

# Electrodinámica Cuántica Bidimensional: Sobre la Teoría del Efecto Hall Cuántico

Marina de la Torre Mayado

Area de Física Teórica

Departamento de Física, Ingeniería y Radiología Médica

Universidad de Salamanca

# Índice

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
El Efecto Hall Cuántico . . . . .	1
Electrodinámica Cuántica Bidimensional . . . . .	9
Plan del trabajo . . . . .	12
<b>I TEORIA CUANTICA DE CAMPOS DEL EFECTO HALL CUANTICO: GEOMETRIA PLANA</b>	<b>15</b>
<b>1 Mecánica Cuántica de un electrón en un Campo Magnético Homogéneo</b>	<b>17</b>
1.1 Ecuación de Schrödinger y Niveles de Landau . . . . .	17
1.1.1 Espectro y funciones de onda en el Gauge Simétrico . . . . .	18
1.1.2 Espectro y funciones de onda en el Gauge de Landau . . . . .	26
1.1.3 Traslaciones magnéticas. Simetrías $w_\infty$ y $W_\infty$ . . . . .	32
1.2 Ecuación de Dirac . . . . .	39
1.2.1 Espectro y funciones de onda en los gauge simétrico y de Landau . . . . .	41
1.2.2 Simetría de conjugación y modos cero. Masa: Asimetría y Flujo espectral . . . . .	47
1.2.3 Supersimetría . . . . .	54
<b>2 Electrodinámica Cuántica en el plano</b>	<b>61</b>
2.1 Formalismo de Feynman: Anomalías . . . . .	61
2.2 Formalismo Hamiltoniano . . . . .	78
2.2.1 Cuantificación Canónica. Análisis de simetrías . . . . .	79
2.2.2 Determinación de la conductividad Hall para el Efecto Hall Cuántico Entero . . . . .	94

2.2.3	Estado fundamental y conductividad Hall para el Efecto Hall Cuántico Fraccionario . . . . .	102
2.2.4	Impurezas y estados ligados: Localización y Mesetas . . . . .	106
<b>3</b>	<b>Teoría de Muchos Cuerpos</b>	<b>117</b>
3.1	Conexión entre el formalismo de Segunda Cuantización y la Teoría de R.B.Laughlin para el Efecto Hall Cuántico Fraccionario. . . . .	118
3.2	Método variacional . . . . .	129
3.3	Interpretación Topológica . . . . .	137
3.4	Cuasipartículas: El problema de la jerarquía . . . . .	149
 <b>II TEORIA CUANTICA DE CAMPOS DEL EFECTO HALL CUANTICO: SUPERFICIES DE RIEMANN</b>		<b>159</b>
<b>4</b>	<b>Inclusión de Fluxones</b>	<b>161</b>
4.1	Ecuación de Schrödinger . . . . .	162
4.2	Simetrías $w_\infty$ y $W_\infty$ con operadores singulares . . . . .	168
4.3	Ecuación de Dirac . . . . .	173
<b>5</b>	<b>Electrodinámica Cuántica sobre el plano con puntos marcados</b>	<b>179</b>
5.1	Estado fundamental para el Efecto Hall Cuántico Entero de <i>fermiones compuestos</i> . . . . .	180
5.2	Efecto Hall Cuántico Fraccionario: Parámetro de Orden y Confinamiento Oblicuo . . . . .	194
5.3	Teoría de Campos del Efecto Hall Cuántico: Vórtices de Chern-Simons	206
5.4	Teoría de Ginzburg-Landau y Dualidad . . . . .	225
<b>6</b>	<b>Electrodinámica Cuántica sobre el Toro</b>	<b>231</b>
6.1	Problema de Landau, operador de Dirac y funciones $\Theta$ . Fluxones. . . . .	232
6.2	Física de los operadores de Mumford: transformaciones de Galileo y grupo de Heisenberg . . . . .	250
6.3	Cálculo de la conductividad Hall . . . . .	255
6.4	Estados de Haldane-Rezayi. Fórmulas de adición . . . . .	260
6.5	Fibrados estables y conductividad del Efecto Hall Cuántico Fraccionario . . . . .	271
6.5.1	Dinámica del centro de masas . . . . .	271
6.5.2	Conductividad Hall como pendiente de un fibrado . . . . .	274

<b>Conclusiones</b>	<b>283</b>
<b>A Acción del Grupo de Heisenberg</b>	<b>285</b>
<b>B Soluciones de la Ecuación de Dirac en el plano</b>	<b>291</b>
B.1 El potencial inverso . . . . .	291
B.2 Ecuación de Dirac con campo magnético y un pozo esférico . . . . .	296
B.3 Ecuación de Dirac con campo magnético y potencial inverso . . . . .	306
<b>Bibliografía</b>	<b>309</b>

# Introducción

## El Efecto Hall Cuántico

### Historia del Efecto Hall Cuántico. Breve descripción experimental

En 1880 Edwin Herbert Hall estudió el comportamiento de una corriente, en una lámina de material conductor y bajo la influencia de un campo magnético perpendicular a la misma. Este experimento es conocido desde entonces como el Efecto Hall [53]. Cien años más tarde, K.von Klitzing, G.Dorda y M.Pepper, [72], descubrieron que el Efecto Hall, en condiciones de temperatura muy baja y campos magnéticos intensos, manifestaba características diferentes a las observadas por Hall, que lo identificaban como un fenómeno claramente cuántico. La trascendencia de este hallazgo fue reconocida, tan solo cinco años después, con la concesión del Premio Nobel de Física de 1985 a Klaus von Klitzing.

- El Efecto Hall ordinario se produce al aplicar un campo magnético perpendicular a una lámina conductora en la que tenemos un flujo de corriente. Se crea entonces un campo eléctrico perpendicular a ambos, ver Figura 0.1, [12]

Este campo, habitualmente denominado campo Hall, mantiene la dirección inicial de la corriente. Sobre cada electrón actúa la fuerza de Lorentz debida a la presencia del campo magnético constante, uniforme y perpendicular a la dirección del flujo; se produce de esta forma una acumulación de carga negativa en uno de los bordes de la lámina, y se crea, así, un campo eléctrico en la dirección perpendicular al flujo. La resistencia Hall se define como el cociente entre la tensión Hall, entre los bordes de la lámina, y la intensidad de corriente en la dirección perpendicular.

La fuerza de Lorentz que actúa sobre cada partícula cargada es:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e \left( \vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right) \quad (1)$$

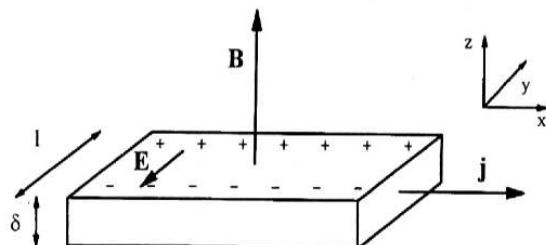


Figura 1: [12]. Efecto Hall ordinario: la muestra es una fina lámina metálica de anchura  $\delta$ . El campo magnético,  $\vec{B}$ , es uniforme y perpendicular a la lámina. La densidad de corriente,  $\vec{j}$ , paralela al eje  $OX$ , es estacionaria. El campo magnético desplaza las cargas creándose un campo eléctrico  $\vec{E}$  en la dirección  $OY$ . El voltaje Hall se mide en la dirección  $OY$ .

y la ley de Ohm (para procesos disipativos) resulta:

$$\vec{j} = \sigma_0 \left( \vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right) = \sigma_0 \left( \vec{E} - \frac{1}{nec} \vec{j} \times \vec{B} \right) \quad (2)$$

donde hemos utilizado  $\vec{j} = -ne\vec{v}$ ,  $n$  es la densidad de electrones y  $\sigma_0$  la conductividad para el vacío [132]. Cuando los campos eléctrico y magnético son constantes, y nos restringimos al plano perpendicular a  $\vec{B}$ , encontramos que el tensor de resistividad viene dado por:

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_0 & \frac{B}{nec} \\ -\frac{B}{nec} & \rho_0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

El tensor de conductividad es el inverso,  $\sigma = \rho^{-1}$ , y sus componentes son, por tanto,

$$\sigma_{xx} = \frac{\sigma_0}{1 + \left(\frac{\sigma_0 B}{nec}\right)^2}, \quad \sigma_{xy} = -\sigma_{yx} = \frac{\frac{\sigma_0 B}{nec}}{1 + \left(\frac{\sigma_0 B}{nec}\right)^2} \quad (4)$$

La resistencia Hall depende de la densidad de portadores, de la intensidad del campo magnético y de la anchura de la lámina ( $\delta$ ):

$$R_H = \frac{\rho_H}{\delta} = \frac{B}{nec\delta} \quad (5)$$

donde  $\rho_H = \rho_{xy}$ :

$$\rho_H = \frac{B}{nec} \quad (6)$$

La observación del efecto Hall ordinario requiere que la lámina de material conductor sea muy delgada, por este motivo fue tan difícil de observar hasta el experimento de E. H. Hall. La aplicación más importante de este efecto ha sido la determinación de la densidad de portadores de carga en materiales semiconductores [12].

- El efecto Hall Cuántico, sin embargo, se observa bajo condiciones muy distintas. La muestra es de material semiconductor; y en particular, en el primer experimento, se utilizaron transistores de efecto de campo de silicio (MOSFET o Si-MOSFET) [72], en los cuales es posible conseguir un gas bidimensional de electrones. Esta muestra se sometió a un campo magnético muy intenso (del orden de 15 T), perpendicular, y a temperaturas muy bajas (por debajo de los 2K). Bajo estas condiciones K.von Klitzing y sus colaboradores observaron que la resistividad Hall no variaba linealmente con el campo magnético, como se espera de la expresión (6), sino que aparecen una serie de mesetas en las cuales la resistividad es constante, e independiente de las características del experimento. Además, se observó que la conductividad longitudinal, en la dirección del flujo de corriente, se anula precisamente en los intervalos correspondientes a estas mesetas. En definitiva, la conductividad Hall aparecía cuantizada como un múltiplo entero de  $\frac{e^2}{h}$ , donde  $q = -e$ , ( $e > 0$ ) es la carga del electrón y  $h$  la constante de Planck. Las mesetas están separadas por intervalos de comportamiento normal, ver Figura 0.2, [107, 18]:

En los intervalos correspondientes a las mesetas el tensor de conductividad es:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & -i\frac{e^2}{h} \\ i\frac{e^2}{h} & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (7)$$

Y la resistencia Hall (que para una muestra bidimensional ( $\delta \rightarrow 0$ ) coincide con la resistividad) medida con una precisión mayor que  $10^{-8}$  es [107, 72]:

$$R_H \equiv \rho_H = \frac{h}{ie^2} \approx \frac{25812.80\Omega}{i}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (8)$$

Este resultado, observado experimentalmente, es sorprendente si tenemos en cuenta que la medida se realiza directamente sobre el material macroscópico, con toda la complejidad que ello implica. Hasta el descubrimiento de este efecto se pensaba que tanto la conductividad como la resistividad eran magnitudes que dependían de las características del material, así como de la temperatura, campo magnético, etc. En particular, la conductancia y la resistencia, que son las magnitudes medibles, dependían además de la geometría y del tamaño de la muestra

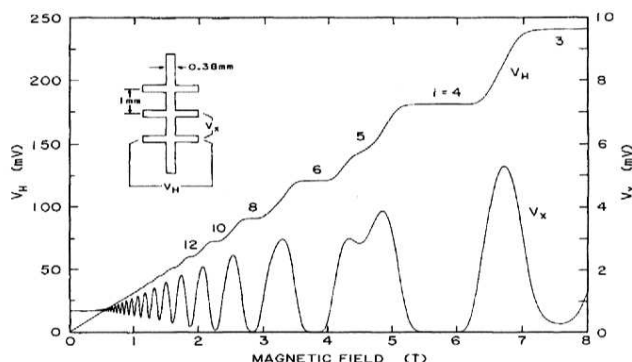


Figura 2: Representación de  $V_H$  y  $V_x$  frente a  $B$  para una heteroestructura enfriada a  $1.2K$ . La corriente es de  $25.5\mu A$  y la densidad de portadores  $n = 5.6 \cdot 10^{11}$  electrones/cm<sup>2</sup>. [18].

[18]. Sin embargo, bajo las condiciones expuestas para la observación del Efecto Hall Cuántico, esta dependencia desaparece dando lugar a cantidades constantes y cuantizadas. Se trata, pues, de un fenómeno universal.

Las muestras utilizadas en los experimentos del Efecto Hall Cuántico pertenecen a dos categorías diferentes. La primera está formada por los transistores de efecto de campo de metal-óxido de silicio, denominados MOSFET. En este dispositivo se consigue una fina lámina de electrones de conducción en la separación entre silicio dopado y óxido de silicio, que es un aislante. Esta muestra fué muy utilizada a principios de los ochenta, en particular en el experimento realizado por K. von Klitzing *et al.* La otra categoría está formada por las heterouniones. En este caso, la lámina de electrones se consigue en la separación entre arseniato de Galio, GaAs, y una aleación de arseniato de aluminio,  $Al_xGa_{1-x}As$ . Estas muestras son las utilizadas en los experimentos que se realizan hoy en día sobre el Efecto Hall Cuántico. La diferencia esencial entre ambas muestras es que los electrones tienen mucha más movilidad en las heterouniones, aunque, en ambos tipos de muestras, hay muchas fuentes de defectos que producen desorden microscópico, [107, 12].

Una de las aplicaciones inmediatas de este efecto es la determinación de la constante de estructura fina con una exactitud mayor que la obtenida en determinaciones anteriores [120]. La constante de estructura fina puede expresarse en términos de  $h/e^2$  y, por tanto, está directamente relacionada con la resistencia Hall



(8):

$$\alpha = \frac{\mu_0 c e^2}{2 h} = \frac{\mu_0 c}{2} \frac{1}{iR_H(i)} \quad (9)$$

donde la permeabilidad del vacío es  $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{H/m}$  y la velocidad de la luz  $c = 294792458 \text{m/s}$ , [18].

En resumen, la observación de las mesetas en el Efecto Hall Cuántico requiere varias condiciones:

- Crear un gas de electrones bidimensional.
  - Temperaturas muy bajas, del orden de muy pocos grados Kelvin.
  - Cierta grado de desorden producido por las impurezas.
  - Una muestra suficientemente grande.
  - Campos eléctricos poco intensos para producir la corriente en la muestra.
- En 1982, D.C. Tsui, H.L. Störmer y A.C. Gossard, [125], descubrieron algo aún más sorprendente. Repitiendo el experimento en heteroestructuras, GaAs – Al<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As, de alta calidad (con pocas impurezas), sometidas a campos magnéticos muy intensos y a temperaturas muy bajas, observaron una meseta para  $\frac{\sigma_H h}{e^2} = \frac{1}{3}$ , [125], con el correspondiente mínimo en la conductividad longitudinal. Aparece así el Efecto Hall Cuántico Fraccionario (el descubierto por Klitzing pasó a denominarse Efecto Hall Cuántico Entero). Posteriores experimentos mostraron la presencia de mesetas, en la conductividad Hall, para diferentes múltiplos fraccionarios de  $\frac{e^2}{h}$ . Algunos resultados experimentales pueden observarse en la Figura 0.3. 178-179 QHE o la de Jain

Los resultados más importantes relacionados con el Efecto Hall Cuántico Fraccionario son:

- El Efecto Hall Cuántico Fraccionario ha sido observado para muchas fracciones:  $\frac{\sigma_H h}{e^2} = \frac{p}{q}$ , con  $p$  y  $q$  enteros primos entre sí. Para todas ellas el denominador es impar. Recientemente se han observado algunas desviaciones de esta regla, que se asocian a la presencia de electrones con espín no polarizado [94].
- La observación de este efecto requiere muestras muy limpias (prácticamente sin impurezas), a diferencia del Efecto Entero, favorecido experimentalmente por la abundancia de impurezas hasta un límite en el que el efecto se destruye.

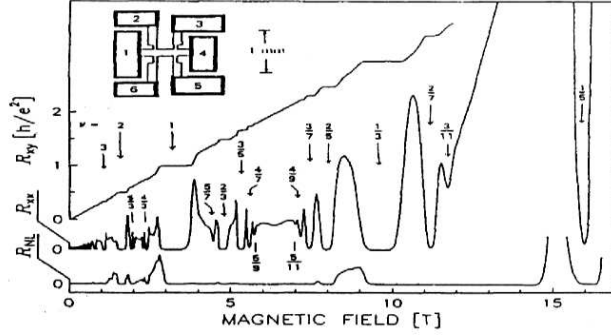


Figura 3: Representación de los resultados del experimento del Efecto Hall Cuántico, [66]. La geometría de la muestra puede verse en la gráfica. Las diferentes resistencias se definen de la forma: Resistencia Hall,  $R_{xy} = V_{26}/I_{14}$ ; resistencia longitudinal,  $R_{xx} = V_{23}/I_{14}$ ; y resistencia no local  $R_{NL} = V_{26}/I_{35}$ .  $V_{jk}$  denota la diferencia de potencial entre los lados  $j$  y  $k$ , e  $I_{ij}$  la corriente de  $i$  a  $j$ . El experimento fue realizado a 40 mK.

- Las mesetas aparecen en un orden definido a medida que se disminuye la temperatura, siendo más estables aquellas mesetas correspondientes a fracciones con denominador pequeño, esto permite establecer una “jerarquía” para las diferentes series de fracciones.
- En todas las muestras, la precisión en la medida de la conductividad Hall sobre las mesetas es mucho menor para valores fraccionarios, ( $10^{-5}$ ), que enteros, ( $10^{-8}$ ).

## Problemas teóricos a resolver

Hemos visto las principales características tanto del Efecto Hall ordinario como del Efecto Hall Cuántico Entero y Fraccionario. Si comparamos la expresión obtenida para la resistividad Hall, (6), en el efecto ordinario con la determinada experimentalmente en el Efecto Cuántico Entero, (8), resulta:

$$\rho_H = \frac{B}{nec} \equiv \frac{h}{ie^2} \implies i = \frac{n}{\left(\frac{eB}{hc}\right)} \quad (10)$$

o bien, en general para ambos efectos:

$$\rho_H = \frac{B}{nec} \equiv \frac{h}{fe^2} \implies f = \frac{n}{\left(\frac{eB}{hc}\right)} \quad (11)$$

aquí  $f$  será:  $f = i = 1, 2, \dots$  para el entero;  $f = \frac{p}{q}$ ,  $p$  y  $q$  enteros primos entre sí,  $q$  impar, para el fraccionario. Para poder interpretar este resultado debemos recurrir a la Mecánica Cuántica. El espectro continuo de una partícula cargada libre, en presencia de un campo magnético constante, da lugar a una serie de niveles de energía, igualmente espaciados y altamente degenerados, que son los conocidos niveles de Landau [76]. La densidad de estados posibles para cada nivel de Landau, por unidad de área, y por espín, es, precisamente:

$$n_B = \frac{eB}{hc} \quad (12)$$

Definimos el factor de llenado  $f$  como el cociente entre la densidad de electrones y la densidad de estados cuánticos posibles en la muestra. Es decir:

$$f = \frac{n}{n_B} \quad (13)$$

Esto conduce a una interpretación simple de  $i$  como el factor de llenado de los niveles de Landau. Es decir, cuando la densidad de electrones coincide exactamente con  $n = in_B$ , resulta que  $\sigma_H = \frac{ie^2}{h}$ , y  $\sigma_{xx} = 0$ , para el problema estacionario, resultado que se deduce de la expresión ordinaria del tensor de conductividad. Esta expresión se obtiene suponiendo un sistema ideal, perfectamente homogéneo, sin imperfecciones, y sin procesos de scattering de ningún tipo. Lógicamente, en las muestras reales esto no sucede, y experimentalmente se observa que la conductividad Hall toma el mismo valor ideal no sólo para  $f = i$  sino en todo un rango del factor de llenado  $f \approx i$ , [107].

En la Figura 0.4 representamos la conductividad Hall en unidades de  $\frac{e^2}{h}$  frente al factor de llenado  $f$  reproduciendo las observaciones experimentales del Efecto Hall Cuántico Entero.

De la observación de esta gráfica (Figura 0.4) podemos deducir que los principales problemas teóricos a resolver son:

- Por qué las mesetas aparecen exactamente para valores enteros del factor de llenado.
- Cómo aparecen las mesetas. Es decir, por qué la conductividad Hall mantiene su valor constante e igual a un múltiplo entero de  $\frac{e^2}{h}$  mientras varía el factor

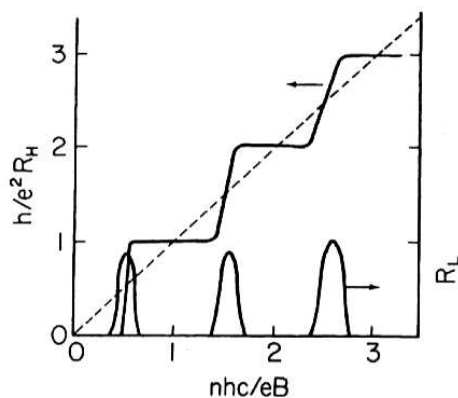


Figura 4: Representación esquemática de las observaciones en el Efecto Hall Cuántico Entero. La conductividad Hall está representada en unidades de  $\frac{e^2}{h}$  frente al factor de llenado  $\nu$ . La línea de puntos muestra la conductividad Hall para un sistema sin desorden. La conductividad directa se muestra en unidades arbitrarias. [12].

de llenado al variar la densidad de portadores, o la intensidad del campo magnético externo.

- Por qué la aparición de las mesetas está vinculada al hecho de que para esos valores del factor de llenado pueda producirse un flujo de corriente en la muestra sin pérdida disipativa. Es decir, la anulación de la conductividad longitudinal en el límite de temperatura cero correspondiente a cada meseta.

Por otro lado, el Efecto Hall Cuántico Fraccionario debe contemplarse en un contexto diferente. La interpretación del factor de llenado como el número de niveles de Landau ocupados no tiene sentido cuando tenemos un valor fraccionario del mismo, en ese caso tendríamos que hablar de la ocupación fraccionaria del primer nivel de Landau, que resulta ser altamente degenerado. En consecuencia, este fenómeno debe observarse como una manifestación del comportamiento peculiar de un sistema bidimensional cargado, en un campo magnético, donde se forma un nuevo tipo de estado fundamental de muchas partículas, como resultado de la interacción entre las mismas [81]. Para ciertos factores de llenado, el estado fundamental es un fluido incompresible mostrándose así la interacción repulsiva entre las partículas.

En resumen, para este efecto los problemas teóricos planteados son esencial-

mente los vistos para el entero, es decir,

- Por qué aparecen las mesetas para valores fraccionarios del factor de llenado.
- Cómo aparecen las mesetas cuando  $f \approx \frac{p}{q}$ .
- Por qué se produce el mínimo en la conductividad longitudinal correspondiente a cada meseta.

## Electrodinámica Cuántica Bidimensional

### Electrodinámica Cuántica Bidimensional: Anomalías, el Efecto Hall Cuántico y Fenómenos no perturbativos

En este trabajo abordaremos el estudio del Efecto Hall Cuántico en el contexto de la Electrodinámica Cuántica Bidimensional. Como elemento novedoso respecto de la mayoría de las teorías microscópicas sobre este efecto, nos centraremos en el estudio de la teoría relativista que describe la interacción entre el campo electromagnético y un campo fermiónico, sin masa, en  $(2 + 1)$  dimensiones. Este tipo de teorías gauge, para fermiones sin masa, confinados a un plano, en presencia de un campo gauge externo, presentan anomalías relacionadas con las divergencias infrarrojas propias de la teoría. Como han propuesto algunos autores, R. Jackiw y K. Johnson, [62, 70], existe una relación entre la anomalía encontrada para esta teoría y el efecto Hall Cuántico Entero y Fraccionario. Analizaremos esta relación pasando al problema en Segunda Cuantización tanto en el formalismo de Feynman como en el formalismo Hamiltoniano.

Aunque el Efecto Hall Cuántico es un fenómeno no-relativista, en este trabajo tomaremos un punto de vista relativista ya que los problemas teóricos fundamentales se explican igualmente en una teoría basada en la ecuación de Dirac, cuya Segunda Cuantificación lleva a la Electrodinámica Cuántica en  $(2+1)$  dimensiones, como partiendo de la ecuación de Schrödinger, ruta utilizada por los físicos de la materia condensada. Por supuesto, ellos obtienen las relaciones de dispersión correctas experimentalmente de las excitaciones colectivas en el sistema. Las ventajas de usar la versión relativista son de dos tipos:

- Habida cuenta que tanto la cuantificación de la conductividad Hall, como la existencia de mesetas tienen su origen en aspectos no perturbativos de naturaleza topológica, el uso del operador de Dirac permite utilizar el cuerpo

de doctrina elaborado por los físicos y matemáticos en los últimos veinticinco años en torno a los teoremas del índice y sus diversas materializaciones en la física de las teorías gauge. El operador de Schrödinger por el contrario no ha sido objeto de tanta atención por la comunidad físico-matemática.

- El punto de vista de atacar el problema planteado por el Efecto Hall Cuántico tanto Entero como Fraccionario desde la teoría relativista fue propuesto por R. Jackiw y K. Johnson [62, 70], quedándose en el aspecto más espectacular, el de la cuantificación de la conductividad Hall, pero en cierto modo más asequible. Dejaron así un terreno abierto que es el que nos proponemos explorar en esta memoria.

Para explicar fenómenos perturbativos, como la relación de dispersión de las excitaciones colectivas, bastará tomar en nuestro análisis el límite no-relativista.

Dedicaremos especial atención al formalismo Hamiltoniano que basaremos en el análisis detallado del operador de Dirac para una partícula cargada, sin masa, en presencia de un campo magnético uniforme. El estudio del operador de Dirac como base fundamental en nuestro trabajo permitirá la conexión con ideas matemáticas altamente sofisticadas (fibrados espinoriales, teoremas del índice, etc), así como analizar, en Segunda Cuantización, las simetrías discretas como paridad, inversión temporal y conjugación de carga, [59], con las peculiaridades propias de un sistema en  $(2 + 1)$  dimensiones que no aparecen en el problema más conocido en  $(3 + 1)$  dimensiones.

Abordaremos también en este contexto el problema crucial en la comprensión del Efecto Hall Cuántico Entero: la localización [107]. Estudiaremos, por tanto, el problema relativista en presencia de impurezas, descritas por potenciales de corto o de largo alcance, para explicar desde la electrodinámica cuántica la formación de las mesetas en el Efecto Hall Cuántico. En este punto, es conveniente analizar la conexión entre el problema de la localización y el origen topológico de la cuantización de la conductividad Hall, desarrollado por algunos autores como Thouless [124], etc. Daremos con precisión la estructura matemática subyacente a la propuesta de Thouless. De esta forma, encontraremos un punto de encuentro entre áreas de la Matemática Moderna, Topología Diferencial y Geometría Algebraica, y el marco teórico de sistemas electrónicos bidimensionales.

Por otro lado, el estudio de las simetrías propias del sistema, para una partícula, y en general, para muchas partículas, pone de manifiesto también el importante papel que juegan las álgebras infinito-dimensionales del tipo  $W$  en la comprensión

del efecto, como un fenómeno resultante del comportamiento colectivo de las partículas.

El elemento clave de la inteligencia del Efecto Hall Cuántico Fraccionario es un peculiar estado fundamental, de tipo variacional, consecuencia de una brillante inspiración de R. B. Laughlin [80]. Uno de los objetivos fundamentales de este trabajo es la identificación en Segunda Cuantización de dicho estado. Su naturaleza resulta así menos misteriosa, y la especial combinación de determinantes de Slater que en Teoría de Muchos Cuerpos obedece al estado de Laughlin, resulta más transparente en la formulación que se sigue de la Teoría Cuántica de Campos.

La interpretación sugerida en los trabajos de Girvin y McDonald, y Read, [46], acerca del estado de Laughlin como un nuevo tipo de fase, con analogías al confinamiento oblicuo que ha sido propuesto en teorías gauge por Cardy, Rabinovici y t'Hooft, [21, 121, 122], es altamente sugerente. Propuesto por los autores citados en primer lugar, sin utilizar los avances en el estudio de aspectos no perturbativos en Teoría Cuántica de Campos, que se sigue del segundo grupo de autores, en esta memoria continuaremos el trabajo iniciado por Girvin y MacDonald en el contexto riguroso desarrollado en Teorías Gauge. Encontraremos de esta forma que la inteligencia de este efecto requiere del estudio de una teoría topológica de campos de tipo Chern-Simons-Dirac, en la cual se pueden estudiar objetos con estadística "aniónica" presentes en las teorías sobre el Efecto Hall Cuántico Fraccionario.

El Efecto Hall Cuántico Fraccionario tiene también un origen topológico que debe abordarse en un contexto que requiere una fuerte componente geométrico-algebraica. Utilizaremos para este análisis la maquinaria completa que tenemos a nuestra disposición sobre superficies de Riemann y la Geometría Algebraica, dando así una detallada formulación matemática del problema de Landau sobre curvas elípticas y variedades algebraicas. De esta forma estudiaremos el papel que juegan los fibrados estables sobre variedades abelianas en conexión con el problema físico de la localización.

Alcanzaremos así el conocimiento de la conductividad Hall como la pendiente de un fibrado y por tanto, como un invariante topológico, según las ideas de Varnhagen [127], pero con muchísima más precisión, para poner en pie de igualdad el Efecto Hall Cuántico Fraccionario con el Entero, en el que la conductividad Hall es identificada como un invariante topológico por Thouless.

Por último, los resultados obtenidos en este contexto de electrodinámica cuántica bidimensional relativista deben compararse con aquellos que se conocen a partir de la teoría más común sobre este efecto, desarrollada en el marco de la física de

la materia condensada; para ello analizaremos el límite no-relativista de nuestra teoría.

## Plan del Trabajo

La organización de esta memoria es la siguiente:

Parte I: Teoría Cuántica de Campos del Efecto Hall Cuántico: Geometría plana.

Abordaremos en esta Parte el estudio de la Electrodinámica Cuántica en el plano, estructurada en tres Capítulos:

- En el primero de ellos analizaremos el problema de Landau y Landau-Dirac para una partícula en un campo magnético constante. Estableceremos, al mismo tiempo, la notación que se utilizará a lo largo de la memoria.

Determinaremos el espectro y las funciones de onda tanto para el operador de Schrödinger como para el de Dirac. Estudiaremos asimismo las simetrías propias del sistema en el marco señalado.

- En el segundo Capítulo desarrollaremos la Electrodinámica Cuántica en el plano, tanto en el Formalismo de Feynman como en el Formalismo Hamiltoniano. Obtendremos, de esta forma, las expresiones de la conductividad Hall cuantizada para los Efectos Entero y Fraccionario, ampliando las ideas sugeridas en [70].

Completaremos el Capítulo con un análisis detallado del problema de la localización, auténtica piedra angular de la inteligencia del Efecto Hall Cuántico.

- Finalizaremos la primera Parte con un Capítulo dedicado a la Teoría de muchos cuerpos. Conectaremos el formalismo de Segunda Cuantificación y la conocida Teoría de R. B. Laughlin para el Efecto Fraccionario [81]. Presentaremos una novedosa deducción de las funciones de Laughlin mediante un método variacional explícito para el caso de pocas partículas.

Relacionada con la localización, estudiada en el Capítulo anterior para el Efecto Entero, será la interpretación topológica, que desarrollará y ampliará las ideas de Thouless [124].

Por último, revisaremos el problema de la estadística fraccionaria característica del Efecto Fraccionario, con especial énfasis en el problema de la jerarquía.



Parte II: Teoría Cuántica de Campos del Efecto Hall Cuántico: Superficies de Riemann.

Abordaremos en esta Parte el estudio de la Electrodinámica Cuántica sobre Geometrías no triviales.

- En el Capítulo cuatro analizaremos la teoría de Jain [69], según la cual el Efecto Hall Cuántico Fraccionario es sino Efecto Hall Cuántico Entero de *fermiones compuestos*, electrones compuestos con “fluxones”, donde entendemos por “fluxones”, cuantos de campo magnético singulares con un flujo que es un múltiplo entero de  $\Phi_0 = \frac{hc}{e}$ . Determinaremos el espectro y los estados propios para una partícula en presencia de “fluxones” en los casos relativista y no-relativista, así como las simetrías de este sistema.
- En el siguiente Capítulo desarrollaremos la electrodinámica cuántica sobre el plano con puntos marcados, allí donde hay “fluxones”. Repetiremos así el esquema de la primera Parte para los *fermiones compuestos*.

Terminaremos el Capítulo definiendo de modo riguroso el operador de creación de éstos siguiendo los trabajos de t’Hooft y Wilson. Trataremos asimismo las diversas teorías de campos que dan lugar a estos objetos de estadística “aniónica”.

- Por último, dedicaremos el Capítulo sexto a conseguir una fórmula que permita expresar la conductividad Hall como un invariante topológico, de manera análoga a la fórmula de Kubo-Thouless del Efecto Entero. Esto requerirá estudiar el fenómeno en una red periódica. Plantearemos, por tanto, un estudio detallado de la electrodinámica cuántica sobre el toro, con un fuerte componente geométrico algebraico. Este será el marco natural del estudio del problema de muchas partículas que generaliza la teoría de Laughlin.

Se han incluido dos apéndices en la presente memoria. En el primero de ellos se detalla el mecanismo de extensión central en el tratamiento matemático clásico de las traslaciones en presencia de un campo magnético. En el segundo, se explicitan las soluciones de la ecuación de Dirac en presencia de diversos potenciales y del campo magnético, así como las diferentes técnicas de resolución de la misma.

En lo que respecta a las referencias bibliográficas, nos hemos decidido por incluir, al final de esta memoria, aquellas a las que hemos hecho referencia explícita en el desarrollo de la misma, y que constituyen tan sólo una parte de la abundantísima literatura científica que existe sobre este tema.



## Parte I

# TEORIA CUANTICA DE CAMPOS DEL EFECTO HALL CUANTICO: GEOMETRIA PLANA



# Capítulo 1

## Mecánica Cuántica de un electrón en un Campo Magnético Homogéneo

### 1.1 Ecuación de Schrödinger y Niveles de Landau

El Efecto Hall Cuántico ocurre sin ningún género de dudas cuando un gas de electrones se encuentra en presencia de un campo magnético transversal a la dirección de su movimiento en las circunstancias de bidimensionalidad, temperatura e intensidad del campo magnético explicadas en la Introducción. Mientras que la altísima degeneración de los niveles de Landau dan lugar al Efecto Hall Cuántico Enteroy para un gas libre de electrones, el Efecto Hall Cuántico Fraccionario ocurre cuando el gas de electrones incluye las interacciones Coulombianas a dos cuerpos. Antes de abordar el problema del sistema de muchas partículas es conveniente el estudio de cada uno de los componentes en estas circunstancias.

Comenzaremos, pues, con el problema de una partícula cargada en un campo magnético constante y uniforme. En esta situación y teniendo en cuenta que el campo magnético debe ser intenso para la observación del Efecto Hall Cuántico, supondremos que el espín tiene un papel conceptualmente menor; todo lo que ocurre es que cada nivel de energía sufre un desdoblamiento Zeeman de manera que se dobla el número de niveles de Landau, en particular se supone una perfecta polarización del espín para los niveles de Landau [107].

Tomemos el campo magnético homogéneo constante en la dirección perpendi-

cular al plano  $X_1 - X_2$ ,  $\vec{B} = -B\vec{k}$ , siendo  $B$  la intensidad del campo y  $\vec{k}$  un versor unitario en la dirección  $X_3$ .

El Hamiltoniano de Schödinger para una partícula cargada, sin espín, en presencia de este campo magnético, es

$$H = \frac{1}{2m} \left( \vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 \quad (1.1)$$

donde  $\vec{p}$  es el momento canónico en el plano, y  $\vec{A}$  el potencial vector, tal que,

$$B = \partial_2 A_1 - \partial_1 A_2 \quad (1.2)$$

Dado que el campo magnético es constante y uniforme, el potencial vector será de la forma:

$$A_i = \epsilon_{ij} \partial_j \chi, \quad i, j = 1, 2 \quad \text{con} \quad \chi(x_1, x_2) = \frac{B}{4} (x_1^2 + x_2^2) \quad (1.3)$$

Este es el gauge compacto o simétrico, rotacionalmente invariante. Por otro lado, el potencial vector puede elegirse también de la forma:

$$\tilde{A}_i = \epsilon_{ij} \partial_j \chi + \partial_i \phi, \quad i, j = 1, 2 \quad (1.4)$$

siendo

$$\chi(x_1, x_2) = \frac{B}{4} (x_1^2 + x_2^2) \quad \text{y} \quad \phi = \frac{B}{2} x_1 x_2$$

Este es el gauge de Landau, que difiere del simétrico en el gradiente de la función escalar  $\phi(x_1, x_2)$ . Ambos gauges cumplen la condición de Coulomb, [77],  $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ .

Este apartado permitirá establecer la notación que utilizaremos a lo largo de la memoria. En él plantearemos el cálculo del espectro y funciones de onda para el problema de una partícula en un campo magnético uniforme, en los dos gauges, simétrico y de Landau. Este problema, por otro lado, es bien conocido y fue resuelto por L.D. Landau en 1930, [76], pero nos interesa analizarlo en detalle por la importancia que tiene para el análisis posterior sobre el Efecto Hall Cuántico Entero y Fraccionario. Estudiaremos, también, las simetrías del sistema, es decir, las *traslaciones magnéticas*, así como la simetría  $W_\infty$  presente en este sistema, y su conexión con la simetría clásica  $w_\infty$  [19, 74].

### 1.1.1 Espectro y funciones de onda en el Gauge Simétrico

Hemos visto que el Hamiltoniano de un electrón en un campo magnético constante y homogéneo viene dado por (1.1), donde  $\vec{p}$  es el momento canónico, relacionado

con el momento cinético por

$$\vec{p} = m\vec{v} - \frac{e}{c}\vec{A} \quad (1.5)$$

tal que

$$[x_i, x_j] = [p_i, p_j] = 0 \quad , \quad [x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij} \quad i, j = 1, 2$$

Si elegimos el gauge simétrico, el potencial vector en componentes será:

$$A_1 = \frac{B}{2}x_2 \quad , \quad A_2 = -\frac{B}{2}x_1 \quad (1.6)$$

y de la condición de Coulomb resulta  $\vec{p} \cdot \vec{A} = \vec{A} \cdot \vec{p}$ , de forma que

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{e}{mc}\vec{p} \cdot \vec{A} + \frac{e^2}{2mc^2}\vec{A}^2$$

que, en coordenadas

$$H = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{e^2 B^2}{8mc^2}(x_1^2 + x_2^2) - \frac{eB}{2mc}L_3 \quad (1.7)$$

donde

$$L_3 = x_1 p_2 - x_2 p_1 \quad (1.8)$$

es la componente del momento angular en la dirección  $X_3$  [32]. Puede verse fácilmente de esta expresión que el operador  $L_3$  conmuta con el Hamiltoniano; en particular, podemos separar el Hamiltoniano en dos partes, el término que contiene el operador  $L_3$ , y los dos primeros sumandos que representan el movimiento en el plano  $X_1 - X_2$ . Nótese que esta última parte no es más que el Hamiltoniano de un oscilador armónico simple, en dos dimensiones, de frecuencia  $w = \frac{eB}{2mc}$  y que, por tanto, su energía será la suma de las energías de los dos osciladores armónicos (desacoplados) en cada una de las direcciones,  $X_1$  y  $X_2$ .

El espectro y las funciones de onda propias, para el problema estacionario, se deducen de la generalización de la ecuación de Schrödinger para el caso en que existe un campo magnético, así

$$H\Psi_\lambda = E_\lambda\Psi_\lambda$$

siendo  $H$  el operador (1.7).

Llevaremos a cabo el estudio del espectro y funciones de onda utilizando el método de operadores de Dirac que será apropiado para este sistema en el cual

aparecen términos en el Hamiltoniano del tipo oscilador armónico, [114]. Es conveniente, previamente, introducir coordenadas complejas en el plano, adecuadas en este gauge debido a la simetría rotacional, de esta forma:

$$\begin{aligned} z &= x_1 + ix_2 ; & \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} - i \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \\ \bar{z} &= x_1 - ix_2 ; & \frac{\partial}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \end{aligned} \quad (1.9)$$

si definimos

$$\begin{aligned} p_{\bar{z}} &= \frac{1}{2}(p_1 + ip_2) & ; & & A &= A_1 + iA_2 \\ p_z &= \frac{1}{2}(p_1 - ip_2) & ; & & \bar{A} &= A_1 - iA_2 \end{aligned} \quad (1.10)$$

tales que

$$\begin{aligned} [z, \bar{z}] &= [p_z, p_{\bar{z}}] = 0 = [z, p_{\bar{z}}] = [\bar{z}, p_z] ; \\ [z, p_z] &= [\bar{z}, p_{\bar{z}}] = i\hbar \end{aligned}$$

el campo magnético será

$$B = i \left( \frac{\partial}{\partial z} A - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \bar{A} \right)$$

y el operador momento angular en la dirección de éste

$$L_3 = \hbar \left( z \frac{\partial}{\partial z} - \bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)$$

Introducimos los operadores de creación y destrucción en el plano

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{1}{\sqrt{2}l} \left( x_i + l^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \\ a_i^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}l} \left( x_i - l^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \right) , & i &= 1, 2 \end{aligned} \quad (1.11)$$

tales que

$$\begin{aligned} [a_i, a_j^\dagger] &= \delta_{ij} \\ [a_i, a_j] &= [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0 , & i, j &= 1, 2 \end{aligned} \quad (1.12)$$

donde  $l^2 = \frac{\hbar}{mw}$  es la longitud magnética para la frecuencia  $w = \frac{eB}{2mc}$ , y es la escala de longitud fundamental asociada al problema.



En función de estos operadores podemos definir el operador número total,  $N$ , y el operador asociado a la tercera componente del momento angular,  $L$ , ( $L_3 = \hbar L$ ),

$$\begin{aligned} N &= a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 \\ L &= i(a_1^\dagger a_2 - a_2^\dagger a_1) \end{aligned} \quad (1.13)$$

se deduce fácilmente que el operador Hamiltoniano es

$$H = \hbar\omega(N - L + 1) \quad (1.14)$$

Tomando como observables  $N$  y  $L$ , que claramente conmutan entre sí, podemos encontrar una base de estados propios de ambos en la cual calcularemos el espectro para el Hamiltoniano, así, sea:  $\{|n, m\rangle, \langle n', m'|n, m\rangle = \delta_{nn'}\delta_{mm'} \forall n, m\}$ , una base ortonormal de estados propios, tal que

$$\begin{aligned} N |n, m\rangle &= n |n, m\rangle \\ L |n, m\rangle &= m |n, m\rangle \end{aligned} \quad (1.15)$$

Para analizar qué valores pueden tomar los números cuánticos  $n$  y  $m$  es conveniente introducir los operadores escalera:

$$\begin{aligned} L_+^+ &= a_1^\dagger + ia_2^\dagger & , & & L_-^+ &= a_1^\dagger - ia_2^\dagger \\ L_-^- &= a_1 - ia_2 & , & & L_+^- &= a_1 + ia_2 \end{aligned} \quad (1.16)$$

tales que

$$[L_-^-, L_+^+] = [L_+^-, L_-^+] = 2$$

y los demás conmutadores cero. En función de estos operadores

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{2} (L_+^+ L_-^- + L_-^+ L_+^-) \\ L &= \frac{1}{2} (L_+^+ L_-^- - L_-^+ L_+^-) \end{aligned}$$

que sobre la base tomada actúan de la forma

$$\begin{aligned} L_+^+ |n, m\rangle &= \sqrt{n+m+2} |n+1, m+1\rangle \\ L_-^- |n, m\rangle &= \sqrt{n+m} |n-1, m-1\rangle \\ L_-^+ |n, m\rangle &= \sqrt{n-m+2} |n+1, m-1\rangle \\ L_+^- |n, m\rangle &= \sqrt{n-m} |n-1, m+1\rangle \end{aligned} \quad (1.17)$$

Se deduce de estas relaciones que  $L_-^-$  y  $L_+^-$  actúan como operadores de destrucción, y así  $n \geq m$  y  $n \geq -m$ , por tanto,  $n$  es un entero no negativo, y  $m$  puede tomar cualquier valor entero con la condición  $n \geq |m|$ . Por otro lado,  $L_+^+$  y  $L_-^+$  son operadores de creación, y en general, resulta que  $n - m = 2k$ , con  $k$  entero no negativo.

En definitiva, en función de estos operadores el Hamiltoniano será

$$H = \hbar\omega(L_-^+L_+^- + 1) \quad (1.18)$$

y los niveles de energía vendrán caracterizados por los números cuánticos  $n$  y  $m$ . Es decir, el espectro será

$$E_{nm} = \hbar\omega(n - m + 1), \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad |m| \leq n \quad (1.19)$$

Si representamos los valores propios de  $L$  frente a los de  $N$  tenemos todos los estados posibles en esta representación. Podemos ver claramente cómo cada nivel de energía, que caracterizaremos por  $k$  ( $n - m = 2k$ ), está degenerado y además observamos cómo los operadores  $L_+^+$  y  $L_-^-$  actúan en un mismo nivel de energía, mientras que  $L_-^+$  y  $L_+^-$  pasan de uno a otro, ver Figura 1.1:

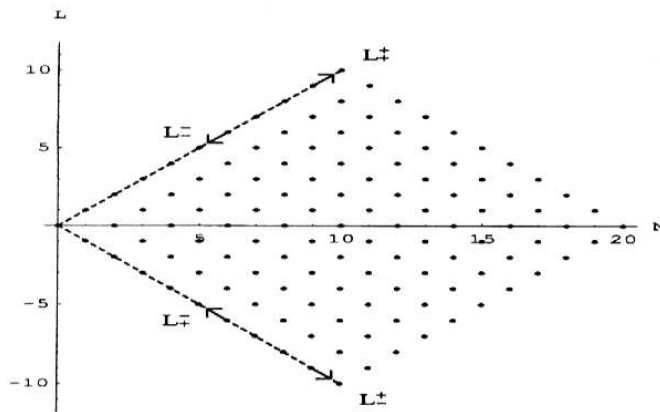


Figura 1.1: Estados de Landau en el gauge simétrico. Los estados  $|n, n\rangle$  corresponden al primer nivel de Landau,  $k = 0$ . Los operadores  $L_+^+$  y  $L_-^-$  actúan dentro del mismo nivel de Landau, mientras que  $L_-^+$  y  $L_+^-$  pasan de un nivel de Landau a otro.

Una vez determinado el espectro pasemos al cálculo de las funciones de onda. Comencemos con el primer nivel de Landau o nivel fundamental; el estado  $|0, 0\rangle$  es aniquilado por  $L_+^-|0, 0\rangle = 0$  y  $L_-^+|0, 0\rangle = 0$ . Expresando los operadores escalera en representación de coordenadas

$$\begin{aligned}
 L_+^+ &= \frac{1}{\sqrt{2l}} \left( z - 2l^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) & L_-^+ &= \frac{1}{\sqrt{2l}} \left( \bar{z} - 2l^2 \frac{\partial}{\partial z} \right) \\
 L_-^- &= \frac{1}{\sqrt{2l}} \left( \bar{z} + 2l^2 \frac{\partial}{\partial z} \right) & L_+^- &= \frac{1}{\sqrt{2l}} \left( z + 2l^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)
 \end{aligned} \tag{1.20}$$

resulta la ecuación diferencial

$$\begin{aligned}
 \langle z, \bar{z} | L_+^- | 0, 0 \rangle &= 0 \\
 \frac{1}{\sqrt{2l}} \left( z + 2l^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \Psi_{00}(z, \bar{z}) &= 0
 \end{aligned} \tag{1.21}$$

y la función de onda normalizada será, por tanto,

$$\Psi_{00}(z, \bar{z}) = \frac{1}{l\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2l^2} z \bar{z}} \tag{1.22}$$

con  $E_{00} = \hbar w$ . Todos los estados que se obtienen a partir de éste aplicando el operador de creación  $L_+^+$  sucesivamente tienen exactamente la misma energía, luego vemos que el estado fundamental está degenerado, y además la degeneración es infinita; en particular, todos los estados de la forma

$$|m, m\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^m m!}} (L_+^+)^m |0, 0\rangle$$

tienen la misma energía  $E_{0m} = \hbar w$ . En representación de coordenadas las funciones de onda normalizadas para el estado fundamental, caracterizadas por el momento angular  $m = 0, 1, 2, \dots$ , son

$$\Psi_{0m}(z, \bar{z}) = \frac{1}{l^{m+1} \sqrt{\pi m!}} z^m e^{-\frac{1}{2l^2} z \bar{z}} \tag{1.23}$$

Los demás niveles de Landau se calculan de forma similar; así, a partir del estado fundamental, tenemos

$$|n', m'\rangle \equiv |m+n, m-n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} (L_-^+)^n |0, m\rangle$$

con  $E_{n'm'} = \hbar w(2n+1)$ , que en representación de coordenadas será

$$\Psi_{n'm'}(z, \bar{z}) = \frac{1}{l^{n+m+1} 2^n \sqrt{\pi n! m!}} \left( \bar{z} - 2l^2 \frac{\partial}{\partial z} \right)^n z^m e^{-\frac{1}{2l^2} z \bar{z}} \tag{1.24}$$

$$\int \frac{dz d\bar{z}}{2i} \Psi_{nm}^*(z, \bar{z}) \Psi_{n'm'}(z, \bar{z}) = \delta_{nn'} \delta_{mm'} \tag{1.25}$$

Tenemos así un conjunto completo de funciones de onda normalizadas y ortogonales, que describen completamente el sistema. Además, al igual que el primer nivel de Landau, todos los demás niveles están degenerados.

Una representación equivalente a la estudiada se utiliza a menudo en este gauge y nos será de utilidad más adelante. Si definimos los operadores  $a$  y  $a^\dagger$  de la forma

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2l} \left( z + 2l^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \\ a^\dagger &= \frac{1}{2l} \left( \bar{z} - 2l^2 \frac{\partial}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (1.26)$$

con  $[a, a^\dagger] = 1$ , resultará

$$H = \hbar w (2a^\dagger a + 1) \equiv \hbar w_c (a^\dagger a + \frac{1}{2}) \quad (1.27)$$

donde  $w_c = \frac{eB}{mc}$  es la frecuencia ciclotrón para un oscilador armónico unidimensional. Es decir, se trata del Hamiltoniano de un oscilador armónico unidimensional, de frecuencia  $w_c$ , que puede expresarse en función del operador número:  $\bar{N} = a^\dagger a$ .

El operador asociado al momento angular en la dirección  $X_3$  en esta representación viene dado por:

$$L = b^\dagger b - a^\dagger a \quad (1.28)$$

donde los operadores  $b$  y  $b^\dagger$  se definen

$$\begin{aligned} b^\dagger &= \frac{1}{2l} \left( z - 2l^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \\ b &= \frac{1}{2l} \left( \bar{z} + 2l^2 \frac{\partial}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (1.29)$$

con  $[b, b^\dagger] = 1$ . Claramente  $[H, L] = 0$ .

Estos operadores,  $a, a^\dagger$  y  $b, b^\dagger$ , no son más que una reparametrización de los operadores escalera introducidos. Si tomamos como observables  $\bar{N}$  y  $L$  podemos encontrar una base ortonormal de estados propios  $\{|k, m\rangle, \langle k', m'|k, m\rangle = \delta_{kk'}\delta_{mm'}, \forall k, m\}$ , de forma que (ver Figura 1.2)

$$\begin{aligned} a |k, m\rangle &= \sqrt{k} |k-1, m+1\rangle \\ a^\dagger |k, m\rangle &= \sqrt{k+1} |k+1, m-1\rangle \\ b |k, m\rangle &= \sqrt{k+m} |k, m-1\rangle \\ b^\dagger |k, m\rangle &= \sqrt{k+m+1} |k, m+1\rangle \end{aligned} \quad (1.30)$$

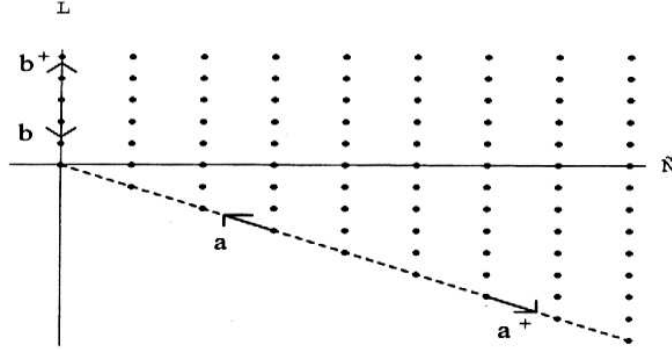


Figura 1.2: Estados de Landau en el gauge simétrico. Los estados  $|0, m\rangle$  corresponden al primer nivel de Landau,  $k = 0$ . Los operadores  $b$  y  $b^\dagger$  actúan dentro del mismo nivel de Landau, mientras que  $a$  y  $a^\dagger$  pasan de un nivel de Landau a otro.

El espectro vendrá determinado por los números cuánticos  $k$  y  $m$ , donde  $k$  es un entero no negativo, y  $m$  es un entero, tal que,  $k \geq -m$ ,

$$E_{km} = \hbar\omega(2k + 1) \equiv \hbar\omega_c\left(k + \frac{1}{2}\right) \quad (1.31)$$

En representación de coordenadas las funciones de onda ortonormales son

$$\begin{aligned} \Psi_{km}(z, \bar{z}) &= \langle z, \bar{z} | \frac{1}{\sqrt{k!(k+m)!}} a^{\dagger k} b^{\dagger k+m} |0, 0\rangle \\ \Psi_{km}(z, \bar{z}) &= \frac{(-1)^k}{l^{m+1}} \sqrt{\frac{k!}{\pi(m+k)!}} z^m L_k^m\left(\frac{z\bar{z}}{l^2}\right) e^{-\frac{1}{2l^2}z\bar{z}} \end{aligned} \quad (1.32)$$

donde  $L_k^m(x)$  son los polinomios generalizados de Laguerre, [1].

Tenemos, por tanto, que el espectro para el problema de Landau está formado por niveles de energía degenerados, llamados niveles de Landau. Esta degeneración es infinita, y está determinada por el número cuántico  $m$ , que toma todos los valores enteros con  $m \geq -k$  para cada nivel de energía  $k$ .

La densidad de estados posibles para el primer nivel de Landau puede calcularse a partir de la densidad de probabilidad para cada estado degenerado en la energía, así

$$\sum_{m=0}^{\infty} \Psi_{0m}^*(z, \bar{z}) \Psi_{0m}(z, \bar{z}) = \frac{eB}{hc} \quad (1.33)$$

En general, para cualquier nivel de Landau, puede comprobarse fácilmente que

$$\sum_{m=-k}^{\infty} \Psi_{km}^*(z, \bar{z}) \Psi_{km}(z, \bar{z}) = \frac{eB}{hc} \quad (1.34)$$

En definitiva, el número de estados posibles, por unidad de área y por espín, para cada nivel de Landau es constante y proporcional a la intensidad del campo magnético:

$$n_B = \frac{eB}{hc} \quad (1.35)$$

### 1.1.2 Espectro y funciones de onda en el Gauge de Landau

En el gauge de Landau el potencial vector es

$$A_1 = Bx_2 \quad , \quad A_2 = 0 \quad (1.36)$$

y el Hamiltoniano para una partícula cargada en un campo magnético constante y homogéneo  $B$ , en coordenadas, será

$$H = \frac{1}{2m} \left( p_1 + \frac{eB}{c} x_2 \right)^2 + \frac{1}{2m} p_2^2 \quad (1.37)$$

donde  $p_i = m\dot{x}_i - \frac{e}{c} A_i$  es el momento canónico, tal que,  $[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$ .

El operador  $p_1$  conmuta con el Hamiltoniano, y por tanto, la componente en la dirección  $X_1$  del momento lineal generalizado (momento canónico) se conserva. En el estudio del problema espectral

$$H\Phi_\lambda = E_\lambda\Phi_\lambda$$

buscamos funciones de onda propias del Hamiltoniano y del operador  $p_1$  que formen un sistema completo de observables compatibles para este sistema. Siguiendo paralelamente el estudio realizado en el gauge simétrico, introducimos los operadores de creación y destrucción

$$\begin{aligned} \tilde{a} &= i\sqrt{\frac{m\omega_c}{2\hbar}} \left( x_2 + \frac{i}{m\omega_c} (p_2 - ip_1) \right) \\ \tilde{a}^\dagger &= -i\sqrt{\frac{m\omega_c}{2\hbar}} \left( x_2 - \frac{i}{m\omega_c} (p_2 + ip_1) \right) \end{aligned} \quad (1.38)$$

$$[\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger] = 1$$

donde  $w_c = \frac{eB}{mc}$  es la frecuencia ciclotrón para un oscilador armónico unidimensional.

El Hamiltoniano en esta representación será

$$H = \hbar w_c \left( \tilde{a}^\dagger \tilde{a} + \frac{1}{2} \right) \quad (1.39)$$

Los observables para este sistema en el gauge de Landau son el operador número  $\tilde{N} = \tilde{a}^\dagger \tilde{a}$  y  $p_1$ . Si tomamos una base ortonormal de estados propios de ambos  $\{|\tilde{n}, p_1\rangle\}$ ,  $\langle \tilde{n}, p_1 | \tilde{n}', p_1' \rangle = \delta_{\tilde{n}\tilde{n}'} \delta(p_1 - p_1') \forall \tilde{n}, p_1$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{N}|\tilde{n}, p_1\rangle &= \tilde{n}|\tilde{n}, p_1\rangle \\ p_1|\tilde{n}, p_1\rangle &= p_1|\tilde{n}, p_1\rangle \end{aligned} \quad (1.40)$$

el espectro será

$$E_{\tilde{n}p_1} = \hbar w_c \left( \tilde{n} + \frac{1}{2} \right) \quad (1.41)$$

donde  $\tilde{n}$  es un entero no negativo, y  $p_1$  es un número real que puede tomar cualquier valor en el rango  $-\infty < p_1 < \infty$ . La energía para cada nivel de Landau no depende de  $p_1$  lo cual refleja la degeneración infinita característica de este sistema cuántico.

Veamos cuáles son las funciones de onda en este gauge. Para el primer nivel de Landau tenemos  $\tilde{a}|0, p_1\rangle = 0$  que en coordenadas

$$\begin{aligned} \langle x_1, x_2 | \tilde{a} | 0, p_1 \rangle &= 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}l_c} \left( x_2 + l_c^2 \left( \frac{\partial}{\partial x_2} - i \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \right) \Phi_{0p_1}(x_1, x_2) &= 0 \end{aligned} \quad (1.42)$$

con  $l_c^2 = \frac{\hbar}{mw_c}$  la longitud magnética característica de un oscilador armónico unidimensional de frecuencia  $w_c$ . Para resolver esta ecuación diferencial, puesto que  $\Phi_{0p_1}(x_1, x_2)$  es propia de  $p_1$ , tomamos

$$\Phi_{0p_1}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\frac{p_1}{\hbar}x_1} \phi_{0p_1}(x_2)$$

y la ecuación diferencial en  $x_2$  es

$$\left( x_2 + k_1 l_c^2 + l_c^2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \phi_{0k_1}(x_2) = 0$$

donde  $k_1 = \frac{p_1}{\hbar}$ .

Luego,  $\phi_{0k_1}(x_2)$ , no es más que el estado fundamental para el Hamiltoniano de un oscilador armónico en la dirección  $X_2$ , de frecuencia  $w_c$ , y desplazado del origen a  $x_{20} = -k_1 l_c^2$ , es decir,

$$H_{k_1} = \frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{2} m w_c^2 (x_2 + k_1 l_c^2)^2 \quad (1.43)$$

que puede expresarse

$$H_{k_1} = \hbar\omega_c \left( \tilde{a}_2^\dagger \tilde{a}_2 + \frac{1}{2} \right) \quad (1.44)$$

con

$$\begin{aligned} \tilde{a}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}l_c} \left( (x_2 + k_1 l_c^2) + l_c^2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \\ \tilde{a}_2^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}l_c} \left( (x_2 + k_1 l_c^2) - l_c^2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \end{aligned} \quad (1.45)$$

El espectro para este operador es el calculado, y las funciones de onda normalizadas son:

$$\phi_{0k_1}(x_2) = \frac{1}{\pi^{1/4} \sqrt{l_c}} e^{-\frac{1}{2l_c^2}(x_2+k_1 l_c^2)^2} \quad (1.46)$$

$$\phi_{\tilde{n}k_1}(x_2) = \frac{1}{\sqrt{\tilde{n}!}} \left( \tilde{a}_2^\dagger \right)^{\tilde{n}} \phi_{0k_1}(x_2)$$

$$\phi_{\tilde{n}k_1}(x_2) = \frac{1}{\pi^{1/4} \sqrt{2^{\tilde{n}} l_c \tilde{n}!}} H_{\tilde{n}} \left( \frac{x_2 + k_1 l_c^2}{l_c} \right) e^{-\frac{1}{2l_c^2}(x_2+k_1 l_c^2)^2} \quad (1.47)$$

donde  $H_{\tilde{n}}(x)$  es el polinomio de Hermite de grado  $\tilde{n}$ , [115].

Resulta, pues, para el primer nivel de Landau que la función de onda normalizada es,

$$\Phi_{0k_1}(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi^{1/4} \sqrt{2\pi l_c}} e^{ik_1 x_1} e^{-\frac{1}{2l_c^2}(x_2+k_1 l_c^2)^2} \quad (1.48)$$

con  $E_{0k_1} = \frac{\hbar\omega_c}{2}$ . El estado fundamental está degenerado, y la degeneración viene determinada ahora por  $k_1$  que toma valores en el continuo,  $-\infty < k_1 < \infty$ .

Los demás niveles de Landau se obtienen a partir del fundamental, y así,

$$\Phi_{\tilde{n}k_1}(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi^{1/4} \sqrt{2^{\tilde{n}+1} \pi l_c \tilde{n}!}} e^{ik_1 x_1} H_{\tilde{n}} \left( \frac{x_2 + k_1 l_c^2}{l_c} \right) e^{-\frac{1}{2l_c^2}(x_2+k_1 l_c^2)^2} \quad (1.49)$$

Cada nivel de Landau está degenerado, igual que vimos en el gauge simétrico, aunque con la diferencia esencial de que en el gauge de Landau esta degeneración, infinita, es la del continuo, mientras que en el simétrico es una degeneración infinita pero discreta y numerable.

No obstante, la degeneración (en este gauge) se convierte en discreta si suponemos que el movimiento en el plano está limitado a una superficie suficientemente grande, pero de área finita  $A = L_1 L_2$ , e imponemos condiciones de periodicidad en la dirección  $X_1$ , resultará así que los valores posibles de  $k_1$  son  $k_1 = \frac{2\pi q}{L_1}$ , con  $q \in Z$ , [89].



Además, serán posibles sólo aquellos valores de  $k_1$  para los cuales  $0 < k_1 l_c^2 < L_2$ , es decir, el número de estados posibles para cada nivel de Landau será:  $\frac{L_1 L_2}{2\pi l_c^2}$ , y por tanto, la densidad de estados, por unidad de área y por espín, es

$$n_B = \frac{1}{2\pi l_c^2} = \frac{eB}{hc}$$

exactamente la expresión obtenida en el gauge simétrico (1.35). Luego, la intensidad del campo magnético aplicado de alguna manera controla el número de estados posibles para cada nivel de Landau como si se tratara de una presión externa.

Hemos estudiado el espectro y las funciones de onda para el problema de una partícula cargada en presencia de un campo magnético uniforme en los dos gauges, simétrico y de Landau. La conexión entre ambos es inmediata si tenemos en cuenta que el potencial vector en el gauge de Landau puede obtenerse a partir del simétrico por la transformación,

$$\begin{aligned} \tilde{A}_i &= A_i + \partial_i \phi \\ A_i &= \frac{B}{2} \epsilon_{ij} x_j, \quad i, j = 1, 2, \quad , \quad \phi(x_1, x_2) = \frac{B}{2} x_1 x_2 \end{aligned} \quad (1.50)$$

Esta transformación gauge para el potencial vector se traduce en una transformación sobre las funciones de onda dada por el operador unitario, [114],

$$\mathcal{G} = e^{-i \frac{e}{\hbar c} \phi(x_1, x_2)} = e^{-i \frac{eB}{2\hbar c} x_1 x_2} \quad (1.51)$$

de manera que

$$\tilde{\Psi}(x_1, x_2) = \mathcal{G} \Psi(x_1, x_2) \quad (1.52)$$

El espectro en ambos gauges es el mismo, pues el Hamiltoniano es invariante gauge, sin embargo, la degeneración de cada nivel de energía viene caracterizada en cada caso por los autovalores de un operador, que en el gauge simétrico es la componente del momento angular en la dirección del campo magnético, mientras que en el de Landau se trata del momento canónico en una de las direcciones del plano, estos operadores no son invariantes bajo esta transformación.

Los operadores  $a$  y  $a^\dagger$  se transforman de la forma,

$$\begin{aligned} \tilde{a} &= \mathcal{G} a \mathcal{G}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2} l_c} \left( i \operatorname{Im}(z) + 2l_c^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \\ \tilde{a}^\dagger &= \mathcal{G} a^\dagger \mathcal{G}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2} l_c} \left( -i \operatorname{Im}(z) - 2l_c^2 \frac{\partial}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (1.53)$$

y así, el Hamiltoniano

$$\tilde{H} = \mathcal{G}H\mathcal{G}^\dagger = \hbar\omega_c(\tilde{a}^\dagger\tilde{a} + 1/2)$$

que como vemos es invariante bajo esta transformación.

Por otro lado, los operadores  $b$  y  $b^\dagger$  se transforman en

$$\begin{aligned}\tilde{b} &= \mathcal{G}b\mathcal{G}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}l_c} \left( \text{Re}(z) + 2l_c^2 \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ \tilde{b}^\dagger &= \mathcal{G}b^\dagger\mathcal{G}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}l_c} \left( \text{Re}(z) - 2l_c^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)\end{aligned}\quad (1.54)$$

en función de los cuales no es posible expresar el momento angular canónico, que no es una simetría en el nuevo gauge. Sin embargo, como veremos en la siguiente Sección, estos operadores son los generadores infinitesimales de las *traslaciones magnéticas* para el gauge de Landau, que representan la simetría característica de este sistema.

Estudiaremos a continuación cómo pasar de una base de estados ortonormal del problema de Landau de un gauge al otro. Consideremos, en primer lugar, la función de onda para el primer nivel de Landau en el gauge simétrico,  $\Psi_{0m}(z, \bar{z})$ , la función de onda transformada será, por tanto,

$$\tilde{\Psi}_{0m}(z, \bar{z}) = e^{-i\frac{1}{2l_c^2}x_1x_2} \Psi_{0m}(z, \bar{z}) \quad (1.55)$$

que puede expresarse

$$\tilde{\Psi}_{0m}(z, \bar{z}) = \frac{1}{l_c^{m+1}\sqrt{2^{m+1}\pi m!}} z^m e^{-\frac{1}{4l_c^2}z^2} e^{-\frac{1}{2l_c^2}(\text{Im}z)^2} \quad (1.56)$$

Esta función de onda está parametrizada por  $m$ , y no es propia del operador  $p_1$ , pero puede expresarse en función de la base de estados propios del Hamiltoniano y el momento canónico  $p_1$ , que calculamos en el gauge de Landau. Para el estado fundamental tenemos así:

$$\tilde{\Psi}_{0m}(z, \bar{z}) = \frac{1}{2\pi} \int dk_1 c_{k_1}(m) \Phi_{0k_1}(z, \bar{z}) \quad (1.57)$$

donde

$$\Phi_{0k_1}(z, \bar{z}) = \frac{1}{\pi^{1/4}\sqrt{2\pi}l_c} e^{ik_1z} e^{-\frac{k_1^2 l_c^2}{2}} e^{-\frac{1}{2l_c^2}(\text{Im}z)^2} \quad (1.58)$$

Es decir,  $\tilde{\Psi}_{0m}(z, \bar{z})$  puede expresarse como la transformada de Fourier:

$$\begin{aligned}\tilde{\Psi}_{0m}(x_1, x_2) &\equiv \frac{1}{2\pi} \int dk_1 e^{ik_1x_1} \left( c_{k_1}(m) \frac{\phi_{0k_1}(x_2)}{\sqrt{2\pi}} \right) \\ \implies c_{k_1}(m) \frac{\phi_{0k_1}(x_2)}{\sqrt{2\pi}} &= \int dx_1 e^{-ik_1x_1} \tilde{\Psi}_{0m}(x_1, x_2)\end{aligned}\quad (1.59)$$

resulta

$$\begin{aligned} c_{k_1}(m) &= \frac{1}{\pi^{1/4} \sqrt{2^{m+1} l_c^{2m+1} \pi m!}} e^{-\frac{k_1^2 l_c^2}{2}} \sum_{a=0}^m \binom{m}{a} (-i2k_1 l_c^2)^{m-a} (2l_c)^{a+1} \Gamma \left[ \begin{matrix} a+1 \\ 2 \end{matrix} \right] \\ &\equiv C(m, k_1, l_c) \end{aligned} \quad (1.60)$$

Y para los demás niveles de Landau es inmediato que

$$\tilde{\Psi}_{km}(z, \bar{z}) = \frac{(\tilde{a}^\dagger)^k}{\sqrt{k!}} \tilde{\Psi}_{0m}(z, \bar{z})$$

donde  $\tilde{a}^\dagger = \mathcal{G} a^\dagger \mathcal{G}^\dagger$ .

También podemos estudiar la transformación inversa. Consideremos ahora la función de onda para el estado fundamental,  $\Phi_{0k_1}(x_1, x_2)$ , en el gauge de Landau, su transformada será:

$$\tilde{\Phi}_{0k_1}(x_1, x_2) = \mathcal{G}^\dagger \Phi_{0k_1}(x_1, x_2) \quad (1.61)$$

o bien

$$\tilde{\Phi}_{0k_1}(z, \bar{z}) = \frac{1}{\pi^{1/4} \sqrt{\pi l}} e^{-\frac{1}{2l^2} z \bar{z}} e^{\left( \frac{1}{2l^2} z^2 + i k_1 z - \frac{k_1^2 l^2}{4} \right)} \equiv e^{-\frac{1}{2l^2} z \bar{z}} g_{k_1}(z) \quad (1.62)$$

Esta función de onda parametrizada por  $k_1$  no es propia del operador  $L_3$ , pero puede expresarse como una combinación lineal de las funciones propias para el estado fundamental en el gauge simétrico,  $\Phi_{0m}(z, \bar{z})$ , de la forma:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{0k_1}(z, \bar{z}) &= \sum_{m=0}^{\infty} c_m(k_1) \Psi_{0m}(z, \bar{z}) \\ &= e^{-\frac{1}{2l^2} z \bar{z}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{l^{m+1} \sqrt{\pi m!}} c_m(k_1) z^m \end{aligned} \quad (1.63)$$

si desarrollamos en serie de Taylor  $g_{k_1}(z)$  resulta

$$c_m(k_1) = l^{m+1} \sqrt{\pi m!} \left( \frac{d^m g_{k_1}(z)}{dz^m} \right)_{z=0} \quad (1.64)$$

y en general

$$\tilde{\Phi}_{\tilde{n}k_1}(z, \bar{z}) = \frac{(a^\dagger)^{\tilde{n}}}{\sqrt{\tilde{n}!}} \tilde{\Phi}_{0k_1}(z, \bar{z})$$

donde  $a^\dagger = \mathcal{G}^\dagger \tilde{a}^\dagger \mathcal{G}$ .

Hemos visto, por tanto, la equivalencia entre los dos gauges utilizados en el estudio del problema de Landau. La característica esencial de este problema en

ambos gauges es la degeneración infinita asociada con cada nivel de energía, aunque esta degeneración sea numerable en el gauge simétrico y continua en el de Landau, al considerar el sistema limitado a una superficie suficientemente grande, pero de área finita, la densidad de estados en ambos gauges es la misma. Esta propiedad del problema de Landau veremos que es esencial a la hora de estudiar el Efecto Hall Cuántico.

### 1.1.3 Traslaciones magnéticas. Simetrías $w_\infty$ y $W_\infty$

Las *traslaciones magnéticas* representan la simetría característica del problema de Landau. Como es bien conocido el Hamiltoniano para una partícula cargada en presencia de un campo magnético uniforme no es invariante bajo traslaciones en el plano, como consecuencia de la ruptura de simetría producida por el potencial vector, sin embargo, sí es invariante bajo la acción del grupo de las *traslaciones magnéticas*. Es conveniente, no obstante, clarificar el origen clásico de esta simetría que no será sino una transformación canónica en el espacio de fases que deja invariante el Hamiltoniano. Junto con esta simetría surgen además en el problema de Landau un conjunto de infinitas transformaciones canónicas que representan infinitas simetrías del sistema y satisfacen el álgebra clásica  $w_\infty$ . Todo esto puede implementarse a nivel cuántico donde tenemos como simetría las *traslaciones magnéticas*, y también toda una serie infinita de operadores sujetos a unas reglas de conmutación que reciben comúnmente el nombre de álgebras  $W_\infty$ , que es la versión cuántica de una simetría canónica del Hamiltoniano clásico.

#### *Traslaciones magnéticas en el gauge simétrico*

El Hamiltoniano clásico puede escribirse en el gauge simétrico como

$$H = \frac{1}{2m} \left( \left( p_1 + \frac{eB}{2c} x_2 \right)^2 + \left( p_2 - \frac{eB}{2c} x_1 \right)^2 \right) \quad (1.65)$$

donde tenemos un espacio de fases de dimensión cuatro  $(x_1, x_2, p_1, p_2)$  con la estructura canónica natural  $\{x_i, p_j\} = \delta_{ij}$ ,  $\{x_i, x_j\} = \{p_i, p_j\} = 0$ ,  $i, j = 1, 2$ , donde  $\{, \}$  es el paréntesis de Poisson.

Introducimos nuevas variables  $(\alpha, \alpha^*, \beta, \beta^*)$

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2} \left[ - \left( p_2 - \frac{eB}{2c} x_1 \right) + i \left( p_1 + \frac{eB}{2c} x_2 \right) \right] \\ \beta &= \frac{1}{2} \left[ \left( p_2 + \frac{eB}{2c} x_1 \right) + i \left( p_1 - \frac{eB}{2c} x_2 \right) \right] \end{aligned} \quad (1.66)$$

en función de las cuales el Hamiltoniano será

$$H = \frac{1}{m}(\alpha\alpha^* + \alpha^*\alpha)$$

con  $\{\alpha, \alpha^*\} = -i\left(\frac{eB}{2c}\right)$ ,  $\{\beta, \beta^*\} = -i\left(\frac{eB}{2c}\right)$ . Tenemos, pues, que el Hamiltoniano no depende de  $\beta$  y  $\beta^*$  y, por tanto, generarán simetrías del sistema Hamiltoniano.

Para ver el tipo de simetría que generan estudiemos la acción del grupo de traslaciones en el plano sobre el espacio de fases

$$\begin{aligned} x_i &\rightarrow x_i + a_i \\ p_i &\rightarrow p_i - \frac{eB}{2c}\epsilon_{ij}a_j \quad , \quad i, j = 1, 2 \end{aligned} \quad (1.67)$$

Es decir, estrictamente hablando las traslaciones no son una verdadera simetría del problema hamiltoniano planteado sino que es el grupo de las *traslaciones magnéticas* el que lo deja invariante, y los generadores infinitesimales de esta simetría no son más que:  $\beta_1 = p_1 - \frac{eB}{2c}x_2$  y  $\beta_2 = p_2 + \frac{eB}{2c}x_1$ , y en definitiva  $\beta$  y  $\beta^*$ . Por otro lado, la función generatriz infinitesimal de las *traslaciones magnéticas* puede verse como una transformación canónica infinitesimal del espacio de fases del sistema con la propiedad crucial de que deja invariante  $\alpha$  y  $\alpha^*$ , es decir,

$$\delta\left(p_1 + \frac{eB}{2c}x_2\right) = 0 \quad , \quad \delta\left(p_2 - \frac{eB}{2c}x_1\right) = 0$$

por tanto, actúan de manera no trivial sólo en un subespacio bidimensional del espacio de fases total caracterizado por su energía constante [19].

Por exponenciación tenemos la función que genera las *traslaciones magnéticas* finitas:

$$t_{a_1 a_2} = e^{i(a_1\beta_1 + a_2\beta_2)} \quad (1.68)$$

o bien, en coordenadas complejas, (1.66),

$$t_{a\bar{a}} = e^{(a\beta - \bar{a}\beta^*)} \quad (1.69)$$

con  $a = a_1 + ia_2$ . El álgebra que satisfacen estas transformaciones es:

$$\{t_{a_1 a_2}, t_{c_1 c_2}\} = \frac{eB}{c}(a_1 c_2 - c_1 a_2)t_{a_1 + c_1, a_2 + c_2} \quad (1.70)$$

es decir, el álgebra clásica  $w_\infty$ .

Pasemos ahora al problema cuántico siguiendo el formalismo de cuantización canónica habitual. Tenemos pues, el Hamiltoniano del sistema en el gauge simétrico (1.65), donde  $x_i$  y  $p_i$ ,  $i, j = 1, 2$ , son los operadores coordenada y momento

canónico, que verifican las relaciones de conmutación usuales,  $[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$ ,  $[x_i, x_j] = [p_i, p_j] = 0$ ,  $i, j = 1, 2$ . Si introducimos, como hemos visto en la Sección anterior, los operadores  $\{a, a^\dagger, b, b^\dagger\}$ , (1.26,1.29), con las reglas de conmutación:  $[a, a^\dagger] = 1$ ,  $[b, b^\dagger] = 1$ , el Hamiltoniano y el momento angular se expresan:

$$H = \hbar w(aa^\dagger + a^\dagger a) \text{ con } w = \frac{eB}{2mc} \quad (1.71)$$

$$L = b^\dagger b - a^\dagger a \quad (1.72)$$

Los operadores  $b$  y  $b^\dagger$  son los generadores infinitesimales de las *traslaciones magnéticas*, y  $[b, H] = [b^\dagger, H] = 0$ . El operador que genera las *traslaciones magnéticas* finitas es:

$$T_{c\bar{c}} = e^{(cb - \bar{c}b^\dagger)} \quad (1.73)$$

donde  $c = c_1 + ic_2$ . Estos operadores verifican que<sup>1</sup>:

$$T_{c\bar{c}} T_{d\bar{d}} = e^{\left(\frac{1}{2}(\bar{c}d - c\bar{d})\right)} T_{c+d, \bar{c}+\bar{d}} \quad (1.74)$$

Tomando  $2b = b_2 + ib_1$  resulta:

$$T_{c_1 c_2} = e^{i(c_1 b_1 + c_2 b_2)}$$

de donde se deduce fácilmente que las relaciones de conmutación para estos operadores son

$$[T_{c_1 c_2}, T_{d_1 d_2}] = 2i \text{sen}(c_1 d_2 - d_1 c_2) T_{c_1+d_1, c_2+d_2} \quad (1.75)$$

cuyo límite clásico dará el álgebra clásica  $\omega_\infty$ , (1.70).

Los operadores  $T_{c\bar{c}}$ , si expresamos  $\{b, b^\dagger\}$  en representación de coordenadas, darán una representación proyectiva del grupo de *traslaciones magnéticas*; y sobre las funciones de onda actúan de la forma:

$$T_{c\bar{c}} \Psi(z, \bar{z}) = e^{\frac{1}{2i}(c\bar{z} - \bar{c}z)} \Psi(z + cl, \bar{z} + \bar{c}l) \quad (1.76)$$

Si consideramos clásicamente las transformaciones canónicas, actuando sobre el espacio de fases del problema de Landau, cuánticamente dichas transformaciones

---

<sup>1</sup>Utilizamos la fórmula de Campbell-Hausdorff-Baker:

$$e^A e^B = e^C$$

$$C = A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \dots$$

mezclan los diferentes niveles de Landau. Sin embargo, como hemos visto existe un subgrupo especial de transformaciones canónicas, que actúan sólo en el subespacio de fases generado por las variables que conmutan con el Hamiltoniano, esto significa a nivel cuántico que estas transformaciones actúan independientemente en cada nivel de Landau [74].

### *Traslaciones magnéticas en el gauge de Landau*

La forma explícita de los generadores infinitesimales de las traslaciones magnéticas depende del gauge que tomemos, no obstante como veremos las relaciones de conmutación serán independientes del gauge elegido.

Comencemos con el problema clásico en el gauge de Landau. El Hamiltoniano en este gauge es

$$H = \frac{1}{2m} \left( \left( p_1 + \frac{eB}{c} x_2 \right)^2 + p_2^2 \right) \quad (1.77)$$

que en función de las nuevas variables  $(\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}^*, \tilde{\beta}, \tilde{\beta}^*)$

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} &= \frac{1}{2} \left[ -p_2 + i \left( p_1 + \frac{eB}{c} x_2 \right) \right] \\ \tilde{\beta} &= \frac{1}{2} \left[ \left( p_2 + \frac{eB}{c} x_1 \right) + ip_1 \right] \end{aligned} \quad (1.78)$$

será

$$H = \frac{1}{m} (\tilde{\alpha} \tilde{\alpha}^* + \tilde{\alpha}^* \tilde{\alpha})$$

donde  $\{\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}^*\} = -i \left( \frac{eB}{2c} \right)$  ;  $\{\tilde{\beta}, \tilde{\beta}^*\} = -i \left( \frac{eB}{2c} \right)$ . Los nuevos generadores infinitesimales de las *traslaciones magnéticas* son:  $\tilde{\beta}_1 = p_1$  y  $\tilde{\beta}_2 = p_2 + \frac{eB}{c} x_1$ . La función que genera esta simetría es:

$$t_{a_1 a_2} = e^{i[a_1 \tilde{\beta}_1 + a_2 \tilde{\beta}_2]} \quad (1.79)$$

que satisfacen

$$\{t_{a_1 a_2}, t_{c_1 c_2}\} = \frac{eB}{c} (a_1 c_2 - c_1 a_2) t_{a_1 + c_1, a_2 + c_2} \quad (1.80)$$

es decir, satisfacen el álgebra clásica  $w_\infty$  como sucedía en el otro gauge.

Cuánticamente tenemos los operadores  $\{\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger, \tilde{b}, \tilde{b}^\dagger\}$ , en función de los cuales

$$H = \hbar w_c (\tilde{a} \tilde{a}^\dagger + \tilde{a}^\dagger \tilde{a}) \quad \text{con} \quad w_c = \frac{eB}{mc}$$

y, por tanto,

$$T_{c\bar{c}} = e^{[c\tilde{b} - \bar{c}\tilde{b}^\dagger]} \quad (1.81)$$

será el operador que genera las *traslaciones magnéticas* en este gauge, con  $c = c_1 + ic_2$ , y  $[\tilde{b}, \tilde{b}^\dagger] = 1$ . Si tomamos  $2\tilde{b} = \tilde{b}_2 + i\tilde{b}_1$  resultará

$$T_{c_1c_2} = e^{i(c_1\tilde{b}_1 + c_2\tilde{b}_2)}$$

Estos operadores verifican las siguientes relaciones de conmutación:

$$[T_{c_1c_2}, T_{d_1d_2}] = 2i \operatorname{sen}(c_1d_2 - d_1c_2) T_{c_1+d_1, c_2+d_2} \quad (1.82)$$

luego, el álgebra de las *traslaciones magnéticas* no depende del gauge elegido.

Lo que sí diferencia un gauge del otro es la forma de actuar de estos operadores sobre las funciones de onda cuando tomamos representación de coordenadas, en particular, en este gauge tenemos

$$T_{c_1c_2} \Phi(x_1, x_2) = e^{i\frac{c_1c_2}{2}} e^{i\frac{c_2}{c}x_1} \Phi(x_1 + c_1l_c, x_2 + c_2l_c) \quad (1.83)$$

Hemos visto, por tanto, que existe invariancia gauge en lo que respecta a las relaciones de conmutación para los generadores infinitesimales de esta simetría, así como para los operadores que representan las *traslaciones magnéticas* tanto a nivel clásico como cuántico.

### Simetría infinita. Algebra $W_\infty$

En el estudio que hemos realizado acerca de las simetrías del problema de Landau hemos visto que los operadores infinitesimales asociados a las *traslaciones magnéticas* conmutan con el Hamiltoniano, pero no conmutan entre sí, sino que  $[b, b^\dagger] = 1$ . Esta peculiaridad ausente en el caso de las traslaciones ordinarias, está relacionada de algún modo con la degeneración infinita de los niveles de Landau en el plano, de hecho los operadores  $b$  y  $b^\dagger$  pueden verse como operadores escalera que pasan de un estado a otro dentro de cada nivel de Landau sin mezclar distintos niveles de energía. Consecuencia inmediata de este hecho es que, en general, tendremos infinitos operadores que conmutan con el Hamiltoniano, y que satisfacen un álgebra que recibe comunmente el nombre de álgebra  $W_\infty$ .

Estudiemos esta simetría infinita presente en el problema de Landau comenzando con la teoría clásica. En el gauge simétrico consideremos el espacio de fases de dimensión cuatro tomando como variables  $(\alpha, \alpha^*, \beta, \beta^*)$ , hemos visto que la función generadora de las traslaciones magnéticas clásicamente es

$$t_{a\bar{a}} = e^{-\bar{a}\beta^*} e^{a\beta}$$



si desarrollamos en serie la exponencial tenemos

$$t_{a\bar{a}} = \sum_{n,m=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\bar{a}^n a^m}{n!m!} (\beta^*)^n \beta^m$$

Luego la transformación canónica más general, que deja invariante el Hamiltoniano clásico, estará generada por, [19],

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{nm}^{(cl)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) &= (\beta^*)^{n+1} \beta^{m+1} \\ \delta H = \{H, \mathcal{L}_{nm}^{(cl)}\} &= 0 \end{aligned} \quad (1.84)$$

El corchete de Poisson, para dos cualesquiera de tales generadores, nos dará una representación del álgebra clásica  $w_{\infty}$ :

$$\{\mathcal{L}_{nm}^{(cl)}, \mathcal{L}_{kl}^{(cl)}\} = i \left( \frac{eB}{2c} \right) ((n+1)(l+1) - (m+1)(k+1)) \mathcal{L}_{n+k, m+l}^{(cl)} \quad (1.85)$$

Es decir, tenemos infinitas transformaciones canónicas que actúan de manera no trivial no en todo el espacio de fases sino únicamente en un subespacio de dimensión dos, que admite una estructura simpléctica en términos de  $\beta$  y  $\beta^*$ . En particular, si tomamos  $\alpha = \alpha^* = 0$ , el espacio de fases reducido será:

$$\beta = i2p_z \equiv \left( \frac{eB}{2c} \right) \bar{z} \quad , \quad \beta^* = \left( \frac{eB}{2c} \right) z$$

con  $\{z, 2p_z\} = 1$ .

Esta reducción del espacio de fases puede obtenerse también tomando el límite topológico,  $m \rightarrow 0$ , en la acción:

$$S = \int dt \left( \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 - \frac{e}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \right) \quad (1.86)$$

$$\bar{S} = \lim_{m \rightarrow 0} S = \frac{eB}{2c} \int dt (x_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1) \quad (1.87)$$

La acción  $\bar{S}$  (“mecánica de Chern-Simons”) describe clásicamente el grado de libertad residual en cada nivel de Landau. Dado que  $\bar{S}$  es de primer orden en las derivadas temporales, la estructura simpléctica es evidente, e implica que sólo una de las coordenadas originales permanece como coordenada en el sentido Hamiltoniano, y la otra será el momento conjugado, es decir,  $\omega = dx_1 \wedge dx_2 \equiv d\beta \wedge d\beta^*$ . Esta es la reducción del espacio de fases inducida por el campo magnético externo. Cómo  $\bar{H} = 0$ , las simetrías del Hamiltoniano serán todas las transformaciones canónicas del espacio de fases reducido. Equivalentemente, las simetrías de la

acción  $\bar{S}$  son los difeomorfismos que preservan el área del espacio de coordenadas [74].

Pasemos ahora al problema cuántico, los operadores (cuyo límite clásico nos lleva a  $\mathcal{L}_{nm}^{(cl)}$ ) se calculan fácilmente a partir de la función que genera las *traslaciones magnéticas* (en el gauge simétrico), así

$$\begin{aligned} T_{c\bar{c}} &= e^{-\frac{c\bar{c}}{2}} e^{-c\bar{b}^\dagger} e^{cb} \\ T_{c\bar{c}} &= e^{-\frac{c\bar{c}}{2}} \sum_{nm}^{\infty} (-1)^n \frac{\bar{c}^n c^m}{n!m!} (b^\dagger)^n b^m \end{aligned}$$

si definimos  $\mathcal{L}_{nm}$  de la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{nm} &= (b^\dagger)^{n+1} (b)^{m+1}, \quad n, m \geq -1 \\ [H, \mathcal{L}_{nm}] &= 0 \end{aligned} \quad (1.88)$$

Tenemos un conjunto de infinitos operadores que caracterizan la simetría infinita del sistema relacionada con la degeneración infinita de cada nivel de energía propia del problema de Landau. Las relaciones de conmutación para estos operadores son:

$$[\mathcal{L}_{nm}, \mathcal{L}_{kl}] = \hbar((m+1)(k+1) - (n+1)(l+1))\mathcal{L}_{n+k, m+l} + O(\hbar^2) \quad (1.89)$$

donde hemos reescalado  $b$  y  $b^\dagger$  de forma que  $[b, b^\dagger] = \hbar$ . A primer orden en  $\hbar$  tenemos el límite clásico, y recuperamos así el álgebra clásica  $w_\infty$  (1.85)<sup>2</sup>. Las deformaciones cuánticas de este álgebra reciben el nombre de álgebras  $W_\infty$ . Si tomamos los operadores sin reescalar ( $[b, b^\dagger] = 1$ ) podemos determinar el conmutador completo y, por tanto, el álgebra  $W_\infty$  completa es:

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}_{nm}, \mathcal{L}_{kl}] &= \sum_{s=0}^{\text{Min}(m,k)} \frac{(m+1)!(k+1)!}{(m-s)!(k-s)!(s+1)!} \mathcal{L}_{n+k-s, m+l-s} \\ &\quad - (m \leftrightarrow l, n \leftrightarrow k) \end{aligned} \quad (1.90)$$

Estos operadores, en representación de coordenadas, genéricamente contienen potencias de las derivadas mayores que uno y, por tanto, no generan transformaciones de coordenadas locales sobre las funciones de onda, son operadores *cuasi-locales* [19]. Esto salvo las *traslaciones magnéticas*,  $\mathcal{L}_{0-1}$ ,  $\mathcal{L}_{-10}$ , y las rotaciones generadas por  $(\mathcal{L}_{00} - a^\dagger a)$ .

<sup>2</sup>Donde es necesario reescalar  $\beta$  y  $\beta^*$  de manera que  $\{\beta, \beta^*\} = -i$ , y así

$$\{\mathcal{L}_{nm}^{(cl)}, \mathcal{L}_{kl}^{(cl)}\} = i((n+1)(l+1) - (m+1)(k+1))\mathcal{L}_{n+k, m+l}^{(cl)}$$

En esta representación los operadores  $a, a^\dagger, b, b^\dagger$  son

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2l} \left( z + 2l^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) & a^\dagger &= \frac{1}{2l} \left( \bar{z} - 2l^2 \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ b &= \frac{1}{2l} \left( \bar{z} + 2l^2 \frac{\partial}{\partial z} \right) & b^\dagger &= \frac{1}{2l} \left( z - 2l^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \end{aligned} \quad (1.91)$$

Como hemos visto, la reducción al espacio de fases bidimensional es equivalente a tomar el límite topológico en la acción clásica  $S$  (1.86), de manera que la acción resultante describe clásicamente el grado de libertad residual dentro de cada nivel de Landau. Esto cuánticamente significa que nos quedamos en el primer nivel de Landau, es decir, en este límite si  $a \equiv a^\dagger = 0$  y, por tanto,  $b = 2l \frac{\partial}{\partial z} \equiv \frac{\bar{z}}{l}$  y  $b^\dagger = \frac{z}{l}$ , con  $[2 \frac{\partial}{\partial z}, z] = 1$ , estos operadores serán la coordenada y el momento conjugado en el espacio reducido. En este espacio los generadores de simetría serán

$$\mathcal{L}_{nm} = 2^{n+1} l^{n-m} z^{m+1} \left( \frac{\partial}{\partial z} \right)^{n+1} \quad (1.92)$$

En resumen, el problema de una partícula cargada en un campo magnético uniforme presenta desde el punto de vista clásico y cuántico una simetría infinita. Clásicamente esta simetría viene caracterizada por un subgrupo especial de las transformaciones canónicas, que actúan sobre el subespacio de fases caracterizado por la energía constante, estas transformaciones están sujetas al álgebra  $w_\infty$  característica de un sistema con un espacio de fases bidimensional. Cuánticamente esto se traduce en un conjunto infinito de operadores que actúan sólo dentro de cada nivel de Landau, y están sujetos a las relaciones de conmutación propias del álgebra cuántica  $W_\infty$ .

## 1.2 Ecuación de Dirac

Como hemos visto en la Introducción el efecto Hall cuántico se observa en sistemas semiconductores tales como transistores de efecto de campo (Si-MOSFET), y en heterouniones (GaAs/Al GaAs). Ambos sistemas tienen en común que mantienen los electrones portadores de corriente en una finísima lámina de cristal semiconductor. La producción de un gas bidimensional de electrones es una de las condiciones necesarias para la observación del efecto Hall cuántico, junto con la presencia de un campo magnético intenso perpendicular a la lámina y temperaturas muy bajas. En este tipo de muestras se busca que la movilidad de los portadores sea suficientemente alta, mientras que la masa efectiva de los mismos debe ser suficientemente

pequeña [18, 47]. Por otro lado, la masa efectiva del electrón en un semiconductor depende de la estructura de bandas del material, a temperaturas muy bajas, y como consecuencia de la proximidad entre las bandas de valencia y de conducción, puede suponerse que la masa efectiva es muy próxima a cero [98].

Suponemos, por tanto, como proponen Jackiw y Johnson [62, 70], que el comportamiento de los electrones en el material puede describirse por la ecuación de Dirac para fermiones sin masa, en presencia de un campo magnético externo. En  $(2 + 1)$  dimensiones

$$\gamma^\mu \left( p_\mu + \frac{e}{c} A_\mu \right) \psi(x) = 0 \quad (1.93)$$

con  $p_\mu = i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ ,  $x \equiv x^\mu = (x^0, x^1, x^2)$ , y la métrica  $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1)$ .

En esta ecuación,  $\psi(x)$  es un espinor de dos componentes, y  $A^\mu = (A_0, \vec{A})$  es el potencial vector asociado al campo gauge. Las matrices  $\gamma^\mu$ ,  $\mu = 0, 1, 2$ , son las matrices de Dirac  $(2 \times 2)$ , que tomaremos en la representación <sup>3</sup>

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \gamma^1 &= i\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma^2 &= i\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.94)$$

Para campos estáticos, en el gauge de Weyl  $A_0 = 0$ , el Hamiltoniano de Dirac será:

$$H_D^0 = \vec{\alpha} (c\vec{p} + e\vec{A}) \quad (1.95)$$

donde las matrices  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \\ \alpha_2 &= \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.96)$$

y la matriz  $\beta$ , que aparecería si tuviésemos un término de masa, la tomamos

$$\beta = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.97)$$

---

<sup>3</sup>Las matrices  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  y  $\sigma_3$  son las matrices de Pauli.

Es importante tener en cuenta que la estructura matricial de este Hamiltoniano no se debe al espín. Este juega un papel secundario como consecuencia de la presencia de un campo magnético muy intenso que lo polariza en la dirección del mismo, y por tanto, los autoestados para este Hamiltoniano,  $\psi(x)$ , tienen únicamente dos componentes [63].

Para un campo magnético constante y uniforme,  $\vec{B} = -B\vec{k}$ , los dos gauges fundamentales son los introducidos en la Sección anterior, es decir, el gauge simétrico (1.6) y el gauge de Landau (1.36), para los cuales:  $B = \partial_2 A_1 - \partial_1 A_2$ .

Calcularemos el espectro y los espinores propios del Hamiltoniano de Dirac en ambos gauges. Analizaremos la existencia de modos cero como consecuencia de la simetría de conjugación del Hamiltoniano de Dirac sin masa. Estudiaremos, también, la asimetría espectral producida por la ruptura de dicha simetría cuando se introduce un término de masa, y relacionaremos este hecho con el *flujo espectral*. Por último, estudiaremos el límite no-relativista de esta teoría cuando consideramos un término de masa, llegando así al Hamiltoniano de Pauli para partículas con espín. Este Hamiltoniano puede expresarse en función del Hamiltoniano de Dirac para masa cero, y ello está relacionado con la supersimetría.

### 1.2.1 Espectro y funciones de onda en los gauge simétrico y de Landau

El Hamiltoniano de Dirac para un electrón sin masa, en un campo magnético constante y homogéneo es (1.95), donde  $\vec{p}$  es el momento canónico, tal que

$$[x_i, x_j] = [p_i, p_j] = 0, \quad [x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij} \quad i, j = 1, 2$$

En forma matricial el operador de Dirac será

$$H_D^0 = \begin{pmatrix} 0 & D \\ D^\dagger & 0 \end{pmatrix} \quad (1.98)$$

Los operadores  $D$  y  $D^\dagger$ , tomando el potencial vector en el gauge simétrico, se definen

$$\begin{aligned} D &= (cp_2 + eA_2) + i(cp_1 + eA_1) \\ D^\dagger &= (cp_2 + eA_2) - i(cp_1 + eA_1) \end{aligned} \quad (1.99)$$

Estudiaremos el problema estacionario, y determinaremos el espectro y los estados propios del operador de Dirac:

$$H_D^0\psi_\lambda = E_\lambda\psi_\lambda$$

Veremos que este problema puede reducirse formalmente al problema no-relativista estudiado ya. Utilizaremos coordenadas complejas en función de las cuales los operadores  $D$  y  $D^\dagger$  se expresan

$$D = -\frac{eB}{2}\bar{z} + i2c p_z$$

$$D^\dagger = -\frac{eB}{2}z - i2c p_{\bar{z}}$$

Y en el formalismo de operadores introducido en la Sección anterior resulta:

$$D = -\sqrt{2eB\hbar c} a^\dagger$$

$$D^\dagger = -\sqrt{2eB\hbar c} a \quad (1.100)$$

de forma que el Hamiltoniano de Dirac será:

$$H_D^0 = -\sqrt{2eB\hbar c} \begin{pmatrix} 0 & a^\dagger \\ a & 0 \end{pmatrix} \quad (1.101)$$

Para las componentes del espinor  $|\psi\rangle$  tenemos dos ecuaciones acopladas

$$D|\psi_2\rangle = E|\psi_1\rangle$$

$$D^\dagger|\psi_1\rangle = E|\psi_2\rangle$$

Este sistema de ecuaciones, puede reducirse a una ecuación para una de las dos componentes, que es matemáticamente equivalente a la ecuación de Schrödinger para el problema no-relativista, es decir,

$$|\psi_2\rangle = -\frac{\sqrt{2eB\hbar c}}{E} a |\psi_1\rangle \quad (1.102)$$

$$a^\dagger a |\psi_1\rangle = \frac{E^2}{2eB\hbar c} |\psi_1\rangle \quad (1.103)$$

La ecuación de autovalores para la primera componente,  $|\psi_1\rangle$ , queda en función del operador número:  $\bar{N} = a^\dagger a$ . Si tomamos la base de estados propios de los operadores  $\bar{N}$  y  $L$ :  $\{|\psi_1\rangle \equiv |k, m\rangle\}$ , resultará

$$\bar{N}|k, m\rangle = k|k, m\rangle = \left(\frac{E^2}{2eB\hbar c}\right) |k, m\rangle$$

Y el espectro para el operador de Dirac será

$$E_k = \pm\sqrt{2k eB\hbar c} \quad (1.104)$$

con  $k = 0, 1, 2, \dots$

La segunda componente del espinor se calcula fácilmente a partir de la primera (1.102). Teniendo en cuenta que  $a$  es un operador de destrucción, resulta:

$$\begin{aligned} a|k, m\rangle &= \sqrt{k} |k-1, m+1\rangle, \quad k \neq 0 \Rightarrow |\psi_2^\pm\rangle = \mp |k-1, m+1\rangle \\ a|0, m\rangle &= 0 \quad \Rightarrow |\psi_2^0\rangle = 0 \end{aligned} \quad (1.105)$$

En definitiva, el espectro para el operador de Dirac es discreto, y está caracterizado por el número cuántico  $k$ , que es un entero no negativo, ver Figura 1.3:

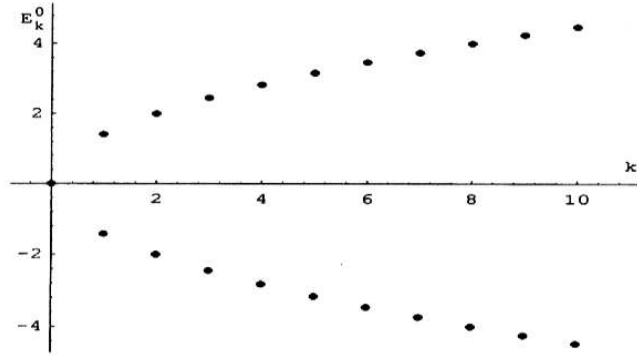


Figura 1.3: Espectro del operador de Dirac para una partícula con masa cero.

Cada nivel de energía,  $k$ , está infinitamente degenerado, esta degeneración viene caracterizada por el entero  $m$ , tal que  $m \geq -k$ , que como veremos estará relacionado con la conservación del momento angular total en la dirección del campo externo. Como era de esperar, tenemos soluciones de energía positiva y de energía negativa, pero además, hay soluciones con energía cero, que denominaremos modos cero, cuyo origen está en la simetría de conjugación propia de este sistema que analizaremos más adelante.

La base ortonormal de estados propios está formada por los espinores

$$\begin{aligned} |\psi_{km}^\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} |k, m\rangle \\ \mp |k-1, m+1\rangle \end{pmatrix} \quad k \neq 0 \\ |\psi_{0m}\rangle &= \begin{pmatrix} |0, m\rangle \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

tal que

$$\begin{aligned}\langle \psi_{km}^\pm | \psi_{k',m'}^\pm \rangle &= \delta_{kk'} \delta_{mm'} & , & \langle \psi_{0m} | \psi_{0,m'} \rangle = \delta_{mm'} \\ \langle \psi_{km}^\pm | \psi_{k',m'}^\mp \rangle &= 0 & , & \langle \psi_{km}^\pm | \psi_{0,m'} \rangle = 0\end{aligned}$$

La degeneración característica de los niveles de Landau en el problema no-relativista estaba determinada por la simetría de rotación del sistema en el gauge simétrico. Como consecuencia de esta simetría los estados propios del Hamiltoniano de Schrödinger eran también propios del operador momento angular  $L_3$ , cuyo autovalor caracterizaba la degeneración de cada nivel de energía. Sin embargo, en el problema relativista este operador no conmuta con el Hamiltoniano de Dirac, sino que:

$$[H_D^0, L_3] = -i\hbar \left( \alpha_1 (cp_2 - \frac{eB}{2}x_1) - \alpha_2 (cp_1 + \frac{eB}{2}x_2) \right)$$

es decir, no es una simetría del sistema, y así, no es posible encontrar una base de estados propios de estos operadores [113].

Por otro lado, si definimos el operador de espín  $S_3$  en la dirección perpendicular al plano como

$$S_3 = \frac{\hbar}{2} \Sigma_3$$

donde  $\Sigma_3$  en función de las matrices  $\gamma$  es

$$\Sigma_3 = \frac{1}{2i} [\gamma^2, \gamma^1] = \sigma_3$$

es fácil comprobar que tampoco conmuta con el Hamiltoniano de Dirac, pues

$$[H_D^0, S_3] = i\hbar \left( \alpha_1 (cp_2 - \frac{eB}{2}x_1) - \alpha_2 (cp_1 + \frac{eB}{2}x_2) \right)$$

Sin embargo, consideremos el momento angular total en la dirección "OX<sub>3</sub>":  $J_3 = L_3 + S_3$ , resulta

$$[H_D^0, J_3] = 0$$

Es decir, la cantidad conservada en el problema relativista es la componente del momento angular total en la dirección del campo externo. Esto será cierto sólo en este gauge.

Tomando como observables en esta teoría  $H_D^0$  y  $J_3$ , una base de estados propios para ambos operadores es la calculada, y

$$\begin{aligned}J_3 |\psi_{km}\rangle &= \hbar \left( m + \frac{1}{2} \right) |\psi_{km}\rangle, \quad k \neq 0, \quad m \geq -k \\ J_3 |\psi_{0m}\rangle &= \hbar \left( m + \frac{1}{2} \right) |\psi_{0m}\rangle, \quad m \geq 0\end{aligned}\tag{1.106}$$



La degeneración de cada nivel de energía viene caracterizada por el autovalor de  $J_3$ . En particular, notemos que la elección del campo magnético determina la polarización del espín en la dirección del mismo. Esto para los modos cero es evidente, pues son los únicos estados propios de  $S_3$  y  $L_3$  al tiempo.

Los estados pueden expresarse fácilmente en representación de coordenadas puesto que sus componentes son las soluciones de la ecuación de Schrödinger. Para los modos cero tenemos:

$$\psi_{0m}(z, \bar{z}) = \begin{pmatrix} \Psi_{0m}(z, \bar{z}) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.107)$$

donde  $\Psi_{0m}(z, \bar{z})$  es la función de onda para el primer nivel de Landau en el problema no-relativista, (1.23), y

$$\int \frac{dzd\bar{z}}{2i} \psi_{0m}^\dagger(z, \bar{z}) \psi_{0m'}(z, \bar{z}) = \delta_{mm'}$$

Para los demás niveles de energía

$$\psi_{km}^\pm(z, \bar{z}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \Psi_{km}(z, \bar{z}) \\ \mp \Psi_{k-1m+1}(z, \bar{z}) \end{pmatrix} \quad (1.108)$$

donde  $\Psi_{km}^\pm(z, \bar{z})$  son las funciones de onda para el problema no-relativista, (1.24). En este caso distinguimos entre las soluciones de energía positiva,  $\psi_{km}^+(z, \bar{z})$ , y negativa,  $\psi_{km}^-(z, \bar{z})$ , en cada nivel de energía, y

$$\int \frac{dzd\bar{z}}{2i} \psi_{km}^{\pm \dagger}(z, \bar{z}) \psi_{k'm'}^\pm(z, \bar{z}) = \delta_{kk'} \delta_{mm'}$$

$$\int \frac{dzd\bar{z}}{2i} \psi_{km}^{\pm \dagger}(z, \bar{z}) \psi_{k'm'}^\mp(z, \bar{z}) = 0 \quad \int \frac{dzd\bar{z}}{2i} \psi_{km}^{\pm \dagger}(z, \bar{z}) \psi_{0m'}(z, \bar{z}) = 0$$

Cada nivel de energía está infinitamente degenerado pero la densidad de estados posibles será finita e igual a:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \psi_{0m}^\dagger(z, \bar{z}) \psi_{0m}(z, \bar{z}) = \frac{eB}{hc} \quad (1.109)$$

y

$$\sum_{m=-k}^{\infty} \psi_{km}^{\pm \dagger}(z, \bar{z}) \psi_{km}^\pm(z, \bar{z}) = \frac{eB}{hc} \quad (1.110)$$

Es decir, la densidad de estados, por unidad de área y por espín, es finita, y proporcional a la intensidad del campo magnético; resultado que coincide con el obtenido en el problema no-relativista (1.35).

