



VNiVERSIDAD D SALAMANCA

CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Universidad de Salamanca
Facultad de Ciencias
Grado en Matemáticas

Sistemas dinámicos discretos y la ecuación logística

Trabajo de fin de grado

realizado por
Alejandro Gonzalo Fernández

bajo la supervisión de
Luis Manuel Navas Vicente

Salamanca, 5 de julio de 2019



**VNiVERSiDAD
D SALAMANCA**

CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Sistemas dinámicos discretos y la ecuación logística

Trabajo de fin de grado

Autor: **Alejandro Gonzalo Fernández**

Tutor: **Luis Manuel Navas Vicente**

Firma del autor:

Firma del tutor:

Fdo: Alejandro Gonzalo Fernández

Fdo: Luis M. Navas Vicente

Salamanca, 5 de julio de 2019

Índice general

Introducción	1
1. Sistemas Dinámicos Discretos	3
1.1. Órbitas, puntos fijos y puntos periódicos	4
1.2. Atractor métrico	8
1.3. Estudio de estabilidad	10
1.3.1. La derivada Schwarziana	12
1.4. Teoría de la bifurcación	17
2. Caos	23
2.1. Dinámica topológica	23
2.2. Dependencia sensible de las condiciones iniciales	24
2.3. Transitividad topológica	25
2.4. Caos de Devaney	28
2.5. Entropía topológica	30
2.6. Dinámica simbólica	31
3. Conjugación topológica	34
3.1. Puntos bajo conjugación	35
3.2. Caos bajo conjugación	37
4. Teorema de Sharkovskii	40
5. La ecuación logística	47
5.1. Puntos fijos y periódicos	47
5.2. Bifurcaciones	48
5.3. La conjugación topológica y el caos	50
5.4. Diagrama de bifurcación	56
A. Código de las imágenes	57
Bibliografía	61

Introducción

Este trabajo es una revisión bibliográfica sobre los sistemas dinámicos discretos y considerando como ejemplo de estudio principal la ecuación logística:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

Esta ecuación fue planteada por Pierre-François Verhulst, un matemático belga en 1838. Es preciso entender el contexto histórico en el cual Verhulst vivió para así conocer como su intelecto desarrolló esta ecuación. Tras la independencia de Bélgica en 1830 y las influencias del malthusianismo en la sociedad, Verhulst decidió crear una ecuación que modelará el crecimiento de la sociedad belga. Reflexionó sobre como este crecimiento de la población parecía acorde a una suma geométrica, pero a su vez conllevaba factores negativos para sí mismo. Verhulst afirmaba por tanto que el crecimiento de una población debía tener un límite pues los recursos eran limitados. Entonces Verhulst propuso la fórmula cuadrática en la que se supone que el crecimiento de la población es proporcional a la población existente como a los recursos disponibles. Esta fórmula sería la denominada ecuación logística.

Curiosamente Verhulst no explicó a qué hacía referencia el término logístico. Hay varias teorías:

1. La palabra “logistique” en la Francia del siglo XIX hacía referencia al arte de la computación.
2. Tenía un significado en el ámbito militar que consistía en el cálculo de las provisiones para la población.

Posiblemente Verhulst la nombro según esta última teoría debido a las ideas malthusianas tras su ecuación. Finalmente, esta ecuación vería la luz tras ser publicada en 1838 en el artículo “Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement” en el “Correspondance Mathématique et Physique” [23].

Tras la muerte de Verhulst en 1849 la ecuación logística permanecería en el olvido hasta 1920 cuando Raymond Pearl, un biólogo, y Lowell Reed, un estadístico, formularían la misma ecuación sin saber que existía desde hace un siglo. Pearl y Reed no dedujeron la ecuación a partir de reflexiones acerca de la relación entre recursos y población, sino que parten de la idea de que el crecimiento de la población sigue una curva sigmoidea como podemos leer en su artículo “On the rate of growth of the population of the united states since 1790 and its mathematical representation” [15].

En la actualidad la ecuación logística ha encontrado nuevos campos de aplicación en la Física, la Biología, la Medicina, y la Economía [1].

Finalmente hablemos sobre la perspectiva desde la cual estudiaremos la ecuación logística en este trabajo, los sistemas dinámicos discretos.

El primer encuentro con los sistemas dinámicos lo tuvo Henri Poincaré en 1892 estudiando el Problema de los Tres Cuerpos. Años más tarde, en 1963, Edward N. Lorenz, un meteorólogo del MIT, estudiando un modelo acerca de la previsión meteorológica propiciaría los inicios de la Teoría del Caos al descubrir que sus soluciones dependían sensiblemente de las condiciones iniciales [14]. Este resultado más tarde se haría muy conocido como el Efecto Mariposa nombre debido al título de su presentación en 1972, “Predictability: Does the flap of a butterfly’s wings in Brazil set off a tornado in Texas?” [12]. Sin embargo, tendrían que pasar unos años desde este resultado hasta que en 1975 Tien-Yien Li y James Yorke presentaran su artículo “Period three implies chaos” [11] que daría nombre a este campo de estudio y atraería el interés hacia esta rama. Es curioso que el anterior artículo sea un corolario del teorema ya publicado por O. Sharkovskii “Coexistence of the cycles of a continuous mapping of the line into itself.” [18] en 1964, pero que era desconocido por los matemáticos no soviéticos. Un año más tarde del trabajo de T.Y. Li y J. Yorke, en 1976, el biólogo Robert May planteó estudiar la ecuación logística en su forma discreta “Simple mathematical models with very complicated dynamics” [13]. Estudiándola de esta forma podremos ver interesantes comportamientos relacionados con el caos y este será nuestro objetivo a lo largo de este trabajo que está estructurado de la siguiente manera:

- ◇ En el primer capítulo introduciremos al lector en las nociones básicas para el estudio de los Sistemas Dinámicos Discretos como son los puntos fijos, los puntos periódicos, su estabilidad y la teoría de la bifurcación.
- ◇ En el segundo capítulo veremos las propiedades necesarias para la definición de caos enunciada por Robert Devaney. También veremos que existen otras definiciones de caos y para finalizar este capítulo estudiaremos un ejemplo, la dinámica simbólica.
- ◇ En el tercer capítulo veremos la conjugación topológica y gracias a ella como dos funciones conjugadas comparten sus propiedades caóticas.
- ◇ En el cuarto capítulo demostraremos el Teorema de Sharkovskii y veremos también la demostración del teorema “Period three implies chaos”.
- ◇ En el quinto capítulo usaremos toda la teoría que hemos desarrollado en los capítulos anteriores para el estudio de la ecuación logística viendo sus puntos fijos, periódicos, estabilidad, bifurcaciones, conjugaciones y su comportamiento caótico.
- ◇ Por último, el trabajo consta de un anexo en el cual se incluye el código en Python necesario para realizar las imágenes que se incluyen en el trabajo.

Capítulo 1

Sistemas Dinámicos Discretos

En este primer capítulo introduciremos al lector en las nociones básicas para el estudio de los Sistemas Dinámicos Discretos. Se darán las definiciones de sistemas dinámicos, puntos fijos y puntos periódicos. Posteriormente se definirá el concepto de conjunto ω -límite con el objetivo de poder definir a partir de este el concepto de atractor métrico. A continuación, estudiaremos la estabilidad de los puntos fijos y puntos periódicos. Finalizaremos el capítulo con la Teoría de la Bifurcación. Para la mayoría de estos conceptos tendremos ejemplos para que el lector los comprenda más fácilmente. Todos los siguientes resultados pueden encontrarse en numerosos libros, por ejemplo, en Devaney [5], Holmgren [8], Layek [10] o Barreira [4].

Comencemos como no puede ser de otra manera definiendo sistema dinámico:

Definición 1.0.1. *Un sistema dinámico consta de \mathbb{X} un espacio no vacío, \mathbb{T} un monoide¹, y una aplicación:*

$$\begin{aligned}\Phi : \mathbb{T} \times \mathbb{X} &\rightarrow \mathbb{X} \\ (t, x) &\mapsto \Phi(t, x) := t \cdot x\end{aligned}$$

La aplicación debe satisfacer:

1. $\Phi(0, x) = x$ para todo $x \in \mathbb{X}$.
2. $\Phi(s, \Phi(t, x)) = \Phi(st, x)$ para todo $x \in \mathbb{X}$ y $s, t \in \mathbb{T}$.

Como ya se ha comentado en la introducción nos restringiremos al estudio de los sistemas dinámicos discretos en este trabajo. Veamos su definición:

Definición 1.0.2. *Se llama sistema dinámico discreto si tomamos $\mathbb{T} = (\mathbb{N}, +, 0)$. En tal caso, si $f(x) = \Phi(1, x)$, la condición (2) implica por inducción que para todo $n \in \mathbb{N}$,*

¹Recordamos que un monoide es un conjunto \mathbb{T} con una operación binaria asociativa con un elemento neutro. La operación se suele denotar como yuxtaposición st de $s, t \in \mathbb{T}$. Por ejemplo, $(\mathbb{N}, +, 0)$ con la suma habitual y el 0.

$\Phi(n, x) = \Phi(1 + \dots + 1, x) = (f \circ \dots \circ f)(x) = f^n(x)$, siendo $f^n(x)$ la iteración n veces de f . En particular $f^0(x) = x$.

Observación 1.0.1. Si f es biyectiva, podemos considerar $\mathbb{T} = (\mathbb{Z}, +, 0)$. También siendo f no biyectiva se podrían considerar las anti-imágenes.

En lo sucesivo consideraremos que estamos trabajando con sistemas dinámicos discretos. Cuando trabajemos con \mathbb{X} espacio topológico supondremos que f es continua y si además es biyectiva, tomaremos su inversa continua, es decir, f homeomorfismo.

1.1. Órbitas, puntos fijos y puntos periódicos

Veamos ahora una de las definiciones principales:

Definición 1.1.1. Se define la órbita positiva ² de $x \in \mathbb{X}$ sobre f como la sucesión de puntos $\mathbb{O}^+(x, f) = \{x, f(x), f(f(x)), \dots, f^n(x), \dots\}$ con $n \in \mathbb{N}$.

Si tenemos f homeomorfismo podemos definir la órbita negativa ¹, denotada $\mathbb{O}^-(x, f)$, como la sucesión de puntos $\{x, f^{-1}(x), f^{-2}(x), \dots, f^{-n}(x), \dots\}$ con $n \in \mathbb{N}$. En este caso podemos considerar la órbita de x sobre f :

$$\mathbb{O}(x, f) := \{\dots, f^{-n}(x), \dots, f^{-1}(x), x, f(x), f^2(x), \dots, f^n(x), \dots\} = \{f^k(x)\}_{k=-\infty}^{\infty}$$

Ejemplo 1.1.1. Sea $f(x) = x^2$ sobre \mathbb{N} . Tendremos que $\mathbb{O}^+(x, f) = \{x, x^2, x^4, x^8, \dots\}$. Si consideramos $x = 1$, tenemos que $\mathbb{O}^+(1, f) = \{1, 1, 1, \dots\}$.

Observación 1.1.1. En la gran mayoría de libros de referencia acerca de este tema se habla de las órbitas como conjuntos de puntos, pero entonces tendríamos problemas pues no podríamos observar la dinámica de las órbitas.

Por ejemplo, consideramos la órbita $O_1 = \{1, -1, -1, \dots\}$ que acaba en un punto fijo -1 y la órbita $O_2 = \{-1, 1, -1, 1, \dots\}$ que es una órbita que oscila entre 1 y -1 . Como conjuntos de puntos son exactamente iguales, $\{1, -1\}$, pero como sucesiones no. Por ello cuando queramos tratar las órbitas como conjuntos lo diremos expresamente.

