C}}$ [dado que $\mathcal{C}$ es una estructura normal]

syss $\langle \mathcal{C},g\rangle(v_1 = v_2) = \mathrm{V}$

syss $\langle \mathcal{C},g\,^{\mathbf{u}}_{\mathrm{u}}\rangle(v_1 = v_2) = \mathrm{V}$ [por el lema de coincidencia]

syss $\langle \mathcal{C},g\rangle^{\mathbf{u}}_{\mathrm{u}}$ $(\mathbf{TRANS}(v_1 =_n v_2)[\mathrm{u}]) = \mathrm{V}$.

$\langle \mathfrak{I},\mathbf{u}\rangle \vDash \langle \lambda x_1\ldots x_n\varphi\rangle(y_1\ldots y_n)$ *syss* $\langle g(y_1),\ldots,g(y_n)\rangle \in \{\langle \mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n\rangle \in \mathbf{A}_n/\langle\langle \mathcal{M},g\,^{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}_{x_1\ldots x_n}\rangle,\mathbf{u}\rangle \vDash \varphi\}$

syss $\langle g\,^{\mathbf{u}}_{\mathrm{u}}(\mathrm{u}),\langle g(y_1),\ldots,g(y_n)\rangle\rangle \in \{\langle \mathbf{u},\langle \mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n\rangle\rangle \in \mathbf{W}\times\mathbf{A}_n/\langle \mathcal{C},g\,^{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}_{x_1\ldots x_n}\rangle^{\mathbf{u}}_{\mathrm{u}}$ $(\mathbf{TRANS}(\varphi)[\mathrm{u}]) = \mathrm{V}\}$
[inducción en φ]

syss $\langle g\,^{\mathbf{u}}_{\mathrm{u}}(\mathrm{u}),g\,^{\mathbf{u}}_{\mathrm{u}}(y_1),\ldots,g\,^{\mathbf{u}}_{\mathrm{u}}(y_n)\rangle \in \{\langle \mathbf{u},\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n\rangle \in \mathbf{W}\times\mathbf{A}_n/\langle \mathcal{C},g\,^{\mathbf{u}}_{\mathrm{u}}\rangle^{\mathbf{u},\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}_{\mathrm{s}x_1\ldots x_n}(\mathbf{TRANS}(\varphi)[\mathrm{u}]) = \mathrm{V}\}$
[por el lema de coincidencia]

syss $\langle \mathcal{C},g\,^{\mathbf{u}}_{\mathrm{u}}\rangle(\langle \lambda \mathrm{s}x_1\ldots x_n\mathbf{TRANS}(\varphi)[\mathrm{u}]\rangle(\mathrm{u}y_1\ldots y_n)) = \mathrm{V}$

syss $\langle \mathcal{C},g\rangle^{\mathbf{u}}_{\mathrm{u}}(\mathbf{TRANS}(\langle \lambda x_1\ldots x_n\varphi\rangle(y_1\ldots y_n))[\mathrm{u}]) = \mathrm{V}$.

$\langle \mathfrak{I},\mathbf{u}\rangle \vDash @_i\Pi x_1\ldots x_n$ *syss* $\langle \mathfrak{I},\mathbf{v}\rangle \vDash \Pi x_1\ldots x_n$ tal que $\mathrm{F}(i) = \{\mathbf{v}\}$

syss $\langle \mathcal{C},g\rangle^{\mathbf{v}}_{\mathrm{v}}(\mathbf{TRANS}(\Pi x_1\ldots x_n)[\mathrm{v}]) = \mathrm{V}$ [supuesto inductivo] *syss* $\langle \mathcal{C}, g^{\langle \mathcal{C},g\rangle(i)}_{\mathrm{v}} \rangle$(**TRANS**($\Pi x_1 \ldots x_n$)[v]) = V [por definición de **CONV**$_1$]

syss $\langle \mathcal{C}, g\rangle$(**TRANS**($\Pi x_1 \ldots x_n$)[v]$i$/v) = V [por el lema de sustitución]

syss $\langle \mathcal{C}, g\rangle^{\mathbf{u}}_{\mathrm{u}}$(**TRANS**($@_i \Pi x_1 \ldots x_n$)[u]) = V.