Si elegimos el gauge de Landau el operador de Dirac en forma matricial será

$$H_D^0 = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{D} \\ \tilde{D}^\dagger & 0 \end{pmatrix}$$

Los operadores  $\tilde{D}$  y  $\tilde{D}^\dagger$  son los transformados gauge de  $D$  y  $D^\dagger$ , es decir,

$$\begin{aligned} \tilde{D} &= \mathcal{G}D\mathcal{G}^\dagger = cp_2 + i(cp_1 + eBx_2) \\ \tilde{D}^\dagger &= \mathcal{G}D^\dagger\mathcal{G}^\dagger = cp_2 - i(cp_1 + eBx_2) \end{aligned}$$

donde  $\mathcal{G}$  es el operador unitario (1.51). O bien,

$$\begin{aligned} \tilde{D} &= -\sqrt{2eB\hbar c} \tilde{a}^\dagger \\ \tilde{D}^\dagger &= -\sqrt{2eB\hbar c} \tilde{a} \end{aligned} \quad (1.111)$$

Los operadores  $\tilde{a}$  y  $\tilde{a}^\dagger$  son los introducidos en la representación número para el problema de Landau (1.53). El Hamiltoniano será entonces

$$H_D^0 = -\sqrt{2eB\hbar c} \begin{pmatrix} 0 & \tilde{a}^\dagger \\ \tilde{a} & 0 \end{pmatrix}$$

El problema espectral puede reducirse al problema no relativista de Landau como en el gauge simétrico; así, el espectro vendrá dado por

$$E_{\tilde{n}} = \pm\sqrt{2\tilde{n}(eB\hbar c)}, \quad \tilde{n} = 0, 1, 2, \dots \quad (1.112)$$

Y una base ortonormal en representación de coordenadas será

$$\phi_{\tilde{n}k_1}^\pm(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \Phi_{\tilde{n}k_1}(x_1, x_2) \\ \mp\Phi_{\tilde{n}-1k_1}(x_1, x_2) \end{pmatrix}, \quad \tilde{n} \neq 0 \quad (1.113)$$

donde  $\Phi_{\tilde{n}k_1}(x_1, x_2)$  son las funciones de onda propias del Hamiltoniano de Schrödinger, y del operador  $p_1$ , en el gauge de Landau, (1.49).

Para los modos cero, tenemos

$$\phi_{0k_1}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \Phi_{0k_1}(x_1, x_2) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.114)$$

con  $\Phi_{0k_1}(x_1, x_2)$  dadas por (1.48). Como en el gauge simétrico, tenemos soluciones de energía positiva  $\phi_{\tilde{n}k_1}^+$ , negativa  $\phi_{\tilde{n}k_1}^-$ , y los modos cero  $\phi_{0k_1}(x_1, x_2)$ .

En el gauge de Landau, a diferencia del gauge simétrico, el Hamiltoniano no conmuta con la componente del momento angular total en la dirección del campo magnético, sino que  $[H_D^0, p_1] = 0$ ; luego, los observables para este gauge son  $H_D^0$  y  $p_1$ . Los estados propios del Hamiltoniano son propios del operador momento canónico  $p_1$ , con autovalor  $p_1 = \hbar k_1$ . Cada nivel de energía está infinitamente degenerado, y la degeneración viene caracterizada por  $k_1$ , que toma valores en el continuo  $-\infty < k_1 < \infty$ . Estos estados no son propios de  $J_3$  ni de  $S_3$ , salvo los modos cero que son propios de  $\sigma_3$ , y por tanto, son estados con espín definido.

Siguiendo el razonamiento que vimos para el problema no-relativista, en una superficie de área finita aunque suficientemente grande, imponiendo condiciones periódicas para las funciones de onda, podemos calcular la densidad de estados para cada nivel de energía, que será:

$$n_B = \frac{eB}{hc}$$

En resumen, en el estudio que hemos realizado sobre el espectro del operador de Dirac para una partícula sin masa, en un campo magnético homogéneo y perpendicular al plano, hemos encontrado como característica fundamental la existencia de soluciones de energía cero (modos cero) junto con las soluciones esperadas de energía positiva y negativa. Tanto para los modos cero como para el resto existe, como es propio de este sistema, una degeneración infinita para cada nivel de energía, que dará lugar a una densidad finita de estados posibles si consideramos el sistema en una región finita del plano. Como veremos, estas dos propiedades fundamentales tendrán un significado importante al estudiar el problema en el contexto de la Teoría Cuántica de Campos.

### 1.2.2 Simetría de conjugación y modos cero. Masa: Asimetría y Flujo espectral

El Hamiltoniano de Dirac estudiado posee una simetría de conjugación que relaciona las soluciones de energía negativa con las de energía positiva. Es decir, existe una matriz unitaria  $\mathcal{C}$ , tal que

$$\begin{aligned} \{H_D^0, \mathcal{C}\} &= 0 \\ \mathcal{C}\psi_E &= \psi_{-E} \end{aligned} \tag{1.115}$$

Teniendo en cuenta la forma del Hamiltoniano en la representación elegida para las matrices de Dirac, es fácil comprobar que la matriz unitaria en este caso es

$\mathcal{C} = \sigma_3$ , y por tanto,  $\{H_D^0, \sigma_3\} = 0$ . El espectro es totalmente simétrico bajo esta transformación en el sentido:

$$\sigma_3 \psi_E = \psi_{-E} \quad E \neq 0 \quad (1.116)$$

$$\sigma_3 \psi_0 = \psi_0 \quad (1.117)$$

y los modos cero son autoconjugados [57, 63]

La existencia de modos cero autoconjugados es un fenómeno reminiscente de propiedades topológicas. Sobre una variedad bidimensional, diferenciable, compacta y orientada, los campos de Dirac son secciones de un fibrado spinorial que descompone en suma directa de dos de acuerdo con los autoestados de  $\sigma_3$ . El operador de Dirac lleva de unos a otros y es Fredholm: su núcleo y su co-núcleo son de dimensión finita. Fibrados equivalentes se caracterizan por la primera clase de Chern, que de acuerdo con la teoría de Chern-Weyl, es la integral normalizada de la curvatura de la conexión  $U(1)$ , el flujo magnético en términos físicos. El teorema del índice identifica el número de modos cero con la primera clase de Chern, y así, son inevitables en fibrados no triviales.

En nuestro caso, el efecto Hall sobre el plano, la variedad aunque topológicamente trivial puede entenderse como el límite de volumen infinito de una esfera o cuando los ciclos que generan la homología en una superficie de Riemann de género  $g > 0$  devienen en rectas. El operador de Dirac deja de ser Fredholm pero mantiene un núcleo infinito como consecuencia de este proceso de límite. Desarrollaremos con precisión estas ideas en la Parte II de esta memoria; de momento constataremos cómo el número fermiónico del estado de vacío de nuestro operador en Segunda Cuantificación, cuyo cálculo se llevará a cabo en el Capítulo 2 tanto en el formalismo de Feynman como Hamiltoniano, proporciona como resultado el Teorema del Índice.

Al pasar del problema de una partícula al problema en Segunda Cuantificación consideramos que el estado vacío es aquél en el cual todos los niveles de energía negativa están ocupados, y los niveles de energía positiva vacíos. Es posible, entonces, determinar el número fermiónico del estado vacío, que representa el número de estados de energía negativa ocupados, utilizando simplemente las propiedades del operador de Dirac, es decir, la simetría bajo conjugación y la existencia de modos cero [99]. Como veremos más adelante solamente los modos cero dan una contribución al número fermiónico, y así:

$$N = +\frac{1}{2}(\#\text{modos cero ocupados}) - \frac{1}{2}(\#\text{modos cero no ocupados}) \quad (1.118)$$

donde

$$N = \frac{1}{2} \int \langle 0 | [\psi^\dagger(x), \psi(x)] | 0 \rangle \quad (1.119)$$

y  $\psi(x)$  es el campo fermiónico.

Desde el punto de vista matemático el Teorema del Índice nos proporciona el número de modos cero como el índice del operador de Dirac para una partícula,

$$\text{Indice} H_D^0 = \text{DimKer} D^\dagger - \text{DimKer} D \quad (1.120)$$

en nuestro caso,  $\text{DimKer} D = 0$ , y por tanto, el índice cuenta el número total de modos cero determinando así completamente los posibles valores del número fermiónico. La existencia de modos cero induce la presencia de estados cuánticos con un número fermiónico fraccionario [58, 99].

Resulta interesante estudiar qué sucede cuando en el Hamiltoniano de Dirac introducimos un término de masa:

$$H_D^m = H_D^0 + \beta m c^2 = \begin{pmatrix} m c^2 & D \\ D^\dagger & -m c^2 \end{pmatrix} \quad (1.121)$$

El espectro para el nuevo operador se deduce fácilmente del ya calculado teniendo en cuenta que  $(H_D^m)^2 = (H_D^0)^2 + m^2 c^4$ . Así, en el gauge simétrico, los niveles de energía serán ahora:

$$E_k = \pm \sqrt{2k(eB\hbar c) + m^2 c^4}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.122)$$

y las funciones de onda normalizadas (propias de  $J_3$ ):

$$\psi_{km}^\pm(z, \bar{z}) = \sqrt{\frac{|E_k| \pm m c^2}{2|E_k|}} \begin{pmatrix} \Psi_{km}(z, \bar{z}) \\ -\frac{|E_k^0|}{\pm|E_k| + m c^2} \Psi_{k-1, m+1}(z, \bar{z}) \end{pmatrix}, \quad k \neq 0 \quad (1.123)$$

donde  $E_k^0$  es la energía para el caso de masa cero ya estudiado (1.104).

Por otro lado, los estados de la forma

$$\psi_{0m}(z, \bar{z}) = \begin{pmatrix} \Psi_{0m}(z, \bar{z}) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.124)$$

tienen energía  $E_0 = +m c^2$ . La degeneración sigue siendo infinita para cada nivel de energía como consecuencia de la simetría de rotación propia de este gauge.

El espectro de este operador ya no es simétrico, ver Figura 1.4, como sucedía en el caso de masa cero, sino que ahora tenemos una asimetría espectral producida por

los modos cero que pasan a ser propios de este Hamiltoniano<sup>4</sup> con energía positiva, sin que el correspondiente autovalor negativo aparezca en el espectro. Es decir, para los estados correspondientes a niveles de energía  $k \neq 0$  tenemos una solución de energía positiva  $\psi_{km}^+$  y la correspondiente de energía negativa  $\psi_{km}^-$ , que ahora no se pueden relacionar por medio de una matriz de conjugación; y para los estados con  $k = 0$ , sólo la solución con energía positiva es posible en la representación que hemos tomado para las matrices de Dirac, y con el sentido elegido para el campo externo.

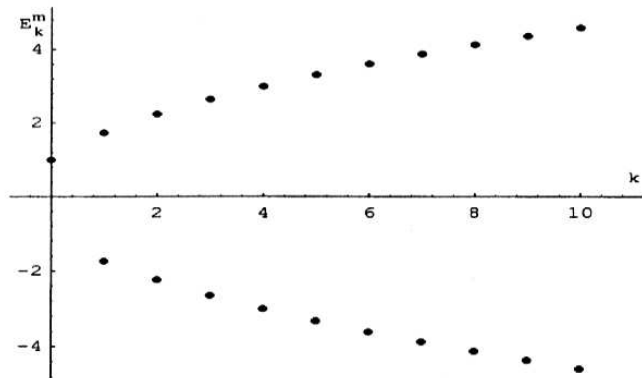


Figura 1.4: Espectro del operador de Dirac para una partícula con masa distinta de cero.

En Segunda Cuantificación es posible calcular el número fermiónico en el estado vacío y encontramos que es proporcional al flujo del campo magnético, [99]:

$$N = -\text{sig}(m) \frac{1}{2} \frac{e}{\hbar c} \int d^2x B$$

Si suponemos que el sistema está en una superficie finita de área  $A$ , el número fermiónico será proporcional a la densidad de modos cero, que como sabemos es finita, así:

$$N = -\text{sig}(m) \frac{1}{2} \frac{\Phi}{\Phi_0}$$

donde  $\Phi = BA$  es el flujo del campo magnético y  $\Phi_0 = \frac{\hbar c}{e}$  es el cuanto de flujo. El número fermiónico depende del signo de la masa, ya que en el límite de masa cero

<sup>4</sup>El Hamiltoniano  $H_D^m$  no tiene modos cero pues  $(H_D^m)^2 = (H_D^0)^2 + m^2 c^4 \geq m^2 c^4$ .

será positivo o negativo dependiendo de que la asimetría producida en el espectro al introducir el término de masa esté por encima o por debajo del cero. En nuestro caso resulta:

$$\lim_{m \rightarrow 0} N = -\frac{1}{2} \frac{\Phi}{\Phi_0} \quad (1.125)$$

encontramos la expresión (1.118) cuando todos los modos cero están desocupados.

En definitiva, la asimetría espectral esta directamente relacionada con la existencia de modos cero para el operador de Dirac,  $H_D^0$ , y es el índice de este operador el que caracteriza el número total de dichos modos, y por tanto, el número fermiónico para el estado fundamental (vacío) en los dos sistemas:  $m = 0$  y  $m \neq 0$ .

Por último, veamos la relación entre la asimetría espectral asociada al término de masa y el *flujo espectral* en esta teoría. Para ello consideremos una familia uniparamétrica de Hamiltonianos de Dirac,  $H_D^{m(\tau)}$ , donde  $\tau \in (-\infty, \infty)$ , en un campo magnético uniforme, y con un término de masa que depende del parámetro  $\tau$ .

El Hamiltoniano para cada  $\tau$  será, por tanto,

$$H_D^{m(\tau)} = H_D^0 + \sigma_3 m(\tau) c^2$$

Si tomamos

$$\begin{aligned} m(\tau) &= m \left( f(\tau) - \frac{1}{2} \right) \\ f(\tau) &= \frac{1}{1 + e^{-\tau}} \end{aligned} \quad (1.126)$$

y suponemos que el Hamiltoniano es una función adiabática del parámetro  $\tau$ , es fácil comprobar que<sup>5</sup>

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} H_D^{m(\tau)} = H_D^{-\frac{m}{2}} \quad , \quad \lim_{\tau \rightarrow +\infty} H_D^{m(\tau)} = H_D^{\frac{m}{2}}$$

En  $-\infty$  y  $+\infty$  el Hamiltoniano posee una asimetría espectral, y la energía de los modos cero para estos operadores será:  $E_0 = -\frac{m}{2}$  y  $E_0 = +\frac{m}{2}$ , respectivamente.

Dado un valor de  $\tau$ , el espectro para el Hamiltoniano de Dirac es lógicamente:

$$(E_k^{m(\tau)})^2 = (E_k^0)^2 + (m(\tau))^2$$

Para  $k \neq 0$  vemos que  $|E_k^{m(\tau)}| > |m(\tau)|$ , entonces al variar el parámetro los autovalores positivos continúan siendo positivos, y los negativos siguen siendo negativos, para toda la familia de Hamiltonianos. Sin embargo, para  $k = 0$ , resulta que  $E_0^{m(\tau)} = m(\tau)$ , y al variar el parámetro puede tomar todos los valores desde

---

<sup>5</sup>Tomamos  $\hbar = c = 1$

$-\frac{m}{2}$  hasta  $+\frac{m}{2}$  pasando por el cero, ver Figura 1.5,

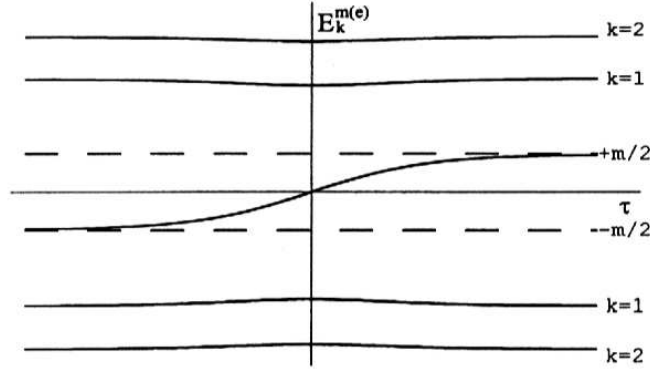


Figura 1.5: Espectro del operador de Dirac para una partícula con masa  $m(\tau)$  parametrizada por  $\tau$ .

En esta situación encontramos que la diferencia entre el número fermiónico para el estado fundamental en los dos límites asintóticos viene dada por el *flujo espectral* de la familia de operadores  $H_D^\tau$ :

$$N_\infty - N_{-\infty} = \text{flujo espectral}$$

El *flujo espectral*, por otro lado, puede determinarse como el índice de un operador de Dirac, [99], definido en una dimensión más:

$$H_D^L = \begin{pmatrix} 0 & D_L \\ D_L^\dagger & 0 \end{pmatrix}$$

donde

$$D_L = i\sigma_3 \partial_\tau + i\sigma_3 H_D^{m(\tau)}$$

Si buscamos las soluciones a la ecuación

$$(i\sigma_3 \partial_\tau + i\sigma_3 H_D^{m(\tau)})\Phi(x, \tau) = 0$$

en la aproximación adiabática:  $\Phi(x, \tau) = f(\tau)\phi_\tau(x)$ , donde

$$H_D^{m(\tau)}\phi_\tau(x) = E(\tau)\phi_\tau(x)$$



que substituyendo en la ecuación resulta:

$$\frac{\partial f(\tau)}{\partial \tau} = -E(\tau)f(\tau)$$

y así

$$f(\tau) = f(0)e^{-\int_0^\tau d\tau' E(\tau')} \quad (1.127)$$

Pero  $f(\tau)$  es normalizable sólo si  $E(\tau)$  es positiva para  $\tau \rightarrow \infty$  y negativa para  $\tau \rightarrow -\infty$ . Esto es cierto únicamente para los modos cero pues su energía es  $E_0(\tau) = m(\tau)$ . Luego el *flujo espectral* viene dado por el índice del operador  $H_D^L$ , es el número de modos cero de éste y coincide exactamente con el índice de  $H_D^0$ .

Por otro lado, el número fermiónico para el estado fundamental en  $\pm\infty$  puede calcularse como hemos visto ya, y resulta así:

$$\begin{aligned} N_{-\infty} &= -\text{sig}\left(-\frac{m}{2}\right) \frac{\Phi}{2\Phi_0} \implies \lim_{m \rightarrow 0} N_{-\infty} = +\frac{1}{2} \frac{\Phi}{\Phi_0} \\ N_{+\infty} &= -\text{sig}\left(\frac{m}{2}\right) \frac{\Phi}{2\Phi_0} \implies \lim_{m \rightarrow 0} N_{+\infty} = -\frac{1}{2} \frac{\Phi}{\Phi_0} \end{aligned}$$

la diferencia entre ambos es

$$N_{\infty} - N_{-\infty} = -2 \frac{1}{2} \frac{\Phi}{\Phi_0} \equiv -\text{Indice} H_D^L \equiv -\text{Indice} H_D^0 \equiv \text{flujo espectral} \quad (1.128)$$

En resumen, la conexión entre los diferentes casos que hemos planteado será:

- El problema de una partícula descrito por  $H_D^0$  cuando se analiza en Segunda Cuantificación, y como consecuencia de la presencia de modos cero y la simetría de conjugación, implica que el estado fundamental o vacío fermiónico de Fock tiene un número fermiónico no trivial, que es proporcional al número de modos cero, y por tanto, proporcional al índice del operador de Dirac.
- El problema de una partícula con masa distinta de cero descrito por  $H_D^m$  estudiado en Segunda Cuantificación presenta una asimetría espectral asociada con los modos cero, que pueden ser estados propios con energía positiva o negativa, esta ambigüedad en el signo se ve reflejada a la hora de calcular el número fermiónico para el estado fundamental, y pasar al límite de masa cero. En cualquier caso, tenemos de nuevo que este número cuántico no trivial es proporcional al número total de modos cero, y por tanto, al índice de  $H_D^0$ .

- Por último, si tenemos una familia de sistemas de una partícula descritos por  $H_D^{m(\tau)}$  donde  $m(\tau)$  varía adiabáticamente con el parámetro  $\tau$ , en Segunda Cuantificación podemos verificar la existencia de un *flujo espectral* relacionado con aquellos autovalores que pasan de energía negativa en  $-\infty$ , a energía positiva en  $\infty$ , pasando por el cero. Son los modos cero los que dan una contribución no trivial al *flujo espectral* que puede determinarse como el índice de un nuevo operador de Dirac, definido en una dimensión más, que será igual al índice de  $H_D^0$ .

### 1.2.3 Supersimetría

Otra forma de comprender la existencia de autoestados de energía cero es considerar el cuadrado del operador  $H_D^0$  que coincide con el Hamiltoniano de Pauli, tenemos así un ejemplo de Mecánica Cuántica Supersimétrica [133, 29].

Antes de comenzar a analizar esta propiedad del sistema estudiaremos el límite no-relativista de la ecuación de Dirac. Consideremos la ecuación de Dirac para una partícula con masa, en un campo magnético uniforme, en  $(2 + 1)$  dimensiones:

$$[\vec{\alpha}(c\vec{p} + e\vec{A}) + \beta mc^2] \psi(x) = E\psi(x) \quad (1.129)$$

Expresando esta ecuación matricialmente

$$\begin{pmatrix} mc^2 & D \\ D^\dagger & -mc^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

Tenemos las siguientes ecuaciones acopladas para las componentes del espinor

$$\begin{aligned} D \psi_2 &= (E - mc^2) \psi_1 \\ D^\dagger \psi_1 &= (E + mc^2) \psi_2 \end{aligned} \quad (1.130)$$

si despejamos  $\psi_2$  en (1.130), la ecuación resultante para  $\psi_1$  es

$$\psi_2 = \frac{1}{E + mc^2} D^\dagger \psi_1 \implies \frac{1}{E + mc^2} DD^\dagger \psi_1 = (E - mc^2) \psi_1$$

Si definimos  $E^{NR} = E - mc^2$  resulta:

$$\begin{aligned} \left(\frac{D}{c}\right) \frac{1}{2m} \left[ \frac{2mc^2}{E^{NR} + 2mc^2} \right] \left(\frac{D^\dagger}{c}\right) \psi_1 &= E^{NR} \psi_1 \\ \psi_2 &= \frac{1}{2mc} \frac{2mc^2}{E^{NR} + 2mc^2} \left(\frac{D^\dagger}{c}\right) \psi_1 \end{aligned}$$

En el límite no-relativista,  $E \approx mc^2$ , si nos quedamos a orden cero en  $(\frac{v}{c})^2$ , entonces:

$$\frac{DD^\dagger}{2mc^2}\psi_1 = E^{NR}\psi_1 \quad (1.131)$$

$$\psi_2 = \frac{1}{2mc^2}D^\dagger\psi_1 \quad (1.132)$$

En este límite, la segunda componente del espinor,  $\psi_2$ , es de orden uno en  $(\frac{v}{c})$ , y por tanto, es la componente pequeña respecto de la primera,  $\psi_2 \ll \psi_1$  [113].

De la expresión de los operadores  $D$  y  $D^\dagger$  en cualquiera de los gauges estudiados se deduce

$$H_S = \frac{1}{4mc^2}(DD^\dagger + D^\dagger D) \quad \text{con} \quad [D^\dagger, D] = 2eB\hbar c$$

donde  $H_S$  es el Hamiltoniano de Schrödinger. Así, la ecuación resultante para la primera componente del espinor será

$$\left[ \frac{1}{2m} \left( \vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 - \hbar \frac{eB}{2mc} \right] \psi_1(\vec{x}) = E^{NR} \psi_1(\vec{x}) \quad (1.133)$$

Resulta, por tanto, la ecuación en mecánica cuántica no-relativista de Schrödinger-Pauli para un espinor de dos componentes,  $\psi(\vec{x})$ ,

$$\left[ \frac{1}{2m} \left( \vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 I - \hbar \frac{eB}{2mc} \sigma_3 \right] \psi(\vec{x}) = E^{NR} \psi(\vec{x}) \quad (1.134)$$

que en particular para  $\psi_1$  se reduce a (1.133). Es decir, en el límite no-relativista tenemos el Hamiltoniano de Pauli dado por

$$H_P = H_S I + \frac{e\hbar}{2mc} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} \quad (1.135)$$

donde  $I$  es la matriz identidad,  $(2 \times 2)$ , y  $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  son las matrices de Pauli.

El espectro y las funciones de onda (normalizadas) propias de este operador en el gauge simétrico son:

$$\psi_{km}(z, \bar{z}) = \begin{pmatrix} \Psi_{km}(z, \bar{z}) \\ -\frac{|E_k^0|}{2mc^2} \Psi_{k-1m+1}(z, \bar{z}) \end{pmatrix}, \quad E_k^{NR} = \frac{(E_k^0)^2}{2mc^2} \quad (1.136)$$

para  $E^{NR} \neq 0$ ; y para  $E^{NR} = 0$

$$\psi_{0m} = \begin{pmatrix} \Psi_{0m}(z, \bar{z}) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.137)$$

donde  $\Psi_{km}(z, \bar{z})$  y  $\Psi_{0m}(z, \bar{z})$  son (1.23) y (1.24) respectivamente. El estado fundamental para el Hamiltoniano de Pauli tiene energía cero, esto contrasta con el problema de Schrödinger, en el cual la energía del estado fundamental es proporcional a  $B$ , y por tanto, aumenta linealmente con la intensidad del campo magnético, ver Figura 1.6. En consecuencia, en el problema de Schrödinger no es posible conseguir que la energía del estado fundamental se aproxime a cero arbitrariamente. Es, precisamente, el término de espín que se introduce en la ecuación de Pauli, el que desdobra los niveles de Schrödinger produciendo automáticamente un estado fundamental de energía cero independientemente de la intensidad del campo magnético. Esta propiedad, por otra parte, es extensible al cualquier Hamiltoniano de Dirac, en el cual el estado fundamental dependa únicamente de la masa de la partícula, de esta forma en el caso de masa cero la energía de dicho estado es nula [134].

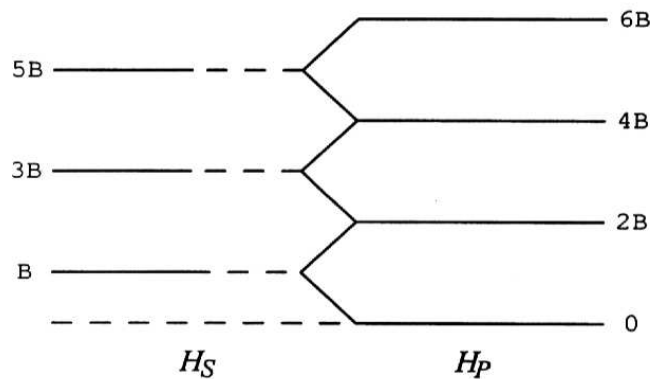


Figura 1.6: Niveles de Landau para el operador de Schrödinger frente a los correspondientes del operador de Pauli.

Es interesante estudiar la estructura supersimétrica presente en esta teoría. Consideremos, por tanto, el Hamiltoniano de Pauli definido en un espacio de Hilbert  $\mathbf{H}$ . De la expresión matricial del operador de Dirac para partículas sin masa, (1.98), vemos que:

$$H_P = \frac{1}{2mc^2}(H_D^0)^2 = \frac{1}{2mc^2} \begin{pmatrix} DD^\dagger & 0 \\ 0 & D^\dagger D \end{pmatrix} \quad (1.138)$$

Por otro lado, en esta teoría tenemos un operador de conjugación,  $\mathcal{C}$ , que

satisface (1.115). Este operador es autoadjunto y  $\mathcal{C}^2 = 1$ , luego tendrá solamente los autovalores 1 y  $-1$ . Los subespacios del espacio de Hilbert de autoestados de este operador pueden denotarse por:

$$\mathbf{H}_f = \{\psi \in \mathbf{H} \mid \mathcal{C}\psi = -\psi\} \quad (1.139)$$

$$\mathbf{H}_b = \{\psi \in \mathbf{H} \mid \mathcal{C}\psi = \psi\} \quad (1.140)$$

y tenemos la descomposición  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_f \oplus \mathbf{H}_b$ . Es decir, el espacio de Hilbert puede descomponerse en suma directa de dos subespacios, cada uno formado por estados que llamaremos bosónicos y fermiónicos respectivamente [29].

Esto nos indica que en esta teoría tenemos supersimetría, en particular, se trata de la representación supersimétrica para dimensión espacial cero introducida por Witten [134, 133].

Para constatar este hecho, definamos los operadores  $Q$  y  $Q^\dagger$  de la forma:

$$Q = \frac{1 + \sigma_3}{2} H_D^0 = \begin{pmatrix} 0 & D \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.141)$$

$$Q^\dagger = \frac{1 - \sigma_3}{2} H_D^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ D^\dagger & 0 \end{pmatrix} \quad (1.142)$$

resulta que

$$\begin{aligned} \{Q, Q\} &= \{Q^\dagger, Q^\dagger\} = 0 \\ \{Q, Q^\dagger\} &= (2mc^2)H_P \end{aligned} \quad (1.143)$$

y, por tanto,

$$[Q, H_P] = 0 \quad , \quad [Q^\dagger, H_P] = 0$$

Los operadores  $Q$  y  $Q^\dagger$  así definidos generan una simetría del operador de Pauli, y puesto que  $Q^2 = Q^{\dagger 2} = 0$ , se trata de una supersimetría.

Sobre los estados propios del operador de Pauli con energía distinta de cero  $Q$  y  $Q^\dagger$  actúan de la forma

$$Q \begin{pmatrix} |B, k\rangle \\ |F, k\rangle \end{pmatrix} = \sqrt{(2mc^2)E_k^P} \begin{pmatrix} |B, k\rangle \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow D|F, k\rangle = |E_k^0| |B, k\rangle \quad (1.144)$$

$$Q^\dagger \begin{pmatrix} |B, k\rangle \\ |F, k\rangle \end{pmatrix} = \sqrt{(2mc^2)E_k^P} \begin{pmatrix} 0 \\ |F, k\rangle \end{pmatrix} \Leftrightarrow D^\dagger|B, k\rangle = |E_k^0| |F, k\rangle$$

donde

$$E_k^P = \frac{E_k^0{}^2}{2mc^2}$$

y las componentes del espinor las denotamos por:

$$|\Psi_1\rangle = |B, k\rangle \quad , \quad |\Psi_2\rangle = |F, k\rangle \quad (1.145)$$

tal que  $\langle\Psi_1|\Psi_1\rangle = \langle\Psi_2|\Psi_2\rangle = 1$ .

Vemos en (1.144) que el operador  $D$  pasa de estados fermiónicos,  $|F, k\rangle$ , a bosónicos,  $|B, k\rangle$ , y  $D^\dagger$  de bosónicos,  $|B, k\rangle$ , a fermiónicos,  $|F, k\rangle$  y, en definitiva, el operador de Dirac,  $H_D^0$ , conecta estados bosónicos con estados fermiónicos.

Consideremos un estado bosónico,  $|B\rangle$ , y un estado fermiónico,  $|F\rangle$ , con momento angular entero o semientero. Definimos el operador, [133]:

$$(-1)^F \equiv e^{-2\pi i j_3} \quad (1.146)$$

que permite distinguir estos estados, pues

$$(-1)^F |B\rangle = |B\rangle \quad , \quad (-1)^F |F\rangle = -|F\rangle$$

Este operador satisface:

$$\begin{aligned} (-1)^F Q + Q(-1)^F &= 0 \\ (-1)^F Q^\dagger + Q^\dagger(-1)^F &= 0 \end{aligned}$$

y matricialmente puede representarse por:  $(-1)^F = \sigma_3$ ; por tanto, coincide con el operador de conjugación,  $\mathcal{C}$ , que anticonmuta con el Hamiltoniano de Dirac, y permite así distinguir entre las componentes bosónicas y fermiónicas de un espinor con energía distinta de cero.

Aunque los estados de energía distinta de cero forman pares bose-fermi, como se deduce de la ecuación espectral para  $Q$  y  $Q^\dagger$ , esto no es cierto para los estados con energía cero. Cualquier estado de energía cero, bosón o fermión, es aniquilado por  $Q$  y  $Q^\dagger$ :

$$Q|B, 0\rangle = Q^\dagger|F, 0\rangle = 0$$

Los estados de energía cero son, por tanto, singletes, es decir, representaciones unidimensionales de la supersimetría [133]. Sin embargo, en el sistema que estamos estudiando<sup>6</sup> los únicos estados de energía cero son de la forma:  $|\Psi_1\rangle = |0, m\rangle$  y  $|\Psi_2\rangle = 0$ ; es decir, son estados bosónicos. Este caracter bosónico o fermiónico de

---

<sup>6</sup>En la representación elegida para las matrices de Dirac (1.94).

los estados de energía cero viene determinado, bien por el sentido elegido para el campo magnético perpendicular al plano,  $\vec{B} = \pm B\vec{k}$ , bien por el signo de la carga de los portadores,  $q = \pm e$ ,  $e > 0$ .

En definitiva, la forma general del espectro de una Teoría Supersimétrica es la siguiente: los estados de energía distinta de cero forman siempre pares bose-fermi, los estados de energía cero no están apareados, pues cada uno es aniquilado separadamente por  $Q$  y  $Q^\dagger$ , de manera que no tienen por qué ser iguales en número.

La diferencia entre el número de estados de energía cero bosónicos y fermiónicos es:

$$n_F^0 - n_B^0 \equiv \text{Tr}(-1)^F$$

está relacionada formalmente con la traza del operador  $(-1)^F$ . En particular, si el espacio de Hilbert para los modos cero está formado solamente por los autovectores del tipo bosónico, como sucede en nuestro caso,  $n_F^0 = 0$ , y, por tanto, la traza  $\text{Tr}(-1)^F$  nos da el número total de modos cero. Se cierra así el círculo entre modos cero, asimetría espectral, *flujo espectral* y supersimetría; características de nuestro sistema que tienen su origen en la topología no trivial inducida por la presencia del campo magnético.





## Capítulo 2

# Electrodinámica Cuántica en el plano

### 2.1 Formalismo de Feynman: Anomalías

En el formalismo de integral funcional de Feynman calcularemos la acción efectiva para la electrodinámica cuántica bidimensional. La acción asociada al campo electromagnético, interaccionando con un campo fermiónico en  $(2+1)$  dimensiones, es invariante gauge e invariante bajo simetrías discretas: paridad e inversión temporal (para fermiones sin masa). Sin embargo, la acción efectiva resultante al integrar en las variables fermiónicas viola una de estas dos simetrías. Si mantenemos la invariancia gauge como simetría al regularizar, en el cálculo de la acción efectiva, encontramos que en ésta aparece un término anómalo que no es invariante bajo paridad, y que coincide exactamente con la segunda clase característica de Chern.

Utilizaremos dos métodos para determinar la anomalía presente en esta teoría. En primer lugar, calcularemos la acción efectiva para un campo fermiónico con masa utilizando el método de regularización de Pauli-Villars, el término de la anomalía depende únicamente del signo de la masa, y por tanto, aparecerá incluso para fermiones sin masa [110]. En segundo lugar, teniendo en cuenta la analogía entre la anomalía en tres dimensiones y la anomalía axial, característica de las teorías gauge en cuatro dimensiones, estudiaremos la anomalía de paridad y determinaremos, utilizando el método de Fujikawa [41], cómo se modifica el Jacobiano para la medida fermiónica bajo una transformación  $U(1)$  (relacionada con las transformaciones discretas de paridad e inversión temporal) para encontrar el término anómalo de la acción efectiva.

Consideremos la integral funcional para la acción  $S$  dada por:

$$\begin{aligned} S &= \int d^3x \mathcal{L} \\ &= \int d^3x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + c\bar{\psi} \left[ \gamma^\mu (i\hbar\partial_\mu + \frac{e}{c} A_\mu(x)) - mc \right] \psi \right\} \end{aligned} \quad (2.1)$$

donde  $A^\mu(x) = (A^0(x), \vec{A}(x))$  es el tripotencial vector asociado al campo electromagnético,  $\psi(x)$  es el campo fermiónico, con<sup>1</sup>  $\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger(x)\gamma^0$ , y  $F^{\mu\nu}$  es el tensor electromagnético:

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \\ F^{12} &= B, \quad F^{0k} = -E^k, \quad k = 1, 2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

resulta por tanto:<sup>2</sup>

$$Z = \int [\mathcal{D}A_\mu][\mathcal{D}\bar{\psi}][\mathcal{D}\psi] e^{iS} \quad (2.3)$$

La integración funcional en los campos de Fermi produce:

$$\begin{aligned} Z &= \int [\mathcal{D}A_\mu] e^{iS_{\text{ef}}} \\ &= \int [\mathcal{D}A_\mu] e^{i \left[ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + I_{\text{ef}}[A] \right]} \end{aligned} \quad (2.4)$$

La acción efectiva  $I_{\text{ef}}[A]$  corresponde a:

$$\begin{aligned} e^{iI_{\text{ef}}[A]} &= \int [\mathcal{D}\bar{\psi}][\mathcal{D}\psi] e^{i \int d^3x \bar{\psi} [i\gamma^\mu (\partial_\mu - ieA_\mu) - m] \psi} \\ &= \text{Det}[-i[i\gamma^\mu (\partial_\mu - ieA_\mu) - m]] \end{aligned} \quad (2.5)$$

En ausencia de campos externos la integral funcional debe estar normalizada, por lo que debemos dividir este resultado formal por el determinante del operador de Dirac libre, así [105, 16]:

$$\frac{\text{Det}[i(\frac{1}{i}\gamma^\mu (\partial_\mu - ieA_\mu) + m)]}{\text{Det}[i(\frac{1}{i}\gamma^\mu \partial_\mu + m)]} = \text{Det} \left[ 1 + \frac{e\gamma^\mu A_\mu}{i\gamma^\mu \partial_\mu - m} \right] \quad (2.6)$$

Expresando el determinante en función de la traza del logaritmo encontramos:

$$I_{\text{ef}}[A] = -i \text{Tr} \ln \left[ 1 + \frac{e\gamma^\mu A_\mu}{i\gamma^\mu \partial_\mu - m} \right] \quad (2.7)$$

<sup>1</sup>Las matrices de Dirac ( $2 \times 2$ ) las tomamos en la representación:  $\gamma^0 = \sigma^3, \gamma^1 = i\sigma^1, \gamma^2 = i\sigma^2$

<sup>2</sup>Tomamos  $\hbar = c = 1$

donde  $\text{Tr}$  es la traza del operador diferencial que actúa en el espacio de espinores.

Teniendo en cuenta que solamente las potencias pares de  $A_\mu$  están presentes en  $\text{Tr} \ln \left[ 1 + \frac{e\gamma^\mu A_\mu}{i\gamma^\mu \partial_\mu - m} \right]$  resulta:

$$\begin{aligned}
 & \text{Tr} \ln \left[ 1 + \frac{e\gamma^\mu A_\mu}{i\gamma^\mu \partial_\mu - m} \right] \\
 = & - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n}}{2n} \int \text{tr} G(x_1 - x_2) \gamma^\mu A_\mu(x_2) \cdots G(x_{2n} - x_1) \gamma^\nu A_\nu(x_1) d^3 x_1 \cdots d^3 x_{2n} \\
 = & - \frac{e^2}{2} \int d^3 x_1 d^3 x_2 K^{\mu\nu}(x_1 - x_2) A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) \\
 & - \frac{e^4}{4!} \int d^3 x_1 \cdots d^3 x_4 K^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4}(x_1, x_2, x_3, x_4) A_{\mu_1}(x_1) A_{\mu_2}(x_2) A_{\mu_3}(x_3) A_{\mu_4}(x_4) \\
 & - \cdots \tag{2.8}
 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 K^{\mu\nu}(x_1 - x_2) &= \text{tr} G(x_1 - x_2) \gamma^\mu G(x_2 - x_1) \gamma^\nu \\
 K^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \text{tr} G(x_1 - x_2) \gamma^{\mu_2} G(x_2 - x_3) \gamma^{\mu_3} G(x_3 - x_4) \\
 & \quad \gamma^{\mu_4} G(x_4 - x_1) \gamma^{\mu_1} \\
 & \quad + \text{perms.} \tag{2.9}
 \end{aligned}$$

Aquí,  $K^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4}(x_1, x_2, x_3, x_4)$  es completamente simétrico bajo el intercambio de los índices  $(\mu_a, x_a) \leftrightarrow (\mu_b, x_b)$ , y por tanto, es una combinación simétrica de todas las posibles permutaciones. En estas expresiones la traza está definida sobre el espacio de las matrices gamma de Dirac; y  $G(x_1 - x_2)$ , es la función de Green para el operador de Dirac libre:

$$G(x_1 - x_2) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{e^{ip(x_1 - x_2)}}{\gamma^\mu p_\mu - m} \tag{2.10}$$

Esta expansión de la traza del logaritmo se corresponde con los gráficos de Feynman que se muestran en la Figura 2.1. Es decir, es la suma de todos los gráficos con un único lazo y con un número par de fotones externos [16].

El primer gráfico representa la polarización del vacío, y da la primera corrección al propagador del fotón. El siguiente gráfico, con cuatro fotones externos, representa el *scattering* luz-luz en el vacío, y así, sucesivamente.

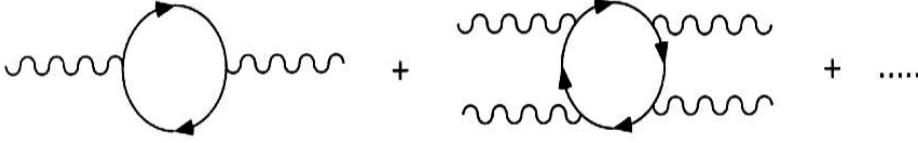


Figura 2.1: Gráficos que contribuyen a la acción efectiva  $I_{ef}[A]$ .

Por otro lado, la integral funcional de Fermi que produce esta suma de gráficos define la funcional generatriz para las funciones de correlación corriente-corriente en el vacío [16], y así

$$\exp \left[ \text{Tr} \ln \left( 1 + \frac{e\gamma^\mu A_\mu}{i\gamma^\mu \partial_\mu - m} \right) \right] = \langle e^{ie \int j^\mu A_\mu d^3x} \rangle \quad (2.11)$$

donde  $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ . Si desarrollamos esta expresión en  $A_\mu$  encontramos:

$$K^{\mu\nu}(x_1 - x_2) = \langle T j^\mu(x_1) j^\nu(x_2) \rangle \quad (2.12)$$

Quedándonos solamente con la función de correlación a dos puntos vamos a determinar la acción efectiva calculando la primera corrección al propagador del fotón, es decir, evaluando el tensor de polarización del vacío. Consideremos el diagrama de polarización del vacío representado en la Figura 2.2.

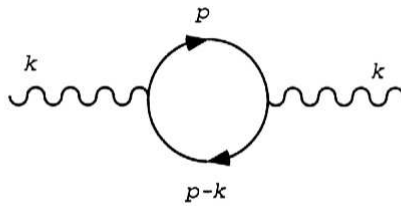


Figura 2.2: Diagrama de polarización del vacío.

La amplitud asociada a este gráfico es:

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = - \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \text{tr} \left[ (ie\gamma_\mu) \frac{i}{\gamma_\mu(p-k)^\mu - m} (ie\gamma_\nu) \frac{i}{\gamma_\mu p^\mu - m} \right] \quad (2.13)$$

Es fácil comprobar que  $\Pi_{\mu\nu}$  es linealmente divergente. Para evitar esta divergencia ultravioleta debemos utilizar un método de regularización que respete tanto la invariancia Lorentz como la invariancia gauge de la teoría. En particular, es conveniente utilizar para este problema tridimensional el método de Pauli-Villars [23, 110]. El esquema de regularización consiste en calcular el tensor de polarización regularizado asociado a la densidad Lagrangiana:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{reg}} = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}[i\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu) - m]\psi \\ & -C_1\bar{\psi}_1[i\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu) - M_1]\psi_1 - C_2\bar{\psi}_2[i\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu) - M_2]\psi_2 \end{aligned} \quad (2.14)$$

donde  $\psi_1$  y  $\psi_2$  son campos fermiónicos ficticios con masas  $M_1$  y  $M_2$ .

El tensor de polarización regularizado será por tanto:

$$\Pi_{\mu\nu}^{\text{R}}(k) \equiv \Pi_{\mu\nu}(k, m) - \sum_{j=1}^2 C_j \Pi_{\mu\nu}(k, M_j) \quad (2.15)$$

donde las constantes  $C_i$  se eligen de manera que la integración en  $k$  sea convergente, así,

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= 1 \\ C_1 M_1^2 + C_2 M_2^2 &= m^2 \end{aligned} \quad (2.16)$$

En definitiva, la integral a calcular será:

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{\text{R}}(k) = & -e^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{\text{tr}[\gamma_\mu(\gamma_\alpha(p-k)^\alpha + m)\gamma_\nu(\gamma_\beta p^\beta + m)]}{((p-k)^2 - m^2)(p^2 - m^2)} \right. \\ & \left. - \text{terminos reguladores} \right\} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Introducimos la representación paramétrica de Feynman [128]. Haciendo el cambio de variable,  $p' = p - kx$ , el denominador será una función de  $p'^2$ , y así:<sup>3</sup>

---

<sup>3</sup>Donde hemos utilizado:

$$\begin{aligned} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] &= -2i\epsilon^{\mu\nu\alpha}\gamma_\alpha \\ \text{tr}[\text{numero impar de matrices gamma}] &\neq 0 \\ \text{tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu] &= 2g^{\mu\nu} \\ \text{tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\delta] &= 2[g^{\mu\nu}g^{\lambda\delta} - g^{\mu\lambda}g^{\nu\delta} + g^{\mu\delta}g^{\nu\lambda}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^R(k) = & -2e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \\ & \left\{ \frac{-\frac{1}{3}g_{\mu\nu}p'^2 - 2x(1-x)k_\mu k_\nu + x(1-x)g_{\mu\nu}k^2 + m^2g_{\mu\nu} + 2im\epsilon_{\mu\nu\beta}k^\beta x}{(p'^2 + x(1-x)k^2 - m^2)^2} \right. \\ & \left. - \text{terminos reguladores} \right\} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Mediante una rotación de Wick pasamos al espacio Euclídeo  $p'_0 = ip'_3$ :

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^R(k) = & -\frac{ie^2}{\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^\infty p'^2 dp' \\ & \left\{ \frac{\frac{1}{3}g_{\mu\nu}p'^2 - 2x(1-x)k_\mu k_\nu + x(1-x)g_{\mu\nu}k^2 + m^2g_{\mu\nu} + 2im\epsilon_{\mu\nu\beta}k^\beta x}{(p'^2 + m^2 - x(1-x)k^2)^2} \right. \\ & \left. - \text{terminos reguladores} \right\} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Las integrales resultantes para el problema tridimensional son:

$$\begin{aligned} \int_0^\Lambda \frac{p'^4 dp'}{(p'^2 + a^2)^2} &= \Lambda + \frac{a^2}{2} \frac{\Lambda}{(\Lambda^2 + a^2)} - \frac{3a}{2} \arctan \frac{\Lambda}{a} \\ \int_0^\Lambda \frac{p'^2 dp'}{(p'^2 + a^2)^2} &= -\frac{1}{2} \frac{\Lambda}{(\Lambda^2 + a^2)} + \frac{1}{2a} \arctan \frac{\Lambda}{a} \end{aligned} \quad (2.20)$$

donde  $a^2 = m^2 - x(1-x)k^2$ .

En la primera integral aparece la divergencia lineal presente en esta teoría. Comparando este resultado con el que se obtiene en dimensión cuatro, [23], puede observarse que las divergencias disminuyen en una dimensión, de forma que pasamos de una divergencia cuadrática y logarítmica, presente en  $D = 4$ , a una divergencia lineal y un término convergente (arcotangente) en  $D = 3$ . El método de regularización en ambos casos permite eliminar la divergencia cuadrática y lineal respectivamente, y así, en nuestro caso la teoría es super-renormalizable.

En definitiva, el término lineal  $\Lambda$  se cancela con los términos reguladores teniendo en cuenta las condiciones (2.16) para los coeficientes  $C_1, C_2$ , y el tensor de polarización regularizado es:

$$\Pi_{\mu\nu}^R(k) = (k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu}k^2)\Pi_1^R(k^2) + 2im\epsilon_{\mu\nu\rho}k^\rho\Pi_2^R(k^2) \quad (2.21)$$

con

$$\begin{aligned} \Pi_1^R(k^2) &= -\frac{ie^2}{12\pi M} + \frac{ie^2}{2\pi} \left[ \frac{(k^2 + 4m^2)}{8k^3} \ln \left( \frac{2|m| + k}{2|m| - k} \right) - \frac{|m|}{2k^2} \right] \\ \Pi_2^R(k^2) &= \frac{ie^2}{8\pi M} - \frac{ie^2}{4\pi} \left[ \frac{1}{2k} \ln \left( \frac{2|m| + k}{2|m| - k} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.22)$$

donde hemos tomado el límite  $\Lambda \rightarrow \infty$ , y hemos tenido en cuenta que  $M_1^2 \gg m^2$ ,  $M_2^2 \gg m^2$ , de tal forma que podemos simplificar la dependencia en las masas y constantes asociadas al campo regulador definiendo  $\frac{1}{M} = \frac{C_1}{M_1} + \frac{C_2}{M_2}$ . Tenemos así el tensor de polarización del vacío regularizado en función de  $M$  en el cual tanto  $\Pi_1^R$  como  $\Pi_2^R$  son cantidades finitas. Algunos autores, Fradkin, Redlich, Lykken, etc, han obtenido el mismo resultado aunque en contextos diferentes al aquí planteado [39, 110, 87].

Es posible expresar la acción efectiva en función del tensor de polarización, es decir

$$iI_{\text{ef}}[A] = \frac{1}{2} \int d^3x_1 d^3x_2 \Pi_{\mu\nu}(x_1 - x_2) A^\mu(x_1) A^\nu(x_2) + \dots \quad (2.23)$$

Su transformada de Fourier:

$$\Pi_{\mu\nu}^R(x_1 - x_2) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{ik(x_1 - x_2)} \Pi_{\mu\nu}^R(k) \quad (2.24)$$

La acción efectiva asociada a la electrodinámica cuántica tridimensional será por tanto:

$$\begin{aligned} iI_{\text{ef}}[A] &= \int d^3x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \Pi_1^R(0) - m \Pi_2^R(0) A^\mu * F_\mu \right\} \\ I_{\text{ef}}[A] &= \int d^3x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \frac{e^2}{12\pi|m|} + \frac{m}{|m|} \frac{e^2}{8\pi} A^\mu * F_\mu \right\} \end{aligned} \quad (2.25)$$

donde hemos tomado el límite  $M \rightarrow \infty$ .

En definitiva, la integral funcional en el campo gauge que resulta de integrar en los campos fermiónicos cuando nos quedamos con la contribución a un lazo es:

$$\begin{aligned} Z &= \int [\mathcal{D}A_\mu] e^{iS_{\text{ef}}} \\ &= \int [\mathcal{D}A_\mu] e^{i \int d^3x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \left( 1 + \frac{e^2}{12\pi|m|} \right) + \frac{m}{|m|} \frac{e^2}{8\pi} A^\mu * F_\mu \right\}} \end{aligned} \quad (2.26)$$

En la acción efectiva para el campo gauge aparece un término topológico de tipo Chern-Simons inducido por la presencia del campo fermiónico. Esto sigue siendo cierto cuando la masa del campo fermiónico es cero, en cuyo caso aparece una ambigüedad en el signo asociada al método de regularización utilizado. El término de masa topológico garantiza la invariancia gauge de la acción efectiva aunque rompe la simetría discreta de paridad de la teoría para fermiones sin masa.

En el cálculo de la acción efectiva hemos tenido en cuenta los gráficos con un sólo lazo fermiónico, y un número par de líneas de fotón externas. Las posibles

correcciones a orden superior, ver Figura 2.3, no contribuyen al cálculo de la acción efectiva, tal y como demuestran Coleman y Hill [26], y así, la corrección radiativa al término de masa topológico se debe sólo al gráfico de un lazo. Este término de masa en nuestro caso es:

$$\theta_R = \frac{1}{4\pi} e_0^2 \frac{m}{|m|} \quad (2.27)$$

donde  $e_0$  es la constante de acoplamiento electromagnética desnuda.

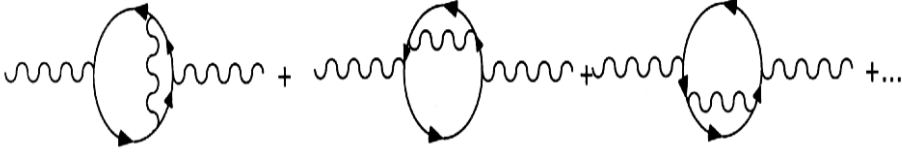


Figura 2.3: Correcciones de orden superior para el diagrama de polarización del vacío.

Para encontrar las expresiones de la constante de acoplamiento, y de la masa topológica, renormalizadas en esta teoría, consideremos la densidad Lagrangiana efectiva en la forma:

$$\mathcal{L}_{\text{ef}} = -\frac{1}{4} \left( \frac{1}{e_0^2} + \tilde{\Pi}_1(0) \right) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \tilde{\Pi}_2(0) A^\mu * F_\mu \quad (2.28)$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_1(0) &= \frac{1}{12\pi} \left[ \frac{1}{|m|} - \frac{1}{M} \right] \\ \tilde{\Pi}_2(0) &= \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{m}{|m|} - \frac{m}{M} \right] \end{aligned} \quad (2.29)$$

La carga renormalizada será, por tanto,

$$\frac{1}{e_R^2(M)} = \frac{1}{e_0^2} + \frac{1}{12\pi} \left[ \frac{1}{|m|} - \frac{1}{M} \right] \quad (2.30)$$

y si tenemos dos reguladores de masas  $M$  y  $M'$  resultará:

$$\frac{1}{e_R^2(M)} - \frac{1}{e_R^2(M')} = \frac{1}{12\pi} \left[ \frac{1}{M'} - \frac{1}{M} \right] \quad (2.31)$$

En cuanto a la masa topológica del fotón tenemos:

$$\frac{\theta_R(M)}{e_0^2} = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{m}{|m|} - \frac{m}{M} \right] \quad (2.32)$$



y con dos reguladores resultará

$$\frac{\theta_{\text{R}}(M)}{e_0^2} - \frac{\theta_{\text{R}}(M')}{e_0^2} = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{m}{M'} - \frac{m}{M} \right] \quad (2.33)$$

En el límite  $M \rightarrow \infty$  encontramos en ambos casos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{e_{\text{R}}^2} &= \frac{1}{e_0^2} + \frac{1}{12\pi|m|} \\ \frac{\theta_{\text{R}}}{e_0^2} &= \frac{m}{4\pi|m|} \end{aligned} \quad (2.34)$$

Si ahora tomamos el límite,  $m \rightarrow 0$ , el término de la anomalía no cambia, pero el primer sumando presenta una divergencia lineal infrarroja que debe eliminarse utilizando algún método de regularización. En cualquier caso, para el término de masa de Chern-Simons tenemos en este límite:

$$\theta_{\text{R}} = \pm \frac{1}{4\pi} e_0^2 \quad (2.35)$$

Nos interesa ahora relacionar esta anomalía con el Efecto Hall Cuántico. Para ello debemos considerar el caso particular en el que tenemos un campo fermiónico en el plano, en presencia de un campo magnético constante, en la dirección perpendicular al mismo, y de una corriente en el plano.

A partir de la acción efectiva que hemos calculado podemos determinar el valor esperado de la densidad de corriente,  $J^\mu = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ , en el vacío, y así,

$$\langle J^\mu(x) \rangle = -\frac{\delta I_{\text{ef}}^{\text{R}}[A]}{\delta A_\mu(x)} = -\frac{m}{|m|} \frac{e^2}{4\pi} *F^\mu \quad (2.36)$$

Para  $\mu = 0$  resulta

$$\langle J^0 \rangle = -\frac{m}{2|m|} \frac{e^2}{2\pi} B \quad (2.37)$$

es decir, la densidad de carga en el vacío, o bien, puede interpretarse como la densidad para el número fermiónico, que analizamos al estudiar la asimetría espectral, y el *flujo espectral*, presentes en esta teoría basada en el operador de Dirac, para una partícula cargada en un campo gauge externo. Suponiendo que el sistema se encuentra en una superficie de área finita,  $A$ , encontramos la expresión para el número fermiónico:

$$N = -\text{sig}(m) \frac{1}{2} \frac{\Phi}{\Phi_0}$$

donde  $\Phi = BA$  y  $\Phi_0 = \frac{2\pi}{e}$ .

Si consideramos ahora los índices espaciales,  $\mu = 1, 2$  resulta:

$$\langle J^k \rangle = -\frac{m}{2|m|} \frac{e^2}{2\pi} \epsilon^{kj} E^j \quad (2.38)$$

es decir, la corriente inducida es perpendicular al campo eléctrico como es característico del efecto Hall [62, 110]. Si tomamos el límite de masa cero encontramos:

$$\langle J^k \rangle = \pm \frac{1}{2} \frac{e^2}{2\pi} \epsilon^{kj} E^j \quad (2.39)$$

Aparece una ambigüedad en el signo, que como hemos visto en la Sección 1.2, está relacionada con la presencia de modos cero propia de sistemas con fermiones sin masa. Por otro lado, la existencia de modos cero está directamente relacionada con la anomalía, a través de los teoremas del índice, como vimos ya, y como ponen de manifiesto algunos autores, Alvarez-Gaumé, Redlich, etc. [99, 4, 110].

La conductividad Hall cuantizada que corresponde a la primera meseta en el Efecto Hall Cuántico Entero es proporcional a la masa topológica de Chern-Simons, y así, en unidades naturales, tenemos:

$$\sigma_H = \frac{e^2}{2\pi} \quad (2.40)$$

Formalmente, podemos expresar este coeficiente en función del tensor de polarización, que como hemos visto en representación de coordenadas coincide con el valor esperado en el vacío del término de correlación corriente-corriente, [39], resulta así:

$$\sigma_H = \lim_{k \rightarrow 0} 2 \frac{\epsilon^{\mu\nu\rho} k_\rho}{k^2} \Pi_{\mu\nu}(k) = \frac{e^2}{2\pi} \quad (2.41)$$

Las anomalías en Teoría Cuántica de Campos ocurren cuando el procedimiento de cuantificación no respeta alguna de las simetrías exhibidas por la Teoría Clásica correspondiente. En el método de cuantificación por integral funcional o de Feynman, la medida de integración puede no ser invariante respecto de una transformación, que es una simetría de la acción clásica. Si el determinante Jacobiano que resulta no es susceptible de ser absorbido en la normalización, la acción cuántica no es invariante respecto de dicha transformación como uno esperaría de una lectura puramente clásica: diremos que la corriente Nöther asociada es anómala [41, 42, 43].

Nos proponemos a continuación computar el determinante Jacobiano, que aparece en la medida de integración fermiónica, en Electrodinámica Cuántica en (2+1) dimensiones, a resultas de realizar la transformación  $\psi'(x) = e^{i\alpha\sigma^k} \psi(x)$ . Dichas

transformaciones de tipo  $U(1)$  global están relacionadas con la transformación discreta de paridad, y son simetrías de la acción clásicas. Seguimos un método análogo al aplicado por K. Fujikawa al estudio de la transformación  $U(1)$  *chiral*, en Cromodinámica Cuántica en  $(3+1)$  dimensiones, que es novedoso en la más difícil situación de espacio-tiempo de dimensión impar.

Partiremos de la densidad Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi} [i\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu) - m] \psi \quad (2.42)$$

y analizaremos las simetrías discretas de esta teoría en particular cuando consideramos fermiones con masa cero. Como proponen R. Jackiw *et al*, [30, 61], puede verificarse que la teoría es invariante bajo paridad e inversión temporal, si:

$$\begin{aligned} P\psi(\vec{x}, t)P^{-1} &= \sigma^1\psi(\vec{x}', t) , & PA^0(\vec{x}, t)P^{-1} &= A^0(\vec{x}', t) \\ PA^1(\vec{x}, t)P^{-1} &= -A^1(\vec{x}', t) , & PA^2(\vec{x}, t)P^{-1} &= A^2(\vec{x}', t) \\ T\psi(\vec{x}, t)T^{-1} &= \sigma^2\psi(\vec{x}, -t) \\ TA^0(\vec{x}, t)T^{-1} &= A^0(\vec{x}, -t) , & T\vec{A}(\vec{x}, t)T^{-1} &= -\vec{A}(\vec{x}, -t) \end{aligned} \quad (2.43)$$

con  $\vec{x} = (x_1, x_2)$  y  $\vec{x}' = (-x_1, x_2)$ . Si en  $\mathcal{L}$  hay un término de masa, éste es impar bajo cualquiera de estas simetrías. Incluso con masa cero, si el procedimiento de regularización requiere introducir un término de masa, como sucede con la regularización de Pauli-Villars, se produce una ruptura de simetría que se ve reflejada en el resultado final de la acción efectiva,

$$Z = \int [\mathcal{D}\bar{\psi}][\mathcal{D}\psi][\mathcal{D}A_\mu] e^{i \int d^3x \mathcal{L}} \quad (2.44)$$

a través de la modificación de la medida fermiónica:

$$d\mu(\psi) = \prod_x [\mathcal{D}\bar{\psi}][\mathcal{D}\psi] \quad (2.45)$$

cuando hacemos una transformación infinitesimal de tipo  $U(1)$  sobre las variables fermiónicas, caracterizada por el parámetro  $\alpha$ ,

$$\begin{aligned} \psi(x) &\longrightarrow \psi'(x) = e^{i\alpha\sigma^k} \psi(x) \\ \bar{\psi}(x) &\longrightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x) e^{i\alpha\sigma^k} , \quad k = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (2.46)$$

El cambio en la densidad Lagrangiana asociado a esta transformación infinitesimal es:

$$\delta\mathcal{L}_E = 2i(\delta\alpha)\bar{\psi}(\partial_k - ieA_k)\psi - 2im(\delta\alpha)\bar{\psi}\sigma_k\psi \quad (2.47)$$

donde hemos tomado como matrices gamma ( $2 \times 2$ ), las matrices antihermíticas,  $\gamma_1 = i\sigma_1, \gamma_2 = i\sigma_2, \gamma_3 = i\sigma_3$ , y hemos hecho una rotación de Wick.

Si suponemos que la medida de integración fermiónica permanece invariante bajo esta transformación debe cumplirse

$$\int d\mu(\psi)e^{-S_E(\psi)} \equiv \int d\mu(\psi')e^{-S_E(\psi')} = \int d\mu(\psi)e^{-S_E(\psi')} \quad (2.48)$$

y, por tanto, se obtiene la identidad

$$2i\langle \bar{\psi}(\partial_k - ieA_k)\psi \rangle - 2im\langle \bar{\psi}\sigma_k\psi \rangle = 0 \quad (2.49)$$

Sin embargo, como veremos, la medida de integración cambia como consecuencia de esta transformación infinitesimal, y el Jacobiano de la misma coincide con la anomalía presente en la acción efectiva.

Para evaluar el Jacobiano de esta transformación es conveniente expresar las variables fermiónicas de la forma:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sum_n a_n \psi_n(x) \\ \bar{\psi}(x) &= \sum_n \bar{b}_n \psi_n^\dagger(x) \end{aligned} \quad (2.50)$$

donde  $\gamma^\mu D_\mu \psi_n(x) = \lambda_n \psi_n(x)$  y  $\int \psi_m^\dagger(x) \psi_n(x) d^3x = \delta_{nm}$ . Los coeficientes  $a_n$  y  $\bar{b}_n$  son elementos del álgebra de Grassmann. La medida de integración en función de estos coeficientes es:

$$d\mu(\psi) = \prod_n da_n d\bar{b}_n \quad (2.51)$$

donde el Jacobiano es uno por ser  $\gamma^\mu D_\mu = \gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu)$  hermítico.

Sobre los coeficientes  $a_n$  y  $\bar{b}_n$  la transformación infinitesimal produce:

$$\begin{aligned} a'_m &= \sum_n \int d^3x \psi_m^\dagger(x) e^{i\alpha\sigma_k} \psi_n(x) a_n \\ \bar{b}'_m &= \sum_n \int d^3x \psi_n^\dagger(x) e^{i\alpha\sigma_k} \psi_m(x) \bar{b}_n \end{aligned} \quad (2.52)$$

y así

$$\prod_n da'_n d\bar{b}'_n = \exp \left[ -2i \sum_n \int d^3x \psi_n^\dagger(x) \alpha \sigma_k \psi_n(x) \right] \prod_n da_n d\bar{b}_n \quad (2.53)$$

Dado que  $\alpha$  es constante podemos sumar la serie que nos aparece en esta expresión. Suponiendo que los autovalores del operador de Dirac,  $\gamma^\mu D_\mu$ , son

pequeños comparados con el parámetro  $M$ , y pasando al límite  $M \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned} \sum_n \psi_n^\dagger(x) \sigma_k \psi_n(x) &\equiv \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_n \psi_n^\dagger(x) \sigma_k e^{-\frac{\lambda_n^2}{M^2}} \psi_n(x) \\ &\equiv \lim_{M \rightarrow \infty} \text{tr} \sum_n \psi_n^\dagger(x) \sigma_k e^{-\frac{(\gamma^\mu D_\mu)^2}{M^2}} \psi_n(x) \end{aligned} \quad (2.54)$$

Tomemos una base de ondas planas, en representación de interacción, resulta:

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow \infty} \text{tr} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{-ikx} \sigma_k e^{-\frac{(\gamma^\mu D_\mu)^2}{M^2}} e^{ikx} \\ = \lim_{M \rightarrow \infty} \text{tr} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \sigma_k e^{\left[ -\frac{k_\mu k_\mu}{M^2} + 2e \frac{k_\mu A_\mu}{M^2} - e^2 \frac{A_\mu A_\mu}{M^2} + \frac{ie}{4M^2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] F_{\mu\nu} \right]} \end{aligned} \quad (2.55)$$

donde hemos pasado al espacio Euclídeo, en el cual,

$$(\gamma^\mu D_\mu)^2 = -D_\mu D_\mu - \frac{ie}{4} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] F_{\mu\nu} \quad (2.56)$$

Para calcular esta integral reescalamos,  $k_\mu \rightarrow Mk_\mu$ , y desarrollamos en  $1/M$ . Contemplaremos dos situaciones diferentes: por un lado, consideramos las ondas planas con  $k \geq 0$ , y al final del cálculo tomamos el límite  $M \rightarrow \infty$ ; por otro lado, consideramos ondas planas con  $k < 0$ , y al final tomamos el límite  $M \rightarrow -\infty$ . La razón de estudiar por separado estas situaciones está relacionada con la ruptura de paridad de la teoría en presencia de un término de masa, de manera que dependiendo del signo del regulador (en este caso  $M$ ) tendremos un resultado o el opuesto. Aparece así la ambigüedad en el signo que observamos ya en el cálculo directo de la anomalía.

En definitiva, sólo un sumando dará una contribución finita, los demás serán nulos, bien porque aparece la traza de un número impar de matrices gamma, bien porque se anulan al tomar el límite en  $M$ ; salvo un sumando que da lugar a una divergencia lineal correspondiente a:  $\frac{ie}{4} \sigma_k [\gamma_\mu, \gamma_\nu] F_{\mu\nu} \frac{1}{M^2}$ . Este término divergente tiene un origen topológico. En variedades de dimensión cuatro expresa características provenientes de 2-ciclos. Si Fujikawa hubiese computado en [41] la variación de la medida de Berezin respecto de transformaciones  $U(n)$  hubiera encontrado una contribución análoga, esencialmente la primera clase de Chern multiplicada por el volumen de otro 2-ciclo. En  $\mathbf{R}^3$  obtenemos, vía el teorema de Stokes, un término de la forma  $\oint_\infty A_k dx^k$  multiplicado por el volumen de  $\mathbf{R}$ , de ahí la divergencia. Si excluimos líneas de Wilson, prescindiendo por tanto de su contribución, el resultado alcanzado por el método de Fujikawa coincide con el perturbativo.

Es decir, para  $k \geq 0$ , resulta:

$$\begin{aligned} & \lim_{M \rightarrow \infty} \text{tr} M^3 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \sigma_k \frac{2ek_\mu A_\mu}{M} \frac{ie}{4M^2} [\gamma_\rho, \gamma_\delta] F_{\rho\delta} e^{-k_\mu k_\mu} \\ &= \frac{1}{16\pi^2} e^2 A_\mu \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\rho\delta} F_{\rho\delta} \end{aligned} \quad (2.57)$$

y para  $k < 0$ , tendríamos el mismo resultado con el signo opuesto.

El Jacobiano asociado a esta transformación infinitesimal, en el espacio de Minkowski, y con  $\alpha = \pi$ , es:

$$\prod_n da'_n d\bar{b}'_n = \exp \left[ \pm i \int d^3 x \frac{e^2}{8\pi} A_\mu * F^\mu \right] \prod_n da_n d\bar{b}_n \quad (2.58)$$

La acción efectiva que resulta al integrar en las variables fermiónicas está formada por dos sumandos, uno de ellos relacionado con la anomalía (el factor Jacobiano calculado), y otro invariante bajo paridad.

$$I_{\text{ef}}^R[A] = I_{\text{ef}}[A] \pm i \int d^3 x \frac{e^2}{8\pi} A_\mu * F^\mu \quad (2.59)$$

La densidad de carga en el vacío vendrá dada en función de este término de anomalía de manera que:

$$\langle J^\mu \rangle = \pm \frac{e^2}{4\pi} * F^\mu \quad (2.60)$$

resultado idéntico al obtenido de forma directa en (2.36).

El cálculo de la anomalía por el método de Fujikawa puede generalizarse en el sentido propuesto por L. Alvarez-Gaumé, [3]. Esta generalización se basa en utilizar la mecánica cuántica supersimétrica para calcular la traza que aparece en el Jacobiano, asociado a la medida fermiónica, cuando hacemos una transformación infinitesimal de tipo  $U(1)$  sobre las variables fermiónicas. Como hemos visto este Jacobiano es de la forma:

$$\prod_n da'_n d\bar{b}'_n = \exp \left[ -2i \sum_n \int d^3 x \psi_n^\dagger(x) \alpha \sigma_k \psi_n(x) \right] \prod_n da_n d\bar{b}_n \quad (2.61)$$

Determinaremos la anomalía por el método planteado por Alvarez-Gaumé adaptado al problema más complejo de dimensión impar. Para determinar el Jacobiano elegimos  $\alpha$  constante de tal forma que el cálculo de la anomalía se reduce a calcular la traza en (2.61), o mejor dicho su forma regularizada:

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \int d^3 x \sum_n \psi_n^\dagger(x) \sigma_k \psi_n(x) e^{-\beta \frac{\lambda_n^2}{2}} = \lim_{\beta \rightarrow 0} \text{Tr} \sigma_k e^{-\beta \frac{(\gamma^\mu D_\mu)^2}{2}} \quad (2.62)$$

Para evaluar esta traza consideremos una teoría supersimétrica definida por el Lagrangiano:

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{1}{2} \frac{d\vec{x}}{dt} \frac{d\vec{x}}{dt} + \frac{i}{2} \bar{f} \frac{df}{dt} + ic^* \left( \frac{dc}{dt} - ie \frac{d\vec{x}}{dt} \vec{A}(\vec{x}) c \right) \\
 &+ \frac{ie}{2} c^* c f_i f_j F_{ij}(\vec{x})
 \end{aligned} \tag{2.63}$$

con la supercarga:

$$S = \bar{f} \frac{d\vec{x}}{dt} \tag{2.64}$$

esto es equivalente a lo propuesto por Alvarez-Gaumé para (3 + 1) dimensiones pero con las diferencias que veremos a continuación. Las  $x^i$  con  $i = 1, 2, 3$  son las coordenadas en  $\mathbf{R}^3$ , y representan los campos bosónicos en esta teoría, las  $f^i$  con  $i = 1, 2, 3$  son funciones reales grassman (una por cada  $x^i$ ), es decir, los campos fermiónicos, y por último,  $c$  y  $c^*$  son funciones grassman complejas asociadas al campo gauge. La cuantización canónica de esta teoría se lleva a cabo considerando:

$$\begin{aligned}
 p_i &= -i \frac{\partial}{\partial x_i} & \Rightarrow [x_i, p_j] &= i\delta_{ij} \\
 f_i &= \frac{\gamma_i}{\sqrt{2}} & \Rightarrow \{f_i, f_j\} &= \delta_{ij} \\
 c, c^* & & \Rightarrow \{c, c^*\} &= 1
 \end{aligned} \tag{2.65}$$

donde las variables canónicas son:

$$\begin{aligned}
 p_i &= \frac{dx_i}{dt} + eA_i(\vec{x})c^*c \\
 p_{f_i} &= \frac{i}{2} f_i \\
 p_c &= ic^*
 \end{aligned} \tag{2.66}$$

Entonces la supercarga será:

$$S = -i \frac{\gamma^i}{\sqrt{2}} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} - ieA_i(\vec{x}) \right) \tag{2.67}$$

es decir, equivalente al operador de Dirac, y así,  $H = S^2 = \frac{(\gamma^i D_i)^2}{2}$ .

Sin embargo, a diferencia del problema en dimensión cuatro, el algebra de las matrices gamma en dimensión tres tiene las siguientes propiedades:

$$\{\gamma_i, \gamma_j\} = 2\delta_{ij}, \quad [\gamma_i, \gamma_j] = -2i\epsilon_{ijk}\gamma_k, \quad i, j, k = 1, 2, 3 \tag{2.68}$$

es decir, tenemos solamente cuatro matrices ( $2 \times 2$ ) linealmente independientes: la identidad, y las tres matrices gamma  $\gamma_i$ ; mientras que en dimensión cuatro tenemos en total dieciseis matrices ( $4 \times 4$ ) independientes. Esta peculiaridad de la teoría tridimensional se traduce en el hecho de que podemos considerar un Lagrangiano supersimétrico, que es básicamente el dado en (2.63), pero al que le hemos añadido un término nulo, a nivel clásico, de la forma:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \frac{d\vec{x}}{dt} \frac{d\vec{x}}{dt} + \frac{i}{2} \vec{f} \frac{d\vec{f}}{dt} + ic^* \left( \frac{dc}{dt} - ie \frac{d\vec{x}}{dt} \vec{A}(\vec{x}) c \right) \\ &+ \frac{ie}{2} c^* c f_i f_j F_{ij}(\vec{x}) \pm \frac{e^2}{4} f_i A_i(\vec{x}) f_j f_k F_{jk}(\vec{x}) c^* c \end{aligned} \quad (2.69)$$

la supercarga asociada sigue siendo la misma, y  $H = S^2$ . Este término como veremos a nivel cuántico sí que tiene una contribución no nula que es, precisamente, la anomalía.

Para calcular la traza de  $\sigma_k e^{-\beta H}$  debemos tener en cuenta que la matriz  $\sigma_k$  puede identificarse con el operador número fermiónico para las variables grassman  $\vec{f}$ ,  $(-1)^F$ , dependiendo de la representación de las matrices gamma que tomemos, en particular, como vimos en la Sección 1.1.2, para una representación concreta de las matrices de Dirac tenemos  $(-1)^F \equiv \sigma_3$ , pero en general  $(-1)^F \equiv \sigma_k$ . Nótese que la elección de  $\sigma_3$  depende del sistema de referencia; es la tercera componente de un vector, y las transformaciones de Lorentz no lo dejan invariante. Teniendo en cuenta esto, resulta que  $\text{Tr}(-1)^F e^{-\beta H}$  es precisamente la función de partición para un sistema con temperatura,  $\beta^{-1}$ , descrito por la matriz densidad  $\rho = (-1)^F e^{-\beta H}$ , y así:

$$\begin{aligned} &\lim_{\beta \rightarrow 0} \int d^3 x \sum_n \psi_n^\dagger(x) \sigma_k \psi_n(x) e^{-\beta \frac{\lambda_n^2}{2}} \\ &= \lim_{\beta \rightarrow 0} \text{Tr}(-1)^F e^{-\beta \frac{(\gamma^\mu D_\mu)^2}{2}} \\ &= \lim_{\beta \rightarrow 0} \int d^3 \vec{x}^0 \int d^3 \vec{f}^0 \int [d\vec{x}(t)][d\vec{f}(t)][dc(t)][dc^*(t)] e^{-S_E(\vec{x}, \vec{f}, c, c^*)} \end{aligned} \quad (2.70)$$



donde<sup>4</sup>

$$\begin{aligned}
 S_E(\vec{x}, \vec{f}, c, c^*) &= \int_0^\beta dt \left\{ \frac{1}{2} \frac{d\vec{x}}{dt} \frac{d\vec{x}}{dt} + \frac{i}{2} \vec{f} \frac{d\vec{f}}{dt} + ic^* \left( \frac{dc}{dt} - ie \frac{d\vec{x}}{dt} \vec{A}(\vec{x}) c \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{ie}{2} c^* c f^i f^j F_{ij}(\vec{x}) \pm \frac{e^2}{4} f^i A_i(\vec{x}) f^j f^k F_{jk}(\vec{x}) c^* c \right\} \quad (2.71)
 \end{aligned}$$

La presencia de  $(-1)^F$  en la traza implica que ambos, los campos bosónicos y los campos fermiónicos, deben integrarse con condiciones de contorno periódicas:

$$\begin{aligned}
 \vec{x}(0) &= \vec{x}(\beta) = \vec{x}^0 \\
 \vec{f}(0) &= \vec{f}(\beta) = \vec{f}^0
 \end{aligned} \quad (2.72)$$

mientras que los c-fermiones deben integrarse con condiciones de contorno antiperiódicas:

$$c(0) = 0 = -c(\beta) \quad (2.73)$$

En el límite  $\beta \rightarrow \infty$  podemos desarrollar  $\vec{x}(t)$  y  $\vec{f}(t)$  en torno a las configuraciones constantes:

$$\begin{aligned}
 \vec{x}(t) &= \vec{x}^0 + \vec{y}(t), \quad \vec{y}(0) = \vec{y}(\beta) = 0 \\
 \vec{f}(t) &= \vec{f}^0 + \vec{h}(t), \quad \vec{h}(0) = \vec{h}(\beta) = 0
 \end{aligned} \quad (2.74)$$

y como las  $c$  se integran sobre condiciones antiperiódicas, la única configuración constante es  $c = 0$ . A segundo orden tenemos el Lagrangiano:

$$\begin{aligned}
 L^{(2)} &= \frac{1}{2} \frac{d\vec{y}}{dt} \frac{d\vec{y}}{dt} + \frac{i}{2} \vec{h} \frac{d\vec{h}}{dt} + ic^* \frac{dc}{dt} + \frac{ie}{2} c^* c f_i^0 f_j^0 F_{ij}(\vec{x}^0) \\
 &\quad \pm \frac{e^2}{4} f_i^0 A_i(\vec{x}^0) f_j^0 f_k^0 F_{jk}(\vec{x}^0) c^* c
 \end{aligned} \quad (2.75)$$

En definitiva, computando las fluctuaciones gaussianas alrededor de  $(\vec{x}^0, \vec{f}^0, c = 0)$  encontramos:

$$\begin{aligned}
 &\lim_{\beta \rightarrow 0} \int d^3x \sum_n \psi_n^\dagger(x) \sigma_k \psi_n(x) e^{-\beta \frac{(\gamma^\mu D_\mu)^2}{2}} \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{x}^0 \int d^3\vec{f}^0 e^{\tilde{F}}
 \end{aligned} \quad (2.76)$$

---

<sup>4</sup>La integración en las variables grassman  $f^0$ , señada con " , es la característica integración de Berezin, tal que,

$$\begin{aligned}
 \int df_i &= 0, \quad i = 1, 2, 3 \\
 \int df_i f_i &= 1, \quad i = 1, 2, 3
 \end{aligned}$$

donde

$$\tilde{F} = \frac{ie}{2} f_i^0 f_j^0 F_{ij}(\vec{x}^0) \pm \frac{e^2}{4} f_i^0 A_i(\vec{x}^0) f_j^0 f_k^0 F_{jk}(\vec{x}^0) \quad (2.77)$$

Al integrar en las variables fermiónicas sólo uno de estos sumandos dará una contribución no nula, y así:

$$\begin{aligned} & \lim_{\beta \rightarrow 0} \int d^3x \sum_n \psi_n^\dagger(x) \sigma_k \psi_n(x) e^{-\beta \frac{(\gamma^\mu D_\mu)^2}{2}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{x}^0 \int'' d^3\vec{f}^0 \tilde{F} \\ &= \pm \frac{e^2}{16\pi^3} \int d^3\vec{x}^0 A_i(\vec{x}^0) \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F_{jk}(\vec{x}^0) \end{aligned} \quad (2.78)$$

El Jacobiano asociado a la transformación infinitesimal, en el espacio de Minkowski, es:

$$\prod_n da'_n d\bar{b}'_n = \exp \left[ \pm i \int d^3x \frac{e^2}{8\pi} A_\mu * F^\mu \right] \prod_n da_n d\bar{b}_n \quad (2.79)$$

donde tenemos el término asociado a la anomalía. En este cálculo basado en la teoría supersimétrica no aparece la divergencia lineal que teníamos al aplicar el método de Fujikawa sino solamente el término de la anomalía.

## 2.2 Formalismo Hamiltoniano

En este apartado estudiaremos el problema en Segunda Cuantificación de un campo fermiónico en presencia de un campo magnético externo, constante y uniforme, en  $(2 + 1)$  dimensiones. Para ello seguiremos el formalismo Hamiltoniano, cuantizaremos el campo fermiónico expresándolo en función de los estados propios de la ecuación de Dirac para una partícula de masa cero.

Siguiendo el esquema planteado por K.Johnson [70] calcularemos la densidad de carga para el estado fundamental, y para estados excitados correspondientes a factores de llenado enteros, esto nos permitirá llegar a una expresión para el tensor conductividad para el Efecto Hall Cuántico Entero. No obstante para una verdadera comprensión de este efecto será necesario introducir la teoría de la localización y considerar la presencia de impurezas en el material.

En el Efecto Hall Cuántico Fraccionario sólo el estado de mínima energía dará una contribución a la densidad de carga por ser un efecto que se observa para campos magnéticos muy intensos. Cuando el estado fundamental (infinitamente degenerado) está parcialmente ocupado, todos los estados posibles con el mismo factor de llenado fraccionario darán una contribución promedio a la densidad de

carga, se obtiene así la conductividad Hall en Segunda Cuantificación para este Efecto.

En esta Sección desarrollaremos en primer lugar una breve descripción del problema de un campo fermiónico en un campo magnético homogéneo externo en  $(2 + 1)$  dimensiones. Analizaremos propiedades de simetría interesantes como la paridad, inversión temporal y conjugación de carga. Veremos que considerar un término de masa para el campo fermiónico da lugar a la ruptura espontánea de estas simetrías discretas, y por tanto, hace conveniente tratar electrones sin masa si queremos desarrollar una teoría de campos que sea invariante gauge e invariante bajo paridad. Pasaremos, a continuación, al cálculo explícito de la densidad de carga para estados con un factor de llenado entero, es decir, estados con un número entero de niveles de Landau ocupados por partículas o por antipartículas. Llegamos así a la expresión de la conductividad Hall cuantizada para el Efecto Hall Cuántico Entero. Posteriormente calcularemos la densidad de carga para estados con el primer nivel de Landau parcialmente ocupado. Como resultado llegamos a la expresión para la conductividad Hall para el Efecto Hall Cuántico Fraccionario. Por último, abordaremos el problema de la localización. Estudiaremos el espectro del operador de Dirac, en un campo magnético uniforme, y en presencia de impurezas simuladas por un potencial de corto alcance de tipo pozo esférico. Basándonos en este espectro de partícula daremos una descripción de la formación de las “mesetas” en el Efecto Hall Entero.

### 2.2.1 Cuantificación Canónica. Análisis de simetrías

Hemos estudiado ya el problema de una partícula fermiónica, sin masa, que se mueve en el plano en presencia de un campo magnético uniforme perpendicular al mismo, según la ecuación de Dirac en  $(2 + 1)$  dimensiones (1.93). Encontramos para el problema estacionario fundamentalmente tres tipos de soluciones: de energía positiva, de energía negativa y de energía cero (modos cero). En el formalismo de primera cuantización la existencia de soluciones con energía negativa fué explicada por la teoría de huecos de Dirac. En esta teoría se supone que todos los estados de energía negativa - “*mar de Dirac*”- están completamente llenos, y la ausencia de una partícula de energía negativa o hueco en el “*mar de Dirac*” representa una antipartícula. Esto pone de manifiesto que la ecuación de Dirac no es adecuada para describir una sola partícula sino que debe entenderse como la ecuación de un campo, el campo de Dirac, que además es un campo cuántico sin análogo clásico [113, 112].

Tenemos, por tanto, el campo fermiónico,  $\psi(\vec{x}, t)$ , y su conjugado, que definimos,  $\bar{\psi}(\vec{x}, t) = \psi^\dagger(\vec{x}, t)\gamma^0$ . Las ecuaciones para estos campos pueden deducirse de la densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L} = c \bar{\psi}(x) \gamma^\mu (i\hbar\partial_\mu + \frac{e}{c} A_\mu) \psi(x) \quad (2.80)$$

El campo canónico conjugado para  $\psi(x)$  es:

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}(x)} = i\hbar \psi^\dagger(x)$$

y la densidad Hamiltoniana, en el gauge de Weyl  $A_0 = 0$ ,

$$\mathcal{H} = \psi^\dagger(\vec{x}, t) \vec{\alpha} (c\vec{p} + e\vec{A}) \psi(\vec{x}, t) \quad (2.81)$$

Para cuantizar el campo de Dirac imponemos relaciones de anticonmutación para los campos a igual tiempo (Jordan y Wigner (1928)), es decir

$$\begin{aligned} \{\psi_\alpha(\vec{x}, t), \psi_\beta^\dagger(\vec{x}', t)\} &= \delta_{\alpha\beta} \delta^2(\vec{x} - \vec{x}') \\ \{\psi_\alpha(\vec{x}, t), \psi_\beta(\vec{x}', t)\} &= \{\psi_\alpha^\dagger(\vec{x}, t), \psi_\beta^\dagger(\vec{x}', t)\} = 0 \end{aligned} \quad (2.82)$$

Siempre es posible expresar el campo de Dirac,  $\psi(\vec{x}, t)$ , para cualquier instante de tiempo, como combinación lineal de una base ortonormal de espinores propios del Hamiltoniano de Dirac para una partícula. Si consideramos soluciones de la forma

$$\begin{aligned} \psi(\vec{x}, t) &= u(\vec{x}) e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \\ \psi(\vec{x}, t) &= v(\vec{x}) e^{i\frac{E}{\hbar}t} \end{aligned} \quad (2.83)$$

es decir, soluciones de energía positiva y negativa respectivamente. La ecuación de Dirac (1.93) resultará

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}(c\vec{p} + e\vec{A})u(\vec{x}) &= Eu(\vec{x}) \\ \vec{\alpha}(c\vec{p} + e\vec{A})v(\vec{x}) &= -Ev(\vec{x}) \quad \text{con } E > 0 \end{aligned}$$

El espectro y las funciones de onda propias de esta ecuación son conocidos, no obstante, es conveniente detenernos en este punto y analizar detalladamente estas soluciones. Así pues, estudiemos simultáneamente la ecuación de Dirac en el gauge simétrico para una partícula con carga  $q = -e$  y  $q = e$ , de masa cero:

$$\vec{\alpha}(c\vec{p} + e\vec{A})\psi(\vec{x}) = E\psi(\vec{x}) \quad (2.84)$$

$$\vec{\alpha}(c\vec{p} - e\vec{A})\psi(\vec{x}) = E\psi(\vec{x}) \quad (2.85)$$

Tomando la misma representación para las matrices de Dirac ( $2 \times 2$ ), que introducíamos en el Capítulo anterior, estas ecuaciones pueden expresarse en forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} 0 & D \\ D^\dagger & 0 \end{pmatrix} \psi(\vec{x}) = E\psi(\vec{x})$$

donde  $\psi(\vec{x})$  es un espinor de dos componentes, que en función de los operadores  $\{a, a^\dagger, b, b^\dagger\}$ , (1.26), (1.29), resulta

$$D = -\sqrt{2eB\hbar c} a^\dagger, \quad D^\dagger = -\sqrt{2eB\hbar c} a, \quad q = -e \quad (2.86)$$

$$D = \sqrt{2eB\hbar c} b, \quad D^\dagger = \sqrt{2eB\hbar c} b^\dagger, \quad q = e \quad (2.87)$$

Es importante resaltar la diferencia entre estos dos sistemas. Para partículas con carga,  $q = -e$ , el Hamiltoniano de Dirac se expresa en función de los operadores  $a$  y  $a^\dagger$ , los otros dos operadores  $b$  y  $b^\dagger$  que aparecen en la teoría, conmutan con el Hamiltoniano y generan la simetría responsable de la degeneración de cada nivel de Dirac-Landau. Para partículas con la carga opuesta,  $q = e$ , el Hamiltoniano de Dirac viene dado en función de los operadores  $b$  y  $b^\dagger$ , y conmuta con  $a$  y  $a^\dagger$ , que ahora son los responsables de la degeneración.

Es posible encontrar una base ortonormal de estados propios para cada una de estas ecuaciones:

$$\{\psi_{k,m}^+(\vec{x}), \psi_{k,-m}^-(\vec{x}), \psi_{0,m}(\vec{x})\}, \quad q = -e \quad (2.88)$$

$$\{\tilde{\psi}_{k,-m}^+(\vec{x}), \tilde{\psi}_{k,-m}^-(\vec{x}), \tilde{\psi}_{0,-m}(\vec{x})\}, \quad q = e \quad (2.89)$$

Además de las soluciones de energía positiva y negativa aparecen también soluciones de energía cero. Estas soluciones están relacionadas entre sí por:

$$\tilde{\psi}_{k,-m}^\pm(\vec{x}) = \sigma_1(\psi_{km}^\mp(\vec{x}))^*, \quad \tilde{\psi}_{0,-m}(\vec{x}) = \sigma_1(\psi_{0m}(\vec{x}))^*$$

De esta relación se deduce que los espinores,  $\psi_{km}^\pm(\vec{x})$  y  $\tilde{\psi}_{k,-m}^\mp(\vec{x})$ , son soluciones de igual energía para la ecuación de Dirac con  $q = -e$ , pero con momento angular total en la dirección perpendicular al plano diferente, es decir:

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}(c\vec{p} + e\vec{A}) \psi_{km}^\pm(\vec{x}) &= \pm E_k \psi_{km}^\pm(\vec{x}) \\ \vec{\alpha}(c\vec{p} + e\vec{A}) \tilde{\psi}_{k,-m}^\mp(\vec{x}) &= \pm E_k \tilde{\psi}_{k,-m}^\mp(\vec{x}) \end{aligned}$$

con  $E_k = +\sqrt{2k(eB\hbar c)}$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ , y

$$\begin{aligned} J_3 \psi_{k,m}^\pm(\vec{x}) &= \hbar(m + \frac{1}{2}) \psi_{k,m}^\pm(\vec{x}), \quad m \geq -k \\ J_3 \tilde{\psi}_{k,-m}^\mp(\vec{x}) &= -\hbar(m + \frac{1}{2}) \tilde{\psi}_{k,-m}^\mp(\vec{x}), \quad m \geq -k \end{aligned}$$

y lo mismo sucede para los modos cero

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}(c\vec{p} + e\vec{A})\psi_{0\ m}(\vec{x}) &= 0 \\ \bar{\alpha}(c\vec{p} + e\vec{A})\tilde{\psi}_{0,-m}(\vec{x}) &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}J_3\psi_{0\ m}(\vec{x}) &= \hbar(m + \frac{1}{2})\psi_{0\ m}(\vec{x}) \quad , \quad m \geq 0 \\ J_3\tilde{\psi}_{0,-m}(\vec{x}) &= -\hbar(m + \frac{1}{2})\tilde{\psi}_{0,-m}(\vec{x}) \quad , \quad m \geq 0\end{aligned}$$

Igualmente, la ecuación de Dirac para partículas con carga,  $q = e$ , tendrá también soluciones de energía positiva, negativa y cero, con momento angular total  $\pm j_3$ .

Así pues, las soluciones que habíamos encontrado para la ecuación de Dirac de una partícula cargada  $q = -e$ , en un campo magnético constante y uniforme perpendicular al plano, no son las únicas; y la solución más general requiere considerar las dos posibilidades para el momento angular total  $J_3$ . Si nos quedamos con una teoría de dos componentes estamos seleccionando una polarización para el espín, y la teoría de campos resultante no será invariante bajo transformaciones discretas como paridad, inversión temporal, y conjugación de carga. Esta situación es análoga a la del problema libre en  $(3 + 1)$  dimensiones para partículas de espín  $\frac{1}{2}$ , sin masa, en ese caso los estados son propios del operador helicidad y del operador *chiral*, es posible entonces desarrollar la teoría como una teoría de dos componentes que representa partículas con una helicidad definida [112].

Si queremos una teoría de campos invariante bajo simetrías discretas debemos considerar el campo fermiónico,  $\psi$ , como un espinor de cuatro componentes, con  $\psi_1$  el doblete superior, y  $\psi_2$ , el inferior,

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad (2.90)$$

Esto equivale a considerar dos campos fermiónicos, y las matrices de Dirac  $(4 \times 4)$ , [59, 55]:

$$\begin{aligned}\gamma^0 &= \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & -\sigma_3 \end{pmatrix} \\ \gamma^1 &= \begin{pmatrix} i\sigma_1 & 0 \\ 0 & i\sigma_1 \end{pmatrix} \\ \gamma^2 &= \begin{pmatrix} i\sigma_2 & 0 \\ 0 & i\sigma_2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

El Hamiltoniano de Dirac en esta representación de las matrices  $\gamma$  será:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & D & 0 & 0 \\ D^\dagger & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -D \\ 0 & 0 & -D^\dagger & 0 \end{pmatrix} \quad (2.91)$$

donde  $D$  y  $D^\dagger$  vienen dados por (2.86).

El momento angular total  $J_3$  generalizado a esta teoría con cuatro componentes será:

$$\mathbf{J}_3 = \begin{pmatrix} J_3 I & 0 \\ 0 & J_3 I \end{pmatrix} \quad (2.92)$$

donde  $I$  es la matriz identidad ( $2 \times 2$ ). Claramente,  $[\mathbf{H}, \mathbf{J}_3] = 0$ , y podemos encontrar una base ortonormal de estados propios común a ambos operadores. Esta base de estados estará formada por seis espinores de cuatro componentes, y así

$$U_{km}^1(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \psi_{km}^+(\vec{x}) \\ 0 \end{pmatrix} \quad V_{km}^1(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \psi_{km}^-(\vec{x}) \\ 0 \end{pmatrix} \quad U_{0m}^1(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \psi_{0m}(\vec{x}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$U_{k,-m}^2(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\psi}_{k,-m}^+(\vec{x}) \end{pmatrix} \quad V_{k,-m}^2(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\psi}_{k,-m}^-(\vec{x}) \end{pmatrix} \quad U_{0,-m}^2(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\psi}_{0,-m}(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

Tenemos, por tanto, dos espinores de energía positiva:  $U_{km}^1(\vec{x})$  y  $U_{k,-m}^2(\vec{x})$ ; dos de energía negativa:  $V_{km}^1(\vec{x})$  y  $V_{k,-m}^2(\vec{x})$ ; y por último, los modos cero  $U_{0m}^1(\vec{x})$  y  $U_{0,-m}^2(\vec{x})$ <sup>5</sup>. Estos espinores tienen un momento angular total:  $j_3 = \hbar(m + \frac{1}{2})$  y  $j_3 = -\hbar(m + \frac{1}{2})$ , para  $U_{km}^1(\vec{x}), V_{km}^1(\vec{x}), U_{0m}^1(\vec{x})$  y  $U_{k,-m}^2(\vec{x}), V_{k,-m}^2(\vec{x}), U_{0,-m}^2(\vec{x})$  respectivamente.

Así, el campo fermiónico puede expresarse de la forma

$$\begin{aligned} \psi_1(\vec{x}, t) &= \sum_{k \neq 0} \sum_{m \geq -k} (B_{km}^1(t) U_{km}^1(\vec{x}) + D_{km}^{2 \dagger}(t) V_{km}^1(\vec{x})) \\ &+ \sum_{m \geq 0} A_m^1(t) U_{0m}^1(\vec{x}) \end{aligned} \quad (2.93)$$

$$\begin{aligned} \psi_2(\vec{x}, t) &= \sum_{k \neq 0} \sum_{m \geq -k} (B_{k,-m}^2(t) U_{k,-m}^2(\vec{x}) + D_{k,-m}^{1 \dagger}(t) V_{k,-m}^2(\vec{x})) \\ &+ \sum_{m \geq 0} A_{-m}^2(t) U_{0,-m}^2(\vec{x}) \end{aligned} \quad (2.94)$$

<sup>5</sup>La elección del espinor para los modos cero en principio es arbitraria por tratarse de soluciones de energía cero. Sin embargo, si consideramos el Hamiltoniano de Dirac para una partícula con masa:  $H_D^m = H_D^0 + \sigma_3 mc^2$  los modos cero serán una solución de esta ecuación de energía positiva.

Su hermítico conjugado será

$$\begin{aligned}\psi_1^\dagger(\vec{x}, t) &= \sum_{k \neq 0} \sum_{m \geq -k} (B_{km}^1{}^\dagger(t) U_{km}^1{}^\dagger(\vec{x}) + D_{km}^2(t) V_{km}^1{}^\dagger(\vec{x})) \\ &+ \sum_{m \geq 0} A_m^1{}^\dagger(t) U_{0m}^1{}^\dagger(\vec{x})\end{aligned}\quad (2.95)$$

$$\begin{aligned}\psi_2^\dagger(\vec{x}, t) &= \sum_{k \neq 0} \sum_{m \geq -k} (B_{k,-m}^2{}^\dagger(t) U_{k,-m}^2{}^\dagger(\vec{x}) + D_{k,-m}^1(t) V_{k,-m}^2{}^\dagger(\vec{x})) \\ &+ \sum_{m \geq 0} A_{-m}^2{}^\dagger(t) U_{0,-m}^2{}^\dagger(\vec{x})\end{aligned}\quad (2.96)$$

Donde  $B_{km}^1{}^\dagger$  y  $B_{k,-m}^2{}^\dagger$  son operadores de creación de electrones con energía positiva,  $E_k$ , y momento angular total,  $j_3 = \pm\hbar(m + \frac{1}{2})$ , respectivamente;  $D_{km}^2{}^\dagger(t)$  y  $D_{k,-m}^1{}^\dagger(t)$  son operadores de creación de positrones con energía positiva,  $E_k$ , y momento angular total,  $j_3 = \mp\hbar(m + \frac{1}{2})$  respectivamente; y por último,  $A_m^1{}^\dagger(t)$  y  $A_{-m}^2{}^\dagger(t)$  son operadores de creación de *partículas* con energía cero,  $E_0$ , y momento angular total,  $j_3 = \pm\hbar(m + \frac{1}{2})$ , respectivamente.

Estos coeficientes son, por tanto, operadores en el espacio de Hilbert, que verifican las relaciones de anticonmutación:

$$\begin{aligned}\{B_{km}^1(t), B_{k'm'}^1{}^\dagger(t)\} &= \{D_{km}^2(t), D_{k'm'}^2{}^\dagger(t)\} = \delta_{kk'} \delta_{mm'} \\ \{A_m^1(t), A_{m'}^1{}^\dagger(t)\} &= \delta_{mm'} \\ \{B_{k,-m}^2(t), B_{k',-m'}^2{}^\dagger(t)\} &= \{D_{k,-m}^1(t), D_{k',-m'}^1{}^\dagger(t)\} = \delta_{kk'} \delta_{mm'} \\ \{A_{-m}^2(t), A_{-m'}^2{}^\dagger(t)\} &= \delta_{mm'}\end{aligned}\quad (2.97)$$

todas las demás son cero.

Tenemos, de esta forma, dos campos fermiónicos,  $\psi_1(x)$  y  $\psi_2(x)$ , que se diferencian en que cada uno crea o destruye partículas y antipartículas con un momento angular total opuesto. Si introducimos la matriz,  $\gamma^3$ , definida  $\gamma^3 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2$ , es fácil comprobar que:  $\gamma^3 \psi_1(x) = \psi_1(x)$  y  $\gamma^3 \psi_2(x) = -\psi_2(x)$ ; es decir, hay una simetría *chiral*, pues  $[\gamma^3, \mathbf{H}] = 0$ . Esta simetría no existe en la teoría de dos componentes, ya que no es posible encontrar ninguna matriz  $(2 \times 2)$  que anticonmute con todas las matrices de Pauli, pero, si existe en la teoría de cuatro componentes, y como sucede en  $(3 + 1)$  dimensiones, es posible estudiar independientemente la teoría con dos componentes para  $\psi_1(x)$  ó  $\psi_2(x)$ . En particular el Hamiltoniano puede expresarse de la forma:

$$\hat{\mathbf{H}} = \int d^2x \psi^\dagger(\vec{x}, t) \mathbf{H} \psi(\vec{x}, t)$$



$$\begin{aligned}
 &= \int d^2x \psi_1^\dagger(\vec{x}, t) \vec{\alpha}(-i\hbar c \vec{\nabla} + e\vec{A}) \psi_1(\vec{x}, t) + \int d^2x \psi_2^\dagger(\vec{x}, t) \vec{\alpha}(i\hbar c \vec{\nabla} - e\vec{A}) \psi_2(\vec{x}, t) \\
 &= \hat{H}_1 + \hat{H}_2
 \end{aligned} \tag{2.98}$$

Este Hamiltoniano en función de los operadores de creación y destrucción será

$$\begin{aligned}
 \hat{H}_1 &= \sum_{k \neq 0} \sum_{m \geq -k} E_k (B_{km}^1{}^\dagger B_{km}^1 - D_{km}^2 D_{km}^2{}^\dagger) \\
 &= \sum_{k \neq 0} \sum_{m \geq -k} E_k (B_{km}^1{}^\dagger B_{km}^1 + D_{km}^2{}^\dagger D_{km}^2 - 1)
 \end{aligned} \tag{2.99}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{H}_2 &= \sum_{k \neq 0} \sum_{m \geq -k} E_k (B_{k,-m}^2{}^\dagger B_{k,-m}^2 - D_{k,-m}^1 D_{k,-m}^1{}^\dagger) \\
 &= \sum_{k \neq 0} \sum_{m \geq -k} E_k (B_{k,-m}^2{}^\dagger B_{k,-m}^2 + D_{k,-m}^1{}^\dagger D_{k,-m}^1 - 1)
 \end{aligned} \tag{2.100}$$

donde,  $E_k > 0$ , es la energía para un nivel con  $k \neq 0$ . De la ecuación de Heisenberg para los operadores  $B_{km}^a(t)$ ,  $D_{km}^a(t)$ ,  $A_m^a(t)$ , y sus conjugados, se deduce que

$$\begin{aligned}
 B_{km}^a(t) &= B_{km}^a(0) e^{-i \frac{E_k}{\hbar} t} \\
 D_{km}^a(t) &= D_{km}^a(0) e^{-i \frac{E_k}{\hbar} t} \\
 A_m^a(t) &= A_m^a(0) \quad , \quad a = 1, 2
 \end{aligned} \tag{2.101}$$

Es interesante expresar otros operadores, como el momento angular total y la carga total, en función de los operadores de creación y destrucción que hemos introducido. Estos operadores están asociados a simetrías del sistema como la simetría de rotación en el plano, característica en el gauge simétrico, y la simetría unitaria relativa a la conservación de la carga. Consideraremos además los operadores asociados a los generadores infinitesimales de las *traslaciones magnéticas*, que como vimos en el problema de una partícula, representan la simetría más general del problema. Estos operadores en función del campo fermiónico son:

$$\hat{J}_3 = \int d^2x \psi^\dagger(\vec{x}) \left( L_3 + \hbar \frac{1}{2} \sigma_3 \right) \psi(\vec{x}) \tag{2.102}$$

$$\hat{Q} = -e \int d^2x \psi^\dagger(\vec{x}) \psi(\vec{x}) \tag{2.103}$$

y para los generadores infinitesimales de las *traslaciones magnéticas*

$$\begin{aligned}
 \hat{b} &= \int d^2x \psi^\dagger(\vec{x}) b \psi(\vec{x}) \\
 \hat{b}^\dagger &= \int d^2x \psi^\dagger(\vec{x}) b^\dagger \psi(\vec{x})
 \end{aligned} \tag{2.104}$$

Los campos que aparecen en estas expresiones tienen solamente dos componentes, la generalización a cuatro componentes es inmediata, no obstante, como hemos visto para el Hamiltoniano, su expresión en función de  $\psi_1$  o  $\psi_2$  es equivalente, y representa fijar una polarización concreta. Como consecuencia de la simetría *chiral* podemos elegir una polarización, y considerar el campo  $\psi(\vec{x}) \equiv \psi_1(\vec{x})$  o  $\psi(\vec{x}) \equiv \psi_2(\vec{x})$ , desarrollaremos la teoría para el primer caso, los resultados son similares si tomamos la otra polarización.