Recordemos una definición que puede ser conocida por el lector que haya cursado Análisis Numérico:

Definición 1.1.2. Se dice que $x \in \mathbb{X}$ es un punto fijo de f si $f(x) = x$. El conjunto de puntos fijos de f lo denotaremos como $Fix(f)$. La idea de un punto fijo es un punto que atrapa a la función y su órbita no vuelve a salir de él.

²Hay distintos términos para esta definición. Se puede encontrar como órbita futura (pasada) u órbita hacia delante (hacia atrás). Es más común en el ámbito de la física el término de órbita futura (pasada) por ser sistemas dinámicos en los que transcurre el tiempo. No existe una notación estándar por lo cual hemos elegido la de Devaney [5].

Ejemplo 1.1.2. Sea $f(x) = x^2$ sobre \mathbb{N} . Veamos que las soluciones de $x^2 = x$ son $x_1 = 0$ y $x_2 = 1$, los puntos fijos. Luego si, por ejemplo, consideramos $x_1 = 0$ es trivial observar que $f(0) = 0$.

La definición de punto fijo puede ser ampliada con la siguiente:

Definición 1.1.3. Sea f una función y p un punto fijo de f . Diremos que $x \in \mathbb{X}$ es un punto fijo eventual de f si existe $n > 0$ tal que $f^n(x) = p$ con $f^m(x) \neq p$, $0 \leq m < n$. Es decir, para todo n suficientemente grande el punto x “cae” en el punto fijo p .

Ejemplo 1.1.3. Veamos un ejemplo usando la función $f(x) = x^2 - 2$ sobre \mathbb{Z} . Resolvemos $x^2 - x - 2 = 0$ y tenemos que sus puntos fijos son $x_1 = -1$ y $x_2 = 2$. Luego para tener un punto fijo eventual necesitamos considerar un punto que al iterar f sobre él acabe en alguno de los anteriores puntos fijos. Por ejemplo, podemos considerar $x = 1$ pues tenemos que $f(1) = -1$ y la $\mathbb{O}^+(1, f) = \{1, -1, -1, \dots\}$. Luego $x = 1$ es un punto fijo eventual. Podemos verlo en la Figura 1.1.

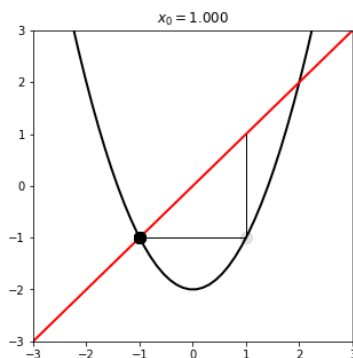


Figura 1.1: $f(x) = x^2 - 2$ y la $\mathbb{O}^+(1, f)$

Observación 1.1.2. La anterior figura ha utilizado el llamado diagrama de telaraña que consiste en:

- Empezamos en la coordenada x de x_0 . Trazamos una recta de (x_0, x_0) a el punto $(x_0, f(x_0))$. En nuestro caso vemos la recta de $(1, 1)$ a $(1, -1)$.
- Trazamos una recta horizontal desde este punto a $(f(x_0), f(x_0))$, en nuestro caso $(-1, -1)$.
- Ahora verticalmente hacia $(f(x_0), f^2(x_0))$ y repetir desde el segundo paso tantas iteraciones como sean necesarias. Nosotros como ya hemos llegado a un punto fijo no necesitamos más iteraciones.

A continuación, enunciaremos un teorema conocido que nos será posteriormente útil. Seguiremos la siguiente referencia, Teschl [21] :

Teorema 1.1.1 (Teorema del punto fijo de Banach o de la aplicación contractiva). Sea (X, d) un espacio métrico completo y sea $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$. Decimos que f es contractiva si

existe una constante λ con $0 \leq \lambda < 1$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y)$. Si f es contractiva, entonces tiene un único punto fijo en \mathbb{X} . Además, la órbita de cualquier punto $x \in \mathbb{X}$ bajo f converge al punto fijo.

Demostración. Por inducción se comprueba fácilmente que

$$d(f^n(x), f^{n-1}(x)) \leq \lambda^{n-1} d(f(x), x).$$

Entonces dado $x_0 \in X$ y m, n naturales con $m \leq n$, tenemos que:

$$\begin{aligned} d(f^n(x_0), f^m(x_0)) &\leq d(f^n(x_0), f^{n-1}(x_0)) + \cdots + d(f^{m+1}(x_0), f^m(x_0)) \\ &\leq (\lambda^{n-1} + \cdots + \lambda^m) d(f(x_0), x_0) < \frac{\lambda^m}{1-\lambda} d(f(x_0), x_0) \end{aligned}$$

que tiende a 0 cuando $m \rightarrow \infty$, es decir la órbita es una sucesión de Cauchy y como X es completo, converge a algún punto $a \in X$. Al ser f contractiva, en particular es continua, luego $f^n(x_0) \rightarrow a$ implica que $f^{n+1}(x_0) \rightarrow f(a)$, con lo cual deducimos que $f(a) = a$, luego es punto fijo. Si hubiera otro punto fijo b , la desigualdad $d(a, b) = d(f(a), f(b)) \leq \lambda d(a, b)$ llevaría a contradicción, luego es único. \square

Lema 1.1.1. Sea $f : I \rightarrow I$ una función continua de algún intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Si $J \subset I$ es un intervalo compacto tal que $J \subset f(J)$ entonces f tiene un punto fijo en J .