(F4) $\langle \mathfrak{I}, \mathbf{u}\rangle \vDash \neg\varphi$ *syss* $\langle \mathfrak{I}, \mathbf{u}\rangle \nvDash \varphi$

syss $\langle \mathcal{C}, g\rangle^{\mathbf{u}}_{\mathrm{u}}$(**TRANS**($\varphi$)[u]) = F [supuesto inductivo]

syss $\langle \mathcal{C}, g\rangle^{\mathbf{u}}_{\mathrm{u}}$($\neg$**TRANS**($\varphi$)[u]) = V

syss $\langle \mathcal{C}, g\rangle^{\mathbf{u}}_{\mathrm{u}}$(**TRANS**($\neg\varphi$)[u]) = V.

(F5) $\langle \mathfrak{I}, \mathbf{u}\rangle \vDash \varphi \wedge \psi$ *syss* $\langle \mathfrak{I}, \mathbf{u}\rangle \vDash \varphi$ y $\langle \mathfrak{I}, \mathbf{u}\rangle \vDash \psi$

syss $\langle \mathcal{C}, g\rangle^{\mathbf{u}}_{\mathrm{u}}$(**TRANS**($\varphi$)[u]) = V y $\langle \mathcal{C}, P\rangle^{\mathbf{u}}_{\mathrm{u}}$(**TRANS**($\psi$)[u]) = V [supuesto inductivo]

syss $\langle \mathcal{C}, g\rangle^{\mathbf{u}}_{\mathrm{u}}$(**TRANS**($\varphi$)[u] $\wedge$ **TRANS**(ψ)[u]) = V

syss $\langle \mathcal{C}, g\rangle^{\mathbf{u}}_{\mathrm{u}}$(**TRANS**($\varphi \wedge \psi$)[u]) = V.

(F6) $\langle \mathfrak{I}, \mathbf{u}\rangle \vDash \forall x\varphi$ *syss* para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$, $\langle \mathfrak{I}^{\mathbf{x}}_{\mathrm{x}}, \mathbf{u}\rangle \vDash \varphi$

syss para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$, $\langle \langle \mathcal{M}, g\rangle^{\mathbf{x}}_{\mathrm{x}}, \mathbf{u}\rangle \vDash \varphi$

syss para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$, $\langle \langle \mathcal{M}, g^{\mathbf{x}}_{\mathrm{x}}\rangle, \mathbf{u}\rangle \vDash \varphi$

syss para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$, $\langle \mathcal{C}, g^{\mathbf{x}}_{\mathrm{x}}\rangle^{\mathbf{u}}_{\mathrm{u}}$(**TRANS**($\varphi$)[u]) = V [supuesto inductivo]

syss para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$, $\langle \mathcal{C}, g\rangle^{\mathbf{x},\mathbf{u}}_{\mathrm{xu}}$(**TRANS**($\varphi$)[u]) = V

syss $\langle \mathcal{C}, g\rangle^{\mathbf{u}}_{\mathrm{u}}$($\forall$x**TRANS**($\varphi$)[u]) = V

syss $\langle \mathcal{C}, g\rangle^{\mathbf{u}}_{\mathrm{u}}$(**TRANS**($\forall x\varphi$)[u]) = V.

(F7) $\langle \mathfrak{I}, \mathbf{u}\rangle \vDash \forall X^n\varphi$ *syss* para todo $\mathbf{X}^n \in \mathbf{A}_n$, $\langle \mathfrak{I}^{\mathbf{X}^n}_{\mathrm{X}^n}, \mathbf{u}\rangle \vDash \varphi$

syss para todo $\mathbf{X}^n \in \mathbf{A}_n$, $\langle \langle \mathcal{M}, g\rangle^{\mathbf{X}^n}_{\mathrm{X}^n}, \mathbf{u}\rangle \vDash \varphi$

syss para todo $\mathbf{X}^n \in \mathbf{A}_n$, $\langle \langle \mathcal{M}, g^{\mathbf{X}^n}_{\mathrm{X}^n}\rangle, \mathbf{u}\rangle \vDash \varphi$