Antes de sustituir la expresión de los campos en función de los operadores de creación y destrucción será interesante dar una definición de orden normal. Tomando como referencia el problema libre ( $B = 0$ ) [113], podemos definir el vacío como el estado en el cual los modos partícula - antipartícula  $k \neq 0$ , y los modos cero  $k = 0$ , están vacíos, o lo que es lo mismo, un estado en el cual el *mar de Dirac* de energía negativa esta completamente lleno, es decir,

$$\begin{aligned} B_{km}^1 |0\rangle &= 0, \quad D_{km}^2 |0\rangle = 0, \quad \forall k \neq 0, \quad m \geq -k \\ A_m^1 |0\rangle &= 0, \quad \forall m \geq 0 \end{aligned} \quad (2.105)$$

El orden normal se tomará respecto de este vacío, resultará (para la teoría de dos componentes)

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \int d^2x : \psi^\dagger(\vec{x}) \vec{\alpha}(c\vec{p} + e\vec{A}) \psi(\vec{x}) : \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m \geq -k}^{\infty} E_k (B_{km}^1 \dagger B_{km}^1 + D_{km}^2 \dagger D_{km}^2) \end{aligned} \quad (2.106)$$

$$\begin{aligned} \hat{J}_3 &= \int d^2x : \psi^\dagger(\vec{x}) (L_3 + S_3) \psi(\vec{x}) : \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m \geq -k}^{\infty} (m + \frac{1}{2}) (B_{km}^1 \dagger B_{km}^1 - D_{km}^2 \dagger D_{km}^2) + \sum_{m=0}^{\infty} (m + \frac{1}{2}) A_m^1 \dagger A_m^1 \end{aligned} \quad (2.107)$$

tal que

$$\langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle = 0, \quad \langle 0 | \hat{J}_3 | 0 \rangle = 0$$

Para el operador de carga tenemos:

$$\hat{Q} = -e \int d^2x : \psi^\dagger(\vec{x}) \psi(\vec{x}) : \equiv -e \int d^2x \frac{1}{2} [\psi^\dagger(\vec{x}), \psi(\vec{x})] \quad (2.108)$$

y por tanto,

$$\hat{Q} = -e \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m \geq -k}^{\infty} (B_{km}^1 \dagger B_{km}^1 - D_{km}^2 \dagger D_{km}^2) + \sum_{m=0}^{\infty} (A_m^1 \dagger A_m^1 - \frac{1}{2}) \right\} \quad (2.109)$$

La presencia de los modos cero induce que la carga del vacío no sea nula, cuando tomamos orden normal, sino que cada modo cero contribuye con una carga fraccionaria. Es decir, el vacío puede entenderse como un estado lleno de “*antipartículas*” con carga fraccionaria,  $q = \frac{e}{2}$ , y así, la carga observable para un estado cualquiera respecto de este vacío será:  $Q_{\text{obs}} = Q - Q_v$ , donde

$$Q_v = \langle 0 | \hat{Q} | 0 \rangle = -e \sum_{m=0}^{\infty} -\frac{1}{2} \quad (2.110)$$

Por último, la expresión de los operadores que generan las *traslaciones magnéticas* en función de los operadores de creación y destrucción es

$$\hat{b} = \int d^2x : \psi^\dagger(\vec{x}) b \psi(\vec{x}) : \quad (2.111)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m \geq -k}^{\infty} \sqrt{k+m} \left( B_{k,m-1}^1 \dagger B_{km}^1 - D_{km}^2 \dagger D_{k,m-1}^2 \right) + \sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{m} A_{m-1}^1 \dagger A_m^1$$

$$\hat{b}^\dagger = \int d^2x : \psi^\dagger(\vec{x}) b^\dagger \psi(\vec{x}) : \quad (2.112)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m \geq -k}^{\infty} \sqrt{k+m+1} \left( B_{k,m+1}^1 \dagger B_{km}^1 - D_{km}^2 \dagger D_{k,m+1}^2 \right)$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{m+1} A_{m+1}^1 \dagger A_m^1$$

estos operadores lógicamente conmutan con el Hamiltoniano,  $[\hat{H}, \hat{b}] = [\hat{H}, \hat{b}^\dagger] = 0$ . En la Sección 3.1 estudiaremos la simetría infinita presente en el problema de muchas partículas. Utilizaremos entonces estas expresiones que nos permitirán deducir la expresión de los operadores,  $\mathcal{L}_{nm}$ , en el formalismo de Segunda Cuantificación.

Para la otra polarización,  $\psi_2(x)$ , los resultados son idénticos salvo en los índices relativos al momento angular total en la dirección del campo externo, que cambiará para partícula, antipartícula y modos cero, de una representación a otra.

Analizaremos a continuación las simetrías de esta Teoría Cuántica de Campos en  $(2+1)$  dimensiones:

- Se trata de una teoría invariante bajo transformaciones gauge [31, 61]. Si consideramos simultáneamente la transformación gauge para el potencial vector

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Phi \quad (2.113)$$

donde  $\Phi(x)$  es una función arbitraria; y la transformación local de fase para los campos

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\frac{e}{\hbar c}\Phi(x)}\psi(x) \quad (2.114)$$

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow e^{-i\frac{e}{\hbar c}\Phi(x)}\bar{\psi}(x) \quad (2.115)$$

Se comprueba que la densidad Lagrangiana (2.80) es invariante gauge:  $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L}$ .

- Esta teoría es invariante también bajo el grupo de Poincaré [14, 109]. El grupo de Poincaré tridimensional es el grupo de transformaciones reales:

$$x^\mu \rightarrow \Lambda_\nu^\mu x^\nu + a^\mu \quad (2.116)$$

que deja invariante  $(x - y)^2 = (x^0 - y^0)^2 - (x^1 - y^1)^2 - (x^2 - y^2)^2$ . La ley del grupo es:

$$(a', \Lambda') \circ (a, \Lambda) = (a' + \Lambda'a, \Lambda'\Lambda) \quad (2.117)$$

Es decir, puede expresarse como el producto semidirecto del grupo de traslaciones en un espacio-tiempo tridimensional ( $a$ ), y el grupo de Lorentz ( $\Lambda$ ). El grupo de Lorentz,  $L$ , es el grupo de transformaciones:  $x \rightarrow \Lambda x$ , que dejan invariante  $x^2$ . Cada una de estas transformaciones se encuentra en uno de los cuatro conjuntos disjuntos  $L_+^\uparrow$ ,  $L_-^\uparrow$ ,  $L_+^\downarrow$ ,  $L_-^\downarrow$ :

$$\begin{aligned} L_+^\uparrow &= \{\Lambda \in L / \det\Lambda = +1, \Lambda_0^0 > 0\} \\ L_-^\uparrow &= \{\Lambda \in L / \det\Lambda = -1, \Lambda_0^0 > 0\} \\ L_+^\downarrow &= \{\Lambda \in L / \det\Lambda = +1, \Lambda_0^0 < 0\} \\ L_-^\downarrow &= \{\Lambda \in L / \det\Lambda = -1, \Lambda_0^0 < 0\} \end{aligned} \quad (2.118)$$

De los cuales, el subconjunto  $L_+^\uparrow$ , que está formado por las rotaciones en el plano, y las transformaciones espacio-tiempo (*boost*), es un subgrupo ya que contiene la identidad. Todos los demás subconjuntos no son conexos a la identidad, y contienen transformaciones discretas, en general, reflexiones de los ejes espacio-temporales. Cuando elegimos un gauge concreto, en particular el gauge simétrico, la teoría deja de ser covariante Lorentz.

- Por último, estudiaremos las simetrías discretas, paridad, inversión temporal y conjugación de carga, basándonos en el problema libre en  $(3 + 1)$  dimensiones [84].

Es conveniente para ello establecer las siguientes relaciones entre los espinores de dos componentes solución del problema de una partícula. Tomemos la

base ortonormal de estados  $\{\psi_{km}^+(\vec{x}), \psi_{km}^-(\vec{x}), \psi_{0m}(\vec{x})\}$  solución de las ecuaciones:

$$\begin{aligned}\vec{\alpha}(c\vec{p} + e\vec{A})\psi(\vec{x}) &= E\psi(\vec{x}) \\ J_3\psi(\vec{x}) &= j_3\psi(\vec{x})\end{aligned}$$

se verifica que:

– a

$$\begin{aligned}\sigma^1 (\psi_{km}^\pm(\vec{x}))^* &= \tilde{\psi}_{k,-m}^\mp(\vec{x}) \\ \sigma^1 (\psi_{0m}(\vec{x}))^* &= \tilde{\psi}_{0,-m}(\vec{x})\end{aligned}\tag{2.119}$$

– b

$$\begin{aligned}\sigma^1 \psi_{km}^\pm(-x_1, x_2) &= (-1)^m \tilde{\psi}_{k,-m}^\pm(x_1, x_2) \\ \sigma^1 \psi_{0m}(-x_1, x_2) &= (-1)^m \tilde{\psi}_{0,-m}(x_1, x_2)\end{aligned}\tag{2.120}$$

– c

$$\begin{aligned}\sigma^2 (\psi_{km}^\pm(\vec{x}))^* &= i\tilde{\psi}_{k,-m}^\pm(\vec{x}) \\ \sigma^2 (\psi_{0m}(\vec{x}))^* &= i\tilde{\psi}_{0,-m}(\vec{x})\end{aligned}\tag{2.121}$$

Donde  $\{\tilde{\psi}_{k,-m}^+(\vec{x}), \tilde{\psi}_{k,-m}^-(\vec{x}), \tilde{\psi}_{0m}(\vec{x})\}$  es una base ortonormal de estados para las ecuaciones:

$$\begin{aligned}\vec{\alpha}(c\vec{p} - e\vec{A})\tilde{\psi}(\vec{x}) &= E\tilde{\psi}(\vec{x}) \\ J_3\tilde{\psi}(\vec{x}) &= -j_3\tilde{\psi}(\vec{x})\end{aligned}$$

Para determinar estas relaciones hemos utilizado:

$$\begin{aligned}\sigma^1 (\alpha^i)^* \sigma^1 &= \alpha^i \\ \sigma^1 \alpha^i \sigma^1 &= (-1)^i \alpha^i \\ \sigma^2 (\alpha^i)^* \sigma^2 &= -\alpha^i, \quad i = 1, 2\end{aligned}\tag{2.122}$$

La generalización de estas relaciones para los espinores de cuatro componentes será:

– a

$$\begin{aligned}\rho^1 \left( U_{km}^1(\vec{x}) \right)^* &= V_{k,-m}^2(\vec{x}) \\ \rho^1 \left( V_{km}^1(\vec{x}) \right)^* &= U_{k,-m}^2(\vec{x}) \\ \rho^1 \left( U_{0m}^1(\vec{x}) \right)^* &= U_{0,-m}^2(\vec{x})\end{aligned}\quad (2.123)$$

– b

$$\begin{aligned}\rho^1 U_{km}^1(-x_1, x_2) &= (-1)^m U_{k,-m}^2(x_1, x_2) \\ \rho^1 V_{km}^1(-x_1, x_2) &= (-1)^m V_{k,-m}^2(x_1, x_2) \\ \rho^1 U_{0m}^1(-x_1, x_2) &= (-1)^m U_{0,-m}^2(x_1, x_2)\end{aligned}\quad (2.124)$$

– c

$$\begin{aligned}\rho^2 \left( U_{km}^1(\vec{x}) \right)^* &= i U_{k,-m}^2(\vec{x}) \\ \rho^2 \left( V_{km}^1(\vec{x}) \right)^* &= i V_{k,-m}^2(\vec{x}) \\ \rho^2 \left( U_{0m}^1(\vec{x}) \right)^* &= i U_{0,-m}^2(\vec{x})\end{aligned}\quad (2.125)$$

Las matrices  $\rho^1$  y  $\rho^2$  son matrices  $4 \times 4$  dadas por

$$\rho^1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ \sigma^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho^2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix}\quad (2.126)$$

El estudio de las simetrías discretas en electrodinámica cuántica bidimensional fué abordado por primera vez por R.Jackiw y S.Templeton [59, 30]. Nuestro sistema difiere del analizado por estos autores pero es posible generalizar los resultados, y así tenemos:

– 1. Conjugación de carga. Sea  $C$  el operador unitario de conjugación de carga (partícula - antipartícula), tal que:

$$C\psi(\vec{x})C^\dagger = \eta_c\psi_c(\vec{x}) \quad , \quad \psi_c(\vec{x}) = \rho^1(\psi^\dagger(\vec{x}))^T\quad (2.127)$$

donde  $\eta_c$  es un factor de fase constante,  $|\eta_c| = 1$ .

El campo  $\psi(\vec{x})$  es el espinor de cuatro componentes (2.90). La conjugación de carga intercambia las dos primeras con las segundas, es decir,

$$C\psi_1(\vec{x})C^\dagger = \eta_c\sigma^1(\psi_2^\dagger(\vec{x}))^T\quad (2.128)$$

De la expresión general del campo en función de los modos propios del problema de una partícula, (2.94), se deduce cómo se transforman bajo conjugación de carga los operadores de creación y destrucción:

$$\begin{aligned}
 CB_{km}^1 C^\dagger &= \eta_c D_{k,-m}^1 \\
 CD_{km}^2 C^\dagger &= \eta_c B_{k,-m}^2 \\
 CB_{k,-m}^2 C^\dagger &= \eta_c D_{km}^2 \\
 CD_{k,-m}^1 C^\dagger &= \eta_c B_{km}^1 \\
 CA_m^1 C^\dagger &= \eta_c A_{-m}^2 \\
 CA_{-m}^2 C^\dagger &= \eta_c A_m^1
 \end{aligned} \tag{2.129}$$

Por tanto, bajo conjugación de carga los operadores fermiónicos se transforman como en la teoría libre, es decir, los operadores de destrucción de partículas pasan a operadores de destrucción de antipartículas con la misma proyección del momento angular total, e igual para los operadores de creación.

No sucede lo mismo con los operadores asociados a los modos cero. Bajo conjugación de carga a un operador de destrucción, para un modo cero, con una polarización determinada, le corresponde un operador de creación con la polarización opuesta. Como sabemos los modos cero no describen ni partículas ni antipartículas pues son estados de energía cero. Sin embargo, de las relaciones que hemos obtenido para estos operadores podemos deducir que el estado con todos los modos cero vacíos puede interpretarse como un estado lleno de “*antipartículas*”, mientras que el estado con todos los modos cero llenos sería un estado de “*partículas*”. Se establece así una dualidad entre *partícula* - *antipartícula*, y estado vacío-lleno, para los modos cero.

Dado que el Hamiltoniano, y los demás operadores que hemos considerado, vienen expresados en función de estos operadores es inmediato comprobar que bajo conjugación de carga:

$$\begin{aligned}
 C\hat{H}C^\dagger &= \hat{H} \quad , \quad C\hat{J}_3C^\dagger = \hat{J}_3 \\
 C\hat{Q}C^\dagger &= -\hat{Q}
 \end{aligned} \tag{2.130}$$

donde  $\hat{\mathbf{H}}, \hat{\mathbf{J}}_3, \hat{\mathbf{Q}}$  representan el Hamiltoniano, el momento angular total y la carga para el sistema formado por los dos campos fermiónicos, es decir, para el sistema con espinores de cuatro componentes. Si nos quedamos con el campo de dos componentes, la teoría resultante no será invariante bajo conjugación de carga, pues, como hemos visto  $C$  intercambia los operadores de los dos campos  $\psi_1$  y  $\psi_2$ .

– 2. Paridad. Sea  $P$  el operador unitario de paridad, tal que

$$P\psi(\vec{x})P^\dagger = \eta_p\psi_p(\vec{x}') \quad , \quad \psi_p(\vec{x}) = \rho^1\psi(\vec{x}') \quad (2.131)$$

donde  $\vec{x}' = (-x_1, x_2)$  y  $\eta_p$  es un factor de fase constante  $|\eta_p| = 1$ .

Este operador también intercambia las dos componentes del campo fermiónico:

$$P\psi_1(\vec{x})P^\dagger = \eta_p\sigma^1\psi_2(\vec{x}') \quad (2.132)$$

De la expresión general del campo se deduce cómo se transforman bajo paridad los operadores de creación y destrucción:

$$\begin{aligned} PB_{km}^1 P^\dagger &= \eta_p B_{k,-m}^2 \\ PD_{km}^2 P^\dagger &= \eta_p D_{k,-m}^1 \\ PB_{k,-m}^2 P^\dagger &= \eta_p B_{km}^1 \\ PD_{k,-m}^1 P^\dagger &= \eta_p D_{km}^2 \\ PA_m^1 P^\dagger &= \eta_p A_{-m}^2 \\ PA_{-m}^2 P^\dagger &= \eta_p A_m^1 \end{aligned} \quad (2.133)$$

Bajo paridad los operadores fermiónicos se transforman como en la teoría libre, es decir, los operadores de destrucción de partículas con una polarización pasan a operadores de destrucción de partículas con la polarización opuesta, igual para los operadores de creación de antipartículas y para los modos cero.

El Hamiltoniano, el momento angular total y la carga bajo paridad se transforman:

$$\begin{aligned} P\hat{\mathbf{H}}P^\dagger &= \hat{\mathbf{H}} \quad , \quad P\hat{\mathbf{J}}_3P^\dagger = -\hat{\mathbf{J}}_3 \\ P\hat{\mathbf{Q}}P^\dagger &= \hat{\mathbf{Q}} \end{aligned} \quad (2.134)$$



Una vez más  $\hat{\mathbf{H}}, \hat{\mathbf{J}}_3, \hat{\mathbf{Q}}$  son el Hamiltoniano, momento angular total y carga para el sistema con cuatrespinores. Quedándonos con un campo de dos componentes la teoría resultante no es invariante bajo paridad, pues, como hemos visto  $P$  intercambia los operadores asociados a las dos polarizaciones.

– 3. Inversión temporal. Sea  $T$  el operador de inversión temporal, tal que

$$T\psi(\vec{x})T^{-1} = U_T\psi^*(\vec{x})U_T^\dagger = \eta_t\psi_t(\vec{x}) \quad , \quad \psi_t(\vec{x}) = \rho^2\psi(\vec{x}) \quad (2.135)$$

donde  $\eta_t$  es un factor de fase constante con  $|\eta_t| = 1$ .

Una vez más la inversión temporal intercambia los dobletes del campo fermiónico,

$$T\psi_1(\vec{x})T^{-1} = \eta_t\sigma^2\psi_2(\vec{x}) \quad (2.136)$$

De la expresión general del campo se deduce que bajo inversión temporal los operadores de creación y destrucción:

$$\begin{aligned} TB_{km}^1 T^{-1} &= -i\eta_t B_{k,-m}^2 \\ TD_{km}^2{}^\dagger T^{-1} &= -i\eta_t D_{k,-m}^1{}^\dagger \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} TB_{k,-m}^2 T^{-1} &= i\eta_t B_{km}^1 \\ TD_{k,-m}^1{}^\dagger T^{-1} &= i\eta_t D_{km}^2{}^\dagger \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} TA_m^1 T^{-1} &= -i\eta_t A_{-m}^2 \\ TA_{-m}^2 T^{-1} &= i\eta_t A_m^1 \end{aligned} \quad (2.137)$$

Bajo inversión temporal, tanto los operadores fermiónicos, como los asociados a los modos cero, se transforman de igual manera que bajo paridad salvo una fase. El Hamiltoniano y los demás operadores bajo inversión temporal se transforman:

$$\begin{aligned} T\hat{\mathbf{H}}T^{-1} &= \hat{\mathbf{H}} \quad , \quad T\hat{\mathbf{J}}_3T^{-1} = -\hat{\mathbf{J}}_3 \\ T\hat{\mathbf{Q}}T^{-1} &= \hat{\mathbf{Q}} \end{aligned} \quad (2.138)$$

Quedándonos con un campo de dos componentes la teoría resultante no es invariante bajo inversión temporal, pues, como hemos visto,  $T$  intercambia los operadores asociados a los dos campos  $\psi_1$  y  $\psi_2$ .

El comportamiento del sistema global bajo simetrías discretas es el esperado. Sin embargo, la teoría de dos componentes no es invariante bajo dichas simetrías, realmente éstas conectan las dos componentes del campo, y por tanto, permiten pasar de una teoría con una polarización definida a la otra.

En las Secciones siguientes seleccionaremos una polarización concreta para el campo. Esto es adecuado por tratarse de un sistema en el cual tenemos un campo magnético muy intenso. Podemos suponer entonces que el espín está completamente polarizado, y como consecuencia de la simetría *chiral*, elegir una polarización entre las dos posibles.

### 2.2.2 Determinación de la conductividad Hall para el Efecto Hall Cuántico Entero

En esta Sección nuestro objetivo es determinar en Segunda Cuantificación el valor esperado del operador densidad de carga, tanto en el estado fundamental, como en los estados excitados correspondientes a factores de llenado enteros, para ello, seguiremos el formalismo planteado por K. Johnson [70]. Como vimos en la Sección anterior, el campo fermiónico puede expresarse en función de los modos propios de la ecuación de Dirac tridimensional, para una partícula cargada, con masa cero, en un campo magnético constante y homogéneo perpendicular al plano. Es decir,

$$\psi(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m \geq -k}^{\infty} (B_{km} \psi_{km}^+(\vec{x}) + D_{km}^\dagger \psi_{km}^-(\vec{x})) + \sum_{m=0}^{\infty} A_m \psi_{0m}(\vec{x}) \quad (2.139)$$

donde,  $\psi_{km}^+(\vec{x})$ ,  $\psi_{km}^-(\vec{x})$ , y  $\psi_{0m}(\vec{x})$ , forman una base ortonormal de espinores propios de dicha ecuación. Los operadores  $B_{km}$ ,  $D_{km}$ ,  $A_m$  y sus conjugados verifican las correspondientes reglas de anticonmutación, para cada modo  $\{k, m\}$ :

$$\begin{aligned} \{B_{km}, B_{k'm'}^\dagger\} &= \delta_{kk'} \delta_{mm'} \\ \{D_{km}, D_{k'm'}^\dagger\} &= \delta_{kk'} \delta_{mm'} \\ \{A_m, A_{m'}^\dagger\} &= \delta_{mm'} \end{aligned} \quad (2.140)$$

El espacio de Hilbert estará generado por el conjunto de vectores ortonormales:

$$\begin{aligned} |0\rangle, A_m^\dagger |0\rangle, A_m^\dagger A_{m'}^\dagger |0\rangle, B_{km}^\dagger |0\rangle, B_{km}^\dagger B_{k'm'}^\dagger |0\rangle, D_{km}^\dagger |0\rangle, \\ D_{km}^\dagger D_{k'm'}^\dagger |0\rangle, B_{km}^\dagger D_{km}^\dagger |0\rangle, \dots \end{aligned} \quad (2.141)$$

donde el estado  $|0\rangle$  satisface:

$$\begin{aligned} A_m|0\rangle &= 0 & , & \quad \forall m \\ B_{km}|0\rangle &= 0 & , & \quad \forall k, m \\ D_{km}|0\rangle &= 0 & , & \quad \forall k, m \end{aligned} \quad (2.142)$$

Analicemos detalladamente la estructura de este espacio de Hilbert. Tenemos infinitos modos posibles para cada valor de  $k$  que es un entero positivo, y para cada valor de  $m \geq -k$ . Cada uno de estos modos tiene asociado un operador de creación y destrucción, no obstante, es conveniente distinguir entre los modos cero  $k = 0$  y los modos “fermiónicos”  $k \neq 0$ .

Para los modos cero, tenemos los operadores  $A_m$  y  $A_m^\dagger$  para cada valor de  $m \geq 0$ . Es decir, un conjunto infinito de operadores que satisfacen relaciones de anticonmutación de forma que  $(A_m)^2 = (A_m^\dagger)^2 = 0$ . Para cada modo introducimos un operador número,  $N_m = A_m^\dagger A_m$  cuyos autovalores serán 0 o 1. El conjunto de todos los operadores número,  $\{N_0, N_1, \dots, N_m, \dots\}$ , que conmutan entre sí, permite dar una base de vectores propios que generan un espacio de Hilbert de dimensión infinita. Estos estados son : el vacío,  $|0\rangle$ , el estado de una *partícula*,  $A_m^\dagger|0\rangle$ , el estado con dos *partículas*,  $A_m^\dagger A_{m'}^\dagger|0\rangle$ , etc. Todos estos estados se caracterizan por que tienen la misma energía e igual a cero, es decir, el estado fundamental para este sistema está infinitamente degenerado. Esto es consecuencia inmediata de suponer que las partículas no interactúan entre sí y que tienen masa cero. Por otro lado, se deduce de las relaciones de anticonmutación que:  $A_m^\dagger A_{m'}^\dagger|0\rangle = -A_{m'}^\dagger A_m^\dagger|0\rangle$ , y por tanto, estas partículas obedecen la estadística de Fermi y satisfacen el principio de exclusión de Pauli.

Para los modos que hemos denominado “fermiónicos” o modos correspondientes a  $k \neq 0$ , tenemos fundamentalmente dos tipos de operadores:  $B_{km}, B_{km}^\dagger$  y  $D_{km}, D_{km}^\dagger$ , según se trate de partículas o antipartículas. Al igual que para los modos cero tenemos un conjunto infinito de operadores que satisfacen relaciones de anticonmutación, y podemos definir, por tanto, un operador número asociado a cada modo, para partícula y antipartícula:  $N_{km} = B_{km}^\dagger B_{km}$  y  $\bar{N}_{km} = D_{km}^\dagger D_{km}$ . El espacio de Hilbert será infinito, y una base de vectores que genera este espacio es:  $|0\rangle$  estado vacío,  $B_{km}^\dagger|0\rangle$  estado de una partícula,  $D_{km}^\dagger|0\rangle$  estado de una antipartícula,  $B_{km}^\dagger B_{k'm'}^\dagger|0\rangle$  estado con dos partículas,  $B_{km}^\dagger D_{km}^\dagger|0\rangle$ , etc. Estas partículas obedecen la estadística de Fermi y satisfacen el principio de exclusión de Pauli.

Como consecuencia de la existencia de modos cero es posible que estados con

diferente número de ocupación tengan exactamente la misma energía, así, los estados que generan el espacio de Hilbert cuando consideramos únicamente los modos cero tienen todos igual energía, y el estado fundamental está infinitamente degenerado. Sin embargo, para los modos “fermiónicos” ( $k \neq 0$ ) la situación es muy diferente. Para un valor de  $k$  dado todos los estados de una partícula,  $B_{km}^\dagger|0\rangle$ , tienen la misma energía  $E_k$ , para los diferentes valores del momento angular total,  $j_3 = m + \frac{1}{2}$ , con  $m \geq -k$ ; si consideramos estados con dos partículas,  $B_{km}^\dagger B_{km'}^\dagger|0\rangle$ , cada una de ellas con energía  $E_k$  pero con  $m \neq m'$ , estos estados tienen la misma energía  $2E_k$ , para los diferentes valores de  $m$  y  $m'$ ; existe pues degeneración. En general, todos los estados con un número de partículas  $N$ , cada una de ellas en un nivel de energía  $k$ , pero con diferente momento angular, están degenerados. Luego la diferencia esencial con los modos cero es que estados con diferente número de ocupación no tienen la misma energía. Esto puede generalizarse para antipartículas, y para estados con partículas y antipartículas.

En definitiva, tanto para los modos cero como para los modos “fermiónicos” existe degeneración siempre que un nivel de energía no esté completamente lleno. Esto nos lleva a introducir el concepto de factor de llenado que permite caracterizar los estados degenerados. Así, definimos el factor de llenado,  $f$ , como el número de modos ocupados para un campo magnético dado:

$$f = \frac{n}{n_B} \quad (2.143)$$

donde  $n$  es la densidad de partículas, y  $n_B$  es la densidad de modos, por unidad de área y por cada espín, correspondiente a cada nivel de energía. Si consideramos una superficie de área finita  $A$ , el número total de modos será  $M = An_B$ , y el número de partículas  $N = An$ . El número de estados posibles de igual energía con  $N$  partículas en  $M$  modos es:  $\binom{M}{N}$ ; y el número total de estados  $\sum_{N=0}^M \binom{M}{N} = 2^M$ , donde estamos considerando todos los posibles factores de llenado. En el límite de área infinita, tanto el número de modos como el de partículas tienden a infinito, mientras que las densidades correspondientes permanecen finitas, y determinan exactamente el factor de llenado.

Si se llena completamente el primer nivel de Landau, el factor de llenado será un entero  $f = 1$ , y por tanto, la densidad de partículas coincide exactamente con la densidad de modos. Por cada modo en el mismo nivel de energía tenemos una partícula, en este caso no existe degeneración, y el estado puede determinarse de forma única. Sucede lo mismo si se siguen llenando paulatinamente todos los niveles de Landau. Tenemos en general estados con factores de llenado enteros

$f = i$  con  $i = 1, 2, 3, \dots$ , que serán los que interesan para el estudio del Efecto Hall Cuántico Entero.

Antes de pasar al cálculo del valor esperado de la densidad de carga para estos estados con factor de llenado entero, veamos cómo son en el formalismo de Segunda Cuantificación. Comencemos con el estado correspondiente al factor de llenado  $f = 1$ . Este factor de llenado nos indica que tenemos el primer nivel de energía completamente lleno, este nivel de energía se corresponde con los modos cero, o bien, con el estado fundamental para el Hamiltoniano de Pauli, es decir, el primer nivel de Landau en el problema no-relativista. Este estado será:

$$|f = 1\rangle \equiv |1_0, 1_1, \dots, 1_m, \dots\rangle \equiv A_0^\dagger A_1^\dagger \dots A_m^\dagger \dots |0\rangle$$

tal que

$$\begin{aligned} A_m^\dagger |f = 1\rangle &= 0 & , & \quad \forall m \geq 0 \\ B_{km} |f = 1\rangle &= 0 & , & \quad \forall k \neq 0, m \geq -k \\ D_{km} |f = 1\rangle &= 0 & , & \quad \forall k \neq 0, m \geq -k \end{aligned} \quad (2.144)$$

Para el siguiente factor de llenado,  $f = 2$ , tenemos dos niveles de energía completamente ocupados, el primer nivel como hemos visto se corresponde con los modos cero, pero el segundo nivel estará asociado a los modos “fermiónicos”. En este caso podemos distinguir entre partículas y antipartículas. Consideremos en principio que todos los modos correspondientes al nivel de energía  $k = 1$ <sup>6</sup> están ocupados por partículas:

$$\begin{aligned} |f = 2\rangle &\equiv |1_0, 1_1, \dots, 1_m, \dots; 1_{1,-1}, 1_{1,0}, \dots, 1_{1,m}, \dots\rangle \\ &\equiv A_0^\dagger A_1^\dagger \dots A_m^\dagger \dots B_{1,-1}^\dagger B_{1,0}^\dagger \dots B_{1,m}^\dagger \dots |0\rangle \end{aligned} \quad (2.145)$$

tal que

$$\begin{aligned} A_m^\dagger |f = 2\rangle &= 0 & , & \quad \forall m \geq 0 \\ B_{1m}^\dagger |f = 2\rangle &= 0 & , & \quad \forall m \geq -1 \\ B_{km} |f = 2\rangle &= 0 & , & \quad \forall k \neq 0, 1, m \geq -k \\ D_{km} |f = 2\rangle &= 0 & , & \quad \forall k \neq 0, m \geq -k \end{aligned} \quad (2.146)$$

---

<sup>6</sup>Este nivel se corresponderá con el primer estado excitado para el Hamiltoniano de Pauli, es decir, con el segundo nivel de Landau.

En general, para un factor de llenado  $f = i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$ , tenemos ocupados todos los niveles de energía desde  $k = 0$  hasta  $k = i - 1$ , de forma que:

$$\begin{aligned} |f = i\rangle &\equiv |1_0, \dots, 1_m, \dots; 1_{1,-1}, \dots, 1_{1,m}, \dots; 1_{i-1, -(i-1)}, \dots, 1_{i-1,m}, \dots\rangle \\ &\equiv A_0^\dagger \cdots A_m^\dagger \cdots B_{1,-1}^\dagger \cdots B_{1,m}^\dagger \cdots B_{i-1, -(i-1)}^\dagger \cdots B_{i-1,m}^\dagger \cdots |0\rangle \end{aligned} \quad (2.147)$$

tal que

$$\begin{aligned} A_m^\dagger |f = i\rangle &= 0 \quad , \quad \forall m \geq 0 \\ B_{km}^\dagger |f = i\rangle &= 0 \quad , \quad k = 0, 1, \dots, i - 1, \quad \forall m \geq -k \\ B_{km} |f = i\rangle &= 0 \quad , \quad \forall k \neq 0, 1, \dots, i - 1, \quad m \geq -k \\ D_{km} |f = i\rangle &= 0 \quad , \quad \forall k \neq 0, \quad m \geq -k \end{aligned} \quad (2.148)$$

Luego para factores de llenado enteros los estados posibles son  $\{|f = 1\rangle, |f = 2\rangle, \dots, |f = i\rangle, \dots\}$ . Donde  $|f = 1\rangle$  es el estado fundamental, y los demás serán estados excitados para partículas. Si queremos que cada nivel esté ocupado por antipartículas el procedimiento es idéntico aunque el vacío será el estado con todos los modos cero desocupados.<sup>7</sup>

Definimos el operador densidad de carga en función del campo fermiónico de manera que sea impar bajo conjugación de carga [92],

$$\rho = -e \frac{[\psi^\dagger, \psi]}{2} \quad (2.149)$$

donde  $q = -e$  es la carga del electrón con  $e > 0$ . Sustituyendo la expresión del campo en función de los modos propios de una partícula, y teniendo en cuenta que los espinores forman una base ortonormal, resultará:

$$\begin{aligned} \rho &= -e \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m \geq -k}^{\infty} \psi_{km}^\dagger(\vec{x}) \psi_{km}(\vec{x}) (B_{km}^\dagger B_{km} - D_{km}^\dagger D_{km}) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=0}^{\infty} \psi_{0m}^\dagger(\vec{x}) \psi_{0m}(\vec{x}) \left( A_m^\dagger A_m - \frac{1}{2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (2.150)$$

donde  $\psi_{km}^\dagger(\vec{x}) \psi_{km}(\vec{x}) \equiv (\psi_{km}^+)^\dagger(\vec{x}) \psi_{km}^+(\vec{x}) \equiv (\psi_{km}^-)^\dagger(\vec{x}) \psi_{km}^-(\vec{x})$  en virtud de la simetría de conjugación.

Si calculamos el valor esperado de este operador en un estado con factor de llenado entero,  $f = i$ , resultará

$$\rho_i = \langle f = i | \rho | f = i \rangle = -e \left( i - \frac{1}{2} \right) \left( \frac{eB}{hc} \right) \quad (2.151)$$

<sup>7</sup>Esto se debe a la dualidad *partícula - antipartícula* y estado lleno - vacío que comentamos al estudiar el comportamiento de este sistema bajo conjugación de carga.

donde  $n_B = \frac{eB}{hc}$  es la densidad de modos para cada nivel de Landau. Sin embargo, debemos tener en cuenta que el vacío para este sistema no es un estado con carga cero, sino que:

$$\rho_v = \langle 0 | \rho | 0 \rangle = \frac{e}{2} \left( \frac{eB}{hc} \right) \quad (2.152)$$

y por tanto, la densidad de carga para los electrones de conducción relativa a este vacío será:

$$\rho = \rho_i - \rho_v = i(-e) \left( \frac{eB}{hc} \right) \quad (2.153)$$

Para antipartículas el valor esperado del operador densidad de carga en un estado con factor de llenado entero,  $\tilde{f} = i$ , es

$$\rho_i = \langle \tilde{f} = i | \rho | \tilde{f} = i \rangle = +e \left( i - \frac{1}{2} \right) \left( \frac{eB}{hc} \right) \quad (2.154)$$

Teniendo en cuenta que el vacío para antipartículas es el estado con los modos cero ocupados, resulta

$$\rho_v = \langle \tilde{0} | \rho | \tilde{0} \rangle = -\frac{e}{2} \left( \frac{eB}{hc} \right) \quad (2.155)$$

Luego la densidad de carga para antipartículas (huecos) relativa a este vacío, es:

$$\rho = \rho_i - \rho_v = +e i \left( \frac{eB}{hc} \right) \quad (2.156)$$

donde  $i$  es un entero que indica el número de niveles de Landau ocupados por antipartículas. Esta expresión se diferencia de la calculada para partículas únicamente en el signo de la carga.

Hemos calculado la densidad de carga para factores de llenado enteros, sin embargo, la densidad de corriente  $\vec{j}$  en el plano será nula al tener únicamente campo magnético. Para observar el Efecto Hall Cuántico Entero además del campo magnético perpendicular a la lámina de semiconductor es necesaria la presencia de un campo eléctrico que produzca una corriente en la misma. Contemplar esta situación más realista es posible si pasamos, mediante una transformación de Lorentz, a un nuevo sistema de referencia en el que tenemos un campo magnético, y un campo eléctrico [77]. Si pasamos a un sistema de referencia que se mueve con velocidad,  $\vec{v} = \frac{c}{B^2} \vec{B} \times \vec{E}$ , respecto del sistema inicial, aparecerá un campo magnético  $\vec{B}$ , igual al que teníamos, y un campo eléctrico, perpendicular a  $\vec{B}$  y  $\vec{v}$ ,  $\vec{E} = \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B}$  <sup>8</sup>.

---

<sup>8</sup>Dado que  $|\vec{E}| \ll |\vec{B}|$ , condición necesaria para la observación del Efecto Hall Cuántico Entero, resulta que  $|\vec{v}| \ll c$ , y podemos quedarnos a primer orden en los campos.

De la densidad de carga para un estado con  $i$  niveles de Landau llenos para partículas, deducimos que la componente cero del trivector densidad de corriente será:

$$j^0 = -i \frac{e^2}{h} B$$

Podemos expresar la densidad de corriente en forma covariante gauge pasando al nuevo sistema de referencia, y así

$$j^\mu = -i \frac{e^2}{h} {}^*F^\mu \quad \mu = 0, 1, 2 \quad (2.157)$$

Donde  ${}^*F^\mu$  es el tensor dual del tensor electromagnético, que en  $(2 + 1)$  dimensiones,

$$\begin{aligned} {}^*F^\mu &= \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \\ F^{\mu\nu} &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad \nu, \mu = 0, 1, 2 \\ F^{12} &= B \quad , \quad F^{0j} = -E^j \quad , \quad j = 1, 2 \end{aligned} \quad (2.158)$$

El tensor dual es un pseudovector, y por tanto, viola la conservación de paridad. La expresión obtenida para la densidad de corriente en el vacío, en este formalismo, coincide exactamente con la anomalía, que determinamos en el formalismo de Feynman desarrollado en la Sección 2.1.

En componentes:

$$\begin{aligned} j^0 &= -i \frac{e^2}{h} B \\ j^1 &= i \frac{e^2}{h} E_2 \\ j^2 &= -i \frac{e^2}{2} E_1 \end{aligned} \quad (2.159)$$

Luego la densidad de corriente en el plano  $\vec{j}$  es transversal al campo eléctrico, y el tensor de conductividad, que se deduce a partir de la relación  $j^k = \sum_{j=1}^2 \sigma_{kj} E_j$ , con  $k = 1, 2$ , será:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & i \frac{e^2}{h} \\ -i \frac{e^2}{h} & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (2.160)$$

Las componentes diagonales son nulas, y por tanto, el sistema es no disipativo; y las componentes no diagonales están cuantizadas en función de una combinación de constantes fundamentales,  $\frac{e^2}{h}$ .



El signo de las componentes no diagonales depende, como sucede en el efecto Hall ordinario, del signo de la carga de los portadores; así, considerando las antipartículas puede deducirse que el tensor conductividad es

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & -i\frac{e^2}{h} \\ i\frac{e^2}{h} & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (2.161)$$

Hemos llegado, por tanto, a la expresión para el tensor de conductividad que encontraron K. von Klitzing, G. Dorda y M. Pepper en 1980, [72], para un sistema bidimensional de electrones en un campo magnético, intenso, a bajas temperaturas. La conductividad Hall cuantizada es:

$$\sigma_H = i\frac{e^2}{h} \quad (2.162)$$

Y la resistencia Hall, que en el plano coincide exactamente con la resistividad, será:

$$R_H = \frac{h}{ie^2} \quad (2.163)$$

En el caso ideal, en el que  $i$  niveles de Landau están completamente llenos, la sustitución  $n = in_B$  en la expresión clásica del tensor de resistividad nos permite llegar a la misma expresión para el tensor de conductividad que hemos obtenido en el contexto de Segunda Cuantificación. Esto significa que realmente no hemos encontrado una condición de cuantización para la conductividad Hall sobre las mesetas. Es decir, experimentalmente la conductividad Hall cuantizada es la de un sistema ideal cuya densidad es  $in_B$ , pero no únicamente para factores de llenado enteros, sino que también para  $f \approx i$ . Así, en un sistema ideal en el que las partículas se mueven libremente en presencia de un campo magnético no aparece el Efecto Hall Cuántico Entero. Será necesario tener en cuenta la presencia de impurezas, que permiten la existencia de dos tipos de estados, extensos y localizados, [107], para dar una explicación de la cuantización de la conductividad Hall en las mesetas características de este efecto. Además, para estos valores de la conductividad Hall, la resistividad longitudinal es nula. Por tanto, será necesario estudiar el problema de localización en el contexto de Segunda Cuantificación para llegar a la condición de cuantización para la conductividad Hall, como veremos en la Sección 2.2.4.

### 2.2.3 Estado fundamental y conductividad Hall para el Efecto Hall Cuántico Fraccionario

Siguiendo el formalismo de K.Johnson hemos determinado la densidad de carga para estados con un número entero de niveles de Landau ocupados. Esto puede generalizarse para factores de llenado, tales que  $0 < f < 1$ , es decir, cuando tenemos ocupación fraccionaria del primer nivel de Landau.

La observación del Efecto Hall Cuántico Fraccionario es posible si el campo magnético aplicado es muy intenso, en general más que para el Entero; esto a temperaturas muy bajas hace que todos los electrones pasen al primer nivel de Landau. Cuando este nivel no está completamente ocupado tenemos un conjunto de estados de energía cero infinitamente degenerados, puede deducirse entonces la expresión para la densidad de carga, y por tanto, para la densidad de corriente para factores de llenado no enteros.

Consideremos el campo fermiónico dado en (2.94), con los operadores  $B_{km}$ ,  $D_{km}$ ,  $A_m$ , y sus conjugados que verifican reglas de anticonmutación (2.140), para cada modo  $\{k, m\}$ . El espacio de Hilbert está generado por (2.141), con el vacío definido por (2.142).

Nos interesa en particular la estructura del espacio de Hilbert para los modos cero:

$$|0\rangle, A_m^\dagger|0\rangle, A_m^\dagger A_{m'}^\dagger|0\rangle, \dots \quad (2.164)$$

Las partículas que ocupan estos estados obedecen la estadística de Fermi y satisfacen el principio de exclusión de Pauli. Todos estos estados tienen la misma energía, y se diferencian únicamente en el número de ocupación, y en el momento angular de cada partícula. Para caracterizar esta degeneración introducimos el factor de llenado que hemos definido como el número de modos ocupados. Si consideramos una superficie de área finita  $A$ , el número de modos cero será finito e igual a  $M = An_B$ , y el número de partículas  $N = An$ , donde  $n_B$  y  $n$  son respectivamente la densidad de estados para el primer nivel de Landau, y la densidad de partículas<sup>9</sup>, el factor de llenado será entonces  $f = \frac{N}{M}$ , que en el límite  $A \rightarrow \infty$  dará  $f = \frac{n}{n_B}$ .

Sea  $N \leq M$ , en este caso el factor de llenado será una fracción,  $0 \leq f \leq 1$ . Si fijamos un valor de  $f$ , el número total de estados posibles es  $\binom{M}{N}$ , todos con el mismo número de ocupación pero diferente momento angular para cada partícula.

---

<sup>9</sup>Suponemos una distribución uniforme tanto para los modos cero como para las partículas en todo el plano.

Sumando a todos los posibles factores de llenado tenemos el número total de estados  $\sum_{N=0}^M \binom{M}{N} = 2^M$ , que en el límite de área infinita será infinito. Por tanto, si el primer nivel de Landau se llena parcialmente tenemos para cada factor de llenado fraccionario infinitos estados degenerados, que son igualmente favorables para describir el estado fundamental del sistema, y por tanto, darán la misma contribución a la densidad de carga.

Antes de pasar al cálculo del valor esperado de la densidad de carga para factores de llenado fraccionarios veamos cómo son los estados en el formalismo de Segunda Cuantificación. Comencemos con el factor de llenado  $f = 0$ , todos los modos cero, con momento angular  $m = 0, 1, 2, \dots, M - 1$ , están vacíos y tenemos un único estado:

$$\begin{aligned} |0\rangle &\equiv |0, 0\rangle \otimes |0, 1\rangle \otimes \dots \otimes |0, M - 1\rangle \\ A_m |0\rangle &= 0 \quad , \quad \forall m \geq 0 \end{aligned} \quad (2.165)$$

Para factor de llenado,  $f = \frac{1}{M}$ , tenemos  $M$  estados posibles:

$$\begin{aligned} |1; l\rangle &\equiv |0; 0\rangle \otimes \dots \otimes |1; l\rangle \otimes \dots \otimes |0; M - 1\rangle \equiv A_l^\dagger |0\rangle \\ l &= 0, 1, 2, \dots, M - 1 \end{aligned} \quad (2.166)$$

Si el factor de llenado es  $f = \frac{2}{M}$ , tenemos  $\frac{M(M-1)}{2}$  estados posibles:

$$\begin{aligned} |2; l, l'\rangle &\equiv A_l^\dagger A_{l'}^\dagger |0\rangle \\ l < l' \quad , \quad l, l' &= 0, 1, 2, \dots, M - 1 \end{aligned} \quad (2.167)$$

En general, para un factor de llenado,  $f = \frac{N}{M}$ , la degeneración es  $\binom{M}{N} = \frac{M!}{N!(M-N)!}$ , y así

$$\begin{aligned} |N; l_1, l_2, \dots, l_N\rangle &\equiv A_{l_1}^\dagger A_{l_2}^\dagger \dots A_{l_N}^\dagger |0\rangle \\ l_1 < l_2 < \dots < l_N \quad , \quad l_i &= 0, 1, 2, \dots, M - 1 \end{aligned} \quad (2.168)$$

Por último, si el factor de llenado es  $f = 1$ , tenemos un único estado con todos los modos cero ocupados,

$$|M\rangle \equiv |1; 0\rangle \otimes |1; 1\rangle \otimes \dots \otimes |1; M - 1\rangle \quad (2.169)$$

Luego, para factores de llenado fraccionarios,  $f = \frac{N}{M}$ , suponiendo que  $N$  y  $M$  son finitos, los estados posibles son:  $\{|0\rangle, \dots, |N; l_1, l_2, \dots, l_N\rangle, \dots\}$ . Estos forman una base ortonormal de estados fundamentales, sin excitaciones fermiónicas, pues

$$B_{km} |0 \leq f \leq 1\rangle = D_{km} |0 \leq f \leq 1\rangle = 0 \quad , \quad \forall k \quad , \quad m \geq -k$$

Recordemos que el operador densidad de carga en función del campo fermiónico es

$$\rho = -e \frac{[\psi^\dagger, \psi]}{2} \quad (2.170)$$

Para determinar la densidad de carga correspondiente a factores de llenado fraccionarios, calcularemos el promedio del valor esperado de este operador en los estados posibles para un factor de llenado dado. Comenzamos con el caso más simple, para un factor de llenado  $f = \frac{1}{M}$ , el número total de estados posibles es  $\binom{M}{1} = M$ , y la densidad de carga promedio será:

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(z, \bar{z}) &= \frac{\sum_{l=0}^{M-1} \langle 1; l | \rho | 1; l \rangle}{\sum_{l=0}^{M-1} \langle 1; l | 1; l \rangle} \\ &= -e \sum_{m, m'=0}^{M-1} \psi_{0m}^\dagger(z, \bar{z}) \psi_{0m'}(z, \bar{z}) \left( \frac{\sum_{l=0}^{M-1} \langle 1; l | A_m^\dagger A_{m'} | 1; l \rangle}{\sum_{l=0}^{M-1} \langle 1; l | 1; l \rangle} - \frac{1}{2} \delta_{mm'} \right) \\ &= -e \sum_{m=0}^{M-1} \psi_{0m}^\dagger(z, \bar{z}) \psi_{0m}(z, \bar{z}) \left( \frac{1}{M} - \frac{1}{2} \right) \end{aligned} \quad (2.171)$$

Para el siguiente caso con  $f = \frac{2}{M}$ , el número total de estados es,  $\binom{M}{2}$ , y entonces resulta:

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(z, \bar{z}) &= \frac{\sum_{l_1 < l_2}^{M-1} \langle 2; l_1, l_2 | \rho | 2; l_1, l_2 \rangle}{\sum_{l_1 < l_2}^{M-1} \langle 2; l_1, l_2 | 2; l_1, l_2 \rangle} \\ &= -e \sum_{m, m'=0}^{M-1} \psi_{0m}^\dagger(z, \bar{z}) \psi_{0m'}(z, \bar{z}) \left( \frac{\sum_{l_1=0}^{M-1} \sum_{l_2 > l_1}^{M-1} \langle 2; l_1, l_2 | A_m^\dagger A_{m'} | 2; l_1, l_2 \rangle}{\sum_{l_1=0}^{M-1} \sum_{l_2 > l_1}^{M-1} \langle 2; l_1, l_2 | 2; l_1, l_2 \rangle} - \frac{1}{2} \delta_{mm'} \right) \\ &= -e \sum_{m, m'=0}^{M-1} \psi_{0m}^\dagger(z, \bar{z}) \psi_{0m'}(z, \bar{z}) \left( \frac{\delta_{mm'}(M-1)}{\frac{M(M-1)}{2}} - \frac{1}{2} \delta_{mm'} \right) \\ &= -e \sum_{m=0}^{M-1} \psi_{0m}^\dagger(z, \bar{z}) \psi_{0m}(z, \bar{z}) \left( \frac{2}{M} - \frac{1}{2} \right) \end{aligned} \quad (2.172)$$

Por último, para el caso más general, con  $N$  partículas en  $M$  modos cero, es decir, para factor de llenado  $f = \frac{N}{M}$ , el número total de estados de igual energía es  $\binom{M}{N}$ , y resulta:

$$\begin{aligned}
 \bar{\rho}(z, \bar{z}) &= \frac{\sum_{l_1 < l_2 < \dots < l_N}^{M-1} \langle N; l_1, l_2, \dots, l_N | \rho | N; l_1, l_2, \dots, l_N \rangle}{\sum_{l_1 < l_2 < \dots < l_N}^{M-1} \langle N; l_1, l_2, \dots, l_N | N; l_1, l_2, \dots, l_N \rangle} \\
 &= -e \sum_{m, m'=0}^{M-1} \psi_{0m}^\dagger(z, \bar{z}) \psi_{0m'}(z, \bar{z}) \\
 &\quad \left( \frac{\sum_{l_1=0}^{M-1} \sum_{l_2>l_1}^{M-1} \dots \sum_{l_N>l_{N-1}}^{M-1} \langle N; l_1, l_2, \dots, l_N | A_m^\dagger A_{m'} | N; l_1, l_2, \dots, l_N \rangle}{\sum_{l_1=0}^{M-1} \sum_{l_2>l_1}^{M-1} \dots \sum_{l_N>l_{N-1}}^{M-1} \langle N; l_1, l_2, \dots, l_N | N; l_1, l_2, \dots, l_N \rangle} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \delta_{mm'} \right) \\
 &= -e \sum_{m, m'=0}^{M-1} \psi_{0m}^\dagger(z, \bar{z}) \psi_{0m'}(z, \bar{z}) \left( \frac{\delta_{mm'} \frac{(M-1)(M-2)\dots(M-(N-1))}{(N-1)!}}{\frac{(M-1)(M-2)\dots(M-(N-1))}{(N)!}} - \frac{1}{2} \delta_{mm'} \right) \\
 &= -e \sum_{m=0}^{M-1} \psi_{0m}^\dagger(z, \bar{z}) \psi_{0m}(z, \bar{z}) \left( \frac{N}{M} - \frac{1}{2} \right) \tag{2.173}
 \end{aligned}$$

En definitiva, la función de distribución para la densidad de carga promedio será por tanto

$$\bar{\rho}(z, \bar{z}) = -e \sum_{m=0}^{M-1} \psi_{0m}^\dagger(z, \bar{z}) \psi_{0m}(z, \bar{z}) \left( \frac{N}{M} - \frac{1}{2} \right) \tag{2.174}$$

Si pasamos al límite de área infinita:  $f = \frac{N}{M} \rightarrow f = \frac{n}{n_B}$ , con  $0 \leq f \leq 1$ , y encontramos:

$$\bar{\rho}_f = -e \left( \frac{eB}{hc} \right) \left( f - \frac{1}{2} \right) \tag{2.175}$$

Esta expresión coincide esencialmente con la calculada para factores de llenado enteros. Realmente es una generalización de la misma para cualquier valor del factor de llenado  $f$ , no necesariamente entero. En particular, los valores fraccionarios de  $f$ ,  $f = \frac{p}{q}$ , con  $p$  y  $q$  primos entre sí y  $q$  impar, son los observados en el Efecto Hall Cuántico Fraccionario [125].

La densidad de carga respecto de la del vacío, (2.155), es:

$$\rho = \bar{\rho}_f - \rho_v = -ef \left( \frac{eB}{hc} \right) \tag{2.176}$$

Mediante la transformación de Lorentz, como vimos en la Sección anterior, encontramos la expresión covariante para la densidad de corriente, correspondiente a los factores de llenado fraccionarios,

$$j^\mu = -f \frac{e^2}{h} * F^\mu \quad , \quad \mu = 0, 1, 2 \quad (2.177)$$

Que en componentes

$$\begin{aligned} j^0 &= -f \frac{e^2}{h} B \\ j^1 &= f \frac{e^2}{h} E^2 \\ j^2 &= -f \frac{e^2}{2} E^1 \end{aligned} \quad (2.178)$$

Una vez más, tenemos una densidad de corriente en el plano,  $\vec{j}$ , transversal al campo eléctrico, y por tanto, el tensor de conductividad será ahora

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & f \frac{e^2}{h} \\ -f \frac{e^2}{h} & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad 0 \leq f \leq 1 \quad (2.179)$$

Que coincide esencialmente con la expresión del tensor de conductividad calculado para el entero, pero ahora las componentes no diagonales vienen dadas por una fracción de la combinación de constantes fundamentales:  $\frac{e^2}{h}$ . Las componentes diagonales siguen siendo nulas manifestando el carácter disipativo. Como en el entero, esto no resuelve totalmente el problema de la cuantización de la conductividad Hall para factores de llenado fraccionarios. Sin embargo, a diferencia del mismo, no es suficiente estudiar el problema de la localización para partículas libres, sino que es necesario abordar el estudio del problema, más complejo, de muchas partículas que interactúan entre sí, y con las impurezas. Todo esto se desarrollará fundamentalmente en la segunda parte de esta memoria.

## 2.2.4 Impurezas y estados ligados: Localización y Mesetas

En un sistema de electrones que se mueven libremente en un plano, en presencia de un campo magnético perpendicular al mismo, hemos encontrado que la conductividad Hall está cuantizada para un número entero de niveles de Landau ocupados.

Este análisis, sin embargo, no explica totalmente los resultados experimentales que aparecen en el Efecto Hall Cuántico Entero. En particular, los aspectos más importantes no recogidos en este modelo son:

- No es posible deducir la presencia de mesetas en la conductividad Hall cuantizada.
- No se refleja de ninguna manera la influencia que pueden tener las impurezas del material, cuando está experimentalmente comprobado que en muestras con un cierto grado de desorden se manifiesta el Efecto Hall Cuántico Entero claramente.
- No se explica que la conductividad longitudinal se anule para aquellos valores del factor de llenado para los cuales la conductividad Hall está cuantizada.

Efectivamente, siguiendo nuestro análisis, si se aumenta la densidad de partículas sin llegar a llenar un nivel de Landau completo, la conductividad Hall aumentaría monotonamente hasta alcanzar el siguiente valor cuantizado correspondiente a un nuevo nivel de Landau lleno y, por tanto, no aparecerían las mesetas características del Efecto Hall ni se produciría simultáneamente la ausencia de disipación.

Todo esto nos indica que el desorden va a jugar un papel fundamental en la comprensión tanto del Efecto Entero como del Fraccionario. Y así, parece razonable incorporar al modelo la influencia de las impurezas del material. Un estudio detallado del efecto de las imperfecciones y el desorden sobre los estados cuánticos de una partícula, en presencia de un campo magnético y eléctrico en el plano, es el realizado, entre otros, por R.E.Prange y R.Joynt [71]. La presencia de desorden en el sistema se traducirá en la aparición de nuevos estados entre los niveles de Landau, de estos estados algunos serán localizados y otros extensos, proporcionando el marco necesario en el cual se puede explicar la aparición de las mesetas en la conductividad Hall. El trabajo de Prange y Joynt se plantea en Mecánica Cuántica no-relativista, nosotros abordaremos el problema en el contexto de Segunda Cuantificación.

En primer lugar, estudiaremos el problema de una partícula moviéndose en el plano, en un campo magnético y eléctrico perpendiculares entre sí, descrito por la ecuación de Dirac en  $(2 + 1)$  dimensiones:

$$\left[ \gamma^\mu \left( p_\mu + \frac{e}{c} A_\mu \right) - Mc \right] \psi(x) = 0 \tag{2.180}$$

Tomaremos el gauge de Landau para el potencial vector,  $A_1 = Bx_2, A_2 = 0$ , y el potencial escalar para un campo eléctrico constante y uniforme en el plano,  $\vec{E} =$

$-E\vec{j}$ , será  $A_0 = Ex_2$ . El Hamiltoniano de Dirac puede expresarse matricialmente<sup>10</sup>

$$H = \begin{pmatrix} Mc^2 - eEx_2 & D \\ D^\dagger & -Mc^2 - eEx_2 \end{pmatrix} \quad (2.181)$$

donde

$$D = cp_2 + i(cp_1 + eBx_2) \quad , \quad D^\dagger = cp_2 - i(cp_1 + eBx_2)$$

Este problema espectral ha sido ya resuelto en  $(3 + 1)$  dimensiones por M.M. Nieto y P.L.Taylor [100]. Utilizando el método de reducción de Feynman-Gell-Mann, propuesto por estos autores, encontramos que el espectro para el problema estacionario en el plano es:

$$\mathcal{E}_{np_1}^\pm = \frac{cE}{B}p_1 \pm \sqrt{\left(1 - \frac{E^2}{B^2}\right) \left[M^2c^4 + 2e\sqrt{B^2 - E^2}\hbar c n\right]} \quad (2.182)$$

con  $n$  un entero no negativo, que caracteriza cada nivel de Landau; y  $p_1$ , un número real, que tomará valores discretos si el sistema se encuentra en una superficie de área finita, e imponemos condiciones de periodicidad sobre los espinores, en la dirección  $OX_1$ .

Una base de estados propios es la generada por los espinores de dos componentes:

$$\psi_{np_1}^\pm(x_1, x_2) = \left[\gamma^\mu(p_\mu + \frac{e}{c}A_\mu) + Mc\right] \phi_{np_1}^\pm(x_1, x_2) \quad (2.183)$$

donde

$$\Phi_{np_1}^\pm(x_1, x_2) = N_{np_1} e^{i\frac{p_1}{\hbar}x_1} H_n \left(\frac{x_2 + x_2^0}{\tilde{l}}\right) e^{-\frac{1}{2\tilde{l}^2}(x_2 + x_2^0)^2} \begin{pmatrix} 1 \\ i\frac{B - \sqrt{B^2 - E^2}}{E} \end{pmatrix}$$

aquí,  $N_{np_1}$ , es una constante de normalización;  $H_n(x)$  es el polinomio de Hermite de grado  $n$  [1], y

$$x_2^0 = \frac{cBp_1 - \mathcal{E}_{np_1}^\pm E}{e(B^2 - E^2)}$$

$$\tilde{l}^2 = \frac{\hbar}{M\tilde{w}} = \frac{\hbar c}{e\sqrt{B^2 - E^2}}$$

Vemos, por un lado, que la degeneración de los niveles de Landau desaparece completamente en presencia de campo eléctrico; y, por otro lado, que se recupera

<sup>10</sup>En la representación:  $\gamma^0 = \sigma^3$ ,  $\gamma^1 = i\sigma^1$  y  $\gamma^2 = i\sigma^2$ .  $M$  es la masa de la partícula cargada con  $q = -e$ .



la simetría espectral para el estado fundamental, que no teníamos en el problema de una partícula con masa en un campo magnético. Además, los estados son extensos en una de las direcciones del plano, siguiendo las líneas de potencial eléctrico constante,  $x_2 = cte$  y, por tanto, conducen la corriente.

En ausencia de impurezas, como vimos en los apartados anteriores, una simple transformación de Lorentz nos permite pasar de un sistema con campo magnético constante a uno con campos magnético y eléctrico perpendiculares entre sí, y determinar, así, la densidad de corriente covariante para factores de llenado enteros. Sin embargo, como veremos esto no será posible al considerar las impurezas.

En el límite,  $|\vec{E}| \ll |\vec{B}|$ , y para  $\mathcal{E} \approx Mc^2$ , si hacemos un desarrollo no-relativista para la energía, a orden cero encontramos el espectro del Hamiltoniano de Pauli,

$$\mathcal{E}_{np_1}^{NR} = \hbar w_c n + \frac{cE}{B} p_1 - \frac{1}{2} M \left( \frac{cE}{B} \right)^2 \quad (2.184)$$

Ya en este límite no-relativista, vemos que la presencia de campo eléctrico rompe completamente la degeneración infinita característica de los niveles de Landau, que pasan a formar una banda de estados con diferentes energías para cada  $p_1$ .

Consideremos ahora la ecuación de Dirac en presencia de una impureza simulada por un potencial central [56, 13, 113]. Para estudiar este tipo de potenciales, es conveniente elegir el gauge simétrico, en lugar del de Landau, y por tanto, estudiaremos el sistema en ausencia de campo eléctrico, para calcular el espectro y los espinores propios del Hamiltoniano de Dirac.

Supongamos que tenemos una impureza simulada por un pozo esférico de la forma:

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & \text{si } r \leq a_0 \\ 0 & \text{si } r > a_0 \end{cases} \quad (2.185)$$

El Hamiltoniano de Dirac en  $(2 + 1)$  dimensiones para este sistema es:<sup>11</sup>

$$\begin{aligned} H &= \vec{\alpha}(c\vec{p} + e\vec{A}) + \beta Mc^2 + V(r) \\ H &= \begin{pmatrix} Mc^2 + V(r) & D \\ D^\dagger & -Mc^2 + V(r) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.186)$$

<sup>11</sup>En la representación:  $\alpha^1 = -\sigma^2$ ,  $\alpha^2 = \sigma^1$  y  $\beta = \sigma^3$ . Donde  $M$  es la masa del electrón y  $l^2 = \frac{\hbar}{Mw}$  la longitud magnética, con  $w = \frac{eB}{2Mc}$

Donde hemos tomado el gauge de Weyl ( $A_0 = 0$ ), y para el potencial vector el gauge simétrico, que en coordenadas polares es:  $A_r = 0, A_\phi = -\frac{B}{2}r$ . Así

$$\begin{aligned} D &= \frac{\sqrt{2eB\hbar c}}{2l} e^{-i\phi} \left( l^2 \frac{\partial}{\partial r} - r - i \frac{l^2}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \\ D^\dagger &= \frac{\sqrt{2eB\hbar c}}{2l} e^{i\phi} \left( -l^2 \frac{\partial}{\partial r} - r + i \frac{l^2}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \end{aligned} \quad (2.187)$$

Queremos resolver el problema espectral  $H\Psi = \lambda\Psi$ . Al tratarse de un potencial central, el Hamiltoniano y el momento angular total en la dirección perpendicular al plano conmutan,  $[H, J_3] = 0$ . Tomando una base de espinores propios del momento angular total, será posible separar la parte radial de la parte angular en las ecuaciones de Dirac para las dos componentes, así

$$\Psi_m(r, \phi) = \begin{pmatrix} e^{im\phi} R_{1,m}(r) \\ e^{i(m+1)\phi} R_{2,m}(r) \end{pmatrix} \quad (2.188)$$

tal que

$$J_3 \Psi_m(r, \phi) = \hbar \left( m + \frac{1}{2} \right) \Psi_m(r, \phi) \quad , \quad m \in \mathbf{Z} \quad (2.189)$$

El sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden acopladas para  $R_{1m}(r)$  y  $R_{2m}(r)$  es:

$$\begin{aligned} \frac{l}{2} \frac{dR_{2,m}(r)}{dr} + \frac{1}{2} \left( \frac{(m+1)l}{r} - \frac{r}{l} \right) R_{2,m}(r) &= \frac{E - Mc^2 - V(r)}{\sqrt{2eB\hbar c}} R_{1,m}(r) \\ -\frac{l}{2} \frac{dR_{1,m}(r)}{dr} + \frac{1}{2} \left( \frac{ml}{r} - \frac{r}{l} \right) R_{1,m}(r) &= \frac{E + Mc^2 - V(r)}{\sqrt{2eB\hbar c}} R_{2,m}(r) \end{aligned} \quad (2.190)$$

Para resolver este sistema distinguiremos dos zonas: la zona I, para  $r < a_0$ , y la zona II, para  $r > a_0$ ; e imponemos condiciones de continuidad para los espinores en  $r = a_0$ . De estas condiciones de continuidad se puede determinar completamente el espectro, y los espinores propios para el Hamiltoniano de Dirac, ver Apéndice B.

El espectro es discreto, y está caracterizado por dos números cuánticos:  $n_r = 0, 1, 2, \dots$ , y  $m \in \mathbf{Z}$ . En ausencia de potencial, los niveles de Dirac-Landau pueden darse en función de estos números cuánticos, resolviendo el problema de Landau en el plano en coordenadas polares (Apéndice B), y así, tenemos:  $k = n_r + \frac{|m|-m}{2}$ , con  $k$  y  $n_r$  enteros no negativos, y  $m$  un entero asociado al momento angular en la dirección del campo magnético,  $m \geq -k$ , que caracteriza la degeneración de los

niveles de energía. El potencial asociado a la impureza produce sobre el espectro del caso *libre* la ruptura de la degeneración en  $m$ .

Es interesante analizar algunas características del espectro en presencia de la impureza, así:

- En general se rompe la degeneración en  $m$  para cada nivel de Dirac-Landau. Sin embargo, para niveles altos la degeneración no se rompe completamente, y estados con diferente momento angular,  $m$ , pueden tener la misma energía e igual a la del problema libre. Sin embargo, los niveles de baja energía sí se ven más afectados por la impureza, y su energía depende de  $m$ . Este comportamiento depende lógicamente de los parámetros característicos del pozo: profundidad y radio.
- En presencia de la impureza la asimetría espectral del estado fundamental sigue estando presente al igual que en el problema libre.
- Podemos distinguir fundamentalmente dos tipos de estados: con energía  $|E| \geq Mc^2$ ; y con  $|E| < Mc^2$ . Estos últimos son estados ligados de partícula cuyo número dependerá de las características del pozo. Los demás no son estados ligados, y corresponderían a los estados del continuo característicos de una teoría libre, que en este caso son discretos como consecuencia de la presencia del campo magnético uniforme en todo el plano.

La diferencia esencial entre estos dos tipos de estados puede observarse al introducir un campo eléctrico. Los estados ligados en presencia del campo eléctrico no conducen la corriente pues son estados en los que la partícula se encuentra atrapada por la impureza, se trata pues de estados localizados. Por el contrario, los demás estados (aparentemente localizados como consecuencia del gauge simétrico) sí que pueden conducir la corriente, estos son los denominados estados extensos.

Antes de pasar a estudiar el sistema en Segunda Cuantificación es necesario contemplar una situación más realista. Supongamos que tenemos  $2P$  impurezas distribuidas aleatoriamente en el plano. Cada impureza la caracterizamos por el parámetro  $\alpha_j$ , con  $j = 1, \dots, P$ , que engloba las características del potencial como son la profundidad del pozo, el radio, y el punto en el cual está centrado, es decir,  $\alpha_j \equiv \{V_0^j, a_0^j, z^j = x_1^j + ix_2^j\}$ . En esta nueva situación el número de estados localizados aumentará por cada impureza, mientras que los estados extensos sólo ven modificada su energía, pero no aumentan en número.

El campo fermiónico expresado en función de los modos propios de la ecuación de Dirac para una partícula cargada en presencia de una impureza, y del campo

magnético, será:<sup>12</sup>

$$\psi^\alpha(r, \phi) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m \geq -k}^{\infty} \left( B_{km}^{(\alpha)} \psi_{km}^{(+)}(r, \phi) + D_{km}^{(\alpha)\dagger} \psi_{km}^{(-)}(r, \phi) \right) + \sum_{m=0}^{\infty} A_{0m}^{(\alpha)} \psi_{0m}(r, \phi) \quad (2.191)$$

donde los espinores,  $\{\psi_{km}^{(\pm)}(r, \phi), \psi_{0m}(r, \phi)\}$ , forman una base ortonormal de estados propios en presencia de la impureza.

Los operadores  $B_{km}^{(\alpha)}$ ,  $D_{km}^{(\alpha)}$  y  $A_{0m}^{(\alpha)}$  verifican las reglas de anticonmutación propias de los operadores fermiónicos:

$$\begin{aligned} \{B_{km}^{(\alpha)}, B_{k'm'}^{(\alpha)\dagger}\} &= \delta_{kk'} \delta_{mm'} \quad , \quad \{D_{km}^{(\alpha)}, D_{k'm'}^{(\alpha)\dagger}\} = \delta_{kk'} \delta_{mm'} \\ \{A_{0m}^{(\alpha)}, A_{0m'}^{(\alpha)\dagger}\} &= \delta_{mm'} \end{aligned} \quad (2.192)$$

Supongamos ahora que el pozo tiene una profundidad y un radio tal que el número de estados ligados de partícula, correspondientes al estado fundamental  $k = 0$ , es exactamente  $2L + 1$ . Es decir, los estados con  $k = 0$  y  $m = 0, 1, 2, \dots, 2L$ , son ligados; y todos los demás estados con  $k = 0$  y  $m = 2L + 1, 2L + 2, \dots$ , son extensos. A diferencia de problema sin impureza tenemos que distinguir dos tipos de operadores: para  $k = 0$ ,  $\tilde{A}_{0m}^{(\alpha)}$  con  $m = 0, 1, 2, \dots, 2L$  son operadores de destrucción para partículas en estados ligados; y  $A_{0m}^{(\alpha)}$  con  $m = 2L + 1, \dots$  para partículas en estados extensos. Los demás operadores  $B_{km}^{(\alpha)}$  y  $D_{km}^{(\alpha)}$  son operadores de destrucción para partículas y antipartículas en estados extensos equivalentes a los del problema sin impurezas (*libre*).

El espacio de Hilbert estará generado por el conjunto de vectores ortonormales:

$$\begin{aligned} |0\rangle, \tilde{A}_{0m}^{(\alpha)\dagger}|0\rangle, \tilde{A}_{0m}^{(\alpha)\dagger}\tilde{A}_{0m'}^{(\alpha)\dagger}|0\rangle, \dots, A_{0m}^{(\alpha)\dagger}|0\rangle, A_{0m}^{(\alpha)\dagger}A_{0m'}^{(\alpha)\dagger}|0\rangle, \dots, \\ B_{km}^{(\alpha)\dagger}|0\rangle, D_{km}^{(\alpha)\dagger}|0\rangle \dots \end{aligned} \quad (2.193)$$

donde el estado vacío  $|0\rangle$  se define ahora:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{0m}^{(\alpha)}|0\rangle &= 0 \quad , \quad m = 0, 1, \dots, 2L + 1 \\ A_{0m}^{(\alpha)}|0\rangle &= 0 \quad , \quad m = 2L + 1, \dots \\ B_{km}^{(\alpha)}|0\rangle &= 0 \quad , \quad D_{km}^{(\alpha)}|0\rangle = 0 \quad , \quad \forall k, m \end{aligned} \quad (2.194)$$

De estos estados que generan el espacio de Hilbert tenemos algunos estados ligados de partícula, y el resto son estados extensos, como veremos solamente estos últimos contribuyen a la densidad de corriente.

<sup>12</sup>Donde consideramos una impureza en el origen :  $\alpha \equiv \{V_0, a_0\}$ .

Como en el caso *libre*, consideremos una superficie de área finita  $A$ . Cada nivel de energía,  $k$ , está formado por  $M = An_B$  estados, donde  $n_B = \frac{eB}{hc}$  es la densidad de estados por unidad de área y por espín de cada nivel de Dirac-Landau. Para  $N = An$  partículas el número total de estados posibles no degenerados es  $\binom{M}{N}$ . Estos estados pueden caracterizarse por el factor de llenado que representa el número de modos ocupados:  $f = \frac{\text{densidad de partículas}}{\text{densidad de modos posibles}}$ , y que en el límite de área infinita tendrá un valor finito que puede ser entero o fraccionario. Estudiaremos cómo cambia la densidad de carga, y en definitiva la densidad de corriente, cuando cambiamos el factor de llenado en presencia de la impureza.

El operador densidad de carga en presencia de la impureza será:

$$\rho^\alpha = -e \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m \geq -k}^{\infty} \psi_{km}^\dagger(r, \phi) \psi_{km}(r, \phi) \left( B_{km}^{(\alpha)\dagger} B_{km}^{(\alpha)} - D_{km}^{(\alpha)\dagger} D_{km}^{(\alpha)} \right) + \sum_{m=0}^{\infty} \psi_{0m}^\dagger(r, \phi) \psi_{0m}(r, \phi) \left( A_{0m}^{(\alpha)\dagger} A_{0m}^{(\alpha)} - \frac{1}{2} \right) \right\} \quad (2.195)$$

Si consideramos  $2P$  impurezas distribuidas aleatoriamente en el plano, en una superficie de área finita  $A$ , tendremos  $2P$  bandas de estados localizados de partícula con  $2L+1$  estados cada una. Si la densidad de estados localizados es  $n_{\text{loc}}$ , el número total de estados localizados es  $M_{\text{loc}} = 2Pn_{\text{loc}}A$ . Por otro lado, para el primer nivel de Dirac-Landau tenemos únicamente una banda de estados extensos, si su densidad es  $n_{\text{ext}}$ , el número total de estados extensos será  $M_{\text{ext}} = An_{\text{ext}}$ .

El estado correspondiente a factor de llenado cero es el vacío. Para aumentar el factor de llenado debemos ir ocupando los estados del primer nivel de energía, formado por estados localizados y extensos, con una densidad total de modos igual a:  $2Pn_{\text{loc}} + n_{\text{ext}}$ . Supongamos que se llenan completamente  $P$  bandas de estados localizados, el estado resultante tendrá un factor de llenado  $f = \frac{1}{2}$ , en el límite de área infinita, respecto de la densidad total de modos correspondiente a este nivel de energía. Este estado será:

$$|f = \frac{1}{2}\rangle = \tilde{A}_{00}^{(\alpha_1)\dagger} \dots \tilde{A}_{0,L}^{(\alpha_1)\dagger} \dots \tilde{A}_{00}^{(\alpha_P)\dagger} \dots \tilde{A}_{0,L}^{(\alpha_P)\dagger} |0\rangle \quad (2.196)$$

Si calculamos el valor esperado de la densidad de carga en este estado encontramos  $\tilde{\rho} = -e \frac{1}{2} \left( \frac{eB}{hc} \right)$ , respecto de la densidad de carga del vacío  $\rho_v = +e \frac{1}{2} \left( \frac{eB}{hc} \right)$ . Sin embargo, a diferencia del problema *libre*, la presencia de impurezas rompe la invariancia del sistema bajo transformaciones de Lorentz, y por tanto, no es posible calcular a partir de la densidad de carga el valor esperado de la densidad de corriente covariante, ni determinar, por tanto, la densidad de corriente aso-

ciada al campo eléctrico en el plano. Esto está relacionado con el hecho de que las partículas que ocupan estados localizados están ligadas a la impureza, y por tanto, no pueden conducir la corriente cuando aplicamos un campo eléctrico sobre el sistema.

En definitiva, como consecuencia de la presencia de impurezas al aumentar el factor de llenado desde  $f = 0$  hasta  $f = \frac{1}{2}$  la densidad de corriente será nula, y así, la conductividad Hall y la conductividad longitudinal para esos valores del factor de llenado son nulas.

Una vez ocupados todos los estados localizados de momento angular más bajo, las partículas pueden ocupar los estados extensos próximos al primer nivel de Dirac-Landau. A medida que se llenan los estados extensos, el factor de llenado no cambia mucho respecto de  $f = \frac{1}{2}$ , pues en proporción tenemos muchos más estados localizados que extensos. Sin embargo, los estados extensos sí conducen la corriente, y por tanto, la conductividad longitudinal y Hall en este proceso de llenado dejan de ser cero. En particular, la conductividad Hall aumentará hasta alcanzar el valor cuantizado que corresponde a tener completamente ocupados todos los estados extensos del primer nivel de Dirac-Landau. Es decir, el estado para este factor de llenado es:

$$|f \approx \frac{1}{2}\rangle = A_{0,2L+1}^{(\alpha)\dagger} \cdots A_{0,M_{\text{ext}}-1}^{(\alpha)\dagger} |f = \frac{1}{2}\rangle \quad (2.197)$$

Respecto de la densidad de estados extensos, este estado tiene factor de llenado uno, y en este sentido se corresponde exactamente con el estado de la teoría *libre* en el cual los modos cero están completamente llenos. El valor esperado de la densidad de corriente en este estado será, por tanto,

$$\begin{aligned} j^1 &= \frac{e^2}{h} E_2 \\ j^2 &= -\frac{e^2}{h} E_1 \end{aligned} \quad (2.198)$$

Y el tensor de conductividad:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & \frac{e^2}{h} \\ -\frac{e^2}{h} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.199)$$

A medida que las partículas empiezan a ocupar los estados extensos comienza a fluir la corriente, aparecen entonces efectos disipativos, y por tanto, la conductividad longitudinal irá aumentando desde cero hasta alcanzar un valor máximo para volver a disminuir hasta cero cuando todos los estados extensos esten ocupados de

nuevo. En este corto intervalo de variación del factor de llenado, entorno a  $f = \frac{1}{2}$ , el sistema se comporta de manera normal, es decir, la conductividad Hall aumenta linealmente al aumentar el factor de llenado, y la conductividad longitudinal es distinta de cero. Cuando la banda de estados extensos está completamente llena la conductividad Hall ha alcanzado el valor cuantizado  $\sigma_H = \frac{e^2}{h}$ , y la longitudinal es cero una vez más. Comienza en este punto la primera meseta.

Los siguientes estados a ocupar son los localizados correspondientes a momentos angulares altos. Si se ocupan  $P$  bandas de éstos, el factor de llenado aumentará hasta alcanzar el valor  $f = 1$ , en el límite  $A \rightarrow \infty$ , respecto de la densidad total de modos. En este intervalo, la conductividad Hall no cambia ya que estos estados no conducen la corriente, y tampoco hay disipación por lo que la conductividad longitudinal sigue siendo nula. El estado será:

$$|f = 1\rangle = \tilde{A}_{0,L+1}^{(\alpha_1)\dagger} \cdots \tilde{A}_{0,2L}^{(\alpha_1)\dagger} \cdots \tilde{A}_{0,L+1}^{(\alpha_P)\dagger} \cdots \tilde{A}_{0,2L}^{(\alpha_P)\dagger} |f \approx \frac{1}{2}\rangle \quad (2.200)$$

En definitiva, los estados correspondientes al primer nivel de Dirac-Landau permiten explicar los resultados experimentales para la conductividad Hall y longitudinal cuando el factor de llenado toma valores en el rango  $0 \leq f \leq 1$ .

Redefiniendo el espectro de Dirac de forma que el siguiente nivel de energía pase a ser el nuevo nivel fundamental (de manera análoga a la evolución del nivel de Fermi en Mecánica Cuántica no-relativista), encontramos una situación idéntica a la estudiada anteriormente con estados localizados y extensos originarios ahora del segundo nivel de Dirac-Landau. Más adelante, veremos la relación que existe entre este argumento y el *flujo espectral* que aparece en el espectro de partículas de Dirac, cuando consideramos, siguiendo el razonamiento de Thouless [124], un doble efecto Arhanov-Bohm. Dos solenoides, cuyos flujos dependen del tiempo, pueden producir una variación sobre las corrientes en el material, que adiabáticamente modifican el espectro en el tiempo dando lugar al *flujo espectral*, esto permite redefinir el espectro de Dirac.

En la nueva situación, los electrones ocuparán en primer lugar los estados localizados de momento angular más bajo, y el factor de llenado aumentará hasta alcanzar el valor  $f = \frac{1}{2}$  respecto de la nueva densidad total de modos.<sup>13</sup> En este proceso, la conductividad Hall cuantizada no cambia porque se trata de estados localizados, y sigue siendo  $\sigma_H = \frac{e^2}{h}$ , la conductividad longitudinal es cero. Esta es la primera meseta, que corresponde a ocupar los estados localizados de alta y baja energía del primer y segundo nivel de Dirac-Landau respectivamente.

<sup>13</sup>El factor de llenado respecto del vacío es  $f = 1 + \frac{1}{2}$ .

A continuación comienzan a ocuparse los estados extensos del segundo nivel hasta que están completamente llenos, el factor de llenado no aumenta mucho  $f \approx \frac{1}{2}$  (o  $f \approx \frac{3}{2}$  respecto del vacío), y se alcanza la siguiente meseta para la cual  $\sigma_H = 2\frac{e^2}{h}$ , pues están ocupados dos niveles completos de estados extensos. Por último, se llenarán los estados localizados correspondientes a momentos angulares más altos hasta que el factor de llenado es  $f = 2$  (respecto del vacío), sin que cambie la conductividad Hall cuantizada. Y así sucesivamente pueden reproducirse totalmente los resultados experimentales para el Efecto Hall Cuántico Entero.

La localización, como hemos visto, juega un papel fundamental en la comprensión de Efecto Hall Cuántico Entero [78, 106, 39, 12]. El proceso de localización que hemos analizado en presencia de un campo magnético muy intenso, sin embargo, es muy distinto de la localización de Anderson [5, 37, 29], como señalan R.E. Prange y R. Joynt [71]. La diferencia más importante es que los estados localizados en este sistema están confinados a una región del espacio junto a la impureza, mientras que la localización de Anderson se basa en una superposición de estados de *scattering* que dan lugar a un estado localizado en una región amplia del espacio. En cualquier caso, es la existencia de estados localizados entre cada banda de estados de Dirac-Landau la que permite que la conductividad Hall permanezca cuantizada y constante mientras cambia el factor de llenado.



## Capítulo 3

# Teoría de Muchos Cuerpos

En el capítulo anterior hemos estudiado tanto el Efecto Hall Cuántico Entero como el Efecto Hall Cuántico Fraccionario en el formalismo de Segunda Cuantización. En este contexto de Segunda Cuantización expresábamos el campo fermiónico en función de los modos propios de la ecuación de Dirac para una partícula en el plano, moviéndose en presencia de un campo magnético constante, sin considerar en primera aproximación ni la interacción entre partículas ni la interacción con las impurezas del material. En esta aproximación de partícula “libre” encontrábamos que la conductividad Hall aparece cuantizada para valores enteros y fraccionarios del factor de llenado. No obstante, para el Efecto Hall Cuántico Entero era necesario considerar la localización debida a las impurezas para explicar las mesetas observadas experimentalmente, aunque sigue tratándose de un fenómeno en el que las partículas no interaccionan entre sí, es decir, son “independientes”.

El Efecto Hall Cuántico Fraccionario, en esta aproximación, presenta una peculiaridad respecto al Entero que es la enorme degeneración que aparece cuando un nivel de Landau está parcialmente ocupado. Tenemos así infinitos estados de igual energía correspondientes al mismo factor de llenado y, por tanto, igualmente probables. Si promediamos sobre todos los posibles estados para cada factor de llenado llegamos a la expresión para la conductividad Hall cuantizada  $\sigma_H = f \frac{e^2}{h}$  para  $0 \leq f \leq 1$ . Sin embargo, ningún factor de llenado parece más probable que otro, a diferencia de lo observado experimentalmente.

Por otro lado, aunque ambos efectos son observados esencialmente en análogas circunstancias (campos magnéticos intensos y bajas temperaturas) y el resultado de las observaciones es el mismo (aparecen las mesetas de la conductividad Hall y la conductividad longitudinal se anula), existen diferencias importantes entre ambos fenómenos, como son: la conductividad Hall cuantizada para factores de

llenado fraccionarios se observa en muestras muy puras en contraposición con el Efecto Entero; la exactitud en la conductividad Hall cuantizada en las mesetas es mucho menor en el Efecto Fraccionario que en el Entero [108, 66].

Todo esto nos lleva a considerar que el Efecto Hall Cuántico Fraccionario debe encuadrarse en un contexto diferente al descrito para el Efecto Hall Cuántico Entero. Y, a diferencia de éste, es precisamente la correlación entre los electrones debida a la interacción Coulombiana el origen del primero.

La mayoría de las teorías sobre el Efecto Fraccionario, [108, 66, 132], están basadas en la célebre función de onda propuesta por R.B. Laughlin [79, 80, 81]. Esta función de onda describe el estado fundamental de un número finito de partículas  $N$ , en un volumen finito y correspondiente a un factor de llenado  $f = \frac{1}{m}$ , con  $m$  impar. R.B. Laughlin propuso una función de onda variacional de tipo Jastrow basándose en los resultados numéricos obtenidos para pocas partículas y en su experiencia con sistemas de materia condensada como el Helio líquido superfluido. Esta función de onda describe un nuevo estado fundamental de materia condensada, un fluido incompresible, que juega el mismo papel en el Efecto Fraccionario que el estado fundamental correspondiente a un factor de llenado entero en el Efecto Entero.

En la primera Sección de este Capítulo estudiaremos la conexión entre nuestra teoría en Segunda Cuantificación y la Teoría de muchos cuerpos en la que se desarrolla de manera natural la Teoría de R.B. Laughlin. En la siguiente Sección analizaremos, utilizando un método variacional, que la función de Laughlin describe el estado fundamental del sistema estudiado para pocas partículas. A continuación, en la Sección 3.3, estudiaremos en profundidad la teoría topológica propuesta por Thouless, analizando la conexión con la teoría de la localización para el Efecto Entero. Por último, revisaremos brevemente la teoría de Laughlin para las cuasipartículas en el Efecto Hall Cuántico Fraccionario.

### 3.1 Conexión entre el formalismo de Segunda Cuantización y la Teoría de R.B. Laughlin para el Efecto Hall Cuántico Fraccionario.

El espacio de Hilbert de nuestra teoría en Segunda Cuantificación coincide con el espacio de Fock fermiónico dado por

$$\mathcal{F} \equiv \Lambda(\Gamma_+(S) \oplus \Gamma_-(S) \oplus \Gamma_0(S)) \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned}
 &= \Lambda(\Gamma_+(S)) \otimes \Lambda(\Gamma_-(S)) \otimes \Lambda(\Gamma_0(S)) \\
 &= \bigoplus_{N_+, N_-, N_0=0}^{\infty} \Lambda^{N_+} \Gamma_+(S) \otimes \Lambda^{N_-} \Gamma_-(S) \otimes \Lambda^{N_0} \Gamma_0(S)
 \end{aligned}$$

donde  $\Gamma_+(S)$ ,  $\Gamma_-(S)$  y  $\Gamma_0(S)$  son los subespacios de espinores de cuadrado sumable para una partícula en el plano, en presencia de un campo magnético constante, con energía positiva, negativa o cero. Es decir, el espacio de Hilbert del operador de Dirac es  $\mathcal{H} = \Gamma_+(S) \oplus \Gamma_-(S) \oplus \Gamma_0(S)$ , y está generado por la base ortonormal  $\{\psi_{km}^+(z, \bar{z}), \psi_{km}^-(z, \bar{z}), \psi_{0m}(z, \bar{z})\}$ .

Los espacios  $\Lambda^{N_+} \Gamma_+(S)$ ,  $\Lambda^{N_-} \Gamma_-(S)$  y  $\Lambda^{N_0} \Gamma_0(S)$  representan los espinores para  $N_+$  partículas,  $N_-$  antipartículas y  $N_0$  modos cero, construidos como un producto tensorial antisimetrizado de espinores de una partícula, antipartícula o modo cero. Si las partículas no interactúan entre sí siempre es posible expresar el espacio de Hilbert, para  $N$  partículas idénticas, como producto tensorial del espacio de Hilbert

de cada una,  $\mathcal{H}_N = \overbrace{\mathcal{H} \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}}^N$ ; esto será cierto para los tres tipos de partículas que estamos considerando. En particular, para los modos cero un espinor de  $\mathcal{H}_{N_0}$  será:

$$\psi_{N_0}^0(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_{N_0}, \bar{z}_{N_0}) = \psi_{0m_1}(z_1, \bar{z}_1) \otimes \cdots \otimes \psi_{0m_{N_0}}(z_{N_0}, \bar{z}_{N_0})$$

Teniendo en cuenta las propiedades de simetría bajo el intercambio de partículas idénticas [97, 76], debemos proyectar al subespacio fermiónico  $\Lambda^{N_0} \Gamma_0(S)$ , así

$$\mathcal{P}_F \psi_{N_0}^0(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_{N_0}, \bar{z}_{N_0}) = \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in S_{N_0}} (-1)^{P(\sigma)} \psi_{0m_{\sigma(1)}}(z_1, \bar{z}_1) \otimes \cdots \otimes \psi_{0m_{\sigma(N_0)}}(z_{N_0}, \bar{z}_{N_0})$$

Una base ortonormal de espinores antisimetrizados para este subespacio nos vendrá dada por los determinantes de Slater:

$$\begin{aligned}
 &\psi_{0m_1, \dots, 0m_{N_0}}^0(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_{N_0}, \bar{z}_{N_0}) = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{N_0!}} \sum_{\sigma \in S_{N_0}} (-1)^\sigma \psi_{0m_{\sigma(1)}}(z_1, \bar{z}_1) \otimes \cdots \otimes \psi_{0m_{\sigma(N_0)}}(z_{N_0}, \bar{z}_{N_0}) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{N_0!}} \begin{vmatrix} \psi_{0m_1}(z_1, \bar{z}_1) & \psi_{0m_1}(z_2, \bar{z}_2) & \cdots & \psi_{0m_1}(z_{N_0}, \bar{z}_{N_0}) \\ \psi_{0m_2}(z_1, \bar{z}_1) & \psi_{0m_2}(z_2, \bar{z}_2) & \cdots & \psi_{0m_2}(z_{N_0}, \bar{z}_{N_0}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_{0m_{N_0}}(z_1, \bar{z}_1) & \psi_{0m_{N_0}}(z_2, \bar{z}_2) & \cdots & \psi_{0m_{N_0}}(z_{N_0}, \bar{z}_{N_0}) \end{vmatrix} \quad (3.2)
 \end{aligned}$$

Y, por tanto, la base ortonormal del espacio de Fock Fermiónico en representación de coordenadas es:

$$\begin{aligned}
 &\{\cdots, \psi_{0m_1, \dots, 0m_{N_0}}^0(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_{N_0}, \bar{z}_{N_0}) \otimes \psi_{k_1 m_1, \dots, k_{N_+} m_{N_+}}^+(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_{N_+}, \bar{z}_{N_+}) \\
 &\otimes \psi_{k_1 m_1, \dots, k_{N_-} m_{N_-}}^-(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_{N_-}, \bar{z}_{N_-}), \cdots\} \quad (3.3)
 \end{aligned}$$

El campo fermiónico en función de los modos propios de una partícula es

$$\begin{aligned}\psi(z, \bar{z}) &= \psi(z, \bar{z})^+ + \psi(z, \bar{z})^- + \psi(z, \bar{z})^0 \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m \geq -k}^{\infty} B_{km} \psi_{km}^+(z, \bar{z}) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m \geq -k}^{\infty} D_{km}^\dagger \psi_{km}^-(z, \bar{z}) + \sum_{m=0}^{\infty} A_m \psi_{0m}(z, \bar{z})\end{aligned}\quad (3.4)$$

$$\begin{aligned}\psi^\dagger(z, \bar{z}) &= \psi^\dagger(z, \bar{z})^+ + \psi^\dagger(z, \bar{z})^- + \psi^\dagger(z, \bar{z})^0 \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m \geq -k}^{\infty} D_{km} \psi_{km}^{\dagger-}(z, \bar{z}) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m \geq -k}^{\infty} B_{km}^\dagger \psi_{km}^{\dagger+}(z, \bar{z}) + \sum_{m=0}^{\infty} A_m^\dagger \psi_{0m}^\dagger(z, \bar{z})\end{aligned}\quad (3.5)$$

Con relaciones canónicas de anticonmutación<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned}\{\psi_\alpha(z, \bar{z}), \psi_\beta^\dagger(z', \bar{z}')\} &= \delta_{\alpha\beta} \delta^2(z - z') \\ \{\psi_\alpha(z, \bar{z}), \psi_\beta(z', \bar{z}')\} &= \{\psi_\alpha^\dagger(z, \bar{z}), \psi_\beta^\dagger(z', \bar{z}')\} = 0\end{aligned}\quad (3.6)$$

Definimos el vacío como el estado aniquilado por todos los operadores de destrucción:

$$\begin{aligned}\psi(z, \bar{z})^+ |0\rangle &= \psi(z, \bar{z})^0 |0\rangle = 0 \\ \psi^\dagger(z, \bar{z})^+ |0\rangle &= 0, \quad \forall z, \bar{z}\end{aligned}\quad (3.7)$$

Un estado con un número determinado de partículas, antipartículas o modos cero, en representación de coordenadas puede expresarse en función del estado vacío [16],

$$\begin{aligned}|z_1, \bar{z}_1, \dots, z_{N_+}, \bar{z}_{N_+}\rangle &= \psi^\dagger(z_1, \bar{z}_1)^- \cdots \psi^\dagger(z_{N_+}, \bar{z}_{N_+})^- |0\rangle \\ |z_1, \bar{z}_1, \dots, z_{N_0}, \bar{z}_{N_0}\rangle &= \psi^\dagger(z_1, \bar{z}_1)^0 \cdots \psi^\dagger(z_{N_0}, \bar{z}_{N_0})^0 |0\rangle \\ |z_1, \bar{z}_1, \dots, z_{N_-}, \bar{z}_{N_-}\rangle &= \psi(z_1, \bar{z}_1)^- \cdots \psi(z_{N_-}, \bar{z}_{N_-})^- |0\rangle\end{aligned}\quad (3.8)$$

La distribución singular,  $\delta$ , que aparece en las relaciones de anticonmutación muestra que los campos no son operadores valuados sobre las funciones de  $\mathbb{R}^2$ . Para estudiar cómo actúan sobre las funciones de onda en el espacio de Fock debemos introducir los operadores  $\hat{\psi}[f]$  y  $\hat{\psi}^\dagger[f]$ , dados formalmente por [40]:

$$\begin{aligned}\hat{\psi}[f] &= \int \frac{dzd\bar{z}}{2\pi i} f(z, \bar{z}) \psi(z, \bar{z}) \\ \hat{\psi}^\dagger[f] &= \int \frac{dzd\bar{z}}{2\pi i} f(z, \bar{z}) \psi^\dagger(z, \bar{z})\end{aligned}\quad (3.9)$$

<sup>1</sup>Las relaciones de anticonmutación para los operadores  $B_{km}, D_{km}, A_m$  y sus conjugados, que actúan sobre el espacio de Fock cuando expresamos los estados en la representación número, se deducen de éstas.

donde  $f(z, \bar{z})$  es una función *test* con soporte compacto en  $C$ .<sup>2</sup> De esta forma los nuevos operadores están valuados sobre las distribuciones y los anticonmutadores son:

$$\{\hat{\psi}_\alpha[f], \hat{\psi}_\beta^\dagger[g]\} = \delta_{\alpha\beta} \int \frac{dzd\bar{z}}{2\pi i} f^\dagger(z, \bar{z})g(z, \bar{z}) \quad (3.10)$$

El operador  $\hat{\psi}^\dagger[f]$  actúa sobre el espacio de Fock creando partículas en un estado fermiónico o en los modos cero y aniquilando antipartículas; mientras que el adjunto  $\hat{\psi}[f]$  crea antipartículas y aniquila partículas fermiónicas y modos cero. En particular, para los modos cero tenemos:

$$\begin{aligned} & [\hat{\psi}^\dagger[f_{0m_{N_0}}]\psi]_{N_0} = \\ & = \frac{1}{\sqrt{N_0}} \sum_{j=1}^{N_0} (-1)^{j+1} f_{0m_{N_0}}(z_j, \bar{z}_j) \psi_{N_0-1}(z_1, \bar{z}_1; \dots; \overbrace{z_j, \bar{z}_j}^{\text{---}}; \dots; z_{N_0}, \bar{z}_{N_0}) \\ & [\hat{\psi}[f_{0m_{N_0+1}}]\psi]_{N_0} = \\ & = \sqrt{N_0 + 1} \int \frac{dzd\bar{z}}{2\pi i} f_{0m_{N_0+1}}(z, \bar{z}) \psi_{N_0+1}(z, \bar{z}; z_1, \bar{z}_1; \dots; z_{N_0}, \bar{z}_{N_0}) \end{aligned} \quad (3.11)$$

donde  $\overbrace{z_j, \bar{z}_j}^{\text{---}}$  significa que la coordenada  $j$  no aparece. Por tanto, el operador de creación actúa sobre el espacio de Fock fermiónico pasando de  $\Lambda^{N_0-1}\Gamma_0(S)$  a  $\Lambda^{N_0}\Gamma_0(S)$ , y el de destrucción lo hace de  $\Lambda^{N_0+1}\Gamma_0(S)$  a  $\Lambda^{N_0}\Gamma_0(S)$ . Esto puede reproducirse para partículas y antipartículas sobre los subespacios  $\Lambda^{N_+}\Gamma_+(S)$  y  $\Lambda^{N_-}\Gamma_-(S)$ .

Todos los operadores que describen la teoría de multipartículas pueden expresarse en función de los campos  $\psi$  y  $\psi^\dagger$ , esto nos permitirá pasar de la teoría de campos a la de muchas partículas [16]. Del operador Hamiltoniano en electrodinámica cuántica en (2+1) dimensiones que introducimos en el capítulo anterior podemos pasar al Hamiltoniano de muchas partículas, es decir, sea

$$H = \int \frac{dzd\bar{z}}{2\pi i} : \psi^\dagger(z, \bar{z}) \vec{\alpha} (-i\hbar \vec{\nabla} + e\vec{A}(z, \bar{z})) \psi(z, \bar{z}) : \quad (3.12)$$

donde hemos definido el orden normal de forma que  $\langle 0|H = 0$ . El conmutador de este operador con los campos es:

$$\begin{aligned} [\psi(z, \bar{z}), H] &= \vec{\alpha} (-i\hbar \vec{\nabla} + e\vec{A}(z, \bar{z})) \psi(z, \bar{z}) \\ [\psi^\dagger(z, \bar{z}), H] &= -\psi^\dagger(z, \bar{z}) \vec{\alpha} (-i\hbar \vec{\nabla} + e\vec{A}(z, \bar{z})) \end{aligned} \quad (3.13)$$

<sup>2</sup> $f(z, \bar{z})$  es una función valuada en  $C^2$  infinitamente suave y cero fuera de algún intervalo finito [136].

Y su acción sobre un estado con  $N_+$  partículas es:

$$\begin{aligned}
& \langle z_1, \bar{z}_1, \dots, z_{N_+}, \bar{z}_{N_+} | H | \Psi \rangle = \\
& = \langle 0 | [\psi(z_1, \bar{z}_1) \cdots \psi(z_{N_+}, \bar{z}_{N_+}), H] | \Psi \rangle \\
& = \left\{ \sum_{I=1}^{N_+} \vec{\alpha} \left( -i\hbar \vec{\nabla}_I + e\vec{A}(z_I, \bar{z}_I) \right) \right\} \Psi(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_{N_+}, \bar{z}_{N_+}) \quad (3.14)
\end{aligned}$$

Mientras que para  $N_-$  antipartículas tenemos:

$$\begin{aligned}
& \langle z_1, \bar{z}_1, \dots, z_{N_-}, \bar{z}_{N_-} | H | \Psi \rangle = \\
& = \langle 0 | [\psi^\dagger(z_1, \bar{z}_1) \cdots \psi^\dagger(z_{N_-}, \bar{z}_{N_-}), H] | \Psi \rangle \\
& = -\Psi(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_{N_-}, \bar{z}_{N_-}) \left\{ \sum_{I=1}^{N_-} \vec{\alpha} \left( -i\hbar \vec{\nabla}_I + e\vec{A}(z_I, \bar{z}_I) \right) \right\} \quad (3.15)
\end{aligned}$$

Para un sistema en el cual las partículas interactúan con un potencial externo  $V_1(z, \bar{z})$ , y entre sí, con un potencial de interacción a dos partículas  $V_2(|z_1 - z_2|)$  tenemos el Hamiltoniano

$$H = \int \frac{dzd\bar{z}}{2\pi i} : \psi^\dagger(z, \bar{z}) \left\{ \vec{\alpha} \left( -i\hbar \vec{\nabla} + e\vec{A}(z, \bar{z}) \right) + V_1(z, \bar{z}) \right\} \psi(z, \bar{z}) : \quad (3.16)$$

$$+ \frac{1}{2} \int \frac{dzd\bar{z}}{2\pi i} \int \frac{dz'd\bar{z}'}{2\pi i} : \psi^\dagger(z, \bar{z}) \psi^\dagger(z', \bar{z}') V_2(|z - z'|) \psi(z', \bar{z}') \psi(z, \bar{z}) : \quad (3.17)$$

tal que

$$\begin{aligned}
\langle z_1, \bar{z}_1, \dots, z_N, \bar{z}_N | H | \Psi \rangle & = \left\{ \sum_{I=1}^N \left\{ \vec{\alpha} \left( -i\hbar \vec{\nabla}_I + e\vec{A}(z_I, \bar{z}_I) \right) + V_1(z_I, \bar{z}_I) \right\} \right. \\
& \left. + \sum_{I < J}^N V_2(|z_I - z_J|) \right\} \Psi(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_N, \bar{z}_N) = E\Psi(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_N, \bar{z}_N) \quad (3.18)
\end{aligned}$$

El resultado es la ecuación de Dirac en  $(2 + 1)$  dimensiones para  $N$  partículas que interactúan entre sí, moviéndose en el plano en presencia de un campo magnético constante y de un potencial externo, que comprende la interacción con las impurezas. Esta ecuación da una descripción relativista de la Teoría de R.B. Laughlin.

Si despreciamos la interacción con las impurezas,  $V_1(z, \bar{z}) = 0$ , el sistema será invariante bajo rotaciones, y el estado fundamental para muchas partículas ha de ser propio del Hamiltoniano y del momento angular total. El operador momento angular total  $J_3$  para muchas partículas es:

$$\begin{aligned}
& \langle z_1, \bar{z}_1, \dots, z_N, \bar{z}_N | J_3 | \Psi \rangle = \\
& = \sum_{I=1}^N \hbar \left\{ \left( z_I \frac{\partial}{\partial z_I} - \bar{z}_I \frac{\partial}{\partial \bar{z}_I} \right) + \frac{1}{2} \sigma_3 \right\} \Psi(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_N, \bar{z}_N) \quad (3.19)
\end{aligned}$$

donde

$$J_3 = \int \frac{dzd\bar{z}}{2\pi i} : \psi^\dagger(z, \bar{z}) \{L_3 + S_3\} \psi(z, \bar{z}) :$$

La idea de las teorías desarrolladas por Laughlin, Haldane, Halperin y otros [108], es que este estado fundamental debe describir un *fluido cuántico incompresible* para ciertos valores racionales del factor de llenado. Es decir, debido a la interacción repulsiva entre los electrones, éstos asumen la configuración más simétrica posible compatible con su densidad, de manera que su energía sea la mínima. La propiedad de incompresibilidad del estado fundamental para ciertos factores de llenado fraccionarios, como demuestran A.Cappelli et al. [19, 20], puede caracterizarse geoméricamente como consecuencia de una simetría infinita presente en el sistema. Plantearemos el estudio relativista de este problema, análogo al realizado por A.Cappelli et al., para el caso no relativista.

Al estudiar las simetrías del problema de Landau para una partícula, vimos que el sistema era invariante bajo las *traslaciones magnéticas*, cuyos generadores infinitesimales eran los operadores  $b$  y  $b^\dagger$ . Además, teníamos infinitos operadores  $\mathcal{L}_{n,m} = (b^\dagger)^{n+1} b^{m+1}$ ,  $n, m \geq -1$ , que conmutan con el Hamiltoniano, y representaban, por tanto, la simetría infinita del sistema. Estos operadores satisfacen el álgebra  $W_\infty$  cuyo límite clásico es el álgebra  $w_\infty$  de difeomorfismos que preservan el área.

Estudiaremos, en primer lugar, la simetría infinita del Efecto Hall Cuántico Entero que nos dará una condición de incompresibilidad para el estado fundamental correspondiente a factores de llenado enteros. Para ello es conveniente dar una representación de estos operadores en el espacio de Fock fermiónico, así consideremos:

$$\mathcal{L}_{n,m} = \int \frac{dzd\bar{z}}{2\pi i} : \psi^\dagger(z, \bar{z}) \mathcal{L}_{n,m} \psi(z, \bar{z}) :$$

que en función de los modos propios:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{n,m} &= \sum_{k'=0}^{\infty} \mathcal{L}_{n,m}^{k'} \\ \mathcal{L}_{n,m}^{k'} &= \sum_{m' \geq m+1-k'}^{\infty} \frac{\sqrt{(k'+m')!(k'+m'+n-m)!}}{(k'+m'-m-1)!} \left( B_{k',m'+n-m}^\dagger B_{k',m'} \right. \\ &\quad \left. - D_{k',m'}^\dagger D_{k',m'+n-m} \right) \quad k' \neq 0 \\ \mathcal{L}_{n,m}^0 &= \sum_{m' \geq m+1}^{\infty} \frac{\sqrt{(m')!(m'+n-m)!}}{(m'-m-1)!} A_{m'+n-m}^\dagger A_{k',m'} \end{aligned} \quad (3.20)$$

donde hemos utilizado las expresiones obtenidas para los operadores  $b$  y  $b^\dagger$ , (2.111) y (2.112), en función de los operadores de creación y destrucción de partículas, antipartículas y modos cero.

Es decir, el operador  $\mathcal{L}_{n,m}$  es la suma de términos correspondientes a cada nivel de energía. Para un valor fijo de  $(n - m)$ , el operador  $\mathcal{L}_{m+s,m}$  desplaza electrones, aumentando  $n - m > 0$ , o disminuyendo  $n - m < 0$ , su momento angular en cada nivel de energía ( $B_{k',m'+s}^\dagger B_{k',m'}$  y  $A_{m'+s}^\dagger A_{m'}$ ); o positrones, disminuyendo  $n - m > 0$ , o aumentando  $n - m < 0$ , su momento angular ( $D_{k',m'}^\dagger D_{k',m'+s}$ ). Es decir, actúan como operadores escalera en cada nivel de energía, conectando estados fermiónicos con el mismo factor de llenado y con la misma energía, pero diferente momento angular total [19].

En el Efecto Hall Cuántico Enterotenemos un único estado para cada factor de llenado:

$$\begin{aligned} |f = i\rangle &\equiv |1_0, \dots, 1_m, \dots; 1_{1,-1}, \dots, 1_{1,m}, \dots; 1_{i-1,-(i-1)}, \dots, 1_{i-1,m}, \dots\rangle \\ &\equiv A_0^\dagger \cdots A_m^\dagger \cdots B_{1,-1}^\dagger \cdots B_{1,m}^\dagger \cdots B_{i-1,-(i-1)}^\dagger \cdots B_{i-1,m}^\dagger \cdots |0\rangle \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} A_m^\dagger |f = i\rangle &= 0, \quad \forall m \geq 0 \\ B_{km}^\dagger |f = i\rangle &= 0, \quad k = 0, 1, \dots, i-1, \quad \forall m \geq -k \\ B_{km} |f = i\rangle &= 0, \quad \forall k \neq 0, 1, \dots, i-1, \quad m \geq -k \\ D_{km} |f = i\rangle &= 0, \quad \forall k \neq 0, \quad m \geq -k \end{aligned} \quad (3.21)$$

El operador  $\mathcal{L}_{n',m'}$  actuando sobre el estado fundamental para factor de llenado  $f = 1$  se anula para  $-1 \leq n' < m'$ :

$$\mathcal{L}_{n',m'} |f = 1\rangle \equiv \mathcal{L}_{n',m'}^0 \{A_0^\dagger \cdots A_m^\dagger \cdots |0\rangle\} = 0 \quad (3.22)$$

Es decir, este operador actúa disminuyendo el momento angular para  $n' < m'$  y, por tanto, se anula sobre el estado fundamental cuando está completamente lleno. Además, no puede generar transiciones a niveles de energía más altos porque actúa horizontalmente dentro de cada nivel de energía. En realidad, si fueran posibles transiciones de una o más partículas a niveles más altos se reduciría el momento angular, y por tanto, el fluido se comprimiría.