Demostración. Sea $J = [a, b]$. Como $J \subset f(J)$ existen $c, d \in J$ tales que $f(c) = a \leq c$ y $f(d) = b \geq d$ Entonces $f(c) - c \leq 0$ y $f(d) - d \geq 0$, tenemos que la función continua $x \rightarrow f(x) - x$ tiene un cero en J . \square

Ahora veremos la definición de punto periódico:

Definición 1.1.4. Sea $x \in \mathbb{X}$, diremos que es un punto periódico de período n de f , lo denominaremos por brevedad n -periódico, si $f^n(x) = x$. El n menor positivo para el cual $f^n(x) = x$ se conoce como el período principal o período mínimo o período a secas de x . El conjunto de todas las iteraciones de un punto periódico forma una órbita periódica. Es decir, sea x un punto n -periódico de f entonces:

$$\mathbb{O}^+(x, f) := \{x, f(x), f^2(x), \dots, f^{n-1}(x), x, f(x), \dots\}$$

El conjunto de puntos n -periódicos de f lo denotaremos como $Per_n(f)$. Llamaremos $Per(f) = \bigcup_{i=1} Per_i(f)$ al conjunto de puntos periódicos de f .

Observación 1.1.3. Los puntos fijos son los puntos 1-periódicos. En general, si x es un punto n -periódico de f , entonces su período mínimo m divide a n , pues si $n = m \cdot c + r$ con $0 \leq r < m$ y $c \geq 0$ entonces

$$x = f^n(x) = f^{m \cdot c + r}(x) = f^r(f^{m \cdot c}(x)) = f^r(x)$$

luego por minimalidad debe ser $r = 0$, o sea $n = m \cdot c$.

Observamos como todos los puntos pares son atraídos a la órbita del 2 y todos los impares a la del 1. Las órbitas que hemos calculado las podemos observar en la Figura 1.3.

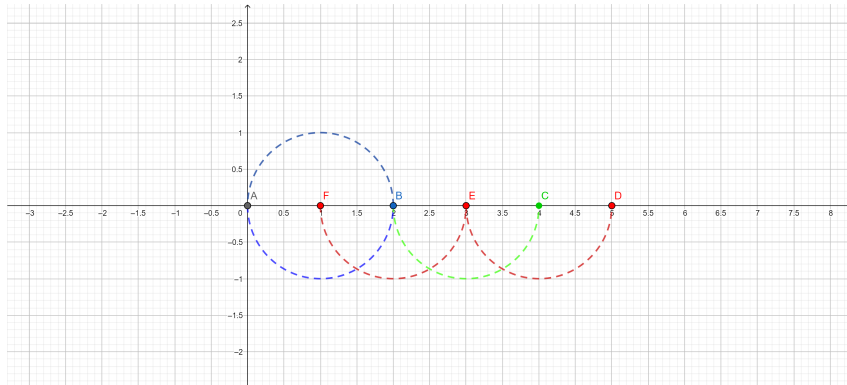


Figura 1.3: $\mathbb{O}^+(0, f)$, $\mathbb{O}^+(4, f)$ y $\mathbb{O}^+(5, f)$

1.2. Atractor métrico

En esta sección veremos la definición de los conjuntos ω -límite y como a partir de ella primero definiremos cuenca de atracción y posteriormente atractor métrico. Seguiremos el artículo de H. Thunberg [22].

Definición 1.2.1. Sea un punto $p \in \mathbb{X}$. El comportamiento de la órbita de p se estudia por el conjunto ω -límite de p , que se denota $\omega(p, f)$. Se define como:

$$\omega(p, f) = \{x \in \mathbb{X} \mid \exists \{n_j\}_{j=1}^{\infty} \text{ tal que } x = \lim_{j \rightarrow \infty} f^{n_j}(p)\}$$

Es decir, son los x tales que atraen a la órbita de p .

Observación 1.2.1. Se puede definir análogamente un conjunto llamado $\alpha(p, f)$ considerando f^{-1} si esta fuera posible.

También encontramos la siguiente definición adaptada para puntos periódicos en Holmgren [8] pág. 35 :

Definición 1.2.2. Sea f una función y x un punto n -periódico de f . Entonces p es ω -asintótico a x si $\lim_{k \rightarrow \infty} f^{kn}(p) = x$. El conjunto de estos puntos ω -asintóticos a x lo denotaremos $\mathbb{W}(x, f)$.

Proposición 1.2.1. Sean p_1, p_2 dos puntos periódicos distintos, y que no están en la misma órbita periódica, entonces $\mathbb{W}(p_1, f) \cap \mathbb{W}(p_2, f) = \emptyset$.

Demostración. Sea una función f con los puntos periódicos p_1 y p_2 de períodos k_1 y k_2 , respectivamente. Haremos la demostración por reducción al absurdo. Supongamos que $\mathbb{W}(p_1, f) \cap \mathbb{W}(p_2, f) \neq \emptyset$.

Sea $x \in \mathbb{W}(p_1, f) \cap \mathbb{W}(p_2, f)$. Entonces para cada ϵ existe n_1 y n_2 tales que $n \geq N_1 \Rightarrow |p_1 - f^{nk_1}(x)| < \frac{\epsilon}{2}$ y $n \geq N_2 \Rightarrow |p_2 - f^{nk_2}(x)| < \frac{\epsilon}{2}$. Sea $M = \text{Max}\{N_1, N_2\}$, entonces $n \geq M$ implica ambos. Usando la Desigualdad Triangular cuando $n \geq M$:

$$|p_1 - p_2| = |p_1 - f^{nk_1k_2}(x) + f^{nk_1k_2}(x) - p_2| \leq |p_1 - f^{nk_1k_2}(x)| + |f^{nk_1k_2}(x) - p_2| < \epsilon$$

Luego llegamos a contradicción. □

Ejemplo 1.2.1. Consideremos nuevamente el Ejemplo 1.1.6, cuya función era $f(x) = |x - 2|$ sobre \mathbb{Z} . Tenemos que $\mathbb{W}(2, f) = 2\mathbb{Z}$, es decir, todos los pares y el cero. Por otro lado, tenemos que $\mathbb{W}(1, f) = 2\mathbb{Z} + 1$, todos los impares. Es obvio que la intersección de estos dos conjuntos es el vacío y además su unión es el total, luego no hay más puntos periódicos en órbitas distintas.