syss para todo $\mathbf{X}^n \in \mathbf{A}_n$, $\langle \mathcal{C}, g^{\mathbf{X}^n}_{\mathrm{X}^n}\rangle^{\mathbf{u}}_{\mathrm{u}}$(**TRANS**($\varphi$)[u]) = V [supuesto inductivo]

syss para todo $\mathbf{X}^n \in \mathbf{A}_n$, $\langle \mathcal{C}, g\rangle^{\mathbf{X}^n,\mathbf{u}}_{\mathrm{X}^n\mathrm{u}}$(**TRANS**($\varphi$)[u]) = V *syss* $\langle\mathcal{C},g\rangle^{\mathbf{u}}_{\mathrm{u}}(\forall X^n\mathbf{TRANS}(\varphi)[u]) = V$

syss $\langle\mathcal{C},g\rangle^{\mathbf{u}}_{\mathrm{u}}(\mathbf{TRANS}(\forall X^n\varphi)[u]) = V$.

(F8) $\langle\mathfrak{I},\mathbf{u}\rangle \vDash \Box\varphi$ *syss* para todo $\mathbf{v} \in \mathbf{W}$ tal que $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle \in \mathbf{R}$, $\langle\mathfrak{I},\mathbf{v}\rangle \vDash \varphi$

syss para todo $\mathbf{v} \in \mathbf{W}$ tal que $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle \in \mathbf{R}$, $\langle\mathcal{C},g\rangle^{\mathbf{v}}_{\mathrm{v}}(\mathbf{TRANS}(\varphi)[v]) = V$ [supuesto inductivo]

syss para todo $\mathbf{v} \in \mathbf{W}$, si $\langle\mathcal{C},g\rangle^{\mathbf{uv}}_{\mathrm{uv}}(Ruv) = V$ entonces $\langle\mathcal{C},g\rangle^{\mathbf{v}}_{\mathrm{v}}(\mathbf{TRANS}(\varphi)[v]) = V$

syss para todo $\mathbf{v} \in \mathbf{W}$, $\langle\mathcal{C},g\rangle^{\mathbf{uv}}_{\mathrm{uv}}(Ruv \rightarrow \mathbf{TRANS}(\varphi)[v]) = V$

syss $\langle\mathcal{C},g\rangle^{\mathbf{u}}_{\mathrm{u}}(\forall v(Ruv \rightarrow \mathbf{TRANS}(\varphi)[v])) = V$

syss $\langle\mathcal{C},g\rangle^{\mathbf{u}}_{\mathrm{u}}(\mathbf{TRANS}(\varphi)[u]) = V$.

(F9) $\langle\mathfrak{I},\mathbf{u}\rangle \vDash @_i\varphi$ *syss* $\langle\mathfrak{I},\mathbf{v}\rangle \vDash \varphi$, tal que $F(i) = \{\mathbf{v}\}$

syss $\langle\mathcal{C},g\rangle^{\mathbf{v}}_{\mathrm{v}}(\mathbf{TRANS}(\varphi)[v]) = V$ [supuesto inductivo]

syss $\langle\mathcal{C},g\rangle^{\langle\mathcal{C},P\rangle(i)}_{\mathrm{v}}(\mathbf{TRANS}(\varphi)[v]) = V$

syss $\langle\mathcal{C},g\rangle(\mathbf{TRANS}(\varphi)[v]i/v) = V$ [por el lema de sustitución]

syss $\langle\mathcal{C},g\rangle^{\mathbf{u}}_{\mathrm{u}}(\mathbf{TRANS}(@_i\,\varphi)[u]) = V$. ■

Corolario 0.1.

Sea $\mathfrak{I} = \langle\mathcal{M}, g\rangle$ y $\mathcal{M} = \langle\mathcal{A}, F\rangle$. Para todo $\mathcal{M} \in$ **ST**(**LHSO**), $\mathbf{u} \in \mathbf{W}$, $\varphi \in$ **FOR**(**LHSO**) y toda asignación g de $\boldsymbol{V}^{\#}$ en $\langle\mathbf{A}_n\rangle_{n\geq 1}$:

$\mathfrak{I} \vDash \varphi$ *syss* $\langle\mathbf{CONV_1}(\mathcal{M}),g\rangle\ (\forall u\mathbf{TRANS}(\varphi)[u]) = V$

para toda $\varphi \in$ **FOR**(**LHSO**). ■

Lema 1.