En general, para cualquier factor de llenado entero resulta:

$$\mathcal{L}_{n',m'} |f = i\rangle = 0, \quad -1 \leq n' < m' \quad (3.23)$$



Estas condiciones caracterizan la *incompresibilidad* del estado fundamental para el efecto entero. Es decir, pueden interpretarse como las condiciones algebraicas de incompresibilidad ya que todas las transiciones que disminuyen el momento angular del estado fundamental (compresiones) son imposibles. Esta simetría cuántica del estado fundamental para factores de llenado enteros, en el límite clásico representa que el área ocupada por el fluido permanece constante y cualquier deformación cambiará su forma pero no el área que ocupa. Por tanto, las diferentes configuraciones del fluido incompresible estarán relacionadas por los difeomorfismos que preservan el área, cuyos generadores satisfacen el álgebra  $w_\infty$ .

Si el sistema se encuentra en una superficie de área finita  $A$ , el estado fundamental para factor de llenado  $f = 1$ , con  $N$  partículas en  $N$  modos, será:

$$\psi_{f=1}^0(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_N, \bar{z}_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \psi_{00}(z_1, \bar{z}_1) & \psi_{00}(z_2, \bar{z}_2) & \dots & \psi_{00}(z_N, \bar{z}_N) \\ \psi_{01}(z_1, \bar{z}_1) & \psi_{01}(z_2, \bar{z}_2) & \dots & \psi_{01}(z_N, \bar{z}_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_{0N-1}(z_1, \bar{z}_1) & \psi_{0N-1}(z_2, \bar{z}_2) & \dots & \psi_{0N-1}(z_N, \bar{z}_N) \end{vmatrix}$$

Los generadores infinitesimales  $\mathcal{L}_{n',m'}$  para un sistema de muchas partículas son

$$\begin{aligned} & \langle z_1, \bar{z}_1, \dots, z_N, \bar{z}_N | \mathcal{L}_{n',m'} | \psi_{f=1} \rangle = \\ & = \langle 0 | [\psi(z_1, \bar{z}_1) \cdots \psi(z_N, \bar{z}_N), \mathcal{L}_{n',m'}] | \psi \rangle \\ & = \left\{ \sum_{I=1}^N (b_I^\dagger)^{n'+1} b_I^{m'+1} \right\} \psi_{f=1}(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_N, \bar{z}_N) \end{aligned} \quad (3.24)$$

Luego en primera cuantización la condición de *incompresibilidad* para el estado fundamental es exactamente la misma,

$$\mathcal{L}_{n',m'} \psi_{f=1}(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_N, \bar{z}_N) = 0 \quad , \quad -1 \leq n' < m' \quad (3.25)$$

Esta propiedad de *incompresibilidad* del estado fundamental para factores de llenado enteros puede implementarse para factores de llenado fraccionarios. Sin embargo, no podemos describir el sistema en la aproximación de partícula *libre* para factores de llenado fraccionarios ya que no sería posible encontrar un único estado fundamental cuando se ocupa parcialmente el primer nivel de Dirac-Landau. En realidad, para un número finito de partículas,  $N$ , y de modos cero,  $M$ , tenemos un total de  $\binom{M}{N}$  estados posibles, de igual energía y con el mismo factor de llenado  $f = \frac{N}{M} \leq 1$ ,

$$\begin{aligned} |N; l_1, l_2, \dots, l_N \rangle & \equiv A_{l_1}^\dagger A_{l_2}^\dagger \cdots A_{l_N}^\dagger |0 \rangle \\ l_1 & < l_2 < \cdots < l_N \quad , \quad l_i = 0, 1, 2, \dots, M-1 \end{aligned} \quad (3.26)$$

En representación de coordenadas, para cada factor de llenado  $0 \leq f \leq 1$ , resultará:

$$\psi_{f=\frac{N}{M}}^0(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_N, \bar{z}_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \psi_{0l_1}(z_1, \bar{z}_1) & \psi_{0l_1}(z_2, \bar{z}_2) & \dots & \psi_{0l_1}(z_N, \bar{z}_N) \\ \psi_{0l_2}(z_1, \bar{z}_1) & \psi_{0l_2}(z_2, \bar{z}_2) & \dots & \psi_{0l_2}(z_N, \bar{z}_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_{0l_N}(z_1, \bar{z}_1) & \psi_{0l_N}(z_2, \bar{z}_2) & \dots & \psi_{0l_N}(z_N, \bar{z}_N) \end{vmatrix}$$

Si tenemos en cuenta la interacción coulombiana entre las partículas, se rompe la degeneración, dando lugar a un único estado fundamental para factores de llenado fraccionarios. Siguiendo el planteamiento de R.B. Laughlin [81], suponemos que este estado es una combinación lineal de determinantes de Slater de  $N$  partículas en  $M = Nm$  modos, es decir, un estado con factor de llenado  $f = \frac{N}{M} = \frac{1}{m}$ , con  $m$  es un entero impar, donde cada partícula puede tener un momento angular:  $l = 0, 1, \dots, Nm - 1$ . En función de los estados introducidos en la Sección 2.2.3, para factores de llenado fraccionarios podemos construir un estado equivalente al estado de Laughlin para  $N$  partículas, como una combinación lineal de los mismos, es decir:

$$\begin{aligned} |N, f = \frac{1}{m}\rangle &= \sum_{K_{(12)}, \dots, K_{(1N)}=0}^m \sum_{K_{(23)}, \dots, K_{(2N)}=0}^m \dots \sum_{K_{(N-1, N)}=0}^m (-1)^{\sum_{I < J} K_{(IJ)}} \\ &\times \prod_{I < J}^N \binom{m}{K_{(IJ)}} A_{m_1}^\dagger \dots A_{m_N}^\dagger |0\rangle \\ &= \sum_{\substack{\{K_{(IJ)}=0\} \\ \forall I < J=1, \dots, N}}^m \prod_{I < J}^N (-1)^{K_{(IJ)}} \binom{m}{K_{(IJ)}} \prod_{I=1}^N A_{m_I}^\dagger |0\rangle \end{aligned} \quad (3.27)$$

donde

$$m_I = (N - I)m - \sum_{J=I+1}^N K_{(IJ)} + \sum_{J=1}^{I-1} K_{(JI)} \quad (3.28)$$

tal que

$$\sum_{I=1}^N m_I = \frac{N(N-1)}{2} m \equiv L \quad (3.29)$$

$L$  es el momento angular total (orbital) para las  $N$  partículas en la dirección del campo magnético.

En representación de coordenadas el estado fundamental viene dado por:

$$\psi_{N, \frac{1}{m}}(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_N, \bar{z}_N) = \sum_{\substack{\{K_{(IJ)}=0\} \\ \forall I < J=1, \dots, N}}^m \prod_{I < J}^N (-1)^{K_{(IJ)}} \binom{m}{K_{(IJ)}} \prod_{I=1}^N \psi_{0, m_I}(z_I, \bar{z}_I) \quad (3.30)$$

donde  $\psi_{0, m_I}(z_I, \bar{z}_I)$  es el espinor correspondiente al primer nivel de Dirac-Landau o modos cero (1.107). La primera componente de este espinor para  $N$  partículas, con factor de llenado  $f = \frac{1}{m}$ , es:

$$\begin{aligned} \Psi_{N, \frac{1}{m}}(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_N, \bar{z}_N) &= \sum_{\substack{\{K_{(IJ)}=0\} \\ \forall I < J=1, \dots, N}}^m \prod_{I < J}^N (-1)^{K_{(IJ)}} \binom{m}{K_{(IJ)}} \prod_{I=1}^N \Psi_{0, m_I}(z_I, \bar{z}_I) \\ &= \mathcal{N} \prod_{I < J}^N (z_I - z_J)^m e^{-\frac{1}{2i^2} \sum_{I=1}^N |z_I|^2} \end{aligned} \quad (3.31)$$

que coincide exactamente con la función de onda propuesta por R. B. Laughlin para el problema no-relativista.

Este estado (3.30) es propio del momento angular total con autovalor:  $J = \frac{N(N-1)}{2}m + N\frac{1}{2}$ ; y el momento angular de cada partícula en él es siempre menor que:  $(N-1)m$ . Así,

$$\begin{aligned} \mathbf{J} \psi_{N, \frac{1}{m}}(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_N, \bar{z}_N) &= \\ &= \sum_{I=1}^N \hbar \left\{ \left( z_I \frac{\partial}{\partial z_I} - \bar{z}_I \frac{\partial}{\partial \bar{z}_I} \right) + \frac{1}{2} \sigma_3 \right\} \psi_{N, \frac{1}{m}}(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_N, \bar{z}_N) \\ &= \hbar \left( \frac{N(N-1)}{2} m + N \frac{1}{2} \right) \psi_{N, \frac{1}{m}}(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_N, \bar{z}_N) \end{aligned} \quad (3.32)$$

Podemos calcular el valor esperado del operador densidad de carga,  $\rho$ , en este estado:

$$\langle \rho \rangle = -e \frac{1}{A} \int \frac{dz d\bar{z}}{2\pi i} n(z, \bar{z}) \quad (3.33)$$

donde

$$n(z, \bar{z}) = \frac{\langle N, f = \frac{1}{m} | \frac{[\psi^\dagger(z, \bar{z}) \psi(z, \bar{z})]}{2} | N, f = \frac{1}{m} \rangle}{\langle N, f = \frac{1}{m} | N, f = \frac{1}{m} \rangle} \quad (3.34)$$

Pasando al límite de área infinita  $A \rightarrow \infty$ , y suponiendo una distribución uniforme de carga, resulta:

$$\langle \rho \rangle = -e \frac{eB}{hc} \left( \frac{1}{m} - \frac{1}{2} \right) \quad (3.35)$$

Esta expresión coincide exactamente con la calculada en general para un factor de llenado  $0 \leq f \leq 1$ , (2.175), pero aplicada al caso:  $f = \frac{1}{m}$ . La densidad de carga respecto del vacío será entonces:

$$\begin{aligned}\rho &= \bar{\rho}_f - \rho_v = -e \frac{1}{m} \left( \frac{eB}{hc} \right) \\ \rho_v &= \langle 0 | \rho | 0 \rangle = + \frac{e}{2} \left( \frac{eB}{hc} \right)\end{aligned}\quad (3.36)$$

La densidad de corriente covariante en este estado fundamental y en el límite de área infinita:

$$\langle j^\mu \rangle = - \frac{e^2}{h} \frac{1}{m} * F^\mu \quad (3.37)$$

Y por tanto, el tensor de conductividad para este sistema es:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \frac{e^2}{h} \\ -\frac{1}{m} \frac{e^2}{h} & 0 \end{pmatrix}, \quad f = \frac{1}{m}, \quad m \text{ impar} \quad (3.38)$$

En definitiva, hemos visto que el estado fundamental de R.B. Laughlin puede obtenerse en este contexto de Segunda Cuantificación si sobre el estado vacío aplicamos una combinación lineal de operadores de creación de modos cero, con unos coeficientes, que son productos de coeficientes binómicos, y dependen del inverso del factor de llenado. Esta combinación lineal tan concreta tiene algunas características importantes:

- Las partículas en este estado están fuertemente correlacionadas entre sí, de tal forma que para  $z_I = z_J$ ,  $I, J = 1, 2, \dots, N$  la función de onda se anula.
- Es un estado propio del momento angular total. En un sistema de  $N$  partículas fermiónicas éste tiene un valor mínimo igual a:  $J = \frac{N(N-1)}{2} + N\frac{1}{2}$ . Si considerasemos una interacción repulsiva a dos cuerpos las partículas escaparían al infinito de no estar confinadas a moverse en una superficie finita. De esta forma, cuando suponemos una superficie de área finita, no serán posibles todos valores del momento angular para cada partícula; y para que el momento angular total del estado fundamental sea exactamente:  $\hbar \left( \frac{N(N-1)}{2} m + N\frac{1}{2} \right)$ , necesariamente cada partícula debe tener un momento angular (orbital) menor o igual que:  $l = (N-1)m$ , entre todos los posibles,  $l = 0, 1, \dots, Nm - 1$ , para esa superficie.
- Se deduce, pues, que en el estado fundamental considerado, cuya primera componente coincide con la función de onda variacional de R. B. Laughlin,

el número total de modos (de una partícula) ocupados por cada partícula es precisamente:  $(N-1)m+1$  y, por tanto, el factor de llenado, para la función de onda de Laughlin, es:  $f = \frac{N}{(N-1)m+1}$ , que en el límite termodinámico:  $f = \frac{N}{(N-1)m+1} \approx \frac{N}{Nm} = \frac{1}{m}$ .

- El sistema así descrito puede verse como un fluido *incompresible* para un número finito de partículas. Como veremos más adelante, este estado verifica las mismas condiciones de *incompresibilidad* que el estado fundamental para factores de llenado enteros, como consecuencia también de una simetría infinita. Sin embargo, los generadores infinitesimales de dicha simetría no son exactamente los operadores  $\mathcal{L}_{n,m}$  sino una proyección de los mismos sobre el primer nivel de Landau para el problema con interacción.
- Este estado describe el Efecto Hall Cuántico Fraccionario en el límite de área infinita. Para tomar este límite debemos suponer que el fluido tiene una densidad uniforme.
- Por último, como veremos en la siguiente Sección, se puede comprobar, para sistemas con pocas partículas, que esta combinación lineal de determinantes de Slater es la que hace mínima la energía de interacción Coulombiana.

## 3.2 Método variacional

La teoría libre de electrones de Dirac moviéndose en un campo magnético constante puede verse como la aproximación a orden cero de la Electrodinámica Cuántica en (2+1) dimensiones. En Electrodinámica Cuántica tridimensional tenemos la acción:

$$S = \int d^3x \left\{ c\bar{\psi}(x)\gamma^\mu \left( i\hbar\partial_\mu + \frac{e}{c}A_\mu(x) \right) \psi(x) \right\} + \int d^3x \left\{ -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) \right\}$$

El potencial vector puede expresarse de la forma:

$$A_\mu(x) = A_\mu^{\text{ext}}(x) + a_\mu(x) \quad \mu = 0, 1, 2$$

y el tensor electromagnético será, por tanto,

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^{\text{ext}} &= \partial_\mu A_\nu^{\text{ext}}(x) - \partial_\nu A_\mu^{\text{ext}}(x) \\ f_{\mu\nu} &= \partial_\mu a_\nu(x) - \partial_\nu a_\mu(x) \\ F_{\mu\nu} &= F_{\mu\nu}^{\text{ext}} + f_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{3.39}$$

El campo externo en el gauge simétrico viene dado por:

$$\begin{aligned} A_0^{\text{ext}} &= 0, \quad A_1^{\text{ext}} = \frac{B}{2}x_2, \quad A_2^{\text{ext}} = -\frac{B}{2}x_1 \\ F_{0i}^{\text{ext}} &= 0, \quad i = 1, 2, \quad F_{12}^{\text{ext}} = B \end{aligned} \quad (3.40)$$

Así pues, la densidad lagrangiana para los campos libres será

$$\mathcal{L}_0 = c\bar{\psi}(x)\gamma^\mu \left( i\hbar\partial_\mu + \frac{e}{c}A_\mu^{\text{ext}}(x) \right) \psi(x) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) \quad (3.41)$$

y la densidad lagrangiana de interacción,

$$\mathcal{L}_I = e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu a_\mu(x)\psi(x) \equiv -\frac{1}{c}j^\mu(x)a_\mu(x) \quad (3.42)$$

donde  $j^\mu(x) = -ec\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) \equiv (c\rho(x), \vec{j}(x))$  es la densidad de corriente conservada [92].

Pasando al sistema de unidades naturales,  $\hbar = c = 1$ , vemos que la carga ya no es una magnitud adimensional, como sucede en electrodinámica cuántica en (3+1) dimensiones, sino que tiene dimensiones:  $[e] = L^{-\frac{1}{2}}$ . Como consecuencia de esto, la constante de acoplamiento adimensional es ahora:  $\lambda = \frac{e^2}{\sqrt{eB}}$ , y no la constante de estructura fina, [70]. Nos interesa estudiar la teoría hasta primer orden en esta constante adimensional, y para ello, necesitamos conocer los propagadores del fotón y del fermión.

Hemos estudiado ya la cuantización canónica del campo fermiónico en presencia de un campo externo. La cuantización canónica para el campo electromagnético libre en (2+1) dimensiones es equivalente al problema cuadrimensional. Así, en el formalismo covariante de Gupta y Bleuler, [92], tenemos la densidad Lagrangiana de Fermi:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\nu a_\mu(x)\partial^\nu a^\mu(x) \quad (3.43)$$

Los campos conjugados son:  $\pi^\mu(x) = -\dot{a}^\mu(x)$ , y las relaciones de conmutación canónicas a igual tiempo:

$$\begin{aligned} [a^\mu(\vec{x}, t), a^\nu(\vec{y}, t)] &= [\dot{a}^\mu(\vec{x}, t), \dot{a}^\nu(\vec{y}, t)] = 0 \\ [a^\mu(\vec{x}, t), \dot{a}^\nu(\vec{y}, t)] &= -i g^{\mu\nu} \delta^2(\vec{x} - \vec{y}) \end{aligned} \quad (3.44)$$

Las ecuaciones para los campos:

$$\square a^\mu(x) = 0 \quad (3.45)$$

que coinciden con las ecuaciones de Maxwell si imponemos la condición de Lorentz,  $\partial_\mu a^\mu(x) = 0$ . Podemos expresar los campos en función de un conjunto completo de soluciones de estas ecuaciones (3.45):

$$a^\mu(x) = \sum_{\vec{k}, r} \frac{1}{\sqrt{2A\omega_{\vec{k}}}} \left[ \epsilon_r^\mu(\vec{k}) b_r(\vec{k}) e^{-ikx} + \epsilon_r^\mu(\vec{k}) b_r^\dagger(\vec{k}) e^{ikx} \right] \quad (3.46)$$

donde  $k^0 = \omega_{\vec{k}} = |\vec{k}|$ . Se suma a todos los vectores de onda permitidos por las condiciones de contorno periódicas en una superficie de área  $A$ , y a todas las polarizaciones independientes,  $r = 0, 1, 2$ . Los vectores de polarización,  $\epsilon_r^\mu(\vec{k})$ , satisfacen las siguientes relaciones de ortonormalidad y completitud:

$$\begin{aligned} \epsilon_r(\vec{k}) \epsilon_s(\vec{k}) &= -\xi_r \delta_{rs}, \quad r, s = 0, 1, 2 \\ \sum_r \xi_r \epsilon_r^\mu(\vec{k}) \epsilon_r^\nu(\vec{k}) &= -g^{\mu\nu} \\ \xi_0 &= -1, \quad \xi_1 = \xi_2 = 1 \end{aligned} \quad (3.47)$$

De las relaciones de conmutación covariantes se deduce que el propagador de Feynman para el fotón es:

$$\begin{aligned} \langle 0|T \{a^\mu(x) a^\nu(x')\} |0\rangle &= iD_F^{\mu\nu}(x - x') \\ D_F^{\mu\nu}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{-g^{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} e^{-ikx} \end{aligned} \quad (3.48)$$

Para una polarización concreta:

$$\begin{aligned} \epsilon_0^\mu(\vec{k}) &= n^\mu = (1, 0, 0) \\ \epsilon_1^\mu(\vec{k}) &= (0, \vec{e}_1(\vec{k})) \\ \epsilon_2^\mu(\vec{k}) &= \left(0, \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}\right), \quad \vec{k} \cdot \vec{e}_1(\vec{k}) = 0 \end{aligned} \quad (3.49)$$

El propagador puede separarse en tres sumandos:

$$D_F^{\mu\nu}(k) = D_{FT}^{\mu\nu}(k) + D_{FC}^{\mu\nu}(k) + D_{FR}^{\mu\nu}(k)$$

Tenemos una contribución asociada a los fotones transversales, que en el plano tienen sólo un grado de libertad, y el resto puede separarse en dos sumandos si tomamos una combinación lineal concreta entre los fotones longitudinales y

escalares. Es decir,

$$\begin{aligned}
D_{FT}^{\mu\nu}(k) &= \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \epsilon_1^\mu(\vec{k}) \epsilon_1^\nu(\vec{k}) \\
D_{FC}^{\mu\nu}(k) &= \frac{n^\mu n^\nu}{(kn)^2 - k^2} \\
D_{FR}^{\mu\nu}(k) &= \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \left[ \frac{k^\mu k^\nu - (kn)(k^\mu n^\nu + k^\nu n^\mu)}{(kn)^2 - k^2} \right] \quad (3.50)
\end{aligned}$$

Para el campo fermiónico el propagador de Feynman en presencia de un campo externo será:

$$\begin{aligned}
\langle 0|T\{\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(x')\}|0\rangle &= \\
\sum_{k,m} e^{-iE_k(t-t')} \left( \psi_{km}^+(\vec{x}) \psi_{km}^{-\dagger}(\vec{x}') \right)_{\alpha\beta} + \delta_{\alpha 1} \delta_{\beta 1} g(\vec{x} - \vec{x}') &\quad \text{si } t > t' \\
\langle 0|T\{\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(x')\}|0\rangle &= \\
\sum_{k,m} \left( \psi_{km}^-(\vec{x}) \psi_{km}^{+\dagger}(\vec{x}') \right)_{\alpha\beta} e^{-iE_k(t'-t)} &\quad \text{si } t' > t
\end{aligned} \quad (3.51)$$

donde  $g(\vec{x} - \vec{x}')$  es la función de correlación a dos puntos igual a:

$$g(\vec{x} - \vec{x}') = \sum_{m=0}^{\infty} \Psi_{0m}(\vec{x}) \Psi_{0m}^*(\vec{x}') = \frac{eB}{2\pi} e^{-\frac{eB}{4}|\vec{x}-\vec{x}'|^2} e^{i\frac{eB}{2}(x'_1 x_2 - x'_2 x_1)} \quad (3.52)$$

Nos interesa estudiar los procesos de *scattering* entre partículas cargadas, a primer orden en el parámetro adimensional  $\lambda = \frac{e^2}{\sqrt{eB}}$ , es decir:

$$\int d^3x \int d^3x' \tilde{j}_1^\mu(x) \tilde{D}_{F\mu\nu}(x-x') \tilde{j}_2^\nu(x') \quad (3.53)$$

donde denotamos por:  $\tilde{j}^\mu(x) = \frac{1}{(eB)^{1/4}} j^\mu(x)$  y  $\tilde{D}_{F\mu\nu}(x-x') = \sqrt{eB} D_{F\mu\nu}(x-x')$ .

De los tres sumandos del propagador del fotón es inmediato que la contribución de  $D_{FC\mu\nu}(x-x')$  corresponde a la interacción instantánea de Coulomb entre las densidades de carga:  $\rho_1(\vec{x}, t)$  y  $\rho_2(\vec{x}', t)$ , pues:

$$D_{FC\mu\nu}(x-x') = g_{\mu 0} g_{\nu 0} \frac{1}{4\pi} \ln \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \delta(t-t') \quad (3.54)$$

El propagador transversal  $D_{FT\mu\nu}(x-x')$  dará la interacción electromagnética entre  $\vec{j}_1(x)$  y  $\vec{j}_2(x')$ . Y, por último, el término  $D_{FR\mu\nu}(x-x')$  dará cero como consecuencia de la conservación de la densidad de corriente.



Cuando tenemos ocupación fraccionaria de los modos cero hemos visto, en la teoría *libre*, que hay una degeneración infinita entre estados con el mismo factor de llenado. Como los modos cero son autofunciones de  $\gamma^0$  resulta que  $\gamma^1$  y  $\gamma^2$  no pueden acoplarlos, y por tanto, las partículas que ocupan los modos cero sólo pueden interactuar coulombianamente [70]. Así pues, para determinar el estado fundamental con ocupación fraccionaria debemos considerar la interacción colombiana residual entre las partículas en los modos cero. Esta interacción en el plano viene dada por el potencial logarítmico  $V(|\vec{x} - \vec{x}'|) = e^2 \ln \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$ . No obstante, en el material semiconductor donde se observa el efecto Hall cuántico sólo los electrones son bidimensionales. Si tenemos en cuenta la posibilidad de que los fotones transversales tengan dos estados de polarización, uno en el plano y otro perpendicular al mismo, la interacción Coulombiana entre los electrones vendrá dada por el potencial  $V(|\vec{x} - \vec{x}'|) = e^2 \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$ . En definitiva, el problema es equivalente al planteado por R. B. Laughlin en el caso no-relativista.

Todo esto nos lleva a considerar un Hamiltoniano efectivo, que para  $N$  partículas será:

$$H_N = \sum_{I=1}^N \left\{ \vec{\alpha} \left( -i\hbar \vec{\nabla}_I + e\vec{A}(z_I, \bar{z}_I) \right) \right\} + \sum_{I < J}^N e^2 \frac{1}{|z_I - z_J|} \quad (3.55)$$

Utilizaremos el método variacional para determinar el estado fundamental del sistema cuando ocupamos un número finito de modos cero tal que  $f = \frac{1}{m}$ ,  $m$  impar. El Hamiltoniano conmuta con el momento angular total, y por tanto, el estado que buscamos debe ser propio de ambos operadores.

Supongamos que el estado buscado tiene un momento angular total determinado, que en función del inverso del factor de llenado es:  $J = L + S = \frac{N(N-1)}{2}m + N\frac{1}{2}$ ; y que el momento angular de cada partícula no puede tomar cualquier valor, sino que está restringido a:  $l \leq (N-1)m$ . Seleccionamos, así, entre los  $\binom{Nm}{N}$  determinantes de Slater posibles, para  $N$  partículas en  $M = Nm$  modos distintos, un subespacio de estados en el cual buscaremos qué combinación lineal hace mínima la energía de interacción Coulombiana.

Para el problema más simple de dos partículas tenemos los determinantes de Slater con factor de llenado  $f = \frac{1}{m}$  dados por:

$$\psi_{l_1, l_2}(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) = \frac{1}{\sqrt{2!}} \begin{vmatrix} \psi_{0l_1}(z_1, \bar{z}_1) & \psi_{0l_1}(z_2, \bar{z}_2) \\ \psi_{0l_2}(z_1, \bar{z}_1) & \psi_{0l_2}(z_2, \bar{z}_2) \end{vmatrix} \\ l_1, l_2 = 0, 1, \dots, 2m-1, \quad l_1 < l_2 \quad (3.56)$$

Los subespacios con momento angular total:  $J = m + 1$ ; y con,  $l_I \leq m$ ,

$I = 1, 2$ , son:

$$\begin{aligned}
m &= 3 & , & & \{\psi_{0,3}, \psi_{1,2}\} \\
m &= 5 & , & & \{\psi_{0,5}, \psi_{1,4}, \psi_{2,3}\} \\
m &= 7 & , & & \{\psi_{0,7}, \psi_{1,6}, \psi_{2,5}, \psi_{3,4}\} \\
& \dots \\
m &= 2k + 1 & , & & \{\psi_{0,m}, \psi_{1,m-1}, \dots, \psi_{k,k+1}\}
\end{aligned} \tag{3.57}$$

El valor esperado del potencial de Coulomb en dos cualesquiera de estos estados puede expresarse en función de los determinantes de Slater del problema no-relativista equivalente, es decir:

$$\begin{aligned}
& \langle \psi_{l_1, l_2}(z_I, \bar{z}_I; z_J, \bar{z}_J) | V(|z_I - z_J|) | \psi_{l'_1, l'_2}(z_I, \bar{z}_I; z_J, \bar{z}_J) \rangle = \\
& = \int \frac{dz_I d\bar{z}_I}{2\pi i} \int \frac{dz_J d\bar{z}_J}{2\pi i} \psi_{l_1, l_2}^\dagger(z_I, \bar{z}_I; z_J, \bar{z}_J) \frac{e^2}{|z_I - z_J|} \psi_{l'_1, l'_2}(z_I, \bar{z}_I; z_J, \bar{z}_J) \\
& = \int \frac{dz_I d\bar{z}_I}{2\pi i} \int \frac{dz_J d\bar{z}_J}{2\pi i} \Psi_{l_1, l_2}^*(z_I, \bar{z}_I; z_J, \bar{z}_J) \frac{e^2}{|z_I - z_J|} \Psi_{l'_1, l'_2}(z_I, \bar{z}_I; z_J, \bar{z}_J)
\end{aligned}$$

Donde  $\Psi_{l_1, l_2}(z_I, \bar{z}_I; z_J, \bar{z}_J)$  es:

$$\Psi_{l_1, l_2}(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) = \frac{1}{\pi^{l_1+l_2+2} \sqrt{2!} l_1! l_2!} \begin{vmatrix} z_1^{l_1} & z_2^{l_1} \\ z_1^{l_2} & z_2^{l_2} \end{vmatrix} e^{-\frac{1}{2l^2} \sum_{I=1}^2 |z_I|^2} \tag{3.58}$$

Calculamos los elementos de matriz del potencial de Coulomb en cada uno de estos subespacios, tenemos así una matriz  $(k + 1 \times k + 1)$  para cada  $m = 2k + 1$ , que diagonalizamos. El autovalor de mínima energía para cada  $m$  es:

$$\begin{aligned}
m &= 3 & , & & \mathcal{V} \simeq \frac{e^2}{l} 0.391661 \\
m &= 5 & , & & \mathcal{V} \simeq \frac{e^2}{l} 0.308433 \\
m &= 7 & , & & \mathcal{V} \simeq \frac{e^2}{l} 0.262535 \\
m &= 9 & , & & \mathcal{V} \simeq \frac{e^2}{l} 0.232453 \\
& \dots
\end{aligned} \tag{3.59}$$

y el autovector correspondiente:

$$m = 3, \Phi_3(z, \bar{z}) \simeq -0.5 \Psi_{03}(z, \bar{z}) + 0.866025 \Psi_{12}(z, \bar{z})$$

$$\begin{aligned}
 m &= 5, \quad \Phi_5(z, \bar{z}) \simeq 0.25 \Psi_{05}(z, \bar{z}) - 0.559017 \Psi_{14}(z, \bar{z}) + 0.790569 \Psi_{23}(z, \bar{z}) \\
 m &= 7, \quad \Phi_7(z, \bar{z}) \simeq -0.125 \Psi_{07}(z, \bar{z}) + 0.330719 \Psi_{16}(z, \bar{z}) - 0.572822 \Psi_{25}(z, \bar{z}) \\
 &\quad + 0.73951 \Psi_{34}(z, \bar{z}) \\
 m &= 9, \quad \Phi_9(z, \bar{z}) \simeq 0.0625 \Psi_{09}(z, \bar{z}) - 0.1875 \Psi_{18}(z, \bar{z}) + 0.375 \Psi_{27}(z, \bar{z}) \\
 &\quad - 0.57282 \Psi_{36}(z, \bar{z}) + 0.70156 \Psi_{45}(z, \bar{z}) \\
 &\quad \dots
 \end{aligned} \tag{3.60}$$

con  $(z, \bar{z}) \equiv (z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2)$ .

Encontramos que el estado de mínima energía coincide exactamente con la función de onda variacional propuesta por R.B. Laughlin, [79], para el problema de dos partículas. Para cada  $m = 3, 5, 7, \dots$ :

$$\Phi_m(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) \propto \Psi_{\frac{1}{m}}(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2)$$

donde la función de onda de Laughlin es:

$$\Psi_{\frac{1}{m}}(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) = \frac{1}{\pi l^{m+2}} (z_1 - z_2)^m e^{-\frac{1}{2l^2}(|z_1|^2 + |z_2|^2)} \tag{3.61}$$

O lo que es lo mismo, si proyectamos el estado calculado sobre el estado propuesto por R. B. Laughlin resulta que:

$$\frac{\langle \Phi_m | \Psi_{\frac{1}{m}} \rangle}{\sqrt{\langle \Phi_m | \Phi_m \rangle \langle \Psi_{\frac{1}{m}} | \Psi_{\frac{1}{m}} \rangle}} = 1, \quad \forall m = 2k + 1 \tag{3.62}$$

En general, la energía Coulombiana para dos partículas en el estado de R.B. Laughlin, que coincide exactamente con el autovalor mínimo calculado para cada  $m$ , es:

$$\mathcal{V} = \frac{e^2}{l} \frac{\Gamma[m + \frac{1}{2}]}{\sqrt{2} m!} \tag{3.63}$$

Pasemos al problema de tres partículas, tenemos para  $f = \frac{1}{m}$  los determinantes de Slater:

$$\begin{aligned}
 \psi_{l_1, l_2, l_3}(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, z_3, \bar{z}_3) &= \frac{1}{\sqrt{3!}} \begin{vmatrix} \psi_{0l_1}(z_1, \bar{z}_1) & \psi_{0l_1}(z_2, \bar{z}_2) & \psi_{0l_1}(z_3, \bar{z}_3) \\ \psi_{0l_2}(z_1, \bar{z}_1) & \psi_{0l_2}(z_2, \bar{z}_2) & \psi_{0l_2}(z_3, \bar{z}_3) \\ \psi_{0l_3}(z_1, \bar{z}_1) & \psi_{0l_3}(z_2, \bar{z}_2) & \psi_{0l_3}(z_3, \bar{z}_3) \end{vmatrix} \\
 l_1, l_2, l_3 &= 0, 1, \dots, 3m - 1, \quad l_1 < l_2 < l_3
 \end{aligned} \tag{3.64}$$

Los subespacios con momento angular total:  $J = 3m + \frac{3}{2}$ ; y con,  $l_I \leq 2m$ ,  $I = 1, 2, 3$ , son:

$$m = 3, \quad \{\psi_{0,3,6}; \psi_{0,4,5}; \psi_{1,2,6}; \psi_{1,3,5}; \psi_{2,3,4}\}$$

$$\begin{aligned}
m = 5, & \{ \psi_{0,5,10}; \psi_{0,6,9}; \psi_{0,7,8}; \psi_{1,4,10}; \psi_{1,5,9}; \\
& \psi_{1,6,8}; \psi_{2,3,10}; \psi_{2,4,9}; \psi_{2,5,8}; \psi_{2,6,7}; \psi_{3,4,8}; \psi_{3,5,7}; \psi_{4,5,6} \} \\
& \dots
\end{aligned} \tag{3.65}$$

Puede observarse que para tres partículas la dimensión de los subespacios aumenta mucho para valores de  $m$  altos y, por tanto, nos quedaremos solamente con el caso más simple  $m = 3$ . Para calcular el valor esperado del potencial de Coulomb podemos tomar los determinantes de Slater del problema no-relativista, es decir,

$$\Psi_{l_1, l_2, l_3}(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, z_3, \bar{z}_3) = \frac{1}{\pi l^{12} \sqrt{\pi 3! l_1! l_2! l_3!}} \begin{vmatrix} z_1^{l_1} & z_2^{l_1} & z_3^{l_1} \\ z_1^{l_2} & z_2^{l_2} & z_3^{l_2} \\ z_1^{l_3} & z_2^{l_3} & z_3^{l_3} \end{vmatrix} e^{-\frac{1}{2l^2} \sum_{I=1}^3 |z_I|^2} \tag{3.66}$$

La matriz de Coulomb será una matriz ( $5 \times 5$ ), y su autovalor mínimo es:

$$\mathcal{V} = \frac{e^2}{l} 1.01437 \tag{3.67}$$

El vector propio correspondiente es:

$$\begin{aligned}
\Phi_3(z, \bar{z}) \simeq & -0.118154 \Psi_{036}(z, \bar{z}) + 0.358425 \Psi_{045}(z, \bar{z}) + 0.314257 \Psi_{126}(z, \bar{z}) \\
& -0.459525 \Psi_{135}(z, \bar{z}) + 0.740034 \Psi_{234}(z, \bar{z})
\end{aligned} \tag{3.68}$$

con  $(z, \bar{z}) \equiv (z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, z_3, \bar{z}_3)$ .

Proyectando este estado sobre el estado variacional propuesto por R.B. Laughlin para tres partículas con un factor de llenado  $f = \frac{1}{3}$  tenemos:

$$\frac{\langle \Phi_3 | \Psi_{\frac{1}{3}} \rangle}{\sqrt{\langle \Phi_3 | \Phi_3 \rangle \langle \Psi_{\frac{1}{3}} | \Psi_{\frac{1}{3}} \rangle}} = 0.993606 \tag{3.69}$$

La función de onda de Laughlin en este caso es:

$$\Psi_{\frac{1}{3}}(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, z_3, \bar{z}_3) = \frac{1}{\pi \sqrt{\pi} l^{12}} \prod_{I < J}^3 (z_I - z_J)^3 e^{-\frac{1}{2l^2} \sum_{I=1}^3 |z_I|^2}$$

Luego, para tres partículas estos estados no coinciden exactamente aunque son prácticamente iguales. Es decir, el estado variacional de Laughlin no es exacto, para un número de partículas mayor que dos, pero es el que mejor se aproxima a la combinación lineal de determinantes de Slater que hace mínima la energía de interacción Coulombiana [81]. Por tanto, se trata de una buena aproximación para el estado fundamental del sistema cuando tenemos ocupación fraccionaria de los modos cero.

### 3.3 Interpretación Topológica

La cuantización de la conductividad Hall en múltiplos enteros de  $\frac{e^2}{h}$  es extremadamente precisa e independiente de la geometría y características del material. Esto induce a pensar en un origen topológico del fenómeno. Tal y como han propuesto D. J. Thouless, y otros autores,  $\sigma_H$  puede reconocerse como un invariante topológico [75, 101, 123, 124]. Plantearemos en este apartado el análisis de Thouless en el marco de la teoría relativista que hemos desarrollado en los capítulos anteriores [49].

Como propone D. J. Thouless, consideremos un doble efecto Aharanov-Bohm, de forma que el dispositivo sobre el que se estudia el efecto Hall sea el mostrado en la Figuras 3.1 y 3.2.

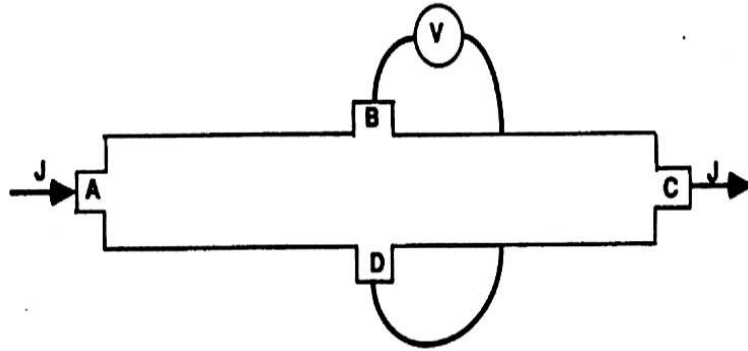


Figura 3.1: Dispositivo para medir la resistencia Hall, hay una corriente fija  $J$  que pasa a través de las emplomaduras (A,C), y el voltaje se mide con el voltímetro  $V$  entre las emplomaduras (B,D).

El Hamiltoniano de Dirac para una partícula, sin masa, en este sistema puede expresarse en función del potencial vector,  $\vec{a}(t)$ <sup>3</sup>, asociado a los flujos de los solenoides dependientes del tiempo  $\Phi_1(t)$  y  $\Phi_2(t)$ . Es decir:

$$H_1^D(a_1(t), a_2(t)) = \vec{\alpha} \left[ c\vec{p} + e(\vec{A} + \vec{a}(t)) \right] + V_1(x_1, x_2) \quad (3.70)$$

donde  $\vec{A}$  es el potencial vector asociado al campo magnético constante  $B$ , que tomaremos en el gauge simétrico; y  $V_1(x_1, x_2)$  es la energía de interacción de la partícula con las impurezas, que en primera aproximación puede despreciarse.

<sup>3</sup>En el gauge de Weyl  $a_0 = 0$ .

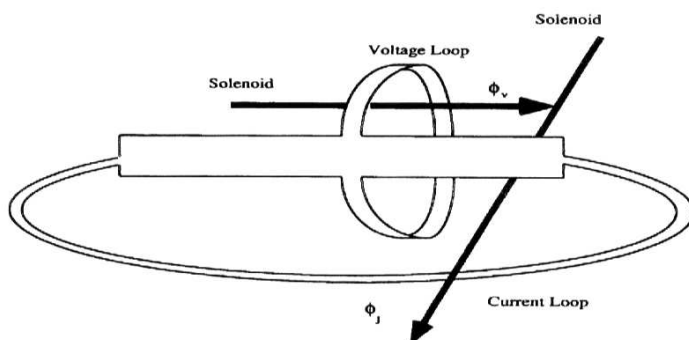


Figura 3.2: Las emplomaduras de corriente y voltaje son reemplazadas por dos tiras de material bidimensional, con dos solenoides pasando a través de cada lazo, cuyos flujos son variables  $\Phi_J$  y  $\Phi_V$ . El voltaje se genera al variar el flujo que pasa a través de uno de los solenoides, mientras que el otro se utiliza para medir la corriente a través del lazo de corriente. La topología de este sistema es la de un toro. [124]

La física es periódica en los flujos  $\Phi_1$  y  $\Phi_2$ , ya que las partículas no sienten la presencia del campo magnético cuando el flujo está cuantizado [114]:  $\Phi_1, \Phi_2 \in [0, \frac{hc}{e}]$ . Además, la variación de los flujos en el tiempo inducirá una variación en las corrientes  $j_1$  y  $j_2$ , que vendrán dadas por:

$$\begin{aligned} j_1 &= -c \frac{\partial H_1^D}{\partial a_1(t)} = -e c \alpha^1 \\ j_2 &= -c \frac{\partial H_1^D}{\partial a_2(t)} = -e c \alpha^2 \end{aligned} \quad (3.71)$$

Queremos encontrar el espectro y los espinores para este Hamiltoniano de Dirac dependiente del tiempo. Si suponemos una variación infinitesimal del potencial vector  $\delta \vec{a}(t)$ , y en definitiva de los flujos, el Hamiltoniano será:

$$H_1^D(\delta a_1(t), \delta a_2(t)) = H_1^D(0, 0) + \frac{\partial H_1^D}{\partial a_1} \delta a_1(t) + \frac{\partial H_1^D}{\partial a_2} \delta a_2(t) \quad (3.72)$$

Que matricialmente puede expresarse

$$H_1^D(\delta a_z(t), \delta a_{\bar{z}}(t)) = \begin{pmatrix} 0 & D(\delta a_z(t)) \\ D^\dagger(\delta a_{\bar{z}}(t)) & 0 \end{pmatrix} \quad (3.73)$$

donde

$$\begin{aligned} D(\delta a_z(t)) &= D(0) + e \delta a_z(t) & \delta a_z(t) &= \delta a_2(t) + i \delta a_1(t) \\ D^\dagger(\delta a_{\bar{z}}(t)) &= D^\dagger(0) + e \delta a_{\bar{z}}(t) & \delta a_{\bar{z}}(t) &= \delta a_2(t) - i \delta a_1(t) \end{aligned} \quad (3.74)$$

con  $D(0)$  y  $D^\dagger(0)$  dados por (1.100). Es decir, tenemos:

$$H_1^D(\delta a_z(t), \delta a_{\bar{z}}(t)) = H_1^D(0, 0) + V(\delta a_z, \delta a_{\bar{z}}) = H_1^D(0, 0) + e \begin{pmatrix} 0 & \delta a_z(t) \\ \delta a_{\bar{z}}(t) & 0 \end{pmatrix} \quad (3.75)$$

Es posible determinar el espectro de este Hamiltoniano conocido el de  $H_1^D(0, 0)$ . Como vimos en el primer Capítulo, los niveles de energía para el Hamiltoniano de Dirac en un campo magnético constante están degenerados en el momento angular total, y podemos distinguir tres tipos de soluciones: los modos “fermiónicos”,  $\psi_{km}^+$  y  $\psi_{km}^-$  con  $k \neq 0$ , y los modos cero,  $\psi_{0m}$ . Si aplicamos la teoría de perturbaciones dependiente del tiempo, no degenerada <sup>4</sup>, en la aproximación adiabática (suponiendo que los autovalores y espinores propios cambian suavemente con el tiempo), resulta:

a) Para los autovalores

$$\begin{aligned} E_k(\delta a_z, \delta a_{\bar{z}}) &= E_k(0, 0) + \sum_m \langle \psi_{k,m} | V(\delta a_z, \delta a_{\bar{z}}) | \psi_{k,m} \rangle \\ &+ \sum_{\substack{k' \neq k \\ m' \neq m}} \frac{\langle \psi_{k,m} | V(\delta a_z, \delta a_{\bar{z}}) | \psi_{k',m'} \rangle \langle \psi_{k',m'} | V(\delta a_z, \delta a_{\bar{z}}) | \psi_{k,m} \rangle}{E_k - E_{k'}} \\ &+ \theta((\delta a_z)^3, (\delta a_{\bar{z}})^3) \end{aligned} \quad (3.76)$$

b) Para los espinores

$$\begin{aligned} |\psi_{k,m}(\delta a_z, \delta a_{\bar{z}})\rangle &= |\psi_{k,m}\rangle + \sum_{\substack{k' \neq k \\ m' \neq m}} |\psi_{k',m'}\rangle \frac{\langle \psi_{k',m'} | V(\delta a_z, \delta a_{\bar{z}}) | \psi_{k,m}\rangle}{E_k - E_{k'}} \\ &+ \theta((\delta a_z)^2, (\delta a_{\bar{z}})^2) \end{aligned} \quad (3.77)$$

Recordemos que una base ortonormal de espinores para el problema sin flujos es:

$$|\psi_{k,m}^\pm\rangle_{k \neq 0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} |\Psi_{k,m}\rangle \\ \mp |\Psi_{k-1,m+1}\rangle \end{pmatrix}, \quad |\psi_{0,m}\rangle = \begin{pmatrix} |\Psi_{0,m}\rangle \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si nos quedamos a primer orden en la perturbación, para la energía encontramos:

$$\langle \psi_{k,m}^\pm | V | \psi_{k,m'}^\pm \rangle = 0, \quad \langle \psi_{0,m} | V | \psi_{0,m'} \rangle = 0, \quad \forall m, m' \quad (3.78)$$

<sup>4</sup>Los elementos de matriz del Hamiltoniano de interacción,  $H_I^D(t) = e\vec{a} \cdot \delta\vec{a}(t)$ , entre diferentes estados de igual energía son nulos [103].

puesto que

$$\begin{aligned}\langle \psi_{k,m}^\pm | \alpha^i | \psi_{k,m'}^\pm \rangle &= \int \frac{dz d\bar{z}}{2\pi i} \psi_{k,m}^{\pm \dagger}(z, \bar{z}) \alpha^i \psi_{k,m'}^\pm(z, \bar{z}) = 0 \\ \langle \psi_{0,m} | \alpha^i | \psi_{0,m'} \rangle &= \int \frac{dz d\bar{z}}{2\pi i} \psi_{0,m}^\dagger(z, \bar{z}) \alpha^i \psi_{0,m'}(z, \bar{z}) = 0, \quad \forall m, m'\end{aligned}\quad (3.79)$$

Es decir, la corrección a primer orden para la energía es nula y será necesario ir al siguiente orden de aproximación. Sin embargo, para los espinores tenemos ya a primer orden una corrección no nula.

Es posible, no obstante, encontrar una expresión para la energía y para los espinores en el caso de una variación finita de los flujos  $\Phi_1$  y  $\Phi_2$ . Para ello es conveniente observar la analogía existente entre este problema y el de un potencial periódico unidimensional, en el que se utiliza la aproximación *tight-binding* [114, 9]. Esta aproximación se materializa en nuestro problema si despreciamos en el desarrollo en teoría de perturbaciones, para los términos de orden mayor que dos, los sumandos que se refieren a la transición desde un nivel de energía dado,  $k$ , a niveles con  $k > k + 1$  o  $k < k - 1$ .

Es decir, consideremos el Hamiltoniano dependiente de los flujos (3.75), si suponemos que los elementos de matriz diagonales de este operador, en la base ortonormal de espinores  $\{|\psi_{k,m}^\pm\rangle, |\psi_{0,m}\rangle\}$ , son:

$$\begin{aligned}\langle \psi_{k,m}^\pm | H_1^D(\delta a_z, \delta a_{\bar{z}}) | \psi_{k,m}^\pm \rangle &= E_k^\pm, \quad k \neq 0 \\ \langle \psi_{0,m} | H_1^D(\delta a_z, \delta a_{\bar{z}}) | \psi_{0,m} \rangle &= E_0 = 0\end{aligned}\quad (3.80)$$

y, que los únicos elementos de matriz no diagonales distintos de cero vienen dados por:

$$\begin{aligned}\langle \psi_{k+1,m-1}^\pm | H_1^D(\delta a_z, \delta a_{\bar{z}}) | \psi_{k,m}^\pm \rangle &= \mp \Delta \\ \langle \psi_{k-1,m+1}^\pm | H_1^D(\delta a_z, \delta a_{\bar{z}}) | \psi_{k,m}^\pm \rangle &= \mp \Delta \\ \langle \psi_{k+1,m-1}^\pm | H_1^D(\delta a_z, \delta a_{\bar{z}}) | \psi_{0,m} \rangle &= \mp \Delta^0\end{aligned}\quad (3.81)$$

(con  $\Delta$  y  $\Delta^0$  independientes de  $k$  y  $m$ ), podremos expresar el Hamiltoniano en la forma:

$$\begin{aligned}H_1^D(\delta a_z, \delta a_{\bar{z}}) | \psi_{k,m}^+ \rangle &= E_k^+ | \psi_{k,m}^+ \rangle - \Delta | \psi_{k+1,m-1}^+ \rangle - \Delta | \psi_{k-1,m+1}^+ \rangle \\ H_1^D(\delta a_z, \delta a_{\bar{z}}) | \psi_{k,m}^- \rangle &= E_k^- | \psi_{k,m}^- \rangle + \Delta | \psi_{k+1,m-1}^- \rangle + \Delta | \psi_{k-1,m+1}^- \rangle, \quad k \neq 0 \\ H_1^D(\delta a_z, \delta a_{\bar{z}}) | \psi_{0,m} \rangle &= E_0 | \psi_{0,m} \rangle - \Delta^0 | \psi_{1,m-1}^+ \rangle + \Delta^0 | \psi_{1,m-1}^- \rangle\end{aligned}\quad (3.82)$$

Del mismo modo que en el problema de un potencial periódico unidimensional [114], y teniendo en cuenta que  $E_k$  no depende de  $m$ , es posible encontrar una



combinación lineal de los estados de la base que sea propia del Hamiltoniano en esta aproximación, así

$$\begin{aligned} |\theta\rangle_k^\pm &= \sum_{m \geq -k}^{\infty} e^{i(\frac{k-m}{2})\theta} |\psi_{k,m}^\pm\rangle \\ |\theta\rangle_0 &= \sum_{m=0}^{\infty} e^{-i\frac{m}{2}\theta} |\psi_{0,m}\rangle \end{aligned} \quad (3.83)$$

La variable angular  $\theta$  depende de los flujos,  $\theta = \theta(\theta_1, \theta_2)$ , donde  $\theta_i = \frac{e}{\hbar c} \Phi_i$ ,  $i = 1, 2$ , que toma valores en  $\theta \in [0, 2\pi]$ , cuando los flujos toman valores en  $\Phi_i \in [0, \frac{h c}{e}]$ . La energía de este estado para cada valor de  $k$  es:

$$\begin{aligned} E_k^+(\theta) &= E_k^+ - 2\Delta \cos\theta \\ E_k^-(\theta) &= E_k^- + 2\Delta \cos\theta \\ E_0(\theta) &= E_0 \end{aligned} \quad (3.84)$$

para los modos “fermiónicos” y los modos cero.

Encontramos, por tanto, que la energía depende del número cuántico  $k$ , que determina el nivel del espectro de Dirac-Landau, y también de un parámetro real  $\theta$  que toma valores en el continuo. Cada nivel de energía, para  $\Delta$  finito, se separa en una banda de niveles con valores entre  $E_k^+ - 2\Delta$  y  $E_k^+ + 2\Delta$  para partículas, y entre  $E_k^- + 2\Delta$  y  $E_k^- - 2\Delta$  para antipartículas. La ecuación (3.84) describe el *flujo espectral* asociado a la variación (adiabática) del potencial vector, y en definitiva a la variación de los flujos, caracterizada por los distintos valores de  $\theta$ .

La degeneración en  $m$  desaparece y cada nivel de Dirac-Landau se separa en una banda de niveles de energía equivalente a la *zona de Brillouin* del potencial periódico unidimensional, en este caso sería la *zona de Brillouin magnética*. Sin embargo, se trata de una banda de estados posibles para el sistema cuando éste evoluciona en el tiempo de forma adiabática, es decir, cuando variamos el campo eléctrico, y por tanto, las corrientes en el material.

Por otro lado, los modos cero no sienten la presencia de los flujos y su energía sigue siendo cero. El nivel de energía,  $k = 0$ , no se separará en una banda cuando variamos los flujos. Este hecho es coherente con el análisis de la Sección anterior, en el que veíamos que los modos cero sólo interactúan coulombianamente, y no a través de la corriente  $\vec{\alpha}$ , [70].

Analizado el problema de una partícula pasemos al de muchas partículas. El Hamiltoniano en presencia de flujos es:

$$H^D(a_1(t), a_2(t)) = \int \frac{dzd\bar{z}}{2\pi i} : \psi^\dagger(z, \bar{z}) H_1^D(a_1(t), a_2(t)) \psi(z, \bar{z}) : \quad (3.85)$$

tal que

$$H^D(a_1(t), a_2(t)) \Psi(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_N, \bar{z}_N; a_1, a_2) = \sum_{I=1}^N H_1^D(z_I, \bar{z}_I; a_1(t), a_2(t)) \Psi(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_N, \bar{z}_N; a_1, a_2) \quad (3.86)$$

De manera análoga al problema de una partícula, en primera aproximación para el efecto Hall cuántico entero podemos despreciar el potencial de interacción con las impurezas y el de interacción entre las partículas.

Los operadores de corriente en el sistema de muchas partículas vienen dados por:

$$\begin{aligned} J_1 &= \int \frac{dzd\bar{z}}{2\pi i} : \psi^\dagger(z, \bar{z}) j_1 \psi(z, \bar{z}) := -ec \int \frac{dzd\bar{z}}{2\pi i} : \bar{\psi}(z, \bar{z}) \alpha^1 \psi(z, \bar{z}) : \\ J_2 &= \int \frac{dzd\bar{z}}{2\pi i} : \psi^\dagger(z, \bar{z}) j_2 \psi(z, \bar{z}) := -ec \int \frac{dzd\bar{z}}{2\pi i} : \bar{\psi}(z, \bar{z}) \alpha^2 \psi(z, \bar{z}) : \end{aligned} \quad (3.87)$$

La conductividad Hall se puede calcular a partir del valor esperado del operador corriente en el estado fundamental del sistema de muchas partículas, que dependerá de los flujos y de su variación en el tiempo. No obstante, no será necesario especificar cómo es este estado, basta con estudiar la respuesta del sistema cuando cambian suavemente en el tiempo los flujos magnéticos. Es decir, supongamos que  $\Phi_i(t) = \Phi_i(0) + \delta\Phi_i(t)$ , o lo que es lo mismo, que el sistema interacciona con un campo electromagnético externo muy débil, tal que  $\delta\vec{a}(t) = -c\vec{E}(t)t$ , donde  $\vec{E}(t)$  es el campo eléctrico débil [39]. En tal caso el Hamiltoniano de Dirac para muchas partículas puede expresarse:

$$H^D(\delta a_1(t), \delta a_2(t)) = H^D(a_1(0), a_2(0)) - \frac{1}{c} \delta a_1(t) J_1 - \frac{1}{c} \delta a_2(t) J_2 \quad (3.88)$$

La dependencia temporal del Hamiltoniano es pequeña, y además varía lentamente con el tiempo. De esta forma la teoría de perturbaciones puede aplicarse en la aproximación adiabática [116].

Supongamos que el sistema se encuentra en el estado fundamental en el instante  $t = 0$ :  $|\Psi_0(a_1(0), a_2(0))\rangle$ , y que conocemos una base de estados ortonormal  $\{|\phi(a_1(t), a_2(t))\rangle\}$  propios del Hamiltoniano de Dirac instantáneo <sup>5</sup> :

$$H^D(t) |\phi(a_1(t), a_2(t))\rangle = E(t) |\phi(a_1(t), a_2(t))\rangle \quad (3.89)$$

---

<sup>5</sup>Estos estados pueden expresarse como un producto antisimetrizado de los estados de una partícula.

Queremos determinar el estado fundamental propio del Hamiltoniano de Dirac cuando variamos los flujos en el tiempo, es decir,  $|\Psi_0\rangle$  tal que:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi_0(a_i(t))\rangle = H^D(t) |\Psi_0(a_i(t))\rangle$$

En la aproximación adiabática la corrección a primer orden para este estado es:

$$|\Psi_0(a_i(t))\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_0(t') dt'} \left[ |\phi_0(a_i(t))\rangle + i\hbar \sum_{E \neq E_0} \frac{|\phi_E(a_i(t))\rangle \langle \phi_E(a_i(t)) | \frac{\partial \phi_0(a_i(t))}{\partial t} \rangle}{E - E_0} \right] \quad (3.90)$$

donde, para  $t = 0$ ,  $|\Psi_0(a_1(0), a_2(0))\rangle \equiv |\phi_0(a_1(0), a_2(0))\rangle$ . Los estados  $|\phi_E(a_i(t))\rangle$  son estados excitados del Hamiltoniano de Dirac instantáneo.

De la ecuación (3.89) se deduce que la variación del estado fundamental  $|\phi_0(a_1(t), a_2(t))\rangle$  en el tiempo viene dada por:

$$\langle \phi_E(t) | \frac{\partial \phi_0(t)}{\partial t} \rangle = \frac{1}{E_0(t) - E(t)} \langle \phi_E(t) | \frac{\partial H^D}{\partial t} | \phi_0(t) \rangle, \quad E \neq E_0 \quad (3.91)$$

Teniendo en cuenta que el Hamiltoniano depende del tiempo a través del potencial vector asociado con los flujos, tenemos:

$$\frac{\partial H^D}{\partial t} = E_1(t) J_1 + E_2(t) J_2 \quad (3.92)$$

Si calculamos el valor esperado de los operadores de corriente  $J_1$  y  $J_2$  en el estado fundamental del sistema  $|\Psi_0\rangle$ , quedándonos a primer orden en la perturbación, resulta:

$$\begin{aligned} \langle \Psi_0(a_i) | J_1 | \Psi_0(a_i) \rangle &= \langle \phi_0(a_i) | J_1 | \phi_0(a_i) \rangle + i\hbar \sum_{E \neq E_0} \\ &\left[ \frac{\langle \phi_0(a_i) | \frac{\partial H^D}{\partial t} | \phi_E(a_i) \rangle \langle \phi_E(a_i) | J_1 | \phi_0(a_i) \rangle}{(E - E_0)^2} - \frac{\langle \phi_0(a_i) | J_1 | \phi_E(a_i) \rangle \langle \phi_E(a_i) | \frac{\partial H^D}{\partial t} | \phi_0(a_i) \rangle}{(E - E_0)^2} \right] \end{aligned} \quad (3.93)$$

$$\begin{aligned} \langle \Psi_0(a_i) | J_2 | \Psi_0(a_i) \rangle &= \langle \phi_0(a_i) | J_2 | \phi_0(a_i) \rangle + i\hbar \sum_{E \neq E_0} \\ &\left[ \frac{\langle \phi_0(a_i) | \frac{\partial H^D}{\partial t} | \phi_E(a_i) \rangle \langle \phi_E(a_i) | J_2 | \phi_0(a_i) \rangle}{(E - E_0)^2} - \frac{\langle \phi_0(a_i) | J_2 | \phi_E(a_i) \rangle \langle \phi_E(a_i) | \frac{\partial H^D}{\partial t} | \phi_0(a_i) \rangle}{(E - E_0)^2} \right] \end{aligned} \quad (3.94)$$

Sustituyendo (3.92) en estas expresiones:

$$\begin{aligned} \Delta\langle J_1 \rangle_0 &= E_1 i\hbar \sum_{E \neq E_0} \\ &\left[ \frac{\langle \phi_0(a_i) | J_1 | \phi_E(a_i) \rangle \langle \phi_E(a_i) | J_1 | \phi_0(a_i) \rangle}{(E - E_0)^2} - \frac{\langle \phi_0(a_i) | J_1 | \phi_E(a_i) \rangle \langle \phi_E(a_i) | J_1 | \phi_0(a_i) \rangle}{(E - E_0)^2} \right] \\ &+ E_2 i\hbar \sum_{E \neq E_0} \\ &\left[ \frac{\langle \phi_0(a_i) | J_2 | \phi_E(a_i) \rangle \langle \phi_E(a_i) | J_1 | \phi_0(a_i) \rangle}{(E - E_0)^2} - \frac{\langle \phi_0(a_i) | J_1 | \phi_E(a_i) \rangle \langle \phi_E(a_i) | J_2 | \phi_0(a_i) \rangle}{(E - E_0)^2} \right] \end{aligned} \quad (3.95)$$

$$\begin{aligned} \Delta\langle J_2 \rangle_0 &= E_1 i\hbar \sum_{E \neq E_0} \\ &\left[ \frac{\langle \phi_0(a_i) | J_1 | \phi_E(a_i) \rangle \langle \phi_E(a_i) | J_2 | \phi_0(a_i) \rangle}{(E - E_0)^2} - \frac{\langle \phi_0(a_i) | J_2 | \phi_E(a_i) \rangle \langle \phi_E(a_i) | J_1 | \phi_0(a_i) \rangle}{(E - E_0)^2} \right] \\ &+ E_2 i\hbar \sum_{E \neq E_0} \\ &\left[ \frac{\langle \phi_0(a_i) | J_2 | \phi_E(a_i) \rangle \langle \phi_E(a_i) | J_2 | \phi_0(a_i) \rangle}{(E - E_0)^2} - \frac{\langle \phi_0(a_i) | J_2 | \phi_E(a_i) \rangle \langle \phi_E(a_i) | J_2 | \phi_0(a_i) \rangle}{(E - E_0)^2} \right] \end{aligned} \quad (3.96)$$

Los coeficientes lineales en el campo eléctrico  $\vec{E}(t)$ , que suponemos constante y uniforme, son precisamente la conductancia longitudinal y la conductancia transversal o Hall. En definitiva, el valor esperado de la conductancia longitudinal y Hall en el estado fundamental descrito, a primer orden en la perturbación y en la aproximación adiabática, es:

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{12} \rangle_0 &= -i\hbar \sum_{E \neq E_0} \left[ \frac{\langle \phi_0 | J_1 | \phi_E \rangle \langle \phi_E | J_2 | \phi_0 \rangle}{(E - E_0)^2} - \frac{\langle \phi_0 | J_2 | \phi_E \rangle \langle \phi_E | J_1 | \phi_0 \rangle}{(E - E_0)^2} \right] \\ \langle \sigma_{11} \rangle_0 &= \langle \sigma_{22} \rangle_0 = 0 \end{aligned} \quad (3.97)$$

Esta es la fórmula de Kubo para la conductancia Hall. Da la respuesta lineal de la corriente en la dirección perpendicular al campo eléctrico aplicado [39, 124, 75].

Si el sistema de muchas partículas se encuentra en una superficie de área finita  $A = L_1 L_2$ , y suponiendo que el campo eléctrico externo es muy débil y uniforme, podemos determinar el flujo asociado:

$$\Phi_1(t) = -ctE_1L_1 \quad , \quad \Phi_2(t) = -ctE_2L_2$$

que en función de las variables angulares  $\theta_i$ ,  $i = 1, 2$  será:

$$\Phi_i(t) = \frac{\hbar c}{e} \theta_i(t) \quad , \quad i = 1, 2$$

Podemos calcular la variación del estado fundamental con los flujos:

$$\left| \frac{\partial \phi_0}{\partial \theta_i} \right\rangle = \frac{\mathcal{P}}{E_0 - H} \frac{\partial H}{\partial \theta_i} |\phi_0\rangle \quad (3.98)$$

donde  $\mathcal{P}$  representa que el estado fundamental queda excluido.

Esto nos permite expresar la conductividad Hall en función de las variables angulares:

$$\sigma_H(\theta_1, \theta_2) = \frac{e^2}{i\hbar} \left[ \left\langle \frac{\partial \phi_0}{\partial \theta_1} \left| \frac{\partial \phi_0}{\partial \theta_2} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \phi_0}{\partial \theta_2} \left| \frac{\partial \phi_0}{\partial \theta_1} \right\rangle \right] \quad (3.99)$$

esta es la fórmula de Kubo-Thouless para la conductividad Hall [101, 124].

Thouless argumenta que  $\sigma_H(\theta_1, \theta_2)$  no puede depender de las condiciones de contorno, determinadas por los flujos  $\Phi_1$  y  $\Phi_2$ , ya que los cambios en el borde de la muestra no se sienten en el interior de la misma cuando las longitudes de correlación de las partículas, en el estado fundamental, son exponencialmente pequeñas. En esta situación, es posible tomar como valor constante para la conductividad Hall el promedio a todos los posibles valores de  $\theta_1$  y  $\theta_2$ , es decir

$$\sigma_H = \frac{1}{2\pi i} \frac{e^2}{\hbar} \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^{2\pi} d\theta_2 \left[ \left\langle \frac{\partial \phi_0}{\partial \theta_1} \left| \frac{\partial \phi_0}{\partial \theta_2} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \phi_0}{\partial \theta_2} \left| \frac{\partial \phi_0}{\partial \theta_1} \right\rangle \right] \quad (3.100)$$

En ausencia de flujos y en la teoría relativista, el estado fundamental de muchas partículas viene dado por:  $\psi_0(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_N, \bar{z}_N)$ , que es un elemento del espacio de Fock fermiónico  $\mathcal{F}^{(N)}(\Gamma(S))$ .  $\Gamma(S)$  es el espacio de espinores de dos componentes de cuadrado integrable para una partícula en el plano; es decir, entendemos  $\Gamma(S)$  como el espacio de secciones de cuadrado integrable del fibrado trivial  $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{C}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ , donde  $\mathbf{R}^2$  es la base y  $\mathbf{C}^2$  la fibra.  $\mathbf{C}^2$  es el espacio en que se representa el grupo  $spin(1, 2; \mathbf{R})$ . De esta manera,  $\Psi_0$  será una sección del fibrado  $\mathbf{R}^{2N} \times \mathbf{C}^2 \rightarrow \mathbf{R}^{2N}$ , donde es posible definir un producto inducido:  $\langle | \rangle : \mathcal{F}^{(N)*} \otimes \mathcal{F}^{(N)} \rightarrow \mathbf{C}$ , que da lugar a una métrica hermítica en el fibrado espinorial.

Si introducimos los flujos encontramos que el estado fundamental dependerá también de dos variables angulares:  $\phi_0(\{z_I, \bar{z}_I\}; \theta_1, \theta_2)$ . Es decir, será una sección de un fibrado  $E$  definido sobre  $T^2 \times \mathbf{R}^{2N}$ , que localmente es  $T^2 \times \mathbf{R}^{2N} \times \mathbf{C}^2$ . Sobre las secciones de este fibrado está definida de manera natural una métrica hermítica [73]:

$$h(s_1, s_2) = \int_{T^2 \times \mathbf{R}^{2N}} s_1^\dagger s_2 \, dv_{T^2 \times \mathbf{R}^{2N}} \quad (3.101)$$

La integración en las coordenadas espaciales nos restringe  $h$  al subfibrado  $E_{T^2}$  de base  $T^2$ , de modo que para la sección  $s = |\phi_0(\{z_I, \bar{z}_I\}; \theta_1, \theta_2)\rangle$  tenemos:

$$h(s, s) = \int_{T^2} \langle \phi_0 | \phi_0 \rangle \, dv_{T^2} \quad (3.102)$$

donde

$$\langle \phi_0 | \phi_0 \rangle = \int_{\mathbf{R}^{2N}} \phi_0^\dagger(\{z_I, \bar{z}_I\}; \theta_1, \theta_2) \phi_0(\{z_I, \bar{z}_I\}; \theta_1, \theta_2) \, dv_{\mathbf{R}^{2N}} \quad (3.103)$$

Dada  $h(s, s)$  siempre le podemos asociar una conexión  $\omega = h^{-1} \partial h$ . Si la sección  $s$  es tal que  $|s| \equiv \langle \phi_0 | \phi_0 \rangle = 1$ , es decir, suponiendo que el estado fundamental está normalizado, la conexión sobre el fibrado restringido será de la forma,  $\omega$ ,  $\omega = \omega_{\theta_1} d\theta_1 + \omega_{\theta_2} d\theta_2$ , donde las componentes son:

$$\begin{aligned} \omega_{\theta_1} &= -i \langle \phi_0 | \frac{\partial \phi_0}{\partial \theta_1} \rangle = -i e^{-i\Lambda(\theta_1, \theta_2)} \frac{\partial}{\partial \theta_1} e^{i\Lambda(\theta_1, \theta_2)} \\ \omega_{\theta_2} &= -i \langle \phi_0 | \frac{\partial \phi_0}{\partial \theta_2} \rangle = -i e^{-i\Lambda(\theta_1, \theta_2)} \frac{\partial}{\partial \theta_2} e^{i\Lambda(\theta_1, \theta_2)} \end{aligned} \quad (3.104)$$

La conductividad Hall es precisamente la integral de la curvatura de esta conexión en el toro, [39, 27, 24]:

$$\begin{aligned} \sigma_H &= \frac{e^2}{2\pi h} \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^{2\pi} d\theta_2 [\partial_{\theta_1} \omega_{\theta_2} - \partial_{\theta_2} \omega_{\theta_1}] \\ &= \frac{e^2}{h} \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \vec{\nabla} \Lambda(\theta_1, \theta_2) \cdot d\vec{\theta} \end{aligned} \quad (3.105)$$

Y por tanto será, salvo un factor importante, la primera clase de Chern del fibrado restringido, y por extensión del fibrado  $E$ , que es trivial sobre  $\mathbf{R}^{2N}$ :

$$\sigma_H \equiv \frac{e^2}{h} c_1(E) \quad (3.106)$$

En definitiva, la conductividad Hall es un invariante topológico. Esto explica fundamentalmente dos cosas:

- La cuantización de la conductividad Hall:  $\sigma_H$  sólo puede tomar valores enteros en unidades de  $\frac{e^2}{h}$ .
- La existencia de mesetas en el Efecto Hall Cuántico entero: hemos visto que pequeñas variaciones en los flujos no inducen cambios importantes en la conductividad, que puede determinarse como el promedio sobre las distintas condiciones de contorno. Por tanto, aunque se modifique el factor de llenado del estado fundamental (variando los flujos) la conductividad Hall permanecerá constante hasta alcanzar el siguiente valor cuantizado.

Hemos estudiado la cuantización y existencia de mesetas en el Efecto Hall entero desde dos puntos de vista muy diferentes.

Por un lado, en la Sección 2.2.4 abordamos el problema de las impurezas en el contexto de la Mecánica Cuántica relativista pasando a Segunda Cuantificación. Conocido el espectro de una partícula en el plano, en presencia de un campo magnético uniforme y de una impureza, podemos distinguir dos tipos de estados: extensos y localizados.

Este esquema se basaba esencialmente en dos puntos:

- El estado fundamental, para cada factor de llenado, es un estado en el cual las partículas van ocupando los estados localizados y extensos siguiendo la estadística fermiónica. Es decir, el nivel de Fermi-Dirac es móvil, y pasa a través de la banda de estados localizados y extensos, correspondiente al primer nivel de Dirac-Landau, hasta que está totalmente ocupado.

Se trata, por tanto, de una situación estacionaria que se alcanza para cada factor de llenado cuando cambia la densidad de partículas o bien el campo magnético externo. Esta teoría permite reproducir el resultado experimental para la conductividad Hall correspondiente a la primera meseta, hasta alcanzar el factor de llenado  $f = 1$ .

- En este punto, es necesario redefinir el nivel de Fermi-Dirac para alcanzar el factor de llenado  $f = 2$ , y reproducir de nuevo el resultado experimental para la siguiente meseta.

Por otro lado, en este apartado hemos desarrollado el argumento propuesto por Thouless también en el contexto de la mecánica cuántica relativista. Hemos estudiado, así, el problema de una partícula en el plano en presencia de un campo magnético uniforme y de dos solenoides cuyos flujos son variables en el tiempo. En la aproximación adiabática, y teniendo en cuenta la periodicidad en los flujos

(consecuencia del efecto Aharonov-Bohm), podemos determinar el flujo espectral en el espectro de Dirac cuando éstos varían.

Pero nos interesa más el problema de muchas partículas. Si suponemos que el sistema se encuentra en el estado fundamental, podemos calcular a primer orden en teoría de perturbaciones el valor esperado de la corriente, y encontramos una expresión para la conductividad Hall, la fórmula de Kubo-Thouless.

Dos aspectos fundamentan este análisis:

- Podemos determinar el coeficiente Hall conociendo simplemente cómo cambia el estado fundamental con los flujos.
- La hipótesis de Thouless: el valor esperado de la conductividad Hall en el estado fundamental es independiente de la variación en los flujos. Puede calcularse así como el promedio sobre las condiciones de contorno posibles. Encontramos que la conductividad Hall es un invariante topológico.

La hipótesis de Thouless tiene su fundamento en el fenómeno de la localización: pequeños cambios en los flujos (en el factor de llenado) no afectan a la conductividad Hall porque las partículas ocupan estados localizados.

Es posible conectar estos dos análisis:

Consideremos el problema de una partícula en el plano en presencia de impurezas y de los flujos, descrito por la ecuación de Dirac. Aunque no es posible determinar de manera exacta el espectro en esta situación, podemos suponer, en la aproximación adiabática y teniendo en cuenta la periodicidad en los flujos, que la energía de cada nivel de Dirac-Landau separa en una banda que depende del valor de los flujos. Esto será cierto también para el primer nivel de Dirac-Landau, correspondiente a los modos cero, ya que en presencia de impurezas estos estados se verán afectados por los flujos a diferencia del caso *libre*.

El estado fundamental correspondiente a factor de llenado,  $f = 0$ , en Segunda Cuantificación, es decir, el vacío, permite definir el mar de Dirac: todos los estados con energía negativa están completamente ocupados.

Podemos definir también el nivel de Fermi-Dirac: nivel de energía situado entre el mar de Dirac y el primer estado de partícula no ocupado [93].

Cuando empieza a pasar corriente a través de la muestra las partículas ocupan los estados localizados de mínima energía. El nivel de Fermi-Dirac es ahora un nivel móvil sobre la banda de estados localizados. El factor de llenado aumenta hasta  $f \approx 1/2$  sin que se produzca disipación, y por tanto, sin contribuir a la conductividad Hall. A continuación se llenan los estados extensos y la conductividad Hall



aumenta y alcanza el primer valor cuantizado:  $\sigma_H = \frac{e^2}{h}$ . Continúan llenándose los estados localizados hasta completar el primer nivel de Dirac-Landau. El nivel de Fermi-Dirac se encontrará ahora entre dos niveles de Dirac-Landau consecutivos.

Si sobre este estado fundamental aplicamos la teoría de Thouless resulta que, mientras que la conductividad Hall no cambia como consecuencia de la variación de los flujos, en el espectro de una partícula se produce un flujo espectral que permite redefinir el mar de Dirac. Es decir, una vez ocupado completamente el primer nivel de Dirac-Landau, se produce una variación adiabática en los flujos de forma que el espectro se modifica: el primer nivel pasa a tener energía cero (es decir, pasa al mar de Dirac), y el siguiente nivel de energía pasa a tener la energía del primer nivel, y así sucesivamente para todos los niveles del espectro. El nivel de Fermi-Dirac se encontrará ahora entre el nuevo mar de Dirac y el segundo nivel de Dirac-Landau.

Además, dado que el sistema es invariante gauge, esta variación en los flujos induce una fase sobre la función de onda del estado fundamental. Debemos identificar la fase del estado fundamental correspondiente a las superficies de Fermi antes y después de producirse la variación en los flujos [93]. Esta fase está definida salvo un factor  $2\pi n$  como consecuencia del carácter angular de las variables  $\theta_1$  y  $\theta_2$ ;  $n$  (número de vueltas), en este caso será  $n = 1$ , correspondiente a tener un nivel completamente lleno.

Repetimos ahora el análisis partiendo del estado con factor de llenado uno (nuevo *vacío*): comienzan a ocuparse los estados localizados y extensos de la siguiente banda (correspondiente al segundo nivel de Dirac-Landau), el nivel de Fermi-Dirac recorre dichos estados y alcanzamos así la siguiente meseta:  $\sigma_H = 2\frac{e^2}{h}$ . Cuando tenemos dos niveles completamente ocupados el nivel de Fermi-Dirac se encontrará de nuevo entre dos niveles de energía consecutivos y una pequeña variación en los flujos permite, como consecuencia del flujo espectral, redefinir el mar de Dirac y el nivel de Fermi. El cambio de fase en la función de onda corresponde ahora a  $n = 2$ . Y así, sucesivamente.

### 3.4 Cuasipartículas: El problema de la jerarquía

En la primera Sección de este capítulo estudiamos la conexión entre la teoría de R.B. Laughlin para el Efecto Hall Cuántico Fraccionario y el formalismo de Segunda Cuantificación desarrollado en el Capítulo 2. Encontramos que el es-

tado fundamental propuesto por Laughlin podía expresarse como una combinación lineal de estados de una partícula (correspondientes al primer nivel de Dirac-Landau), y por tanto, era posible describir este estado en Segunda Cuantificación. El valor esperado de la densidad de carga en este estado, en el límite de área infinita, nos llevaba al resultado esperado para la conductividad Hall correspondiente a un factor de llenado fraccionario  $f = \frac{1}{m}$  con  $m$  impar. Sin embargo, esto no permite explicar la presencia de mesetas para estos factores de llenado, ni tampoco para otros factores de llenado fraccionarios distintos que han sido observados experimentalmente.

Las mesetas del efecto Hall fraccionario para  $f = \frac{1}{m}$  pueden explicarse considerando la localización de las excitaciones del estado fundamental de Laughlin, es decir, las cuasi-partículas (cuasi-agujeros ó cuasi-electrones) [81, 82]. Estas excitaciones tienen carga y estadística fraccionaria: son aniones. Halperin [54] y Haldane [51], desde puntos de vista diferentes, proponen el esquema de la jerarquía para explicar todos los factores de llenado fraccionarios observados experimentalmente. En particular, Halperin desarrolla una teoría en la que supone la condensación de muchas cuasi-partículas en estados correlacionados del mismo tipo que el estado de Laughlin para electrones, pero con la diferencia de que en este caso las partículas tienen estadística fraccionaria.

En este apartado revisaremos brevemente la teoría de Laughlin sobre las cuasi-partículas [82]. Demostraremos, utilizando el concepto de la fase de Berry, que tienen carga y estadística fraccionaria basándonos en la aproximación utilizada por D.P. Arovas *et al* [6]. Y por último, revisaremos la generalización de la teoría de R. B. Laughlin a toda una jerarquía de estados cuantizados con un factor de llenado fraccionario,  $f = \frac{p}{q}$ , con  $p$  y  $q$  primos entre sí, y  $q$  impar, tal que,  $0 < f < 1$ .

El estado propuesto por Laughlin es el estado fundamental para un sistema de  $N$  partículas fuertemente correlacionadas entre sí. Es propio del momento angular total con:  $J_3 = \hbar \left( \frac{N(N-1)}{2} m + N \frac{1}{2} \right)$ , donde  $m$  es el inverso del factor de llenado. Se trata de un fluido incompresible para un número finito de partículas, que en el límite de área infinita, y suponiendo que el fluido tiene una densidad uniforme, describe el efecto Hall cuántico fraccionario para los factores de llenado  $f = \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \dots$ .

Cualquier variación de la densidad de carga respecto de la del estado fundamental (para un factor de llenado  $f \approx \frac{1}{m}$ ) se traduce en la creación de cuasi-partículas o excitaciones localizadas. Para obtener estas excitaciones supongamos, como propone Laughlin, que en el estado fundamental introducimos un solenoide infinitesimalmente fino en  $z_0$ , a través del cual hacemos pasar adiabáticamente un

cuanto de flujo  $\phi_0$ , de forma que el estado del sistema sigue siendo un autoestado instantáneo del Hamiltoniano cambiante. Esta variación del flujo desde  $\phi = 0$  hasta  $\phi = \phi_0$  produce un campo eléctrico circular alrededor de  $z_0$  de forma que las partículas fluyen hacia dentro o hacia fuera (dependiendo del signo del flujo) acumulándose una carga positiva o negativa alrededor de  $z_0$ . Pero este cambio en un cuanto de flujo puede compensarse con una transformación gauge, y así, el estado resultante será un estado excitado del Hamiltoniano original [81, 85].

Las funciones de onda aproximadas propuestas por Laughlin para describir un estado de factor de llenado  $f = \frac{1}{m}$  con un cuasi-agujero o un cuasi-electrón en  $z_0$  son:

$$\begin{aligned}\Psi_{N,\frac{1}{m}}^{z_0^+}(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_N, \bar{z}_N) &= \prod_{I=1}^N (z_I - z_0) \Psi_{N,\frac{1}{m}}(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_N, \bar{z}_N) \\ \Psi_{N,\frac{1}{m}}^{z_0^-}(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_N, \bar{z}_N) &= \prod_{I=1}^N (l^2 \frac{\partial}{\partial z_I} - \bar{z}_0) \Psi_{N,\frac{1}{m}}(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_N, \bar{z}_N)\end{aligned}\quad (3.107)$$

donde  $\Psi_{N,\frac{1}{m}}(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_N, \bar{z}_N)$ , (3.31), es la primera componente del espinor del estado fundamental en la teoría relativista de muchas partículas desarrollada en la Sección 3.1, que coincide exactamente con la función de onda de Laughlin del problema no-relativista. En la función de onda para el cuasi-electrón los operadores diferenciales no actúan sobre el factor exponencial de  $\Psi_{N,\frac{1}{m}}$ .

En el caso de que las cuasi-partículas se encuentren en el origen podemos determinar el momento angular total para este estado, (3.107), que será:  $J_3 = \hbar \left( \frac{N(N-1)}{2} m + N + N \frac{1}{2} \right)$  y  $J_3 = \hbar \left( \frac{N(N-1)}{2} m - N + N \frac{1}{2} \right)$  para los cuasi-agujeros y cuasi-electrones respectivamente. Es decir, se produce, como consecuencia de la variación del flujo en el solenoide, un desplazamiento de las partículas en el primer nivel de Dirac-Landau aumentando o disminuyendo su momento angular orbital.

La carga y la estadística de las cuasipartículas puede determinarse de forma directa utilizando el concepto de la fase de Berry como proponen Arovas *et al* [6]. Estos autores, para determinar la carga de las cuasi-partículas, calculan el cambio en la fase de la función de onda propuesta por Laughlin cuando la posición de la cuasi-partícula  $z_0$  se mueve adiabáticamente describiendo un camino cerrado. Como la fase que adquiere una partícula cargada en un camino cerrado en presencia de un campo magnético es de tipo Aharanov-Bohm, y por tanto, proporcional a su carga, igualando estas fases puede determinarse la carga de la cuasipartícula.

Antes de abordar este cálculo recordemos brevemente el concepto de la fase de Berry. Se trata de un refinamiento del teorema adiabático de la mecánica cuántica. El teorema adiabático establece que si variamos lentamente los parámetros del

Hamiltoniano un estado que se encuentre en un nivel de energía dado permanecerá en ese nivel [132]. Es decir, consideremos un Hamiltoniano dependiente del tiempo  $H(t)$ , si en un instante  $t_0$  el sistema se encuentra en un autoestado instantáneo  $\psi_\alpha(t_0)$ , tal que

$$H(t)\psi_\alpha(t) = E_\alpha\psi_\alpha(t)$$

En la aproximación adiabática, el sistema en un instante  $t$  se encontrará en el estado:

$$\Psi_\alpha(t) = e\left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' E_\alpha(t') - i\gamma_\alpha\right] \psi_\alpha(t) \quad (3.108)$$

donde la fase  $\gamma_\alpha$  es:

$$\gamma_\alpha = -i \int_{t_0}^t dt' \langle \psi_\alpha(t') | \frac{d\psi_\alpha(t')}{dt'} \rangle \quad (3.109)$$

La fase  $\gamma_\alpha$  generalmente no es observable [116]. Sin embargo, como puso de manifiesto Berry, si el Hamiltoniano resultante tras una transformación adiabática vuelve a su forma original, este cambio en la fase de la función de onda sí es observable en el límite adiabático. Esta fase depende sólo de la geometría del camino descrito por la función de onda en el espacio de funciones, y no de la parametrización. Es la fase geométrica de Berry.

La fase de Berry para la función de onda de un cuasi-agujero será, por tanto,

$$\begin{aligned} \gamma &= -i \int_{t_0}^t dt' \langle \Psi_{N, \frac{1}{m}}^{z_0^+}(t') | \frac{d\Psi_{N, \frac{1}{m}}^{z_0^+}(t')}{dt'} \rangle \\ &= -i \int_{t_0}^t dt' \langle \Psi_{N, \frac{1}{m}}^{z_0^+}(t') | \sum_{I=1}^N \frac{d}{dt'} \ln(z_I - z_0(t')) | \Psi_{N, \frac{1}{m}}^{z_0^+}(t') \rangle \end{aligned} \quad (3.110)$$

donde la integral se evalúa desde el instante inicial  $t_0$  hasta el instante  $t$  en el cual el cuasi-agujero vuelve a su posición inicial después de recorrer un camino cerrado no trivial (donde se ha tomado el sentido antihorario).

Para evaluar esta integral utilizamos que la densidad de electrones en el estado con un cuasi-agujero es:

$$n(z) = \langle \Psi_{N, \frac{1}{m}}^{z_0^+}(t) | \sum_{I=1}^N \delta^{(2)}(z - z_I) | \Psi_{N, \frac{1}{m}}^{z_0^+}(t) \rangle \quad (3.111)$$

Esto equivale a considerar  $N$  partículas puntuales no-relativistas localizadas en los puntos  $z_I$  [85]. Si pasamos al límite no-relativista en nuestra teoría encontramos que tanto el estado fundamental como sus excitaciones vienen descritos por las funciones de onda propuestas por Laughlin para el problema no-relativista. En este límite podemos considerar la densidad de partículas (3.111).

Sustituyendo la expresión (3.111) en (3.110), resulta:

$$\begin{aligned}\gamma &= -i \int_{t_0}^t dt' \int d^2z \frac{d}{dt'} \ln(z - z_0(t')) n(z) \\ &= -i \int d^2z \oint_{\Gamma} dz_0 \frac{1}{z_0 - z} n(z)\end{aligned}\quad (3.112)$$

Es posible evaluar esta integral, suponiendo que  $n(z)$  es una función regular [6], y teniendo en cuenta que la densidad de partículas en este estado es esencialmente la misma que en el estado fundamental (con factor de llenado  $f = \frac{1}{m}$ ) salvo en una pequeña región próxima al cuasi-agujero y en el borde de la muestra:

$$\gamma = 2\pi \int_{<\Gamma} d^2z n(z) = 2\pi N \equiv 2\pi \frac{1}{m} \frac{eB}{hc} A \quad (3.113)$$

donde  $N = nA$  es el promedio de electrones que hay en el recinto limitado por  $\Gamma$ ,  $A$  es el área de este recinto, y se ha tomado  $n \equiv \frac{1}{m} \frac{eB}{hc}$ . Tenemos así la fase de Berry para la función de onda de un cuasi-agujero.

Por otro lado, es posible calcular la fase que adquiere la función de onda de una partícula de carga  $q$  que se mueve a lo largo de un camino cerrado  $\Gamma$  que encierra un flujo  $\phi$ . Como consecuencia del efecto Aharonov-Bohm resulta [114, 85]:

$$e^{-i \frac{q}{\hbar c} \int_{\Gamma} d\vec{r} \cdot \vec{A}} = e^{-i \frac{q}{\hbar c} \int d^2r B} = e^{-i \frac{q\phi}{\hbar c}} \quad (3.114)$$

Igualando ambas fases:  $e^{-i\gamma}$  y  $e^{-i \frac{q\phi}{\hbar c}}$ , encontramos que la carga del cuasi-hueco es:<sup>6</sup>

$$q = \frac{e}{m} \quad (3.115)$$

La carga de un cuasi-agujero puede entenderse como la carga media por estado, es decir, la carga de las cuasi-partículas y la densidad de carga del estado fundamental son esencialmente lo mismo [81].

El cálculo de la carga del cuasi-electrón es un poco más complicado aunque requiere esencialmente las mismas hipótesis que hemos tenido en cuenta para determinar la carga del cuasi-agujero [85]. Así, la fase de Berry para la función de onda de un cuasi-electrón es:

$$\begin{aligned}\gamma &= -i \int_{t_0}^t dt' \int d^2z \frac{d}{dt'} \ln(\bar{z} - \bar{z}_0) n(z) \\ &= -i \int d^2z \oint_{\Gamma} d\bar{z}_0 \frac{1}{\bar{z}_0 - \bar{z}} n(z) \\ &= -2\pi \int_{<\Gamma} d^2z n(z) = -2\pi N = -2\pi \frac{1}{m} \frac{eB}{hc} A\end{aligned}\quad (3.116)$$

<sup>6</sup>Donde  $q = -e$  es la carga del electrón.

Identificando esta fase con la fase Aharonov-Bohm resulta para la carga de un cuasi-electrón:

$$q = -\frac{e}{m} \quad (3.117)$$

Este resultado, que hemos obtenido bajo la hipótesis adiabática y en el límite no-relativista, coincide con el resultado obtenido por Laughlin utilizando la analogía del plasma equivalente para estas funciones de onda [81].

Un cálculo muy similar puede llevarse a cabo para determinar qué estadística satisfacen las cuasipartículas. Para ello consideremos un estado con dos cuasi-huecos localizados en  $z_a$  y  $z_b$ , la función de onda que describe este estado excitado es:

$$\Psi_{N, \frac{1}{m}}^{z_a^+, z_b^+}(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_N, \bar{z}_N) = \prod_{I=1}^N (z_I - z_a)(z_I - z_b) \Psi_{N, \frac{1}{m}}(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_N, \bar{z}_N) \quad (3.118)$$

Supongamos que el cuasi-agujero situado en  $z_a$  se mueve adiabáticamente recorriendo un camino cerrado  $\Gamma$  mientras que el otro cuasi-agujero permanece fijo en  $z_b$ . La función de onda adquiere una fase de Berry que será:

$$\begin{aligned} \gamma &= -i \int_{t_0}^t dt' \langle \Psi_{N, \frac{1}{m}}^{z_a^+, z_b^+}(t') | \frac{d\Psi_{N, \frac{1}{m}}^{z_a^+, z_b^+}(t')}{dt'} \rangle \\ &= 2\pi \int_{<\Gamma} d^2z n(z) \end{aligned} \quad (3.119)$$

donde

$$n(z) = \langle \Psi_{N, \frac{1}{m}}^{z_a^+, z_b^+}(t) | \sum_{I=1}^N \delta^{(2)}(z - z_I) | \Psi_{N, \frac{1}{m}}^{z_a^+, z_b^+}(t) \rangle \quad (3.120)$$

Si en la región limitada por  $\Gamma$  no se encuentra el otro cuasi-agujero, el resultado coincide exactamente con el obtenido, es decir  $\gamma = 2\pi N$ , donde  $N = nA$ . En el caso contrario, con el cuasi-agujero  $z_b$  interior a  $\Gamma$ , el camino es homotópicamente no trivial, y resulta:

$$\gamma = 2\pi \int_{<\Gamma} d^2z n(z) = 2\pi \left( N - \frac{1}{m} \right) \quad (3.121)$$

ya que el promedio de electrones interiores a  $\Gamma$  disminuye en una fracción  $\frac{1}{m}$  como consecuencia de la presencia del cuasi-agujero situado en  $z_b$ .

Cuando un cuasi-agujero (localizado en  $z_a$ ) rodea a otro (localizado en  $z_b$ ) la función de onda adquiere una fase extra que puede interpretarse como una fase estadística [85]:

$$e^{-i\gamma} = e^{2\pi i \frac{1}{m}} \quad (3.122)$$

La fracción  $\frac{1}{m}$  está perfectamente definida como consecuencia de la incompresibilidad del estado fundamental, en particular no depende de los detalles del camino cerrado  $\Gamma$  sino sólo de su clase de homotopía, de tal manera que la fase (3.122) puede interpretarse como un efecto estadístico. Hemos encontrado, por tanto, que las cuasipartículas satisfacen estadística fraccionaria  $\frac{1}{m}$ . Es decir, las excitaciones del estado fundamental de Laughlin están caracterizadas por una estadística que numéricamente coincide con el factor de llenado de  $\psi_{N, \frac{1}{m}}$ . Este hecho permitirá deducir el esquema de jerarquía de Halperin [54] que describe de forma sistemática las distintas fracciones observadas experimentalmente en el efecto Hall cuántico.

La hipótesis de Halperin para desarrollar este esquema jerárquico es suponer que las excitaciones del estado fundamental de Laughlin, las cuasipartículas, se comportan de manera similar a los electrones en presencia de un campo magnético uniforme. La diferencia está en la carga ( $q = \frac{e}{m}$ ) y la estadística ( $\frac{1}{m}$ ) de las cuasipartículas. Bajo esta hipótesis es natural suponer que la autofunción efectiva para dos cuasi-huecos localizados en  $z_a$  y  $z_b$  es:

$$\Psi^+(z_a, z_b) \approx (z_a - z_b)^{m_1} e^{-\frac{1}{2ml^2}(|z_a|^2 + |z_b|^2)} \quad (3.123)$$

donde  $m_1 = \frac{1}{m} + 2p_1$  con  $p_1$  un entero no negativo. El factor exponencial es el adecuado para partículas con carga  $\frac{e}{m}$  en presencia de un campo magnético uniforme, pues la longitud magnética será ahora  $l_q^2 = ml^2$ . Bajo el intercambio de dos cuasi-huecos el factor  $(z_a - z_b)^{m_1}$  produce la fase requerida,  $e^{i\pi m_1} \equiv e^{i\pi \frac{1}{m}}$ , para partículas de estadística  $\frac{1}{m}$ .

Esta función de onda efectiva para cuasi-huecos resulta de integrar  $\psi_{N, \frac{1}{m}}^{z_a^+, z_b^+}$  en las coordenadas  $z_I$  de los electrones del estado fundamental sobre el que se forman las cuasi-partículas [85]. Siguiendo los mismos argumentos de Laughlin es posible generalizar para un número arbitrario de cuasi-huecos y así:

$$\Psi_{M, \frac{1}{mm_1}}^+ = \prod_{a < b}^M (z_a - z_b)^{m_1} e^{-\frac{1}{2ml^2} \sum_{a=1}^M |z_a|^2} \quad (3.124)$$

Es decir, el estado  $\psi_{M, \frac{1}{mm_1}}^+$  describe un fluido incompresible de cuasi-huecos con carga  $\frac{e}{m}$  y estadística  $\frac{1}{m}$ . El factor de llenado para este estado se determina de forma análoga al del estado de Laughlin, y se encuentra que es  $f_q = \frac{1}{mm_1}$ . La carga total de cuasi-huecos es  $q_1 = \frac{e}{m} \frac{1}{mm_1}$  (en un área  $\pi l^2$ ), y por tanto, el factor

de llenado para el sistema de electrones pasará de  $f = \frac{1}{m}$  a:

$$f_1 = f - \frac{q_1}{e} = \frac{1}{m} - \frac{1}{m^2 m_1} = \frac{1}{m + \frac{1}{2p_1}} \quad (3.125)$$

donde  $-\frac{q_1}{e}$  es precisamente el número de electrones necesario para producir una carga de cuasi-huecos  $q_1$ . Este es el factor de llenado para electrones resultante de la formación de un sistema incompresible de excitaciones tipo cuasi-agujero sobre el estado fundamental de factor de llenado  $f = \frac{1}{m}$ . En particular, para  $m = 3$  y  $p_1 = 1$  resulta un estado con  $f_1 = \frac{2}{7}$  que es una de las fracciones observadas experimentalmente. Es importante tener en cuenta que la función de onda efectiva que hemos considerado no describe un estado de electrones con factor de llenado  $f_1$ , sino que se trata de una autofunción de cuasi-huecos cuyo factor de llenado está relacionado con el factor de llenado efectivo del sistema de electrones. Además, es interesante observar que el factor de llenado de cuasi-huecos  $f_q = \frac{1}{mm_1}$  se corresponde con la estadística de estas partículas,  $\frac{1}{m}$ , como el factor de llenado del estado fundamental  $f = \frac{1}{m}$  con la estadística de Fermi de los electrones. Es posible generalizar esta construcción a toda una jerarquía de estados considerando excitaciones sobre excitaciones sucesivamente. Por ejemplo, podemos construir un estado formado con excitaciones cuasi-agujero del estado  $\psi_{M, \frac{1}{mm_1}}$ . La carga de estas excitaciones será  $q' = -\frac{e}{mm_1}$  y su estadística  $\frac{1}{m_1}$ . La autofunción de onda efectiva será:

$$\Psi_{M', \frac{1}{mm_1 m_2}}^{++} = \prod_{a' < b'}^{M'} (z'_a - z'_b)^{m_2} e^{-\frac{1}{2mm_1 l^2} \sum_{a'=1}^{M'} |z'_a|^2} \quad (3.126)$$

con  $m_2 = \frac{1}{m_1} + 2p_2$  y  $p_2$  un entero no negativo. Siguiendo el mismo procedimiento encontramos que el factor de llenado para el sistema de electrones será:

$$f_2 = f - \frac{1}{m^2 m_1} - \frac{1}{mm_1} \frac{1}{mm_1 m_2} = \frac{1}{m + \frac{1}{2p_1 + \frac{1}{2p_2}}} \quad (3.127)$$

En general, el factor de llenado para el sistema electrones en cualquier estado de la jerarquía es [51]:

$$f = \frac{1}{m + \frac{\alpha_1}{2p_1 + \frac{\alpha_2}{2p_2 + \frac{\alpha_3}{2p_3 + \dots}}}} \quad (3.128)$$



donde  $\alpha_i = +1$  si la generación  $i$ -ésima es de cuasi-huecos o  $\alpha_i = -1$  si es de cuasi-electrones respecto del fluido fundamental de partida, el estado de Laughlin para electrones. Esta jerarquía reproduce todas las fracciones observadas experimentalmente.

En resumen:

- La teoría de R. B. Laughlin para el Efecto Hall Fraccionario explica sólo un pequeño número de factores de llenado comparado con los observados experimentalmente.
- Halperin y Haldane proponen un esquema de jerarquía que permite explicar otros factores de llenado.

El esquema de Halperin es una aproximación basada en la condensación de cuasi-partículas de estadística fraccionaria. La hipótesis básica de esta aproximación es considerar que para ciertos factores de llenado las cuasi-partículas forman un estado correlacionado de tipo Laughlin. Las cuasi-partículas de este nuevo estado incompresible pueden formar de nuevo un estado de Laughlin para otro factor de llenado, y así sucesivamente, se obtienen los distintos niveles de la jerarquía. Tenemos, por tanto, estabilidad para todos los factores de llenado racionales,  $0 < \frac{p}{q} < 1$  con  $p$  y  $q$  son primos entre sí y  $q$  impar. Para estos factores de llenado debe observarse el efecto Hall fraccionario.

Un tratamiento alternativo de este problema ha sido propuesto por Jain [66]. Desde el punto de vista de Jain, la teoría de Halperin presenta algunos problemas:

- A diferencia de la teoría de Laughlin no existe una teoría microscópica que permita implementar las ideas de esta aproximación.
- Uno de los resultados básicos en los que se basa esta teoría es que las cuasi-partículas obedecen estadística fraccionaria. Sin embargo, sólo si la distancia entre cuasi-partículas es grande comparada con su tamaño podemos hablar de partículas con estadística y carga definidas, es decir, cuando tenemos un gas diluido de cuasipartículas. Para formar un estado de tipo Laughlin se necesita un gran número de cuasi-partículas fuertemente correlacionadas, en estas circunstancias es posible que las cuasi-partículas pierdan su identidad. Esto lógicamente se complica a medida que avanzamos en la jerarquía.
- No todas las fracciones que aparecen en la jerarquía son observadas experimentalmente. Y además, se observan fracciones correspondientes a un nivel de

la jerarquía sin que todas las fracciones anteriores en principio más probables hayan sido observadas.

- Por último, experimentalmente no parece existir ninguna diferencia cualitativa entre la observación de distintas fracciones. Jain propone que el origen físico del Efecto Hall Entero y Fraccionario debe ser el mismo.

En la Segunda Parte de esta memoria analizaremos en detalle la teoría propuesta por J.K. Jain para explicar el Efecto Hall Cuántico Fraccionario. En contraposición al estado de Laughlin no es posible obtener los estados de cuasi-partículas y cuasi-hueco mediante la acción de operadores de creación y destrucción de electrones. Para describir las cuasi-partículas en Segunda Cuantificación será necesario introducir operadores no locales, formalismo que desarrollaremos en la Sección 5.2.

## Parte II

# TEORIA CUANTICA DE CAMPOS DEL EFECTO HALL CUANTICO: SUPERFICIES DE RIEMANN



# Capítulo 4

## Inclusión de Fluxones

Un avance crucial en la comprensión del Efecto Hall Cuántico Fraccionario se debe a la teoría de Jain [66, 67, 68, 69]. Jain propone un esquema teórico que permite entender los Efectos Entero y Fraccionario como dos manifestaciones diferentes de la misma física subyacente. De forma que es posible estudiar el Efecto Fraccionario de electrones como el Efecto Entero de *fermiones compuestos*, donde los *fermiones compuestos* son estados ligados de un electrón y un número par de vórtices. En este planteamiento hay esencialmente dos tipos de correlaciones para el Efecto Hall Cuántico Fraccionario, por un lado, la formación de *fermiones compuestos* que permite incorporar el efecto de las interacciones repulsivas, y, por otro lado, la incompresibilidad de este sistema de *fermiones compuestos*, que está asociada a la estadística de Fermi de las partículas compuestas. Tenemos así los ingredientes necesarios para describir el Efecto Hall Cuántico Fraccionario para todas las fracciones  $f = \frac{n}{2mn+1}$  como el Efecto Hall Cuántico Entero de factor de llenado  $f^* = n$  para los *fermiones compuestos*.

En las Secciones de este capítulo desarrollaremos de forma general el estudio de una partícula fermiónica en presencia de un número arbitrario de fluxones (solenoides infinitamente finos y largos con un número entero de cuantos de flujo). Esto nos permitirá abordar en el siguiente Capítulo el estudio en electrodinámica cuántica del Efecto Hall Cuántico Entero para los *fermiones compuestos*. Calcularemos, pues, el espectro y las funciones de onda propias para el Hamiltoniano de Schrödinger con fluxones. Analizaremos en detalle la transformación singular que relaciona este problema con el problema *libre* (ausencia de fluxones). Estudiaremos también la simetría infinita característica de este tipo de sistemas. Y por último, estudiaremos el problema relativista descrito por el Hamiltoniano de Dirac en (2+1)dimensiones para una partícula sin masa en presencia de fluxones.

Por último, daremos la generalización de esta teoría al problema del Efecto Hall Cuántico cuando consideramos más de una muestra de material o equivalentemente cuando consideramos varios niveles de Landau independientes al tiempo [129, 130, 131, 135].

## 4.1 Ecuación de Schrödinger

El Hamiltoniano de Schrödinger para una partícula cargada, en el plano, en presencia de un campo magnético constante y uniforme,  $B$ , perpendicular al mismo, y en presencia de  $r$  fluxones situados en los puntos del plano  $z_{\nu}, \nu = 1, 2, \dots, r$ , con  $2p$  cuantos de flujo cada uno ( $p$  un entero), es

$$\tilde{H} = \frac{1}{2m} \left[ \vec{p} + \frac{e}{c} (\vec{A} + \vec{a}) \right]^2 \quad (4.1)$$

donde  $\vec{A} = (\frac{B}{2}x_2, -\frac{B}{2}x_1)$  es el potencial vector para el campo magnético externo tomado en el gauge simétrico; y  $\vec{a} = (a_1, a_2)$  es el potencial vector asociado a los solenoides, que tomaremos:

$$\begin{aligned} a &= a_1 + ia_2 = 0 \\ \bar{a} &= a_1 - ia_2 = i2p\phi_0 \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=1}^r \frac{1}{z - z_{\nu}} \end{aligned} \quad (4.2)$$

El campo magnético asociado a este potencial vector complejo es:

$$b = i \left( \frac{\partial}{\partial z} a - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \bar{a} \right) = 2p\phi_0 \sum_{\nu=1}^r \delta^{(2)}(z - z_{\nu}) \quad (4.3)$$

que representa la presencia de  $r$  solenoides con flujo  $2p\phi_0$  situados en los puntos  $z_{\nu}$  del plano.