Definición 1.2.3. Sea f una aplicación. Diremos que un conjunto $A \subset \mathbb{X}$ es invariante bajo f si para cada $x \in A$, $f^n(x) \in A \forall n$.

Definición 1.2.4. El conjunto A se dice que es invariante si $f(A) = A$. Un subconjunto A de \mathbb{X} será positivamente invariante si $f(A) \subset A$, si tenemos la igualdad también se puede llamar positivamente invariante estricto.

Observación 1.2.2. El conjunto de puntos periódicos de f siempre será un conjunto invariante.

Proposición 1.2.2. Si A es positivamente invariante, entonces su cierre topológico, \overline{A} , también es invariante.

Demostración. Tenemos por ser A positivamente invariante que $f(A) \subset A$, entonces $f(\overline{A}) \subset \overline{A}$. Por la continuidad de f tenemos que $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ y por lo anterior finalizamos con $f(\overline{A}) \subset \overline{A}$. □

Definición 1.2.5. Sea A un conjunto invariante de f , llamaremos cuenca de atracción de A :

$$\mathbb{B}(A) = \{p \in \mathbb{X} \mid \omega(p, f) \subset A\}$$

Es decir, son todos los puntos $x \in \mathbb{X}$ que atraen a la órbita de p y están contenidos en A .

Definición 1.2.6. Un conjunto invariante A es llamado atractor métrico si $\mathbb{B}(A)$ satisface las siguientes condiciones:

1. $\mathbb{B}(A)$ tiene medida positiva de Lebesgue.

2. Si A' es otro conjunto invariante, tal que $A' \subsetneq A$, entonces $\mathbb{B}(A) - \mathbb{B}(A')$ tiene medida positiva.

1.3. Estudio de estabilidad

En esta sección veremos cómo se comportan los puntos fijos y periódicos con los puntos de sus entornos.

Definición 1.3.1. Sea f una función de clase C^1 y p un punto fijo de f . Se define el multiplicador de p en f como $\lambda(p) = f'(p)$. Un punto fijo será hiperbólico si $|\lambda(p)| \neq 1$. Lo llamaremos estable si $|\lambda(p)| < 1$ e inestable si $|\lambda(p)| > 1$. Los puntos tales que $|\lambda(p)| = 1$ se denominan no-hiperbólicos o neutrales.

A continuación veremos el significado de esta definición, pero antes recordamos el Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial en una variable, de sobra conocido y que necesitamos en el siguiente resultado.

Teorema 1.3.1 (Teorema del Valor Medio de Lagrange). Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y derivable en (a, b) . Entonces hay un $\eta \in (a, b)$ tal que $f(b) - f(a) = f'(\eta)(b - a)$.

Teorema 1.3.2 (Teorema de estabilidad). Sea f una función de clase C^1 y p un punto fijo hiperbólico de f . Si p es estable entonces hay un entorno de p contenido en $\mathbb{W}(p, f)$, que en este caso significa que los iterados de puntos cercanos convergen a p , y si es inestable entonces hay un entorno de p donde todos los puntos que no son p abandonan el entorno iterando f .

Demostración. Sean f y p como en el enunciado. Supongamos el primer caso, $|f'(p)| < 1$. Por continuidad de f' existen $\lambda < 1$ y $\delta > 0$ tales que $|f'(x)| < \lambda$ para los $x \in K_p = [p - \delta, p + \delta]$. El Teorema del Valor Medio implica que $f(K_p) \subseteq K_p$ ya que para $x \in K_p$ existe $c \in [p, x] \subseteq K_p$ con

$$|f(x) - p| = |f(x) - f(p)| = |f'(c)||x - p| < \lambda|x - p| < |x - p| < \delta$$

Por tanto se puede aplicar el Teorema de la Aplicación Contractiva (Teorema 1.1.1) a f sobre K_p y concluir que p es el único punto fijo y los iterados de f sobre K_p convergen a él.

En el caso de $|f'(p)| > 1$, análogamente hay un $\lambda > 1$ con $|f'(x)| > \lambda$ para $x \in K_p$ y entonces $|f(x) - p| > \lambda|x - p|$, luego si los iterados hasta $f^n(x)$ han permanecido en K_p sería $|f^n(x) - p| > \lambda^n|x - p|$, como $\lambda^n \rightarrow \infty$ esto implica que si $x \neq p$ eventualmente algún iterado abandona K_p y repitiendo este razonamiento habrá infinitos iterados fuera de K_p . \square

Ejemplo 1.3.1. Considerando nuevamente la función del Ejemplo 1.1.2, $f(x) = x^2$ sobre \mathbb{N} . Tiene dos puntos fijos, $x = 0$ y $x = 1$. Calculemos sus multiplicadores:

- $\lambda(0) = f'(0) = 2 \cdot 0 = 0 < 1$. Tenemos un punto fijo hiperbólico estable.
- $\lambda(1) = f'(1) = 2 \cdot 1 = 2 > 1$. Tenemos un punto fijo hiperbólico inestable.

Ahora veámoslo en la órbita de puntos cercanos a ellos, por ejemplo $x = 0.3$ y $x = 1.3$. Tenemos que $\mathbb{O}^+(0.3, f) = \{0.3, 0.09, 0.081, \dots\}$ y $\mathbb{O}^+(1.3, f) = \{1.3, 1.69, 2.8561, 8.15731, \dots\}$ donde claramente la primera órbita converge a 0 y la segunda se va a infinito. Podemos verlo en la Figura 1.4.