Sea $\mathfrak{I} = \langle\mathcal{M}, g\rangle$ y $\mathcal{M} = \langle\mathcal{A}, F\rangle$. Para todo $\mathcal{M} \in$ **ST**(**LHSO**), $\mathbf{u} \in \mathbf{W}$, $\varphi \in$ **FOR**(**LHSO**) y toda asignación g de $\boldsymbol{V}^{\#}$ en $\langle\mathbf{A}_n\rangle_{n\geq 1}$:

a) $\langle\mathcal{M},\mathbf{u}\rangle \vDash \varphi$ *syss* $\mathbf{CONV_1}(\mathcal{M})^{\mathbf{u}}_{\mathrm{u}}(\mathbf{TRANS}(\varphi)[u]) = V$

b) $\mathcal{M} \vDash \varphi$ *syss* $\mathbf{CONV_1}(\mathcal{M})(\forall u\mathbf{TRANS}(\varphi)[u]) = V$

para toda $\varphi \in$ **SEN**(**LHSO**). ■

Teorema 1.

Sea S* = $\mathbf{CONV}_1(\mathbf{G}(\mathbf{LM}^*))$.

$$\vDash \varphi \textit{ syss } \vDash_{S^*} \forall u \mathbf{TRANS}(\varphi)[u].$$

Prueba:

El **Teorema 1** se sigue del **Lema 1**. Ver el apartado 3.1.1. ■

Conclusión

A lo largo de este texto se han expuesto los conceptos y tesis fundamentales sobre los que se articula el estudio de la traducción lógica. El objetivo que así se ha perseguido es contribuir a la comprensión de su naturaleza y destacar su importancia, teórica y práctica, en el contexto intrínsecamente plural que hoy día caracteriza a la disciplina. Para ello, en primer lugar se ha ofrecido una visión panorámica de los orígenes y desarrollo de las traducciones en el siglo XX, prestando especial atención a las contribuciones de Kolmogorov y Gödel. En estos trabajos las traducciones consisten en funciones de un lenguaje en otro, empleadas con el fin de lograr una prueba relativa de consistencia. Sólo en el último tercio del siglo aparecieron las primeras propuestas de una definición formal, proporcionadas por Prawitz y Malmnäs, Wójcicki y Epstein. Partiendo de los casos históricos, todas consideran que una traducción es una función que preserva la relación de consecuencia, ya sea definida sintáctica o semánticamente.

También se ha prestado atención a las tres principales líneas de investigación que existen en la actualidad. Los estudios de teoría de categorías asumen la idea presente en las citadas definiciones. Un programa que alcanza su mayor grado de madurez y abstracción mediante los conceptos de sistema de consecuencia, institución y comorfismo. Su principal atractivo radica en la confección, posibilitada por estos últimos, de una definición general y precisa de lo que es una lógica y lo que es una traducción. Sin embargo, esa misma abstracción podría ser su punto débil. La idea de preservación *bajo morfismos* es muy específica y cabe preguntarse si es el tipo de preservación exigido por las traducciones. Por lo tanto, las dos líneas de investigación restantes, al fijarse en la gramática y, respectivamente, en la estructura de las pruebas y los modelos, podrían estar en una posición más ventajosa. El principal problema de la propuesta de Gabbay es la ausencia de un criterio que permita discriminar qué transformaciones entre SDE son traducciones y cuáles no. Por su parte, el enfoque semántico introducido desde la teoría de modelos da lugar a la identificación de las expresiones traducidas y traductoras en función de las entidades conjuntistas que denotan. Lo que quizá suponga un análisis más adecuado de lo que intuitivamente se entiende por una traducción. Además, en este caso, las investigaciones han generado procedimientos de traducción concretos. Así, la última parte del texto se ha dedicado al tratamiento pormenorizado de uno de ellos, el desarrollado por Manzano (1996, 2014), y se ha aplicado a la lógica híbrida de segundo orden.