Para encontrar el espectro y las funciones de onda propias de este Hamiltoniano es conveniente introducir un conjunto de operadores análogos a los que teníamos en ausencia de fluxones,  $a, a^{\dagger}, b, b^{\dagger}$ , pero modificados de forma que incluyan la presencia de los solenoides [35, 38]. Los nuevos operadores, que denotaremos por  $\tilde{A}, \tilde{A}^{\dagger}, \tilde{B}, \tilde{B}^{\dagger}$ , son:

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \frac{i}{\sqrt{\hbar m \omega}} \left( p_z + \frac{e}{2c} A \right) \equiv a \\ \tilde{A}^{\dagger} &= \frac{-i}{\sqrt{\hbar m \omega}} \left( p_z + \frac{e}{2c} (\bar{A} + \bar{a}) \right) \equiv a^{\dagger} + 2pl \sum_{\nu=1}^r \frac{1}{z - z_{\nu}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{B} &= \frac{i}{\sqrt{\hbar m \omega}} \left( p_z - \frac{e}{2c} (\bar{A} + \bar{a}) \right) \equiv b - 2pl \sum_{\nu=1}^r \frac{1}{z - z_{\nu}} \\ \tilde{B}^{\dagger} &= \frac{-i}{\sqrt{\hbar m \omega}} \left( p_{\bar{z}} - \frac{e}{2c} A \right) \equiv b^{\dagger}\end{aligned}\quad (4.4)$$

donde

$$\begin{aligned}a &= \frac{1}{2l} \left( z + 2l^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right), \quad a^{\dagger} = \frac{1}{2l} \left( \bar{z} - 2l^2 \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ b &= \frac{1}{2l} \left( \bar{z} + 2l^2 \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad b^{\dagger} = \frac{1}{2l} \left( z - 2l^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)\end{aligned}\quad (4.5)$$

Los operadores  $\tilde{B}$  y  $\tilde{B}^{\dagger}$ , así como  $\tilde{A}$  y  $\tilde{A}^{\dagger}$ , no son hermíticos conjugados, y sus relaciones de conmutación contienen términos con una delta en cada uno de los puntos donde se encuentran los solenoides:

$$\begin{aligned}[\tilde{A}, \tilde{A}^{\dagger}] &= 1 + 2p\pi l^2 \sum_{\nu=1}^r \delta^{(2)}(z - z_{\nu}) \\ [\tilde{B}, \tilde{B}^{\dagger}] &= 1 - 2p\pi l^2 \sum_{\nu=1}^r \delta^{(2)}(z - z_{\nu})\end{aligned}\quad (4.6)$$

El Hamiltoniano y el nuevo *momento angular* en la dirección perpendicular al plano pueden expresarse en función de estos operadores:

$$\begin{aligned}\tilde{H} &= \hbar\omega(\tilde{A}^{\dagger}\tilde{A} + \tilde{A}\tilde{A}^{\dagger}) \\ \tilde{L}_3 &= \hbar(\tilde{B}^{\dagger}\tilde{B} - \tilde{A}^{\dagger}\tilde{A})\end{aligned}\quad (4.7)$$

En representación de coordenadas estos operadores pueden expresarse como

$$\begin{aligned}\tilde{H} &= H + \hbar\omega 4pl \sum_{\nu=1}^r \frac{1}{z - z_{\nu}} a + \hbar\omega 2p\pi l^2 \sum_{\nu=1}^r \delta^{(2)}(z - z_{\nu}) \\ \tilde{L}_3 &= L_3 - \hbar 2p \sum_{\nu=1}^r \frac{1}{z - z_{\nu}} z + \hbar 2p\pi l^2 \sum_{\nu=1}^r \delta^{(2)}(z - z_{\nu})\end{aligned}\quad (4.8)$$

donde  $H$  y  $L_3$  son el Hamiltoniano y momento angular para el problema de Landau en el plano.

Estos dos sistemas  $\{\tilde{H}, \tilde{L}_3\}$  y  $\{H, L_3\}$  están relacionados por una transformación gauge singular. Teniendo en cuenta que el potencial vector asociado a los fluxones es un gauge puro resulta:

$$\begin{aligned}\bar{a} &= \frac{\partial}{\partial z} \alpha(z) \\ \alpha(z) &= i2p \frac{\phi_0}{\pi} \sum_{\nu=1}^r \ln(z - z_{\nu})\end{aligned}\quad (4.9)$$

Tenemos así la transformación gauge singular:

$$\mathcal{G}_p(z) = e^{i\lambda\alpha(z)} \equiv \prod_{l'=1}^r (z - z_{l'})^{2p} \quad (4.10)$$

que es singular siempre que la partícula se acerca a alguno de los fluxones ( $z \rightarrow z_{l'}$ ).

Se puede comprobar fácilmente que la relación entre los operadores de ambos sistemas es, en general:

$$\tilde{O} = \mathcal{G}_p(z) O \mathcal{G}_p^{-1}(z) \quad (4.11)$$

donde  $\tilde{O} = \{\tilde{A}, \tilde{A}^\dagger, \tilde{B}, \tilde{B}^\dagger, \tilde{H}, \tilde{L}_3\}$  y  $O = \{a, a^\dagger, b, b^\dagger, H, L_3\}$ .

De esta manera, teniendo en cuenta que el problema de Landau en el plano está completamente resuelto, y que conocemos tanto el espectro como las funciones de onda normalizadas, conoceremos también el espectro y las funciones de onda para el sistema de una partícula con fluxones. De nuevo el espectro está formado por los niveles de Landau infinitamente degenerados:

$$\tilde{E}_k \equiv E_k = \hbar\omega(2k + 1), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.12)$$

Las funciones de onda propias de  $\tilde{H}$  vienen dadas por:

$$\tilde{\Psi}_{km}(z, \bar{z}) = \mathcal{G}_p(z) \Psi_{km}(z, \bar{z}) = \prod_{l'=1}^r (z - z_{l'})^{2p} \Psi_{km}(z, \bar{z}) \quad (4.13)$$

y son propias también del operador  $\tilde{L}_3$  con autovalor  $\tilde{l}_3 \equiv l_3 = \hbar m$ , donde  $m$  es un entero tal que  $m \geq -k$ , y caracteriza la degeneración de cada nivel de energía.

Por tanto, la inclusión de fluxones parece que no modifica esencialmente el problema de Landau, salvo en dos puntos importantes: las funciones de onda para este sistema se anulan en las posiciones de los solenoides, y, debemos introducir una nueva medida de integración en el espacio de configuración que ortonormalice la base de las funciones de onda, para que la teoría que estamos describiendo sea consistente [35, 38]. En consecuencia:

$$\langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle \equiv \int \Psi_1^\dagger(z, \bar{z}) \mu(z, \bar{z}) \Psi_2(z, \bar{z}) \frac{dz d\bar{z}}{2i} \quad (4.14)$$

donde

$$\mu(z, \bar{z}) = \prod_{l'=1}^r |z - z_{l'}|^{-4p} \quad (4.15)$$

Con la nueva medida de integración  $\mu(z, \bar{z}) \frac{dz d\bar{z}}{2i}$  las funciones de onda verifican

$$\int \tilde{\Psi}_{km}^\dagger(z, \bar{z}) \tilde{\Psi}_{k'm'}(z, \bar{z}) \mu(z, \bar{z}) \frac{dz d\bar{z}}{2i} = \delta_{kk'} \delta_{mm'} \quad (4.16)$$



Como en el problema de Landau, los operadores  $\{\tilde{A}, \tilde{A}^\dagger, \tilde{B}, \tilde{B}^\dagger\}$  actúan sobre los estados como operadores escalera, de forma que:

$$\begin{aligned}
 \tilde{A}\tilde{\Psi}_{km}(z, \bar{z}) &= \sqrt{k} \tilde{\Psi}_{k-1, m+1}(z, \bar{z}) \\
 \tilde{A}^\dagger\tilde{\Psi}_{km}(z, \bar{z}) &= \sqrt{k+1} \tilde{\Psi}_{k+1, m-1}(z, \bar{z}) \\
 \tilde{B}\tilde{\Psi}_{km}(z, \bar{z}) &= \sqrt{k+m} \tilde{\Psi}_{k, m-1}(z, \bar{z}) \\
 \tilde{B}^\dagger\tilde{\Psi}_{km}(z, \bar{z}) &= \sqrt{k+m+1} \tilde{\Psi}_{k, m+1}(z, \bar{z})
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

Es posible determinar también la densidad de estados posibles para cada nivel de energía teniendo en cuenta la nueva medida de integración, y así, resultará:

$$\begin{aligned}
 \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{\Psi}_{0m}^*(z, \bar{z}) \mu(z, \bar{z}) \tilde{\Psi}_{0m}(z, \bar{z}) &= \frac{eB}{hc} \\
 \sum_{m=-k}^{\infty} \tilde{\Psi}_{km}^*(z, \bar{z}) \mu(z, \bar{z}) \tilde{\Psi}_{km}(z, \bar{z}) &= \frac{eB}{hc}
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

es decir, el número de estados posibles por unidad de área y por espín para cada nivel de Landau es constante, proporcional al campo magnético externo, e idéntico al que teníamos en ausencia de fluxones.

Hemos visto, por tanto, que el problema de una partícula cargada, en presencia de un campo magnético externo uniforme y de fluxones con un número par de cuantos de flujo, se reduce, por medio de una transformación gauge singular, al problema de Landau. El precio que debemos pagar al eliminar de la teoría el potencial gauge complejo se traduce esencialmente en dos aspectos:

- Las funciones de onda modificadas contienen un prefactor que se anula cuando la partícula se aproxima a uno de los vórtices. Esto puede entenderse como un efecto de la interacción repulsiva entre la partícula y los solenoides. Como veremos más adelante, al considerar el problema de muchas partículas, podremos interpretar este resultado suponiendo que la propia partícula tiene asociado un solenoide al igual que todas las demás. Así, será posible estudiar el sistema de muchas partículas compuestas (partícula más vórtice) como un problema libre en el cual la interacción entre las partículas queda incluida en la presencia de los vórtices asociados a cada partícula [66].

Por otro lado, una partícula en presencia de un solenoide en el plano puede tener estadística aniónica [85]. En el problema de una partícula no tiene sentido hablar de la estadística, pero es posible calcular el cambio en la fase de la función de onda, cuando la partícula recorre un camino cerrado que

contiene uno o más solenoides. Como consecuencia del efecto Aharonov-Bohm la función de onda adquiere la fase:

$$\exp\left(-i\frac{e}{\hbar c}\int_{\Gamma}d\vec{x}\cdot\vec{A}\right)=\exp\left(-i\frac{e}{\hbar c}\int_{\Gamma}d^2xB\right)=e^{i4\pi p} \quad (4.19)$$

si suponemos que  $\Gamma$  encierra un sólo solenoide. La fase, que puede calcularse directamente a partir de la función de onda, depende del flujo que pasa a través del solenoide, en este caso es un número par de cuantos de flujo, y por tanto, la fase será trivial.

- La medida de integración en el espacio de Hilbert debe modificarse e introducir una nueva medida que presenta una singularidad en los puntos en los que se encuentran los solenoides. Con esta nueva medida, las funciones de onda están normalizadas. Y, como veremos en la siguiente Sección, el Hamiltoniano y el *momento angular* son operadores hermíticos conjugados respecto de la misma.

Por último, plantearemos la generalización de esta teoría al problema de muchas capas o muestras donde es posible observar el Efecto Hall. Supongamos, pues, que tenemos  $q$  muestras independientes, que denotaremos por  $i = 1, 2, \dots, q$ , estas muestras son bidimensionales y están sometidas a un campo magnético uniforme y perpendicular a todas ellas de intensidad  $B$ . Además, supongamos que en cada una de las capas tenemos  $r$  solenoides (consideraremos, por simplicidad, el mismo número de fluxones en cada capa aunque puede generalizarse y considerar un número distinto de fluxones en cada una de ellas), cada uno con un número entero y par de cuantos de flujo, de tal manera que una partícula moviéndose en una de las capas siente la presencia no sólo de los solenoides situados en la misma capa sino también la de los situados en las demás capas [130].

Esta situación podemos implementarla fácilmente considerando para la capa  $i$ -ésima, en la que se encuentra la partícula, junto con el potencial vector externo, el potencial vector complejo asociado a los solenoides dado por:

$$a^i = 0$$

$$\bar{a}^i = \frac{\Phi_0}{\pi} \left\{ -\sum_{j \neq i} A_{ij} \sum_{l'=1}^r \frac{1}{z^i - z_{l'}^j} - A_{ii} \sum_{l'=1}^r \frac{1}{z^i - z_{l'}^i} \right\} \quad (4.20)$$

donde  $z^i$  representa la coordenada de la partícula en la capa  $i$ -ésima,  $z_{l'}^i$  es la coordenada de uno de los  $r$  solenoides situados en la capa  $i$ -ésima con  $-A_{ii}$  cuantos

de flujo, y  $z_{l'}^j$  es la coordenada de uno de los  $r$  solenoides situados en la capa  $j$ -ésima, con  $j \neq i$ , con un número de cuantos de flujo  $-A_{ij}$ . Tenemos, pues, una matriz  $A$ ,  $q \times q$ , cuyas componentes representan los cuantos de flujos asociados a los solenoides de las  $q$  capas, como veremos en el problema de muchas partículas esta matriz necesariamente toma valores en los enteros, y además es de la forma [38]:

$$A = -2p \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

El campo magnético asociado a este potencial complejo es:

$$b^i = -A_{ii}\Phi_0 \sum_{l'=1}^r \delta^{(2)}(z^i - z_{l'}^i) - \sum_{j \neq i}^q A_{ij}\Phi_0 \sum_{l'=1}^r \delta^{(2)}(z^i - z_{l'}^j) \quad (4.22)$$

Una vez más es posible relacionar por medio de una transformación gauge singular este sistema con el problema *libre* de Landau, esta transformación singular es ahora:

$$\mathcal{G}_A(z^i) = e^{i\lambda\alpha(z^i)} \equiv \prod_{i < j}^q \prod_{l'=1}^r (z^i - z_{l'}^j)^{2p} \prod_{l'=1}^r (z^i - z_{l'}^i)^{2p} \quad (4.23)$$

donde  $\bar{a}^i = \frac{\partial}{\partial z^i} \alpha(z^i)$ . Y tenemos por tanto:

$$\tilde{O}^i = \mathcal{G}_A(z^i) O^i \mathcal{G}_A^{-1}(z^i) \quad (4.24)$$

donde  $\tilde{O}^i = \{\tilde{A}^i, \tilde{A}^{i\dagger}, \tilde{B}^i, \tilde{B}^{i\dagger}, \tilde{H}^i, \tilde{L}_3^i\}$  y  $O^i = \{a^i, a^{i\dagger}, b^i, b^{i\dagger}, H^i, L_3^i\}$ . Que en particular para los operadores  $\tilde{B}^i, \tilde{B}^{i\dagger}$  se traduce en:

$$\begin{aligned} \tilde{B}^i &= b^i + l \sum_{j \neq i}^q A_{ij} \sum_{l'=1}^r \frac{1}{z^i - z_{l'}^j} + l A_{ii} \sum_{l'=1}^r \frac{1}{z^i - z_{l'}^i} \\ \tilde{B}^{i\dagger} &= b^{i\dagger} \end{aligned} \quad (4.25)$$

El espectro es el mismo (niveles de Landau infinitamente degenerados). Las funciones de onda propias, sin embargo, adquieren un prefactor singular en cada uno de los puntos donde se encuentran los solenoides, tanto en la misma capa donde está la partícula, como en cada una de las otras capas, así:

$$\tilde{\Psi}_{km}(z^i, \bar{z}^i) = \mathcal{G}_A(z^i) \Psi_{km}(z^i, \bar{z}^i) = \prod_{i < j}^q \prod_{l'=1}^r (z^i - z_{l'}^j)^{2p} \prod_{l'=1}^r (z^i - z_{l'}^i)^{2p} \Psi_{km}(z^i, \bar{z}^i) \quad (4.26)$$

donde  $\Psi_{km}(z^i, \bar{z}^i)$  es la función de onda para el problema *libre*.

Es necesario introducir una nueva medida de integración  $\mu(z^i, \bar{z}^i) \frac{dz^i d\bar{z}^i}{2i}$  de forma que las funciones de onda satisfacen de nuevo:

$$\int \tilde{\Psi}_{km}^\dagger(z^i, \bar{z}^i) \tilde{\Psi}_{k'm'}(z^i, \bar{z}^i) \mu(z^i, \bar{z}^i) \frac{dz^i d\bar{z}^i}{2i} = \delta_{kk'} \delta_{mm'} \quad (4.27)$$

con

$$\mu(z^i, \bar{z}^i) = \prod_{i < j}^q \prod_{l'=1}^r |z^i - z_l^j|^{-4p} \prod_{l'=1}^r |z^i - z_{l'}^i|^{-4p} \quad (4.28)$$

Esta generalización permite, como veremos en el siguiente Capítulo, estudiar el problema de Efecto Hall Fraccionario para muchas partículas, en un sistema Hall formado por  $q$  capas, como el Efecto Entero de *fermiones compuestos* en este sistema de diferentes fluidos de tipo Hall independientes. Se obtiene de esta forma el estado fundamental correspondiente a los factores de llenado  $f = \frac{q}{2pq+1}$ , formado únicamente por funciones de onda del primer nivel de Landau en cada capa, y aparece un término de interacción entre capas debida únicamente a la interacción de cada partícula con los solenoides o fluxones de las demás capas.

## 4.2 Simetrías $w_\infty$ y $W_\infty$ con operadores singulares

En la Sección 4.1 hemos visto que tanto las funciones de onda, como los operadores para el problema de Landau, en presencia y ausencia de fluxones, están relacionados por una transformación singular:

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(z, \bar{z}) &= \mathcal{G}_p(z) \Psi(z, \bar{z}) \\ \tilde{O} &= \mathcal{G}_p(z) O \mathcal{G}_p^{-1} \end{aligned} \quad (4.29)$$

donde

$$\mathcal{G}_p(z) = \prod_{l'=1}^r (z - z_{l'})^{2p} \quad (4.30)$$

Esta transformación gauge que relaciona ambos sistemas es singular cuando  $z \rightarrow z_{l'}$ , y por tanto, estará bien definida siempre que  $z \neq z_{l'}$  [35], condición que está relacionada, como veremos en el problema de muchas partículas, con la estadística de Fermi de las partículas compuestas. Por otro lado, se trata de una transformación singular no unitaria, y así:

$$\mathcal{G}_p^\dagger \mathcal{G}_p = \prod_{l'=1}^r |z - z_{l'}|^{4p} = \mu(z, \bar{z})^{-1} \quad (4.31)$$

donde  $\mu(z, \bar{z})$  es la medida de integración no trivial que introducimos en la Sección anterior. Esta medida de integración es necesaria además para que los nuevos operadores  $\tilde{B}$ ,  $\tilde{B}^\dagger$  y  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{A}^\dagger$  sean hermíticos conjugados entre sí [38]:

$$\begin{aligned}\tilde{B}^\dagger &= \mu(z, \bar{z})(\tilde{B})^\dagger \mu(z, \bar{z})^{-1}, \quad \tilde{B} = \mu(z, \bar{z})(\tilde{B}^\dagger)^\dagger \mu(z, \bar{z})^{-1} \\ \tilde{A}^\dagger &= \mu(z, \bar{z})(\tilde{A})^\dagger \mu(z, \bar{z})^{-1}, \quad \tilde{A} = \mu(z, \bar{z})(\tilde{A}^\dagger)^\dagger \mu(z, \bar{z})^{-1}\end{aligned}\quad (4.32)$$

Y por tanto, el Hamiltoniano y el momento angular verifican, como era de esperar:

$$\tilde{H}^\dagger = \mu(z, \bar{z})(\tilde{H})^\dagger \mu(z, \bar{z})^{-1} = \tilde{H} \quad \tilde{L}_3^\dagger = \mu(z, \bar{z})(\tilde{L}_3)^\dagger \mu(z, \bar{z})^{-1} = \tilde{L}_3 \quad (4.33)$$

En definitiva, la transformación singular no unitaria induce una medida de integración no trivial, tal que:

$$\begin{aligned}\langle \Psi | \Phi \rangle &= \int \Psi^\dagger \mu \Phi \\ \tilde{O}^\dagger &= \mu(\tilde{O})^\dagger \mu^{-1}\end{aligned}\quad (4.34)$$

Dado que el sistema resultante, tras realizar esta transformación singular, es esencialmente el problema de Landau, será conveniente estudiar las *traslaciones magnéticas* y la simetría infinita presentes en este sistema [19]. Comenzaremos analizando la simetría clásica para el problema de Landau con fluxones. En primer lugar, notemos que el análogo clásico de la transformación singular no unitaria es una transformación no canónica y compleja en el espacio de fases (complejo) tal que:

$$\begin{aligned}z &\rightarrow z, & \bar{z} &\rightarrow \bar{z} \\ p_z &\rightarrow p_z + i2p \left( \frac{e\phi_0}{2\pi c} \right) \sum_{\nu=1}^r \frac{1}{z - z_\nu}, & p_{\bar{z}} &\rightarrow p_{\bar{z}}\end{aligned}\quad (4.35)$$

equivalente a introducir un potencial vector complejo no local  $\bar{a}$  (4.2).

Introducimos en el espacio de fases las nuevas variables  $(\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}^*, \tilde{\beta}, \tilde{\beta}^*)$ :

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha} &= \alpha \\ \tilde{\alpha}^* &= \alpha^* + 2p \left( \frac{e\phi_0}{2\pi c} \right) \sum_{\nu=1}^r \frac{1}{z - z_\nu} \\ \tilde{\beta} &= \beta - 2p \left( \frac{e\phi_0}{2\pi c} \right) \sum_{\nu=1}^r \frac{1}{z - z_\nu} \\ \tilde{\beta}^* &= \beta^*\end{aligned}\quad (4.36)$$

donde  $(\alpha, \alpha^*, \beta, \beta^*)$  son las correspondientes al problema de Landau en ausencia de fluxones (1.66).

En función de estas variables, el Hamiltoniano será:

$$\tilde{H} = \frac{1}{m}(\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}^* + \tilde{\alpha}^*\tilde{\alpha}) \quad (4.37)$$

tal que

$$\begin{aligned} \{\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}^*\} &= -i \left( \frac{eB}{2c} \right) - i2p \left( \frac{e\phi_0}{2c} \right) \sum_{\nu=1}^r \delta^{(2)}(z - z_{\nu}) \\ \{\tilde{\beta}, \tilde{\beta}^*\} &= -i \left( \frac{eB}{2c} \right) + i2p \left( \frac{e\phi_0}{2c} \right) \sum_{\nu=1}^r \delta^{(2)}(z - z_{\nu}) \end{aligned} \quad (4.38)$$

donde aparecen las deltas asociadas a cada solenoide.

Las *traslaciones magnéticas* son la verdadera simetría del nuevo Hamiltoniano y están generadas por:

$$\tilde{t}_{c_1, c_2} = e^{i(c_1\tilde{\beta}_1 + c_2\tilde{\beta}_2)} \quad (4.39)$$

donde  $\tilde{\beta} = \frac{1}{2}(\tilde{\beta}_1 + i\tilde{\beta}_2)$ , o bien,

$$\tilde{t}_{c, \bar{c}} = e^{c\tilde{\beta} - \bar{c}\tilde{\beta}^*} \quad (4.40)$$

con  $c = c_1 + ic_2$ . Estos generadores satisfacen el álgebra clásica  $\omega_{\infty}$  modificada:

$$\{\tilde{t}_{c_1, c_2}, \tilde{t}_{d_1, d_2}\} = \frac{eB}{c} (c_1 d_2 - c_2 d_1) \left( 1 - 2p \left( \frac{\phi_0}{B} \right) \sum_{\nu=1}^r \delta^{(2)}(z - z_{\nu}) \right) \tilde{t}_{c_1+d_1, c_2+d_2} \quad (4.41)$$

Si desarrollamos en serie la exponencial para  $\tilde{t}_{c, \bar{c}}$  resulta:

$$\tilde{t}_{c, \bar{c}} = e^{-\bar{c}\tilde{\beta}^*} e^{c\tilde{\beta}} = \sum_{n, m=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\bar{c}^n c^m}{n!m!} (\tilde{\beta}^*)^n \tilde{\beta}^m \quad (4.42)$$

tenemos, así, infinitas transformaciones canónicas generadas por

$$\tilde{\mathcal{L}}_{nm} = (\tilde{\beta}^*)^{n+1} \tilde{\beta}^{m+1} \quad (4.43)$$

que satisfacen el álgebra clásica  $w_{\infty}$  modificada por las deltas:

$$\begin{aligned} \{\tilde{\mathcal{L}}_{nm}, \tilde{\mathcal{L}}_{kl}\} &= i \frac{eB}{2c} [(n+1)(l+1) - (m+1)(k+1)] \times \\ &\quad \left( 1 - 2p \left( \frac{\phi_0}{B} \right) \sum_{\nu=1}^r \delta^{(2)}(z - z_{\nu}) \right) \tilde{\mathcal{L}}_{n+k, m+l} \end{aligned} \quad (4.44)$$

Estas transformaciones actúan de manera no trivial en un subespacio bidimensional del espacio de fases. Tomando  $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}^* = 0$  este subespacio será:  $\tilde{\beta} = 2i \left( p_z + \frac{e}{2c} \bar{a} \right) \equiv \frac{eB}{2c} \bar{z}$  y  $\tilde{\beta}^* = \frac{eB}{2c} z$ , donde  $\bar{a}$  es el potencial vector complejo asociado a los solenoides. Las nuevas variables satisfacen el álgebra:

$$\left\{ z, 2 \left( p_z + \frac{e}{2c} \bar{a} \right) \right\} = 1 \quad (4.45)$$

es decir, en el espacio de fases reducido no aparecen las deltas en el álgebra de las nuevas variables.

Si pasamos al problema cuántico, las variables  $\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}^*$  y  $\tilde{\beta}, \tilde{\beta}^*$  serán ahora operadores que, reescalando, coinciden precisamente con los operadores (4.4) que introducimos en la Sección anterior, en función de los cuales:

$$\tilde{H} = \hbar\omega(\tilde{A}\tilde{A}^\dagger + \tilde{A}^\dagger\tilde{A}), \quad \omega = \frac{eB}{2mc} \quad (4.46)$$

Estos operadores satisfacen las siguientes relaciones de conmutación:

$$\begin{aligned} [\tilde{A}, \tilde{A}^\dagger] &= 1 + 2p(\pi l^2) \sum_{\nu=1}^r \delta^{(2)}(z - z_\nu) \\ [\tilde{B}, \tilde{B}^\dagger] &= 1 - 2p(\pi l^2) \sum_{\nu=1}^r \delta^{(2)}(z - z_\nu) \end{aligned} \quad (4.47)$$

Los operadores  $\tilde{B}, \tilde{B}^\dagger$  son los generadores infinitesimales de las *traslaciones magnéticas* para este sistema de una partícula en presencia de fluxones, ya que  $[\tilde{B}, \tilde{H}] = [\tilde{B}^\dagger, \tilde{H}] = 0$ . El operador que genera las *traslaciones magnéticas* finitas, es:

$$\tilde{T}_{c\bar{c}} = e^{(c\tilde{B} - \bar{c}\tilde{B}^\dagger)} \quad (4.48)$$

tal que

$$\tilde{T}_{c\bar{c}}\tilde{T}_{d\bar{d}} = e^{\frac{1}{2}[\tilde{B}, \tilde{B}^\dagger](c\bar{d} - d\bar{c})}\tilde{T}_{c+d, \bar{c}+\bar{d}} \quad (4.49)$$

O bien, si lo expresamos en la forma

$$\tilde{T}_{c_1 c_2} = e^{(c_1 \tilde{B}_1 + c_2 \tilde{B}_2)} \quad (4.50)$$

donde  $\tilde{B} = \frac{1}{2}(\tilde{B}_2 + i\tilde{B}_1)$ , encontramos que estos operadores satisfacen el álgebra modificada:

$$[\tilde{T}_{c_1 c_2}, \tilde{T}_{d_1 d_2}] = 2i \sin \left( [\tilde{B}, \tilde{B}^\dagger](c\bar{d} - \bar{d}c) \right) \tilde{T}_{c_1+d_1, c_2+d_2} \quad (4.51)$$

y en el límite  $\hbar \rightarrow 0$  se recupera el álgebra clásica  $w_\infty$  (4.41).

Sobre las funciones de onda, estos operadores, expresados en representación de coordenadas, actúan de la forma:

$$\tilde{T}_{c\bar{c}}\tilde{\Psi}(z, \bar{z}) = e^{\frac{1}{2l}(c\bar{z}-\bar{c}z)}\tilde{\Psi}(z+cl, \bar{z}+\bar{c}l) \quad (4.52)$$

Los operadores que generan la simetría infinita se pueden calcular fácilmente a partir del generador de las *traslaciones magnéticas* que podemos expresar<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{c\bar{c}} &= e^{-\frac{1}{2}c\bar{c}[\tilde{B}, \tilde{B}^\dagger]} e^{-\bar{c}\tilde{B}^\dagger} e^{c\tilde{B}} \\ \tilde{T}_{c\bar{c}} &= e^{-\frac{1}{2}c\bar{c}[\tilde{B}, \tilde{B}^\dagger]} \sum_{n,m=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\bar{c}^n c^m}{n!m!} (\tilde{B}^\dagger)^n \tilde{B}^m \end{aligned} \quad (4.53)$$

Los operadores  $\tilde{\mathcal{L}}_{nm}$ , definidos de la forma

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}_{nm} &= (\tilde{B}^\dagger)^{n+1} \tilde{B}^{m+1}, \quad n, m \leq -1 \\ [\tilde{H}, \tilde{\mathcal{L}}_{nm}] &= 0 \end{aligned} \quad (4.54)$$

generan la simetría infinita y satisfacen las relaciones de conmutación:

$$[\tilde{\mathcal{L}}_{nm}, \tilde{\mathcal{L}}_{kl}] = \hbar[\tilde{B}, \tilde{B}^\dagger]((m+1)(k+1) - (n+1)(l+1))\tilde{\mathcal{L}}_{n+k, m+l} + \mathcal{O}(\hbar^2) \quad (4.55)$$

A primer orden en  $\hbar$  tenemos el álgebra clásica  $w_\infty$ , las deformaciones cuánticas de este álgebra reciben el nombre de álgebra  $W_\infty$ , que en este caso aparece modificada por la presencia de términos que contienen deltas, debido a la presencia de los fluxones.

Los operadores  $\tilde{\mathcal{L}}_{0-1}$  y  $\tilde{\mathcal{L}}_{-10}$  son los generadores infinitesimales de las *traslaciones magnéticas*, y  $(\tilde{\mathcal{L}}_{00} - \tilde{A}^\dagger \tilde{A})$  es el generador de las *rotaciones*. Los demás operadores generan transformaciones de coordenadas *cuasi-locales* [19].

Si elevamos al nivel cuántico la reducción del espacio de fases clásico, nos quedaremos en uno de los niveles de Landau, concretamente en el primer nivel de Landau. Si  $\tilde{A} = \tilde{A}^\dagger = 0$ , resultará:

$$\tilde{B} = 2l \left[ \frac{\partial}{\partial z} - p \sum_{\nu=1}^r \frac{1}{z - z_\nu} \right] \equiv \frac{\bar{z}}{l}, \quad \tilde{B}^\dagger = \frac{z}{l} \quad (4.56)$$

y por tanto

$$[\tilde{B}, \tilde{B}^\dagger] = 1 \quad (4.57)$$

---

<sup>1</sup>Donde hemos utilizado la fórmula de Campbell-Hausdorff-Baker.



es decir, estos operadores satisfacen las mismas reglas de conmutación que los operadores  $b$  y  $b^\dagger$  en ausencia de fluxones. Los generadores de simetría en este espacio reducido son

$$\tilde{\mathcal{L}}_{nm} = 2^{m+1} l^{m-n} z^{n+1} \left[ \frac{\partial}{\partial z} - p \sum_{\nu=1}^r \frac{1}{z - z_\nu} \right]^{m+1} \quad (4.58)$$

en cuyas relaciones de conmutación no aparecen las deltas.

En resumen, añadir un número arbitrario de fluxones equivale a realizar una transformación singular que induce una nueva medida de integración en el espacio de Hilbert.

Debido a esta equivalencia, el sistema presenta, como el problema de Landau, una simetría infinita, que clásicamente está caracterizada por un subgrupo de transformaciones canónicas, que satisfacen el álgebra  $w_\infty$  modificada a través de términos que contienen deltas. Si nos quedamos en el espacio de fases reducido, recuperamos totalmente el resultado del problema *libre*. Cuánticamente tenemos un conjunto infinito de operadores que actúan de manera no trivial en cada nivel de Landau, y que satisfacen las relaciones de conmutación propias del álgebra cuántica  $W_\infty$ , una vez más con las modificaciones correspondientes a la presencia de los solenoides, que desaparecerán si reducimos la teoría al primer nivel de Landau.

Todo este estudio de las simetrías puede implementarse fácilmente al problema más general en el que consideramos varias capas con una partícula. En ese caso, la singularidad no aparece sólo en los puntos correspondientes al plano en el que se mueve la partícula, sino también en todos los puntos de las demás capas donde tenemos fluxones, que interactúan con la partícula considerada.

### 4.3 Ecuación de Dirac

Supongamos que el comportamiento de las partículas en el material puede describirse por la ecuación de Dirac para fermiones sin masa, en presencia de un campo magnético constante externo, y en presencia también de los fluxones con un número par de cuantos de flujo. Tenemos, en (2+1) dimensiones, la ecuación matricial:

$$\gamma^\mu \left( p_\mu + \frac{e}{c} (A_\mu + a_\mu) \right) \psi(x) = 0 \quad (4.59)$$

donde  $\psi(x)$  es un espinor de dos componentes,  $A^\mu = (A^0, \vec{A})$  es el potencial vector asociado al campo gauge externo, y  $a^\mu = (a^0, \vec{a})$  es el potencial vector asociado

a los solenoides en el plano. Las matrices de Dirac ( $2 \times 2$ ) las tomamos en la representación (1.94).

En el gauge de Weyl,  $A_0 = 0$  y  $a_0 = 0$ , el Hamiltoniano de Dirac es:

$$\tilde{H}_D^0 = \vec{\alpha}(c\vec{p} + e(\vec{A} + \vec{a})) \quad (4.60)$$

donde  $\vec{a}$  es el potencial vector complejo (4.2),  $\vec{A}$  es el potencial vector del campo externo que tomaremos en el gauge simétrico, y las matrices  $\vec{\alpha}$  son  $\alpha_1 = -\sigma_2$  y  $\alpha_2 = \sigma_1$ .

En forma matricial tenemos:

$$\tilde{H}_D^0 = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{D} \\ \tilde{D}^\dagger & 0 \end{pmatrix} \quad (4.61)$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{D} &= (cp_2 + e(A_2 + a_2)) + i(cp_1 + e(A_1 + a_1)) \\ \tilde{D}^\dagger &= (cp_2 + e(A_2 + a_2)) - i(cp_1 + e(A_1 + a_1)) \end{aligned} \quad (4.62)$$

Estos operadores pueden expresarse en función de  $\tilde{A}$  y  $\tilde{A}^\dagger$  de la forma:

$$\begin{aligned} \tilde{D} &= -\sqrt{2ecB\hbar} \tilde{A}^\dagger \\ \tilde{D}^\dagger &= -\sqrt{2ecB\hbar} \tilde{A} \end{aligned} \quad (4.63)$$

y así tenemos, en definitiva, que el Hamiltoniano de Dirac será:

$$\tilde{H}_D^0 = -\sqrt{2ecB\hbar} \begin{pmatrix} 0 & \tilde{A}^\dagger \\ \tilde{A} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.64)$$

Dado que el potencial vector complejo es un gauge puro, encontramos que el Hamiltoniano de Dirac, para una partícula sin masa en un campo externo y en presencia de  $r$  fluxones, es el transformado por  $\mathcal{G}_p(z)$  del Hamiltoniano *libre*, y así:

$$\tilde{H}_D^0 = \mathcal{G}_p(z) H_D^0 \mathcal{G}_p^{-1}(z) \quad (4.65)$$

Conocemos, por tanto, el espectro y los espinores propios para este problema, que se obtienen a partir de los del problema de Dirac-Landau por la transformación gauge, es decir,

$$\tilde{E}_k \equiv E_k = \pm\sqrt{2keB\hbar c}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.66)$$

es el espectro, y una base de espinores propios será:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\psi}_{km}^{\pm}(z, \bar{z}) &= \mathcal{G}_p(z)\psi_{km}^{\pm}(z, \bar{z}) = \prod_{l'=1}^r (z - z_{l'})^{2p} \psi_{km}^{\pm}(z, \bar{z}) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \tilde{\Psi}_{km}(z, \bar{z}) \\ \mp \tilde{\Psi}_{k-1, m+1}(z, \bar{z}) \end{pmatrix}, \quad k \neq 0 \\
 \tilde{\psi}_{0m}(z, \bar{z}) &= \mathcal{G}_p(z)\psi_{0m}(z, \bar{z}) = \prod_{l'=1}^r (z - z_{l'})^{2p} \psi_{0m}(z, \bar{z}) \\
 &= \begin{pmatrix} \tilde{\Psi}_{0m}(z, \bar{z}) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad k = 0
 \end{aligned} \tag{4.67}$$

donde  $\tilde{\Psi}_{km}(z, \bar{z})$  y  $\tilde{\Psi}_{0m}(z, \bar{z})$  son las funciones de onda propias del Hamiltoniano de Schrödinger en presencia de fluxones (4.13).

Una vez más, cada nivel de energía está infinitamente degenerado, pero ahora la degeneración viene caracterizada por el momento angular total, que en este sistema no será sino el transformado gauge del momento angular para el problema *libre*. Así,

$$\tilde{J}_3 = \mathcal{G}_p(z)J_3\mathcal{G}_p^{-1}(z) \tag{4.68}$$

donde  $J_3 = L_3 + S_3$ , siendo  $S_3 = \frac{\hbar}{2}\sigma_3$ . En función de los operadores  $\{\tilde{A}, \tilde{A}^\dagger, \tilde{B}, \tilde{B}^\dagger\}$  será:

$$\tilde{J}_3 = \hbar(\tilde{B}^\dagger\tilde{B} - \tilde{A}^\dagger\tilde{A})I + \frac{\hbar}{2}\sigma_3 \tag{4.69}$$

con  $I$  la matriz identidad ( $2 \times 2$ ).

Los espinores propios del Hamiltoniano son propios del momento angular total transformado con autovalor:

$$\begin{aligned}
 \tilde{J}_3\tilde{\psi}_{km}^{\pm}(z, \bar{z}) &= \hbar\left(m + \frac{1}{2}\right)\tilde{\psi}_{km}^{\pm}(z, \bar{z}), \quad k \neq 0, m \geq -k \\
 \tilde{J}_3\tilde{\psi}_{0m}(z, \bar{z}) &= \hbar\left(m + \frac{1}{2}\right)\tilde{\psi}_{0m}(z, \bar{z}), \quad k = 0, m \geq 0
 \end{aligned} \tag{4.70}$$

Este sistema presenta, igualmente, la simetría infinita que estudiamos para la teoría no-relativista. Así, tanto las *traslaciones magnéticas* como los operadores  $\mathcal{L}_{nm}$  que generan la simetría  $W_\infty$  conmutan con  $\tilde{H}_D^0$ . Los generadores infinitesimales de esta simetría,  $\tilde{B}^\dagger$  y  $\tilde{B}$ , sobre la base de espinores actúan de la forma:

$$\begin{aligned}
 \tilde{B}\tilde{\psi}_{km}^{(\pm)}(z, \bar{z}) &= \sqrt{k+m}\tilde{\psi}_{k, m-1}^{(\pm)}(z, \bar{z}) \\
 \tilde{B}\tilde{\psi}_{0m}(z, \bar{z}) &= \sqrt{m}\tilde{\psi}_{0, m-1}(z, \bar{z}) \\
 \tilde{B}^\dagger\tilde{\psi}_{km}^{(\pm)}(z, \bar{z}) &= \sqrt{k+m+1}\tilde{\psi}_{k, m+1}^{(\pm)}(z, \bar{z}) \\
 \tilde{B}^\dagger\tilde{\psi}_{0m}(z, \bar{z}) &= \sqrt{m+1}\tilde{\psi}_{0, m+1}(z, \bar{z})
 \end{aligned} \tag{4.71}$$

Para que la base de espinores propios del Hamiltoniano de Dirac, en presencia de fluxones, sea ortonormal, es necesario introducir la nueva medida de integración, no trivial, en el espacio de espinores (análogamente a (4.2)). Así

$$\begin{aligned}
\int \mu(z, \bar{z}) \frac{dzd\bar{z}}{2i} \tilde{\psi}_{km}^{\pm \dagger}(z, \bar{z}) \tilde{\psi}_{k'm'}^{\pm}(z, \bar{z}) &= \delta_{kk'} \delta_{mm'} \\
\int \mu(z, \bar{z}) \frac{dzd\bar{z}}{2i} \tilde{\psi}_{0m}^{\dagger}(z, \bar{z}) \tilde{\psi}_{0m'}(z, \bar{z}) &= \delta_{mm'} \\
\int \mu(z, \bar{z}) \frac{dzd\bar{z}}{2i} \tilde{\psi}_{km}^{\pm \dagger}(z, \bar{z}) \tilde{\psi}_{k'm'}^{\mp}(z, \bar{z}) &= 0 \\
\int \mu(z, \bar{z}) \frac{dzd\bar{z}}{2i} \tilde{\psi}_{km}^{\pm \dagger}(z, \bar{z}) \tilde{\psi}_{0m'}(z, \bar{z}) &= 0
\end{aligned} \tag{4.72}$$

donde  $\mu(z, \bar{z}) = \prod_{l'=1}^r |z - z_{l'}|^{-4p}$ .

La densidad de estados posibles en cada nivel de energía infinitamente degenerado es finita, e igual a:

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{\infty} \tilde{\psi}_{0m}^{\dagger}(z, \bar{z}) \mu(z, \bar{z}) \tilde{\psi}_{0m}(z, \bar{z}) &= \frac{eB}{hc} \\
\sum_{m=-k}^{\infty} \tilde{\psi}_{km}^{\pm \dagger}(z, \bar{z}) \mu(z, \bar{z}) \tilde{\psi}_{km}^{\pm}(z, \bar{z}) &= \frac{eB}{hc}
\end{aligned} \tag{4.73}$$

Como sucedía en el problema *libre* de Dirac-Landau para fermiones sin masa, junto con las soluciones de energía positiva y negativa aparecen soluciones de energía cero o modos cero. Los modos cero son además autoconjugados respecto de la matriz que representa la simetría de conjugación propia de este sistema, es decir, tenemos:

$$\{\tilde{H}_D^0, \sigma_3\} = 0 \tag{4.74}$$

y por tanto

$$\begin{aligned}
\sigma_3 \tilde{\psi}_E &= \tilde{\psi}_{-E} \quad E \neq 0 \\
\sigma_3 \psi_0 &= \psi_0
\end{aligned} \tag{4.75}$$

La existencia de modos cero autoconjugados, como vimos, es un fenómeno reminiscente de propiedades topológicas, relacionado con el índice del operador de Dirac.

El problema de Dirac-Landau para una partícula en  $q$  capas, cada una de ellas con  $r$  fluxones con  $2p$  cuantos de flujo cada uno, se puede estudiar simplemente como el transformado gauge del caso *libre* por  $\mathcal{G}_A(z^i)$ , (4.23), el espectro no cambia

respecto del problema *libre* pero si los espinores propios que adquieren un prefactor que comprende los términos de interacción con los fluxones de cada capa. También es necesario introducir una nueva medida singular en cada una de las posiciones de los fluxones para cada capa.



## Capítulo 5

# Electrodinámica Cuántica sobre el plano con puntos marcados

El Efecto Hall Cuántico Fraccionario puede entenderse como el Efecto Hall Cuántico Entero de *fermiones compuestos*. En la primera Sección de este Capítulo desarrollaremos, siguiendo lo visto para el Efecto Hall Cuántico Entero de electrones, el estudio en Segunda Cuantificación del problema de un fermión, sin masa, en presencia de un campo magnético externo uniforme y de fluxones. Los estados con factor de llenado entero de este sistema corresponden a estados electrónicos con un factor de llenado fraccionario. En la Sección 5.3 estudiaremos en detalle la aproximación de campo medio a esta situación donde los citados estados aparecen como vórtices de una teoría efectiva de tipo Chern-Simons.

En la teoría de muchas partículas, el estado fundamental para el Efecto Hall Cuántico Entero de *fermiones compuestos* es, precisamente, el estado de Laughlin con factor de llenado  $f = \frac{1}{2p+1}$ . Este estado es incompresible respecto de la simetría infinita presente en este sistema de muchas partículas. Encontramos, así, la misma condición de incompresibilidad que obtuvieron Cappelli *et al.*[19, 20] para el Efecto Entero, y determinada por Flohr *et al.*[38] para el estado de Laughlin. Esta condición puede generalizarse a otros estados con factores de llenado  $f = \frac{i}{2pi+1}$  donde  $i$  es el factor de llenado para el estado correspondiente de partículas compuestas.

Este problema de muchos *fermiones compuestos* puede relacionarse a través de una transformación gauge singular con el de fermiones *libres*. Conocemos, por tanto, el espectro y las propiedades de simetría de este sistema a partir del problema sin fluxones; no obstante, la transformación singular introduce una nueva medida de integración no trivial en el espacio de configuración que representa, de

alguna forma, la posible interacción entre las partículas que no hemos considerado en este estudio del Efecto Fraccionario.

En las dos últimas Secciones de este capítulo estudiaremos la formulación en teoría cuántica de campos de la teoría de Jain.

## 5.1 Estado fundamental para el Efecto Hall Cuántico Entero de *fermiones compuestos*

El campo fermiónico en presencia de fluxones puede expresarse en función de los modos propios de la ecuación de Dirac en (2+1) dimensiones para un fermión, sin masa, en un campo magnético constante y uniforme perpendicular al plano, y en presencia de un número arbitrario de fluxones, es decir

$$\tilde{\psi}(z, \bar{z}) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m \leq -k}^{\infty} \left( B_{km} \tilde{\psi}_{km}^+(z, \bar{z}) + D_{km}^{\dagger} \tilde{\psi}_{km}^-(z, \bar{z}) \right) + \sum_{m=0}^{\infty} A_m \tilde{\psi}_{0m}(z, \bar{z}) \quad (5.1)$$

donde los operadores  $B_{km}, D_{km}, A_m$  y sus conjugados verifican:

$$\begin{aligned} \{B_{km}, B_{k'm'}^{\dagger}\} &= \delta_{kk'} \delta_{mm'} \quad , \quad \{D_{km}, D_{k'm'}^{\dagger}\} = \delta_{kk'} \delta_{mm'} \\ \{A_m, A_{m'}^{\dagger}\} &= \delta_{mm'} \end{aligned} \quad (5.2)$$

El espacio de Hilbert está generado por el conjunto de estados ortonormales

$$\begin{aligned} |0\rangle, A_m^{\dagger}|0\rangle, A_m^{\dagger}A_{m'}^{\dagger}|0\rangle, B_{km}^{\dagger}|0\rangle, B_{km}^{\dagger}B_{k'm'}^{\dagger}|0\rangle, \\ D_{km}^{\dagger}|0\rangle, D_{km}^{\dagger}D_{k'm'}^{\dagger}|0\rangle, D_{km}^{\dagger}B_{km}^{\dagger}|0\rangle, \dots \end{aligned} \quad (5.3)$$

donde el estado vacío es tal que:  $A_m|0\rangle = 0$  ,  $\forall m$ ; y  $B_{km}|0\rangle = D_{km}|0\rangle = 0$  ,  $\forall k, m$ . Los demás son estados de una o más partículas que ocupan los modos cero, o bien, estados “fermiónicos” de partículas o antipartículas que ocupan los modos fermiónicos en presencia de fluxones.

Definimos el factor de llenado  $\tilde{f}$  como el número de modos ocupados para un campo magnético dado,  $\tilde{f} = \frac{\tilde{n}}{\tilde{n}_B}$ , donde  $\tilde{n}$  es la densidad de partículas en presencia de fluxones, y  $\tilde{n}_B \equiv n_B$  es la densidad de modos de cada nivel de energía, que coincide exactamente con la del problema *libre*. Si suponemos una superficie de área finita  $\tilde{A}$ , tenemos que  $\tilde{N} = \tilde{A} \tilde{n}$  y  $\tilde{M} = \tilde{A} n_B$  son el número de partículas y de modos posibles respectivamente. Si tenemos un número finito de partículas podemos describir la teoría de Jain de *fermiones compuestos* suponiendo que a cada partícula le asociamos un fluxón, de manera que cada una se mueve en presencia



de  $\tilde{N} - 1$  fluxones situados en las posiciones de las demás partículas. En definitiva, el número de estados posibles de igual energía con  $\tilde{N}$  partículas compuestas en  $\tilde{M}$  modos será  $\binom{\tilde{M}}{\tilde{N}}$ . De todos estos estados nos interesan únicamente aquellos que corresponden a un factor de llenado entero, para los cuales no hay degeneración.

En esta situación podemos dar una interpretación alternativa del factor de llenado, si lo expresamos en la forma:

$$\tilde{f} = \frac{\tilde{N}}{\tilde{M}} = \frac{\tilde{N}}{\tilde{\Phi}/\Phi_0} = \frac{\tilde{N}}{\tilde{N}_\Phi} \quad (5.4)$$

donde  $\tilde{N}_\Phi$  representa el número de cuantos de flujo correspondientes al campo  $B$  en un área  $\tilde{A}$ , es decir,  $\tilde{N}_\Phi = \frac{\tilde{\Phi}}{\Phi_0} = \frac{\tilde{A}B}{hc/e}$ . El factor de llenado es el inverso del número de cuantos de flujo asociados a cada partícula.

Supongamos que se llena completamente el primer nivel de energía (correspondiente a los modos cero), el factor de llenado será  $\tilde{f} = 1$ . Esto significa que la densidad de partículas compuestas coincide exactamente con la densidad de modos posibles, de tal manera que no hay degeneración, es decir, por cada modo en el mismo nivel de energía tenemos una partícula compuesta, o bien, a cada partícula compuesta le corresponde un cuanto de flujo. Esto será cierto en general para todos los estados con factor de llenado entero,  $\tilde{f} = i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , que dan lugar al Efecto Hall Cuántico Entero para *fermiones compuestos*, en estos estados a cada partícula le corresponden  $i^{-1}$  cuantos de flujo.

El estado con factor de llenado uno será:

$$|\tilde{f} = 1\rangle \equiv |1_0, 1_1, \dots, 1_m, \dots\rangle \equiv A_0^\dagger A_1^\dagger \dots A_m^\dagger \dots |0\rangle \quad (5.5)$$

tal que

$$\begin{aligned} A_m^\dagger |\tilde{f} = 1\rangle &= 0 \quad \forall m \leq 0 \\ B_{km} |\tilde{f} = 1\rangle &= D_{km} |\tilde{f} = 1\rangle = 0, \quad \forall k \neq 0, m \geq -k \end{aligned} \quad (5.6)$$

El operador densidad de carga en función del campo fermiónico, en presencia de fluxones, está modificado respecto del operador para fermiones, pues debemos incluir la medida de integración no trivial asociada a la transformación singular. Tenemos por tanto:<sup>1</sup>

$$\tilde{\rho} = -e \frac{[\tilde{\psi}^\dagger \mu, \tilde{\psi}]}{2} \quad (5.7)$$

<sup>1</sup>Recordemos que la carga del electrón es  $q = -e$  con  $e > 0$ .

donde  $\mu(z, \bar{z})$  depende de la posición de todos los solenoides presentes en la teoría.

Sustituyendo el campo en función de los modos propios de una partícula, resultará:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} = & -e \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m \leq -k}^{\infty} \tilde{\psi}_{km}^{\dagger}(z, \bar{z}) \mu(z, \bar{z}) \tilde{\psi}_{km}(z, \bar{z}) (B_{km}^{\dagger} B_{km} - D_{km}^{\dagger} D_{km}) \right. \\ & \left. + \tilde{\psi}_{0m}^{\dagger}(z, \bar{z}) \mu(z, \bar{z}) \tilde{\psi}_{0m}(z, \bar{z}) \left( A_m^{\dagger} A_m - \frac{1}{2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (5.8)$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{km}^{\dagger}(z, \bar{z}) \mu(z, \bar{z}) \tilde{\psi}_{km}(z, \bar{z}) & \equiv (\tilde{\psi}_{km}^+)^{\dagger}(z, \bar{z}) \mu(z, \bar{z}) \tilde{\psi}_{km}^+(z, \bar{z}) \\ & \equiv (\tilde{\psi}_{km}^-)^{\dagger}(z, \bar{z}) \mu(z, \bar{z}) \tilde{\psi}_{km}^-(z, \bar{z}) \end{aligned} \quad (5.9)$$

como consecuencia de la simetría de conjugación.

El valor esperado de este operador en el estado con factor de llenado uno es:

$$\tilde{\rho}_1 = \langle \tilde{f} = 1 | \tilde{\rho} | \tilde{f} = 1 \rangle = -e \left( \frac{1}{2} \right) \left( \frac{eB}{hc} \right) \quad (5.10)$$

donde  $n_B = \frac{eB}{hc}$  es la densidad de modos para el primer nivel de energía. Este resultado es idéntico al que obtuvimos para el Efecto Hall Cuántico Enterode fermiones en un campo magnético uniforme, como era de esperar. Sin embargo, como sucedía también en ese caso, debemos tener en cuenta que la densidad de carga en el vacío no es nula debido a la presencia de los modos cero,

$$\tilde{\rho}_v = \langle 0 | \tilde{\rho} | 0 \rangle = \frac{e}{2} \left( \frac{eB}{hc} \right) \quad (5.11)$$

y por tanto, la densidad de carga para los *fermiones compuestos* relativa a este vacío será

$$\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_1 - \tilde{\rho}_v = -e \left( \frac{eB}{hc} \right) \quad (5.12)$$

En general, para un estado con factor de llenado  $\tilde{f} = i$ , con  $i$  un entero, resultará:

$$\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_i - \tilde{\rho}_v = i(-e) \left( \frac{eB}{hc} \right) \quad (5.13)$$

Considerando estados de antipartícula llegamos al mismo resultado salvo el signo de la carga.

Encontramos, pues, que el sistema de *fermiones compuestos*, considerados como partículas libres, en presencia de un campo magnético uniforme externo, siente el Efecto Hall Cuántico Enterode manera análoga al sistema de fermiones *libres*.

Ambos sistemas están relacionados por la transformación gauge singular que, como veremos, modifica la medida de integración, y, por tanto, el área que ocupan los *fermiones compuestos* será distinta de la ocupada por los fermiones *libres*.

El valor esperado de la densidad de corriente en forma covariante, para los estados con factor de llenado entero, será:

$$\tilde{j}^\mu = -i\frac{e^2}{h} {}^*F^\mu, \quad \mu = 0, 1, 2 \quad (5.14)$$

donde  ${}^*F^\mu = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$ , y  $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ , tal que,  $F^{12} = B$ ,  $F^{0j} = -E^j$ ,  $j = 1, 2$ . La densidad de corriente en el plano  $\vec{j}$  es transversal al campo eléctrico, y se puede determinar el tensor de conductividad, cuyas componentes diagonales son nulas, mientras que las no diagonales están cuantizadas, y así, la conductividad Hall es  $\sigma_H = i\frac{e^2}{h}$ .

Este análisis es válido para el sistema de *fermiones compuestos*, cada uno de ellos formado por un fermión y un solenoide de flujo  $2p\phi_0$ . En una aproximación de campo medio [66], suponiendo que el flujo gauge asociado a cada partícula se extiende dando lugar al campo magnético uniforme que suponemos constante, encontramos las siguientes situaciones equivalentes:

- Supongamos que mantenemos constantes el campo externo  $B$ , y por tanto, la densidad de modos posibles; y el número de *fermiones compuestos*, que supondremos igual al número de fermiones *libres*:  $\tilde{N} = N$ . En el estado correspondiente a factor de llenado uno,  $\tilde{f} = 1$ , cada *fermión compuesto* tiene asociado un cuanto de flujo; ya que, el inverso del factor de llenado,  $\tilde{f}^{-1} = 1$ , representa el número de cuantos de flujo por partícula, y en este caso es uno. Pero en el sistema equivalente de fermiones *libres* a cada partícula le corresponderá no un cuanto de flujo sino  $(2p + 1)$  cuantos de flujo, y por tanto, el factor de llenado del sistema fermiónico, cuyo inverso coincide con el número de cuantos de flujo por partícula ( $f^{-1} = 2p + 1$ ), es precisamente:  $f = \frac{1}{2p+1}$ . Es decir, una fracción con denominador impar que, como veremos al pasar al sistema de muchas partículas, es el factor de llenado del estado de Laughlin para el Efecto Fraccionario. Este estado es simplemente el transformado gauge del estado con factor de llenado uno de *fermiones compuestos*.

La equivalencia entre estos dos sistemas puede entenderse mejor gráficamente, ver Figura 5.1. Estamos suponiendo que tanto el número de partículas como la intensidad del campo externo permanecen constantes, y así, lo único que puede cambiar al considerar el sistema de *fermiones compuestos* o el sistema

de fermiones *libres* es el área que ocupan. De esta forma es evidente que los *fermiones compuestos*, con factor de llenado uno, ocupan un área más pequeña que el sistema de fermiones *libres*, cada uno con  $2p + 1$  cuantos de flujo, y la relación es precisamente:  $A = (2p + 1)\tilde{A}$ . Es decir, aumenta el flujo asociado a cada partícula aumentando el área que ocupan.

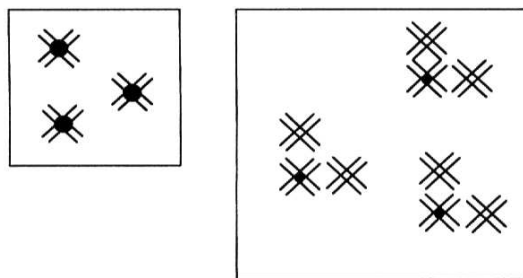


Figura 5.1: En este esquema, los puntos grandes representan *fermiones compuestos* y los pequeños fermiones *libres*; las cruces son los cuantos de flujo asociados a cada partícula. El primer sistema representa *fermiones compuestos* con  $\tilde{f} = 1$ , en un área  $\tilde{A}$ , a cada partícula le corresponde un cuanto de flujo. El sistema equivalente de fermiones *libres* corresponde a un factor de llenado  $f = \frac{1}{3}$ , en un área  $A$ ; en este caso cada partícula tiene asociados tres cuantos de flujo. El número de partículas en ambos sistemas coincide, y así,  $A = 3\tilde{A}$ .

- Supongamos ahora que mantenemos constantes el campo externo  $B$ , y el área que ocupan ambos sistemas, el de *fermiones compuestos* y el equivalente de fermiones *libres*. En este caso necesariamente tiene que cambiar el número de partículas de un sistema a otro. Si consideramos el sistema de *fermiones compuestos*,  $\tilde{N}$ , con factor de llenado uno, una vez más a cada *fermión compuesto* le corresponderá un cuanto de flujo. Pero en el sistema de fermiones *libres*,  $N$ , a cada partícula le corresponden  $2p + 1$  cuantos de flujo, de tal manera que el factor de llenado es  $f = \frac{1}{2p+1}$ . Esto significa que hay menos partículas *libres* que *compuestas* ocupando el mismo área, y así,  $\tilde{N} = (2p + 1)N$ . Es decir, aumenta el flujo asociado a cada partícula disminuyendo su número. Ver Figura 5.2, [88].

En cualquier caso, en esta aproximación de campo medio, encontramos la equi-

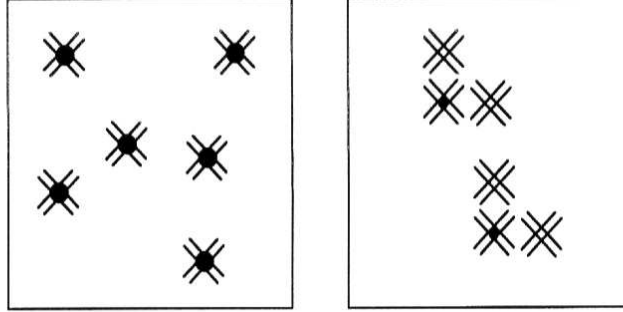


Figura 5.2: Esquema equivalente al representado en la Figura 5.1. Ahora  $A = \tilde{A}$ , y por tanto,  $\tilde{N} = 3N$ ,  $N$  número de fermiones *libres*.

valencia entre el Efecto Hall Cuántico Entero para *fermiones compuestos* y el Efecto Hall Cuántico Fraccionario para fermiones.

En general, si consideramos un estado de *fermiones compuestos* con un factor de llenado,  $\tilde{f} = i$ , con  $i$  entero, a cada *fermión compuesto* le corresponde en dicho estado  $i^{-1}$  cuantos de flujo. El flujo promedio para cada fermión será entonces:  $f^{-1} = i^{-1} + 2p$ , y por tanto, el factor de llenado para el sistema de fermiones equivalente es:  $f = \frac{i}{2pi+1}$ . Tenemos así todos los factores de llenado fraccionarios con denominador impar que se pueden obtener a partir del entero para *fermiones compuestos*.

Es interesante estudiar la conexión entre este formalismo de Segunda Cuantificación y la Teoría de Muchas partículas. Si suponemos que las partículas no interactúan entre sí, es posible expresar el espacio de Hilbert para  $N$  partículas idénticas como el producto tensorial del espacio de Hilbert de cada una,  $\mathcal{H}_N = \mathcal{H} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}$ , donde  $\mathcal{H} = \Gamma_+(S) \oplus \Gamma_-(S) \oplus \Gamma_0(S)$ , generado por la base ortonormal  $\{\tilde{\psi}_{km}^+(z, \bar{z}), \tilde{\psi}_{km}^-(z, \bar{z}), \tilde{\psi}_{0m}(z, \bar{z})\}$ , y  $\Gamma(S)$  es el subespacio de espinores de cuadrado sumable propios del operador de Dirac para una partícula cargada con fluxones en un campo magnético uniforme.

Una base ortonormal de espinores antisimetrizados para  $\mathcal{H}_N$  vendrá dada por el determinante de Slater:

$$\tilde{\psi}_{k_1, m_1; \dots; k_N, m_N}(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_N, \bar{z}_N) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \tilde{\psi}_{k_1 m_1}(z_1, \bar{z}_1) & \tilde{\psi}_{k_1 m_1}(z_2, \bar{z}_2) & \dots & \tilde{\psi}_{k_1 m_1}(z_N, \bar{z}_N) \\ \tilde{\psi}_{k_2 m_2}(z_1, \bar{z}_1) & \tilde{\psi}_{k_2 m_2}(z_2, \bar{z}_2) & \dots & \tilde{\psi}_{k_2 m_2}(z_N, \bar{z}_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\psi}_{k_N m_N}(z_1, \bar{z}_1) & \tilde{\psi}_{k_N m_N}(z_2, \bar{z}_2) & \dots & \tilde{\psi}_{k_N m_N}(z_N, \bar{z}_N) \end{vmatrix} \quad (5.15)$$

En representación de coordenadas definimos el vacío como el estado tal que:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(z, \bar{z})^+ |0\rangle &= \tilde{\psi}(z, \bar{z})^0 |0\rangle = 0 \\ \tilde{\psi}^\dagger(z, \bar{z})^- |0\rangle &= 0, \quad \forall z, \bar{z} \end{aligned} \quad (5.16)$$

donde el campo fermiónico es:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(z, \bar{z}) &= \tilde{\psi}(z, \bar{z})^+ + \tilde{\psi}(z, \bar{z})^- + \tilde{\psi}(z, \bar{z})^0 \quad (5.17) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m \geq -k}^{\infty} B_{km} \tilde{\psi}_{km}^+(z, \bar{z}) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m \geq -k}^{\infty} D_{km}^\dagger \tilde{\psi}_{km}^-(z, \bar{z}) + \sum_{m=0}^{\infty} A_m \tilde{\psi}_{0m}(z, \bar{z}) \end{aligned}$$

Así, un estado con un número finito de partículas puede expresarse en función del vacío,

$$\begin{aligned} |z_1, \bar{z}_1, \dots, z_{N_+}, \bar{z}_{N_+}\rangle &= \tilde{\psi}^\dagger(z_1, \bar{z}_1)^- \dots \tilde{\psi}^\dagger(z_{N_+}, \bar{z}_{N_+})^- |0\rangle \\ |z_1, \bar{z}_1, \dots, z_{N_0}, \bar{z}_{N_0}\rangle &= \tilde{\psi}^\dagger(z_1, \bar{z}_1)^0 \dots \tilde{\psi}^\dagger(z_{N_0}, \bar{z}_{N_0})^0 |0\rangle \\ |z_1, \bar{z}_1, \dots, z_{N_-}, \bar{z}_{N_-}\rangle &= \tilde{\psi}(z_1, \bar{z}_1)^- \dots \tilde{\psi}(z_{N_-}, \bar{z}_{N_-})^- |0\rangle \end{aligned} \quad (5.18)$$

El Hamiltoniano para el problema de muchas partículas será:

$$\begin{aligned} \langle z_1, \bar{z}_1, \dots, z_N, \bar{z}_N | \tilde{H} | \tilde{\psi} \rangle &= \quad (5.19) \\ &= \langle 0 | [\tilde{\psi}(z_1, \bar{z}_1) \dots \tilde{\psi}(z_N, \bar{z}_N), \tilde{H}] | \tilde{\psi} \rangle \\ &= \left\{ \sum_{I=1}^N \vec{\alpha} \left( -i\hbar \vec{\nabla}_I + e(\vec{A}(z_I, \bar{z}_I) + \vec{a}(z_I, \bar{z}_I)) \right) \right\} \tilde{\psi}(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_N, \bar{z}_N) \end{aligned}$$

que se deduce a partir del operador

$$\tilde{H} = \int \frac{dzd\bar{z}}{2\pi i} : \tilde{\psi}^\dagger(z, \bar{z}) \mu(z, \bar{z}) \vec{\alpha} \left( -i\hbar \vec{\nabla} + e(\vec{A}(z, \bar{z}) + \vec{a}(z, \bar{z})) \right) \tilde{\psi}(z, \bar{z}) : \quad (5.20)$$

Este resultado debe ser equivalente a considerar el problema de  $N$  partículas en el plano, en presencia de un campo magnético uniforme, y en presencia de un número arbitrario de solenoides. Pero es necesario hacer una hipótesis sobre el número de fluxones presentes en la teoría para describir un sistema de  $N$  *fermiones compuestos*. La hipótesis es suponer que tenemos un número de solenoides igual al número de partículas, de tal manera que cada partícula se mueve en presencia

de  $N - 1$  solenoides, que se encuentran situados exactamente en los puntos donde están las demás partículas. En esta situación el potencial vector complejo asociado a los fluxones es:

$$a_I = 0 \quad , \quad \bar{a}_I = i2p \frac{\phi_0}{\pi} \sum_{J \neq I}^N \frac{1}{z_I - z_J} \quad (5.21)$$

Cada *fermión compuesto* es una partícula con un solenoide que lleva un flujo  $2p\phi_0$ . Este potencial vector es un gauge puro y ahora la transformación singular es:

$$\mathcal{G}_p(z_I) = \prod_{I < J}^N (z_I - z_J)^{2p} \quad (5.22)$$

que depende de las coordenadas de las  $N$  partículas.

En definitiva, el Hamiltoniano para  $N$  partículas en representación de coordenadas es:

$$\tilde{H}_N = H_N + \hbar\omega \left[ 4pl \sum_{J \neq I}^N \frac{a_I}{z_I - z_J} + 2p(\pi l^2) \sum_{J \neq I}^N \delta^{(2)}(z_I - z_J) \right] \quad (5.23)$$

donde  $H_N$  es el Hamiltoniano en ausencia de fluxones, y  $a_I$  es el operador  $a$  (4.5) para la partícula  $I$ . Podemos pasar de un sistema a otro simplemente a través de la transformación no unitaria  $\mathcal{G}_p$  de la forma

$$\tilde{H}_N = \mathcal{G}_p(z_1, z_2, \dots, z_N) H_N \mathcal{G}_p^{-1}(z_1, z_2, \dots, z_N) \quad (5.24)$$

Por otro lado, el estado fundamental del sistema correspondiente al factor de llenado  $\tilde{f} = 1$ , con  $N$  *fermiones compuestos* en el primer nivel de energía, será:

$$\begin{aligned} \langle z_1, \bar{z}_1, \dots, z_N, \bar{z}_N | \tilde{\psi} \rangle &= \tilde{\psi}_{00, \dots, 0N-1}(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_N, \bar{z}_N) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \tilde{\psi}_{00}(z_1, \bar{z}_1) & \tilde{\psi}_{00}(z_2, \bar{z}_2) & \dots & \tilde{\psi}_{00}(z_N, \bar{z}_N) \\ \tilde{\psi}_{01}(z_1, \bar{z}_1) & \tilde{\psi}_{01}(z_2, \bar{z}_2) & \dots & \tilde{\psi}_{01}(z_N, \bar{z}_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\psi}_{0N-1}(z_1, \bar{z}_1) & \tilde{\psi}_{0N-1}(z_2, \bar{z}_2) & \dots & \tilde{\psi}_{0N-1}(z_N, \bar{z}_N) \end{vmatrix} \\ &= \prod_{J>1}^N (z_1 - z_J)^{2p} \prod_{J>2}^N (z_2 - z_J)^{2p} \dots (z_{N-1} - z_N) \psi_{00, \dots, 0N-1}(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_N, \bar{z}_N) \\ &= \prod_{I < J}^N (z_I - z_J)^{2p} \psi_{00, \dots, 0N-1}(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_N, \bar{z}_N) \\ &= \mathcal{G}_p(z_1, \dots, z_N) \psi_{00, \dots, 0N-1}(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_N, \bar{z}_N) \end{aligned} \quad (5.25)$$

Este estado es exactamente el estado transformado por  $\mathcal{G}_p$  del estado fundamental para  $N$  fermiones *libres* con factor de llenado uno,  $\psi_{00,\dots,0N-1}(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_N, \bar{z}_N)$ , que es el determinante de Slater para los espinores de Dirac-Landau correspondientes al primer nivel de energía. La primera componente del espinor resultante coincide exactamente con la función de onda propia del problema no-relativista de muchas partículas, de tal manera que,

$$\tilde{\Psi}_{\tilde{f}=1}(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_N, \bar{z}_N) = \prod_{I<J}^N (z_I - z_J)^{2p} \Psi_{f=1}(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_N, \bar{z}_N) \quad (5.26)$$

y, utilizando el desarrollo del determinante de Vandermonde, tenemos que

$$\Psi_{f=1}(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_N, \bar{z}_N) = \mathcal{N} \prod_{I<J}^N (z_I - z_J) e^{-\frac{1}{2l^2} \sum_{I=1}^N |z_I|^2} \quad (5.27)$$

donde  $\mathcal{N}$  es una constante de normalización.

Es decir, el estado para fermiones equivalente al estado de  $N$  *fermiones compuestos*, con factor de llenado uno, es precisamente el estado fundamental propuesto por R.B.Laughlin para el Efecto Hall Cuántico Fraccionario correspondiente a los factores de llenado  $f = \frac{1}{2p+1}$ , y así, salvo la constante de normalización, tenemos:

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_{\tilde{f}=1}(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_N, \bar{z}_N) &\equiv \Psi_{f=\frac{1}{2p+1}}(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_N, \bar{z}_N) \\ &= \mathcal{N} \prod_{I<J}^N (z_I - z_J)^{2p+1} e^{-\frac{1}{2l^2} \sum_{I=1}^N |z_I|^2} \end{aligned} \quad (5.28)$$

Este estado es también propio del momento angular total modificado por la presencia de solenoides, que podemos determinar, para el sistema de muchas partículas, a partir del operador en Segunda Cuantificación:

$$\tilde{J}_3 = \int \frac{dzd\bar{z}}{2\pi i} : \tilde{\psi}^\dagger(z, \bar{z}) \mu(z, \bar{z}) (\tilde{L}_3 + S_3) \tilde{\psi}(z, \bar{z}) : \quad (5.29)$$

de donde se deduce que

$$\begin{aligned} \langle z_1, \bar{z}_1, \dots, z_N, \bar{z}_N | \tilde{J}_3 | \tilde{\psi} \rangle &= \\ &= \sum_{I=1}^N \left\{ \tilde{L}_3(I) + \frac{1}{2} \sigma_3 \right\} \tilde{\psi}(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_N, \bar{z}_N) \end{aligned} \quad (5.30)$$

Es decir, el momento angular total para el problema de  $N$  *fermiones compuestos* en representación de coordenadas es:

$$\tilde{J}_3^N = J_3^N - \hbar 2p \sum_{J \neq I}^N \frac{z_I}{z_I - z_J} + \hbar 2p (\pi l^2) \sum_{J \neq I}^N \delta^{(2)}(z_I - z_J) \quad (5.31)$$



y, por tanto,

$$\tilde{J}_3^N = \mathcal{G}_p(z_1, z_2, \dots, z_N) J_3^N \mathcal{G}_p^{-1}(z_1, z_2, \dots, z_N) \quad (5.32)$$

El estado fundamental para factor de llenado uno es propio de este operador con autovalor:

$$\tilde{J}_3^N \tilde{\psi}_{\tilde{f}=1}(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_N, \bar{z}_N) = \hbar \left\{ \frac{N(N-1)}{2} + \frac{N}{2} \right\} \tilde{\psi}_{\tilde{f}=1}(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_N, \bar{z}_N) \quad (5.33)$$

Además, el estado fermiónico equivalente es propio del momento angular total  $J_3^N$  sin transformar:

$$\begin{aligned} J_3^N \psi_{f=\frac{1}{2p+1}}(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_N, \bar{z}_N) = \\ \hbar \left\{ (2p+1) \frac{N(N-1)}{2} + \frac{N}{2} \right\} \psi_{f=\frac{1}{2p+1}}(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_N, \bar{z}_N) \end{aligned} \quad (5.34)$$

y el autovalor es proporcional, en la parte angular, al inverso del factor de llenado para este estado.

En general, cualquier estado, con  $N$  partículas compuestas y factor de llenado entero  $\tilde{f} = i$ , tiene su estado fermiónico equivalente, que será

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{\tilde{f}=i}(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_N, \bar{z}_N) &\equiv \psi_{f=\frac{i}{2p+1}}(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_N, \bar{z}_N) \\ &= \mathcal{G}_p(z_1, \dots, z_N) \psi_{f=i}(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_N, \bar{z}_N) \end{aligned} \quad (5.35)$$

Analizaremos ahora la incompresibilidad del estado fundamental, para factores de llenado fraccionarios, estudiando las propiedades de simetría del problema con fluxones, de manera análoga al estudio realizado por Cappelli *et al.* para el Efecto Entero de fermiones *libres*. Los generadores infinitesimales de la simetría infinita  $W_\infty$  como operadores en Segunda Cuantificación son:

$$\tilde{\mathcal{L}}_{n,m} = \int \frac{dzd\bar{z}}{2\pi i} : \tilde{\psi}^\dagger(z, \bar{z}) \mu(z, \bar{z}) \tilde{\mathcal{L}}_{n,m} \tilde{\psi}(z, \bar{z}) : \quad (5.36)$$

que, en función de los modos propios:

$$\tilde{\mathcal{L}}_{n,m} = \sum_{k'=0}^{\infty} \tilde{\mathcal{L}}_{n,m}^{k'} \quad (5.37)$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}_{n,m}^{k'} &= \sum_{m' \geq m+1-k'}^{\infty} \frac{\sqrt{(k'+m')!(k'+m'+n-m)!}}{(k'+m'-m-1)!} \left( B_{k',m'+n-m}^\dagger B_{k',m'} \right. \\ &\quad \left. - D_{k',m'}^\dagger D_{k',m'+n-m} \right), \quad k' \neq 0 \\ \tilde{\mathcal{L}}_{n,m}^0 &= \sum_{m' \geq m+1}^{\infty} \frac{\sqrt{(m')!(m'+n-m)!}}{(m'-m-1)!} A_{m'+n-m}^\dagger A_{m'} \end{aligned} \quad (5.38)$$

Es decir,  $\tilde{\mathcal{L}}_{n,m}$  descompone en suma de términos de la forma  $\tilde{\mathcal{L}}_{m+s,m}^{k'}$  donde  $s = n - m$  y  $k'$  representa cada nivel de energía. Este operador actúa sobre un estado aumentando (si  $s > 0$ ) o disminuyendo (si  $s < 0$ ) el momento angular de cada partícula, dentro de cada nivel de energía. En particular, si tenemos un estado con factor de llenado  $\tilde{f} = 1$  que está completamente lleno, sucede que

$$\tilde{\mathcal{L}}_{n',m'} |\tilde{f} = 1\rangle \equiv \tilde{\mathcal{L}}_{n',m'}^0 \{A_0^\dagger \cdots A_m^\dagger \cdots |0\rangle\} = 0 \quad (5.39)$$

donde  $-1 \leq n' < m'$ . Esta condición representa la incompresibilidad del estado fundamental para el efecto entero de partículas compuestas y, en definitiva, caracteriza la incompresibilidad de un estado de fermiones con factor de llenado fraccionario.

En el problema de muchas partículas encontramos que el estado fundamental propuesto por Laughlin es incompresible, como demuestran M. Flohr y R. Varnhagen, en la teoría no-relativista [38]. En este caso resulta:

$$\tilde{\mathcal{L}}_{n',m'} \tilde{\psi}_{\tilde{f}=1}(z_1, \bar{z}_1, \cdots, z_N, \bar{z}_N) \equiv \tilde{\mathcal{L}}_{n',m'}^{(0)} \psi_{f=\frac{1}{2p+1}}(z_1, \bar{z}_1, \cdots, z_N, \bar{z}_N) = 0 \quad (5.40)$$

donde

$$\begin{aligned} & \langle z_1, \bar{z}_1, \cdots, z_N, \bar{z}_N | \tilde{\mathcal{L}}_{n',m'} |\tilde{\psi}_{\tilde{f}=1}\rangle \\ &= \left\{ \sum_{I=1}^N (\tilde{B}_I^\dagger)^{n'+1} \tilde{B}_I^{m'+1} \right\} \tilde{\psi}_{\tilde{f}=1}(z_1, \bar{z}_1, \cdots, z_N, \bar{z}_N) \end{aligned} \quad (5.41)$$

En general, la condición de *incompresibilidad* para el estado fundamental del Efecto Hall Cuántico Fraccionarioes equivalente a la condición de *incompresibilidad* del estado fundamental para el Efecto Hall Cuántico Entero de *fermiones compuestos*.

Hemos encontrado, para el problema de un número finito de partículas, que tanto las funciones de onda como los operadores para un factor de llenado fraccionario  $f = \frac{i}{2pi+1}$ , y entero  $\tilde{f} = i$ , están relacionados por una transformación singular, de tal manera que:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_p(z_1, \bar{z}_1, \cdots, z_N, \bar{z}_N) &= \mathcal{G}_p(z_1, \cdots, z_N) \psi_i(z_1, \bar{z}_1, \cdots, z_N, \bar{z}_N) \\ \tilde{\mathcal{O}}_p &= \mathcal{G}_p(z_1, \cdots, z_N) \mathcal{O} \mathcal{G}_p^{-1}(z_1, \cdots, z_N) \end{aligned} \quad (5.42)$$

donde  $\mathcal{O} = \{H_N, J_3^N, b_I, b_I^\dagger, a_I, a_I^\dagger\}$  y  $\tilde{\mathcal{O}}_p = \{\tilde{H}_N, \tilde{J}_3^N, \tilde{B}_I, \tilde{B}_I^\dagger, \tilde{A}_I, \tilde{A}_I^\dagger\}$  para  $I = 1, 2, \cdots, N$ .

Esta transformación, singular para  $z_I \rightarrow z_J$ , no es unitaria, pues:

$$\mathcal{G}_p^\dagger \mathcal{G}_p = \prod_{I < J}^N |z_I - z_J|^{4p} = \mu^{-1}(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_N, \bar{z}_N) \quad (5.43)$$

donde  $\mu(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_N, \bar{z}_N)$  es la nueva medida de integración en el espacio de configuración para  $N$  partículas, que depende de la posición de todas ellas.

Por último, estudiaremos en este contexto de muchas partículas la generalización al problema de  $q$  capas o muestras independientes, en cada una de las cuales consideramos un número finito de partículas (supondremos en principio el mismo en cada capa), y un número equivalente de fluxones asociados a cada partícula. Así, cada partícula ve  $N - 1$  fluxones, que se encuentran en la misma capa, y  $N$  fluxones correspondientes a las partículas situadas en las demás capas. Suponemos que las partículas no pueden pasar de una capa a otra, de forma que el movimiento en cada capa es independiente de las demás, salvo por el hecho de que los fluxones de unas capas sí inducen una interacción sobre las partículas de las otras [130].

En este sistema tenemos que considerar, además del potencial vector externo, un potencial vector complejo asociado a los fluxones, dado por:

$$a_I^i = 0, \quad \bar{a}_I^i = i \frac{\Phi_0}{\pi} \left\{ - \sum_{j \neq i}^q A_{ij} \sum_{J \neq I}^N \frac{1}{z_I^i - z_J^j} - A_{ii} \sum_{J \neq I}^N \frac{1}{z_I^i - z_J^i} \right\} \quad (5.44)$$

donde  $I, J = 1, 2, \dots, N$  son índices asociados a las partículas en cada capa, e  $i, j = 1, 2, \dots, q$  son los índices asociados a cada capa. La transformación singular será:

$$\mathcal{G}_K(z_I^i) = \prod_{i < j}^q \prod_{I \leq J}^N (z_I^i - z_J^j)^{K_{ij}} \prod_{I < J}^N (z_I^i - z_J^i)^{K_{ii} - 1} \quad (5.45)$$

donde  $K$  es una matriz  $q \times q$  que en función de la matriz  $A$  (4.21) es  $K = I - A$  con  $I$  la matriz identidad  $q \times q$  [38]. Esta relación se deduce de la condición de incompresibilidad para el estado fundamental caracterizada por los operadores  $\tilde{\mathcal{L}}_{nm}$  dados por:

$$\tilde{\mathcal{L}}_{nm} = \sum_{i, I}^{q, N} (\tilde{B}_I^{i\dagger})^{n+1} (\tilde{B}_I^i)^{m+1} \quad (5.46)$$

donde  $\tilde{B}_I^{i\dagger}$  y  $\tilde{B}_I^i$  se pueden determinar como el transformado gauge de  $b_I^i$  y  $\bar{b}_I^i$ .

En general, tenemos:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_K(z_I^i, \bar{z}_I^i) &= \mathcal{G}_K(z_I^i) \psi(z_I^i, \bar{z}_I^i) \\ \tilde{\mathcal{O}}_K &= \mathcal{G}_K(z_I^i) \mathcal{O} \mathcal{G}_K^{-1}(z_I^i) \end{aligned} \quad (5.47)$$

donde  $\mathcal{O} = \{H_N^i, J_3^{N,i}, b_I^i, b_I^{i\dagger}, a_I^i, a_I^{i\dagger}\}$  y  $\tilde{\mathcal{O}}_K = \{\tilde{H}_N^i, \tilde{J}_3^{iN}, \tilde{B}_I^i, \tilde{B}_I^{i\dagger}, \tilde{A}_I^i, \tilde{A}_I^{i\dagger}\}$  con  $I = 1, 2, \dots, N$ , para la capa  $i$ .

El estado fundamental correspondiente a factor de llenado  $\tilde{f} = 1$ , con  $N$  *fermiones compuestos* en el primer nivel de Dirac-Landau, para la capa  $i$ -ésima es:

$$\tilde{\psi}(z_I^i, \bar{z}_I^i) = \prod_{i<j}^q \prod_{I \leq J}^N (z_I^i - z_J^j)^{K_{ij}} \prod_{I < J}^N (z_I^i - z_J^i)^{K_{ii}-1} \psi(z_I^i, \bar{z}_I^i) \quad (5.48)$$

donde  $\psi(z_I^i, \bar{z}_I^i)$  es el determinante de Slater para los espinores de Dirac-Landau correspondientes al primer nivel de energía en la capa  $i$ -ésima. La primera componente de este espinor coincide con la función de onda no-relativista, y desarrollando el determinante de Vandermonde resulta:

$$\tilde{\Psi}_{\tilde{f}=1}(z_I^i, \bar{z}_I^i) = \mathcal{N} \prod_{i<j}^q \prod_{I \leq J}^N (z_I^i - z_J^j)^{K_{ij}} \prod_{I < J}^N (z_I^i - z_J^i)^{K_{ii}} e^{-\frac{1}{2l^2} \sum_{I=1}^N |z_I^i|^2} \quad (5.49)$$

En definitiva, la función de onda para el estado fundamental del sistema completo, con  $N_i$  partículas en cada capa  $i$ , y para las  $q$  capas, correspondiente al factor de llenado uno para los *fermiones compuestos* es:

$$\tilde{\Psi}_{\tilde{f}=1}(z_I^i, \bar{z}_I^i) = \mathcal{N} \prod_{i<j}^q \prod_{I \leq J}^{N_i, N_j} (z_I^i - z_J^j)^{K_{ij}} \prod_{i=1}^q \prod_{I < J}^{N_i} (z_I^i - z_J^i)^{K_{ii}} e^{-\frac{1}{2l^2} \sum_{i=1}^q \sum_{I=1}^{N_i} |z_I^i|^2} \quad (5.50)$$

Para determinar el factor de llenado del sistema de fermiones *libres* equivalente calculamos el número total de cuantos de flujo, que vendrá dado por el número de estados posibles para cada partícula, o lo que es lo mismo, por la mayor potencia de  $z_I^i$  más uno, así[127]:

$$N_\Phi = 1 + K_{ii}(N_i - 1) + \sum_{j \neq i} K_{ij} N_j = \sum_j^q K_{ij} N_j - K_{ii} + 1 \quad (5.51)$$

para  $N_i$  grande resulta:  $N_\Phi \approx \sum_j^q K_{ij} N_j$ . El número total de partículas es  $N = \sum_{i=1}^q N_i$ , y, por tanto, el factor de llenado para este estado es:

$$f_K = \sum_{i,j}^q (K^{-1})_{ij} \quad (5.52)$$

donde hemos utilizado que  $N_i = \sum_j (K^{-1})_{ij} N_\Phi$ .

Este es el factor de llenado para la función de onda que generaliza la función de Laughlin al problema de  $q$  capas o niveles de energía independientes:

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_{\tilde{f}=1}(z_I^i, \bar{z}_I^i) &\equiv \Psi_{f_K}(z_I^i, \bar{z}_I^i) \\ &= \mathcal{N} \prod_{i < j}^q \prod_{I \leq J}^{N_i, N_j} (z_I^i - z_J^j)^{K_{ij}} \prod_{i=1}^q \prod_{I < J}^{N_i} (z_I^i - z_J^i)^{K_{ii}} e^{-\frac{1}{2I^2} \sum_{i=1}^q \sum_{I=1}^{N_i} |z_I^i|^2} \end{aligned} \quad (5.53)$$

Como consecuencia del principio de Pauli la matriz  $K$  debe ser simétrica, positiva, y valuada en los enteros, con la diagonal principal formada por enteros impares. En particular si  $K$  es de la forma:

$$K = \begin{pmatrix} 2p+1 & 2p & \cdots & 2p \\ 2p & 2p+1 & \cdots & 2p \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 2p & \cdots & 2p & 2p+1 \end{pmatrix} \quad (5.54)$$

el factor de llenado es:  $f_K = \frac{q}{2pq+1}$ . Es decir, el sistema de  $q$  capas independientes, o bien  $q$  fluidos de tipo Hall, en el cual las partículas compuestas por un fermión y un fluxón con  $2p$  cuantos de flujo, ocupan completamente en cada capa el primer nivel de Landau, tiene el mismo factor de llenado que un sistema formado por una sola capa pero en el cual los *fermiones compuestos* ocupan completamente  $q$  niveles de Landau:  $f = \frac{q}{2pq+1}$ .

En esta formulación para el Efecto Hall Cuántico Fraccionario consideramos un Hamiltoniano sin interacción entre las partículas, como en el entero, pero describimos la interacción a través de una medida no trivial que, como veremos, estará relacionada con la función de correlación de  $N$  puntos asociados a los cuantos de flujo en una Teoría Abeliada de Chern-Simons. Es decir, en la teoría de *fermiones compuestos* de Jain, se introduce un término de interacción en el Hamiltoniano a través del potencial vector complejo, para describir la interacción entre las partículas cargadas y los solenoides que le asociamos a cada una. Esta interacción es de tipo estadístico con parámetro:  $\nu = 2p$ , pero en este caso el potencial vector que describe la presencia de fluxones es complejo, a diferencia del potencial vector estadístico como el introducido por Lerda, [85], para describir partículas con estadística aniónica, que es real. Como sucede en el estudio realizado por este autor acerca de la estadística fraccionaria, es posible construir un sistema formado por una partícula cargada y un solenoide, denominado *cyon*, dando lugar a una partícula aniónica; sin embargo, la generalización de la estadística fraccionaria

al problema de muchas partículas se lleva a cabo utilizando un campo gauge de Chern-Simons. Así, en una teoría cuántica de campos de Chern-Simons la estadística fraccionaria se implementa a través de un campo gauge no local, de largo alcance, y abeliano en (2+1) dimensiones, cuya acción es precisamente la acción de Chern-Simons. Lerda demuestra que al pasar al problema de muchas partículas aparece de forma natural el término que describe la interacción estadística. O lo que es lo mismo, la dinámica de Chern-Simons automáticamente asocia carga y flujo, y realiza de forma natural lo que se impone como un requerimiento externo en el sistema del *cyon*. Esto mismo sucede en el estudio que estamos realizando sobre el Efecto Hall Cuántico Fraccionario, el sistema de una partícula en presencia de fluxones sería equivalente al problema del *cyon*, y será necesario formular una teoría cuántica de campos de tipo Chern-Simons-Dirac en la que los *fermiones compuestos* resulten ser los cuantos fundamentales. Esto lo estudiaremos en las siguientes Secciones de este Capítulo.

## 5.2 Efecto Hall Cuántico Fraccionario: Parámetro de Orden y Confinamiento Oblicuo

El objetivo de esta Sección es la formulación de una teoría cuántica de campos en la que los *fermiones compuestos* de Jain, con el electrón ocupando un nivel de Landau, resulten cuantos en sectores topológicamente distintos al vacío. El operador de creación ha de ser necesariamente no local, del tipo introducido por Mandelstam, [91], en la teoría de Solitones y extendido por 't Hooft, [122], a las teorías gauge de partículas elementales. Se pretende así el desarrollo de los trabajos de Girvin y McDonald, [46], y Read, [111, 83], en los que se estudia la transición de fase que ocurre en el Efecto Hall Cuántico Fraccionario, de forma que se encuadre en el poderoso marco de los aspectos no perturbativos en teoría cuántica de campos.

De acuerdo con el análisis de la Sección 2.1, el punto de partida natural, entendemos que el régimen pertinente en la transición de fase es el de baja energía, es la teoría de Chern-Simons-Dirac determinada por la acción:

$$S = \int d^3x \left\{ \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi + \frac{\kappa}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho}A^\mu\partial^\nu A^\rho \right\} \quad (5.55)$$

Tomamos unidades naturales donde la longitud magnética es  $l_0^2 \equiv l_c^2 = \frac{2\pi}{eB}$ . El coeficiente del término de Chern-Simons será en general de la forma  $\kappa = \frac{m}{l_0}$ , con

$m$  un número racional. Es conveniente escribir la acción en la forma:

$$\begin{aligned}
S &= \int dt \int dx_1 dx_2 \left\{ \frac{\kappa}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho} A^\mu \partial^\nu A^\rho + \psi^\dagger \left( i \frac{\partial}{\partial t} + i \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} - \beta m \right) \psi \right\} \\
&+ e \int dt \int dx_1 dx_2 \left\{ \psi^\dagger \psi A^0 - \psi^\dagger \vec{\alpha} \psi \vec{A} \right\} \\
\bar{\psi} &= \psi^\dagger \gamma^0 ; \gamma^0 = \beta , \gamma^0 \vec{\gamma} = \vec{\alpha} ; A^\mu = (A^0, \vec{A}) , \gamma^\mu = (\gamma^0, \vec{\gamma})
\end{aligned}$$

pues permite identificar los elementos clave para cuantificar esta teoría. En el gauge de Weyl,  $A^0 = 0$ , la acción de Chern-Simons

$$S_{CS} = \frac{\kappa}{2} \int dt \int dx_1 dx_2 (A_2 \dot{A}_1 - A_1 \dot{A}_2) \quad (5.56)$$

determina completamente la cuantificación del campo  $\vec{A}$  pues estamos ante una teoría topológica de campos. El espacio de fases, antes de reducir tomando cociente por el grupo gauge, es el formado por las componentes  $A_1(\vec{x}, t)$  y  $A_2(\vec{x}, t)$  de la conexión;  $A_1$  es la coordenada y  $\kappa A_2$ , el momento. Cuantificación canónica promueve  $A_1$  y  $A_2$  a operadores que satisfacen las relaciones de conmutación:

$$[\hat{A}_1(\vec{x}, t), \hat{A}_2(\vec{y}, t)] = \frac{i}{\kappa} \delta^{(2)}(\vec{x} - \vec{y}) \quad (5.57)$$

El Hamiltoniano fermiónico libre es de la forma convencional

$$H_0^f = \int dx_1 dx_2 \psi^\dagger (-i \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m) \psi$$

y la cuantificación del campo de Dirac procede por anticonmutadores:

$$\begin{aligned}
\{\hat{\psi}^\dagger(\vec{x}, t), \hat{\psi}(\vec{y}, t)\} &= \delta^{(2)}(\vec{x} - \vec{y}) \\
\{\hat{\psi}^\dagger(\vec{x}, t), \hat{\psi}^\dagger(\vec{y}, t)\} &= \{\hat{\psi}(\vec{x}, t), \hat{\psi}(\vec{y}, t)\} = 0
\end{aligned} \quad (5.58)$$

El Hamiltoniano de interacción es

$$\hat{H}_I = e \int dx_1 dx_2 \hat{\psi}^\dagger \vec{\alpha} \hat{\psi} \cdot \vec{A}$$

y un elemento crucial es la ley de Gauss que debe imponerse como una condición sobre los estados cuánticos:

$$[\kappa \hat{B}(\vec{x}, t) + e \hat{\psi}^\dagger(\vec{x}, t) \hat{\psi}(\vec{x}, t)] |\Omega\rangle = 0 \quad (5.59)$$

$$\hat{B}(\vec{x}, t) = \partial_{x_2} \hat{A}_1(\vec{x}, t) - \partial_{x_1} \hat{A}_2(\vec{x}, t)$$

La observación físicamente más relevante es que (5.59) liga el operador de carga eléctrica  $\hat{\psi}^\dagger\hat{\psi}$  con el operador de campo magnético  $\hat{B}$ , exactamente la situación contraria a la que ocurre en electrodinámica cuántica donde es el operador de campo eléctrico el determinado por el de carga eléctrica.

Para evitar la situación redundante de considerar estados  $|\Omega\rangle$  relacionados por una transformación  $U(1)$  gauge, imponemos el gauge de Coulomb, à la Gupta-Bleuler, como una condición adicional sobre los estados,

$$\left(\partial_{\bar{z}}\hat{A}_z + \partial_z\hat{A}_{\bar{z}}\right)|\Omega\rangle = 0 \quad (5.60)$$

que permite resolver (5.59) sin ambigüedad. Hemos introducido coordenadas y campos complejos,

$$\begin{aligned} z &= x_1 + ix_2, \quad \bar{z} = x_1 - ix_2, \quad \partial_z = \frac{1}{2}(\partial_{x_1} - i\partial_{x_2}), \quad \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_{x_1} + i\partial_{x_2}) \\ \hat{A}_z &= (\hat{A}_1 - i\hat{A}_2), \quad \hat{A}_{\bar{z}} = (\hat{A}_1 + i\hat{A}_2), \quad \hat{B} = i(\partial_z\hat{A}_{\bar{z}} - \partial_{\bar{z}}\hat{A}_z) \end{aligned}$$

En representación de configuración, polarización holomorfa, donde tomamos como estados base los propios de  $\hat{A}_{\bar{z}}$  y  $\hat{\psi}^\dagger\hat{\psi}$ ,

$$\begin{aligned} \hat{A}_{\bar{z}}(\bar{z}, z)|A_{\bar{z}}(\bar{z}, z)\rangle &= A_{\bar{z}}(\bar{z}, z)|A_{\bar{z}}(\bar{z}, z)\rangle \\ :\hat{\psi}^\dagger\hat{\psi}:|\rho(z, \bar{z})\rangle &= \rho(z, \bar{z})|\rho(z, \bar{z})\rangle \end{aligned}$$

(5.59) y (5.60) devienen ecuaciones en derivadas funcionales para el funcional  $\Omega[A_{\bar{z}}; \rho] = \langle A_{\bar{z}}; \rho(z, \bar{z})|\Omega\rangle$ :

$$\begin{aligned} \left(i\kappa\partial_z A_{\bar{z}} - i\partial_{\bar{z}}\frac{\delta}{\delta A_{\bar{z}}} + e\rho\right)\Omega[A_{\bar{z}}; \rho] &= 0 \\ \left(\partial_z A_{\bar{z}} + \frac{1}{\kappa}\partial_{\bar{z}}\frac{\delta}{\delta A_{\bar{z}}}\right)\Omega[A_{\bar{z}}; \rho] &= 0 \end{aligned}$$

Los estados del sistema son pues de la forma:

$$\Omega[A_{\bar{z}}; \rho] = N \exp\left\{-\frac{ie}{4}\int\frac{dz \wedge d\bar{z}}{2i}\rho(z, \bar{z})\partial_{\bar{z}}^{-1}A_{\bar{z}}(z, \bar{z})\right\} \quad (5.61)$$

que resuelven la ecuación:

$$2i\partial_{\bar{z}}\frac{\delta\Omega}{\delta A_{\bar{z}}} = e\rho\Omega$$

En particular, el estado de vacío es  $\Omega[0; 0] = 1$ .

Este formalismo general permite una descripción explícita del operador de creación de *fermiones compuestos* como un operador no local. Si escribimos



$|\Omega\rangle = |\Sigma\rangle \otimes |f\rangle$  como el producto tensor de un estado del campo  $\vec{A}$  por uno fermiónico,

$$\hat{U}_m(z_0)|A_z \equiv 0\rangle = |\text{fluxón}\rangle$$

el operador

$$\hat{U}_m(z_0) = \exp \left\{ i \frac{\kappa m}{e} \int \frac{dz \wedge d\bar{z}}{2i} \hat{F}_{z\bar{z}} \ln \left( \frac{z - z_0}{l_0} \right) \right\} \quad (5.62)$$

crea un estado con  $m$  unidades de cuantos de flujo magnético localizados en  $z_0$ , que denominaremos fluxón. Es inmediato comprobar que:

$$\hat{A}_z(z, \bar{z})|\text{fluxón}\rangle = i \frac{m}{e} \partial_z \ln \left( \frac{z - z_0}{l_0} \right) |\text{fluxón}\rangle$$

puesto que  $\hat{A}_{\bar{z}}$  genera traslaciones en estados propios de  $\hat{A}_z$ . De ahí,

$$\langle \text{fluxón} | \hat{B}(z, \bar{z}) | \text{fluxón} \rangle = \frac{m}{e} \delta^{(2)} \left( \frac{z - z_0}{l_0} \right) \quad (5.63)$$

de acuerdo con lo antedicho. La ley de Gauss requiere que:

$$: \hat{\psi}^\dagger \hat{\psi}(z, \bar{z}) : |f\rangle = -\frac{\kappa m}{e^2} \delta^{(2)} \left( \frac{z - z_0}{l_0} \right) |f\rangle \quad (5.64)$$

de modo que  $|f\rangle$  es un estado de un electrón,

$$|f\rangle = \frac{\kappa m}{e^2} \hat{\Psi}^\dagger(z_0)|0\rangle$$

si  $\kappa = \frac{e^2}{m}$ , creado desde el vacío por el operador de Fermi  $\hat{\psi}^\dagger(z_0)$ . El estado que satisface la ley de Gauss,

$$|a(z_0)\rangle = |\text{fluxón}\rangle \otimes |f\rangle = \hat{a}_m^\dagger(z_0)|0\rangle$$

con

$$\hat{a}_m^\dagger(z_0) = \hat{U}_m(z_0) \otimes \frac{\kappa m}{e^2} \hat{\Psi}^\dagger(z_0)$$

que corresponde a un bosón, si  $m = 2p \pm 1$ , y  $p$  es un entero, y está compuesto por una unidad de carga eléctrica y  $m$  de flujo magnético localizadas en  $z_0$ . Este estado bosónico obedece pues a un *fermión compuesto* de Jain ocupando un nivel de Landau.

Veamos que  $\hat{a}_m^\dagger(z)$  es un operador bosónico si  $m$  es impar. La relación de conmutación

$$\hat{U}_m(z) \hat{\psi}^\dagger(z) = e^{2\pi i m} \hat{\psi}^\dagger(z) \hat{U}_m(z)$$

es debida a la fase Aharanov-Bohm adquirida por el electrón si se crea primero el fluxón: en efecto

$$e^{\{ie \int \hat{A}_w dw\}} \hat{\psi}^\dagger(z)$$

actuando sobre un estado de fluxón da lugar a una fase  $e^{2\pi im}$  en el estado compuesto. El signo menos que ocurre si  $m$  es impar compensa el signo más de los anti-conmutadores fermiónicos y

$$[\hat{a}_m^\dagger(w), \hat{a}_m^\dagger(z)] = 0$$

Siguiendo a 't Hooft, en orden a estudiar la física de estos sectores no perturbativos de la teoría, introduciremos otro operador no local:

$$\begin{aligned} \hat{W}(C) &= \exp \left\{ ie \int_C dz \hat{A}_z(z, \bar{z}) \right\} = \\ &= \exp \left\{ ie \int_0^1 ds \frac{dz(s)}{ds} \int \frac{dz \wedge d\bar{z}}{2i} \hat{A}_z(z, \bar{z}) \delta^{(2)}(z - z(s)) \right\} \end{aligned} \quad (5.65)$$

donde  $z(s)$ ,  $z(0) = z(1)$ , determina una curva cerrada  $C$  en el plano parametrizada por  $s \in [0, 1]$ . El operador de línea de Wilson mide el flujo magnético encerrado por la curva  $C$ .

$$\hat{W}(C)|\text{fluxón}\rangle = \exp \left( m \oint_C \frac{dz}{z - z_0} \right) |\text{fluxón}\rangle = \begin{cases} e^{2\pi im} |\text{fluxón}\rangle, & \text{si } z_0 \in D \\ |\text{fluxón}\rangle, & \text{si } z_0 \notin D \end{cases}$$

con  $\partial D = C$ .  $\hat{W}(C)$  es en un sentido preciso dual a  $\hat{U}(z_0)$ . Sobre estados propios de  $\hat{A}_{\bar{z}}$  su acción da lugar a una traslación:

$$\hat{W}(C)|A_{\bar{z}}(z, \bar{z})\rangle = |A_{\bar{z}}(z, \bar{z}) + e\delta^{(2)}(z - z(s))\rangle$$

El estado creado sobre el vacío corresponde así a una línea de flujo a lo largo de  $C$ :

$$\begin{aligned} |C\rangle &= \hat{W}(C)|0\rangle \\ \langle C|\hat{B}(z)|C\rangle &= 2i\partial_z \delta^{(2)}(z - z(s)) \end{aligned}$$

Para cumplir la ley de Gauss consideramos estados

$$|l(s)\rangle = \hat{l}(s)|0\rangle = |C\rangle \otimes |f(s)\rangle$$

donde

$$\hat{l}(s) = \frac{2i\kappa}{e} \hat{W}(C) \partial_z \hat{\psi}^\dagger(z(s))$$

y el estado fermiónico asociado al vórtice satisface:

$$:\hat{\psi}^\dagger\hat{\psi}(z):|f(s)\rangle = -\frac{2i\kappa}{e}\partial_z\delta^{(2)}(z-z(s))|f(s)\rangle$$

En la teoría de Chern-Simons,  $\hat{W}(C)$  y  $\hat{U}(z_0)$ , más que duales, en el sentido electromagnético son autoduales: ambos crean estados cargados eléctrica y magnéticamente, bien sobre la curva  $C$ , bien en  $z_0$ . En la electrodinámica de Maxwell,  $\hat{W}(C)$ , por el contrario, crea líneas de flujo eléctrico mientras que  $\hat{U}(z_0)$  da lugar a cargas magnéticas puntuales. En este último caso,  $A_z, A_{\bar{z}}$ , son coordenadas y los campos eléctricos,  $E_z, E_{\bar{z}}$ , sus momentos conjugados.

Las relaciones de conmutación de  $\hat{U}_m(z_0)$  y  $\hat{W}(C)$  son peculiares, ver Figura 5.3.

$$\begin{aligned}\hat{U}_m(z_0)\hat{W}(C_1) &= e^{2\pi im}\hat{W}(C_1)\hat{U}_m(z_0) \\ \hat{U}_m(z_0)\hat{W}(C_2) &= \hat{W}(C_2)\hat{U}_m(z_0)\end{aligned}\tag{5.66}$$

y conducen a un análisis cualitativo de las fases del sistema.

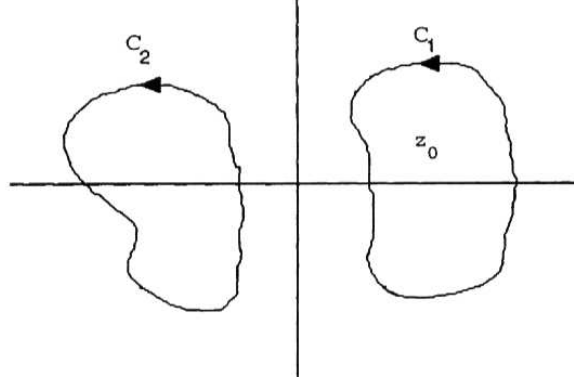


Figura 5.3: Curvas cerradas  $C_1$  y  $C_2$ . Una de ellas rodea al punto  $z_0$ .

Esencialmente hay dos posibilidades divididas en dos subcasos:

- I.

- a) Tomamos como parámetro de orden el operador densidad de carga de los bosones/aniones compuestos,  $:\hat{a}_m^\dagger(z_A)\hat{a}_m(z_B):$ .

Si el valor esperado del parámetro de orden en el estado fundamental

$$\langle:\hat{a}_m^\dagger(z_A)\hat{a}_m(z_B):\rangle \neq 0$$

es distinto de cero existe condensación de carga magnética y eléctrica. La simetría  $U(1)$  es espontáneamente rota, y ello da lugar a solitones con carga eléctrica y magnética asociados al primer grupo de homotopía,  $\pi_1(U(1)) = \mathbb{Z}$ ; es decir, los fluxones resultan solitónicos. Esta es la fase Higgs que, al igual que en superconductividad, da lugar al confinamiento de cargas duales a las del condensado, en este caso magnético/eléctrica, y por tanto, confinamiento oblicuo. En términos de los operadores  $\hat{U}$  y  $\hat{W}$ :

$$\langle \hat{W}(C) \rangle = e^{-\text{Longitud}(C)}, \quad \langle \hat{U}_m(C) \rangle = e^{-\text{Area}(C)}$$

donde hemos extendido  $\hat{U}_m$  en la tercera dimensión.

- b) Consideremos como parámetro de orden, ahora, el operador de creación de aniones compuestos. Si su valor esperado en el estado fundamental

$$\langle \hat{a}_m^\dagger(z_0) \rangle \neq 0$$

es distinto de cero estamos ante la fase de confinamiento en la que:

$$\langle \hat{W}(C) \rangle = e^{-\text{Area}(C)}, \quad \langle \hat{U}_m(C) \rangle = e^{-\text{Longitud}(C)}$$

y se cumple el criterio de Wilson como en electrodinámica cuántica. En este caso, sin embargo, es análogo a la fase Higgs porque ocurre también confinamiento oblicuo.