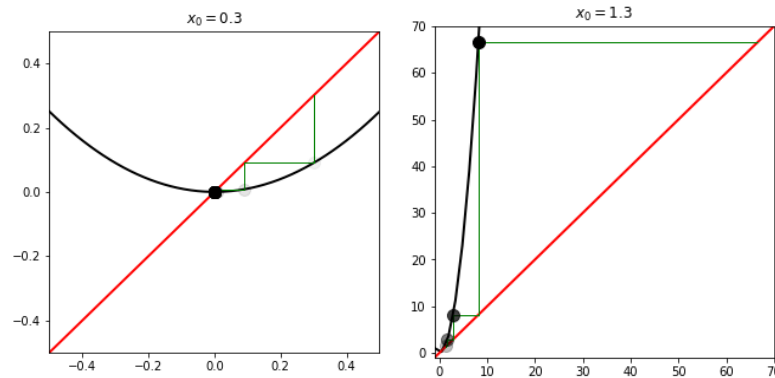


Figura 1.4: Estabilidad de los puntos fijos de $f(x) = x^2$

Definición 1.3.2. Sea f de clase C^1 . Se define el multiplicador de un punto n -periódico x como $\lambda(x) = (f^n)'(x)$.

Lema 1.3.1. La derivada del iterado n -ésimo de f es

$$(f^n)'(x) = \prod_{i=0}^{n-1} f'(f^i(x)) \quad (1.1)$$

Demostración. Por inducción usando la regla de la cadena. □

Definición 1.3.3. Sea f una función de clase C^1 y p un punto n -periódico de f . Diremos que es hiperbólico si $|\lambda(p)| \neq 1$, si es $|\lambda(p)| = 1$ entonces p es un punto periódico no-hiperbólico o neutral. También tenemos que si $|\lambda(p)| > 1$ son inestables y si $|\lambda(p)| < 1$ estables.

Teorema 1.3.3. Sea f una función de clase C^1 y p un punto n -periódico hiperbólico de f . Si p es estable entonces hay un entorno de p contenido en $\mathbb{W}(p, f)$, es decir, los iterados de puntos cercanos convergen a p y si es inestable entonces hay un entorno de p donde todos los puntos que no son p abandonan el entorno iterando f^n .

Demostración. La idea de esta demostración es análoga al caso de puntos fijos, Teorema 1.3.2, pues un punto n -periódico será estable si es un punto fijo estable de f^n . Análogamente para inestable. □

Definición 1.3.4. Sea una órbita de un punto n -periódico $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}$. Se dice que la órbita es estable si cada x_i es un punto fijo estable de f^n , o de otra manera, si $|f'(x_1)f'(x_2) \cdots f'(x_{n-1})| < 1$. Análogamente se puede definir para inestable.

Observación 1.3.1. Los puntos fijos estables y los puntos periódicos estables son atractores métricos.

1.3.1. La derivada Schwarziana

Ahora estudiaremos la derivada Schwarziana para poder observar la estabilidad de los puntos no-hiperbólicos. El concepto de la derivada Schwarziana fue introducido por el matemático H. Schwarz para el estudio del análisis complejo, concretamente las transformaciones de Möbius. En 1978, D. Singer se le ocurrió usarla en el estudio de los sistemas dinámicos. Seguiremos como referencias Singer [19], Sternberg [20] pág. 67 y Devaney [5] pág. 69.

Definición 1.3.5. La derivada Schwarziana de una función f de clase C^3 está definida por:

$$\mathbb{S}f(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2$$

Veamos ahora que la derivada Schwarziana negativa se mantiene bajo la composición.

Proposición 1.3.1. Sean f y g funciones de clase C^3 con $\mathbb{S}f(x) < 0$ y $\mathbb{S}g(x) < 0$. Entonces tenemos que $\mathbb{S}(f \circ g)(x) < 0$.

Demostración. Aplicando la regla de la cadena tenemos que:

$$\begin{aligned} (f \circ g)'(x) &= f'(g(x)) \cdot (g'(x)) \\ (f \circ g)''(x) &= f''(g(x)) \cdot (g'(x))^2 + f'(g(x)) \cdot g''(x) \\ (f \circ g)'''(x) &= f'''(g(x)) \cdot (g'(x))^3 + 3f''(g(x)) \cdot g''(x) \cdot g'(x) + f'(g(x)) \cdot g'''(x) \end{aligned}$$

Sustituyendo en la derivada Schwarziana de $f \circ g$:

$$\begin{aligned} \mathbb{S}(f \circ g)(x) &= \frac{(f \circ g)'''(x)}{(f \circ g)'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{(f \circ g)''(x)}{(f \circ g)'(x)} \right)^2 \\ &= \frac{f'''(g(x)) \cdot (g'(x))^3 + 3f''(g(x)) \cdot g''(x) \cdot g'(x) + f'(g(x)) \cdot g'''(x)}{f'(g(x)) \cdot g'(x)} \\ &\quad - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(g(x)) \cdot (g'(x))^2 + f'(g(x)) \cdot g''(x)}{f'(g(x)) \cdot g'(x)} \right)^2 \\ &= \frac{f'''(g(x)) \cdot (g'(x))^2}{f'(g(x))} + \frac{3f''(g(x)) \cdot g''(x)}{f'(g(x))} + \frac{g'''(x)}{g'(x)} \\ &\quad - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(g(x)) \cdot g'(x)}{f'(g(x))} + \frac{g''(x)}{g'(x)} \right)^2 \end{aligned}$$

Sacamos factor común y proseguimos.