La heterogeneidad de las formas de pensar en la traducción pone de manifiesto la necesidad de abrir un diálogo entre ellas, para así determinar sus puntos en común y sus diferencias. Lo más sensato parece ser la adopción de una actitud integradora, empleando los aspectos más prometedores de cada una en la creación de una teoría de la traducción o, al menos, de un campo de investigación unificado. Una labor demasiado ambiciosa para ser realizada en un trabajo de estas características y, probablemente, también para un único investigador en solitario. Por otra parte, los problemas encontrados a la hora de traducir la lógica híbrida de segundo orden han puesto serios límites a la tarea, que sólo es llevada a cabo hasta un nivel elemental, probando el **Teorema 1**. Esos problemas se deben al estado embrionario de la lógica en cuestión. Recuérdese que se ha creado como una restricción de la teoría de tipos híbrida, lo que provoca que el conocimiento sobre ella sea limitado. Para continuar con la traducción es necesario acotar un conjunto manejable de axiomas, describir con cuidado la clase de modelos que los satisface y definir el correspondiente cálculo. La prueba de completud para la teoría de tipos híbrida hace esperable la existencia de esos axiomas y también que el cálculo sea completo. Lo que, a su vez, haría posible extender la traducción hasta el nivel tres. Si se lograse, se obtendría directamente la prueba. De modo que el texto sienta las bases para una futura traducción completa.

A la luz de todo lo expuesto se concluye que: 1) como se ha dicho, los estudios sobre la traducción lógica conforman un campo rico, saludable y en expansión, pero no unificado. Este es uno de los retos al que han de hacer frente las investigaciones venideras; 2) la identidad de *una* lógica y la identidad de las traducciones están indisolublemente ligadas. Esta es una constante que se mantiene en las diferentes aproximaciones. Cada una de las tres posee un concepto propio de lo que es una lógica, el cual condiciona la forma de entender la traducción, ya que se trata de una relación entre ellas. A la inversa, las traducciones ayudan a comprender su parentesco y que factores son esenciales a las mismas. Quizá la excepción sea la teoría de modelos. En este caso, aunque su perspectiva semántica proporciona los cimientos para la traducción, esta no parece afectar demasiado a un concepto de lógica preexistente y bien asentado; 3) la traducción desempeña un importante papel en la prueba, mediante su transporte, de metapropiedades y metateoremas. Esto es evidente desde sus orígenes: las traducciones fueron creadas para construir pruebas relativas de consistencia. Actualmente, la teoría de categorías muestra cómo a través de la traducción se relacionan las propiedades de consistencia y expresividad. Así mismo, se ha visto con detalle como probar los teoremas de compacidad, Löwenheim-Skolem, corrección y completud empleando la traducción a la lógica multivariada. 4) De modo general se concluye que la traducción lógica es esencial, desde un punto de vista matemático, filosófico y aplicado, para la comprensión del actual estado de la disciplina y se destaca la necesidad de profundizar en su conocimiento

Referencias

ARECES, C., BLACKBURN, P., HUERTAS, A. & MANZANO, M. (2011) "Hybrid Type Theory: A Quartet in Four Movements". *Principia: An International Journal of Epistemology*, 15, 2: 225-247.

ARECES, C., BLACKBURN, P., HUERTAS, A. & MANZANO, M. (2014) "Completeness in Hybrid Type Theory". *Journal of Philosophical Logic*, 43: 209-238.

CARNIELLI, W. A. & D'OTTAVIANO, I. M. L. (1997) "Translations Between Logical Systems: «A Manifesto»". *Logic et Analyse*, 40, 57: 67-81.

CARNIELLI, W., CONIGLIO, M. E. & D'OTTAVIANO, I. M. L. (2009) "New Dimensions on Translations Between Logics". *Logica Universalis*, 3, 1: 1-18.

DE ARAUJO FEITOSA, H. & D'OTTAVIANO, I. M. L. (2002) "A busca por uma definição de tradução lógica". *Episteme. Filosofia e história das ciencias em revista*, 14: 139-70.

GABBAY, G. (1993) "Labelled Deductive Systems: A Position Paper". En: OIKKONEN, J. & VÄÄNÄNEN, J. (Eds.) *Logic Colloquium '90. ASL Summer Meeting in Helsinki*. Berlín-Heidelberg: Springer-Verlag, 66-88.