El fenómeno de condensación de *fermiones compuestos* se analiza mejor en la teoría dual, en la que los estados creados por el operador no local,  $\hat{a}_m^\dagger(z)$ , resultan los cuantos fundamentales asociados a operadores locales. Esto lo estudiaremos en detalle en la Sección 5.3, y adelantamos dos hechos pertinentes ahora:

1. La teoría dual es una teoría gauge abeliana, con grupo  $U(1)_D$ , dual al de partida.
2. El término cinético es de tipo Chern-Simons con coeficiente  $\kappa^{-1}$ . La ruptura de simetría de  $U(1)_D$  conlleva solitones, que son aniones compuestos de carga dual, medida por  $\hat{W}_D(C)$  a través de las relaciones (5.66) para los operadores  $\hat{U}_D, \hat{W}_D$ , definidos como  $\hat{U}, \hat{W}$  en términos del potencial vector  $\hat{A}_z^D, \hat{A}_{\bar{z}}^D$ . Así,  $\langle \hat{W}_D(C) \rangle = e^{-\text{Longitud}(C)}$ , y es fácil ver que  $\langle \hat{W}(C) \rangle = e^{-\text{Area}(C)}$ .

- II.

- a)  $\langle : \hat{a}_m^\dagger(z_A) \hat{a}_m(z_B) : \rangle = 0$ . Es la fase normal.
- b)  $\langle \hat{a}_m^\dagger \rangle = 0$ . Fase normal dual.

El punto central de esta Sección es dilucidar cuál de las fases explicadas anteriormente ocurre en el Efecto Hall Cuántico Fraccionario y determinar sus características físicas. Ello requiere describir el estado de Laughlin, estado fundamental del sistema, en este formalismo y calcular los valores esperados de los parámetros de orden alternativos en dicho estado. El estado de Laughlin es:

$$\begin{aligned}
 \Psi_L(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, \dots, z_N, \bar{z}_N) &= \langle z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, \dots, z_N, \bar{z}_N | \Omega \rangle_L = \\
 &= \prod_{i < j}^N \langle 1_{e^-}(z_i), 1_{e^-}(z_j); i \frac{m}{e} \partial_z \ln \left[ \frac{(z - z_i)}{l_0} \frac{(z - z_j)}{l_0} \right] | \hat{a}_m^\dagger(z_i) e^{-ie \int_{z_j+l_0}^{z_i} dz \hat{A}_z} \hat{a}_m^\dagger(z_j) | 0 \rangle \\
 &\times e^{-\frac{1}{4l_0^2} \sum_{i=0}^N |z_i|^2}
 \end{aligned} \tag{5.67}$$

donde los fermiones son creados en el primer nivel de Landau

$$\hat{\psi}^\dagger(z_i) = \sum_{m=0}^{\infty} \psi_{0m}^\dagger(z_i) A_m^\dagger, \quad \{A_{m'}, A_m\} = \delta_{m'm}$$

toda vez que suponemos  $\vec{A}$  la suma de un campo externo que produce el campo magnético constante,  $\vec{A}^{\text{ext}}$ , y un campo gauge,  $\vec{a}$ , gobernado por el Lagrangiano de Chern-Simons que describe las fluctuaciones cuánticas. De (5.67) uno lee

$$\Psi_L(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, \dots, z_N, \bar{z}_N) = \prod_{i < j}^N \left( \frac{z_i - z_j}{l_0} \right)^m e^{-\frac{1}{4l_0^2} \sum_{i=0}^N |z_i|^2} \tag{5.68}$$

como debe ser, y la interpretación física que se deduce de la fórmula antedicha se representa en la Figura 5.4 a), en cada punto  $z_i$  hay un *fermión compuesto* de un electrón y  $m$  cuantos de flujo, y líneas de flujo de  $z_i + l_0$  al *fermión compuesto* situado en  $z_j$ .

Los estados cuasi-partícula, Figura 5.4 b), se obtienen del mismo modo:

$$\begin{aligned}
 \langle z_0, \bar{z}_0, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, \dots, z_N, \bar{z}_N | Q \rangle_L &= \\
 \prod_{i=1}^N \langle 1_{e^-}(z_i), 1_{e^-}(z_0); i \frac{1}{e} \ln \left[ \frac{(z - z_0)}{l_0} \frac{(z - z_i)}{l_0} \right] | \hat{a}_1^\dagger(z_i) e^{-ie \int_{z_0+l_0}^{z_i} dz \hat{A}_z} \hat{a}_1^\dagger(z_0) | 0 \rangle \\
 \times e^{-\frac{1}{4l_0^2} |z_0|^2} \Psi_L(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, \dots, z_N, \bar{z}_N)
 \end{aligned} \tag{5.69}$$

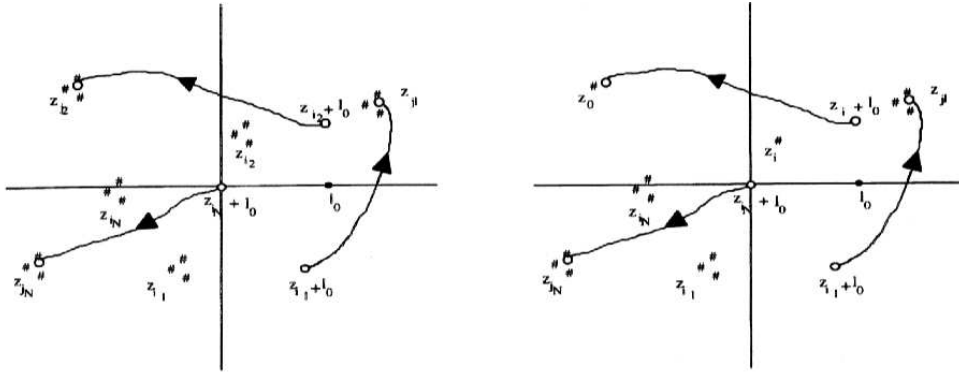


Figura 5.4: a) Los *fermiones compuestos* están formados por un fermión, el punto, y tres cuantos de flujo, #. Cada par de puntos  $z_{i_a}$  y  $z_{j_a}$  están relacionados, en el límite  $\epsilon l_0 \rightarrow 0$ , por una línea de flujo, que une el fermión situado en  $z_{i_a} + l_0$  con el fermión situado en  $z_{j_a}$ . b) Además de los pares de *fermiones compuestos* tenemos una cuasi-partícula en  $z_0$ .

El valor esperado del parámetro de orden en el estado de Laughlin es:

$$\begin{aligned}
 & {}_L \langle \Omega | : \hat{a}_m^\dagger(z_B) e^{-ie \int_{z_A+l_0}^{z_B} dz \hat{A}_z} \hat{a}_m(z_A; l_0) : | \Omega \rangle_L = \\
 & \frac{N}{Z} \int d^2 z_2 \cdots d^2 z_N \sum_{m'=0}^{\infty} \psi_{0m'}^*(z_B) \psi_{0m'}(z_A + l_0) \prod_{i < j=2}^N \left[ \frac{(z_B^* - z_i^*)(z_A - z_j)}{l_0^2} \right]^m \\
 & \times \left| \frac{z_i - z_j}{l_0} \right|^{2m} e^{-\frac{1}{4l_0^2} \sum_{i=2}^N |z_i|^2}
 \end{aligned}$$

donde  $Z$  es una constante de normalización de los estados de bosones compuestos, y  $\hat{a}_m(z_A; l_0) = \hat{U}_m^\dagger(z_A) \hat{\psi}(z_A + l_0)$ . Este valor esperado viene dado por la integral obtenida por Girvin y McDonald en primera cuantificación. Su cómputo, habida cuenta de las rápidas oscilaciones de fase, produce el resultado

$$\begin{aligned}
 & {}_L \langle \Omega | : \hat{a}_m^\dagger(z_B) e^{-ie \int_{z_A+l_0}^{z_B} dz \hat{A}_z} \hat{a}_m(z_A; l_0) : | \Omega \rangle_L \cong \\
 & \frac{eB}{2\pi} \left( \frac{1}{m} - \frac{1}{2} \right) \exp \left\{ -\frac{1}{4l_0^2} |z_B - z_A - l_0|^2 \right\} \exp \left\{ \frac{1}{4l_0^2} z_B^*(z_A + l_0) - \frac{1}{4} z_B(z_A^* + l_0) \right\}
 \end{aligned} \tag{5.70}$$

con el factor  $-\frac{1}{2}$  debido al orden normal. Que en el límite  $z_A + \epsilon l_0 \rightarrow z_A$  resulta:

$$\begin{aligned}
 & {}_L \langle \Omega | : \hat{a}_m^\dagger(z_B) e^{-ie \int_{z_A+\epsilon l_0}^{z_B} dz \hat{A}_z} \hat{a}_m(z_A; \epsilon l_0) : | \Omega \rangle_L \cong \\
 & \frac{eB}{2\pi} \left( \frac{1}{m} - \frac{1}{2} \right) \exp \left\{ -\frac{1}{4l_0^2} |z_B - z_A|^2 \right\} \exp \left\{ \frac{1}{4l_0^2} z_B^*(z_A) - \frac{1}{4} z_B(z_A^*) \right\}
 \end{aligned}$$

Hay pues condensación de carga magnética y eléctrica, por tanto, confinamiento oblicuo aunque aquí, siendo el sistema “autodual”, se realiza en la fase de Higgs. Sin embargo, (5.70) implica un orden de corto alcance en contradicción con lo observado ya que hay manifestaciones del campo  $\vec{a}$  importantes a largas distancias, que describiremos en la próxima Sección.

En realidad, si reemplazamos  $\hat{a}_m^\dagger(z)$  por

$$|\hat{a}_m^\dagger(z) = \exp \left\{ i \frac{\kappa m}{e} \int \frac{dw \wedge d\bar{w}}{2i} \hat{F}_{w\bar{w}} \ln \left| \frac{w-z}{l_0} \right| \right\} \hat{\psi}^\dagger(z)$$

y definimos el estado de Laughlin a partir de  $|\hat{a}_m^\dagger(z)$ , obtenemos como valor esperado del parámetro de orden modificado el resultado siguiente:

$$\begin{aligned} {}_L \langle |\Omega| | : |\hat{a}_m^\dagger(z_B) e^{-ie \int_{z_A+l_0}^{z_B} dz \hat{A}_z} |\hat{a}_m(z_A, l_0) : | |\Omega| \rangle_L = \\ \frac{N}{Z} \int d^2 z_2 \cdots d^2 z_N \sum_{m'} \psi_{0m'}^*(z_B) \psi_{0m'}(z_A + l_0) \prod_{i < j=2}^N \left[ \frac{|z_B^* - z_i^*| \cdot |z_A - z_j|}{l_0^2} \right]^m \\ \times \left| \frac{z_i - z_j}{l_0} \right|^{2m} e^{-\frac{1}{4l_0^2} \sum_{i=2}^N |z_i|^2} \end{aligned}$$

En esta integral las oscilaciones de fase se han suprimido y el resultado de Girvin y McDonald es:

$${}_L \langle |\Omega| | : |\hat{a}_m^\dagger(z_B) e^{-ie \int_{z_A+l_0}^{z_B} dz \hat{A}_z} |\hat{a}_m(z_A, l_0) : | |\Omega| \rangle_L \cong \frac{eB}{2\pi} \left( \frac{1}{m} - \frac{1}{2} \right) \left| \frac{z_A - z_B}{l_0} \right|^{-\frac{m}{2}}$$

que obedece a una fase con orden de largo alcance. Nótese que la sustitución de  $\hat{a}^\dagger$  por  $|\hat{a}^\dagger$  no es más que la transformación de gauge

$$g(w) = \exp \left\{ -i \frac{\kappa m}{e} \text{Im} \ln \frac{(w-z)}{l_0} \right\}$$

actuando sobre  $A_w(z)$  que, aunque singular, lo es en los puntos ya singulares en que se localizan los bosones compuestos. Desde el punto de vista de la mecánica estadística la fase de Higgs de este sistema da lugar a un nuevo tipo de orden que caracteriza un nuevo tipo de fase: hay condensación de cargas electro/magnéticas pero largo alcance magnético. En el Efecto Hall Cuántico Fraccionario no hay efecto Meissner, el flujo magnético no es expulsado.

La fase de confinamiento, dual de la de Higgs en las teorías gauge ordinarias y esencialmente similar en las de Chern-Simons, no ocurre en el estado de Laughlin:

$${}_L \langle \Omega | \hat{a}_m^\dagger(z) | \Omega \rangle_L = 0$$

Un estado coherente,

$$|\alpha\rangle_m = e^{i\alpha \int \hat{U}_m^\dagger(z) dz} |0\rangle$$

de resultar el estado fundamental, señalaría la fase confinante

$${}_m\langle\alpha|\hat{a}_m^\dagger(z_0)|\alpha\rangle_m = \alpha\delta^{(2)}(z_0)$$

vía condensación de aniones compuestos.

Para caracterizar del todo esta fase es necesario estudiar no sólo  $\rho(z_A, z_B)$  sino también la función de Green de dos partículas, que en segunda cuantificación es:

$$\begin{aligned} g(|z_A - z_B|) = & \quad (5.71) \\ & \frac{{}_L\langle\Omega| : \hat{a}_m^\dagger(z_A) e^{-ie \int_{z_B+l_0}^{z_A} dz \hat{A}_z} \hat{a}_m(z_B; l_0) \hat{a}_m^\dagger(z_B, l_0) e^{-ie \int_{z_A}^{z_B+l_0} dz \hat{A}_z} \hat{a}_m(z_A) : |\Omega\rangle_L}{\left( {}_L\langle\Omega| : \hat{a}_m^\dagger(z_A) e^{-ie \int_{z_A+l_0}^{z_A} dz \hat{A}_z} \hat{a}_m(z_A; l_0) : |\Omega\rangle_L \right)^2} = \\ & \frac{N(N-1) \int d^2 z_3 \cdots d^2 z_N \Psi_L^*(z_A, z_B + l_0, z_3, \cdots, z_N) \Psi_L(z_A, z_B + l_0, z_3, \cdots, z_N)}{Z \rho_L^2} \end{aligned}$$

Es decir, coincide con la función de Green de dos partículas en primera cuantificación que puede calcularse numéricamente para  $m = 3, 5$ , y de manera exacta para  $m = 1$  que correspondería al estado de Laughlin con factor de llenado uno [81]. El análisis de la dependencia de  $g(|z_A - z_B|)$  en  $\frac{|z_A - z_B|}{(2m)^{1/2}}$  permite observar en cada caso el comportamiento característico de un líquido. Hay una región alrededor del origen de la cual los electrones son excluidos y a continuación un rápido crecimiento hasta un valor constante, como puede verse en la Figura 5.5. Las desviaciones respecto de este valor constante para valores grandes de  $\frac{|z_A - z_B|}{(2m)^{1/2}}$  aumentan al aumentar  $m$ , esto significa que se producirá una transición de fase a un cristal de Wigner, Figura 5.6. Los cálculos numéricos de Laughlin confirman que ello ocurre para  $m$  grande, baja densidad de electrones, mientras que con alta densidad el estado de Laughlin es un líquido cuántico: no sólo la densidad es homogénea en promedio sino que las interacciones obtenidas en términos de  $g(|z_1 - z_2|)$ , aparte de un núcleo duro, ocurren uniformemente en el condensado.

Como resumen de esta Sección resaltemos dos puntos:

- 1. La teoría Chern-Simons-Dirac da cabida a los *fermiones compuestos* de Jain sin necesidad de añadir potenciales singulares como hicimos en la Sección anterior. Es necesario, sin embargo, introducir operadores no locales en relación con estos cuantos compuestos.



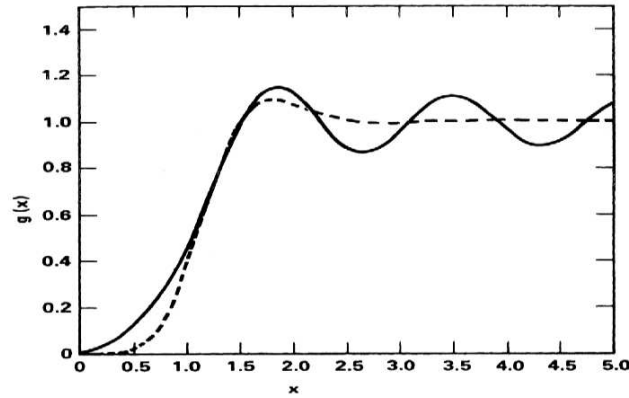


Figura 5.5: Comparación de la función de distribución radial,  $g(|z_A - z_B|)$ , para la función de onda de Laughlin,  $\Psi_{f=\frac{1}{m}}$ , con  $m = 3$  (línea de trazos), con la de un cristal de Wigner (línea sólida), para la misma densidad, representada frente a la variable reducida  $\frac{|z_A - z_B|}{(2m)^{1/2}}$ . [81]

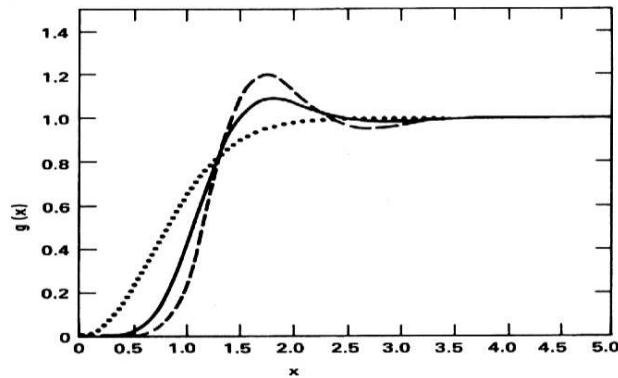


Figura 5.6: Función de distribución radial,  $g(|z_A - z_B|)$ , para la función de onda de Laughlin,  $\Psi_{f=\frac{1}{m}}$ , con  $m = 1$  (línea de puntos),  $m = 3$  (línea sólida), y  $m = 5$  (línea de trazos) representada frente a la variable reducida  $\frac{|z_A - z_B|}{(2m)^{1/2}}$ . [81]

- 2. El estado fundamental propuesto por Laughlin para el Efecto Hall Cuántico Fraccionario resulta natural en este formalismo. Equivale a un condensado de pares de bosones compuestos que implica un nuevo tipo de orden. A pesar de ser de largo alcance con penetración de flujo magnético, existe un gap: todas las excitaciones fundamentales son de masa finita como corresponde al hecho de que el estado de Laughlin describe un fluido incompresible. La dinámica del campo gauge se debe a un término de Chern-Simons sin propagación asociada de fotones.

### 5.3 Teoría de Campos del Efecto Hall Cuántico: Vórtices de Chern-Simons

El desarrollo de la Sección 5.2 muestra la conveniencia de un estudio más profundo de la teoría de campos pertinente al análisis teórico del Efecto Hall Cuántico Fraccionario, la teoría de Chern-Simons-Dirac. Proponemos en esta Sección abordar este problema partiendo del marco más amplio de Electrodinámica Cuántica con término de Chern-Simons.

La acción es:

$$S = \int d^3x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\kappa}{4} \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu F_{\nu\rho} + \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi \right\}$$

con las condiciones de Secciones anteriores salvo el uso de unidades naturales.

Las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + \kappa \epsilon^{\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = -e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (5.72)$$

indican que  $*F^\mu = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho} F_{\nu\rho}$  satisface la ecuación de Klein-Gordon. Multiplicando los dos miembros de la ecuación (5.72) por  $(\epsilon_{\lambda\alpha\nu} \partial^\lambda - \kappa g_{\alpha\nu})$  se obtiene:

$$(\square^2 + \kappa^2) *F_\mu = K_\mu \quad (5.73)$$

donde  $K_\mu = (\epsilon_{\lambda\mu\nu} \partial^\lambda - \kappa g_{\mu\nu}) j^\nu$ . La solución es

$$*F_\mu(x) = - \int d^3x' G(x' - x) K_\mu(x')$$

si  $G(x' - x)$  es el resolvente del operador  $\square^2 + \kappa^2$ .

La ley de Gauss queda modificada por la presencia del término de Chern-Simons

$$\partial_i F^{i0} + \kappa F_{12} = j^0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \kappa B = \rho \quad (5.74)$$

y es un ingrediente crucial, puesto que implica una relación global entre el flujo magnético y la carga total en cualquier solución de la teoría. Vemos desde la teoría clásica, como en la Sección 5.2 fue establecido en un marco cuántico, que las partículas asociadas con el campo  $\psi$  transportan carga y originan flujo magnético.

El espectro de partículas se lee fácilmente en la gauge de Lorentz/Feynman  $\partial_\mu A^\mu = 0$ . Además del fermión fundamental con propagador

$$S(p) = \frac{1}{\gamma \cdot p + m}$$

la solución en ondas planas

$$A^\nu(x) = \int d^3p a^\nu(p) e^{ipx} \quad (5.75)$$

de la ecuación

$$\square^2 A^\nu + \kappa \epsilon^{\nu\alpha\beta} \partial_\alpha A_\beta = 0 \quad (5.76)$$

requiere

$$M_\nu^\lambda a^\nu(p) = 0 \quad (5.77)$$

si  $M_\nu^\lambda(p) = -p_\mu p^\mu \delta_\nu^\lambda + i\kappa \epsilon^{\lambda\alpha} p_\alpha$ . Hay soluciones no triviales de (5.77) si y sólo si

$$\det(M_\nu^\lambda(p)) = (-p_\mu p^\mu)(-p_\mu p^\mu + \kappa^2) = 0$$

La primera posibilidad  $p_\mu p^\mu = 0$  implica  $p_\alpha a_\beta - p_\beta a_\alpha = 0$  que automáticamente es trivial,  $F_{\alpha\beta} = 0$ . La segunda posibilidad  $p_\mu p^\mu = \kappa^2$  denota la existencia de un bosón vectorial de masa  $\kappa$  vía el propagador:

$$D_{\mu\nu}(p) = M_{\mu\nu}^{-1}(p) = \frac{1}{p^2 - \kappa^2} \left[ g_{\mu\nu} - i\kappa \epsilon_{\mu\nu\lambda} \frac{p^\lambda}{p^2} \right]$$

En cuanto al estudio de las posibles polarizaciones es conveniente tomar el sistema de referencia del centro de masas:  $p^\mu = (\kappa, 0, 0)$ . Entonces (5.77) equivale a:  $a^0 = 0$  y  $a^1 = ia^2$ , es decir, sólo hay una polarización independiente. El problema del espín del fermión de Dirac en el plano ha sido suficientemente estudiado en la Sección 2.2.1.

La adición del término de Chern-Simons da lugar a una física más rica que la que se deriva de un fermión con masa y un bosón vectorial también pesado, con sólo una polarización, en el plano. Ello es patente en el límite de baja energía,  $\kappa \rightarrow \infty$ , donde el término de Chern-Simons domina sobre el término de Maxwell, del que se puede prescindir, y la ecuación (5.73) deviene

$$\kappa^2 *F_\mu = K_\mu \Rightarrow F^{12} = -\frac{j^0}{\kappa}, \quad \kappa^2 \epsilon_{ij} E^j = K_i \quad (5.78)$$

Es evidente que no hay propagación, y el Hamiltoniano que corresponde al campo  $A_i$  es cero, pero existe un espacio de fases, el espacio de soluciones de (5.78), y una forma simpléctica, la contribución a la acción del término de Chern-Simons, que son los elementos necesarios para proceder a la cuantificación canónica (geométrica).

Forma simpléctica:

$$S_{CS} = \int dt d\sigma \int d^2\vec{x} A_1'(\vec{x}) \dot{A}_2(\vec{x})$$

donde el punto y la coma refieren a derivación respecto de  $t$  y  $\sigma$  respectivamente. Nótese que  $A_1$  y  $A_2$  son coordenada y momento, y que la integración en los parámetros resulta:

$$\omega_{CS} = \int d^2\vec{x} A_1(\vec{x}) A_2(\vec{x})$$

También define una estructura de Poisson en el modo usual,

$$\{A_1(\vec{x}, t), A_2(\vec{y}, t)\} = \frac{1}{\kappa} \delta^{(2)}(\vec{x} - \vec{y})$$

En la Sección 5.2 llevamos a cabo este procedimiento antes de tener en cuenta la simetría respecto del grupo gauge, que, usando la representación holomorfa, impusimos sobre los estados. Es posible tomar cociente por el grupo  $\text{Maps}(\mathbb{R}^2, U(1))$  antes de cuantificar. Resulta así que todo el problema equivale a una mecánica cuántica topológica en el espacio interno del campo gauge. Se induce, por tanto, que la teoría cuántica del campo electromagnético en el plano con un término de Chern-Simons contiene dos elementos:

- a) Un bosón vectorial con masa y una sola polarización.
- b) El problema “clásico” de Landau, una partícula clásica cargada eléctricamente en presencia de un campo magnético constante, definido en el espacio de configuraciones gauge planas. Estas últimas son triviales si el espacio-tiempo es homotópicamente trivial, pero si el grupo de homotopía no es la identidad, da lugar a un espacio de configuración muy rico. En el caso de puntos marcados constituye el espacio donde ocurre la interacción estadística. En el caso de superficies de Riemann es esencialmente la Jacobiana de dicha superficie.

En el límite de baja energía sólo la mecánica cuántica topológica asociada a b) sobrevive.

En presencia de fuentes las cosas cambian ligeramente, y nuestro propósito ahora es estudiar la teoría de Chern-Simons-Dirac, límite de baja energía de la Electrodinámica Cuántica de Chern-Simons tridimensional, dada por la acción:

$$\begin{aligned}
 S_{CSD} &= S_D + S_{CS} \\
 S_D &= \int d^3x \left\{ \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi + \int d^3y \bar{\psi}(x)\bar{\psi}(y)V(x,y)\psi(y)\psi(x) \right\} \quad (5.79) \\
 S_{CS} &= \frac{\kappa}{2} \int d^3x \{ \epsilon_{\mu\nu\rho} A^\mu \partial^\nu A^\rho \}
 \end{aligned}$$

donde hemos incluido la interacción a dos cuerpos entre los electrones, dada por  $V(x, y)$ , para un tratamiento más fino del problema. La función de partición de la teoría cuántica es la integral funcional:

$$Z = \int [d\bar{\psi}][d\psi][dA_\mu] e^{iS_D} e^{iS_{CS}} \quad (5.80)$$

Como  $S_D$  incluye términos cuárticos en los campos de Fermi uno trataría de abordar el problema del cálculo de  $Z$  en teoría de perturbaciones en  $V$ . Es posible, sin embargo, un tratamiento alternativo mediante el uso de un campo auxiliar. La acción modificada será:

$$\begin{aligned}
 S_D^M &= S_D \\
 &- \int d^3x \int d^3y \left[ \bar{\psi}_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y) - \chi_{\alpha\beta}^*(x, y) \right] V_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(x, y) \left[ \psi^\gamma(x)\psi^\delta(y) - \chi^{\gamma\delta}(x, y) \right]
 \end{aligned} \quad (5.81)$$

que da lugar a la función de partición cuántica

$$Z = \int [d\bar{\psi}][d\psi][d\chi^*][d\chi][dA_\mu] e^{iS_D^M} e^{iS_{CS}} \quad (5.82)$$

que es totalmente equivalente a (5.80) pues la integración en  $\chi^*$ ,  $\chi$  del término añadido a  $S_D$  es gaussiana y puede ser absorbida en la normalización. De otro lado  $S_D^M$  es cuadrático en los campos  $\bar{\psi}$ ,  $\psi$  de modo que la integración fermiónica puede ser computada:

$$I = \int [d\bar{\psi}][d\psi] e^{iS_D^M} = e^{i\Gamma_{\text{ef}}[A_\mu, \chi^*, \chi]}$$

y se obtiene el resultado exacto:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{\text{ef}}[A_\mu, \chi^*, \chi] &= \int d^3x \int d^3y \chi_{\alpha\beta}^*(x, y) V_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(x, y) \chi^{\gamma\delta}(x, y) \\
 &+ \ln \text{Det} \left[ \frac{\begin{pmatrix} i\gamma^\mu D_\mu - m & \Phi \\ \Phi^* & -i\gamma^\mu D_\mu - m \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} i\gamma^\mu D_\mu - m & 0 \\ 0 & -i\gamma^\mu D_\mu - m \end{pmatrix}} \right] \quad (5.83)
 \end{aligned}$$

donde

$$\Phi_{\alpha\beta}(x) = \int d^3y \chi_{\gamma\delta}(x, y) V_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}(x, y)$$

El primer sumando da lugar a un gráfico (Figura 5.7). que describe la destrucción de un par de fermiones que componen el bosón  $\chi$ , y la creación de otro, vía la interacción  $V$  a nivel árbol.

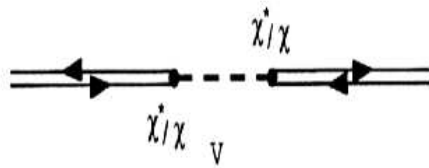


Figura 5.7: Vértice para los nuevos campos bosónicos  $\chi, \chi^*$

Sustituye el vértice en los campos originales (Figura 5.8)

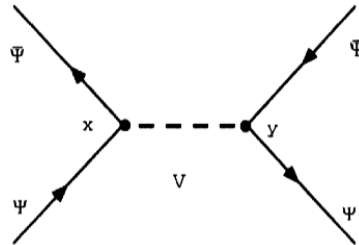


Figura 5.8: Vértice para los campos originales  $\psi, \bar{\psi}$

El otro sumando es similar a lo encontrado en la Sección 2.1, pero, aquí el operador diferencial contiene el campo  $\Phi$ , además del campo  $A_\mu$ ; el logaritmo de su determinante, cocientado por el operador de Dirac en el vacío, equivale a la suma de los diagramas, Figura 5.9.

Nos quedamos así a orden un lazo en la expansión en  $\hbar$ , que es suficiente habida cuenta de que diagramas con más lazos sólo producen renormalizaciones finitas. Como elementos novedosos, hemos incluido gráficos debidos a contratérminos que

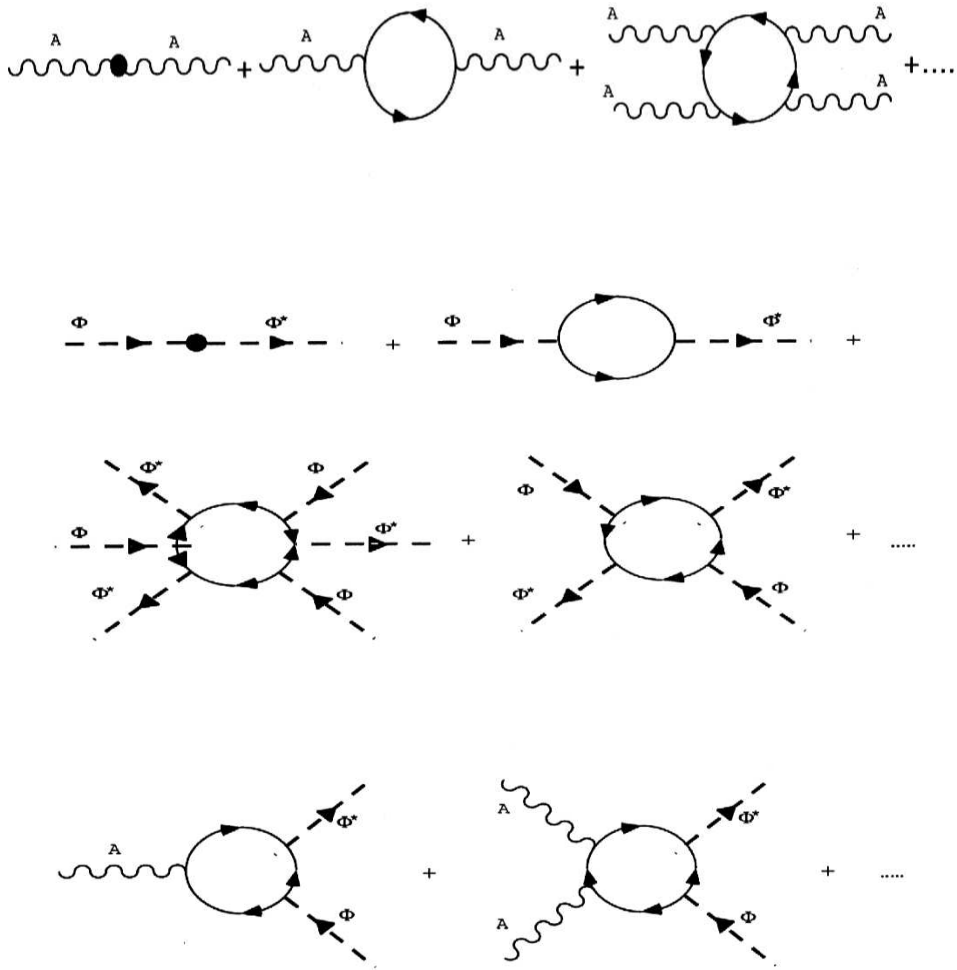


Figura 5.9: Diagramas que contribuyen al segundo sumando de la acción efectiva  $\Gamma_{\text{ef}}$ .

renormalizan los de la polarización del vacío del bosón vectorial  $A_\mu$  y escalar  $\Phi$ , los únicos divergentes, que, como en la Sección 2.1 serían tratados à la Pauli-Villars.

Para conseguir expresiones exactas consideramos interacciones de corto alcance e independientes de las componentes del campo  $\psi$ :

$$V_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}(x, y) = \lambda^2 \delta_{\alpha\beta} \delta^{\gamma\delta} \delta^{(3)}(x - y)$$

En ese caso  $\Phi_{\alpha\beta}(x) = \chi_{\alpha\beta}(x) = \delta_{\alpha\beta} \Phi(x)$ , y de los gráficos arriba dibujados procedemos a “leer”, como en la Sección 2.1, la acción efectiva:

- 1. En la primera línea el gráfico pertinente es el de polarización del vacío. Como en el Capítulo 2, Parte I, induce una acción de la forma:

$$\mathcal{L}_{\text{ef}} = -\frac{1}{4} \tilde{\Pi}_1(0) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \Pi_2(0) A^\mu * F_\mu$$

ver (2.28). El segundo término da lugar a una renormalización de  $\kappa$ .

- 2. Del gráfico de polarización del vacío del campo  $\Phi$ , segunda línea, y los dos últimos de la tercera, se deduce:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{ef}} &= \frac{1}{2} D_\mu \Phi^* D^\mu \Phi = \\ &= \frac{1}{2} \tilde{\Pi}_3(0) \partial_\mu \Phi^* \partial^\mu \Phi + i \Pi_4(0) A_\mu \Phi^* \overleftrightarrow{\partial}^\mu \Phi + \frac{1}{2} \Pi_5(0) A_\mu A^\mu \Phi^* \Phi \end{aligned}$$

con adecuada renormalización de constantes de acoplamiento y función de ondas.

$\tilde{\Pi}_3(0)$  viene del lazo fermiónico, renormalizado, del diagrama de polarización del vacío;  $\Pi_4(0)$  y  $\Pi_5(0)$ , finitos, de los lazos fermiónicos de los gráficos con líneas externas en  $A_\mu$  y  $\Phi$ ,  $\Phi^*$ , y pares de líneas externas en  $A_\mu$  y  $\Phi$ ,  $\Phi^*$ . Nótese los signos de las flechas.

- 3. Los gráficos con cuatro y seis líneas externas bosónicas dan lugar a:

$$\mathcal{L}_{\text{ef}} = \Pi_6(0) (\Phi^* \Phi)^2 + \Pi_7(0) (\Phi^* \Phi)^3$$

con  $\Pi_6$  y  $\Pi_7$  debidos a los correspondientes lazos fermiónicos.

Con el criterio de respetar invarianza gauge, y renormalizabilidad, no hay más términos inducidos por fluctuaciones cuánticas, y tenemos, así, la teoría efectiva:

$$\begin{aligned} S_{\text{ef}} &= \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} (D_\mu \Phi)^* D^\mu \Phi + \mu^2 \Phi^* \Phi + \alpha (\Phi^* \Phi)^2 + \beta (\Phi^* \Phi)^3 \right\} \\ &+ \int d^3x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\kappa_{\text{ren}}}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho} A^\mu \partial^\nu A^\rho \right\} \end{aligned} \quad (5.84)$$



que es la bien conocida teoría de Maxwell-Chern-Simons-Higgs.

Nos vemos, así, abocados al estudio de la teoría de Chern-Simons-Higgs, el límite de baja energía de la acción efectiva (5.84), en orden a describir el Efecto Hall Cuántico Fraccionario en el marco de la teoría cuántica de campos. La situación que corresponde a la transición de fase al orden de largo alcance implicado por el estado de Laughlin ocurre cuando  $\mu^2$ ,  $\alpha$  y  $\beta$  son tales que (5.84) a baja energía es de la forma:

$$S_{CSH} = \int d^3x \left\{ \frac{\kappa}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho} A^\mu \partial^\nu A^\rho + \frac{1}{2} (D_\mu \Phi)^* (D^\mu \Phi) - U(\Phi \Phi^*) \right\} \quad (5.85)$$

$$D^\mu \Phi = \partial^\mu \Phi + ie A^\mu \Phi ; U(\Phi \Phi^*) = \frac{\lambda}{8} \Phi \Phi^* (\Phi \Phi^* - v^2)^2$$

donde, por supuesto, los campos y constantes de acoplamiento de (5.85) resultan de las renormalizaciones pertinentes implícitas en (5.84).

Resumimos las características esenciales de acuerdo con el detallado trabajo de García-Fuertes, [45, 44]. Las ecuaciones de Euler-Lagrange son

$$D_\mu D^\mu \Phi = -2 \frac{\delta U}{\delta \Phi^*}$$

$$\kappa \epsilon^{\mu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = j^\mu$$

donde la corriente Nöther asociada al grupo de simetría  $U(1)$  es:

$$j^\mu = (\rho, \vec{j}) = \frac{ie}{2} [\Phi^* D^\mu \Phi - (D^\mu \Phi)^* \Phi]$$

Particularmente importante es la ley de Gauss:

$$\kappa F_{12} = j^0, \quad B = -\frac{\rho}{\kappa} \quad (5.86)$$

que permite resolver la componente  $A_0$  del campo gauge:

$$A_0 = \frac{\kappa B}{e^2 |\Phi|^2} - \frac{1}{e} \partial_0 \arg \Phi \quad (5.87)$$

Del tensor energía-momento,

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (D^\mu \Phi)^* D^\nu \Phi + \frac{1}{2} (D^\nu \Phi)^* D^\mu \Phi - g^{\mu\nu} \left[ \frac{1}{2} (D^\alpha \Phi)^* D_\alpha \Phi - U(\Phi) \right]$$

al que no contribuye el término de Chern-Simons como su naturaleza topológica prescribe, obtenemos la energía, el momento y el momento angular:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= T^{00} = \frac{1}{2} |D_0 \Phi|^2 + \frac{1}{2} (D_i \Phi)^* D_i \Phi + U(\Phi) \\ \mathcal{P}^i &= T^{0i} = \frac{1}{2} (D^0 \Phi)^* D^i \Phi + \frac{1}{2} (D^i \Phi)^* D^0 \Phi \\ \mathcal{J} &= \epsilon_{ij} x^i \mathcal{P}^j = \frac{1}{2} (D^0 \Phi)^* \epsilon_{ij} x^i D^j \Phi + \frac{1}{2} (D^j \Phi)^* \epsilon_{ij} x^i D^0 \Phi \end{aligned} \quad (5.88)$$

La variedad de soluciones clásicas independientes del tiempo, y homogéneas, es topológicamente la unión disjunta de una circunferencia y un punto,  $V = S^1 \cup \{\cdot\}$ ,

$$\Phi_v = ve^{i\varphi} \quad \cup \quad \Phi_0 = 0 \quad (5.89)$$

y determina la estructura del estado fundamental o de vacío de la teoría cuántica a través del hecho por el cual el valor esperado del campo cuántico en el estado fundamental es de la forma (5.89).

Hay sectores desconectados en el espacio de Hilbert del sistema de dos tipos según la elección de vacío ó estado fundamental.

- I. La elección de  $\Phi_0 = 0$  no altera la simetría  $U(1)$  y estamos en la fase simétrica. El espectro de partículas se lee de la expansión hasta el orden cuadrático de la acción en torno a la configuración  $\Phi_0 = 0$ :

$$S_{SIM}^{(2)}(\Phi) = \int d^3x \left[ \frac{1}{2} \partial_\mu \eta^* \partial^\mu \eta - \frac{\lambda}{8} v^4 |\eta|^2 + \frac{\kappa}{2} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} A_\alpha F_{\beta\gamma} \right]$$

si  $\Phi(x) = \Phi_0 + \eta(x)$ .  $S_{SIM}^{(2)} = S_A^{(2)} + S_\eta^{(2)}$ , y en la fase simétrica las fluctuaciones cuánticas del sistema son dos partículas escalares de masa  $\frac{\sqrt{\lambda}v^2}{2}$ .

- II. La elección de un punto de  $S^1$ , por ejemplo  $\Phi_v = v$ , otro cualquiera lleva a un nuevo sector desconectado completamente equivalente, da lugar a la pérdida o ruptura de la simetría  $U(1)$ . En la fase asimétrica el espectro de partículas es prescrito por el mecanismo de Higgs: la expansión del campo escalar  $\Phi(x) = v + \eta(x)$  lleva a  $U(\Phi) = \frac{\lambda}{2} v^4 \eta_1^2 + \theta(\eta^3)$  que identifica la parte imaginaria de  $\eta$ ,  $\eta(x) = \eta_1(x) + i\eta_2(x)$ , como bosón de Goldstone. Uno define un nuevo campo vectorial en la forma  $b_\mu = A_\mu + \frac{1}{ev} \partial_\mu \eta_2$ , de modo que:

$$(D_\mu \Phi)^* D^\mu \Phi = \partial_\mu \eta_1 \partial^\mu \eta_1 + e^2 v^2 b_\mu b^\mu + \dots$$

$$S_{ASIM}^{(2)} = \int d^3x \left\{ \frac{\kappa}{2} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} b_\alpha G_{\beta\gamma} + \frac{1}{2} \partial_\mu \eta_1 \partial^\mu \eta_1 + \frac{1}{2} e^2 v^2 b_\mu b^\mu - \frac{\lambda}{2} v^4 \eta_1^2 \right\}$$

La ecuación para el campo  $b_\mu$ , que ha incorporado al bosón de Goldstone como componente longitudinal, es:

$$\kappa \epsilon^{\mu\nu\alpha} G_{\nu\alpha} + e^2 v^2 b^\mu = 0$$

La descomposición de  $b^\mu$  en ondas planas da lugar a soluciones no triviales si y sólo si  $p_\mu p^\mu = \left[ \frac{e^2 v^2}{\kappa} \right]^2$ . Como anteriormente se puede ver que sólo una

polarización es independiente y  $b_\mu$  describe una partícula vectorial con masa polarizada. En esta fase tenemos también un bosón de Higgs  $\eta_1$  con masa  $\sqrt{\lambda}v^2$ .

El fenómeno crucial del modelo de Chern-Simons-Higgs que elucida la naturaleza del efecto Hall Cuántico Fraccionario es la existencia de solitones, configuraciones estáticas de energía finita tanto topológicas como no topológicas, con características físicas muy peculiares, que son soluciones de las ecuaciones clásicas. Ello es así debido a que los estados cuánticos de solitón tienen exactamente las características físicas de los bosones compuestos de la Sección 5.2 ocupando un nivel de Landau, y no es necesario introducir tales entes como objetos extraños en la teoría, sino que ocurren de modo natural como solitones o vórtices, si uno tiene en cuenta que el campo vectorial  $A_i^s$  es vorticial.

Para configuraciones estacionarias la ley de Gauss (5.87) deviene

$$A_0 = \kappa \frac{B}{e^2 |\Phi|^2}$$

y energía, momento lineal y momento angular resultan:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{1}{4} \frac{\kappa^2 B^2}{e^2 |\Phi|^2} + \frac{1}{2} (D_i \Phi)^* D_i \Phi + U(\Phi) \\ \mathcal{P}^i &= -\kappa \frac{B}{e^2 |\Phi|^2} j^i \\ \mathcal{J} &= -\kappa \frac{B}{e^2 |\Phi|^2} \epsilon_{il} x^i j^l \end{aligned}$$

La parte estática de la energía

$$E = \int d^2x \left\{ \frac{1}{4} \frac{\kappa^2}{e^2 |\Phi|^2} F_{ij} F_{ij} + \frac{1}{2} (D_i \Phi)^* D_i \Phi + U(\Phi) \right\} \quad (5.90)$$

es finita si se verifican las siguientes condiciones de contorno:

$$F_{ij}|_{|x| \rightarrow \infty} = 0, \quad D_i \Phi|_{|x| \rightarrow \infty} = 0, \quad U(\Phi)|_{|x| \rightarrow \infty} = 0 \quad (5.91)$$

Como es bien conocido en teoría de solitones la homotopía de  $\text{Maps}(\partial\mathbb{R}^2 = S^1, V)$  que clasifica topológicamente las diversas posibilidades admitidas por (5.91) determina a su vez la topología del espacio de configuración  $\mathcal{C}$ :

$$\mathcal{C} = \frac{\{\Gamma = (\Phi, A_i) / \text{estacionaria y } E < +\infty\}}{\text{Maps}(\mathbb{R}^2, U(1))}$$

En efecto, (5.91) se satisface en los dos casos siguientes:

- 1.  $|\Phi(\infty, 0)| = v$ , o lo que es lo mismo:

$$\Phi(\infty, \theta) = v g(\theta) \quad \text{y} \quad A_\theta(\infty, \theta) = -\frac{i}{e} g^{-1}(\theta) \partial_\theta g(\theta)$$

donde  $g : S^1 \rightarrow U(1)$ . Así pues  $\mathcal{C}_v = \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{C}_v(n)$  y  $\pi_0(\mathcal{C}_v) = \mathbb{Z} = \pi_1(U(1))$ , la partición en sectores disconexos debida a las posibles elecciones  $g_n(\theta) = e^{in\theta}$  homotópicamente distintas.

- 2.  $\Phi(\infty, \theta) = 0$  y  $A_\theta(\infty, 0) = -if^{-1}(\theta) \partial_\theta f(\theta)$ . Ahora (5.91) admite  $f_n(\theta) = e^{i(n+\alpha)\theta}$ ,  $\alpha \in [0, 1]$ , puesto que  $D_i \Phi|_{|x| \rightarrow \infty} = 0$  automáticamente. También  $\mathcal{C}_0 = \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{C}_0(n)$ ,  $\pi_0(\mathcal{C}_0) = \pi_1(U(1))$ .

En resumen,  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 \sqcup \mathcal{C}_v = \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{C}_0(n) \sqcup \bigsqcup_{m \in \mathbb{Z}} \mathcal{C}_v(m)$  de acuerdo con  $\pi_0(\mathcal{C}) = \pi_0(V) \otimes \pi_1(V) = \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}$ . Es posible introducir un doblete de cargas topológicas, absolutamente conservadas, que distinguen los distintos sectores desconectados de  $\mathcal{C}$ :

$$Q^T = \begin{pmatrix} Q_0^T \\ Q_1^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\Phi(\infty, 0)| \\ \frac{1}{2\pi} \int d^2x F_{12} \end{pmatrix},$$

$$Q_0^T[\mathcal{C}_0] = 0, \quad Q_0^T[\mathcal{C}_v] = v, \quad Q_1^T[\mathcal{C}_0(n)] = n + \alpha, \quad Q_1^T[\mathcal{C}_v(n)] = n$$

Es de notar que  $Q_1^T$  en los sectores  $\mathcal{C}_0$  y garantizar la estabilidad de soluciones con  $\alpha \neq 0$  requerirá la conservación de otras cargas.

Los solitones en que estamos interesados son los mínimos absolutos de  $E$ , por tanto soluciones de las ecuaciones clásicas, en los distintos sectores. En orden a su búsqueda observamos que si  $E$  se puede escribir en la forma de Bogomolny [15],

$$E = \int d^2x \left\{ \frac{1}{2} G^2(|\Phi|) \left[ F_{12} \pm \frac{e}{2G(|\Phi|)} (v^2 - |\Phi|^2) \right]^2 + \frac{1}{2} |D_1 \Phi \pm i D_2 \Phi|^2 \right\} \\ \mp \frac{1}{2} e v^2 \int d^2x F_{12}$$

los mínimos absolutos, con energía  $E = \pi e v^2 |\Phi|$ , son soluciones de las ecuaciones de primer orden:

$$F_{12} \mp \frac{e}{2G(|\Phi|)} (v^2 - |\Phi|^2) = 0 \\ D_1 \Phi \pm i D_2 \Phi = 0$$

(5.90) es exactamente de esta forma en el valor crítico  $\lambda = \frac{2e^4}{\kappa^4}$  con la elección de  $G$  siguiente:  $G(|\Phi|) = \frac{\kappa^2}{2e^2 |\Phi|^2}$ .

Nos contentamos, sin embargo, con las soluciones radiales de las ecuaciones

$$\begin{aligned} F_{12} \pm \frac{2\pi e^3}{\kappa^2} |\Phi|^2 (v^2 - |\Phi|^2) &= 0 \\ D_1 \Phi \pm i D_2 \Phi &= 0 \end{aligned}$$

que son los solitones del modelo en el valor crítico. Es útil el uso de coordenadas polares:

$$\begin{aligned} A_r &= A_1 \cos \theta + A_2 \sin \theta, & A_\theta &= -r A_1 \sin \theta + r A_2 \cos \theta \\ \partial_r &= \partial_1 \cos \theta + \partial_2 \sin \theta, & \partial_\theta &= -r \partial_1 \sin \theta + r \partial_2 \cos \theta \\ D_r \Phi &= \partial_r \Phi + i e A_r \Phi, & D_\theta \Phi &= \partial_\theta \Phi + i e A_\theta \Phi \\ F_{r\theta} &= \partial_r A_\theta - \partial_\theta A_r, & F_{12} &= \frac{1}{r} F_{r\theta} = -B \\ D_1 \pm i D_2 &= e^{i\theta} (D_r \pm \frac{i}{r} D_\theta) \end{aligned}$$

Las ecuaciones de primer orden toman la forma:

$$\begin{aligned} \frac{e}{r} F_{r\theta} &= \mp \frac{m^2 |\Phi|^2}{2 v^2} \left( 1 - \frac{|\Phi|^2}{v^2} \right) \\ D_r \Phi \pm \frac{i}{r} D_\theta \Phi &= 0 \end{aligned} \quad (5.92)$$

donde  $m = \frac{e^2 v^2}{\kappa}$  es la masa tanto de la partícula vectorial como de la escalar: en el punto crítico  $\lambda = \frac{2e^4}{\kappa^4}$  coinciden, como en la transición de fase entre superconductores de tipo I y tipo II.

El *ansatz* encaminado al hallazgo de soluciones de (5.92) con simetría radial, consiste en suponer:

$$\Phi(r, \theta) = v g(r) e^{in\theta}, \quad A_r = 0, \quad A_\theta = \frac{a(r) - n}{e}$$

Las ecuaciones en derivadas parciales (5.91) reducen el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{da}{dr} &= \frac{m^2}{2} g^2 (g^2 - 1) \\ \frac{dg}{dr} &= \frac{a g}{r} \end{aligned} \quad (5.93)$$

que han de ser resueltas con las condiciones siguientes:

- 1. En los sectores  $\mathcal{C}_v(n)$  las condiciones de contorno (5.91) requieren

$$g(\infty) = 1 \quad , \quad a(\infty) = 0$$

Las condiciones

$$n g(0) = 0 \quad , \quad a(0) = n$$

aseguran que las soluciones, centradas en el origen, son regulares allí, de modo que se garantiza la energía finita de soluciones de (5.93). La existencia de soluciones de esta naturaleza se demuestra en el trabajo de García-Fuertes [44] siguiendo las técnicas de Sprücker y Yang, [118]. El modelo presenta pues solitones topológicos, con flujo magnético cuantizado y densidad de energía centrada alrededor del origen, que, a veces reciben el nombre de vórtices, también, pues el flujo magnético es la vorticidad de  $A_\theta$ .

- 2. En los sectores  $\mathcal{C}_0(n)$ , las condiciones de contorno en el infinito y de regularidad en el origen son:

$$\begin{aligned} g(\infty) &= 0, & a(\infty) &= -\alpha \\ n g(0) &= 0, & a(0) &= n \end{aligned}$$

Existen también soluciones, en este caso no topológicas pues el flujo magnético no es cuantizado, que son por tanto de tipo solitón, o vórtice, si la parte entera del flujo magnético en unidades de  $\Phi_0$  es distinta de cero.

El flujo magnético y el momento angular de estas configuraciones clásicas que son mínimos absolutos de la acción se deducen de las fórmulas:

$$\begin{aligned} \Phi &= - \oint_{r=\infty} d\theta A_\theta \\ J &= \frac{\kappa}{2\pi e^2} \left\{ \oint_{r=\infty} - \oint_{r=0} \right\} \left\{ r d\theta \left[ \frac{r}{2} \left[ \left( D_r \frac{\Theta}{2} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( D_\theta \frac{\Theta}{2} \right)^2 \right] - D_r \frac{\Theta}{2} \left[ r D_r \frac{\Theta}{2} \right] \right] \right\} \end{aligned}$$

Aquí,  $\Phi(r, \theta) = v g(r, \theta) e^{i \frac{\Theta}{2}(r, \theta)}$ , de modo que, para configuraciones con simetría radial  $g(r, \theta) = g(r)$ ,  $\frac{\Theta}{2}(r, \theta) = n \theta$ , se tiene:

$$D_r \frac{\Theta}{2} = \partial_r(n\theta) + e A_r = 0, \quad D_\theta \frac{\Theta}{2} = \partial_\theta(n\theta) + e A_\theta = a(r)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{2\pi}{e} [n - a(\infty)], & Q &= -\frac{\kappa}{2\pi} \Phi \\ J &= \frac{\kappa}{2e^2} [a^2(\infty) - a^2(0)] \end{aligned}$$

y el flujo magnético, carga eléctrica y momento magnético de las soluciones solitónicas en los distintos sectores valen:

- 1.  $\mathcal{C}_v(n)$ :

$$\Phi = \frac{2\pi}{e}n, \quad Q = -\frac{n}{e}\kappa, \quad J = -\frac{\kappa n^2}{2e^2}$$

El otro hecho de interés, la forma de las funciones  $g(r)$ ,  $a(r)$  y  $F_{12}(r)$  para las soluciones de este tipo es dibujada en la Figura 5.10.

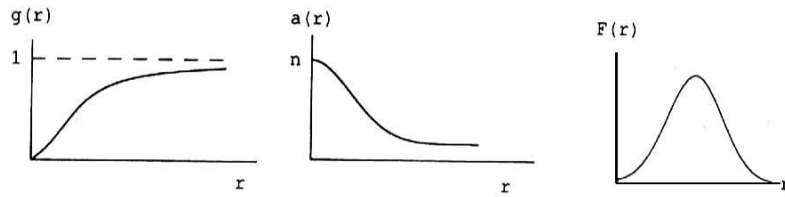


Figura 5.10: Representación de  $g(r)$ ,  $a(r)$  y  $F_{12}(r)$  v.s.  $r$ .

- 2.  $\mathcal{C}_0(n)$ :

$$\Phi = \frac{2\pi}{e}(n + \alpha), \quad Q = -\frac{(n + \alpha)}{e}\kappa, \quad J = -\frac{\kappa(\alpha^2 - n^2)}{2e^2}$$

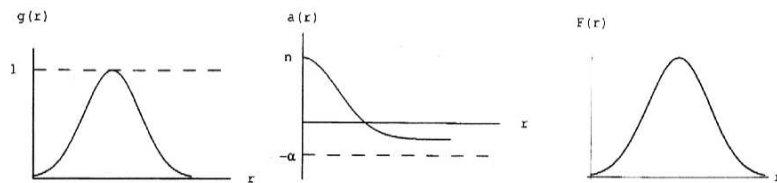


Figura 5.11: Representación de  $g(r)$ ,  $a(r)$  y  $F_{12}(r)$  v.s.  $r$ .

Es bien conocido en teoría de solitones que existen estados cuánticos genuinos, autoestados del Hamiltoniano con autovalor real, tal que el flujo magnético, la carga eléctrica y el momento angular en cuanto operadores dan valores esperados en dichos estados idénticos a los calculados sobre las soluciones clásicas con tal de

que las renormalizaciones habituales se tengan en cuenta. El punto crucial es el siguiente:

Fijemos el valor de  $\kappa$  en la forma:

$$\kappa = \frac{e^2}{m} \quad (5.94)$$

- a. Estados cuánticos de solitón/vórtice topológico en el Sector  $\mathcal{C}_v(m)$  de la teoría efectiva de Chern-Simons-Higgs son los fermiones compuestos ocupando un nivel de Landau de Jain. El operador  $a_m^\dagger(z_0)$  de la Sección 5.2 es el operador de creación de solitones/vórtices topológicos si se sustituye  $\partial_z \ln |z|$  en el exponente de  $\hat{U}_m(0)$  por  $a_T(r) - m$ , es decir, por una función sin singularidades. Por tanto, en la teoría efectiva los bosones compuestos aparecen como solitones; no hay necesidad de transformaciones gauge singulares.
- b. Estados cuánticos de solitón/vórtice topológico en Sectores  $\mathcal{C}_v(n)$  con  $n \neq m$  dan lugar a cuasi-partículas y cuasi-huecos. En efecto, la carga eléctrica es fraccionaria,  $Q = -\frac{n}{m}e$ , como se conoce que ocurre en las excitaciones fundamentales del Efecto Hall Cuántico Fraccionario. Más aún, automáticamente poseen estadística fraccionaria. El modo más elegante de poner este hecho de manifiesto es seguir el tratamiento de Jackiw, [65]:

Consideremos dos solitones/vórtices topológicos de Chern-Simons cada uno con carga  $Q$  y llevemos a cabo un test de la estadística transportando un solitón alrededor del otro, un doble intercambio de las partículas, a través de un camino que transcurre en regiones donde la energía es prácticamente cero. La función de onda del solitón test adquiere una fase:

$$P \exp \left[ iQ \int_C \hat{A} \right]$$

pero

$$\int_C \hat{A} |\text{solitón}\rangle = \int_\Sigma B |\text{solitón}\rangle = -\frac{2\pi Q}{\kappa} |\text{solitón}\rangle$$

La fase debida al simple intercambio de las dos partículas es la mitad; el factor estadístico es, por tanto,  $-\pi \frac{Q^2}{\kappa} = \pi \frac{n^2}{m}$ , es decir, una estadística fraccionaria/aniónica tiene lugar. El teorema espín-estadística, sin embargo, sobrevive pues uno verifica inmediatamente que para los solitones/vórtices topológicos  $2\pi J = -\pi \frac{Q^2}{\kappa}$ .

Este análisis es tanto más exacto cuanto más concentrados estén los solitones/vórtices. En el límite singular coincide con el desarrollo de la Sección



3.4. En rigor se trataría de aplicar el refinamiento de Coleman, Goldhaber, y otros [2], que extienden el estudio de la fase Aharonov-Bohm a distribuciones extensas de carga eléctrica y campo magnético.

- c. Cabe pensar que los solitones/vórtices no topológicos en los Sectores  $\mathcal{C}_0(n)$  dan lugar a estados excitados sobre los anteriores con estabilidad debida a alguna ley de conservación, en este caso el momento angular.

En el ámbito de la física de la materia condensada el tratamiento del Efecto Hall Cuántico Fraccionario en términos de teoría cuántica de campos, [137, 138], [86], es una versión no relativista del análisis realizado hasta el momento en esta Sección, que pasamos a resumir brevemente.

El punto de partida es la acción de Chern-Simons-Schrödinger

$$S_{CSS} = \int d^3x \left\{ \frac{\kappa}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho} a^\mu \partial^\nu a^\rho + i\Psi^* D_t \Psi - \frac{1}{2m} (D_i \Psi)^* D_i \Psi \right\} - \frac{1}{2} \int d^3x \int d^3x' \{ \Psi^*(x) \Psi^*(x') V(x-x') \Psi(x') \Psi(x) \} \quad (5.95)$$

$\Psi$  se entiende como un campo escalar, mientras que el tetravector potencial se escribe,  $A_\mu = A_\mu^{(e)} + a_\mu$ , como la suma de un término externo y otro tetravector  $a_\mu$  cuya dinámica es determinada por el Lagrangiano de Chern-Simons. Las derivadas covariantes son de la forma

$$D_t \Psi = \partial_t \Psi + ieA_0^{(e)} \Psi + iew_0 \Psi, \quad D_i \Psi = \partial_i \Psi + ieA_i^{(e)} \Psi + ia_i \Psi$$

y la resolución de la ligadura de Chern-Simons

$$a_i = \frac{2\pi}{\kappa} \epsilon_{ij} \partial^j \int d^2\vec{x}' G(\vec{x} - \vec{x}') \Psi^*(\vec{x}') \Psi(\vec{x}') \\ = \frac{2\pi e^2}{m} \epsilon_{ij} \int d^2\vec{x}' \frac{x_i - x'_j}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \Psi^*(\vec{x}') \Psi(\vec{x}')$$

indica que  $a_\mu$  tiene únicamente implicaciones globales, es decir, si  $m$  es impar los cuantos asociados a  $\Psi$  satisfacen estadística de Fermi, son electrones con relación de dispersión no relativista.

Computamos a continuación la acción efectiva por el método de integraciones sucesivas sobre variables rápidas y lentas [104]. Ello consiste en lo siguiente: consideremos los campos  $\Psi$  y  $a_\mu$  como la suma de dos términos

$$\Psi(x) = \Psi_l(x) + \Psi_r(x), \quad a_\mu(x) = a_\mu^l(x) + a_\mu^r(x)$$

donde  $\Psi_l$  y  $a_\mu^l$  incluyen los términos del desarrollo de Fourier con frecuencias por debajo de una referencia. Son las variables “lentas”;  $a_\mu^r$  y  $\Psi_r$ , por el contrario, son “rápidas”, responden a las fluctuaciones de alta energía. La acción efectiva Wilsoniana se define como:

$$e^{i\Gamma_W[A_\mu^{(e)}, \Psi_l^*, \Psi_l, a_\mu^l]} = \int [da_\mu^r][d\Psi_r^*][d\Psi_r] e^{iS_{CSS}[A_\mu, \Psi^*, \Psi]} \quad (5.96)$$

que no se diferencia de la ordinaria si no hay variables lentas, todos los cuantos tienen masas por encima de la frecuencia de referencia.

$\Gamma_W$  determina así el comportamiento del sistema a baja energía, el régimen en el que el Efecto Hall Cuántico Fraccionario ocurre, mientras que las contribuciones de alta energía son subsumidas en la renormalización de los parámetros y los campos que aparecen en  $\Gamma_W$ . Sin realizar el cálculo de (5.96), muy similar al cómputo de (5.83), escribimos el resultado:

$$\begin{aligned} \Gamma_W[A_\mu^{(e)}, \Psi^*, \Psi, a_\mu] &= \int d^3x \left\{ \frac{\kappa}{4\pi} \epsilon_{\mu\nu\rho} a^\mu \partial^\nu a^\rho + i\Psi^* D_t \Psi - \frac{1}{2m} (D_i \Psi)^* D_i \Psi \right\} \\ &+ \int d^3x \left\{ \frac{\mu^2}{2} \Psi^* \Psi + \frac{\lambda}{4} (\Psi^* \Psi)^2 \right\} \end{aligned} \quad (5.97)$$

El índice  $l$  en (5.97) ha sido suprimido pero ha de entenderse que los campos en  $\Gamma_W$  son “lentos”. Conviene aclarar los siguientes puntos:

- a). En  $\Gamma_W$ , salvo el campo externo, todos los campos que aparecen están renormalizados. Asimismo los parámetros  $\lambda$ ,  $m$ ,  $e$  y  $\mu$  son los renormalizados por las fluctuaciones de alta frecuencia.
- b). Debemos elegir el coeficiente de Chern-Simons desnudo  $\kappa_0$  de modo que el renormalizado sea  $\kappa = \frac{e^2}{m}$  para que (5.97) de lugar a la estadística adecuada.
- c). Tomando la frecuencia de referencia que selecciona variables lentas por debajo de  $|\mu|$ , el término  $\mu^2 \Psi^* \Psi$  no entraría en (5.97).
- d). En el cómputo de  $\Gamma_W$  hemos supuesto que  $V$  es una interacción local y tenido en cuenta los diagramas pertinentes. Hay que advertir que aparecen nuevos vértices, no existentes a priori en  $S_{CSS}$ , debido a la descomposición  $\Psi = \Psi_l + \Psi_r$ .
- e). El término de Maxwell está prohibido pues daría lugar a un bosón con masa. Eligiendo adecuadamente la frecuencia de referencia queda excluido.

Del Lagrangiano Wilsoniano en el límite  $\mu^2 = 0$

$$\mathcal{L}_W = i\Psi^*\dot{\Psi} + \kappa a_1 \dot{a}_2 - \frac{1}{2m}(D_i\Psi)^* D_i\Psi + \frac{\lambda}{4}|\Psi|^4 + a_0(\kappa - \Psi^*\Psi)$$

se lee inmediatamente el Hamiltoniano efectivo:

$$H_W = \int d^2\vec{x} \left( \frac{1}{2m}(D_i\Psi)^* D_i\Psi - \frac{\lambda}{4}(\Psi^*\Psi)^2 \right) \quad (5.98)$$

Los mínimos absolutos de  $H_W$  son configuraciones “autoduales”. Ello quiere decir lo siguiente, [64]: si  $A_i^{(e)} = 0$ ,

$$D_i\Psi^* D_i\Psi = |(D_1 - iD_2)\Psi|^2 - b\Psi^*\Psi - m\vec{\nabla} \wedge \vec{j}$$

donde  $b = \frac{e^2}{\kappa}\Psi^*\Psi$ . Existe un valor crítico de los parámetro, pues si  $\lambda = \frac{e^2}{m\kappa}$ ,

$$H_W = \int d^2\vec{x} \frac{1}{2m} |(D_1 - iD_2)\Psi|^2$$

que es cero si y sólo si se satisfacen la ecuación de autodualidad:

$$(D_1 - iD_2)\Psi = 0 \quad (5.99)$$

junto con la condición de ligadura

$$b = \vec{\nabla} \wedge \vec{a} = -\frac{e^2}{\kappa}\Psi^*\Psi \quad (5.100)$$

que constituyen un sistema de ecuaciones de primer orden. La resolución del sistema (5.99, 5.100),  $a_1 - ia_2 = -\frac{i}{e}(\partial_1 - i\partial_2) \ln \Psi$ , equivale a la resolución de la ecuación de Liouville

$$\nabla^2 \ln \rho = -\frac{e^2}{\kappa} \rho \quad (5.101)$$

si  $\rho = \Psi^*\Psi$ . Existen soluciones con simetría radial de (5.101)

$$\rho(r) = \frac{4\kappa}{e} \cdot \frac{N^2}{r^2} \left\{ \left( \frac{r_0}{r} \right)^N + \left( \frac{r}{r_0} \right)^N \right\}^{-2}$$

donde  $r_0$  es una constante y  $N$  un número entero; para eludir las posibles singularidades en el cero de  $\rho$ , cuando  $r \rightarrow 0$ , uno debe imponer

$$a_i(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} \partial_i \chi - \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \frac{x_j}{r^2} (N - 1)$$

donde  $\chi$  es la fase de  $\Psi = he^{i\chi}$ ,  $h = \rho^{1/2}$ . Si  $\phi = \arctan \frac{x_2}{x_1}$  ello implica  $\chi = (1 - N)\phi$  y soluciones regulares auto-duales con  $N \geq 1$  son de la forma:

$$\Psi(r) = 2\sqrt{\frac{\kappa}{e}} \cdot \frac{N}{r} \left\{ \left(\frac{r_0}{r}\right)^N + \left(\frac{r}{r_0}\right)^N \right\}^{-1} e^{i(1-N)\phi} \quad (5.102)$$

Su flujo magnético asociado es

$$\Phi = -\frac{\pi e^2}{\kappa} \int d^2\vec{x} \rho(r) = -2\pi(2N)$$

en principio como el de las cuasi-partículas o cuasi-huecos de la teoría no relativista. Esa interpretación no se sostiene por dos razones: 1). Son de energía cero. 2). Dependen de un parámetro de escala,  $H_W$  es invariante conforme, y el flujo magnético no está concentrado en el espacio.

En realidad las soluciones (5.102) aparecen exactamente como el límite no relativista de los solitones no topológicos de la acción de Chern-Simons-Higgs. En efecto, el límite no relativista de

$$S_H = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} (D_\mu \Phi)^* D^\mu \Phi - \frac{\pi e^2}{2c^4 \kappa^2} |\Phi|^2 (|\Phi|^2 - v^2)^2 \right\} \quad (5.103)$$

donde se ha reintroducido la velocidad de la luz  $c$ , se analiza mediante la separación de la energía en reposo [34],

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2m}} e^{-imc^2 t} \Psi$$

La densidad Lagrangiana de materia de orden  $\frac{1}{c}$  deviene

$$\mathcal{L}_H^{NR} = i\Psi^* \left( \partial_t + \frac{ie}{c} A_0 \right) \Psi - \frac{1}{2m} |(\vec{\nabla} + \frac{ie}{c} \vec{A}) \Psi|^2 + \frac{\pi e^2}{4mc|\kappa|} |\Psi|^4$$

nótese que el término de orden sexto en el potencial  $\frac{-\pi e^2}{16m^3 c^4 \kappa^2} |\Psi|^6$  desaparece en el límite no relativista, precisamente la acción que da lugar a  $H_W$ .

Por ello los solitones/vórtices a interpretar como cuasi-partículas del Efecto Hall Cuántico Fraccionario en el límite no relativista necesitan de un término  $\mu^2 \Psi^* \Psi$  en la acción efectiva de Zhang *et al.* Aunque la adición de dicho término, además de romper la invariancia conforme, impide la existencia de soluciones exactas autoduales, un análisis numérico desvela soluciones aproximadas que, con el signo adecuado de  $\mu^2$ , presentan flujo concentrado, densidad de energía finita y estabilidad topológica, como se requiere para ser interpretadas como cuasi-partículas [28]. Es interesante en este momento comentar que tanto los solitones

topológicos autoduales del modelo relativista como las soluciones numéricas del no relativista son soluciones también fuera de los valores críticos. La diferencia estriba en que para valores no críticos de los parámetros dos solitones/vórtices topológicos desplazados interactúan atractiva o repulsivamente, de modo independiente de la interacción debida a su carga electro/magnética.

## 5.4 Teoría de Ginzburg-Landau y Dualidad

Una vez obtenida la acción efectiva de tipo Chern-Simons-Higgs puede ser interpretada como la teoría de Ginzburg-Landau, fenomenológica, del Efecto Hall Cuántico Fraccionario. En una teoría de campo medio uno integra sobre las variables fermiónicas y procede a cuantificar la acción efectiva resultante por medio de la aproximación de la fase estacionaria contentándose con la primera corrección cuántica. Las soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange de la acción efectiva son los ingredientes centrales y sus propiedades determinan el valor esperado de los operadores en los estados cuánticos. Esperamos así leer de los mínimos de la acción

$$S_{CSH} = \int d^3x \left\{ \frac{\kappa}{4\pi} \epsilon_{\mu\nu\rho} a^\mu \partial^\nu a^\rho + \frac{1}{2} (D_\mu \Phi)^* (D^\mu \Phi) - U(\Phi) \right\}$$

$$D_\mu \Phi = \partial_\mu \Phi + ieA_\mu^{(e)} \Phi + ie a_\mu \Phi, \quad U(\Phi) = \frac{\lambda}{8} |\Phi|^2 (|\Phi|^2 - v^2)^2$$

las características esenciales del Efecto Hall Cuántico Fraccionario. En un análisis paralelo al realizado por Zhang et al en el modelo no relativista, estudiaremos las soluciones y sus propiedades en tres niveles de complejidad:

- 1). Las condiciones de Efecto Hall Cuántico son tales que:

$$A_0^{(e)} = 0, \quad \epsilon_{ij} \partial_i A_j^{(e)} = -B = \text{cte.}$$

El mínimo absoluto de  $S_{CSH}$  con estas condiciones y  $\partial_\mu \Phi$  es:

$$\vec{a} = -\vec{A}^{(e)} \quad \text{y} \quad |\Phi| = v \quad \text{ó} \quad |\Phi| = 0$$

La ley de Gauss  $-B = -2\pi \frac{e}{\kappa} |\Phi|^2$  implica que la primera solución requiere:

$$v_B^2 = \frac{\kappa B}{2\pi e} = \frac{eB}{2\pi m} \quad (5.104)$$

$|\Phi| = v_B$  es la solución de campo medio que corresponde al estado fundamental del Efecto Hall Cuántico Fraccionario.

- 2). Como antes consideremos

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A}^{(e)} = -B, \quad \vec{a} = -\vec{A}^{(e)} \text{ y } \quad \partial_\mu \Phi = 0$$

pero contemplemos un campo eléctrico inducido  $\partial_i A_0^{(e)} = -E_i$ . La corriente se define como

$$j_i = \frac{\delta S_{CSH}}{\delta A_i^{(e)}} = -\frac{\delta S_H}{\delta a_i} = \frac{\delta S_{CS}}{\delta a_i} = \frac{\kappa}{2\pi} \epsilon_{ij} (\partial_0 a_j - \partial_j a_0)$$

que en la solución  $|\Phi| = v_B$ ,  $a_i = -A_i^{(e)}$ ,  $a_0 = -A_0^{(e)}$  resulta

$$j_i = \frac{e^2}{2\pi m} \epsilon_{ij} E_j = \sigma_{Hij} E_j$$

y la conductividad Hall es:

$$\sigma_{Hij} = \frac{e^2}{2\pi m} \epsilon_{ij}$$

como debe ser.

- 3). Finalmente analizaremos qué ocurre si  $|\Phi|^2 = v^2$  para  $v \neq v_B$  en alguna región del plano. De  $B = \left(\frac{2\pi}{e}\right) m v_B^2$  pasaríamos a  $B' = \left(\frac{2\pi}{e}\right) m v^2$ . Como  $\delta B = \left(\frac{2\pi}{e}\right) m \delta v^2$  se requiere una energía magnética

$$\delta \mathcal{E} = \left(\frac{2\pi}{e}\right) m B \delta v^2$$

Es pues una situación de mayor energía que la del estado fundamental. Da sin embargo lugar a mínimos absolutos de la acción, soluciones de las ecuaciones de campo estables, cuando  $\delta v^2$  se diferencia de  $v_B^2$  en las zonas en que se concentra la energía del solitón/vórtice. Las cuasi-partículas y cuasi-huecos corresponden también a soluciones de campo medio, cuando  $\kappa = \frac{e^2}{m}$ .

Sea en el marco de la teoría cuántica de campos, sea por medio de una aproximación fenomenológica à la Ginzburg-Landau, la conclusión esencial es que las cuasi-partículas y cuasi-huecos, excitaciones sobre el estado fundamental en el Efecto Hall Cuántico Fraccionario, son los vórtices de una teoría efectiva de tipo Chern-Simons-Higgs. El modelo en teoría de campos que describe directamente el Efecto Hall Cuántico Fraccionario resulta así un modelo en que los vórtices de Chern-Simons-Higgs son los cuantos fundamentales. Una idea de gran actualidad, la de dualidad, incorporada de la física estadística a la teoría cuántica de campos

por Coleman, Mandelstam, Olive y otros [25, 90, 102], es la guía para descubrir dicho modelo. Cerraremos el círculo de ideas presentado en las Secciones 5.2 y 5.3, y con ello completaremos esta última, aplicando la transformación de dualidad al modelo Chern-Simons-Higgs.

Partimos de la acción

$$S_{CSH} = \int d^3x \left\{ \frac{\kappa}{4\pi} \epsilon_{\mu\nu\rho} A^\mu F^{\nu\rho} + \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h - U(h) \right\} \\ + \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} h^2 (\partial_\mu \chi + e A_\mu) (\partial^\mu \chi + e A^\mu) \right\}$$

donde hemos tomado el campo de Higgs como  $\Phi(x) = h(x)e^{i\chi(x)}$ ,  $h(x) = \rho^{1/2}(x)$ , y el potencial  $U(h)$  de modo que admita vórtices autoduales. Recordemos que el espectro de partículas está formado por un bosón de Higgs y un bosón vectorial con masa y una sola polarización así como una plétora de vórtices topológicos y no topológicos. De la corriente eléctrica

$$j^\mu = \rho^2 (\partial^\mu \chi + e A^\mu)$$

y la corriente topológica

$$K^\mu = \frac{1}{2\pi} \epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu \partial_\rho \chi$$

extraemos la información sobre las propiedades físicas de partículas y solitones. En particular, sólo los vórtices tienen carga eléctrica

$$Q = \int d^2x \rho^2 (\cdot \chi + e A^0)$$

y topológica, esencialmente magnética,

$$Q_T = \frac{1}{2\pi} \int d^2x \epsilon_{ij} \partial_i \partial_j \chi$$

distinta de cero.

Nos planteamos el cómputo de la “acción” cuántica

$$Z = \int [hdh][d\chi][dA_\mu] e^{iS_{CSH}}$$

e incluimos en la integral funcional el efecto de los vórtices topológicos mediante el cambio de variables

$$\chi(x) = \chi_V(x) + \xi(x)$$

donde  $\chi_V$  es fijado de acuerdo con la solución general, no necesariamente radialmente simétrica, [44] de las ecuaciones vorticiales:

$$\Phi_V(x) = h_V(x) e^{i\chi_V(x)} \tag{5.105}$$

$$\chi_V(x) = \sum_{a=1}^n \arg[\vec{x} - \vec{x}_a(t)], \quad h_V(x) \stackrel{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_a}{\approx} (\vec{x} - \vec{x}_a(t)), \quad h_V(x) \stackrel{|\vec{x}| \rightarrow \infty}{\approx} e^{-\alpha|\vec{x}|^2}$$

Aparte de un Jacobiano, que absorberemos en la normalización de la integral funcional, se produce el siguiente cambio en la medida de integración

$$[d\chi] = [d\chi_V][d\xi] = [d\vec{x}_a(t)][d\xi]$$

Para calcular

$$\begin{aligned} Z[\vec{x}_a(t)] &= \int [hdh][d\xi][dA_\mu] \exp \left\{ i \int d^3x \frac{\kappa}{4\pi} \epsilon_{\mu\nu\rho} A^\mu F^{\nu\rho} \right\} \\ &\cdot \exp \left\{ i \int d^3x \left[ \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h - U(h) \right] \right\} \\ &\cdot \exp \left\{ i \int d^3x \frac{h^2}{2} (\partial_\mu \chi_V + \partial_\mu \xi + eA_\mu) (\partial^\mu \chi_V + \partial^\mu \xi + eA^\mu) \right\} \end{aligned}$$

nos servimos de un campo que no altera nada y permite una mejor manipulación del término en  $\partial_\mu \chi$ :

$$\begin{aligned} &\int [dC_\mu][hdh] \exp \left\{ i \int d^3x \left[ -\frac{1}{2h^2} C_\mu C^\mu + C_\mu (\partial^\mu \chi_V + \partial^\mu \xi + eA^\mu) \right] \right\} \\ &= \int [h^2 dh] \exp \left\{ i \int \left[ \frac{1}{2} h^2 (\partial_\mu \chi + eA_\mu) (\partial^\mu \chi + eA^\mu) \right] \right\} \end{aligned}$$

La identidad anterior resulta de integración funcional Gaussiana.

Procedemos a integrar la variable  $\xi$

$$\int [d\xi] \exp \left\{ i \int d^3x C_\mu \partial^\mu \xi \right\} = \delta(\partial^\mu C_\mu)$$

con el resultado de incluir una delta de Dirac funcional en  $Z[\vec{x}_a(t)]$ . Ello sugiere un nuevo campo vectorial auxiliar:

$$\int [dC^\mu] \delta(\partial^\mu C_\mu) = \int [dC^\mu][dv^\mu] \delta(C^\mu - \frac{e}{2\pi} \epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu v_\rho)$$

que convierte en inmediata la integral en  $C^\mu$ ,

$$\begin{aligned} Z[\vec{x}_a(t)] &= \int [h^2 dh][dv^\mu][dA^\mu] \exp \left\{ i \int d^3x \frac{\kappa}{4\pi} \epsilon_{\mu\nu\rho} A^\mu F^{\nu\rho} \right\} \\ &\cdot \exp \left\{ i \int d^3x \left[ \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h - U(h) \right] \right\} \\ &\cdot \exp \left\{ i \int d^3x \left[ -\frac{e^2}{8\pi^2} \cdot \frac{1}{h^2} \epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu v_\rho \epsilon_{\mu\alpha\beta} \partial^\alpha v^\beta \right] \right\} \\ &\cdot \exp \left\{ i \int d^3x \frac{e}{2\pi} \epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu v_\rho (\partial_\mu \chi_V + eA_\mu) \right\} \end{aligned}$$



Resta únicamente integrar en  $A^\mu$

$$\begin{aligned} & \int [dA^\mu] \exp \left\{ i \int d^3x \left( \frac{\kappa}{2\pi} A_\mu \epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu A_\rho + \frac{e^2}{2\pi} A_\mu \epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu v_\rho \right) \right\} \\ &= \exp \left\{ i \int d^3x \frac{e^4}{2\pi\kappa} \epsilon_{\mu\nu\rho} v^\mu \partial^\nu v^\rho \right\} \end{aligned}$$

donde, como en la anterior integración gaussiana, el “factor”  $\pi \sqrt{\frac{2}{\kappa}} \cdot \text{Det}^{-1/2}(*\partial)$  se absorbe en la normalización, para obtener:

$$\begin{aligned} Z[\vec{x}_a(t)] &= \int [h^2 dh][dv^\mu] \cdot \exp \left\{ i \int d^3x \left[ \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h - U(h) \right] \right\} \\ &\cdot \exp \left\{ i \int d^3x \left[ -\frac{e^2}{16\pi^2} \left( \frac{f_{\mu\nu} f^{\mu\nu}}{h^2} - \frac{8\pi e^2}{\kappa} \epsilon_{\mu\nu\rho} v^\mu \partial^\nu v^\rho \right) \right] \right\} \\ &\cdot \exp \left\{ -\frac{i}{2\pi} e \int d^3x v_\rho \epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu \partial_\mu \chi_V \right\} \quad (5.106) \\ &f_{\mu\nu} = \partial_\mu v_\nu - \partial_\nu v_\mu \end{aligned}$$

En esta versión de  $Z[\vec{x}_a(t)]$  el campo gauge es  $v^\mu$  en vez de  $A^\mu$  y la acción es de tipo Maxwell-Chern-Simons en el nuevo potencial vector. La relación de  $v^\mu$  con  $A^\mu$  se establece a través del siguiente hecho:

- 1). La corriente eléctrica  $j^\mu = \rho^2(\partial^\mu \chi + eA^\mu)$  en las variables originales  $A^\mu$ ,  $\partial^\mu \chi$  pasa a ser la corriente topológica en las nuevas variables  $v^\mu$ :  $\frac{1}{2} * f^\mu = \frac{1}{2\pi} \epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu v_\rho$ . La carga eléctrica  $Q = \int d^2x \{ \rho^2(\dot{\chi} + eA_0) \}$  pasa a ser la carga magnética/topológica  $M = \frac{1}{2\pi} \int d^2x f_{12}$ .

$v^\mu$  ve carga eléctrica donde  $A^\mu$  ve magnética y viceversa. El campo  $v^\mu$  es el campo gauge respecto del grupo  $U(1)_d$ , dual del electromagnético  $U(1)_{EM}$  que acopla vía carga magnética.

- 2). Si en el modo de partida hubiéramos incluido un término  $-\frac{1}{4e^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$  el resultado de la transformación de dualidad sería el mismo que (5.106) con la adición de un término  $\frac{e^4}{(2\pi)^2} v_\mu v^\mu$ . Observamos la siguiente situación:

- a). El límite de acoplamiento fuerte de la acción original es el límite de acoplamiento débil del modelo dual. Nótese el factor  $\frac{e^2}{16\pi^2}$  en el término cinético dual  $f_{\mu\nu} \frac{f^{\mu\nu}}{h^2}$ .
- b). Los bosones de “masa” topológica ligera proporcional a  $\kappa$  en la formulación electro-magnética resultan de “masa” topológica pesada, un factor  $\frac{1}{\kappa}$ , en la dual.

- c). La masa, energía en reposo, de los vórtices es de la forma  $M_V = \left(\frac{2\pi}{e}\right) v^2 n \propto \left(\frac{2\pi}{e}\right) \left(\frac{n}{m}\right) \frac{1}{e}$ , de modo que devienen ligeros en el límite de acoplamiento fuerte, donde los bosones vectoriales son muy pesados.

- 3). El término en el Lagrangiano dual de la forma

$$\frac{e}{2\pi} v_\mu K_V^\mu = \frac{e}{2\pi} v_\mu \epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu \partial_\rho \chi_V$$

indica el acoplamiento del campo  $v_\mu$  con la corriente “magnética”, en este caso considerada como una fuente externa debida a los vórtices.

En el límite de acoplamiento fuerte, sin embargo, los vórtices son ligeros y susceptibles de ser creados y destruidos en procesos de alta energía. En contraposición a los cuantos fundamentales del modelo original que en este régimen son muy pesados, deben ser descritos por variables de campo: no son fuentes externas. Elegimos la identificación

$$\frac{Q^D}{e} \bar{\Psi}_V \gamma^\mu \Psi_V = \epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu \partial_\rho \chi_V \quad (5.107)$$

y promovemos a los campos de Dirac  $\Psi_V$  a verdaderos campos cuánticos que crean y destruyen vórtices. El modelo dual efectivo en el límite de acoplamiento fuerte corresponde a la acción:

$$\begin{aligned} Z_D = & \int [d\bar{\Psi}_V][d\Psi_V][dv^\mu] \\ & \cdot \exp \left\{ i \int d^3x \left[ -\frac{e^2}{16\pi^2} \left( \frac{f_{\mu\nu} f^{\mu\nu}}{h^2} - \frac{8\pi e^2}{\kappa} \epsilon_{\mu\nu\rho} v^\mu \partial^\nu v^\rho \right) \right] \right\} \\ & \cdot \exp \left\{ -iQ^D \int d^3x v_\mu \bar{\Psi}_V \gamma^\mu \Psi_V \right\} \\ & \cdot \exp \left\{ i \int d^3x \bar{\Psi}_V (\gamma^\mu \partial^\mu + M_S) \Psi_V \right\} \end{aligned} \quad (5.108)$$

$Q^D$  determina la carga “dual” de los vórtices ligeros y su acoplamiento a  $v_\mu$ . Si cuantificamos  $\Psi_V$  como un campo de Fermi debemos elegir  $Q^D$  de tal manera que el factor estadístico inducido por el término de Chern-Simons en (5.108) sea exactamente  $-\frac{\pi n^2}{m}$ . Esto demuestra que  $Z_D$  es el sistema en teoría cuántica de campos que ocurre en el Efecto Hall Cuántico Fraccionario.

## Capítulo 6

# Electrodinámica Cuántica sobre el Toro

En este capítulo abordaremos el estudio del Efecto Hall Cuántico en una red periódica con el fin de expresar la conductividad Hall, para el Efecto Fraccionario, como un invariante topológico, de manera análoga al análisis de Thouless [124] para el Efecto Entero. Comenzaremos con el problema de Landau para una partícula en una superficie de Riemann, en este caso el toro, que será resuelto en términos de las funciones Theta de Riemann [96]. A continuación, determinaremos el espectro y los espinores propios del operador de Dirac para una partícula sin masa sobre el toro, donde encontraremos nuevas estructuras de espín que no aparecen en el plano, que serán de interés al abordar el problema de muchas partículas. Por último, consideraremos esta teoría en presencia de fluxones, generalizando así la teoría de Jain [69]; y estudiaremos también la generalización al problema de muchas capas o muestras Hall.

En la segunda Sección analizaremos en detalle la acción de los operadores de Mumford sobre los estados de Landau. Caracterizaremos así la degeneración asociada a cada nivel de energía, y encontraremos la relación entre estos operadores y los generadores de las *traslaciones magnéticas* en el toro. La interpretación física de dicha acción nos conducirá a las transformaciones de Galileo. Estudiaremos también la extensión del grupo de traslaciones al grupo de Heisenberg.

Una vez analizado el problema de una partícula, y en la línea que hemos seguido a lo largo de este trabajo, pasaremos a calcular, en el contexto de la electrodinámica cuántica sobre el toro, la conductividad Hall tanto para el Efecto Entero como para el Efecto Fraccionario. En las dos últimas secciones analizaremos la teoría de Haldane-Rezayi [52], para muchas partículas, que generaliza la teoría de Laughlin

para una red periódica. Llegaremos a un resultado equivalente al de Thouless en el Efecto Entero para el problema más complejo del Efecto Hall Cuántico Fraccionario.

## 6.1 Problema de Landau, operador de Dirac y funciones $\Theta$ . Fluxones.

El espacio de configuración de un electrón moviéndose en una red periódica bidimensional es el toro,  $T_\tau^2 = \frac{\mathbf{C}}{\mathbf{Z} \oplus \tau \mathbf{Z}}$ , que se obtiene en el plano complejo  $\mathbf{C}$  cuando identificamos los puntos relacionados por el grupo de traslaciones discretas:  $\Gamma : z \rightarrow z + n_1 + n_2\tau$ ,  $n_1, n_2 \in \mathbf{Z}$ . Hemos tomado  $z = x_1 + ix_2$  como coordenada local adimensional en  $\mathbf{C}$ , para ello se define:  $x_1 = \frac{\tilde{x}_1}{L_1}$ ,  $x_2 = \frac{\tilde{x}_2}{L_1}$ . Pasamos, de esta forma, de unas periodicidades,  $L_1$  y  $L_2e^{i\theta}$ , para las variables  $\{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2\}$ , a otras 1 y  $\tau$  para  $\{x_1, x_2\}$ .  $\tau = \frac{L_2e^{i\theta}}{L_1}$  es el parámetro modular del toro, y pertenece al semiplano superior complejo  $\mathbf{H}$  con  $\text{Im}\tau > 0$ .

Por simplicidad tomaremos en primer lugar  $\tau = i$ , es decir, consideraremos una red cuya celda principal es cuadrada y de área uno, como se muestra en la Figura 6.1.

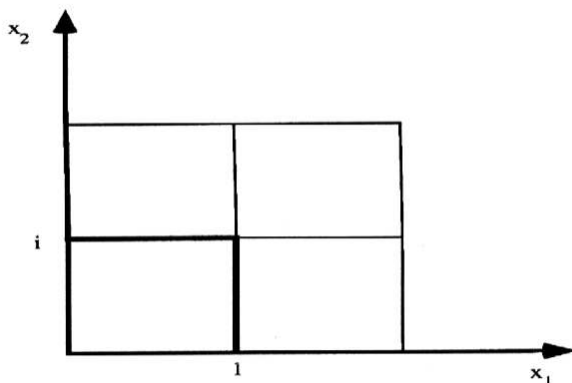


Figura 6.1: Celda cuadrada correspondiente a un toro  $T_i^2$ .

Un campo magnético constante viene descrito como la curvatura de un fibrado de línea  $\mathcal{L}_k$  sobre  $T_i^2$  con conexión:

$$A = 2\pi k x_2 dx_1 \quad \Rightarrow \quad F_A = 2\pi k dx_2 dx_1 \quad (6.1)$$

El grado de este fibrado, su primera clase de Chern, es:

$$c_1(\mathcal{L}_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{T^2} F_A = -k \in \mathbf{Z} \quad (6.2)$$

Como veremos a continuación,  $c_1(\mathcal{L}_k)$  está relacionado con el campo magnético externo debido a la condición de cuantificación topológica del flujo magnético en el toro. Consideremos un lazo cerrado  $\gamma$  sobre el toro, que encierra una superficie  $D$ , como se muestra en la Figura 6.2.

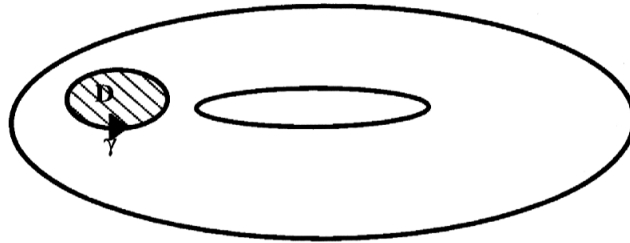


Figura 6.2:  $\gamma$  es una curva cerrada que encierra un recinto  $D$  sobre el toro.

El flujo asociado al campo magnético constante externo, como consecuencia del efecto Aharonov-Bohm, induce sobre la función de onda una fase, y, utilizando el teorema de Gauss, resulta:

$$\begin{aligned} \Psi(x_1, x_2) &= e^{i\frac{e}{\hbar c} \oint_{\gamma} A} \Psi(x_1, x_2) \\ &= e^{i\frac{e}{\hbar c} \int_D F_A} \Psi(x_1, x_2) \\ &= e^{-i\frac{e}{\hbar c} \int_{T^2/D} F_A} \Psi(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (6.3)$$

por tanto:

$$e^{i\frac{e}{\hbar c} \int_{T^2/D \cap D} F_A} = 1 \implies \frac{e}{\hbar c} \int_{T^2/D \cap D} F_A = 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z} \quad (6.4)$$

Luego la relación entre el grado del fibrado de línea sobre el toro y el campo magnético externo es:

$$2\pi k = \frac{eB}{\hbar c} L_1 L_2 \equiv \frac{eB}{\hbar c} L_1^2 \quad (6.5)$$

El espacio cuántico de estados de este sistema es el espacio de secciones  $L^2$ -integrables en  $\Gamma(T^2, \mathcal{L}_k)$ . La dinámica cuántica viene determinada esencialmente

por el laplaciano actuando sobre este espacio. En términos de los operadores de “creación” y “destrucción”,

$$\begin{aligned}\tilde{a} &= \frac{1}{2\sqrt{\pi k}} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} + i2\pi k x_2 \right) \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi k}} \left( \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + i\pi k \text{Im}z \right) \\ \tilde{a}^\dagger &= \frac{1}{2\sqrt{\pi k}} \left( -\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} - i2\pi k x_2 \right) \equiv -\frac{1}{\sqrt{\pi k}} \left( \frac{\partial}{\partial z} + i\pi k \text{Im}z \right)\end{aligned}\quad (6.6)$$

con  $[\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger] = 1$ . El Hamiltoniano es el operador diferencial

$$H = \hbar\tilde{\omega}_c \left[ \tilde{a}^\dagger \tilde{a} + \frac{1}{2} \right] \quad (6.7)$$

donde  $\tilde{\omega}_c = \frac{2\pi k \hbar}{m}$ , y  $m$  es la masa efectiva del electrón. El espacio de secciones  $\Gamma(\mathcal{L}_k)$  descompone en suma directa de subespacios propios del operador Hamiltoniano:

$$\Gamma(T_i^2, \mathcal{L}_k) = \bigoplus_{E_{\tilde{n}}} \Gamma_{E_{\tilde{n}}}(T_i^2, \mathcal{L}_k)$$

Las secciones que pertenecen a  $\Gamma_{E_{\tilde{n}}}(T_i^2, \mathcal{L}_k)$  pueden interpretarse como funciones que resuelven el problema espectral:

$$H\Phi_{\tilde{n}} = E_{\tilde{n}}\Phi_{\tilde{n}} \quad (6.8)$$

con las condiciones de periodicidad

$$\begin{aligned}\Phi_{\tilde{n}}(x_1 + 1, x_2) &= \Phi_{\tilde{n}}(x_1, x_2) \\ \Phi_{\tilde{n}}(x_1, x_2 + 1) &= e^{-i2\pi k x_1} \Phi_{\tilde{n}}(x_1, x_2)\end{aligned}\quad (6.9)$$

Como el operador  $p_1 = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_1}$  conmuta con  $H$  poseen autofunciones comunes, las de  $p_1$  satisfacen la primera condición de periodicidad si el momento es entero, y es conveniente expresar  $\Phi_{\tilde{n}}$  mediante el desarrollo de Fourier:

$$\Phi_{\tilde{n}}(x_1, x_2) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{i2\pi n x_1} f_n^{\tilde{n}}(x_2) \quad (6.10)$$

$\Phi_{\tilde{n}}$  es propia de  $H$  si lo es de

$$\tilde{a}^\dagger \tilde{a} = \frac{1}{4\pi k} \left( -\frac{\partial}{\partial x_2} + a_{x_2} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x_2} + a_{x_2} \right)$$

donde  $a_{x_2} = -i \frac{\partial}{\partial x_1} + 2\pi k x_2$ , y el problema espectral quedará resuelto por las soluciones de

$$a_{nx_2}^\dagger a_{nx_2} f_n^{\tilde{n}}(x_2) = \epsilon_{\tilde{n}} f_n^{\tilde{n}}(x_2) \quad (6.11)$$

con

$$\begin{aligned} a_{nx_2} &= \frac{1}{2\sqrt{\pi k}} \left[ \frac{d}{dx_2} + 2\pi(n + kx_2) \right] \\ a_{nx_2}^\dagger &= \frac{1}{2\sqrt{\pi k}} \left[ -\frac{d}{dx_2} + 2\pi(n + kx_2) \right] \end{aligned} \quad (6.12)$$

Como  $[a_{nx_2}, a_{nx_2}^\dagger] = 1$ , esto no es más que un oscilador armónico, desplazado, para cada  $n$ , con  $\epsilon_{\tilde{n}} = \tilde{n}$ , y buscamos los distintos “niveles” de modo recurrente. El de autovalor más bajo,  $\epsilon_0 = 0$ , satisface la ecuación diferencial

$$\frac{df_n^0(x_2)}{dx_2} + 2\pi(n + kx_2)f_n^0(x_2) = 0 \quad (6.13)$$

cuya solución es

$$f_n^0(x_2) = c_n e^{-\frac{\pi}{k}(n+kx_2)^2} \quad (6.14)$$

Imponiendo la segunda de las condiciones de periodicidad, nótese que es natural para la acción de operadores diferenciales que satisfacen  $a_{x_2+1} = e^{-i2\pi kx_1} a_{x_2} e^{i2\pi kx_1}$  [11], sobre  $\Phi_0(x_1, x_2)$  encontramos:

$$c_n = c_{n+k} \quad (6.15)$$

Esto implica que sólo  $f_n^0(x_2, l)$  para  $l = 0, 1, \dots, k-1$  son linealmente independientes pues únicamente los  $k$  primeros coeficientes son arbitrarios. Pueden ser fijados mediante normalización en la forma  $c_n(l) = e^{i2\pi n \frac{l}{k}}$ . Se sigue que la función de onda del primer nivel de Landau, de energía,

$$E_0 = \frac{\hbar\tilde{\omega}_c}{2} = \frac{\hbar^2\pi k}{m} \quad (6.16)$$

es  $k$  veces degenerada:

$$\Phi_{0l}(x_1, x_2) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{i2\pi n(x_1 + \frac{l}{k})} e^{-\frac{\pi}{k}(n+kx_2)^2} \quad (6.17)$$

Es posible reorganizar  $\Phi_{0l}$ , y escribirlo en términos de la variable compleja  $z = x_1 + ix_2$ ,

$$\Phi_{0l}(z, \bar{z}) = e^{-\pi k(\text{Im}z)^2} \Theta \left[ \begin{matrix} 0 \\ l/k \end{matrix} \right] (z|i/k) \quad (6.18)$$

Aquí expresamos los estados del primer nivel de Landau en términos de las funciones Theta de Riemann con característica [96]:

$$\Theta \left[ \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right] (z|\tau) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{2\pi i[(n+a)(z+b) + \frac{1}{2}(n+a)^2\tau]} \quad (6.19)$$

Hubiera sido posible, y este punto de vista será conveniente cuando el parámetro modular es arbitrario, buscar de entrada autofunciones que son el producto de una función analítica por un prefactor:

$$\Phi_0(z, \bar{z}) = e^{-\pi k(\text{Im}z)^2} f(z) \quad (6.20)$$

Las condiciones de periodicidad sobre  $\Phi_0$  devienen

$$\begin{aligned} f(z+1) &= f(z) \\ f(z+i) &= e^{-2\pi i k(z+\frac{i}{2})} f(z) \end{aligned} \quad (6.21)$$

satisfechas automáticamente por las soluciones encontradas:

$$\begin{aligned} \Phi_{0l}(z, \bar{z}) &= e^{-\pi k(\text{Im}z)^2} f_l(z|i/k) \\ f_l(z|i/k) &= \Theta \begin{bmatrix} 0 \\ l/k \end{bmatrix} (z|i/k) \end{aligned}$$

Las funciones  $f_l(z|i/k)$  forman una base en el espacio de secciones holomorfas del fibrado  $\mathcal{L}_k$  que denotaremos por  $H^0(T_i^2, \mathcal{L}_k) \equiv \Gamma_{E_0}$ .

En resumen, las condiciones de periodicidad provocan, de un lado, que el momento en la dirección de  $x_1$  esté cuantificado,  $n \in \mathbf{Z}$ , a diferencia del problema de Landau en el plano, y de otro lado, que la degeneración del primer nivel de Landau no sea infinita sino finita e igual a  $k$ , el número total de cuantos de flujo magnético que atraviesa el toro.

Los niveles de Landau más altos se obtienen por aplicación sucesiva del operador de creación:

$$\begin{aligned} f_n^{\tilde{n}}(x_2) &= \frac{1}{\sqrt{\tilde{n}!}} (a_{nx_2}^\dagger)^{\tilde{n}} f_n^0(x_2) \\ f_n^{\tilde{n}}(x_2) &= c_n \frac{1}{\sqrt{\tilde{n}! 2^{\tilde{n}}}} H_{\tilde{n}} \left( \sqrt{2\pi k} \left( x_2 + \frac{n}{k} \right) \right) e^{-\frac{\pi}{k}(kx_2+n)^2} \end{aligned} \quad (6.22)$$

donde  $H_{\tilde{n}}$  es el polinomio de Hermite de grado  $\tilde{n}$ . La condición de periodicidad sobre  $\Phi_{\tilde{n}}$  requiere que

$$c_n = c_{n+k}$$

y las funciones de onda serán

$$\Phi_{\tilde{n}l}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{\tilde{n}! 2^{\tilde{n}}}} \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{i2\pi n(x_1 + \frac{l}{k})} H_{\tilde{n}} \left( \sqrt{2\pi k} \left( x_2 + \frac{n}{k} \right) \right) e^{-\frac{\pi}{k}(n+kx_2)^2} \quad (6.23)$$

con energía

$$E_{\tilde{n}} = \hbar \tilde{\omega}_c \left( \tilde{n} + \frac{1}{2} \right) = \frac{\hbar^2 \pi k}{m} (2\tilde{n} + 1) \quad (6.24)$$



la degeneración de los niveles más altos coincide con la del estado fundamental, y es igual a  $k$ . En el gauge de Landau, como veremos con más detalle en la siguiente Sección, la degeneración viene caracterizada por el autovalor del operador momento lineal en la dirección de  $x_1$ . Este autovalor es discreto, y está cuantizado, como se deduce de las condiciones de periodicidad, y además puede tomar para cada nivel de energía únicamente  $k$  valores enteros distintos. Sin embargo, como en el plano, la degeneración no será la misma si elegimos el gauge simétrico. En este gauge, la degeneración viene caracterizada por el autovalor del momento angular en la dirección del campo magnético, esto junto con las correspondientes condiciones de periodicidad conduce a que cada nivel de Landau está degenerado, y la degeneración es finita pero igual a  $n + k$ , donde  $n$  representa el nivel de energía  $E_n \equiv E_{\tilde{n}}$  [8, 7].

Una vez que hemos resuelto completamente el problema de Landau en el caso más simple de una celda cuadrada, plantearemos el problema en el caso más general para estudiar la dependencia con el parámetro modular. Para ello, consideremos una celda de área  $\text{Im}\tau$  con  $\tau = \frac{L_2}{L_1}e^{i\theta} \in \mathbf{C}$  e  $\text{Im}\tau > 0$  tal y como se muestra en la Figura 6.3.

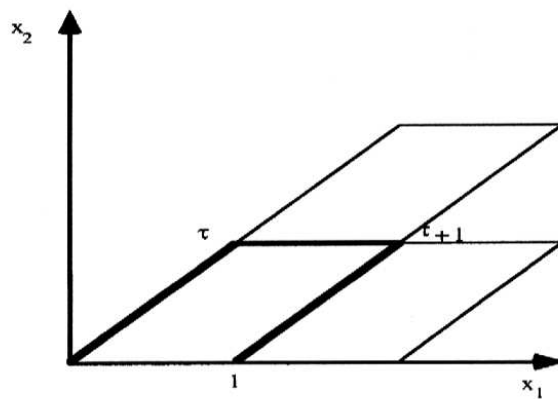


Figura 6.3: Celda correspondiente a un toro  $T^2_\tau$ .

El campo magnético constante es la curvatura de la conexión en un fibrado de línea  $\mathcal{L}_k$  sobre  $T^2_\tau$ :

$$A = \frac{2\pi k}{\text{Im}\tau} x_2 dx_1$$

$$F_A = \frac{2\pi k}{\text{Im}\tau} dx_2 dx_1 \quad (6.25)$$

El grado del fibrado es nuevamente  $c_1(\mathcal{L}_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{T_\tau^2} F_A = -k \in \mathbf{Z}$ , y estará relacionado con el campo magnético externo por:

$$\frac{2\pi k}{\text{Im}\tau} = \frac{eB}{\hbar c} \frac{L_1 L_2 \sin \theta}{\text{Im}\tau} \equiv \frac{eB}{\hbar c} L_1^2 \quad (6.26)$$

Los operadores de “creación” y “destrucción” serán ahora:

$$\begin{aligned} \tilde{a} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\text{Im}\tau}{\pi k}} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} + i \frac{2\pi k}{\text{Im}\tau} x_2 \right) \equiv \sqrt{\frac{\text{Im}\tau}{\pi k}} \left( \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + i \frac{\pi k}{\text{Im}\tau} \text{Im}z \right) \\ \tilde{a}^\dagger &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\text{Im}\tau}{\pi k}} \left( -\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} - i \frac{2\pi k}{\text{Im}\tau} x_2 \right) \equiv -\sqrt{\frac{\text{Im}\tau}{\pi k}} \left( \frac{\partial}{\partial z} + i \frac{\pi k}{\text{Im}\tau} \text{Im}z \right) \end{aligned} \quad (6.27)$$

con  $[\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger] = 1$ , y el Hamiltoniano

$$H = \hbar \tilde{\omega}_c \left[ \tilde{a}^\dagger \tilde{a} + \frac{1}{2} \right], \quad \tilde{\omega}_c = \frac{\hbar}{m} \frac{2\pi k}{\text{Im}\tau} \quad (6.28)$$

Para resolver el problema espectral busquemos en primer lugar qué condiciones de periodicidad deben satisfacer las secciones en  $\Gamma(T_\tau^2, \mathcal{L}_k)$ . Conocido el espectro, y las funciones de onda, para el problema de Landau en el plano en el gauge de Landau; y en particular la función de onda para el primer nivel de Landau (1.48), y teniendo en cuenta la condición de cuantización del flujo magnético en el toro, que para  $L_1 = 1$  se traduce en  $B = \frac{\hbar c}{e} \frac{k}{\text{Im}\tau}$  con  $k \in \mathbf{Z}$ , es apropiado asumir la siguiente hipótesis para el primer nivel de Landau en el toro:

$$\Phi(z, \bar{z}) = e^{-\frac{k\pi}{\text{Im}\tau} (\text{Im}z)^2} f(z) \quad (6.29)$$

de tal manera que las condiciones de periodicidad serán:

$$\begin{aligned} \Phi(z+1, \bar{z}+1) &= \Phi(z, \bar{z}) \\ \Phi(z+\tau, \bar{z}+\bar{\tau}) &= e^{-i2\pi k \text{Re}(z+\frac{1}{2}\tau)} \Phi(z, \bar{z}) \end{aligned} \quad (6.30)$$

Es decir, la presencia del campo magnético producirá una transformación de Galileo en la dirección  $x_1$ , con velocidad  $k$  y tiempo propio  $\text{Re}\tau$ . En la Sección siguiente estudiaremos en detalle esta simetría y su relación con las *traslaciones magnéticas*.