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{f'''(g(x))}{f'(g(x))} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(g(x))}{f'(g(x))} \right)^2 \right) (g'(x))^2 + \frac{g'''(x)}{g'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{g''(x)}{g'(x)} \right)^2 \\
&= \mathbb{S}f(g(x)) \cdot (g'(x))^2 + \mathbb{S}g(x) < 0 \quad \square
\end{aligned}$$

Corolario 1.3.1. *Sea f de clase C^3 . Si $\mathbb{S}f(x) < 0$, entonces $\mathbb{S}f^n(x) < 0$.*

Proposición 1.3.2. *Sea $f(x)$ un polinomio. Si todas las raíces de $f'(x)$ son distintas y reales entonces $\mathbb{S}f(x) < 0$.*

Demostración. Supongamos que $f'(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i)$ donde cada x_i es real y distinta. Tenemos que la derivada de segundo orden es:

$$\begin{aligned}
f''(x) &= (x - x_2)\dots(x - x_n) + (x - x_1)(x - x_3)\dots(x - x_n) + \dots + (x - x_1)\dots(x - x_{n-1}) \\
&= \frac{f'(x)}{(x - x_1)} + \dots + \frac{f'(x)}{(x - x_n)} = \sum_{i=1}^n \frac{f'(x)}{(x - x_i)}
\end{aligned}$$

De manera análoga se puede hallar que $f'''(x) = \sum_{\substack{j,i=1 \\ j \neq i}}^n \frac{f'(x)}{(x-x_i)(x-x_j)}$. Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{S}f(x) &= \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2 = \sum_{\substack{j,i=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{(x - x_i)(x - x_j)} - \frac{3}{2} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x - x_i} \right)^2 \\
&= \left(\sum_{\substack{j,i=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{(x - x_i)(x - x_j)} - \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x - x_i} \right)^2 \right) - \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x - x_i} \right)^2 \\
&= - \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{x - x_i} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x - x_i} \right)^2 < 0 \quad \square
\end{aligned}$$

A continuación, veremos como la derivada Schwarziana nos da información de las órbitas de f .

Lema 1.3.2. *Sea f de clase C^3 con $\mathbb{S}f(x) < 0$ donde $f'(x) \neq 0$, entonces f' no puede tener un valor mínimo local estrictamente positivo o un valor máximo local estrictamente negativo.*

Demostración. Suponemos que x_0 es un punto crítico de $f'(x)$ (recordemos que $x \in X$ es un punto crítico de f si $f'(x) = 0$), luego $f''(x_0) = 0$. Si $f'(x_0) = 0$ entonces el valor ya

no es estrictamente positivo ni negativo, luego podemos suponer que $f'(x_0) \neq 0$. Tenemos por hipótesis que

$$\mathbb{S}f(x_0) = \frac{f'''(x_0)}{f'(x_0)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(x_0)}{f'(x_0)} \right)^2 = \frac{f'''(x_0)}{f'(x_0)} < 0,$$

luego $f'''(x_0)$ y $f'(x_0)$ tienen signos opuestos con $f'''(x_0) \neq 0$. Por el criterio de la derivada segunda aplicado a $f'(x)$, si $f'''(x_0) > 0$, entonces x_0 es un mínimo local con $f'(x_0) < 0$. Análogamente si $f'''(x_0) < 0$, x_0 es un máximo local con $f'(x_0) > 0$. \square

Recordemos el teorema de Rolle del Cálculo, que necesitaremos en el siguiente lema:

Teorema 1.3.4 (Teorema de Rolle). *Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, derivable en (a, b) y tal que $f(a) = f(b)$. Entonces, hay un $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Lema 1.3.3. *Sea f de clase C^3 . Si f tiene una cantidad finita de puntos críticos, entonces f^n también tiene sólo un número finito de puntos críticos y la ecuación $f^n(x) = y$ un número finito de soluciones para un y dado.*

Demostración. Por el teorema de Rolle, entre cada par de soluciones de $f(x_0) = y$ debe haber un punto crítico, luego como sólo hay un número finito de puntos críticos, también sólo hay un número finito de soluciones.

Veamos por inducción que para cualquier $n \geq 1$ se cumple el enunciado. Con $n = 1$ ya está visto. Usaremos la fórmula (1.1) anteriormente vista

$$(f^n)'(x_0) = \prod_{i=0}^{n-1} f'(f^i(x_0)) = 0.$$

Se prosigue por inducción. La fórmula de la derivada dice que x_0 es punto crítico de f^n si y sólo si alguno de $x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)$ es punto crítico de f . La hipótesis inductiva dice que cada ecuación $f^k(x_0) = c$ con c crítico y $k < n$ sólo tiene un número finito de soluciones. Esto demuestra que f^n tiene un número finito de puntos críticos, y el mismo razonamiento con el teorema de Rolle implica que $f^n(x) = y$ tiene un número finito de soluciones. \square

Lema 1.3.4. *Sea f de clase C^3 . Si f tiene una cantidad finita de puntos críticos y $\mathbb{S}f(x) < 0$, entonces f tiene una cantidad finita de puntos n -periódicos para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Sea $g = f^n$. Tenemos que los puntos n -periódicos de f son puntos fijos de g . Por el Corolario 1.3.1 anterior tenemos que $\mathbb{S}g < 0$. Suponemos que g tiene infinitos puntos fijos. Por el Teorema de Rolle aplicado a la diferencia $g(x) - x$, hay infinitos puntos para los cuales $g'(x) = 1$. Veamos que entre cada tres puntos sucesivos para los cuales $g'(x) = 1$ debe haber un punto donde $g'(x) < 1$. Evidentemente $g'(x) \neq 1$ para todo un intervalo porque tenemos que $\mathbb{S}g < 0$. Además, usando el Lema 1.3.2 $g'(x)$, no puede tener un mínimo local positivo o un máximo local negativo, por lo que debe haber puntos donde

$g'(x) \leq 0$ y consecuentemente por el teorema de Bolzano, hay puntos donde $g'(x) = 0$. Esto implica que $g = f^n$ tiene infinitos puntos críticos lo cual contradice el Lema 1.3.3 con lo que hemos completado la demostración. \square

Lema 1.3.5. *Sean $a < b < c$ puntos fijos de f . Si $f'(b) \leq 1$ entonces f tiene un punto crítico en (a, c) .*