GABBAY, D. (1994) "What is a Logical System?". En: GABBAY, D. (Ed.) *What is a Logical System?*. Nueva York: Oxford University Press, 179-216.

GABBAY, D. (2014) "Introduction to Labelled Deductive Systems". En: GABBAY, D. & GUENTHNER, F. (Eds.) *Handbook of Philosophical Logic. Volume 17*. Dordrecht: Springer, 179-267.

GENTZEN, G. (1969) "On the Relation Between Intuitionist and Classical Arithmetic". En: SZABO, M. E. (Ed.) *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*. Amsterdam: North-Holland, 53-67.

GÖDEL, K. (1986a) "On Intuitionistc Arithmetic and Number Theory". En: FEFERMAN, S., DAWSON JR, J., KLEENE, S., MOORE, G. SOLOVAY, R. & VAN HEIJENOORT, J. (Eds.) *Kurt Gödel. Collected Works. Volume I. Publications 1929-1936*. Nueva York: Oxford University Press, 287-295.

GÖDEL, K. (1986b) "An Interpretation of the Intuitionistic Propositional Calculus". En: FEFERMAN, S., DAWSON JR, J., KLEENE, S., MOORE, G. SOLOVAY, R. & VAN HEIJENOORT, J. (Eds.) *Kurt Gödel. Collected Works. Volume I. Publications 1929-1936*. Nueva York: Oxford University Press, 301-303.

HENKIN, L. (1950) "Completeness in the Theory of Types". *Journal of Symbolical Logic*, 15, 2: 81-91.

HENKIN, L. (1953) "Banishing the Rule of Substitution for Functional Variables". *Journal of Symbolical Logic*, 18, 3: 201-208.

KOLMOGOROV, A. (1967) "On the Principple of the Excluded Middle". En: VAN HEIJENOORT, J. (Ed.) *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic 1879-1931*. Cambridge (Massachusetts): Harvard University Press, 414-437.

MANZANO, M. (1989) *Teoría de Modelos*. Madrid: Alianza.

MANZANO, M. (1996) *Extensions of First Order Logic*. Cambridge (Reino Unido): Cambridge University Press.

MANZANO, M. & URTUBEY, L. (2013) "Completeness, Translation and Logicality" [online]. *Scope of Logic Theorems*. Simposio llevado a cabo en el congreso Universal Logic, Río de Janeiro. Recuperado de: <https://www.uni-log.org/contest4.htmlhttps://www.uni-log.org/contest4.html>.

MANZANO, M. (2014) "April the 19th". En: MANZANO, M., SAIN, I. & ALONSO, E. (Eds.) *The Life and Work of Leon Henkin. Essays on His Contributions*. Switzerland: Birkhäuser, a.k.a. Springer, 265-278.

MESEGUER, J. (1989) "General Logics". En: EBBINGHAUS, H. D., FERNANDEZ-PRIDA, J., GARRIDO, M. & LASCAR, D. (Eds.) *Logic Colloquium '87: Proceedings of the Colloquium Held in Granada, Spain July 20-25, 1987*. Amsterdam: North-Holland, 275-329.

MOSSAKOWSKI, T., GOGUEN, J. A., DIACONESCU, R. & TARLECKI, A. (2007) "What is a Logic?". En: BEZIAU, J. Y. (Ed.) *Logica Universalis*. Birkhäuser, 111-134.

MOSSAKOWSKI, T., DIACONESCU, R. & TARLECKI, A. (2009) "What is a Logic Translation?". *Logica Universalis*, 3, 1: 95-124.

PRAWITZ, D. & MALMNÄS, P. E. (1968) "A Survey of Some Connections Between Classical, Intuitionistic and Minimal Logic". En: SCHMIDT, A., SCHÜTTE, K. & THIELE, H. J (Eds.) *Contributions to Mathematical Logic. Proceedings of the Logic Colloquium, Hannover 1966*. Amsterdam: North-Holland, 213-229.

VAN BENTHEM, J. (2011) "Correspondence Theory". En: GABBAY, D. & GUENTHNER, F. (Eds.) *Handbook of Philosophical Logic. Volume 3*. Países Bajos: Springer, 325-408.