Con estas condiciones de periodicidad podemos determinar exactamente la función de onda para el primer nivel de Landau, siguiendo los mismos pasos que

vimos para el problema más simple con  $\tau = i$ . Tenemos, por tanto, para el primer nivel de Landau:  $\tilde{a}\Phi_0(x_1, x_2) = 0$ , y, tomando un desarrollo de Fourier:  $\Phi_0(x_1, x_2) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{i2\pi n x_1} f_n(x_2)$ , resultará:

$$\frac{df_n(x_2)}{dx_2} + 2\pi \left( n + \frac{kx_2}{\text{Im}\tau} \right) f_n(x_2) = 0 \quad (6.31)$$

tal que

$$f_n(x_2) = c_n e^{-\frac{\pi \text{Im}\tau}{k} \left( \frac{kx_2}{\text{Im}\tau} + n \right)^2} \quad (6.32)$$

De la segunda condición de periodicidad sobre la parte analítica

$$\begin{aligned} f(z+1) &= f(z) \\ f(z+\tau) &= e^{-i2\pi k(z+\frac{1}{2}\tau)} f(z) \end{aligned} \quad (6.33)$$

se deduce:

$$c_n e^{i2\pi n \text{Re}\tau} = c_{n+k} e^{-i\pi k \text{Re}\tau} \Rightarrow c_n = e^{i2\pi n \frac{l}{k}} e^{i\frac{\pi n^2}{k} \text{Re}\tau}, l = 0, 1, \dots, k-1 \quad (6.34)$$

La función de onda para el primer nivel de Landau, en función del parámetro modular, puede expresarse en función de la Theta de Riemman con característica:

$$\begin{aligned} \Phi_{0,l}(z, \bar{z}) &= e^{-\frac{\pi k}{\text{Im}\tau} (\text{Im}z)^2} f_l(z|\tau/k) \\ f_l(z|\tau/k) &= \Theta \left[ \begin{matrix} 0 \\ l/k \end{matrix} \right] (z|\tau/k), l = 0, 1, \dots, k-1 \end{aligned} \quad (6.35)$$

Las  $f_l(z|\tau/k)$  forman una base en  $H^0(T_\tau^2, \mathcal{L}_k)$ . Una vez más encontramos, como consecuencia de las condiciones de periodicidad, que la degeneración del primer nivel de Landau es igual a  $k$ . Lo mismo sucederá para los demás niveles que se obtienen a partir de éste sin más que aplicar sucesivamente el operador  $\tilde{a}^\dagger$ :

$$\begin{aligned} \Phi_{\tilde{n}l}(z, \bar{z}) &= \frac{1}{\sqrt{\tilde{n}!}} \left( \tilde{a}^\dagger \right)^{\tilde{n}} \Phi_{0l}(z, \bar{z}) \\ E_{\tilde{n}} &= \hbar \tilde{\omega}_c \left( \tilde{n} + \frac{1}{2} \right) = \frac{\hbar^2 \pi k}{m \text{Im}\tau} (2\tilde{n} + 1) \end{aligned} \quad (6.36)$$

A continuación, pasaremos a estudiar el problema de una partícula cargada (sin masa), en una red periódica bidimensional, en presencia de un campo magnético externo, donde la dinámica viene descrita por el operador de Dirac. El espacio de configuración es exactamente el mismo que consideramos para el problema de Landau. Es decir, el toro  $T_\tau^2 = \frac{\mathbf{C}}{\mathbf{Z} \oplus \tau \mathbf{Z}}$ . A diferencia del problema de Landau, tenemos que considerar ahora un fibrado espinorial  $S$  sobre  $T_\tau^2$ , en el que la fibra

$\rho \cong \mathbf{C}^2$  es una representación de  $spin(2)$ ; el potencial vector vendrá dado por la conexión (6.25), cuya curvatura nos dará el campo magnético sobre el toro, que coincide con el grado del fibrado espinorial  $c_1(S) = \frac{1}{2\pi} \int_{T^2} F_A = -k \in \mathbf{Z}$ , y su relación con el campo magnético es (6.26). Estudiaremos directamente el caso general con el parámetro modular  $\tau$ .

El operador de Dirac puede expresarse en función de los operadores de creación y destrucción dados en (6.28), tenemos así:

$$H_D^0 = -2\hbar c \sqrt{\frac{\pi k}{\text{Im}\tau}} \begin{pmatrix} 0 & \tilde{a}^\dagger \\ \tilde{a} & 0 \end{pmatrix} \quad (6.37)$$

El álgebra de Clifford está generada por las matrices de Dirac  $\gamma^1 = i\sigma^1$  y  $\gamma^2 = i\sigma^2$ ; la matriz  $\gamma^0 = \sigma^3$  no aparece pues estamos considerando una partícula sin masa.

El operador de Dirac actúa en el espacio de secciones  $L^2$ -integrables, es decir, el espacio de Hilbert  $\Gamma(S)$ . Las secciones en este espacio satisfacen las condiciones de periodicidad:

$$\begin{aligned} \phi(z+1, \bar{z}+1) &= \phi(z, \bar{z}) \\ \phi(z+\tau, \bar{z}+\bar{\tau}) &= e^{-i2\pi k \text{Re}(z+\frac{1}{2}\tau)} \phi(z, \bar{z}) \end{aligned} \quad (6.38)$$

Queremos encontrar el espectro para este operador:

$$\begin{aligned} -2\hbar c \sqrt{\pi k} \begin{pmatrix} 0 & \tilde{a}^\dagger \\ \tilde{a} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_\lambda^1 \\ \phi_\lambda^2 \end{pmatrix} &= E_\lambda \begin{pmatrix} \phi_\lambda^1 \\ \phi_\lambda^2 \end{pmatrix} \\ \phi_\lambda(z, \bar{z}) &= \begin{pmatrix} \phi_\lambda^1(z, \bar{z}) \\ \phi_\lambda^2(z, \bar{z}) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.39)$$

El problema espectral de Dirac puede reducirse formalmente al problema de Schrödinger para la primera componente del espinor, así:

$$\begin{aligned} \tilde{a}^\dagger \tilde{a} \phi_\lambda^1(z, \bar{z}) &= \frac{E_\lambda^2 \text{Im}\tau}{\hbar^2 c^2 4\pi k} \phi_\lambda^1(z, \bar{z}) \\ \phi_\lambda^2(z, \bar{z}) &= -\frac{2\hbar c}{E_\lambda} \sqrt{\frac{\pi k}{\text{Im}\tau}} \tilde{a} \phi_\lambda^1(z, \bar{z}) \end{aligned} \quad (6.40)$$

Para el primer nivel de Dirac-Landau resultará:

$$E_0 = 0 \Rightarrow \tilde{a} \phi_0^1(z, \bar{z}) = 0 ; \phi_0^2(z, \bar{z}) \equiv 0 \quad (6.41)$$

encontramos, por tanto, que la primera componente del espinor para el primer nivel de Dirac-Landau coincide exactamente con la función de onda determinada para el problema de Landau no-relativista, y así,  $\phi_0^1(z, \bar{z}) \equiv \Phi_0(z, \bar{z})$ , de forma que:

$$\phi_{0l}(z, \bar{z}) = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\pi k}{\text{Im}\tau}(\text{Im}z)^2} f_l(z) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_0 = 0 \quad (6.42)$$

con

$$f_l(z) = \Theta \begin{bmatrix} 0 \\ l/k \end{bmatrix} (z|\tau/k) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{i2\pi n(z + \frac{l}{k})} e^{i\frac{\pi n^2}{k}\tau}, \quad l = 0, 1, \dots, k-1$$

y la degeneración para este nivel es nuevamente  $k$ .

Para los demás niveles de Dirac-Landau tenemos:

$$\phi_{\tilde{n}l}^{\pm}(z, \bar{z}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \Phi_{\tilde{n}l}(z, \bar{z}) \\ \mp \Phi_{\tilde{n}-1,l}(z, \bar{z}) \end{pmatrix}, \quad E_{\tilde{n}} = \pm \sqrt{\frac{2\pi k}{\text{Im}\tau}} 2\tilde{n}, \quad \tilde{n} > 0 \quad (6.43)$$

donde  $\Phi_{\tilde{n}l}$  vienen dadas por (6.36), y la degeneración de cada nivel de energía es una vez más  $k$ . Tenemos soluciones de energía positiva y negativa como es característico del problema de Dirac, junto con los modos cero, que aparecen como consecuencia de la simetría de conjugación propia de este sistema para una partícula sin masa.

Por otro lado, es posible distinguir dos nuevas estructuras de espín sin analogía en el plano, que vendrán caracterizadas por:

$$\begin{aligned} f_l(z+1) &= e^{i\phi_1} f_l(z) \\ f_l(z+\tau) &= e^{i\phi_2} e^{-i2\pi k(z + \frac{1}{2}\tau)} f_l(z) \end{aligned} \quad (6.44)$$

de tal manera que podemos elegir independientemente dos casos:

- Par:  $\phi_1 = \phi_2 = 0$ . Tal que:

$$f_l^{(p)}(z) = \Theta \begin{bmatrix} 0 \\ l/k \end{bmatrix} (z|\tau/k) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{i2\pi n(z + \frac{l}{k})} e^{i\frac{\pi n^2}{k}\tau} \quad (6.45)$$

- Impar:  $\phi_1 = \phi_2 = \pi$ . Tal que:

$$f_l^{(i)}(z) = \Theta \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 + l/k \end{bmatrix} (z|\tau/k) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{i2\pi(n + \frac{1}{2})(z + \frac{1}{2} + \frac{l}{k})} e^{i\frac{\pi}{k}(n + \frac{1}{2})^2\tau} \quad (6.46)$$

Veremos más adelante que esta última posibilidad es de gran interés al estudiar el problema de muchas partículas.

En la Sección 6.2 estudiaremos en detalle las propiedades de invarianza de las funciones Theta de Riemann, que han aparecido tanto en el problema de Landau como en el de Dirac-Landau. No obstante, es interesante adelantar algunas propiedades de estas funciones apropiadas al estudio cuántico del sistema. Consideremos, por tanto, un espacio generado por las funciones  $f_l(z|\tau/k) = \Theta \begin{bmatrix} 0 \\ l/k \end{bmatrix} (z|\tau/k)$  con  $l = 0, 1, \dots, k-1$ , que satisfacen:

- Propiedades de invarianza:

$$\begin{aligned} \Theta \begin{bmatrix} 0 \\ l/k \end{bmatrix} (z+1|\tau/k) &= \Theta \begin{bmatrix} 0 \\ l/k \end{bmatrix} (z|\tau/k) \\ \Theta \begin{bmatrix} 0 \\ l/k \end{bmatrix} (z+\tau|\tau/k) &= e^{-i2\pi k(z+\frac{1}{2}\tau)} \Theta \begin{bmatrix} 0 \\ l/k \end{bmatrix} (z|\tau/k) \end{aligned} \quad (6.47)$$

- Ortonormalidad y completitud:

$$\begin{aligned} \int \frac{dzd\bar{z}}{2i} e^{-2\frac{\pi k}{\text{Im}\tau}(\text{Im}z)^2} \Theta^* \begin{bmatrix} 0 \\ l/k \end{bmatrix} (\bar{z}|\bar{\tau}/k) \Theta \begin{bmatrix} 0 \\ l'/k \end{bmatrix} (z|\tau/k) &= \delta_{ll'} \\ \sum_{l=0}^{k-1} e^{-\frac{\pi k}{\text{Im}\tau}((\text{Im}z)^2+(\text{Im}\omega)^2)} \Theta^* \begin{bmatrix} 0 \\ l/k \end{bmatrix} (\bar{z}|\bar{\tau}/k) \Theta \begin{bmatrix} 0 \\ l/k \end{bmatrix} (\omega|\tau/k) &= \\ \delta(z-\omega)\delta(\bar{z}-\bar{\omega}) & \end{aligned}$$

Hemos visto que las secciones del fibrado de línea o fibrado espinorial de clase de Chern  $-k$  en el  $T_\tau^2$  son funciones que satisfacen las condiciones de periodicidad dadas en (6.47). La segunda de estas condiciones es equivalente a:

$$\Theta \begin{bmatrix} 0 \\ l/k \end{bmatrix} (z+k\tilde{\tau}|\tau/k) = e^{-i2\pi(kz+\frac{1}{2}k^2\tilde{\tau})} \Theta \begin{bmatrix} 0 \\ l/k \end{bmatrix} (z|\tau/k), \quad \tilde{\tau} = \frac{\tau}{k}$$

donde aparece el uno-cociclo  $\omega_1(z, k) = kz + \frac{1}{2}k^2\tilde{\tau}$ . Este puede interpretarse como una transformación que nos lleva de una celda de área  $\frac{\text{Im}\tau}{k}$  a una de área  $\text{Im}\tau$ , y que está relacionado con la transformación de Galileo asociada al campo magnético, ver Figura 6.4.

Es interesante comprobar que cada función  $f_l(z)$  tiene exactamente  $k$  ceros localizados en la celda principal de área  $\text{Im}\tau$ , tal y como demuestra Mumford [96], se verifica que:

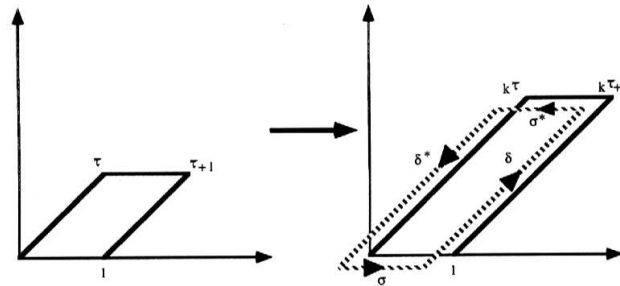


Figura 6.4: Recinto  $\gamma = \delta + \delta^* + \sigma + \sigma^*$  para  $T_{k\tau}^2$ .

- El número de ceros es:

$$\# \text{ ceros de } f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'}{f} dz = k \tag{6.48}$$

donde  $\gamma$  es el recinto orientado que se muestra en la Figura 6.4.

- La localización de los ceros en la celda principal es la siguiente:
  - Para las funciones  $\Theta$  pares los ceros se encuentran en los puntos:

$$z_0^{(j)} = \left(j + \frac{1}{2}\right) \frac{\tau}{k} + \left(\frac{l}{k} + \frac{1}{2}\right)$$

con  $j = 0, 1, \dots, k - 1$ , tal que,

$$\Theta \left[ \begin{matrix} 0 \\ l/k \end{matrix} \right] (z_0^{(j)} | \tau/k) = 0$$

ver Figura 6.5.

- Para las funciones  $\Theta$  impares los ceros se encuentran en:

$$z_0^{(j)} = j \frac{\tau}{k} + \frac{l}{k}$$

con  $j = 0, 1, \dots, k - 1$ , tal que,

$$\Theta \left[ \begin{matrix} 1/2 \\ 1/2 + l/k \end{matrix} \right] (z_0^{(j)} | \tau/k) = 0$$

ver Figura 6.6.

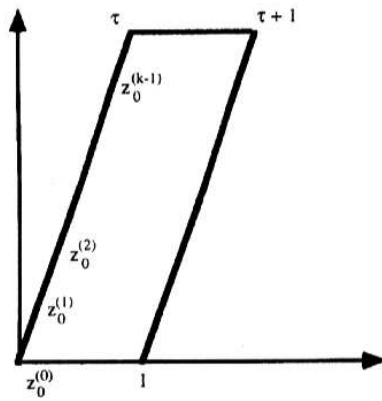


Figura 6.5: Ceros de la función  $\Theta$  (impar) en la celda principal.

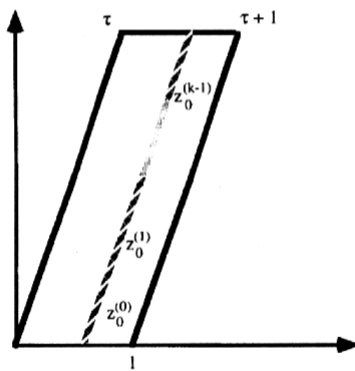


Figura 6.6: Ceros de la función  $\Theta$  (par) en la celda principal.



En cualquier caso, independientemente del tamaño de la celda fundamental, el número de estados posibles para cada nivel de Landau o de Dirac-Landau no depende del parámetro modular sino sólo del grado del fibrado sobre el toro. Recordemos que el número de estados en cada nivel de Landau, para una superficie de área finita, era  $M = An_B$  donde  $n_B = \frac{eB}{hc}$ . Teniendo en cuenta la relación entre el campo magnético externo y el grado del fibrado:  $B = \frac{hc}{e} \frac{k}{\text{Im}\tau}$ , resulta que:  $\#$  de estados =  $k$ . Es decir, para el primer nivel de Landau:

$$\sum_{l=0}^{k-1} e^{-2\frac{\pi k}{\text{Im}\tau}(\text{Im}z)^2} \Theta^* \begin{bmatrix} 0 \\ l/k \end{bmatrix} (\bar{z}|\bar{\tau}/k) \Theta \begin{bmatrix} 0 \\ l/k \end{bmatrix} (z|\tau/k) = \frac{k}{\text{Im}\tau} \quad (6.49)$$

que representa la densidad de estados por unidad de área para el problema de Landau en el toro.

Estudiaremos a continuación la inclusión de fluxones para desarrollar la teoría de Jain en el Toro. Para ello será conveniente pasar del gauge de Landau que hemos tomado para resolver el problema espectral, tanto para el operador de Schrödinger como para el de Dirac, al gauge simétrico que es adecuado para el propósito mencionado.

Consideraremos el problema en  $T_\tau^2$ , donde tenemos un fibrado de línea  $\mathcal{L}_k$  cuyo grado coincide con el flujo cuantizado del campo magnético, la conexión en el gauge de Landau venía dada por (6.25). Para pasar al gauge simétrico se aplica la transformación gauge dada por el operador unitario:  $\mathcal{G} = e^{i\frac{\pi k}{\text{Im}\tau}x_1x_2}$ , de forma que la conexión en el gauge simétrico es:

$$A^S = \frac{\pi k}{\text{Im}\tau}(x_2dx_1 - x_1dx_2) \quad (6.50)$$

Los estados cuánticos de este sistema son de nuevo las secciones  $L^2$ - integrables en  $\Gamma(T_\tau^2, \mathcal{L}_k)$ . La dinámica estará gobernada bien por el laplaciano actuando en este espacio de secciones, bien por el operador de Dirac actuando en el espacio de secciones del fibrado espinorial. En todo caso, ambos operadores diferenciales pueden expresarse en función de los operadores de creación y destrucción. La relación entre los operadores y estados cuánticos en ambos gauges viene dada por:

$$\Psi(x_1, x_2) = \mathcal{G}\Phi(x_1, x_2) \quad , \quad O^S = \mathcal{G}O^L\mathcal{G}^\dagger \quad , \quad \mathcal{G}\mathcal{G}^\dagger = 1 \quad (6.51)$$

En definitiva, tenemos:

$$a = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\text{Im}\tau}{k\pi}} \left( 2\frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \frac{\pi k}{\text{Im}\tau}z \right)$$

$$\begin{aligned}
a^\dagger &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\text{Im}\tau}{k\pi}} \left( -2 \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\pi k}{\text{Im}\tau} \bar{z} \right) & [a, a^\dagger] &= 1 \\
H &= \hbar \tilde{\omega} (2a^\dagger a + 1), \quad \tilde{\omega} = \frac{\hbar \pi k}{m \text{Im}\tau} & & (6.52)
\end{aligned}$$

Las condiciones de periodicidad son ahora:

$$\begin{aligned}
\Psi(z+1, \bar{z}+1) &= e^{i \frac{\pi k}{\text{Im}\tau} (\text{Im}z)} \Psi(z, \bar{z}) \\
\Psi(z+\tau, \bar{z}+\bar{\tau}) &= e^{-i \frac{\pi k}{\text{Im}\tau} (\text{Im}(\bar{z}\tau))} \Psi(z, \bar{z}) & (6.53)
\end{aligned}$$

El primer nivel de Landau puede expresarse en la forma:

$$\begin{aligned}
\Psi_{0l}(z, \bar{z}) &= e^{-\frac{\pi k}{2\text{Im}\tau} |z|^2} F_l(z) \\
F_l(z) &= e^{\frac{\pi k}{2\text{Im}\tau} z^2} f_l(z) \equiv e^{\frac{\pi k}{2\text{Im}\tau} z^2} \Theta \left[ \begin{matrix} 0 \\ l/k \end{matrix} \right] (z|\tau/k) & (6.54)
\end{aligned}$$

y, en general, para los demás niveles

$$\Psi_{nl}(z, \bar{z}) = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n \Psi_{0l}(z, \bar{z}), \quad E_n = \hbar \tilde{\omega} (2n + 1) \quad (6.55)$$

En el caso del problema de Dirac tenemos:

$$\begin{aligned}
H_D^0 &= -2\hbar c \sqrt{\frac{\pi k}{\text{Im}\tau}} \begin{pmatrix} 0 & a^\dagger \\ a & 0 \end{pmatrix} \\
\psi_{0l}(z, \bar{z}) &= \begin{pmatrix} \Psi_{0l}(z, \bar{z}) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_0 = 0 \\
\psi_{nl}(z, \bar{z}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \Psi_{nl}(z, \bar{z}) \\ \mp \Psi_{n-1l}(z, \bar{z}) \end{pmatrix}, \quad E_n = \pm \sqrt{\frac{2\pi k 2n}{\text{Im}\tau}} \quad n > 0 & (6.56)
\end{aligned}$$

donde los espinores satisfacen lógicamente las condiciones de periodicidad ya expuestas en (6.53).

Dado que el espacio de configuración que estamos considerando es un toro  $T_\tau^2$ , para incluir la presencia de fluxones debemos tener en cuenta la periodicidad de la red. Por tanto, el campo magnético asociado a  $r$  solenoides con  $2p$  cuantos de flujo ( $p$  entero) vendrá dado por la curvatura de la conexión:

$$a = i2p \frac{\phi_0}{\pi} \sum_{\nu=1}^r \frac{\Theta' \left[ \begin{matrix} 1/2 \\ 1/2 \end{matrix} \right] (z - z_\nu | \tau/k)}{\Theta \left[ \begin{matrix} 1/2 \\ 1/2 \end{matrix} \right] (z - z_\nu | \tau/k)} dz \quad (6.57)$$

donde aparecen la derivada logarítmica de la función Theta de Riemman con característica, que tomaremos en este caso impar<sup>1</sup>, de esta forma satisface las condiciones de periodicidad de la red, y además presenta un polo en cada una de las posiciones de los solenoides, como era de esperar. La curvatura y el campo magnético para los solenoides son:

$$\begin{aligned} F_a &= i2p\phi_0 \sum_{\nu=1}^r \sum_{n,m} \delta(z - z_\nu - n - m\tau) d\bar{z}dz \\ b &= 2p\phi_0 \sum_{\nu=1}^r \sum_{n,m} \delta(z - z_\nu - n - m\tau) \end{aligned} \quad (6.58)$$

Si consideramos al tiempo el campo magnético externo, que en representación holomorfa viene dado por  $A = i\frac{\pi k}{\text{Im}\tau}(\bar{z}dz - zd\bar{z})$ , y el campo magnético asociado a los fluxones, debemos modificar los operadores de creación y destrucción. En general, todos los operadores de la teoría y los estados cuánticos pueden obtenerse fácilmente en este nuevo contexto si tenemos en cuenta la transformación singular, dada por:

$$\mathcal{G}_p(z) = e^{i\lambda\alpha(z)} \equiv \prod_{\nu=1}^r \Theta^{2p} \left[ \begin{matrix} 1/2 \\ 1/2 \end{matrix} \right] (z - z_\nu|\tau/k), \quad a_z = \frac{\partial}{\partial z}\alpha(z) \quad (6.59)$$

tal que

$$\tilde{O} = \mathcal{G}_p(z)O\mathcal{G}_p^{-1}(z), \quad \tilde{\Psi}(z, \bar{z}) = \mathcal{G}_p(z)\Psi(z, \bar{z}) \quad (6.60)$$

Tenemos, por tanto, que los nuevos operadores  $\tilde{A}$  y  $\tilde{A}^\dagger$  en función de  $a$  y  $a^\dagger$  (6.52), y sus relaciones de conmutación, son:

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= a, \quad \tilde{A}^\dagger = a^\dagger + 2p\sqrt{\frac{\text{Im}\tau}{\pi k}} \sum_{\nu=1}^r \frac{\Theta' \left[ \begin{matrix} 1/2 \\ 1/2 \end{matrix} \right] (z - z_\nu|\tau/k)}{\Theta \left[ \begin{matrix} 1/2 \\ 1/2 \end{matrix} \right] (z - z_\nu|\tau/k)} \\ [\tilde{A}, \tilde{A}^\dagger] &= 1 + 2p\frac{\text{Im}\tau}{k} \sum_{\nu=1}^r \sum_{n,m} \delta(z - z_\nu - n - m\tau) \end{aligned} \quad (6.61)$$

El Hamiltoniano de Landau es ahora:

$$\tilde{H} = \hbar\tilde{\omega}(\tilde{A}^\dagger\tilde{A} + \tilde{A}\tilde{A}^\dagger) \quad (6.62)$$

cuyo espectro y estados propios son:

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_{nl}(z, \bar{z}) &= \prod_{\nu=1}^r \Theta^{2p} \left[ \begin{matrix} 1/2 \\ 1/2 \end{matrix} \right] (z - z_\nu|\tau/k) \Psi_{nl}(z, \bar{z}) \\ E_n &= \hbar\tilde{\omega}(2n + 1), \quad l = 0, 1, \dots, k - 1 \end{aligned} \quad (6.63)$$

<sup>1</sup>La elección de la Theta impar para introducir los fluxones está relacionada con la estadística fermiónica de las partículas como veremos más adelante en el problema de muchos cuerpos.

la degeneración es  $k$  para cada nivel de energía.

Las funciones de onda se anulan en las posiciones de los solenoides, y además, es necesario introducir una nueva medida de integración en el espacio de configuración, relacionada con la no unitariedad de la transformación singular, así:

$$\langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle = \int \Psi_1^\dagger(z, \bar{z}) \mu(z, \bar{z}) \Psi_2(z, \bar{z}) \frac{dz d\bar{z}}{2i} \quad (6.64)$$

$$\mu(z, \bar{z}) = (\mathcal{G}_p^\dagger \mathcal{G}_p)^{-1} = \prod_{\nu=1}^r \left( \Theta^* \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} (\bar{z} - \bar{z}_\nu | \tau/k) \Theta \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} (z - z_\nu | \tau/k) \right)^{-2p}$$

Todo lo visto puede reproducirse para el problema de Dirac con fluxones, encontramos el mismo espectro y la misma degeneración, aunque los estados aparecen modificados por un prefactor que satisface las condiciones de periodicidad propias de este sistema, pero que representa la presencia de los fluxones. Dicho prefactor nos permitirá conectar con la teoría de Haldane-Rezayi [52] al pasar al problema de muchas partículas.

Por último, abordaremos el problema de una partícula en una muestra Hall con  $q$  capas independientes. El Efecto Hall Cuántico Fraccionario ha sido observado en sistemas de electrones bidimensionales con multi-capas, [126]. El formalismo de la matriz  $K$ , generalización de la teoría de Laughlin, desarrollado por Zee y Wen [130], puede implementarse en el caso de una red periódica cuando consideramos el espacio de configuración como la variedad abeliana  $\mathcal{A}_q = \frac{\mathbf{C}^q}{\mathbf{Z}^q \otimes \tau \mathbf{Z}^q}$ , producto cartesiano de  $q$  copias de  $T_\tau^2$ .

Una vez más, tenemos un fibrado de línea sobre  $T_\tau^{2 \times q}$  cuya conexión es:

$$A = \frac{i\pi}{\text{Im}\tau} \left( \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q K_{ij} \bar{z}^j dz^i - \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q K_{ij} z^j d\bar{z}^i \right) \quad (6.65)$$

en el gauge simétrico. Donde  $K$  es una matriz  $q \times q$ , positiva, valuada en los enteros, simétrica, e impar en la diagonal principal; y  $z^i = x_1^i + x_2^i$  son las coordenadas del electrón en la capa  $i$ -ésima. La curvatura de  $A$  será:

$$F_A = -\frac{2\pi i}{\text{Im}\tau} \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q K_{ij} dz^i \wedge d\bar{z}^j \quad (6.66)$$

De la forma de Khähler

$$\Phi^q = (\sqrt{-1})^q q! |\det K| dz^1 \wedge d\bar{z}^1 \wedge dz^2 \wedge d\bar{z}^2 \wedge \cdots \wedge dz^q \wedge d\bar{z}^q \quad (6.67)$$

se deduce que la relación entre  $|\det K|$  y el campo magnético externo es:

$$\frac{2\pi |\det K|}{\text{Im}\tau} = \frac{eB}{\hbar c} \frac{L_1 L_2 \sin \theta}{\text{Im}\tau} = \frac{eB}{\hbar c} L_1^2 \quad (6.68)$$

Pasando al gauge de Landau, el problema espectral a resolver es  $H\Phi_\lambda = E_\lambda\Phi_\lambda$ , con el Hamiltoniano

$$H = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \vec{a}^\dagger \vec{a} + \frac{2\pi \text{tr} K}{\text{Im}\tau} \right) \quad (6.69)$$

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{\partial}{\partial \vec{x}_1} + i \frac{\partial}{\partial \vec{x}_2} + i \frac{2\pi K}{\text{Im}\tau} \vec{x}_2 \\ \vec{a}^\dagger &= -\frac{\partial}{\partial \vec{x}_1} + i \frac{\partial}{\partial \vec{x}_2} - i \frac{2\pi K}{\text{Im}\tau} \vec{x}_2, \quad [\vec{a}, \vec{a}^\dagger] = \frac{4\pi \text{tr} K}{\text{Im}\tau} \end{aligned} \quad (6.70)$$

donde  $\vec{x}_a = (x_a^1, \dots, x_a^q)$ ,  $a = 1, 2$ . Con las condiciones de periodicidad:

$$\begin{aligned} \Phi_\lambda(\vec{z} + \vec{e}_i) &= \Phi_\lambda(\vec{z}) \\ \Phi_\lambda(\vec{z} + \tau \vec{e}_i) &= e^{-i2\pi(\vec{e}_i)^t K \text{Re}\left(\vec{z} + \frac{\vec{e}_i}{2}\tau\right)} \Phi_\lambda(\vec{z}) \end{aligned} \quad (6.71)$$

En el límite topológico nos quedamos con el primer nivel de Landau generado por:

$$\Phi_{0\vec{\alpha}}(\vec{z}) = e^{-\frac{\pi}{\text{Im}\tau} \text{Im}(\vec{z}^t K \vec{z})} \Theta \begin{bmatrix} K^{-1}\vec{\alpha} \\ 0 \end{bmatrix} (K\vec{z}|K\tau) \quad (6.72)$$

donde  $\vec{\alpha}$  es un  $q$ -vector que pertenece al cociente  $\frac{\mathbf{Z}^q}{K\mathbf{Z}^q}$ , y las funciones theta son  $q$ -dimensionales [96]:

$$\Theta \begin{bmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \end{bmatrix} (\vec{z}|\Omega) = \sum_{\vec{n} \in \mathbf{Z}^q} \exp \left[ i2\pi \left\{ (\vec{n} + \vec{a})^t (\vec{z} + \vec{b}) + \frac{1}{2} (\vec{n} + \vec{a})^t \Omega (\vec{n} + \vec{a}) \right\} \right] \quad (6.73)$$

Esto puede reproducirse de forma análoga para el problema relativista de Dirac, en ese caso el Hamiltoniano para una partícula sin masa vendría dado también en función de los operadores  $\vec{a}$  y  $\vec{a}^\dagger$  dados en (6.70), y en el límite topológico, el espinor correspondiente al primer nivel de Landau tiene una única componente que coincide exactamente con la función de onda del problema no-relativista, y por tanto, estará generada por las funciones (6.73).

La degeneración del primer nivel de Landau, o del primer nivel de Dirac-Landau, es por tanto  $|\det K|$ , y de nuevo las funciones Theta, de varias variables con característica, forman una base de un subespacio de  $H^0(\mathcal{A}_q, \mathcal{L}_k)$ , el espacio de secciones holomorfas del fibrado de línea  $\mathcal{L}_k$  sobre  $\mathcal{A}_q$  de grado  $c_1(\mathcal{L}_k) \vee c_1(\mathcal{L}_k) \vee \dots \vee c_1(\mathcal{L}_k) = c_1(\mathcal{L}_k)^{\vee q} = |\det K|$ .

Es posible observar una situación más general a la planteada, si tomamos como espacio de configuración, en vez de  $T_\tau^{2 \times r}$ , la variedad abeliana  $\mathcal{A}^q = \frac{\mathbf{C}^q}{\mathbf{Z}^q \oplus \Omega \mathbf{Z}^q}$ , donde la matriz de periodos,  $\Omega$ , es una matriz  $q \times q$  compleja, simétrica, y con

$\text{Im}\Omega > 0$ . En este espacio de configuración se tiene en cuenta la posibilidad de que el electrón pase de una capa a otra, como consecuencia del efecto túnel, y así, es físicamente razonable tener diferentes periodicidades en las distintas capas, para partículas de distintos tipos  $q$ .

Las condiciones de periodicidad (6.71) deben generalizarse a:

$$\begin{aligned}\Phi_\lambda(\vec{z} + \vec{e}_i) &= \Phi_\lambda(\vec{z}) \\ \Phi_\lambda(\vec{z} + \tau\vec{e}_i) &= e^{-i2\pi(\vec{e}_i)^t K \text{Re}(\vec{z} + \frac{1}{2}\Omega\vec{e}_i)} \Phi_\lambda(\vec{z})\end{aligned}\quad (6.74)$$

y el Hamiltoniano es de la forma (6.69) pero con  $\vec{a}$  dado por:

$$\vec{a} = \frac{\partial}{\partial \vec{x}_1} + i \frac{\partial}{\partial \vec{x}_2} + i \frac{2\pi K}{\text{Im det}\Omega} \vec{x}_2 \quad (6.75)$$

El primer nivel de Landau de acuerdo con (6.74) es:

$$\Phi_{0\vec{a}}(\vec{z}) = e^{-\frac{\pi}{\text{Im det}\Omega} \text{Im}(z^t K \vec{z})} \Theta \begin{bmatrix} K^{-1}\vec{a} \\ 0 \end{bmatrix} (K\vec{z}|K\tau) \quad (6.76)$$

con la misma degeneración que antes. Las funciones  $\Phi_{0\vec{a}}(\vec{z})$  generan un subespacio del espacio  $H^0(\mathcal{A}_q, \mathcal{L}^k)$ , el espacio de secciones holomorfas del fibrado  $\mathcal{L}_k$  sobre  $\mathcal{A}_q$  que es de grado  $c_1(\mathcal{L}_k)^{\vee q} = |\det K|$ .

## 6.2 Física de los operadores de Mumford: transformaciones de Galileo y grupo de Heisenberg

En esta Sección estudiaremos las transformaciones de simetría para el límite topológico del problema de Landau en el Toro  $T_\tau^2 = \frac{\mathbf{C}}{\mathbf{Z} \otimes \tau \mathbf{Z}}$ . Introduciremos los operadores de Mumford que generan el grupo de Heisenberg (extensión central del grupo de traslaciones), estudiaremos las transformaciones unitarias de este grupo en el espacio de Hilbert de las funciones holomorfas. La generalización de estos generadores son las *traslaciones magnéticas*, analizaremos, por tanto, su relación y en definitiva la interpretación física de los operadores de Mumford.

Comenzaremos con una breve revisión de la teoría sobre los operadores de Mumford expuesta en [96]. Dada una función holomorfa  $f(z)$ , y dos números reales cualesquiera  $a$  y  $b$ , consideremos las transformaciones:

$$\begin{aligned}(S(b)f)(z) &= f(z + b) \\ (T(a)f)(z) &= \exp(i\pi a^2 \tau + i2\pi a z) f(z + a\tau)\end{aligned}\quad (6.77)$$

con la ley de composición:

$$S(b_1) \circ S(b_2) = S(b_1 + b_2) , T(a_1) \circ T(a_2) = T(a_1 + a_2)$$

y tal que:

$$S(b) \circ T(a) = e^{i2\pi ab} T(a) \circ S(b) \tag{6.78}$$

es decir, estas transformaciones no conmutan entre sí sino que aparece en su composición un dos-cociclo:  $\omega_2(z; a, b) = ab$ .

El grupo de transformaciones generado por estos operadores es el grupo de Heisenberg,  $G_H = \mathbf{C}_1^* \otimes \mathbf{R} \otimes \mathbf{R}$ ,  $\mathbf{C}_1^* = \{\lambda \in \mathbf{C} / |\lambda| = 1\}$ , con la ley de grupo:

$$(\lambda, a, b)(\lambda', a', b') = (\lambda\lambda' e^{i2\pi ba'}, a + a', b + b') \tag{6.79}$$

Una representación unitaria e irreducible de este grupo en el espacio de Hilbert,  $\mathcal{H} = \{f / \|f\|^2 < +\infty\}$ , con

$$\|f\|^2 = \int_{\mathbf{C}} e^{-2\frac{\pi}{\text{Im}\tau}(\text{Im}z)^2} |f(z)| \frac{dzd\bar{z}}{2i} \tag{6.80}$$

viene dada por:

$$U(\lambda, a, b)f(z) = \lambda(T(a) \circ S(b)f)(z) = \lambda e^{i\pi a^2\tau + i2\pi az} f(z + a\tau + b) \tag{6.81}$$

Consideremos el subgrupo de  $G_H$ ,  $\Gamma_1 = \{(1, n_1, n_2) \in G_H / n_1, n_2 \in \mathbf{Z}\}$ , y una representación unitaria en el mismo,  $\hat{\Gamma}_{11}\{U_{1,n_1,n_2}\}$ , tal que:

$$U_{1,n_1,n_2}f(z) = (T(n_1) \circ S(n_2)f)(z) = \exp(i\pi n_1^2\tau + i2\pi n_1 z) f(z + n_1\tau + n_2) \tag{6.82}$$

El subespacio del espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  invariante bajo  $\hat{\Gamma}_{11}$  es entonces:

$$\mathcal{H}_{T_\tau}^{11} = \{f(z) \in \mathcal{H} / U_{1,n_1,n_2}f(z) = f(z) \text{ modulo cociclos}\} \tag{6.83}$$

es decir,  $f(z) \in \mathcal{H}_{T_\tau}^{11}$ , si y sólo si:

$$\begin{aligned} f(z + 1) &= f(z) \\ f(z + \tau) &= e^{-i2\pi k(z + \frac{\tau}{2})} f(z) \end{aligned} \tag{6.84}$$

Una base de este subespacio funcional es la formada por las funciones Theta de Riemman con característica racional de la forma:

$$f_l(z|\tau/k) = \Theta \left[ \begin{matrix} 0 \\ l/k \end{matrix} \right] (z|\tau/k) , l = 0, 1, \dots, k - 1 \tag{6.85}$$

La acción de los operadores de Mumford sobre este subespacio viene dada por:

$$\begin{aligned} S(j/k)\Theta \begin{bmatrix} 0 \\ l/k \end{bmatrix} (z|\tau/k) &= \Theta \begin{bmatrix} 0 \\ (l+j)/k \end{bmatrix} (z|\tau/k) \\ T(j/k)\Theta \begin{bmatrix} 0 \\ l/k \end{bmatrix} (z|\tau/k) &= e^{-i2\pi\frac{j}{k}\frac{l}{k}} \Theta \begin{bmatrix} j/k \\ l/k \end{bmatrix} (z|\tau/k) \end{aligned} \quad (6.86)$$

de tal manera que las condiciones de invarianza se traducen simplemente en:

$$\begin{aligned} S(n_1)\Theta \begin{bmatrix} 0 \\ l/k \end{bmatrix} (z|\tau/k) &= \Theta \begin{bmatrix} 0 \\ l/k \end{bmatrix} (z|\tau/k) \quad , \quad n_1, n_2 \in \mathbf{Z} \\ T(n_2)\Theta \begin{bmatrix} 0 \\ l/k \end{bmatrix} (z|\tau/k) &= e^{-i2\pi n_2 \frac{l}{k}} \Theta \begin{bmatrix} n_2 \\ l/k \end{bmatrix} (z|\tau/k) = \Theta \begin{bmatrix} 0 \\ l/k \end{bmatrix} (z|\tau/k) \end{aligned}$$

donde hemos utilizado que  $\Theta \begin{bmatrix} n \\ l/k+m \end{bmatrix} (z|\tau/k) = \Theta \begin{bmatrix} 0 \\ l/k \end{bmatrix} (z|\tau/k)$ ,  $\forall n, m \in \mathbf{Z}$ .

Por último, estos operadores actuando sobre la base de  $\mathcal{H}_{T^2}$ <sup>11</sup>:

$$\begin{aligned} S(j/k)f_l(z|\tau/k) &= f_{l+j}(z) \quad , \quad \text{modulo } k \\ T(1)f_l(z|\tau/k) &= e^{-i2\pi\frac{l}{k}} f_l(z) \end{aligned}$$

La primera de estas expresiones tomando  $j = 1$  permite caracterizar la degeneración del primer nivel de Landau, así, el operador  $S(1/k)$  añade una unidad de momento (operador de creación), y  $S^\dagger(1/k) = S(-1/k)$  será el correspondiente operador de destrucción, ambos actuando sobre el primer nivel de Landau. En cuanto a  $T(1)$ , puede interpretarse como el operador exponencial para el momento lineal, de tal forma que  $T(1) \equiv e^{i2\pi\frac{p_1}{k}}$ , y por tanto,  $p_1 f_l(z|\tau/k) = l f_l(z|\tau/k)$ .

El significado físico de estos operadores puede deducirse de su relación con los generadores de las *traslaciones magnéticas*. A partir del problema de Landau en el plano, podemos encontrar los operadores que generan las *traslaciones magnéticas* en el toro. Así, pues, consideremos primeramente los generadores infinitesimales de esta simetría, que serán los operadores dados por:

$$\begin{aligned} \tilde{b} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\text{Im}\tau}{\pi k}} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} - i \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{2\pi k}{\text{Im}\tau} x_1 \right) \equiv \sqrt{\frac{\text{Im}\tau}{\pi k}} \left( \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\pi k}{\text{Im}\tau} \text{Re}z \right) \\ \tilde{b}^\dagger &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\text{Im}\tau}{\pi k}} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{2\pi k}{\text{Im}\tau} x_1 \right) \equiv \sqrt{\frac{\text{Im}\tau}{\pi k}} \left( -\frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \frac{\pi k}{\text{Im}\tau} \text{Re}z \right) \end{aligned} \quad (6.87)$$

tal que  $[\tilde{b}, \tilde{b}^\dagger] = 1$ . Que reescalando tenemos:  $[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = \frac{\pi k}{\text{Im}\tau}$  y satisfacen  $[\hat{b}, H] = [\hat{b}^\dagger, H] = 0$ .



Los operadores que generan las *traslaciones magnéticas* en el gauge de Landau serán, por tanto,

$$T_{c\bar{c}} = e^{c\hat{b} - c\hat{b}^\dagger} \quad (6.88)$$

donde  $c = c_1 + ic_2$ ,  $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ . Utilizando la fórmula de Campbell-Hausdorff-Baker [128] puede comprobarse fácilmente que satisfacen el álgebra:

$$[T_{c\bar{c}}, T_{d\bar{d}}] = 2i \operatorname{sen} \left( \frac{\pi k}{\operatorname{Im}\tau} (c_1 d_2 - d_1 c_2) \right) T_{c+d, c\bar{+}d} \quad (6.89)$$

Tomando  $c_1, c_2$  y  $d_1, d_2$  enteros encontramos el álgebra trigonométrica de Fairlie-Flecher-Zachos [74].

Para analizar la relación de estos operadores con los operadores de Mumford, es conveniente considerar separadamente las traslaciones en cada una de las direcciones de la celda principal, en la red periódica bidimensional. Es decir, tomemos los operadores:

$$\begin{aligned} t(c) &= T_{c,c} = e^{c\hat{b} - c\hat{b}^\dagger} \equiv e^{b \frac{\partial}{\partial x_1}}, \quad c \in \mathbf{R} \\ t(a\tau) &= T_{a\tau, a\bar{\tau}} = e^{a\tau\hat{b} - a\bar{\tau}\hat{b}^\dagger}, \quad a \in \mathbf{R} \end{aligned} \quad (6.90)$$

donde  $\tau = \tau_1 + i\tau_2$  es el parámetro modular.

La acción de estos operadores en el primer nivel de Landau es:

$$\begin{aligned} t(c)\Phi_{0l}(z, \bar{z}) &= \Phi_{0l}(z + c, \bar{z} + c) \\ t(a\tau)\Phi_{0l}(z, \bar{z}) &= e^{i2\pi k(a\operatorname{Re}(z) + \frac{1}{2}a^2\operatorname{Re}(\tau))} \Phi_{0l}(z + a\tau, \bar{z} + a\bar{\tau}) \end{aligned} \quad (6.91)$$

Encontramos, por tanto, que el operador  $t(c)$  genera las traslaciones en la dirección  $x_1$ , mientras que el operador  $t(a\tau)$ , que actuando sobre  $\Phi_{0l}(z, \bar{z})$  produce un 1-cociclo  $\omega_1(x_1, a) = -(ax_1 + \frac{1}{2}a^2\tau_1)$ , puede interpretarse físicamente como una transformación de Galileo, de velocidad  $a$  en la dirección  $x_1$  y con tiempo propio  $\tau_1$ .

La relación con los operadores de Mumford se hace evidente si tenemos en cuenta que en representación holomorfa pueden expresarse de la forma:

$$\begin{aligned} S(c) &= e^{c \frac{\partial}{\partial \bar{z}}}, \quad c \in \mathbf{R} \\ T(a) &= e^{a\tau \frac{\partial}{\partial z} + i2\pi k a z}, \quad a \in \mathbf{R} \end{aligned} \quad (6.92)$$

Los generadores de las *traslaciones magnéticas* en términos de los operadores de Mumford son:

$$\begin{aligned} t(c) &= S(c)e^{c \frac{\partial}{\partial \bar{z}}} \\ t(a\tau) &= T(a)e^{(a\bar{\tau} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + 2\pi k a \operatorname{Im}(z))} e^{i\pi k \frac{a^2}{2}\tau} \end{aligned} \quad (6.93)$$

tal que

$$t(c)t(a\tau) = e^{i2\pi kca}t(a\tau)t(c) \quad (6.94)$$

En definitiva, las simetrías del Hamiltoniano son las *traslaciones magnéticas* para  $c$  y  $a$  enteros, de forma que:

$$\begin{aligned} t\left(\frac{j}{k} + n_1\right)Ht^\dagger\left(\frac{j}{k} + n_1\right) &= H \quad , \quad j = 0, 1, \dots, k-1, n_1 \in \mathbf{Z} \\ t(n_2\tau)Ht^\dagger(n_2\tau) &= H \quad , \quad n_2 \in \mathbf{Z} \end{aligned} \quad (6.95)$$

Aunque los generadores de las *traslaciones magnéticas*  $t(c)$  y  $t(a\tau)$  conmutan con el Hamiltoniano  $H$  sus dominios de definición no son los mismos, sólo para valores enteros de los parámetros  $c$  y  $a$  comparten el dominio de definición. Esto está relacionado con el hecho de que los generadores infinitesimales de las *traslaciones magnéticas*,  $\tilde{b}$  y  $\tilde{b}^\dagger$  definen la estructura holomorfa natural en el espacio de secciones del fibrado de línea sobre el toro  $\mathcal{L}_{-k}$ , con primera clase de Chern  $k$ , mientras que son los operadores  $\tilde{a}$  y  $\tilde{a}^\dagger$  los que determinan la derivada covariante en  $\mathcal{L}_k$ . [8, 36]

Para el estado fundamental encontramos que:

$$\begin{aligned} t(n_1)\Phi_{0l}(z, \bar{z}) &= \Phi_{0(l+n_1k)}(z, \bar{z}) = \Phi_{0l}(z, \bar{z}) \\ t(n_2\tau)\Phi_{0l}(z, \bar{z}) &= \Phi_{0l}(z, \bar{z}) \end{aligned} \quad (6.96)$$

Los operadores de creación y destrucción que actúan en cada nivel de Landau serán, por tanto,  $t(1/k)$  y  $t^\dagger(1/k)$ .

Un punto importante en el estudio de la naturaleza del estado fundamental, de un gas bidimensional de electrones, es la reducción al subespacio de estados correspondiente al primer nivel de Landau para el problema de un electrón. Esta reducción se puede llevar a cabo tomando el límite topológico en la teoría.

En este límite, el espacio de estados cuánticos del problema de Landau reduce a  $H^0(T_\tau^2, \mathcal{L}_k)$ , es decir, el espacio de secciones holomorfas del fibrado de línea de grado  $c_1(\mathcal{L}_k) = -k$ . En definitiva, el subespacio del espacio de Hilbert,  $\mathcal{H}_{T_\tau^2}^{11}$ , que como hemos visto es el espacio de funciones holomorfas que satisfacen las condiciones de periodicidad dadas en: (6.84), y está generado por las funciones Theta:  $\{\Theta \begin{bmatrix} 0 \\ l/k \end{bmatrix} (z|\tau/k)\}$ .

Teniendo en cuenta la siguiente relación para estas funciones:

$$\Theta \begin{bmatrix} 0 \\ i/k \end{bmatrix} (z|\tau/k) = \sum_{j=0}^{k-1} e^{-i2\pi \frac{jl}{k}} \Theta \begin{bmatrix} j/k \\ 0 \end{bmatrix} (kz|k\tau) \quad (6.97)$$

es posible tomar como base de  $H^0(T_\tau^2, \mathcal{L}_k)$  las funciones:  $\{\Theta \left[ \begin{smallmatrix} j/k \\ 0 \end{smallmatrix} \right] (kz|k\tau)\}$ . Esto puede interpretarse en el siguiente sentido, dado que cada función Theta en la nueva base es una sección de un fibrado de línea de grado uno sobre el toro  $T_{k\tau}^2 = \frac{\mathbf{C}}{k\mathbf{Z} \otimes k\tau\mathbf{Z}}$ ; y el *pull-back* de este fibrado por el endomorfismo  $\mathbf{C}: z \rightarrow kz$ , es un fibrado sobre  $T_\tau^2$  de grado  $c_1(k^*\mathcal{L}_1) = -k$ ,  $\{\Theta \left[ \begin{smallmatrix} j/k \\ 0 \end{smallmatrix} \right] (kz|k\tau)\}$  forman una base en  $H^0(T_\tau^2, k^*\mathcal{L}_1)$ .

En resumen, las *traslaciones magnéticas* representan la simetría característica del problema de Landau. En particular, en una red periódica debemos considerar aquellas traslaciones en las direcciones de la red con un parámetro entero, y como consecuencia los generadores de esta simetría satisfacen el álgebra trigonométrica de Fairlie-Flecher-Zachos. La relación de estos operadores con los operadores de Mumford es entonces inmediata y permite dar una interpretación física de los mismos. Así,  $S(b)$  es el generador de las traslaciones en la dirección  $x_1$ , en el límite topológico, y  $T(a)$  genera las transformaciones de Galileo complejas, en ese límite, con igual velocidad en ambas direcciones, y con el tiempo propio caracterizado por el parámetro modular.

### 6.3 Cálculo de la conductividad Hall

En esta Sección determinaremos la conductividad Hall, para el Efecto Entero y Fraccionario, en el marco de Segunda Cuantificación, utilizando el formalismo desarrollado en la primera parte, para el problema equivalente en el plano [70].

Conocemos el espectro y las secciones correspondientes al problema de Dirac-Landau en una red periódica bidimensional, podemos expresar el campo fermiónico en función de los modos propios del operador de Dirac en (2+1) dimensiones, así:

$$\phi(z, \bar{z}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{k-1} \left( B_{nl} \phi_{nl}^+(z, \bar{z}) + D_{nl}^\dagger \phi_{nl}^-(z, \bar{z}) \right) + \sum_{l=0}^{k-1} A_l \phi_{0l}(z, \bar{z}) \tag{6.98}$$

donde  $\{\phi_{nl}^+(z, \bar{z}), \phi_{nl}^-(z, \bar{z}), \phi_{0l}(z, \bar{z})\}$  forman una base ortonormal de espinores que satisfacen condiciones de periodicidad. Los operadores  $B_{nl}, D_{nl}, A_l$  y sus conjugados verifican las reglas de anticonmutación:

$$\begin{aligned} \{B_{nl}, B_{n'l'}^\dagger\} &= \delta_{nn'} \delta_{ll'} = \{D_{nl}, D_{n'l'}^\dagger\} \\ \{A_l, A_{l'}^\dagger\} &= \delta_{ll'} \end{aligned} \tag{6.99}$$

El espacio de Hilbert es el espacio de Fock fermiónico:

$$\mathcal{F} \equiv \Lambda(\Gamma_+(S) \oplus \Gamma_-(S) \oplus \Gamma_0(S))$$

$$\begin{aligned}
&= \Lambda(\Gamma_+(S)) \otimes \Lambda(\Gamma_-(S)) \otimes \Lambda(\Gamma_0(S)) \\
&= \bigoplus_{p,q,r} \Lambda^p(\Gamma_+(S)) \otimes \Lambda^q(\Gamma_-(S)) \otimes \Lambda^r(\Gamma_0(S))
\end{aligned} \tag{6.100}$$

generado por:

$$\begin{aligned}
&\left\{ |1_{n_1 l_1}, \dots, 1_{n_p l_p}; 1_{m_1 l_1}, \dots, 1_{m_q l_q}; 1_{l_1}, \dots, 1_{l_r} \rangle \right. \\
&= \left. B_{n_1 l_1}^\dagger \cdots B_{n_p l_p}^\dagger D_{m_1 l_1}^\dagger \cdots D_{m_q l_q}^\dagger A_{l_1}^\dagger \cdots A_{l_r}^\dagger |0\rangle \right\}
\end{aligned} \tag{6.101}$$

donde el estado vacío,  $|0\rangle$ , satisface:

$$A_l |0\rangle = 0, \quad B_{nl} |0\rangle = D_{nl} |0\rangle = 0, \quad \forall n, l \tag{6.102}$$

Tanto para los modos cero ( $A_l, A_l^\dagger$ ), como para los modos “fermiónicos” ( $B_{nl}, D_{nl}$ ), existe degeneración siempre que un nivel de energía no este completamente ocupado. Esta degeneración, a diferencia del problema en el plano, es finita pues el número de estados posibles en cada nivel de energía es finito, e igual a  $k$ , y depende del flujo magnético que en el toro está cuantizado. Si definimos el factor de llenado como el número de modos ocupados, para un campo magnético dado (o flujo), tenemos  $f = \frac{n}{n_B} \equiv \frac{j}{k}$ , donde  $n = \frac{j}{\text{Im}\tau}$  es la densidad de partículas, y  $n_B = \frac{k}{\text{Im}\tau}$  la densidad de modos. El número de estados posibles, de igual energía, con  $j$  partículas y  $k$  modos es entonces:  $\binom{k}{j}$ . En el límite,  $\tau \rightarrow \infty$  y  $k \rightarrow \infty$ , recuperamos el resultado que teníamos en el plano, donde  $f$  toma un valor finito, entero o fraccionario, dependiendo de que cada nivel esté ocupado parcial o completamente.

En el Efecto Hall Cuántico Entero intervienen sólo los estados correspondientes a factores de llenado enteros, es decir,  $f = i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$ . Estos estados no están degenerados, y cada uno de ellos puede determinarse de forma única. Así, tenemos estados de partícula con  $f = i$ , dados por:

$$\begin{aligned}
|f = i\rangle &\equiv |1_0, \dots, 1_{k-1}; 1_{1,0}, \dots, 1_{1,k-1}, \dots, 1_{i-1,0}, \dots, 1_{i-1,k-1}\rangle \\
&\equiv A_0^\dagger \cdots A_{k-1}^\dagger \cdots B_{1,0}^\dagger \cdots B_{1,k-1}^\dagger \cdots B_{i-1,0}^\dagger \cdots B_{i-1,k-1}^\dagger |0\rangle
\end{aligned} \tag{6.103}$$

tal que

$$\begin{aligned}
A_l^\dagger |f = i\rangle &= 0, \quad B_{nl}^\dagger |f = i\rangle = 0, \quad n = 0, 1, \dots, i-1, \quad l = 0, \dots, k-1 \\
B_{nl} |f = i\rangle &= 0, \quad \forall n \neq 0, 1, \dots, i-1, \quad l \\
D_{nl} |f = i\rangle &= 0, \quad \forall n \neq 0, \quad l
\end{aligned} \tag{6.104}$$

El estado,  $|f = 1\rangle$ , es el estado fundamental, en el cual todos los modos cero están ocupados, y los demás serán, por tanto, estados excitados de partícula.

El operador densidad de carga en función del campo fermiónico es:

$$\rho = -e \frac{[\phi^\dagger, \phi]}{2} \quad (6.105)$$

Sustituyendo la expresión del campo en función de los modos propios de una partícula, y teniendo en cuenta que los espinores forman una base ortonormal, resultará:

$$\begin{aligned} \rho = & -e \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{k-1} \phi_{nl}^\dagger(z, \bar{z}) \phi_{nl}(z, \bar{z}) (B_{nl}^\dagger B_{nl} - D_{nl}^\dagger D_{nl}) \right. \\ & \left. + \sum_{l=0}^{k-1} \phi_{0l}^\dagger(z, \bar{z}) \phi_{0l}(z, \bar{z}) \left( A_l^\dagger A_l - \frac{1}{2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (6.106)$$

El valor esperado en un estado con factor de llenado entero es:

$$\rho_i = \langle f = i | \rho | f = i \rangle = -e \left( i - \frac{1}{2} \right) \sum_{l=0}^{k-1} \phi_{0l}^\dagger(z, \bar{z}) \phi_{0l}(z, \bar{z}) \quad (6.107)$$

que integrando a todo el espacio, y teniendo en cuenta la ortonormalidad de la base, resulta:

$$\int \frac{dz d\bar{z}}{2i} \langle f = i | \rho | f = i \rangle = -e \left( i - \frac{1}{2} \right) k \quad (6.108)$$

En definitiva, encontramos que el valor esperado del operador densidad de carga, en un estado con factor de llenado entero, por unidad de área,  $\text{Im}\tau$ , es:

$$\tilde{\rho}_i = -e \left( i - \frac{1}{2} \right) \left( \frac{k}{\text{Im}\tau} \right) \quad (6.109)$$

y en el límite  $\tau \rightarrow \infty$ ,  $k \rightarrow \infty$  recuperamos el resultado ya conocido:

$$\rho_i = -e \left( i - \frac{1}{2} \right) \left( \frac{eB}{hc} \right) \quad (6.110)$$

Teniendo en cuenta que la densidad de carga en el vacío no es nula, como consecuencia de la presencia de los modos cero, podemos determinar la densidad de carga de conducción y, así,

$$\tilde{\rho} = i(-e) \left( \frac{k}{\text{Im}\tau} \right) \quad (6.111)$$

Por analogía con el problema en el plano, con una transformación de Lorentz, podemos pasar a un sistema de referencia en el cual tenemos campo magnético y

eléctrico, ambos constantes y uniformes, perpendiculares entre sí. Sin embargo, al considerar la red periódica, del mismo modo que el flujo magnético está cuantizado deberá estarlo el flujo asociado al campo eléctrico. Entonces, el valor esperado de la densidad de corriente covariante, en un estado con factor de llenado entero, será:

$$j^\mu = -i \frac{e^2}{h} {}^*F^\mu \quad \mu = 0, 1, 2 \quad (6.112)$$

donde

$${}^*F^0 = \frac{hc}{e} \frac{k}{\text{Im}\tau}, \quad {}^*F^1 = -\frac{hc}{e} \frac{k}{\text{Im}\tau} \frac{v_1}{c}, \quad {}^*F^2 = \frac{hc}{e} \frac{k}{\text{Im}\tau} \frac{v_2}{c} \quad (6.113)$$

La densidad de corriente transversal al campo eléctrico permite determinar la conductividad Hall, que está cuantizada, y,

$$\sigma_H = \pm i \frac{e^2}{h} \quad (6.114)$$

El signo depende de que consideremos partículas o antipartículas. En esta expresión,  $i$ , es un entero que determina el número de niveles de Dirac-Landau que están completamente llenos por partículas o antipartículas.

Esta condición de cuantización, para la conductividad Hall en el Efecto Entero, coincide esencialmente con el resultado que teníamos en el plano. Como sucedía entonces, no es suficiente que el valor de la conductividad Hall esté cuantizado exactamente para valores enteros del factor de llenado, sino debe permanecer en ese valor cuantizado cuando el factor de llenado se desvía de ese valor entero. Para estudiar este comportamiento es necesario ir al problema de la localización, o bien, como vimos para el Efecto Entero en el plano, con la teoría de Thouless encontramos que la conductividad Hall es un invariante topológico y, por tanto, toma un valor constante, aunque se modifiquen ligeramente las condiciones del sistema.

Para deducir la conductividad Hall en el Efecto Fraccionario, seguiremos los mismos pasos que para el Entero. Ahora, el factor de llenado toma valores en:  $0 \leq f \leq 1$ , es decir, para este efecto, interviene únicamente el primer nivel de Dirac-Landau, cuando está parcialmente ocupado. Como hemos visto, en esta situación hay degeneración para cada factor de llenado,  $f = \frac{j}{k}$  con  $j = 0, 1, 2, \dots, k-1$ .

En general, el estado con  $j$  partículas en  $k$  modos cero, correspondiente a un factor de llenado fraccionario  $f = \frac{j}{k}$ , presenta una degeneración,  $\binom{k}{j} = \frac{k!}{j!(k-j)!}$ , y

viene dado por:

$$\begin{aligned} |j; l_1, l_2, \dots, l_j\rangle &\equiv A_{l_1}^\dagger A_{l_2}^\dagger \cdots A_{l_j}^\dagger |0\rangle \\ l_1 < l_2 < \cdots < l_j, \quad l_i &= 0, 1, 2, \dots, k-1 \end{aligned} \quad (6.115)$$

Para determinar la densidad de carga, en estos estados, calculamos el promedio del valor esperado del operador, (6.105), en los todos los estados posibles para un factor de llenado dado. Así, para  $f = \frac{j}{k}$  resultará:

$$\bar{\rho}(z, \bar{z}) = \frac{\sum_{l_1 < l_2 < \cdots < l_j}^{k-1} \langle j; l_1, l_2, \dots, l_j | \rho | j; l_1, l_2, \dots, l_j \rangle}{\sum_{l_1 < l_2 < \cdots < l_j}^{k-1} \langle j; l_1, l_2, \dots, l_j | j; l_1, l_2, \dots, l_j \rangle} \quad (6.116)$$

y la función de distribución para la densidad de carga promedio será entonces:

$$\bar{\rho}(z, \bar{z}) = -e \left( \frac{j}{k} - \frac{1}{2} \right) \sum_{l=0}^{k-1} \phi_{0l}^\dagger(z, \bar{z}) \phi_{0l}(z, \bar{z}) \quad (6.117)$$

que integrando a todo el espacio resulta:

$$\int \frac{dz d\bar{z}}{2i} \bar{\rho}(z, \bar{z}) = -e \left( \frac{j}{k} - \frac{1}{2} \right) k \quad (6.118)$$

Por tanto, la densidad de carga promedio por unidad de área será:

$$\tilde{\rho} = -e \left( \frac{j}{k} - \frac{1}{2} \right) \frac{k}{\text{Im}\tau} \quad (6.119)$$

que, en el límite  $\tau, k \rightarrow \infty$ , resulta:

$$\bar{\rho}_f = -e \left( f - \frac{1}{2} \right) \left( \frac{eB}{hc} \right) \quad (6.120)$$

La expresión, (6.119), generaliza para el Efecto Fraccionario el resultado que hemos calculado para el Entero. Respecto de la densidad de carga del vacío tenemos:

$$\tilde{\rho} = f(-e) \frac{k}{\text{Im}\tau} \quad (6.121)$$

que, en forma covariante,

$$j^\mu = -f \frac{e^2}{h} {}^*F^\mu \quad (6.122)$$

donde  ${}^*F^\mu$  viene dado por (6.113).

La conductividad Hall aparece de nuevo cuantizada, pero ahora toma los valores,  $\sigma_H = f \frac{e^2}{h}$ , para factores de llenado fraccionarios,  $f = \frac{j}{k}$ . El Efecto Hall Cuántico Fraccionario difiere del Efecto Entero, esencialmente, en la degeneración que aparece cuando tenemos un nivel de Dirac-Landau parcialmente ocupado. Esta puede ser infinita, como sucede en el plano, o finita, en el toro. En consecuencia, se entiende que considerar o no la interacción entre las partículas es la diferencia esencial entre ambos efectos. No obstante, pueden estudiarse ambos de una manera global, si entendemos el Efecto Fraccionario como el Entero para *fermiones compuestos*, como vimos en los capítulos 4 y 5. Sin embargo, una vez más nos encontramos con el problema de demostrar que la conductividad Hall, no sólo está cuantizada para ciertos valores fraccionarios del factor de llenado, sino que permanece en dicho valor cuando éste se modifica ligeramente. Para entender este aspecto de la teoría del Efecto Hall Cuántico Fraccionario será necesario generalizar la teoría de Thouless, éste será precisamente el objeto de las siguientes Secciones.

## 6.4 Estados de Haldane-Rezayi. Fórmulas de adición

En esta sección abordaremos el estudio de la generalización de la teoría de Laughlin, [82, 81], para muchas partículas, para el caso de una red periódica y para sistemas bidimensionales formados por muchas capas en las que es posible observar el Efecto Hall Cuántico Fraccionario. Estos son esencialmente los refinamientos de la teoría de Laughlin que permitirán la comprensión de la conductividad Hall como una cantidad topológica en el Efecto Hall Cuántico Fraccionario:

- Por un lado, Haldane y Rezayi, [52], proponen un estado fundamental variacional de tipo Laughlin cuando el Efecto Hall Cuántico Fraccionario se produce en una red periódica. La dinámica del centro de masas no es trivial en este caso, a diferencia del problema en el plano, y como consecuencia el estado fundamental es degenerado.
- Por otro lado, Wen y Zee, [130, 131], han desarrollado la teoría de la matriz  $K$  para describir los “órdenes topológicos” asociados con las mesetas en la conductividad Hall cuando el fluido Hall cuántico está formado por  $q$  capas. La generalización del estado de Laughlin, para esta teoría con la matriz  $K$ , a una red periódica ha sido propuesta por Wen y Keski-Vakkuri, [126].



Comenzaremos, pues, considerando un fluido Hall, bidimensional, formado por  $N$  partículas, que se mueve en una red periódica, en presencia de un campo magnético constante. El Hamiltoniano de muchos cuerpos puede determinarse a partir del operador correspondiente expresado en función de los campos fermiónicos  $\phi$  y  $\phi^\dagger$ , así

$$H = \int \frac{dzd\bar{z}}{2i} : \phi^\dagger(z, \bar{z}) H_D^0 \phi(z, \bar{z}) : \quad (6.123)$$

donde  $H_D^0$  viene dado por (1.95), de tal manera que,

$$H_N = \sum_{I=1}^N H_D^0(I) = -2\hbar c \sqrt{\frac{\pi k}{\text{Im}\tau}} \sum_{I=1}^N \begin{pmatrix} 0 & \tilde{a}_I^\dagger \\ \tilde{a}_I & 0 \end{pmatrix} \quad (6.124)$$

con  $\tilde{a}_I$  el operador diferencial definido en (6.28) para el electrón  $I$ -ésimo. El estado fundamental para este sistema, correspondiente al factor de llenado:  $f = \frac{N}{k} = \frac{1}{m}$ , con  $m$  impar, será un espinor con una sólo componente no nula, que de acuerdo con la experiencia previa, deberá ser una función analítica de las coordenadas de cada partícula  $z_I$ , además de un prefactor, en la forma:

$$\begin{aligned} \phi(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_N, \bar{z}_N) &= \begin{pmatrix} \Phi(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_N, \bar{z}_N) \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Phi(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_N, \bar{z}_N) &= F(z_1, \dots, z_N) e^{-\frac{\pi k}{\text{Im}\tau} \sum_{I=1}^N (\text{Im}z_I)^2} \end{aligned} \quad (6.125)$$

donde  $F(z_1, \dots, z_N)$  satisface las condiciones de periodicidad para cada partícula:

$$\begin{aligned} F(z_1, \dots, z_I + 1, \dots, z_N) &= F(z_1, \dots, z_I, \dots, z_N) \\ F(z_1, \dots, z_I + \tau, \dots, z_N) &= e^{-i2\pi k(z_I + \frac{\tau}{2})} F(z_1, \dots, z_I, \dots, z_N) \end{aligned} \quad (6.126)$$

que se deducen de:

$$\begin{aligned} \Phi(z_I + 1, \bar{z}_I + 1) &= \Phi(z_I, \bar{z}_I) \\ \Phi(z_I + \tau, \bar{z}_I + \bar{\tau}) &= e^{-i2\pi k \text{Re}(z_I + \frac{\tau}{2})} \Phi(z_I, \bar{z}_I) \end{aligned} \quad (6.127)$$

La invariancia traslacional permite expresar la función de onda como producto de un término que depende de la coordenada del centro de masas,  $Z = \sum_{I=1}^N z_I$ , y otro que dependerá sólo de las coordenadas relativas,  $z_{IJ} = z_I - z_J$ . De esta forma,

y utilizando la hipótesis de Laughlin-Jastrow, Haldane y Rezayi, proponen que el estado fundamental sea de la forma:

$$F_{HR}(z_1, \dots, z_N) = F_{\text{cm}}(Z) \prod_{I < J}^N f(z_{IJ}) \quad (6.128)$$

Las funciones de onda relativas, para satisfacer la estadística de Fermi, deben ser impares cuando cambiamos  $z_{IJ}$  por  $z_{JI} = -z_{IJ}$ , y de las condiciones de periodicidad para cada partícula se deduce que debe cumplirse:

$$\begin{aligned} f(z_{IJ} + 1) &= \eta_1 f(z_{IJ}) \\ f(z_{IJ} + \tau) &= \eta_2 e^{-i2\pi m(z_{IJ} + \frac{\tau}{2})} f(z_{IJ}) \end{aligned} \quad (6.129)$$

donde  $\eta_1$  y  $\eta_2$  son fases constantes. La solución propuesta por Haldane y Rezayi que satisface estas condiciones es:

$$f(z_I - z_J) = \Theta^m \left[ \begin{matrix} 1/2 \\ 1/2 \end{matrix} \right] (z_I - z_J | \tau) \quad (6.130)$$

de tal manera que  $\eta_1 = \eta_2 = (-1)^m$ . Es decir, se trata de una sección de un fibrado de línea  $\mathcal{L}_1^{\otimes m}$  sobre el toro parametrizado por las coordenadas relativas  $z_{IJ}$ , en  $H^0(T_\tau^2(IJ), \mathcal{L}_1^{\otimes m})$ , donde:

$$c_1(\mathcal{L}_1^{\otimes m}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{T_\tau^2(IJ)} \frac{f'}{f} = \# \text{de ceros de } f = m \quad (6.131)$$

y así, cada función  $f(z_{IJ})$  tiene un cero en la celda principal para  $z_{IJ} = 0$ , donde las partículas coinciden, de multiplicidad  $m$ . Esta función en el límite  $z_{IJ} \rightarrow 0$  se aproxima a  $f(z_{IJ}) \approx (z_I - z_J)^m$  que es el comportamiento en el plano sin condiciones de contorno.

De las condiciones de periodicidad para cada partícula (6.126), y de (6.128), junto con (6.129), se deduce que el término del centro de masas debe satisfacer:

$$\begin{aligned} F_{\text{cm}}(Z + 1) &= (-1)^{(N-1)m} F_{\text{cm}}(Z) \\ F_{\text{cm}}(Z + \tau) &= (-1)^{(N-1)m} e^{-2i\pi m(Z + \frac{\tau}{2})} F_{\text{cm}}(Z) \end{aligned} \quad (6.132)$$

Dependiendo de que  $(N-1)m \equiv k - m$  sea par o impar podemos distinguir dos tipos de soluciones para  $F_{\text{cm}}(Z)$ :

$$\begin{aligned} F_j^{(i)}(Z) &= \Theta \left[ \begin{matrix} 1/2 + j/m \\ 1/2 \end{matrix} \right] (mZ | m\tau), \quad j = 0, 1, \dots, m, \quad N-1 \text{ impar} \\ F_j^{(p)}(Z) &= \Theta \left[ \begin{matrix} j/m \\ 0 \end{matrix} \right] (mZ | m\tau), \quad j = 0, 1, \dots, m, \quad N-1 \text{ par} \end{aligned} \quad (6.133)$$

que forman una base en el espacio de las secciones holomorfas en  $\mathcal{L}_m$ . El punto crucial físicamente es el hecho de que el estado variacional de Haldane-Rezayi es  $m$  veces degenerado. La degeneración se debe, como hemos visto, a la dinámica del centro de masas que no es trivial cuando el espacio de configuración es compacto.

En definitiva:

$$F_{HR}(z_1, \dots, z_N) = F_j^{(i,p)}(Z) \prod_{I < J}^N \Theta^m \left[ \begin{matrix} 1/2 \\ 1/2 \end{matrix} \right] (z_I - z_J | \tau) \tag{6.134}$$

que es una sección holomorfa de un fibrado de línea sobre el producto cartesiano  $N$ -ésimo de  $T_\tau^2$ ,

$$F_{HR}(z_1, \dots, z_N) \in H^0(T_\tau^{2 \times N}, \mathcal{L}_k^N) \tag{6.135}$$

y el grado de  $\mathcal{L}_k^N$  es  $c_1(\mathcal{L}_k^N)^{\vee N} = k^N$ .

Como vimos en la Sección 3.1, en el caso del plano complejo es posible desarrollar el estado de Laughlin, y expresarlo como una combinación complicada de determinantes de Slater de funciones de onda de una partícula, para ello utilizamos la fórmula binomial sobre los monomios  $z_I^l$  que generan el primer nivel de Landau para el electrón  $I$ -ésimo. Además de identificar el elemento del espacio de Fock fermiónico es posible calcular de esta forma el factor de llenado correspondiente al estado variacional de Laughlin.

En orden a implementar el mismo procedimiento sobre el estado propuesto por Haldane-Rezayi necesitaríamos expresar las secciones de un fibrado de línea sobre  $\Sigma^{\times N}$  de grado  $k^N$  en términos de secciones de fibrados de línea sobre  $\Sigma$ . Se requiere un proceso en dos etapas: en primer lugar es necesario establecer isomorfismos entre ciertos fibrados, a continuación se puede usar la fórmula de Künneth para relacionar secciones en fibrados sobre la propia superficie de Riemann  $T_\tau^2$ .

No es una tarea fácil; empezando en el caso  $N = 2$ , consideremos la aplicación  $\xi : T_\tau^2 \times T_\tau^2 \rightarrow T_\tau^2[12] \times T_\tau^2(12)$  dada por:  $\xi(z_1, z_2) = (z_1 + z_2, z_1 - z_2)$ , y denotemos la proyección de  $T_\tau^2 \times T_\tau^2$  a cada componente por  $p_a$ ,  $p_a(z_1, z_2) = z_a$ ,  $a = 1, 2$ . Sea  $\mathcal{L}$  un fibrado de línea sobre  $T_\tau^2$

Fórmula de adición, [96]:

$$\xi^*(p_1^* \mathcal{L} \otimes p_2^* \mathcal{L}) = p_1^* \mathcal{L}^2 \otimes p_2^* \mathcal{L}^2 \tag{6.136}$$

donde  $p_1^* \mathcal{L}^2 \otimes p_2^* \mathcal{L}^2$  es el fibrado de línea sobre  $T_\tau^2(1) \times T_\tau^2(2)$  obtenido mediante el *pull-back* de la proyección a cada componente de  $\mathcal{L}^2$ , el “cuadrado” del fibrado  $\mathcal{L}$ . La fórmula de adición establece el isomorfismo del *pull-back* vía  $\xi$  de  $p_1^* \mathcal{L} \otimes p_2^* \mathcal{L}$  con  $p_1^* \mathcal{L}^2 \otimes p_2^* \mathcal{L}^2$ .

La fórmula de Künneth

$$H^0(T_\tau^2(1) \times T_\tau^2(2), p_1^* \mathcal{L}^2 \otimes p_2^* \mathcal{L}^2) = H^0(T_\tau^2(1), \mathcal{L}^2) \otimes H^0(T_\tau^2(2), \mathcal{L}^2) \quad (6.137)$$

permite expresar secciones en  $H^0(T_\tau^2(1) \times T_\tau^2(2), p_1^* \mathcal{L}^2 \otimes p_2^* \mathcal{L}^2)$ , como el procedimiento de segunda cuantificación requiere, en términos de secciones en  $H^0(T_\tau^2, \mathcal{L}^2)$ .

Si  $c_1(\mathcal{L}) = 1$  la fórmula de adición junto con la de Künneth implican las relaciones entre las funciones Theta de Riemann, ver Mumford:

$$\begin{aligned} & \Theta \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} (z_1 + z_2 | \tau) \Theta \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} (z_1 - z_2 | \tau) \Theta^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (0 | \tau) \\ &= \Theta^2 \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} (z_1 | \tau) \Theta^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (z_2 | \tau) - \Theta^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (z_1 | \tau) \Theta^2 \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} (z_2 | \tau) \end{aligned} \quad (6.138)$$

La aplicación de la fórmula de adición y la de Künneth a la función de onda de Haldane-Rezayi resulta:

$$\begin{aligned} & \Theta^m \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} (z_1 + z_2 | \tau) \Theta^m \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} (z_1 - z_2 | \tau) \Theta^{2m} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (0 | \tau) \\ &= \sum_{r=0}^m (-1)^r \binom{m}{r} \Theta^{2(m-r)} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} (z_1 | \tau) \Theta^{2(m-r)} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (z_2 | \tau) \Theta^{2r} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} (z_2 | \tau) \\ & \cdot \Theta^{2r} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (z_1 | \tau) \end{aligned} \quad (6.139)$$

En este caso el grado de  $\mathcal{L}$  es  $c_1(\mathcal{L}) = m$ . Hemos tomado la función de onda del centro de masas como  $\Theta^m \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} (Z | \tau)$  puesto que tanto  $\Theta^m \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} (Z - l/m | \tau)$  como  $\Theta \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 - l/m \end{bmatrix} (Z | \tau/m)$  son bases en  $H^0(T_\tau^2, \mathcal{L}_m)$  y tenemos la libertad de elegir.

La diferencia principal en el cómputo del factor de llenado correspondiente a  $\Phi_{HR}$  con respecto al mismo cálculo en la función de onda de Laughlin es que el número total de estados de una partícula a ocupar por los electrones es  $2k$ , frente a  $k$  en el estado de Laughlin para un disco. Ello se debe a que el proceso de reducción al centro de masas en una red periódica no es un simple cambio de coordenadas. En el caso que nos ocupa  $N = 2$  es una aplicación dos a uno en los puntos de 2-torsión. Esto se refleja en la conexión entre  $\mathcal{L}$  y  $\mathcal{L}^2$  implícita en la fórmula de adición (6.136) y físicamente requiere la consideración simultánea de los sectores de Ramond y Neveu-Schwartz fermiónicos para construir la sección del centro de masas en términos de los estados de una partícula.

En cualquier otro aspecto la cuenta de estados ocupados sigue el mismo esquema aplicable en el estado de Laughlin. Debido al hecho de que se puede expresar  $\Theta^{2m} \begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon \end{bmatrix} (z | \tau)$ ,  $2\epsilon \in \mathbf{Z} \bmod 2$ , como una combinación lineal de los estados

de una partícula  $\Theta \left[ \begin{smallmatrix} \epsilon+l/2m \\ \epsilon \end{smallmatrix} \right] (2mz|2m\tau) = \Theta \left[ \begin{smallmatrix} \epsilon+l/k \\ \epsilon \end{smallmatrix} \right] (kz|k\tau)$ , el examen del término  $r = 0$  del sumatorio en (6.139) indica que hay  $k = 2m$  estados ocupados por partícula;  $f_{HR} = \frac{1}{k} = \frac{1}{2m}$ , la mitad del caso de Laughlin, debido a que hay dos sectores espinoriales. Si uno interpreta un electrón como dos partículas de acuerdo con las dos estructuras de espín que puede elegir, recuérdese que son sectores desconectados topológicamente, el factor de llenado por estructura de espín, número de estados ocupados por partícula y estructura de espín, es  $f_{HR}^\epsilon = \frac{1}{m}$  y coincide con la asignación habitual.

Para proceder al caso  $N = 3$  consideremos las proyecciones  $p_{IJ} : T_\tau^2 \times T_\tau^2 \times T_\tau^2 \rightarrow T_\tau^2(I) \times T_\tau^2(J)$  definidas por  $p_{IJ}(z_1, z_2, z_3) = z_{IJ}$ . Denotemos por  $m : T_\tau^2(I) \times T_\tau^2(J) \rightarrow T_\tau^2[IJ]$  el morfismo suma:  $m(z_I, z_J) = z_I + z_J$ . Sean  $m_{IJ} : T_\tau^2 \times T_\tau^2 \times T_\tau^2 \rightarrow T_\tau^2[IJ]$  la composición  $m \circ p_{IJ}$ ,  $M : T_\tau^2 \times T_\tau^2 \times T_\tau^2 \rightarrow T_\tau^2[123]$  el morfismo suma total  $M(z_1, z_2, z_3) = z_1 + z_2 + z_3$  y  $p_I : T_\tau^2 \times T_\tau^2 \times T_\tau^2 \rightarrow T_\tau^2(I)$  las proyecciones a cada componente,  $p_I(z_1, z_2, z_3) = z_I$ . Sea  $\mathcal{L}$  un fibrado de línea sobre  $T_\tau^2$ .

Teorema: Fórmula del cubo

$$M^* \mathcal{L} = m_{12}^* \mathcal{L} \otimes m_{13}^* \mathcal{L} \otimes m_{23}^* \mathcal{L} \otimes p_1^* \mathcal{L}^{-1} \otimes p_2^* \mathcal{L}^{-1} \otimes p_3^* \mathcal{L}^{-1} \tag{6.140}$$

Enunciamos sin prueba el siguiente:

Teorema

$$M^* \mathcal{L} \otimes s_{12}^* \mathcal{L} \otimes s_{13}^* \mathcal{L} \otimes s_{23}^* \mathcal{L} = p_1^* \mathcal{L}^3 \otimes p_2^* \mathcal{L}^3 \otimes p_3^* \mathcal{L}^3 \tag{6.141}$$

Aquí  $s_{IJ} : T_\tau^2 \times T_\tau^2 \times T_\tau^2 \rightarrow T_\tau^2(IJ)$ ,  $s_{IJ}(z_1, z_2, z_3) = z_I - z_J$ , es el morfismo resta compuesto con la proyección  $p_{IJ}$ .

La prueba, basada en la Fórmula del cubo, puede encontrarse en [50]. No debe escapar su pertinencia respecto de la función de onda de Haldane-Rezayi para  $N = 3$ . en realidad el segundo teorema establece un isomorfismo entre fibrados y vía la fórmula de Künneth la identidad siguiente entre secciones de  $H^0(T_\tau^2 \times T_\tau^2 \times T_\tau^2, p_1^* \mathcal{L}^3 \otimes p_2^* \mathcal{L}^3 \otimes p_3^* \mathcal{L}^3)$  y secciones de  $H^0(T_\tau^2, \mathcal{L}^3)$  : si  $c_1(\mathcal{L}) = 1$ ,

$$\begin{aligned} & \Theta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (z_1 + z_2 + z_3|\tau) \Theta \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} (z_1 - z_2|\tau) \Theta \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} (z_1 - z_3|\tau) \\ & \cdot \Theta \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} (z_2 - z_3|\tau) \\ & = \sum_{r,s,t} \lambda_{rst} \Theta \begin{bmatrix} r/3 \\ 0 \end{bmatrix} (3z_1|3\tau) \Theta \begin{bmatrix} s/3 \\ 0 \end{bmatrix} (3z_2|3\tau) \Theta \begin{bmatrix} t/3 \\ 0 \end{bmatrix} (3z_3|3\tau) \end{aligned} \tag{6.142}$$

donde  $\lambda_{rst}$ ,  $r, s, t = 0, 1, 2$ , son coeficientes que dependen de las constantes Theta.

La disección de la sección de Haldane-Rezayi en estados de una partícula se consigue así reemplazando el fibrado de grado 1 en (6.141) por un fibrado de línea de grado  $m$ . El factor de llenado es  $f_{HR} = \frac{1}{3m} = \frac{1}{k}$  y el factor de llenado por característica,  $3\epsilon \in \mathbf{Z} \bmod 3$ , es ahora  $f_{HR}^\epsilon = \frac{1}{m}$ . Nótese que en una situación bidimensional, donde tanto el espín como la estadística son fraccionarios, cabe pensar en estructuras de espín fraccionarias también.

La generalización a cualquier  $N$ , muy difícil matemáticamente, ver [50], sugiere  $f_{HR} = \frac{1}{Nm} = \frac{1}{k}$  y  $f_{HR}^\epsilon = \frac{1}{m}$ ,  $N\epsilon \in \mathbf{Z} \bmod N$ .

La teoría de Haldane-Rezayi puede generalizarse al problema de un fluido Hall cuántico, bidimensional y periódico, formado por muchas capas, como ha sido propuesto por Wen y Vakkuri [126]. Tomando como punto de partida la teoría de Laughlin, es lógico pensar que la función de onda variacional para el estado fundamental de muchas partículas en un sistema con muchas capas separe en una parte holomorfa, y el correspondiente prefactor, de la forma:

$$\Phi(z_I^i) = F(z_I^i) e^{-\frac{\pi k}{\text{Im}\tau} \sum_{i,I}^{q, N_i} (\text{Im} z_I^i)^2} \quad (6.143)$$

donde  $i = 1, 2, \dots, q$  representa el número de capas independientes, e  $I = 1, 2, \dots, N_i$  el número de partículas en la capa  $i$ -ésima. Si suponemos que en cada capa tenemos una red periódica, todas ellas de igual periodo, resulta que las condiciones de periodicidad para cada partícula, en cada capa, se traducen en las siguientes condiciones sobre la parte holomorfa:

$$\begin{aligned} F(z_I^i + 1) &= F(z_I^i) \\ F(z_I^i + \tau) &= e^{-i2\pi k(z_I^i + \frac{\tau}{2})} F(z_I^i) \end{aligned} \quad (6.144)$$

Tomando como referencia la función de onda generalizada para describir el Efecto Hall Cuántico Fraccionario en el plano en el problema de muchas capas, que vimos en la Sección 5.1; y la función para muchas partículas en una sola capa de Haldane-Rezayi; Wen y Vakkuri proponen una función en la cual la parte holomorfa separe en un término que depende de las coordenadas de centro de masas, y en otro que depende solamente de las coordenadas relativas, pero de la forma:

$$F(z_I^i) = F_{\text{cm}}(Z^i) \prod_{i=1}^q \prod_{I < J}^{N_i} f(z_I^i - z_J^i) \prod_{i < j}^q \prod_{I, J=1}^{N_i, N_j} f(z_I^i - z_J^j) \quad (6.145)$$

donde  $Z^i = z_1^i + \cdots + z_{N_i}^i$ . Reemplazando las funciones relativas por funciones Theta de Riemann impares resulta:

$$\begin{aligned} f(z_I^i - z_J^i) &= \Theta^{P_{ii}} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} (z_I^i - z_J^i | \tau) \\ f(z_I^i - z_J^j) &= \Theta^{P_{ij}} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} (z_I^i - z_J^j | \tau) \end{aligned} \quad (6.146)$$

de donde se deduce, junto con (6.144), que la función del centro de masas satisface las condiciones de periodicidad:

$$\begin{aligned} F_{\text{cm}}(Z^i + 1) &= (-1)^{\sum_j P_{ij} N_j - P_{ii}} F_{\text{cm}}(Z^i) \\ F_{\text{cm}}(Z^i + \tau) &= (-1)^{\sum_j P_{ij} N_j - P_{ii}} \exp \left[ -i2\pi \sum_j P_{ij} Z^j - i\pi P_{ii} \tau \right] F_{\text{cm}}(Z^i) \end{aligned} \quad (6.147)$$

imponiendo para cada  $i = 1, 2, \dots, N_i$  la condición:  $k \equiv \sum_j P_{ij} N_j$  sobre el flujo magnético cuantizado (los flujos a través de todas las capas son de igual tamaño). Aquí  $P$  es una matriz  $q \times q$ , positiva, valuada en los enteros, simétrica y cuya diagonal principal es impar.

Utilizando las funciones Theta para varias variables [96], y teniendo en cuenta los posibles casos:  $k - P_{ii} = \sum_j P_{ij} N_j - P_{ii}$  par o impar; la función del centro de masas será:

$$F_{\text{cm}}^{(p)}(\vec{Z}) = \Theta \begin{bmatrix} P^{-1} \vec{\alpha} \\ 0 \end{bmatrix} (P \vec{Z} | P \tau) \quad (6.148)$$

$$F_{\text{cm}}^{(i)}(\vec{Z}) = \Theta \begin{bmatrix} \vec{e}_i/2 + P^{-1} \vec{\alpha} \\ \vec{e}_i/2 \end{bmatrix} (P \vec{Z} | P \tau) \quad (6.149)$$

tal que

$$F_{\text{cm}}(\vec{Z} + \vec{e}_i) = \eta_1 F_{\text{cm}}(\vec{Z}) \quad (6.150)$$

$$F_{\text{cm}}(\vec{Z} + \tau \vec{e}_i) = \eta_2 e^{-i2\pi(\vec{e}_i)^t P \left( \vec{Z} + \frac{\vec{e}_i}{2} \tau \right)} F_{\text{cm}}(\vec{Z})$$

donde  $\vec{Z} = (Z^1, \dots, Z^q)$ ,  $\vec{e}_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ <sup>2</sup>, y  $\vec{\alpha}$  pertenece al cociente  $\frac{\mathbf{Z}^q}{P \mathbf{Z}^q}$ . Es decir, se trata de una sección holomorfa de un fibrado de línea  $\mathcal{L}_P$  sobre  $(T_\tau^2)^{\times q}$  de grado  $c_1(\mathcal{L}_P)^{\vee q} = |\det P|$ .

<sup>2</sup>La función de onda para el centro de masas no está degenerada en  $i$ , ya que, la expresión (6.149) es válida para cualquier vector con  $q$  componentes de módulo uno, en particular, podemos tomar el vector  $\vec{e}_i$ .

Es posible también expresar las funciones relativas como funciones Theta de muchas variables, así:

$$f(\vec{z}_{IJ}^j) = \Theta \left[ \begin{array}{c} \vec{e}_i/2 \\ P_D^j \vec{e}_i/2 \end{array} \right] (P_D^j \vec{z}_{IJ}^j | P_D^j \tau) \quad (6.151)$$

donde  $\vec{z}_{IJ}^j = (z_I^1 - z_J^{1+j}, z_I^2 - z_J^{2+j}, \dots, z_I^q - z_J^{q+j})$ ,  $i + j \bmod q$ , con  $P_D^j$  la matriz diagonal dada por

$$P_D^j = \begin{pmatrix} P_{1,1+j} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_{2,2+j} & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & P_{q,q+j} \end{pmatrix} \quad (6.152)$$

El estado fundamental que incorpora el formalismo de la matriz  $P$  es, por tanto,

$$\begin{aligned} \Phi_{\vec{\alpha}}^{(p)}(\vec{Z}, \vec{z}_{IJ}^j) &= \Theta \left[ \begin{array}{c} P^{-1} \vec{\alpha} \\ 0 \end{array} \right] (P \vec{Z} | P \tau) \prod_{i=1}^q \prod_{j=0}^{q-1} \prod_{\substack{I=1 \\ I \leq J}}^{N_i} \prod_{J=1}^{N_{i+j}} \Theta \left[ \begin{array}{c} \vec{e}_i/2 \\ P_D^j \vec{e}_i/2 \end{array} \right] (P_D^j \vec{z}_{IJ}^j | P_D^j \tau) \\ &\times e^{-\frac{\pi k}{\text{Im} \tau} \sum_{i,I}^{q, N_i} (\text{Im} z_I^i)^2} \end{aligned} \quad (6.153)$$

la igualdad  $I = J$  debe ser excluida cuando  $j = 0$  debido a la estadística de Fermi de los electrones.

Se trata, por tanto, de secciones holomorfas de un fibrado de línea sobre el producto cartesiano  $qN$ -simo de  $T_{\tau}^2$ :  $\Phi_{\vec{\alpha}}^{(i,p)} \in H^0(T_{\tau}^{2 \times qN}, \mathcal{L}_K^N)$ . El grado de  $\mathcal{L}_K^N$  es por tanto  $c_1(\mathcal{L}_K^N)^{\vee qN} = |\det K|^N$ .

El resultado anterior supone que las Fórmulas de Adición para fibrados sobre superficies de Riemann se verifican también en el caso de variedades algebraicas. si esto es cierto, la relación encontrada entre el grado del fibrado y el factor de llenado en el caso  $q = 1$  debe darse también en el caso presente, donde entran en juego  $q$  capas. La comprobación de que esto es razonable se sigue de la elección de la matriz  $K$  siguiente:

$$K = \left( \frac{N}{q} \right)^{\frac{1}{q}} \begin{pmatrix} 2p+1 & 2p & \cdots & 2p \\ 2p & 2p+1 & \cdots & 2p \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 2p & \cdots & 2p & 2p+1 \end{pmatrix} \quad (6.154)$$



es decir,  $K = \binom{N}{q}^{\frac{1}{q}} P$ , donde  $P$  es la matriz elegida en la literatura por razones físicas. Entonces,

$$\det K = \frac{N}{q}(2pq + 1) = \frac{N}{f} \tag{6.155}$$

el resultado obtenido en el caso  $\tau = \infty$ , donde  $f = \frac{q}{2pq+1}$  es el factor de llenado. Obsérvese que hemos incluido  $q$  en el denominador como corresponde al caso en que se determina la misma característica para todas las capas.

En el caso más general, si las partículas por el efecto túnel pasan de una a otra capa, debemos reemplazar la matriz de periodos, que hemos tomado diagonal e igual a  $\Omega = \tau I_{q \times q}$ , por una matriz cualquiera, de tal manera que:

$$\begin{aligned} \Phi_{\vec{\alpha}}^{(p)}(\Omega)(\vec{Z}, \vec{z}_{IJ}^j) &= \Theta \begin{bmatrix} P^{-1}\vec{\alpha} \\ 0 \end{bmatrix} (P\vec{Z}|P\Omega) \prod_{i=1}^q \prod_{j=0}^{q-1} \prod_{I=1}^{N_i} \prod_{J=1}^{N_{i+j}} \Theta \begin{bmatrix} \vec{e}_i/2 \\ P_D^j \vec{e}_i/2 \end{bmatrix} (P_D^j \vec{z}_{IJ}^j | P_D^j \Omega) \\ &\times e^{-\frac{\pi k}{\text{Im}\Omega} \sum_{i,I}^{q, N_i} (\text{Im} z_I^i)^2} \end{aligned} \tag{6.156}$$

La función del centro de masas presenta la misma degeneración,  $|\det P|$ , caracterizada por  $\vec{\alpha}$ , como antes, y son también posibles las dos paridades. No obstante, las condiciones de periodicidad son más generales, y así:

$$\begin{aligned} F_{\text{cm}}(\vec{Z} + \vec{e}_i) &= \eta_1 F_{\text{cm}}(\vec{Z}) \\ F_{\text{cm}}(\vec{Z} + \Omega \vec{e}_i) &= \eta_2 e^{-i2\pi(\vec{e}_i)^t P \left(\vec{Z} + \Omega \frac{\vec{e}_i}{2}\right)} F_{\text{cm}}(\vec{Z}) \end{aligned} \tag{6.157}$$

donde  $\eta_1 = \eta_2 = \pm 1$ , dependiendo de que sea par o impar. Para la parte relativa tenemos:

$$f(\vec{z}_{IJ}^j + \vec{e}_i) = (-1)^{(\vec{e}_i)^t P_D^j \vec{e}_i} f(\vec{z}_{IJ}^j) \tag{6.158}$$

$$f(\vec{z}_{IJ}^j + \Omega \vec{e}_i) = (-1)^{(\vec{e}_i)^t P_D^j \vec{e}_i} e^{-i2\pi(\vec{e}_i)^t P_D^j \left(\vec{z}_{IJ}^j + \Omega \frac{\vec{e}_i}{2}\right)} f(\vec{z}_{IJ}^j) \tag{6.159}$$

Una vez más,  $\{\Phi_{\vec{\alpha}}^{(p)}(\Omega)\}$  es una base de las secciones holomorfas de un fibrado de línea sobre el producto cartesiano de la variedad abeliana  $\mathcal{A}_q$  de orden  $qN$ ,  $\Phi_{\vec{\alpha}}^{(p)}(\Omega) \in H^0(\mathcal{A}_q^{\times qN}, \mathcal{L}_K^N)$ . El grado de este fibrado es:  $c_1(\mathcal{L}_K^N) = |\det K|^N$ , en la hipótesis de la verificación de las fórmulas de adición.

El punto importante es que este estado fundamental es degenerado en la dinámica del centro de masas, y la degeneración viene caracterizada por los diferentes valores de  $\vec{\alpha}$  en el cociente  $\frac{\mathbf{Z}^q}{P\mathbf{Z}^q}$ , que es precisamente  $|\det P|$ . Por ejemplo,

1) Si  $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$  resulta:

$$\vec{\alpha} \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \quad (6.160)$$

2) Si  $P = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$  resulta:

$$\vec{\alpha} \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix} \right\} \quad (6.161)$$

Ver Figura 6.7.

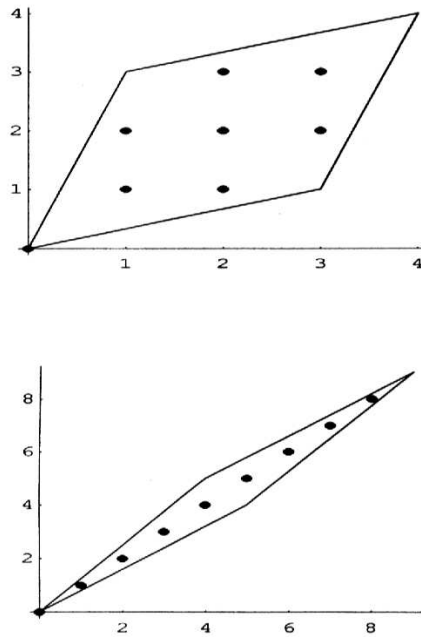


Figura 6.7:

## 6.5 Fibrados estables y conductividad del Efecto Hall Cuántico Fraccionario

Hemos estudiado en la Sección 6.4 la generalización del estado de Laughlin con la matriz  $K$  a una red periódica debida a Wen y Keski-Vakkuri, [126]; éste es el punto de partida de un interesante trabajo de Varnhagen, [127], donde  $\sigma_H$  aparece de forma natural como la pendiente de un fibrado de rango  $r$ , relacionado con la función de onda del centro de masas, y se demuestra que los fluidos Hall experimentalmente distinguidos corresponden a los fibrados estables. En esta Sección analizaremos primeramente el origen de la dinámica del centro de masas, y su relación con una teoría de campos topológica de tipo Chern-Simons; en segundo lugar nos centraremos en la identificación precisa del fibrado de Varnhagen, a fin de esclarecer el papel jugado por el espacio de moduli de fibrados estables en conexión con el problema físico de la localización. Y para terminar conectaremos con la fórmula de Thouless generalizada al problema del Efecto Hall Cuántico Fraccionario.

### 6.5.1 Dinámica del centro de masas

Comenzaremos, pues, con el estudio de la dinámica del centro de masas que como hemos visto, tanto en la teoría con una sólo capa, como con varias, no es trivial cuando consideramos una superficie de Riemann compacta. La degeneración asociada al centro de masas es crucial en la interpretación de la conductividad Hall en el Efecto Hall Cuántico Fraccionario como un invariante topológico; es importante, pues, estudiar cuál es el origen de esta degeneración. Como veremos, el origen del subespacio de Hilbert que describe el comportamiento del centro de masas es una teoría topológica de campos de tipo Chern-Simons.

Consideremos una familia de conexiones  $U(1)$ , parametrizada por  $\mathbf{R}$ , en la primera zona de Brillouin  $J_0(T_\tau^2)$ , matemáticamente el Jacobiano del toro original:

$$a(t) = a_1(p_1, p_2; t)dp_1 + a_2(p_1, p_2; t)dp_2 \tag{6.162}$$

donde  $p_1, p_2$  son coordenadas locales en  $J_0(T_\tau^2)$ . El grupo gauge actúa sobre  $a$  de manera afín:

$$\begin{aligned} g \cdot a &= a + igdg^{-1} \\ g \cdot a &= a + d\omega \end{aligned} \tag{6.163}$$

si  $g(p_1, p_2) = \exp(i\omega_{(p_1, p_2)}) \in \text{Maps}(J_0(T_\tau^2), U(1))$ .

La acción de Chern-Simons es:

$$S = \frac{m}{2} \int_{J_0(T_\tau^2) \times \mathbf{R}} a(t) \wedge d^{(3)}a(t) \quad (6.164)$$

donde  $d^{(3)} = d + \partial_t dt$ . Clásicamente hay una ecuación dinámica:

$$\frac{\partial a}{\partial t} = 0 \quad (6.165)$$

y una ecuación de ligadura:

$$*da = 0 \quad (6.166)$$

Para cuantizar el sistema tomamos cociente por el grupo gauge, imponiendo el gauge de Coulomb:  $d^*a = 0$ , y reducimos el espacio de fases resolviendo las ecuaciones de ligadura. El espacio de fases reducido es el moduli de las conexiones planas gauge equivalentes,  $F_{a_p} = 0$ , [48]

$$a_p = \frac{1}{2\pi}(c_1 dp_1 + c_2 dp_2) \quad (6.167)$$

con la acción:

$$S_R = \frac{m}{2\text{Im}\tau} \int dt (c_1 \dot{c}_2 - c_2 \dot{c}_1) \quad (6.168)$$

Imponemos condiciones de periodicidad en  $p_1$  y  $p_2$ , e incluimos el parámetro modular en la estructura compleja. Los  $c_a$  son entonces independientes de  $p_1$  y  $p_2$ , y toman valores en  $[0, 1]$ .

La elección de polarización en el espacio de fases reducido,  $V = H^1(J_0(T_\tau^2), U(1))$ , donde  $c_1$  son las “coordenadas”, y  $c_2$  los “momentos”, permite llevar a cabo la cuantización geométrica: el espacio de estados cuánticos del sistema es el espacio de Hilbert de funciones  $L^2(\mathbf{R})$  que satisfacen:

$$\begin{aligned} \psi(c_1 + 1) &= \epsilon_1 \psi(c_1) \\ \psi(c_1) e^{i2\pi m c_1} &= \epsilon_2 \psi(c_1), \quad \epsilon_a = \pm 1, \quad a = 1, 2 \end{aligned} \quad (6.169)$$

Para las diferentes características,  $\epsilon_a$ , las soluciones son:

$$\begin{aligned} \epsilon_2 = 1, \quad \psi_l(c_1) &= \sum_{n \in \mathbf{Z}} \epsilon_1^n \delta\left(c_1 + \frac{l}{m} - n\right) \\ \epsilon_2 = -1, \quad \psi_l(c_1) &= \sum_{n \in \mathbf{Z}} \epsilon_1^n \delta\left(c_1 + \frac{l}{m} - \frac{1}{2} - n\right) \end{aligned} \quad (6.170)$$

donde  $l \in \mathbf{Z} \bmod m$ . La dimensión del espacio de Hilbert es  $m$ , y en (6.170) hemos elegido representación de “coordenadas”: las  $\{\psi_l(c_1)\}$  forman una base de autofunciones del operador posición  $\hat{c}_1$  con autovalor  $\frac{l}{m}$ .

Otra base vendrá dada en términos del conjunto de autofunciones del operador:  $\hat{c}_\partial = \partial_{c_1} + i\partial_{c_2} + i\frac{2\pi m}{\text{Im}\tau}(c_2)^2$ :

$$\phi_l(C|\tau) = \Theta \begin{bmatrix} l/m \\ 0 \end{bmatrix} (mC|m\tau) \tag{6.171}$$

Esto corresponde al primer nivel de Landau en el gauge de Landau. Reconocer la función del centro de masas es inmediato identificando  $Z$  con  $c$  de la forma  $Z = c_1 + ic_2$ .

En el caso más general de  $q$  capas, habida cuenta del formalismo de la matriz  $P$ , la generalización es obvia:

La conexión es un elemento ahora de  $H^1(J_0(T_\tau^2), \text{ad}P)$ , es decir, una uno-forma en  $T^*J_0(T_\tau^2)$  con valores en el fibrado adjunto a un fibrado principal de grupo  $U(1)^{\otimes q}$ :

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_1(p_1, p_2; t)dp_1 + \vec{a}_2(p_1, p_2; t)dp_2 \tag{6.172}$$

El grupo gauge actúa sobre  $\vec{a}$  de manera afín:

$$\begin{aligned} g \cdot \vec{e}^t \cdot \vec{a} &= \vec{e}^t \cdot \vec{a} + igdg^{-1} \\ g \cdot \vec{a} &= \vec{a} + d\vec{\omega} \end{aligned} \tag{6.173}$$

si  $g(p_1, p_2) = \exp(i\vec{e}^t \cdot \vec{\omega}_{(p_1, p_2)}) \in \text{Maps}(J_0(T_\tau^2), U(1)^{\otimes q})$ . La acción de Chern-Simons es:

$$S^P = \frac{1}{2} \int_{J_0(T_\tau^2) \times \mathbf{R}} \vec{a} \wedge Pd^{(3)}\vec{a} \tag{6.174}$$

Al igual que antes, el procedimiento de reducción simpléctica nos lleva a:

$$S_R^P = \frac{1}{2\text{Im}\tau} \int dt (\vec{c}_1 P \dot{\vec{c}}_2 - \vec{c}_2 P \dot{\vec{c}}_1) \tag{6.175}$$

pero ahora los  $\vec{c}_a$  son equivalentes gauge, y deben identificarse para  $\vec{c}_a + P\vec{e}$ . El espacio de Hilbert viene dado por las funciones  $L^2(\mathbf{R}^q)$  tales que:

$$\begin{aligned} \psi(\vec{c}_1 + \vec{e}_i) &= \epsilon_1 \psi(\vec{c}_1) \\ \psi(\vec{c}_1) e^{i2\pi(\vec{e}_i)^t P \vec{c}_1} &= \epsilon_2 \psi(\vec{c}_1), \quad \epsilon_a = \pm 1, \quad a = 1, 2 \end{aligned} \tag{6.176}$$

y una base en representación de coordenadas será:

$$\begin{aligned} \epsilon_2 = 1, \quad \psi_{\vec{\alpha}}(\vec{c}_1) &= \sum_{\vec{n} \in \mathbf{Z}^q} \epsilon_1^{\vec{e}_i^t \cdot \vec{n}} \delta(\vec{c}_1 + P^{-1}\vec{\alpha} - \vec{n}) \\ \epsilon_2 = -1, \quad \psi_{\vec{\alpha}}(\vec{c}_1) &= \sum_{\vec{n} \in \mathbf{Z}^q} \epsilon_1^{\vec{e}_i^t \cdot \vec{n}} \delta\left(\vec{c}_1 + P^{-1}\vec{\alpha} - \frac{\vec{e}_i}{2} - \vec{n}\right) \end{aligned} \tag{6.177}$$

donde  $\vec{\alpha} \in \frac{\mathbf{Z}^q}{P\mathbf{Z}^q}$ . Un cambio de base permite:

$$\phi_{\vec{\alpha}}(\vec{c}|\tau) = \Theta \begin{bmatrix} P^{-1}\vec{\alpha} \\ 0 \end{bmatrix} (P\vec{c}|P\tau) \quad (6.178)$$

que son las funciones de onda que describen la degeneración,  $|\det P|$ , del centro de masas.

## 6.5.2 Conductividad Hall como pendiente de un fibrado

Es posible interpretar físicamente el Jacobiano, no como la primera zona de Brillouin, sino como el espacio parametrizado por los flujos de los solenoides del doble efecto Aharanov-Bohm descrito en la Sección 3.3, en la que estudiamos la conductividad Hall como un invariante topológico para el Efecto Hall Cuántico Entero. Incluiremos la presencia de los flujos,  $\Phi_{x_1}, \Phi_{x_2} \in [0, \frac{hc}{e}]$ , en el comportamiento periódico de la contribución del centro de masas a la función de onda de Haldane-Rezayi, o la generalización a varias capas, es decir, la función de onda de Wen, y así:

$$\begin{aligned} F_{\text{cm}}(Z+1) &= e^{i2\pi\Phi_1} F_{\text{cm}}(Z) \\ F_{\text{cm}}(Z+\tau) &= e^{-i2\pi\Phi_2} e^{-i2\pi m(Z+\frac{\tau}{2})} F_{\text{cm}}(Z) \end{aligned} \quad (6.179)$$

$$\begin{aligned} F_{\text{cm}}(\vec{Z} + \vec{e}_i) &= e^{i2\pi\Phi_1} F_{\text{cm}}(\vec{Z}) \\ F_{\text{cm}}(\vec{Z} + \vec{e}_i\tau) &= e^{-i2\pi\Phi_2} e^{-i2\pi(P\vec{e}_i)^t(\vec{Z} + \vec{e}_i\frac{\tau}{2})} F_{\text{cm}}(\vec{Z}) \end{aligned} \quad (6.180)$$

Los estados del centro de masas, degenerados, serán ahora:

$$F_{\text{cm}}^{l,(p)}(\Phi_1, \Phi_2; Z|\tau) = \Theta \begin{bmatrix} (l + \Phi_1)/m \\ \Phi_2 \end{bmatrix} (mZ|m\tau) \quad (6.181)$$

o bien

$$F_{\text{cm}}^{\vec{\alpha},(p)}(\Phi_1, \Phi_2; \vec{Z}|\tau) = \Theta \begin{bmatrix} P^{-1}(\vec{\alpha} + \Phi_1\vec{e}) \\ \Phi_2\vec{e} \end{bmatrix} (P\vec{Z}|P\tau) \quad (6.182)$$

donde  $\Phi_1 = \frac{e}{hc}\Phi_{x_1}$ ,  $\Phi_2 = \frac{e}{hc}\Phi_{x_2}$  son las coordenadas locales en la variedad Jacobiana de  $T_\tau^2$ ,  $l \in \frac{\mathbf{Z}}{m\mathbf{Z}}$  y  $\vec{\alpha} \in \frac{\mathbf{Z}^q}{P\mathbf{Z}^q}$ ,  $\vec{e} = (1, \dots, 1) \in \mathbf{Z}^q$ .

Consideremos el conjunto de funciones de  $\Phi_1, \Phi_2$  que resulta de tomar el centro de masas en el origen  $Z = 0$ ,  $\vec{Z} = \vec{0}$ , es decir,

$$f_l(\Phi_1, \Phi_2|\tau) = F_{\text{cm}}^{l,(p)}(\Phi_1, \Phi_2; 0|\tau) \quad (6.183)$$

$$f_{\vec{\alpha}}(\Phi_1, \Phi_2|\tau) = F_{\text{cm}}^{\vec{\alpha},(p)}(\Phi_1, \Phi_2; \vec{0}|\tau) \quad (6.184)$$

Demostraremos que estas funciones forman una base ortonormal del espacio de secciones holomorfas  $H^0(J_0(T_\tau^2), E_m)$ , o bien  $H^0(J_0(T_\tau^2), E_P)$ , de un fibrado de rango  $m$ , o  $|\det P|$ , sobre la Jacobiana de  $T_\tau^2$ . Encontraremos, además, que el grado de este fibrado vectorial, para cada caso, es:  $c_1(E_m) = m \cdot f_m$ ,  $c_1(E_P) = |\det P| \cdot f_P$ . Aquí  $f_m = \frac{1}{m}$  es el factor de llenado por característica correspondiente al estado de Haldane-Rezayi, y  $f_P = \frac{q}{|\det P|}$  es el factor de llenado por característica del estado de Wen. Nótese, que para la matriz  $P$  de la forma reseñada en la Sección 6.4,  $f_P$  coincide con el factor de llenado calculado en la Sección 5.1 en el caso de considerar cada capa como el plano complejo:  $f_P = \sum_{i,j} (P^{-1})_{ij}$ . Para otro tipo de matriz  $P$ , es necesario relacionarla con la matriz  $K$  de una forma más complicada, para hacer coincidir el factor de llenado por característica calculado a partir de la generalización de la función de onda de Haldane-Rezayi con el obtenido a partir de la generalización del estado de Laughlin.

De la definición de  $f_l(\Phi_1, \Phi_2|\tau)$  en términos de constantes Theta

$$f_l(\Phi_1, \Phi_2|\tau) = \Theta \left[ \begin{matrix} (l + \Phi_1)/m \\ \Phi_2 \end{matrix} \right] (0|m\tau) \tag{6.185}$$

se deducen las condiciones de periodicidad siguientes:

$$\begin{aligned} f_l(\Phi_1, \Phi_2 + 1|\tau) &= f_l(\Phi_1, \Phi_2|\tau) \\ f_l(\Phi_1 + 1, \Phi_2|\tau) &= f_{l+1}(\Phi_1, \Phi_2|\tau) \end{aligned} \tag{6.186}$$

Por otro lado, se tiene que:

$$f_l(\Phi_1 + m, \Phi_2|\tau) = f_{l+m}(\Phi_1, \Phi_2|\tau) \equiv f_l(\Phi_1, \Phi_2|\tau) \tag{6.187}$$

habida cuenta que  $l \in \frac{\mathbf{Z}}{m\mathbf{Z}}$ .

Entendiendo

$$\vec{f}_1(\Phi_1, \Phi_2) = \begin{pmatrix} f_1(\Phi_1, \Phi_2) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \vec{f}_m(\Phi_1, \Phi_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f_m(\Phi_1, \Phi_2) \end{pmatrix} \tag{6.188}$$

como una base del espacio de funciones de una carta de  $J_0(T_\tau^2)$  en un espacio vectorial de dimensión compleja  $m$  la relación con otra base en una carta que garantice un recubrimiento mínimo viene dictada por las condiciones de periodicidad (6.186) junto con la identidad  $f_l(\Phi_1 + m, \Phi_2|\tau) = f_l(\Phi_1, \Phi_2|\tau)$  por medio de las funciones de transición:

$$f_l^{(J)} \equiv e^{i2\pi \frac{\Phi_1}{m}} f_l^{(I)} \tag{6.189}$$

o, en términos matriciales:

$$M_m^{JI} = \begin{pmatrix} e^{i2\pi\frac{\Phi_1}{m}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{i2\pi\frac{\Phi_1}{m}} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & e^{i2\pi\frac{\Phi_1}{m}} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} e^{i2\pi f_m \Phi_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{i2\pi f_m \Phi_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & e^{i2\pi f_m \Phi_1} \end{pmatrix} \quad (6.190)$$

Nótese que ello equivale a una transformación “gauge”

$$\mathcal{G}(\Phi_1, \Phi_2) = e^{i2\pi\frac{1}{m}\Phi_1\Phi_2} I_{m \times m} \quad (6.191)$$

en el centro de  $U(m)$  que, restringida a la zona de intersección crítica, es

$$\mathcal{G}(\Phi_1, 1) = M_m^{JI}(\Phi_1) = e^{i2\pi\frac{\Phi_1}{m}} I_{m \times m} \quad (6.192)$$

Es posible una verificación explícita de lo antedicho sobre las funciones Theta. La expresión de  $f_l$  en la forma

$$f_l(\Phi_1, \Phi_2|\tau) = e^{i2\pi\frac{\Phi_1\Phi_2}{m}} \Theta \left[ \begin{matrix} l/m \\ 0 \end{matrix} \right] (\Phi_2 + \tau\Phi_1|m\tau) \quad (6.193)$$

que viene de aplicar (6.77) en la forma

$$f_l(\Phi_1, \Phi_2|\tau) = T\left(\frac{\Phi_1}{m}\right) S(\Phi_2) \Theta \left[ \begin{matrix} l/m \\ 0 \end{matrix} \right] (0|m\tau) \quad (6.194)$$

pone de manifiesto las funciones de transición (6.189) puesto que implica

$$f_l(1, 1|\tau) = e^{i2\pi\frac{1}{m}} e^{-i3\pi\tau} f_l(0, 1|\tau) \quad (6.195)$$

Las funciones  $f_l$  forman así la base del espacio de secciones de un fibrado  $E_m$  de rango  $m$ . El grado del fibrado vectorial  $E_m$  es:  $c_1(E_m) = m \cdot f_m$ ; dado que  $M_m$  es diagonal en la base  $\{\vec{f}_l\}$ . La pendiente de  $E_m$ , el grado dividido por el rango, viene dada por el factor de llenado  $f_m$ :

$$\mu(E_m) = \frac{c_1(E_m)}{r} = \frac{1}{m} \quad (6.196)$$

Un análisis paralelo discurre para el caso de  $q$  capas. De la definición de  $f_{\vec{\alpha}}(\Phi_1, \Phi_2|\tau)$  vía constantes Theta

$$f_{\vec{\alpha}}(\Phi_1, \Phi_2|\tau) = \Theta \left[ \begin{matrix} P^{-1}(\vec{\alpha} + \Phi_1\vec{e}) \\ \Phi_2 \end{matrix} \right] (0|P\tau) \quad (6.197)$$



se leen las condiciones de periodicidad

$$\begin{aligned} f_{\vec{\alpha}}(\Phi_1, \Phi_2 + 1|\tau) &= f_{\vec{\alpha}}(\Phi_1, \Phi_2|\tau) \\ f_{\vec{\alpha}}(\Phi_1 + 1, \Phi_2|\tau) &= f_{\vec{\alpha}+\vec{\varepsilon}}(\Phi_1, \Phi_2|\tau) \end{aligned} \quad (6.198)$$

De otro lado:

$$f_{\vec{\alpha}}(\Phi_1 + (P^{-1}\vec{\varepsilon})^t\vec{\varepsilon}, \Phi_2|\tau) = f_{\vec{\alpha}+\sum_i \vec{P}_i}(\Phi_1, \Phi_2|\tau) \equiv f_{\vec{\alpha}}(\Phi_1, \Phi_2|\tau) \quad (6.199)$$

puesto que  $\vec{P}_i$  es un vector columna de la matriz  $P$ , y  $\alpha$  está en el cociente  $\mathbf{Z}^q/P\mathbf{Z}^q$ . Definimos así un fibrado de rango  $|\det P|$  mediante las matrices de transición:

$$M_P^{JI} = \begin{pmatrix} e^{i2\pi f_P \Phi_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{i2\pi f_P \Phi_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & e^{i2\pi f_P \Phi_1} \end{pmatrix} = e^{i2\pi f_P \Phi_1} I_{|\det P| \times |\det P|} \quad (6.200)$$

en el centro de  $U(|\det P|)$ , que relacionan las funciones de la base  $\{\vec{f}_{\vec{\alpha}_1}, \dots, \vec{f}_{\vec{\alpha}_{|\det P|}}\}$  en las distintas cartas, en la forma

$$f_{\vec{\alpha}}^{(J)} \equiv e^{i2\pi(P^{-1}\vec{\varepsilon})^t\vec{\varepsilon}\Phi_1} f_{\vec{\alpha}}^{(I)} \quad (6.201)$$

con  $f_P = (P^{-1}\vec{\varepsilon})^t\vec{\varepsilon} = \sum_{i,j} (P^{-1})_{ij}$ , para ser promovidas a secciones de este fibrado que designaremos por  $E_P$ .

La transformción gauge en este caso es

$$\mathcal{G}(\Phi_1, \Phi_2) = e^{i2\pi(P^{-1}\vec{\varepsilon})^t\vec{\varepsilon}\Phi_1\Phi_2} I_{|\det P| \times |\det P|} \quad (6.202)$$

que para  $\Phi_2 = 1$  da:

$$M_P^{JI}(\Phi_1) = \mathcal{G}(\Phi_1, 1) = e^{i2\pi(P^{-1}\vec{\varepsilon})^t\vec{\varepsilon}\Phi_1} I_{|\det P| \times |\det P|} \quad (6.203)$$

Es posible también en este caso, como en el de una capa, verificar que las  $f_{\vec{\alpha}}$  definidas como constantes Theta efectivamente dan lugar a las matrices de transición  $M_P^{JI}(\Phi_1)$ . Así,

$$f_{\vec{\alpha}}(\Phi_1, \Phi_2|\tau) = e^{i2\pi\Phi_1(P^{-1}\vec{\varepsilon})^t\vec{\varepsilon}\Phi_2} \Theta \begin{bmatrix} P^{-1}\vec{\alpha} \\ 0 \end{bmatrix} ((\Phi_2 + \tau\Phi_1)\vec{\varepsilon}|P\tau) \quad (6.204)$$

puesto que

$$f_{\vec{\alpha}}(\Phi_1, \Phi_2|\tau) = T(P^{-1}\vec{\varepsilon}\Phi_1)S(\vec{\varepsilon}\Phi_2)\Theta \begin{bmatrix} P^{-1}\vec{\alpha} \\ 0 \end{bmatrix} (0|P\tau) \quad (6.205)$$

Esto implica,

$$f_{\bar{\alpha}}(1, 1|\tau) = e^{i2\pi \sum_{i,j} (P^{-1})_{ij}} e^{-i3\pi\tau} f_{\bar{\alpha}}(0, 1|\tau) \quad (6.206)$$

Inmediatamente determinamos el grado del fibrado vectorial  $E_P$ :  $c_1(E_P) = |\det P| f_P$ . La relación con el grado del fibrado en que la función de onda de Wen, generalización de la de Haldane-Rezayi, es una función holomorfa es como sigue: allí,  $c_1(\mathcal{L}_K^N)^{\vee N} = |\det K|^N$ , mientras que los factores de llenado, ordinario y por característica, son:  $f_P = \frac{1}{|\det K|}$  y  $f_P^\epsilon = \frac{N}{|\det K|}$ . Si  $P$

$$P = \begin{pmatrix} 2p \pm 1 & 2p & \cdots & 2p \\ 2p & 2p \pm 1 & \cdots & 2p \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 2p & \cdots & 2p & 2p \pm 1 \end{pmatrix} \quad (6.207)$$

es de esta forma, sugerida por razones físicas, para  $K = \left(\frac{N}{q}\right)^{1/q} P$  coinciden el factor de llenado calculado en forma directa  $f_P^\epsilon$  y la pendiente de  $E_P$ :

$$\mu(E_P) = \frac{c_1(E_P)}{\text{rango } E_P} = \sum_{i,j} (P^{-1})_{ij} \quad (6.208)$$

Es posible admitir matrices  $P$  más generales, eso si, simétricas, valoradas sobre los enteros e impares en la diagonal principal, alcanzándose el mismo resultado con tal que  $K$  y  $P$  estén relacionados en la forma:

$$|\det K| = \frac{N}{\sum_{i,j} (P^{-1})_{ij}} \quad (6.209)$$

La importancia física del hecho que  $f$ , el factor de llenado de estados extensos que son aquellos que contribuyen a la conductividad Hall, sea un invariante topológico, es enorme. La conductividad Hall asimismo es proporcional a la pendiente del fibrado:

$$\sigma_H = \frac{e^2}{h} \mu(E_P) \quad (6.210)$$

los valores fraccionarios vienen de una cantidad topológica. De este modo, las variaciones en el factor de llenado,  $f$ , que se producen como consecuencia de cambios adiabáticos en  $\Phi(t)$ , están obligadas a ocurrir por ocupación de estados localizados, que no contribuyen a  $\sigma_H$ , y esto explica las mesetas.

Los fibrados  $E_P$  cuyo origen es la dinámica del centro de masas pueden ser estables o no. Un fibrado vectorial  $E$  sobre una variedad compleja es estable,

si para cualquier subfibrado  $F$ , las pendientes satisfacen la desigualdad:  $\mu(F) < \mu(E)$ . Los fibrados estables no son descomponibles, es decir, no son de la forma  $E = E_1 \otimes E_2$ , y tienen la propiedad de que  $\dim_{\mathbb{C}} H^0(\Sigma, \text{End} E) = \text{m.c.d}(c_1, r) = 1$ : el espacio de secciones del fibrado de endomorfismos sobre una superficie de Riemann es de dimensión compleja uno.

En orden a entender el tipo de fibrado vectorial a que pertenece  $E_P$  es conveniente el punto de vista que resulta de la versión de Donaldson [33] de un teorema de Narashiman y Seshachi: el espacio de moduli de fibrados de rango  $|\det P|$  sobre una curva elíptica, fibrados equivalentes módulo la acción del grupo de difeomorfismos, está en correspondencia uno a uno con el espacio de las conexiones proyectivamente planas con holonomías globales en el centralizador del centro de  $U(|\det P|)$ .

En el caso del fibrado  $E_P$  la matriz de transición que lo define  $M_P^{JI}(\Phi_1)$  obedece a la conexión

$$\omega(0, 0) = \frac{1}{2\pi} f_P \Phi_1 d\Phi_2 I_{|\det P| \times |\det P|} \tag{6.211}$$

y fibrados equivalentes, módulo automorfismos, corresponden a:

$$\omega(c_1, c_2) = \frac{1}{2\pi} \{ (f_P \Phi_1 + c_2) d\Phi_2 + c_1 d\Phi_1 \} I_{|\det P| \times |\det P|} \tag{6.212}$$

donde  $c_1, c_2 \in [0, 2\pi]$  son constantes que parametrizan puntos  $(c_1, c_2)$  de la Jacobiana de  $J_0(T_\tau^2)$ . La curvatura para cualquier elemento del moduli es:

$$R_\omega = \frac{1}{2\pi} f_P I_{|\det P| \times |\det P|} d\Phi_1 \wedge d\Phi_2 \tag{6.213}$$

de modo que el grado del fibrado  $E_P(c_1, c_2)$  es

$$c_1(E_P(c_1, c_2)) = \frac{1}{2\pi} \int_{J_0(T_\tau^2)} \text{Tr} R_\omega = f_P |\det P| \tag{6.214}$$

Contemplamos pues fibrados que son absolutamente estables en el sentido de la teoría de Yang-Mills sobre superficies de Riemann de Atiyah y Bott [10]. Son, sin embargo, estables o semi-estables en el sentido de la Geometría Invariante de Mumford [95], según que su grado y su rango sean co-primos o no.

En el caso de  $E_P$ , cuando  $P$  es de la forma experimentalmente preferida, la matriz de transición es:

$$M_P^{JI}(\Phi_1) = \begin{pmatrix} e^{i2\pi \frac{q}{2pq \pm 1} \Phi_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{i2\pi \frac{q}{2pq \pm 1} \Phi_1} & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & e^{i2\pi \frac{q}{2pq \pm 1} \Phi_1} \end{pmatrix} \tag{6.215}$$

y  $|\det P| = 2pq \pm 1$  de modo que  $c_1(E_P) = q$  mientras que la pendiente es  $\mu(E_P) = \frac{q}{2pq \pm 1}$ . Como  $\text{m.c.d.}(q, 2pq \pm 1) = 1$  el fibrado es estable.

Para identificar bien el caso semi-estable es conveniente expresar  $M_P$  en la forma  $M_P = e^{i2\pi R}$  donde  $R$  es una matriz diagonal  $(2pq \pm 1) \times (2pq \pm 1)$ . En el caso anterior,  $R_{\alpha\alpha} = \frac{q}{2pq \pm 1}$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, 2pq \pm 1$  y  $R_{\alpha\beta} = 0$  si  $\alpha \neq \beta$ .

Consideremos dos ejemplos:

•

$$P = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad (6.216)$$

$q = 2$ ,  $p = 2$  y  $2p + 1 = 5$ .

En este caso  $R = \frac{2}{9}I_{9 \times 9}$ .  $\mu(E_P) = \frac{2}{9}$ , y  $\text{m.c.d.}(c_1, \text{rango}) = \text{m.c.d.}(2, 9) = 1$ , y el fibrado no tiene subfibrados.  $E_P$  es estable.

•

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad (6.217)$$

No es de la forma que ocurre físicamente. Sin embargo,  $q = 2$  y la matriz  $K$  asociada es

$$K = \sqrt{\frac{N}{4}} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad (6.218)$$

$R = \frac{1}{2}I_{8 \times 8}$  y  $\text{m.c.d.}(4, 8) = 4$ . El subfibrado  $E_P^{(1)}$  definido por:

$$R_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I_{4 \times 4} & \vdots & 0_{4 \times 4} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0_{4 \times 4} & \vdots & 0_{4 \times 4} \end{pmatrix} \quad (6.219)$$

tiene como pendiente  $\mu(E_P^{(1)}) = \frac{1}{2} = \mu(E_P)$ . Se puede comprobar que lo mismo ocurre para cualquiera de sus subfibrados de modo que  $E_P$  es semi-estable.

El punto físicamente delicado con respecto al moduli es el siguiente: las variaciones en el factor de llenado real  $f_H$ , no en el topológico  $f$  que se deben únicamente a la ocupación de estados extensos, requieren que estados localizados entren en la función de onda del estado fundamental. Aportan fases que se traducen en las

constantes  $c_1$  y  $c_2$  de la conexión. La respuesta del fluido Hall fraccionario a cambios en el factor de llenado es precisamente moverse en el espacio de moduli del fibrado vectorial estable. Este es el origen de la existencia de las mesetas.

Hemos visto, por tanto, que la conductividad Hall se debe esencialmente a la dinámica del centro de masas. Para comprobar que este punto de vista es correcto es posible aplicar la fórmula de Kubo-Thouless a la funcional generalizada de Haldane-Rezayi:

$$\sigma_H = \frac{e^2}{h} \text{tr} \Omega_{\vec{\alpha}\vec{\beta}} \tag{6.220}$$

$$\Omega_{\vec{\alpha}\vec{\beta}} = \left\langle \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \Phi_1} \middle| \frac{\partial \Phi^\beta}{\partial \Phi_2} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \Phi_2} \middle| \frac{\partial \Phi^\beta}{\partial \Phi_1} \right\rangle$$

El cálculo de  $\text{tr} \Omega_{\vec{\alpha}\vec{\beta}}$  es largo y tedioso ya que es necesario integrar sobre las coordenadas de todas las partículas  $\{z_j^i\}$ . Varnhagen, [127], ha computado esta expresión para el caso  $q = 1$  y  $P = 2p + 1$  y ha propuesto como extender este cálculo para casos más generales. Su principal resultado es:

$$\text{tr} \Omega_{\vec{\alpha}\vec{\beta}} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{(2p+1)N-1} \sum_{J=1}^N \exp \left( -\frac{2\pi}{(2p+1)N} (\Phi_1 + k + r_J)^2 \right) \tag{6.221}$$

donde  $k, r_J$  son factores numéricos que aparecen en la integración. El punto importante es que:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{tr} \Omega_{\vec{\alpha}\vec{\beta}} \cong 2\pi(2p+1) = 2\pi c_1(E_p) \tag{6.222}$$

es decir, en este límite las fluctuaciones cuánticas debidas a  $\Phi$  desaparecen. Un fibrado vectorial de curvatura proyectivamente plana se define sobre el producto cartesiano del Jacobiano por  $(T_\tau^2)^{\times N}$  y  $\sigma_H$  aparece como la pendiente de este fibrado genérico.

En el límite de  $N \rightarrow \infty$  hay una teoría de campo medio del tipo Chern-Simons (abeliana) que describe la dinámica del centro de masas mientras que la contribución de las coordenadas relativas a la conductividad Hall cancela.



# Conclusiones

Las conclusiones más importantes que hemos obtenido tras la realización de este trabajo, poniendo énfasis en las aportaciones a lo ya conocido en la literatura sobre el tema, son las siguientes:

**1** Aplicación con éxito de la Electrodinámica Cuántica Bidimensional a la explicación del fenómeno de cuantificación de la conductividad Hall, tanto en el Efecto Hall Cuántico Entero como en el Fraccionario.

**2** Interpretación en términos de la Electrodinámica Cuántica Bidimensional de la aparición de mesetas. Ello ha requerido la resolución de la ecuación de Dirac plana en presencia simultánea de un campo magnético constante y un pozo esférico. El estudio en Segunda Cuantificación de esta situación, teniendo en cuenta la presencia de estados localizados (ligados a las impurezas), implica la existencia de mesetas.

Tanto la resolución espectral del operador de Dirac como el desarrollo posterior son muy novedosos. El antecedente es el trabajo de R. Prange y Joynt [71], en física de la materia condensada, conceptualmente similar, pero mucho más débil analíticamente, y basado en la ecuación de Schrödinger.

**3** Se ha logrado un mejor conocimiento del estado propuesto por R.B.Laughlin [81], a resultas del método variacional, como estado fundamental del Efecto Hall Cuántico Fraccionario, mediante su descripción e identificación en Teoría Cuántica de Campos.

**4** La clarificación de la versión de Thouless, [124], de la conductividad Hall en el Efecto Hall Cuántico Entero como la primera clase de Chern de un fibrado, se ha llevado a cabo mediante la determinación precisa, en términos matemáticos, de dicho fibrado, con base una curva elíptica y fibra el espacio de Fock fermiónico.

**5** Se ha analizado el tipo de transición de fase que ocurre en el Efecto Hall Cuántico Fraccionario. La aplicación de los potentes métodos en teoría de campos, inventados fundamentalmente por 't Hooft y Mandelstam, en conexión con el problema del confinamiento de quarks en Cromodinámica Cuántica en (3+1) dimensiones, ha permitido un análisis, mucho más riguroso que el de Girvin y McDonald, del orden de largo alcance que lleva al Efecto Hall Cuántico Fraccionario.

**6** Tomando como modelo de partida la Electrodinámica Cuántica Bidimensional se ha calculado la acción efectiva por el método de Hubbard-Stratonovich para dar cuenta de la interacción a dos cuerpos. El resultado es la teoría de Maxwell-Chern-Simons-Higgs.

**7** En el límite de baja energía, el análisis de la teoría de Chern-Simons-Higgs ha conducido a una identificación rigurosa de las cuasi-partículas y cuasi-huecos del Efecto Hall Cuántico Fraccionario como los vórtices del modelo. Ello automáticamente implica la observada experimentalmente estadística fraccionaria.

**8** La interpretación de la conductividad Hall como un invariante topológico, en el Efecto Hall Cuántico Fraccionario, requiere estudiar el fenómeno en una red periódica. Se ha procedido a la identificación de dicho invariante como la pendiente de un fibrado vectorial sobre la Jacobiana de la curva elíptica que describe la red periódica. La sugerencia de Varnhagen, [127], se ha precisado completamente mediante el análisis del fibrado vectorial a que da lugar la función de onda del centro de masas.



# Apéndice A

## Acción del Grupo de Heisenberg

Presentaremos en este apéndice un estudio detallado del Grupo de Heisenberg  $\mathcal{H}_{2+1}$  actuando como grupo de traslaciones en el plano. Dicho grupo aparece como una extensión central natural del grupo ordinario de traslaciones bidimensionales,  $\mathbb{R}^2$ , debida a la presencia del campo magnético. La extensión central (puramente clásica) permite calcular rigurosamente las cargas Nöther conservadas y, por tanto, la aplicación de las técnicas de reducción simpléctica.

Utilizando idéntica notación a la de la Sección (1.1), tomaremos el sistema hamiltoniano  $(M, H, \omega)$ , siendo  $M = T^*\mathbb{R}^2$  el espacio de fases, con coordenadas (globales)  $(x, p) \equiv (x_1, x_2, p_1, p_2)$ ,  $H$  el hamiltoniano de un electrón en el plano y en presencia de un campo magnético constante  $B$  en la dirección perpendicular al mismo que, como vimos, se expresa, en el gauge simétrico<sup>1</sup>:

$$H = \frac{1}{2m} \left( \left( p_1 + \frac{B}{2} x_2 \right)^2 + \left( p_2 + \frac{B}{2} x_1 \right)^2 \right) \quad (\text{A.1})$$

y  $\omega$  es la forma simpléctica natural:  $\omega = dx_1 \wedge dp_1 + dx_2 \wedge dp_2$ .

La transformación de Legendre nos proporcionó previamente la expresión de  $p_1$  y  $p_2$  en función de  $(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2)$  (Sección 1.1):

$$p_1 = m\dot{x}_1 - \frac{B}{2}x_2, \quad p_2 = m\dot{x}_2 + \frac{B}{2}x_1 \quad (\text{A.2})$$

En un primer paso, plantearemos la acción de  $\mathbb{R}^2$  sobre el sistema hamiltoniano como grupo de traslaciones en el plano. Este análisis, como veremos, no es el correcto, pues dicha acción no es de Poisson, y, por tanto, no es posible plantear de manera correcta los mecanismos de la reducción simpléctica en el espacio de fases (para más detalle, ver [22]).

---

<sup>1</sup>Consideraremos  $e = c = 1$

Sea, por tanto,  $G = \mathbb{R}^2$  el grupo de transformaciones que actúa en el plano  $\mathbb{R}^2$  como traslaciones:

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (s, x) &\rightarrow x + s \equiv (x_1 + s_1, x_2 + s_2) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Así  $\forall s \in \mathbb{R}^2$  tendremos:

$$\begin{aligned} \Phi_s : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\rightarrow x + s \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

con:

$$\Phi_s \circ \Phi_r = \Phi_{s+r}$$

El álgebra de Lie de  $G = \mathbb{R}^2$  es isomorfo a  $\mathbb{R}^2$  y estará formado por elementos de la forma:

$$\mathcal{G} \equiv \text{Lie}\mathbb{R}^2 \equiv T_e\mathbb{R}^2 \equiv \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right\rangle \quad (\text{A.5})$$

Evidentemente, se trata de un álgebra abeliana:

$$[a, b] = 0, \quad \forall a, b \in \mathcal{G} \equiv \text{Lie}\mathbb{R}^2 \quad (\text{A.6})$$

Los campos fundamentales de esta acción coinciden con sus correspondientes elementos del álgebra de Lie<sup>2</sup>:

$$a \in \text{Lie}\mathbb{R}^2 \Rightarrow X_a = a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \equiv a \quad (\text{A.7})$$

La acción inducida de  $\Phi$  en  $T^*\mathbb{R}^2$  no es trivial debido a la presencia del campo magnético. Efectivamente, al depender los momentos  $(p_1, p_2)$  de las coordenadas  $(x_1, x_2)$ , tendremos:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi} : \mathbb{R}^2 \times T^*\mathbb{R}^2 &\rightarrow T^*\mathbb{R}^2 \\ (s, (x, p)) &\rightarrow (x + s, p'), \quad \text{con } p' = \left(p_1 - \frac{B}{2}s_2, p_2 + \frac{B}{2}s_1\right) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

---

<sup>2</sup>Recordemos:

$$a \in \text{Lie}\mathbb{R}^2 \Rightarrow X_a \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^2)$$

tal que:

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \forall f \in C^\infty(\mathbb{R}^2), (X_a f)(x) = \left. \frac{d}{dt} f(e^{at}(x)) \right|_{t=0}$$

y calculando ahora los campos fundamentales:

$$a \equiv (a_1, a_2) \in \text{LieR}^2 \Rightarrow X_a^L = a_1 \left( \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{B}{2} \frac{\partial}{\partial p_2} \right) + a_2 \left( \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{B}{2} \frac{\partial}{\partial p_1} \right) \quad (\text{A.9})$$

Esta acción es una simetría del sistema hamiltoniano, pues verifica:

- 1.  $\forall s \in \mathbb{R}^2$ , se verifica que  $\tilde{\Phi}_s^*(H) = H$  de manera trivial.<sup>3</sup>
- 2.  $\mathcal{L}_{X_a^L} \omega = 0^4$

Para calcular las cantidades conservadas utilizaremos el formalismo de la aplicación co-momento y la aplicación momento [22].

La aplicación co-momento se define como la aplicación:

$$\begin{aligned} f : \text{LieR}^2 &\rightarrow C^\infty(T^*\mathbb{R}^2) \\ a &\rightarrow f_a \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

tal que:

$$iX_a^L \omega = df_a$$

En nuestro caso es fácil de calcular, obteniéndose:

$$f_a(x, p) = a_1(p_1 - \frac{B}{2}x_2) + a_2(p_2 + \frac{B}{2}x_1) = (a_1, a_2) \cdot (p_1 - \frac{B}{2}x_2, p_2 + \frac{B}{2}x_1) \quad (\text{A.11})$$

para todo  $(x, p)$  del espacio de fases.

Tal y como se detalla en [22], la acción de un grupo de simetría se dice una Acción de Poisson si la aplicación co-momento es un homomorfismo de álgebras, lo cual equivale (si el grupo  $G$  es conexo) a que la aplicación momento sea equivariante, y así a la validez del Teorema de Nöther y la reducción simpléctica del espacio de fases del sistema.

Tal y como comentamos en el inicio de la sección, va a ser necesaria una extensión central del grupo de transformaciones para conseguir este objetivo.

En efecto,  $\text{LieR}^2$  es un álgebra de Lie abeliana.  $C^\infty(T^*\mathbb{R}^2)$  es un álgebra de Poisson con el paréntesis usual (generado por la forma simpléctica en  $T^*\mathbb{R}^2$ ). De esta forma,  $\forall a, b \in \text{LieR}^2$ ,  $[a, b] = 0$ , mientras que:

$$\{f_a, f_b\} = \omega(X_a^L, X_b^L) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f_a}{\partial x_i} \frac{\partial f_b}{\partial p_i} - \frac{\partial f_b}{\partial x_i} \frac{\partial f_a}{\partial p_i} = B(b_1 a_2 - a_1 b_2)$$

---

<sup>3</sup> $\tilde{\Phi}_s^* : C^\infty(T^*\mathbb{R}^2) \rightarrow C^\infty(T^*\mathbb{R}^2)$ ,  $\tilde{\Phi}_s^* h(x, p) = h(\tilde{\Phi}_s^*(x, p))$

<sup>4</sup>Trivial utilizando la fórmula de homotopía:  $\mathcal{L}_X \theta = d(iX\theta) + iXd\theta$

es decir, una función constante pero en general no nula.

Consideremos por tanto el grupo de Heisenberg  $\mathcal{H}_{2+1}$ , isomorfo a  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ . La ley de grupo será:

$$(x, y, z) \circ (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z' + xy')$$

El álgebra de Lie,  $\text{Lie}\mathcal{H}_{2+1}$ , isomorfa igualmente a  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ , la tomaremos<sup>5</sup>:

$$\text{Lie}\mathcal{H}_{2+1} = \langle e_1, e_2, 1 \rangle$$

con paréntesis<sup>6</sup>:

$$[e_1, 1] = [e_2, 1] = [e_1, e_1] = [e_2, e_2] = 0, \quad [e_1, e_2] = -B \cdot 1 \quad (\text{A.12})$$

La acción que consideramos ahora será completamente equivalente a la anterior, (A.4)

$$\begin{aligned} \Phi' : \mathcal{H}_{2+1} \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 & (\text{A.13}) \\ ((s, z), x) &\rightarrow x + s = (x_1 + s_1, x_2 + s_2); & \Phi'_{(s,z)}(x) = x + s \end{aligned}$$

que conduce a idénticos campos fundamentales:

$$(a, c) \in \text{Lie}\mathcal{H}_{2+1} \Rightarrow X_{(a,c)} \equiv X_a = a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \quad (\text{A.14})$$

Análogamente, la acción inducida:

$$\tilde{\Phi}_{(s,z)}(x_1, x_2, p_1, p_2) = (x_1 + s_1, x_2 + s_2, p_1 - \frac{B}{2}s_2, p_2 + \frac{B}{2}s_1) \quad (\text{A.15})$$

y los correspondientes campos serán iguales que los (A.9):

$$X_{(a,c)}^L = X_a^L$$

Dado que la acción de las constantes (de la extensión central) es trivial, la aplicación co-momento será:

$$\begin{aligned} f : \text{Lie}\mathcal{H}_{2+1} &\rightarrow C^\infty(T^*\mathbb{R}^2) \\ (a, c) &\rightarrow f_{(a,c)} \text{ tal que } iX_{(a,c)}^L \omega = df_{(a,c)} \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

---

<sup>5</sup>Son posibles diferentes realizaciones de este álgebra, por ejemplo:

$$e_1 \equiv X = \frac{\partial}{\partial x}, \quad e_2 \equiv \frac{\partial}{\partial y} - Bx \frac{\partial}{\partial z}, \quad 1 \equiv \frac{\partial}{\partial z}$$

<sup>6</sup>La constante  $-B$  que introducimos es, lógicamente, arbitraria.

pero  $X_{(a,c)}^L = X_a^L$ , luego  $f_{(a,c)}$  será igual que  $f_a$ , (A.11), salvo una constante arbitraria, mientras que  $f_{(0,c)} = c$  es también constante, por ser  $X_{(0,c)}^L$  el campo nulo.

En este caso,  $f$  es homomorfismo de álgebras. Efectivamente, teniendo en cuenta (A.12):

$$\begin{aligned} \forall (a, c), (b, c') \in \text{Lie}\mathcal{H}_{2+1}, \quad (a, c) \equiv a_1 e_1 + a_2 e_2 + c \cdot 1, \quad (b, c') \equiv b_1 e_1 + b_2 e_2 + c' \cdot 1 \\ [(a, c), (b, c')] = -B(a_1 b_2 - a_2 b_1) = (0, -B(a_1 b_2 - a_2 b_1)) \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

De esta forma:

$$f_{[(a,c),(b,c')]} = -B(a_1 b_2 - a_2 b_1) = \{f_a, f_b\} = \{f_{(a,c)}, f_{(b,c')}\} \quad (\text{A.18})$$

y, en definitiva,  $f$  es un homomorfismo de álgebras.

Podemos definir ahora la aplicación momento asociada a esta acción de Poisson:

$$\begin{aligned} J : T^*\mathbb{R}^2 &\rightarrow (\text{Lie}\mathcal{H}_{2+1})^* \\ (x, p) &\rightarrow J(x, p) \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

tal que:

$$\langle J(x, p), (a, c) \rangle = f_{(a,c)}(x, p)$$

Teniendo en cuenta que  $\langle J(x, p), (a, c) \rangle = f_{(a,c)}(x, p) = f_a(x, p)$ , la constante  $c$  no afectará a la acción de  $J$ .

Calculando, e identificando  $(\text{Lie}\mathcal{H}_{2+1})^*$  con  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ , tendremos:

$$J(x, p) \equiv (p_1 - \frac{B}{2}x_2, p_2 + \frac{B}{2}x_1, \text{cte}) \quad (\text{A.20})$$

y, por tanto, las cantidades conservadas por esta simetría serán:

$$(p_1 - \frac{B}{2}x_2, p_2 + \frac{B}{2}x_1) \quad (\text{A.21})$$



# Apéndice B

## Soluciones de la Ecuación de Dirac en el plano

### B.1 El potencial inverso

La ecuación de Dirac en (2+1) dimensiones para una partícula cargada, con masa, en presencia de un potencial central  $V(r)$  es:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = [c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta M c^2 + V(r)] \psi \quad (\text{B.1})$$

donde  $\alpha^1 = -\sigma^2$ ,  $\alpha^2 = \sigma^1$  y  $\beta = \sigma^3$ .

Queremos encontrar los estados ligados del Hamiltoniano de Dirac para el potencial inverso  $V(r) = -\frac{a^2}{r}$ .

La componente del momento angular total en la dirección perpendicular al plano,  $J_3 = L_3 + S_3$  con  $S_3 = \frac{\hbar}{2}\sigma_3$ , conmuta con el Hamiltoniano de Dirac en presencia de un potencial central, y por tanto, podemos encontrar una base completa de estados propios de ambos operadores. Tomemos la base de estados propios de  $J_3$ :

$$\psi_m(r, \phi) = \begin{pmatrix} R_1(r) e^{im\phi} \\ R_2(r) e^{i(m+1)\phi} \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

$$J_3 \psi_m(r, \phi) = \hbar \left( m + \frac{1}{2} \right) \psi_m(r, \phi) \quad (\text{B.3})$$

Con las condiciones de periodicidad habituales,  $m$ , sólo tomará valores enteros.

El sistema de ecuaciones diferenciales acopladas que resulta para las componentes radiales  $R_1(r)$  y  $R_2(r)$  es:

$$\frac{dR_2(r)}{dr} + \frac{m+1}{r} R_2(r) = \frac{E - M c^2 - V(r)}{\hbar c} R_1(r)$$

$$-\frac{dR_1(r)}{dr} + \frac{m}{r}R_1(r) = \frac{E + Mc^2 - V(r)}{\hbar c}R_2(r) \quad (\text{B.4})$$

En nuestro caso:

$$\begin{aligned} \frac{dR_2(r)}{dr} + \frac{m+1}{r}R_2(r) &= \left(-\lambda_2 + \frac{\gamma}{r}\right)R_1(r) \\ -\frac{dR_1(r)}{dr} + \frac{m}{r}R_1(r) &= \left(\lambda_1 + \frac{\gamma}{r}\right)R_2(r) \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

con las constantes:

$$\lambda_1 = \frac{E + Mc^2}{\hbar c}, \quad \lambda_2 = \frac{Mc^2 - E}{\hbar c}, \quad \gamma = \frac{a^2}{\hbar c}$$

Hacemos el cambio de variable  $\rho = \sqrt{\lambda_1\lambda_2}r$ . Teniendo en cuenta el comportamiento en el origen, y en el infinito, de  $R_1$  y  $R_2$ , buscamos soluciones del tipo:

$$\begin{aligned} R_1(\rho) &= e^{-\rho}\rho^s \sum_{n=0}^{\infty} a_n\rho^n \\ R_2(\rho) &= e^{-\rho}\rho^s \sum_{n=0}^{\infty} b_n\rho^n \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Sustituyendo en (B.5), e igualando los coeficientes con la misma potencia en  $\rho$ , se obtienen las siguientes relaciones de recurrencia para los coeficientes:

$$\begin{aligned} (s+n+m+1)b_n - b_{n-1} + \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}a_{n-1} - \gamma a_n &= 0 \\ (s+n-m)a_n - a_{n-1} + \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}b_{n-1} + \gamma b_n &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Dado que  $a_0$  y  $b_0$  son no nulos, las relaciones de recurrencia para  $n=0$ , nos proporcionan la expresión de  $s$ :

$$s = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 - \gamma^2} \quad (\text{B.8})$$

$s$  debe ser real, pues de lo contrario, tendríamos un caso de *caída* de la partícula al centro del potencial [13], en consecuencia:

$$\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 - \gamma^2 \geq \min\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 - \gamma^2 = \frac{1}{4} - \gamma^2$$

de donde se deduce que sólo potenciales con  $\frac{a^2}{\hbar c} \leq \frac{1}{4}$  son adecuados a nuestra situación. Por otro lado, para que  $\int \psi^\dagger \psi d^2x < \infty$ , será necesario tomar el signo positivo en  $s$ , y por tanto,  $s$  debe ser  $s > -\frac{1}{2}$ .



Buscamos soluciones finitas en todo el espacio. Si la serie de potencias fuera infinita,  $R_1$  y  $R_2$  divergerían exponencialmente para  $\rho \rightarrow \infty$ ; por tanto, debemos truncar las series, y lo haremos quedándonos con la misma potencia en ambas, es decir, supongamos  $a_{q+1} = b_{q+1} = 0$ , y  $a_q \neq 0$ ,  $b_q \neq 0$ , resulta:

$$a_q = \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}} b_q \quad (\text{B.9})$$

$$\left[ \beta_1(s + q + m + 1) + \gamma\sqrt{\beta_1\beta_2} \right] b_q - \left[ \gamma\beta_1 - \sqrt{\beta_1\beta_2}(s + q - m) \right] a_q = 0 \quad (\text{B.10})$$

Sustituyendo la primera expresión en la segunda determinamos el espectro para los estados ligados de partícula, es decir,

$$E_{q,m} = \frac{Mc^2}{\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{q + \sqrt{(m + \frac{1}{2})^2 - \gamma^2}}}} \quad (\text{B.11})$$

donde  $q = 0, 1, 2, \dots$ , y  $m \in \mathbf{Z}$ .

Una base ortonormal de espinores que satisfacen las condiciones impuestas es:

$$\psi_{q,m}(r, \phi) = N_{q,m} e^{-\frac{\sqrt{M^2c^4 - E^2}}{\hbar c} r} \left( \frac{\sqrt{M^2c^4 - E^2}}{\hbar c} r \right)^s \begin{pmatrix} e^{im\phi} \sum_{n=0}^q a_n \left( \frac{\sqrt{M^2c^4 - E^2}}{\hbar c} r \right)^n \\ e^{i(m+1)\phi} \sum_{n=0}^q b_n \left( \frac{\sqrt{M^2c^4 - E^2}}{\hbar c} r \right)^n \end{pmatrix} \quad (\text{B.12})$$

Para comparar con la teoría de Schrödinger tomaremos el límite no-relativista. El espectro correspondiente a los estados ligados, a orden cero, es:

$$E_n = -\frac{2M\frac{\alpha^4}{\hbar^2}}{n^2} \quad (\text{B.13})$$

donde  $n$ , es el número cuántico principal, que sólo puede tomar valores enteros impares, pues,  $n = 2n_r + 2|m| + 1$ . Aquí,  $n_r$ , es el número cuántico radial,  $n_r = 0, 1, 2, \dots$ , y  $m$  es el número cuántico asociado a la tercera componente del momento angular. Para cada valor de  $n$ , tenemos una degeneración ya que  $m$  puede tomar  $n$  valores diferentes:  $m = -\frac{n-1}{2}, \dots, 0, \dots, \frac{n-1}{2}$ .

En la teoría relativista se rompe parcialmente la degeneración en  $m$ . Identificando  $n \equiv 2q + 2|m + \frac{1}{2}|$ , para cada  $n$ , tendrán distinta energía los estados con diferente momento angular total en módulo. Se mantiene, por tanto, una degeneración binaria. Por ejemplo, para  $n = 1$ , tenemos un sólo estado con  $j = 0 + \frac{1}{2}$  y  $q = 0$ ; para  $n = 3$ , tenemos tres niveles con:  $j = 0 + \frac{1}{2}$ ,  $j = 1 + \frac{1}{2}$  y  $j = -1 + \frac{1}{2}$ , de

los cuales el primero y el tercero tienen la misma energía, pues  $|j| = \frac{1}{2}$  y  $q = 1$ , en ambos casos; y en general, para  $n = 2k + 1$ , tenemos  $n$  niveles de los cuales tienen diferente energía  $k + 1$  y los demás están degenerados dos a dos.

Si desarrollamos el espectro en  $\gamma^2 = \frac{v^2}{c^2}$  encontramos:

$$\begin{aligned}
 E_{q,m} &= Mc^2 \left[ 1 - \frac{1}{2 \left( q + |m + \frac{1}{2}| \right)^2} \gamma^2 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2 \left( q + |m + \frac{1}{2}| \right)^3} \left( \frac{1}{|m + \frac{1}{2}|} - \frac{3}{4 \left( q + |m + \frac{1}{2}| \right)} \right) \gamma^4 + \dots \right] \\
 &= Mc^2 \left[ 1 - \frac{1}{2n^2} \gamma^2 - \frac{4}{n^3} \left( \frac{1}{|m + \frac{1}{2}|} - \frac{3}{2n} \right) \gamma^4 + \dots \right] \quad (B.14)
 \end{aligned}$$

Quedándonos a primer orden en  $\gamma^2$  recuperamos el resultado no-relativista. Al siguiente orden tenemos ya el desdoblamiento de los niveles con diferente momento angular total en módulo.

Para obtener estos resultados estudiemos la aproximación no-relativista a primer orden en  $(v/c)^2$  para la ecuación de Dirac. Así,

$$H_D = \begin{pmatrix} Mc^2 + V(r) & D \\ D^\dagger & -Mc^2 + V(r) \end{pmatrix} \quad (B.15)$$

donde  $D = c(p_2 + ip_1)$  y  $D^\dagger = c(p_2 - ip_1)$ . En el problema estacionario tenemos dos ecuaciones acopladas para las dos componentes del espinor:

$$\begin{aligned}
 D\psi_2 &= [E - Mc^2 - V(r)] \psi_1 \\
 D^\dagger\psi_1 &= [E + Mc^2 - V(r)] \psi_2 \quad (B.16)
 \end{aligned}$$

Utilizando la segunda ecuación podemos eliminar  $\psi_2$  de la primera:

$$D \frac{1}{[E + Mc^2 - V(r)]} D^\dagger \psi_1 = [E - Mc^2 - V(r)] \psi_1 \quad (B.17)$$

donde

$$\psi_2 = \frac{1}{[E + Mc^2 - V(r)]} D^\dagger \psi_1 \quad (B.18)$$

En la aproximación no-relativista suponemos que:  $E \approx Mc^2$  y  $|V(r)| \ll Mc^2$ . Si definimos  $E^{NR} = E - Mc^2$  podemos hacer el siguiente desarrollo en serie:

$$\frac{c^2}{[E + Mc^2 - V(r)]} = \frac{1}{2M} \left[ \frac{2Mc^2}{E^{NR} - V(r) + 2Mc^2} \right] = \frac{1}{2M} \left[ 1 - \frac{E^{NR} - V(r)}{2Mc^2} + \dots \right]$$

Que puede observarse como un desarrollo en potencias de  $(v/c)^2$ . A orden cero, tenemos la ecuación de Schrödinger para una partícula en un potencial central para la primera componente. En esta aproximación la segunda componente es de orden  $(v/c)$ , y se trata, por tanto, de la componente pequeña. Al siguiente orden:

$$D \frac{1}{2Mc^2} \left( 1 - \frac{E^{NR} - V(r)}{2Mc^2} \right) D^\dagger \psi_1 = E^{NR} \psi_1 \quad (\text{B.19})$$

Para que esta ecuación pueda estudiarse como una ecuación de Schrödinger independiente del tiempo tenemos que introducir una nueva función de onda. Dado que

$$\int (\psi_1^\dagger \psi_1 + \psi_2^\dagger \psi_2) d^2x = 1$$

y teniendo en cuenta que en esta aproximación

$$\psi_2 = \frac{1}{2Mc^2} D^\dagger \psi_1 \quad (\text{B.20})$$

Si definimos  $\Psi$ :

$$\Psi = \left( 1 + \frac{DD^\dagger}{8M^2c^4} \right) \psi_1$$

que esta normalizada hasta orden  $(v/c)^2$ . La ecuación de Schrödinger resultante para esta función de onda es:

$$\left[ \frac{\vec{p}^2}{2M} + V(r) - \frac{\vec{p}^4}{8M^3c^2} + \frac{\hbar}{4M^2c^2} \left( \frac{\partial V(r)}{\partial x_1} p_2 - \frac{\partial V(r)}{\partial x_2} p_1 \right) + \frac{\hbar^2}{8M^2c^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) V(r) \right] \Psi = E^{NR} \Psi \quad (\text{B.21})$$

El significado físico de los diferentes sumandos que nos aparecen en esta ecuación es el siguiente: los dos primeros representan evidentemente la aproximación a orden cero; el tercer sumando se debe a la corrección relativista a la energía cinética relativista; el cuarto representa la interacción espín-orbita para un potencial central, es decir,

$$\frac{\hbar}{4M^2c^2} \left( \frac{\partial V(r)}{\partial x_1} p_2 - \frac{\partial V(r)}{\partial x_2} p_1 \right) \equiv \frac{1}{2M^2c^2} \frac{1}{r} \frac{dV(r)}{dr} S_3 \cdot L_3 \quad (\text{B.22})$$

donde  $S_3 = \frac{\hbar}{2}$ . Y el último sumando es el término de Darwin que para  $V(r) = -\frac{a^2}{r}$ :

$$\frac{\hbar^2}{8M^2c^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) V(r) \equiv -\frac{\hbar^2}{8M^2c^2} \frac{a^2}{r^3} \quad (\text{B.23})$$

pues

$$\nabla^2 V(r) = -\frac{a^2}{r^3}$$

La corrección en teoría de perturbaciones a la energía del Hamiltoniano de Schrödinger para el potencial inverso cuando consideramos los tres sumandos que aparecen a primer orden en la aproximación no-relativista es:

$$\Delta E = -\frac{4Ma^4}{\hbar^2} \frac{1}{n^3} \left( \frac{1}{|m + \frac{1}{2}|} - \frac{3}{2n} \right) \quad (\text{B.24})$$

La degeneración en  $m$  a este orden de aproximación se rompe para aquellos niveles con diferente momento angular total en módulo [113, 76, 13].

## B.2 Ecuación de Dirac con campo magnético y un pozo esférico

Estudiaremos los estados ligados para una partícula en el plano en presencia de un campo magnético constante y de un potencial radial dado por:

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & \text{si } r \leq a_0 \\ 0 & \text{si } r > a_0 \end{cases} \quad (\text{B.25})$$

Para encontrar las soluciones de este problema nos basamos en el resultado ya conocido para el problema de Dirac-Landau en ausencia de potencial. Recordemos brevemente estos resultados en coordenadas polares en el plano. El Hamiltoniano de Dirac para una partícula cargada en presencia de un campo magnético uniforme, de intensidad  $B$ , es:

$$H_D = \begin{pmatrix} Mc^2 & D \\ D^\dagger & -Mc^2 \end{pmatrix} \quad (\text{B.26})$$

En el gauge simétrico y tomando coordenadas polares en el plano tenemos:

$$A_r = 0 \quad , \quad A_\phi = -\frac{B}{2}r$$

$$\begin{aligned} D &= -\frac{\sqrt{2eB\hbar c}}{2l} e^{-i\phi} \left[ -l^2 \frac{\partial}{\partial r} + r + i \frac{l^2}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \right] \\ D^\dagger &= -\frac{\sqrt{2eB\hbar c}}{2l} e^{i\phi} \left[ l^2 \frac{\partial}{\partial r} + r + i \frac{l^2}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

donde  $l^2 = \frac{\hbar}{m\omega}$  es la longitud magnética con  $\omega = \frac{eB}{2mc}$ .

Este Hamiltoniano conmuta con el momento angular total en la dirección perpendicular al plano,  $[H_D, J_3] = 0$ . Tomaremos por tanto:

$$\begin{aligned}\psi_m(r, \phi) &= \begin{pmatrix} R_1(r) e^{im\phi} \\ R_2(r) e^{i(m+1)\phi} \end{pmatrix} \\ J_3\psi_m(r, \phi) &= \hbar \left(m + \frac{1}{2}\right) \psi_m(r, \phi)\end{aligned}\quad (\text{B.28})$$

Sustituyendo en  $H_D\psi(r, \phi) = E\psi(r, \phi)$ , encontramos un sistema de ecuaciones diferenciales, de primer orden, acopladas para  $R_1$  y  $R_2$ . Despejando la segunda componente encontramos para la primera la ecuación de segundo orden:

$$R_1'' + \frac{1}{r}R_1' + \left[\frac{E^2 - M^2c^4}{\hbar^2c^2} + \frac{2(m+1)}{l^2} - \frac{m^2}{r^2} - \frac{r^2}{l^4}\right]R_1 = 0 \quad (\text{B.29})$$

donde  $R_2$ :

$$R_2 = \frac{\sqrt{2eB\hbar c}}{E + Mc^2} \left(-\frac{l}{2}R_1' + \left(\frac{ml}{2r} - \frac{r}{2l}\right)R_1\right) \quad (\text{B.30})$$

Si hacemos el cambio de variable  $u = \frac{r^2}{l^2}$ , y tenemos en cuenta el comportamiento de  $R_1$  en el origen, y en el infinito, podemos buscar soluciones del tipo:

$$R_1(u) = e^{-\frac{u}{2}} u^{\frac{|m|}{2}} \omega(u) \quad (\text{B.31})$$

La ecuación diferencial resultante para  $\omega(u)$  es:

$$u \omega'' + (|m| + 1 - u) \omega' + \left(\beta - \frac{|m| + 1}{2}\right) \omega = 0 \quad (\text{B.32})$$

donde

$$\beta = \frac{E^2 - M^2c^4}{2eB\hbar c} + \frac{m + 1}{2}$$

Las soluciones de esta ecuación son las funciones hipergeométricas confluentes [1]:

$$\omega(u) = C {}_1F_1 \left[ \frac{|m| + 1}{2} - \beta, |m| + 1, u \right]$$

La condición de cuantización para la energía se deduce al imponer que las funciones de onda sean finitas cuando pasamos al límite  $u \rightarrow \infty$ , resultado que sólo es posible si:  $\frac{|m|+1}{2} - \beta = -n_r$ , con  $n_r$  un entero no negativo.

El espectro es:

$$E_{n_r, m} = \pm \sqrt{M^2c^4 + 2eB\hbar c \left(n_r + \frac{|m| - m}{2}\right)} \quad (\text{B.33})$$

Para los modos cero, como consecuencia de la asimetría espectral, la energía es:

$$E_{0,m} = Mc^2 \quad (\text{B.34})$$

Identificando  $n_r + \frac{|m|-m}{2} = k$ , con  $k$  un entero no negativo que caracteriza los niveles de Dirac-Landau, encontramos la degeneración infinita en  $m$  característica de este sistema.

Una base ortonormal de espinores viene dada por:

$$\begin{aligned} \psi_{n_r,m}^\pm(r,\phi) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \Psi_{n_r,m}(r,\phi) \\ -\frac{\sqrt{2eB\hbar c n_r}}{E_{n_r,m}^\pm + Mc^2} \Psi_{n_r-1,m+1}(r,\phi) \end{pmatrix}, & m \geq 0 \\ \psi_{n_r,m}^\pm(r,\phi) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \Psi_{n_r,m}(r,\phi) \\ \frac{\sqrt{2eB\hbar c(n_r-m)}}{E_{n_r,m}^\pm + Mc^2} \Psi_{n_r,m+1}(r,\phi) \end{pmatrix}, & m < 0 \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

y para los modos cero,  $n_r = 0$  y  $m \geq 0$ :

$$\psi_{0,m}(r,\phi) = \begin{pmatrix} \Psi_{0,m}(r,\phi) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.36})$$

Donde  $\Psi_{n_r,m}(r,\phi)$  son las funciones de onda normalizadas propias del Hamiltoniano de Schödinger para el problema no-relativista, es decir,<sup>1</sup>

$$\Psi_{n_r,m}(r,\phi) = \frac{(-1)^{|m|}}{l^{|m|+1}} \sqrt{\frac{n_r!}{\pi(n_r + |m|)!}} e^{im\phi} r^{|m|} L_{n_r}^{|m|} \left( \frac{r^2}{l^2} \right) e^{-\frac{r^2}{2l^2}} \quad (\text{B.37})$$

Consideremos ahora el potencial del pozo radial además del campo magnético constante. El Hamiltoniano de Dirac en este caso es:

$$H_D = \begin{pmatrix} Mc^2 + V(r) & D \\ D^\dagger & -Mc^2 + V(r) \end{pmatrix} \quad (\text{B.38})$$

donde  $D$  y  $D^\dagger$  vienen dados por (0.25) en el gauge simétrico. Una vez más el Hamiltoniano conmuta con  $J_3$ , y por tanto, es apropiado tomar los espinores de la forma (0.26). Es conveniente distinguir dos zonas:

<sup>1</sup>Hemos utilizado la relación entre las funciones hipergeométricas confluentes  ${}_1F_1[-n, \alpha + 1, x]$  y los polinomios generalizados de Laguerre  $L_n^\alpha(x)$  [76].

- Zona I:  $r \leq a_0$ , con:

$$\begin{aligned} \frac{l}{2}R_2'(r) + \left(\frac{(m+1)l}{2r} - \frac{r}{2l}\right)R_2(r) &= \frac{E - Mc^2 + V_0}{\sqrt{2eB\hbar c}}R_1(r) \\ -\frac{l}{2}R_1'(r) + \left(\frac{ml}{2r} - \frac{r}{2l}\right)R_1(r) &= \frac{E + Mc^2 + V_0}{\sqrt{2eB\hbar c}}R_2(r) \end{aligned} \quad (\text{B.39})$$

- Zona II:  $r > a_0$ , con:

$$\begin{aligned} \frac{l}{2}R_2'(r) + \left(\frac{(m+1)l}{2r} - \frac{r}{2l}\right)R_2(r) &= \frac{E - Mc^2}{\sqrt{2eB\hbar c}}R_1(r) \\ -\frac{l}{2}R_1'(r) + \left(\frac{ml}{2r} - \frac{r}{2l}\right)R_1(r) &= \frac{E + Mc^2}{\sqrt{2eB\hbar c}}R_2(r) \end{aligned} \quad (\text{B.40})$$

Despejando la segunda componente se obtienen las ecuaciones diferenciales de segundo orden para la primera componente:

$$R_1'' + \frac{1}{r}R_1' + \left[\frac{(E - Mc^2 + V_0)(E + Mc^2 + V_0)}{\hbar^2 c^2} + \frac{2(m+1)}{l^2} - \frac{m^2}{r^2} - \frac{r^2}{l^4}\right]R_1 = 0 \quad r \leq a_0 \quad (\text{B.41})$$

$$R_1'' + \frac{1}{r}R_1' + \left[\frac{E^2 - M^2 c^4}{\hbar^2 c^2} + \frac{2(m+1)}{l^2} - \frac{m^2}{r^2} - \frac{r^2}{l^4}\right]R_1 = 0, \quad r > a_0 \quad (\text{B.42})$$

Con el cambio  $u = \frac{r^2}{l^2}$ , y buscando soluciones del tipo (B.31), resulta:

$$u \omega'' + (|m| + 1 - u) \omega' + \left(\beta_2 - \frac{|m| + 1}{2}\right) \omega = 0, \quad u \leq \frac{a_0^2}{l^2} \quad (\text{B.43})$$

$$u \omega'' + (|m| + 1 - u) \omega' + \left(\beta_1 - \frac{|m| + 1}{2}\right) \omega = 0, \quad u > \frac{a_0^2}{l^2} \quad (\text{B.44})$$

donde

$$\begin{aligned} \beta_2 &= \frac{(E - Mc^2 + V_0)(E + Mc^2 + V_0)}{2eB\hbar c} + \frac{(m+1)}{2} \\ \beta_1 &= \frac{E^2 - M^2 c^4}{2eB\hbar c} + \frac{(m+1)}{2} \end{aligned} \quad (\text{B.45})$$

La solución más general para estas ecuaciones es:

$$\begin{aligned} R_1(u) &= e^{-\frac{u}{2}} u^{\frac{|m|}{2}} \left( C_1 {}_1F_1 \left[ \frac{|m| + 1}{2} - \beta, |m| + 1, u \right] \right. \\ &\quad \left. + C_2 U \left[ \frac{|m| + 1}{2} - \beta, |m| + 1, u \right] \right) \end{aligned} \quad (\text{B.46})$$

Teniendo en cuenta el comportamiento de las funciones hipergeométricas confluente en el origen, y en el infinito, debemos tomar como solución para  $R_1$  en cada zona:

$$\begin{aligned} R_1^I(u) &= C_1 e^{-\frac{u}{2}} u^{\frac{|m|}{2}} {}_1F_1 \left[ \frac{|m|+1}{2} - \beta_2, |m|+1, u \right], \quad u < \frac{a_0^2}{l^2} \\ R_1^{II}(u) &= C_2 e^{-\frac{u}{2}} u^{\frac{|m|}{2}} U \left[ \frac{|m|+1}{2} - \beta_1, |m|+1, u \right], \quad u > \frac{a_0^2}{l^2} \end{aligned} \quad (\text{B.47})$$

La segunda componente se calcula a partir de la primera, y en cada zona:

$$\begin{aligned} R_2^I(u) &= -C_1 \frac{\sqrt{2eB\hbar c}}{E + Mc^2 + V_0} \left( \frac{1}{2} - \frac{\beta_2}{m+1} \right) e^{-\frac{u}{2}} u^{\frac{m+1}{2}} \\ &\quad \times {}_1F_1 \left[ \frac{m+1}{2} - \beta_2 + 1, m+2, u \right], \quad m \geq 0 \\ R_2^I(u) &= -C_1 \frac{\sqrt{2eB\hbar c}}{E + Mc^2 + V_0} (-m) e^{-\frac{u}{2}} u^{\frac{-(m+1)}{2}} \\ &\quad \times {}_1F_1 \left[ \frac{1-m}{2} - \beta_2, -m, u \right], \quad m < 0 \end{aligned} \quad (\text{B.48})$$

$$\begin{aligned} R_2^{II}(u) &= -C_2 \frac{\sqrt{2eB\hbar c}}{E + Mc^2} \left( \beta_1 - \frac{m+1}{2} \right) e^{-\frac{u}{2}} u^{\frac{m+1}{2}} \\ &\quad \times U \left[ \frac{m+1}{2} - \beta_1 + 1, m+2, u \right], \quad m \geq 0 \\ R_2^{II}(u) &= -C_2 \frac{\sqrt{2eB\hbar c}}{E + Mc^2} \left( \beta_1 - \frac{m+1}{2} \right) e^{-\frac{u}{2}} u^{\frac{-(m+1)}{2}} \\ &\quad \times U \left[ \frac{1-m}{2} - \beta_1, -m, u \right], \quad m < 0 \end{aligned} \quad (\text{B.49})$$

Imponiendo condiciones de continuidad para la solución en  $r = a_0$ :

$$R_1^I(u_0) = R_1^{II}(u_0), \quad R_2^I(u_0) = R_2^{II}(u_0) \quad (\text{B.50})$$

donde  $u_0 = \frac{a_0^2}{l^2}$ . Para eliminar la ambigüedad en las constantes podemos tomar como condición el cociente entre estas expresiones, y así:

$$\begin{aligned} &\frac{{}_1F_1[-(\epsilon + \mu + \nu_0)(\epsilon - \mu + \nu_0), m+1, u_0]}{(\epsilon - \mu + \nu_0) {}_1F_1[1 - (\epsilon + \mu + \nu_0)(\epsilon - \mu + \nu_0), m+2, u_0]} = \\ &\frac{U[-(\epsilon^2 - \mu^2), m+1, u_0]}{(\mu - \epsilon) U[1 - (\epsilon^2 - \mu^2), m+2, u_0]}, \quad m \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{B.51})$$



$$\frac{(\epsilon + \mu + \nu_0)_1 F_1[-m - (\epsilon + \mu + \nu_0)(\epsilon - \mu + \nu_0), 1 - m, u_0]}{m_1 F_1[-m - (\epsilon + \mu + \nu_0)(\epsilon - \mu + \nu_0), -m, u_0]} = \frac{U[-m - (\epsilon^2 - \mu^2), 1 - m, u_0]}{(\mu - \epsilon)U[-m - (\epsilon^2 - \mu^2), -m, u_0]}, \quad m < 0 \quad (\text{B.52})$$

donde hemos introducido las cantidades adimensionales:

$$\epsilon = \frac{E}{\sqrt{2eB\hbar c}}, \quad \nu_0 = \frac{V_0}{\sqrt{2eB\hbar c}}, \quad \mu = \frac{Mc^2}{\sqrt{2eB\hbar c}}$$

Nos interesa estudiar la existencia de estados ligados para este potencial. En el problema relativista descrito por la ecuación de Dirac, los estados ligados para partícula son aquellos cuya energía se encuentra en el intervalo  $-Mc^2 < E < Mc^2$ . Para un pozo de profundidad  $V_0$  los posibles estados ligados están en el intervalo  $-V_0 + Mc^2 < E < Mc^2$ , es decir, la profundidad máxima para el pozo debe ser  $V_0 = 2Mc^2$ . Si el pozo es muy profundo,  $V_0 > 2Mc^2$ , pueden aparecer estados ligados de partícula para energías inferiores a  $-Mc^2$ , que darían lugar a la formación espontánea de pares partícula-antipartícula, y este proceso no puede estudiarse en el contexto de la teoría de una partícula. Por tanto, en la teoría relativista es imposible considerar pozos de potencial demasiado profundos a diferencia de lo que sucede en la teoría de Schrödinger [13].

El espectro vendrá determinado por las soluciones de las ecuaciones (B.51) y (B.52). Estas ecuaciones dependen de tres parámetros: la profundidad y el radio del pozo, caracterizados por las variables adimensionales  $\nu_0$  y  $u_0$ , y el momento angular  $m$ . Fijando estos parámetros las funciones resultantes dependen solamente de la energía de la partícula, caracterizada también por una variable adimensional:  $\epsilon$ .

Tomemos  $\mu = 1$ , de forma que, tanto la energía como la profundidad del pozo vienen dadas en unidades de  $Mc^2$ . Representamos gráficamente los dos miembros de la ecuación en función de  $\epsilon$ , para diferentes profundidades del pozo, por ejemplo:  $\nu_0 = 0.01, 0.1, 1, 2$  ( $\nu_0 = 2$  es el valor máximo que puede tomar); y para diferentes radios, por ejemplo:  $u_0 = 0.01, 0.1, 1, 2$ ; y en cada caso tomando diferentes valores de  $m$ .

Llegamos a las siguientes conclusiones:

- El espectro es discreto. Cada nivel de energía está caracterizado por dos números cuánticos:  $n_r$  y  $m$ . El número cuántico radial  $n_r = 0, 1, 2, \dots$ , y el momento angular  $m \in \mathbf{Z}$ .

- A diferencia del problema libre no hay degeneración en  $m$  para cada nivel de Dirac-Landau. Sin embargo, a medida que nos alejamos de  $|\mu| = 1$  (energía de la partícula libre en reposo), la energía para un mismo nivel de Dirac-Landau ( $k = n_r$  para  $m \geq 0$  y  $k = n_r - m$  para  $m < 0$ ) y para diferentes valores del momento angular  $m$ , es prácticamente la misma e igual a la del problema libre, tiende, por tanto, al caso degenerado.
- El espectro no es completamente simétrico entre las energías negativas y positivas cuando aparecen estados ligados para partícula, pero para los estados no ligados sí lo es. La asimetría espectral propia de los modos cero sigue existiendo en presencia de este potencial.
- Para pozos poco profundos, y con un radio pequeño, no hay estados ligados. A medida que aumentamos la profundidad del pozo incluso para valores pequeños del radio tenemos al menos un estado ligado correspondiente al primer nivel de Dirac-Landau. Si aumentamos la profundidad hasta su valor máximo, pueden aparecer estados ligados correspondientes al segundo nivel de Dirac-Landau.
- Para un pozo de una profundidad concreta, a medida que aumentamos el radio aparecen más estados ligados, y si el radio es suficientemente grande pueden aparecer estados ligados del primer y segundo nivel de Dirac-Landau.
- Como ejemplo consideremos un pozo de profundidad  $\nu_0 = 1$ , y de anchura  $u_0 = 0.1$ . Para el estado fundamental  $n_r = 0$  hay cuatro estados ligados  $m = 0, 1, 2, 3$ , no degenerados en la energía. A medida que aumentamos  $m$  la energía del estado ligado se aproxima a  $\mu = 1$  que es la energía del caso libre, y para  $m > 3$ , ya no tenemos estados ligados. Cálculos numéricos nos proporcionan las energías de los estados ligados:

$$\begin{aligned}
 m = 0 & \quad , \quad \epsilon = 0.8444 \\
 m = 1 & \quad , \quad \epsilon = 0.9873 \\
 m = 2 & \quad , \quad \epsilon = 0.9994 \\
 m = 3 & \quad , \quad \epsilon = 0.9999
 \end{aligned}
 \tag{B.53}$$

Los espinores correspondientes se determinan sustituyendo los parámetros,  $\nu_0$ ,  $u_0$ ,  $\mu$  y  $\epsilon$ , en las expresiones (B.47), (B.48) y (B.49). De la condición de continuidad podemos determinar la constante  $C_1$  en función de  $C_2$ , y esta última se determina imponiendo la condición de normalización.

Conocemos, por tanto, una base ortormal de espinores para cada nivel de Dirac-Landau modificado  $\psi_{n_r, m}(r, \phi)$ . Esta base está formada por estados ligados, con  $n_r = 0$  y  $m = 0, 1, 2, 3$ , y estados extensos con  $n_r = 0$  y  $m > 3$ , y  $n_r = 1, 2, \dots$ , para todos los posibles valores de  $m$ .

En las gráficas que exponemos a continuación pueden observarse las características del espectro que acabamos de comentar.

1. Gráficas correspondientes a un valor fijo de la anchura (“a”). Figura B.1.

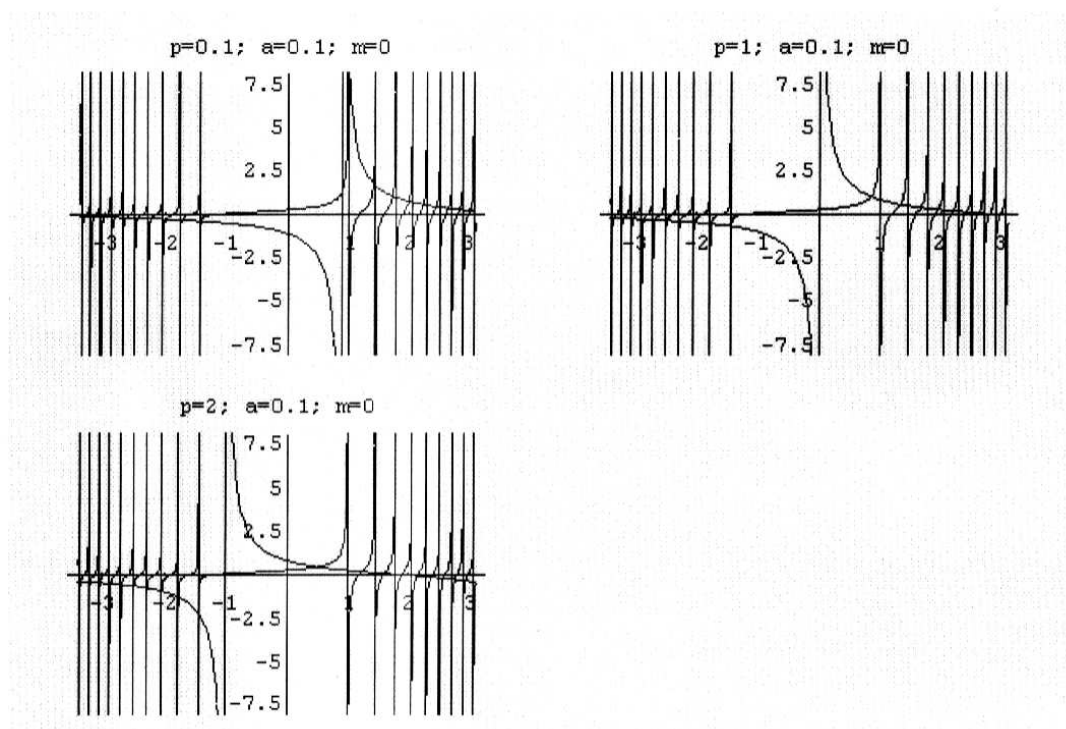


Figura B.1:  $p$  = profundidad del pozo,  $a$  = anchura del pozo,  $m$  = entero (autovalor del momento angular). Representación gráfica de las expresiones (B.51) y (B.52) v.s.  $\epsilon$  (parámetro adimensional que representa la energía) para diferentes valores de  $p$ . Aparece un estado ligado ya para  $p=1$ , y por tanto, para  $p=2$ , con  $0 \leq \epsilon \leq 1$ , cuyos números cuánticos son  $n_r = 0$  y  $m = 0$ .

2. Gráficas correspondientes a un valor fijo de la profundidad (“p”). Figura B.2.

3. Gráficas correspondientes a un valor fijo de la profundidad y de la anchura. Figura B.3.

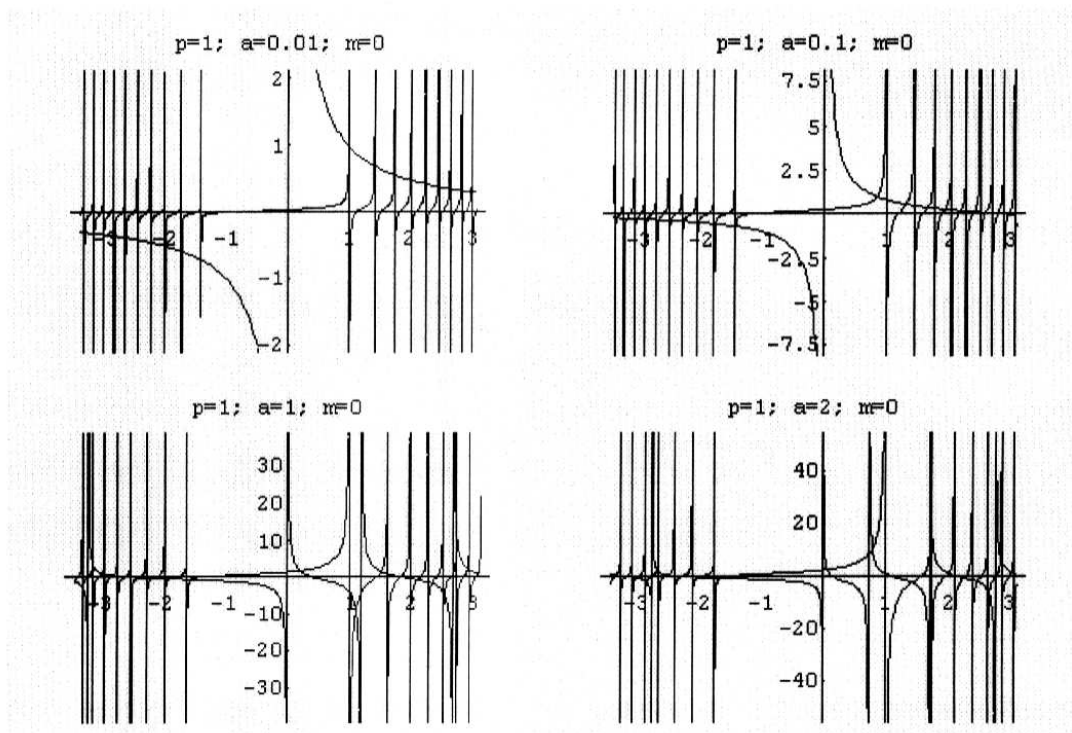


Figura B.2:  $p$  = profundidad del pozo,  $a$  = anchura del pozo,  $m$  = entero (autovalor del momento angular). Representación gráfica de las expresiones (B.51) y (B.52) v.s.  $\epsilon$  para diferentes valores de  $a$ . Aparece un estado ligado ya para  $a=0.1$ , y por tanto, para  $a=1$  y  $a=2$ , con  $0 \leq \epsilon \leq 1$ , cuyos números cuánticos son  $n_r = 0$  y  $m = 0$ .

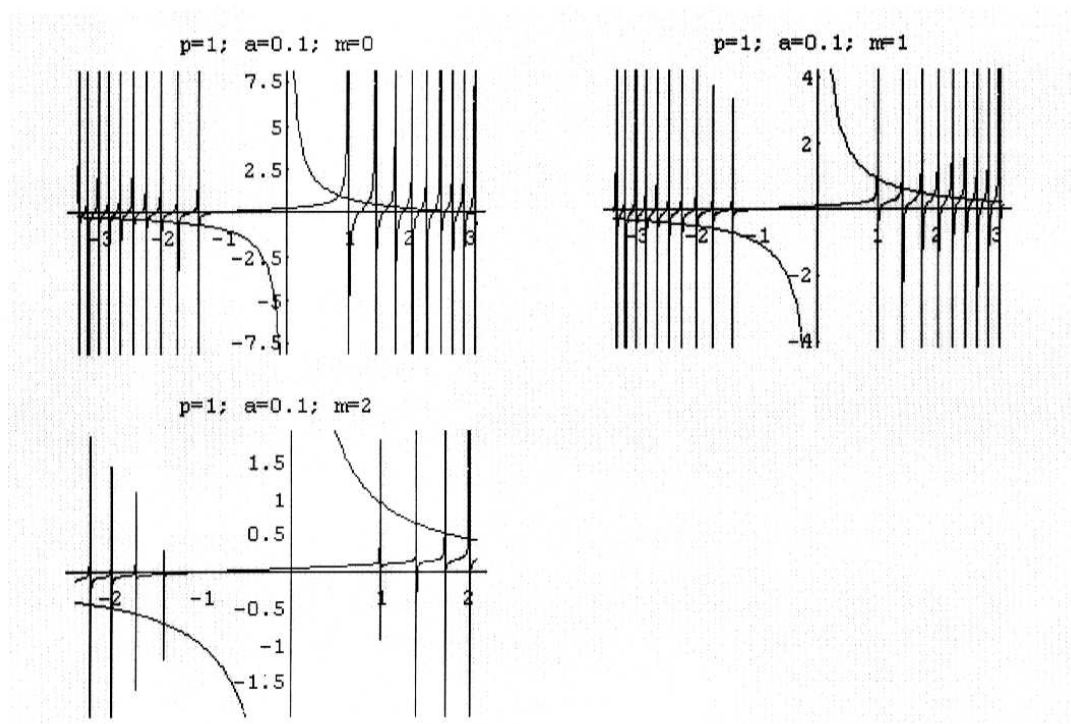


Figura B.3:  $p$  = profundidad del pozo,  $a$  = anchura del pozo,  $m$  = entero (autovalor del momento angular). Representación gráfica de las expresiones (B.51) y (B.52) v.s.  $\epsilon$  para diferentes valores de  $m$ . Aparece un estado ligado para  $m = 0$  y para  $m = 1$ , con  $0 \leq \epsilon \leq 1$ , pero no es ligado para  $m = 2$  todos corresponden a  $n_r = 0$ .

### B.3 Ecuación de Dirac con campo magnético y potencial inverso

Estudiaremos ahora el espectro del Hamiltoniano de Dirac para una partícula en presencia de un campo magnético constante, y de un potencial central,  $V(r) = -\frac{a^2}{r}$ :

$$H_D = \begin{pmatrix} Mc^2 - \frac{a^2}{r} & D \\ D^\dagger & -Mc^2 - \frac{a^2}{r} \end{pmatrix} \quad (\text{B.54})$$

donde  $D$  y  $D^\dagger$ , en el gauge simétrico, y en coordenadas polares, son (B.27). Al igual que en los casos anteriores  $[H_D, J_3] = 0$ , y por tanto, buscamos soluciones de la forma:

$$\psi_m(r, \phi) = \begin{pmatrix} R_1(r) e^{im\phi} \\ R_2(r) e^{i(m+1)\phi} \end{pmatrix} \quad (\text{B.55})$$

El sistema de ecuaciones diferenciales acopladas de primer orden para la parte radial es:

$$\begin{aligned} \frac{l}{2} R_2'(r) + \left( \frac{(m+1)l}{2r} - \frac{r}{2l} \right) R_2(r) &= \frac{E - Mc^2 + \frac{a^2}{r}}{\sqrt{2eB\hbar c}} R_1(r) \\ -\frac{l}{2} R_1'(r) + \left( \frac{ml}{2r} - \frac{r}{2l} \right) R_1(r) &= \frac{E + Mc^2 + \frac{a^2}{r}}{\sqrt{2eB\hbar c}} R_2(r) \end{aligned} \quad (\text{B.56})$$

que en función de las constantes,

$$\beta_1 = \frac{E + Mc^2}{\sqrt{2eB\hbar c}}, \quad \beta_2 = \frac{Mc^2 - E}{\sqrt{2eB\hbar c}}, \quad \alpha = \frac{a^2}{\sqrt{2eB\hbar c}} \quad (\text{B.57})$$

resulta

$$\begin{aligned} \frac{l}{2} R_2'(r) + \left( \frac{(m+1)l}{2r} - \frac{r}{2l} \right) R_2(r) &= \left( -\beta_2 + \frac{\alpha}{r} \right) R_1(r) \\ -\frac{l}{2} R_1'(r) + \left( \frac{ml}{2r} - \frac{r}{2l} \right) R_1(r) &= \left( \beta_1 + \frac{\alpha}{r} \right) R_2(r) \end{aligned} \quad (\text{B.58})$$

Teniendo en cuenta el comportamiento en el origen (dominado por el potencial central) y en el infinito (dominado por el campo magnético constante), buscaremos soluciones del tipo:

$$\begin{aligned} R_1(r) &= e^{-\frac{r^2}{2l^2}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \\ R_2(r) &= e^{-\frac{r^2}{2l^2}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n r^n \end{aligned} \quad (\text{B.59})$$

Sustituyendo en (B.58), e igualando los coeficientes para la misma potencia en  $r$ , llegamos a las siguientes relaciones de recurrencia para los coeficientes:

$$\begin{aligned} \frac{l}{2}[s+n+m+1]b_n - \frac{1}{l}b_{n-2} + \beta_2 a_{n-1} - \alpha a_n &= 0 \\ \frac{l}{2}[m-s-n]a_n - \beta_1 b_{n-1} - \alpha b_n &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.60})$$

Dado que  $a_0$  y  $b_0$  son no nulos, de las relaciones de recurrencia para  $n=0$  se deduce:

$$\begin{aligned} s &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{4\alpha^2}{l^2}} \\ &\equiv -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 - \gamma^2} \end{aligned} \quad (\text{B.61})$$

donde  $\gamma = \frac{a^2}{\hbar c}$ . Es decir, encontramos el mismo resultado que teníamos para el problema del potencial inverso en ausencia de campo magnético. Como vimos en el estudio del potencial inverso, es necesario tomar el signo positivo en  $s$  para garantizar que las soluciones son de cuadrado integrable, y también, es necesario que el parámetro del potencial sea tal que  $\frac{a^2}{\hbar c} \leq \frac{1}{4}$ , para evitar la *caída* de la partícula al centro del potencial.

Por otro lado, para obtener soluciones finitas en todo el espacio suponemos que una de las series termina en  $n=q$ :  $a_q \neq 0$  con  $a_{q+1} = 0$ , y entonces  $b_q = 0$  y  $b_{q-1} \neq 0$ . Para los coeficientes  $a_q$  y  $b_{q-1}$  tenemos las relaciones:

$$\begin{aligned} \frac{l}{2}(m-s-q)a_q - \beta_1 b_{q-1} &= 0 \\ -\frac{1}{l}b_{q-1} + \beta_2 a_q &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.62})$$

Igualando ambas expresiones encontramos el espectro para este sistema:

$$E_{q,m} = \pm \sqrt{M^2 c^4 + eB\hbar c \left[ q - \left(m + \frac{1}{2}\right) + \sqrt{\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{a^4}{\hbar^2 c^2}} \right]} \quad (\text{B.63})$$

donde  $q = 1, 2, 3, \dots$ , y  $m \in \mathbf{Z}$ .

El espectro viene caracterizado por dos números cuánticos,  $q$  y  $m$ , que pone de manifiesto que el potencial central rompe la degeneración en  $m$  propia del problema de Dirac-Landau. Sin embargo, no hay estados ligados como cabía esperar de la presencia del potencial atractivo que estamos estudiando, esto está relacionado

con el tipo de soluciones que hemos buscado en las cuales el campo magnético es muy dominante frente al potencial inverso que resulta muy débil.

En definitiva tenemos una base ortonormal de espinores que satisfacen las condiciones impuestas:

$$\psi_{q,m}(r, \phi) = N_{q,m} e^{-\frac{r^2}{2i^2} r^s} \begin{pmatrix} e^{im\phi} \sum_{n=0}^q a_n r^n \\ e^{i(m+1)\phi} \sum_{n=0}^{q-1} b_n r^n \end{pmatrix} \quad (\text{B.64})$$

Al pasar al límite,  $a \rightarrow 0$ , recuperamos las soluciones ya conocidas identificando:  $q \equiv 2n_r$ , con  $n_r = 0, 1, 2, \dots$ , para  $m \geq 0$ ; y  $q \equiv 2n_r + 1$ , para  $m < 0$ .



# Bibliografía

- [1] Abramowitz, M. & Stegun, I.A. “*Handbook of Mathematical Functions*”. Dover Publ. 1972.
- [2] Aharonov, Y., Coleman, S., Goldhaber, A. S., Nussinov, S., Reznik, B., Rohrlich, D. and Vaidman, L. *Phys. Rev. Lett.* **73**, 918. 1994.
- [3] Alvarez-Gaume, L. “*Introduction to Gravitational Anomalies*”, contenido en “*Progress in Gauge Field Theory*”. NATO ASI Series. Edited by: G. 't Hooft, A. Jaffe, H. Lehmann, P. K. Mitter, I. M. Singer, and R. Stora. Plenum Press. 1984.
- [4] Alvarez-Gaumé, L., Della Pietra, S. and Moore, G. *Ann. Phys.* **163**, 288-317. 1985.
- [5] Anderson, P.W. *Phys. Rev.* **109**, 1492. 1958.
- [6] Arovas, D., Schrieffer, J.R., and Wilczek, F. *Phys. Rev. Lett.* **53**, 722. 1984.
- [7] Asorey, M. *Jour. Geom. Phys.* **11**, 63. 1993.
- [8] Asorey, M. “*Classical and quantum anomalies in the quantum Hall effect*”. Proceedings of the Fall Workshop on Differential Geometry and its Applications. Edited by: X. Gracia, M. C. Muñoz, and N. Román. 1993.
- [9] Ashcroft, N.W. and Mermin, N.D. “*Solid State Physics*”. HRW International Editions. 1976.
- [10] Atiyah, M. and Bott, R. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* **A308**, 523-615. 1982.
- [11] Atiyah, M. “*Eigenvalues of the Dirac Operator*”, contenido en “*Arbeitstagung Bonn 1984. Proceedings*”. Edited by: A. Dold and B.Eckmann. Springer-Verlag. 1985.

- [12] Bellisard, J., van Elst, A., and Schulz-Baldes, H. *J.Math.Phys.* **35**, 5374-5451. 1994.
- [13] Berestetskii, V.B. & Lifshitz, E.M., Pitaevskii, L.P. “*Teoría Cuántica Relativista*”. Editorial Reverté. 1975.
- [14] Binegar, B. *J. Math. Phys.* **23**, 1511. 1982.
- [15] Bogomolny, E. *Sov. J. Nucl. Phys.* **24**, 449. 1977.
- [16] Brown, L.S. “*Quantum Field Theory*”. Cambridge University Press. 1992.
- [17] Burgess, M., McLachlan, A. and Thoms, D.J. Preprint *ISSN-0332-5571*. 1992.
- [18] Cage, M.E. Capítulo 2 contenido en: “*The Quantum Hall Effect*”. Edited by: R. E. Prange & S. M. Girvin. Segunda Edición. Springer-Verlag. 1990.
- [19] Cappelli, A., Trugenberger, C.A. and Zemba, G.R. *Nucl. Phys.* **B396**, 465-490. 1993.
- [20] Cappelli, A., Trugenberger, C.A. and Zemba, G.R. Preprint **CERN-TH 6810**. 1993.
- [21] Cardy, L. and Rabinovici, E. *Nucl. Phys.* **B205**, 1. 1982.
- [22] Cariñena, J.F. “*Canonical Group Actions*”. Preprint I.C.T.P. 88/37. 1988.
- [23] Chang, S. J. “*Introduction to Quantum Field Theory*”. World Scientific. 1990.
- [24] Craigie, N., Giacomelli, G., Nahm, W. and Shafi, O. “*Theory and Detection of Magnetic Monopoles in Gauges Theories*”. Edited by: N. Craigie. World Scientific. 1986.
- [25] Coleman, S. “*Aspects on Symmetry*”. Cambridge University Press. 1985.
- [26] Coleman, S. and Hill, B. *Phys. Lett.* **159B**, 184. 1985.
- [27] Coleman, S. “*The Magnetic Monopole Fifty Years Later*”, contenido en “*The Unity of the Fundamental Interactions*”. Edited by: A. Zichichi. Plenum Press. 1983.
- [28] Curnoe, S. and Weiss, N. *Int. J. Mod. Phys .* **A11**, 329. 1996.

- [29] Cycon, H. L., Froese, R.G., Kirsch, W., Simon, B. “*Schrödinger Operators with Application to Quantum Mechanics and Global Geometry*”. Springer-Verlag. 1987.
- [30] Deser, S., Jackiw, R. and Templeton, S. *Ann. Phys.* **140**, 372-411. 1982.
- [31] Desser, S. Jackiw, R and Templeton, S. *Phys. Rev. Lett* **48**, 975. 1982.
- [32] Dicke, R. H. and Wittke, J. P. “*Introduction to Quantum Mechanics*”. Addison-Wesley Publ. 1960.
- [33] Donaldson, S.K. *J. Diff. Geom.* **18**, 269. 1983.
- [34] Dunne, G. “*Self-Dual Chern-Simons Systems*”. Springer-Verlag. 1995.
- [35] Eliashvili, M. Preprint *ENSLAPP-A-462/94*. 1994.
- [36] Esteve, J. G. *Phys. Rev.* **D34**, 674. 1986.
- [37] Faris, W. G. *Notices of the Ams* **42**, 849. 1995.
- [38] Flohr, M. and Varnhagen, R. *J. Phys.* **A27**, 3999. 1994.
- [39] Fradkin, E. “*Field Theories of Condensed Matter Systems*”. Addison-Wesley Publ. 1991.
- [40] Freed, D. S., Uhlebeck, K. K. “*Geometry and Quantum Field Theory*”. American Mathematical Society. 1995.
- [41] Fujikawa, K. Preprint RRK85-30. 1985.
- [42] Fujikawa, K., Ojima, S. and Yajima, S. Preprint RRK86-26. 1986.
- [43] Fujikawa, K. Preprint RRK86-32. 1986.
- [44] García Fuentes, W. *Tesis Doctoral* . Universidad de Oviedo. 1996.
- [45] García Fuentes, W. and Mateos Guilarte, J. *J. Math. Phys.* **37**, 554. 1996.
- [46] Girvin, S. M. and McDonald, A. H. *Phys. Rev. Lett.* **58**, 1252. 1987.
- [47] Gossard, A. C. contenido en: “*Two-Dimensional Systems, Heterostructures, and Superlattices*”. Edited by: G. Bauer, F. Kuchar and H. Heinrich. Springer-Verlag. 1984.

- [48] Guilarte, J. M. and de la Torre, M. “*Quantum Chern-Simons Theory out of Moduli Space Path Integrals*”. Preprint, Universidad de Salamanca. 1995.
- [49] Guilarte, J. M. and de la Torre, M. *Anales de Física, Monografías RSEF* **3**, 83. 1996.
- [50] Guilarte, J. M., Porrás, J. M. and de la Torre, M. “*Algebraic Geometry and Fractional Quantum Hall Effect*”. Preprint, Universidad de Salamanca. 1996.
- [51] Haldane, F.D. *Phys. Rev. Lett.* **51**, 605. 1983.
- [52] Haldane, F.D. and Rezayi, E.H. *Phys. Rev.* **B31**, 2529. 1985.
- [53] Hall, E.H. *Am. J. Math* **2**, 287. 1879.
- [54] Halperin, B.I. *Phys. Rev. Lett.* **52**, 1583. 1983.
- [55] Huges, R.J., Kostelecky, V. A., Nieto, M.M. Preprint LA-UR- 86-1186. 1986.
- [56] Itzykson, C. and Zuber J.B. “*Quantum Field Theory*”. McGraw-Hill. 1968.
- [57] Jackiw, R. Preprint CTP# 949. 1981.
- [58] Jackiw, R and Schrieffer, J. R. *Nucl. Phys.* **B190**, 253-265. 1981.
- [59] Jackiw, R and Templeton, S. *Phys. Rev.* **D23**, 2291. 1981.
- [60] Jackiw, R. Preprint CTP# 965. 1982.
- [61] Jackiw, R. Preprint CTP# 1000. 1982.
- [62] Jackiw, R. *Phys. Rev.* **D29**, 2375. 1984.
- [63] Jackiw, R. Preprint CTP# 1306. 1985.
- [64] Jackiw, R. “*Solitons in Chern-Simons/Anyon Systems*” contenido en: “*Physics and Mathematics of Anyons*”. Proceedings of the TCSUH Workshop. Edited by: S. S. Chern, C. W. Chu and C. S. Ting. World Scientific. 1991.
- [65] Jackiw, R. “*Topics in planar physics*” contenido en: “*Integrability and Quantization*”. Proceedings of the 20th GIFT International Seminar on Integrability and Quantization. Edited by: M. Asorey, J. F. Cariñena and L. A. Ibort. North-Holland. 1990.

- [66] Jain, J. K. *Adv. Phys.* **41**, 105. 1992.
- [67] Jain, J. K. *Phys. Rev.* **B40**, 8079. 1989.
- [68] Jain, J. K. *Phys. Rev. Lett.* **63**, 199. 1989.
- [69] Jain, J. K. *Phys. Rev.* **B41**, 7653. 1990.
- [70] Johnson, K. “*Proceedings of the Meeting: Topology in Field Theory*”. Santa Fé. Preprint CTP # 1231. 1984.
- [71] Joynt, R. and Prange, R.E. *Phys. Rev.* **B29**, 3303. 1984.
- [72] Klitzing, K.v., Dorda, G. and Pepper, M. *Phys. Rev. Lett* **45**, 494. 1980.
- [73] Kobayashi, S. “*Differential Geometry of Complex Vector Bundles*”. Iwanami Shoten and Princeton University Press . 1987.
- [74] Kogan, I.I. *Int. Jour. Mod. Phys.* **A9**, 3887. 1994.
- [75] Kohomoto, M. *Ann. Phys.* **160**, 343. 1985.
- [76] Landau, L.D. & Lifshitz, E.M. “*Mecánica Cuántica No-Relativista*”. Editorial Reverté. 1983.
- [77] Landau, L.D. & Lifshitz, E.M. “*Teoría Clásica de los Campos*”. Editorial Reverté. 1981.
- [78] Laughlin, R. B. *Phys. Rev.* **B23**, 5632. 1981.
- [79] Laughlin, R. B. *Phys. Rev. Lett.* **50**, 1395. 1983.
- [80] Laughlin, R. B. *Phys. Rev.* **B27**, 3383. 1983.
- [81] Laughlin, R.B. Capítulo 7 contenido en: “*The Quantum Hall Effect*”. Edited by: R. E. Prange & S. M. Girvin. Segunda Edición. Springer-Verlag. 1990.
- [82] Laughlin, R.B. contenido en: “*Fractional Statistics and Anyon Superconductivity*”. Edited by: F. Wilczek. World Scientific. 1990.
- [83] Lee, D. H. contenido en “*Physics and Mathematics of Anyons*”. Proceedings of the TCSUH Workshop. Edited by: S. S. Chern, C. W. Chu and C. S. Ting. World Scientific. 1991.

- [84] Lee, T.D. *“Particle Physics and Introduction to Field Theory”*. Harwood Academic Press. 1988.
- [85] Lerda, A. *“Anyons. Quantum Mechanics of Particles with Fractional Statistics”*. Springer-Verlag. 1992.
- [86] Lopez, A. and Fradkin, E. *Phys. Rev.* **B44**, 5246. 1991.
- [87] Lykken, J.D., Sonnenschein, J. and Weiss, N. Preprint UCLA/90/TEP/17. 1990.
- [88] MacDonald, A. H. *Science* **267**, 977. 1995.
- [89] Madelung, O. *“Introduction to Solid-State Theory”*. Springer-Verlag. 1978.
- [90] Mandelstam, S. *Phys. Rev.* **D11**, 3026. 1975.
- [91] Mandelstam, S. *Phys. Rep.* **23C**, 245. 1976.
- [92] Mandl, F., Shaw, G. *“Quantum Field Theory”*. Jhon Wiley & Sons. 1988.
- [93] Manton, N.S. *Ann. Phys.* **159**, 220. 1985.
- [94] Morf, R. *Europhys. News* **25**, 84. 1994.
- [95] Mumford, D. *“Geometric Invariant Theory”*. Springer-Verlag. 1965.
- [96] Mumford, D. *“Tata Lectures on Theta I”*. Edited by: J. Coates and S. Hologason. Birkhäuser. 1983.
- [97] Negele, J. W., Orland, H. *“Quantum Many-Particle System ”*. Addison-Wesley P.C. 1988.
- [98] Nielsen, H. B., and Ninomiya, M. *Phys. Lett.* **130B**, 389. 1983.
- [99] Niemi, A.J. *“Fractional Fermion Number”* . Preprint. 1985.
- [100] Nieto, M. M. and Taylor, P. L. *Am. J. Phys.* **53**, 234. 1985.
- [101] Niu, Q., Thouless, D. J. and Wu, Y. S. *Phys. Rev.* **B31**, 3372. 1985.
- [102] Olive, D. *“Magnetic monopoles and electromagnetic duality conjectures”* contenido en: *“Monopoles in Quantum Field Theory”*. Proceedings of the Monopole Meeting. Edited by: N. S. Craigie, P. Goddard and W. Nahm. World Scientific. 1982.

- [103] Peebles, P. J. E. “*Quantum Mechanics*”. Princeton University Press. 1992.
- [104] Polchinski, J. “*Effective Field Theory and the Fermi Surface*”, Santa Barbara/Texas. Preprint NSF-ITP-92-132/UTTG-20-92. 1992.
- [105] Popov, V. N. “*Functional Integrals in Quantum Field Theory and Statistical Physics*”. D. Reidel Publ. 1983.
- [106] Prange, R. E. *Phys. Rev.* **B23**, 4802. 1981.
- [107] Prange, R. E. Capítulos 1 y 3 contenidos en: “*The Quantum Hall Effect*”. Edited by: R. E. Prange & S. M. Girvin. Segunda Edición. Springer-Verlag. 1990.
- [108] Prange, R. E. & Girvin, S. M. “*The Quantum Hall Effect*”. Second Edition. Springer-Verlag. 1990.
- [109] Ramond, P. “*Field Theory a Modern Primer*”. The Benjamin/Cummings Publ. 1981.
- [110] Redlich, A. N. *Phys. Rev.* **D29**, 2366. 1984.
- [111] Read, N. *Phys. Rev. Lett.* **62**, 86. 1989.
- [112] Ryder, L. H. “*Quantum Field Theory*”. Cambridge University Press. 1985.
- [113] Sakurai, J. J. “*Advanced Quantum Mechanics*”. Addison-Wesley Publ. 1967.
- [114] Sakurai, J. J. “*Modern Quantum Mechanics*”. The Benjamin/Cummings Publ. 1985.
- [115] Spiegel, M. R. “*Manual de Fórmulas y Tablas Matemáticas*”. McGraw-Hill. Serie Schaum. 1986.
- [116] Schiff, L. I. “*Quantum Mechanics*”. Tercera edición. McGraw-Hill. 1968.
- [117] Schlichenmaier, M. “*An Introduction to Riemann Surfaces, Algebraic Curves and Moduli Spaces*”. Springer-Verlag. 1989.
- [118] Sprücker, J. and Yang, Y. *Commun. Math. Phys.* **149**, 361. 1992.
- [119] Störmer, H. L., Chang, A. and Tsui, D. C., *Phys. Rev. Lett.* **50**, 1953. 1983.
- [120] Störmer, H. L., and Tsui, D. C. *Science* **220**, 1241. 1983.

- [121] t'Hooft, G. *Nucl. Phys.* **B190**, 455. 1981.
- [122] t'Hooft, G. *Nucl. Phys.* **B138**, 1. 1978.
- [123] Thouless, D. J. Capítulo 5 contenido en: “*The Quantum Hall Effect*”. Edited by: R. E. Prange & S. M. Girvin. Segunda Edición. Springer-Verlag. 1990.
- [124] Thouless, D.J. *J. Math. Phys.* **35**, 5362. 1994.
- [125] Tsui, D. C., Störmer, H. L. and Gossard, A. C. *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1559. 1982.
- [126] Vakkuri, E. K. and Wen, X-G. Preprint *CTP-2197*. 1993.
- [127] Varnhagen, R. *Nucl. Phys.* **B443**, 505. 1995.
- [128] Veltman, M. “*Diagrammatica*”. Cambridge University Press. 1994.
- [129] Wen, X. G. and Zee, A. *Phys. Rev.* **B44**, 274. 1991.
- [130] Wen, X. G. and Zee, A. *Phys. Rev.* **B46**, 2290. 1992.
- [131] Wen, X. G. and Zee, A. *Phys. Rev. Lett.* **69**, 1811. 1992.
- [132] Wilczek, F. “*Fractional Statistics and Anyon Superconductivity*”. World Scientific. 1990.
- [133] Witten, E. “*Introduction to Supersymmetry*” contenido en: “*The Unity of the Fundamental Interactions*”. Edited by: A. Zichichi. Plenum Press. 1983.
- [134] Vafa, C. & Witten, E. *Comm. Math. Phys.* ,**95**, 257-276. 1984.
- [135] Zee, A. “*Quantum Hall Fluids*” contenido en: “*Field Theory, Topology and Condensed Matter Physics*”. Proceedings, Storms River Mouth, South Africa 1994. Edited by: H. B. Geyer. Springer-Verlag. 1995.
- [136] Zemanian, A. H. “*Distribution Theory and Transform Analysis*”. McGraw-Hill. 1965.
- [137] Zhang, S., Hansson, T. H. and Kivelson, S. *Phys. Rev. Lett.* , **62**, 82. 1989.
- [138] Zhang, S. C., Hansson, T. H. and Kivelson, S. contenido en: “*Field Theories in Condensed Matter Physics*”. A WORKSHOP. Edited by: Z. Tesanovic. Addison-Wesley Publ. 1990.