Demostración. Observemos que $g(x) - x$ se anula en a y b luego por el Teorema del Valor Medio 1.3.1 tenemos que existe d con $f'(d) = 1$. De manera análoga existe $e \in (b, c)$ con $f'(e) = 1$. Si $f'(b) \leq 1$ entonces f tiene un mínimo relativo en (d, e) que debe ser negativo por el Lema 1.3.2. Pero tenemos que $f'(d) = f'(e) = 1 > 0$ luego debe haber un punto donde en (d, e) en el que $f' = 0$, es decir, punto crítico. \square

Teorema 1.3.5 (Teorema de Singer). *Sea f de clase C^3 con $\mathbb{S}f(x) < 0$. Si f tiene n puntos críticos entonces f tiene como máximo $n + 2$ órbitas periódicas estables.*

Demostración. Sea p un punto n -periódico estable para f . Sea $\mathbb{U}(p)$ el máximo intervalo en el cual todos los puntos tienden asintóticamente a p bajo f^n . $\mathbb{V}(p)$ es la componente conexa de $\{x \mid f^{nj}(x) \rightarrow p \text{ si } j \rightarrow \infty\}$ que contiene a p . Existe un entorno de p , U_p que es aplicado a si mismo por f y está contenido en $\mathbb{V}(p)$. De aquí tenemos que $\mathbb{V}(p) = \bigcup_k f^{-k}(U_p)$ luego $\mathbb{V}(p)$ es abierto y $f(\mathbb{V}(p)) \subset \mathbb{V}(p)$ por maximalidad.

Supongamos, que p tiene período 1, luego es un punto fijo. Entonces como $\mathbb{V}(p)$ es maximal, luego f preserva los extremos de $\mathbb{V}(p) = (a, b)$, pues no pueden entrar dentro de $\mathbb{V}(p)$. En el caso finito tenemos tres posibilidades:

1. $f(a) = a, f(b) = b$.
2. $f(a) = b, f(b) = a$.
3. $f(a) = f(b) = a$ o $f(a) = f(b) = b$.

Veamos que ocurre en cada una de ellas:

1. Tenemos por el Lema 1.3.5 que hay un punto crítico que es atraído hacia el punto fijo.
2. En el segundo caso, consideramos $g(x) = f^2(x)$. El punto fijo p sigue siendo estable para g y $\mathbb{V}(p) = (a, b)$ bajo g . Tenemos además, que $\mathbb{S}g(x) < 0$ por el Corolario 1.3.1. Por la definición de g tenemos que $g(a) = a$ y $g(b) = b$ luego volvemos a estar en el caso 1 por lo que g debe tener un punto crítico, llamémoslo y_0 . Entonces $g'(y_0) = f'(f(y_0)) \cdot f'(y_0)$, luego tenemos que y_0 o $f(y_0)$ es un punto crítico de f en (a, b) .
3. En el tercer caso, f debe tener un mínimo o un máximo entre a y b por el Teorema del Valor Medio 1.3.1 luego también hay un punto crítico en este caso en (a, b) .

Dado que un punto solo puede ser atraído hacia una órbita como vimos en la Proposición 1.2.1, se tiene que si hay n puntos críticos, hay como mucho $n + 2$ órbitas estables.

Las dos adicionales vienen de que puede haber intervalos de la forma $[A, r)$ o $(l, B]$ con $A \geq -\infty$ y $B \leq \infty$ que contengan un punto fijo estable cada uno.

Si p es periódico, los mismos argumentos nos dan un punto crítico para f^n en $\mathbb{U}(p)$. Un punto de la órbita de este punto crítico debe ser un punto crítico de f por la regla de la cadena. \square

Definición 1.3.6. *Sea p un punto fijo no-hiperbólico de f , es decir, con $|f'(p)| = 1$. Entonces tenemos los siguientes tres casos:*

1. Si $f''(p) \neq 0$ entonces p es semi-estable.
2. Si $f''(p) = 0$ y $f'''(p) < 0$ entonces p es asintóticamente estable.
3. Si $f''(p) = 0$ y $f'''(p) > 0$ entonces p es inestable.

Teorema 1.3.6. *Sea p un punto fijo no-hiperbólico de f con $f'(p) = -1$ y siendo f de clase C^3 . Entonces:*

1. Si $\mathbb{S}f(p) < 0$, p es asintóticamente estable.
2. Si $\mathbb{S}f(p) > 0$, p es inestable.

Demostración. Consideramos $h(x) = f^2(x)$. Tenemos que $h(p) = f^2(p) = p$. Consideremos su derivada Schwarziana y sus derivadas hasta el tercer orden:

$$\begin{aligned} h'(p) &= f'(f(p)) \cdot f'(p) = f'(p)^2 = (-1)^2 = 1 \\ h''(p) &= f''(f(p)) \cdot f'(p)^2 + f'(f(p)) \cdot f''(p) = f''(p) \cdot (-1)^2 + (-1) \cdot f''(p) = 0 \\ h'''(p) &= f'''(f(p)) \cdot f'(p)^3 + 3f''(f(p)) \cdot f'(p) \cdot f''(p) + f'(f(p)) \cdot f'''(p) \\ &= f'''(p) \cdot (-1)^3 + 3f''(p) \cdot (-1) \cdot f''(p) + (-1) \cdot f'''(p) \\ &= -2f'''(p) - 3f''(p)^2 = 2 \cdot \mathbb{S}f(p) \\ \mathbb{S}f(p) &= \frac{f'''(p)}{-1} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(p)}{-1} \right)^2 = -f'''(p) - \frac{3}{2}f''(p)^2 \\ \mathbb{S}h(p) &= \frac{h'''(p)}{h'(p)} - \frac{3}{2} \left(\frac{h''(p)}{h'(p)} \right)^2 = h'''(p) = 2 \mathbb{S}f(p) \end{aligned}$$

Tenemos que p es un punto fijo no-hiperbólico de h con $h'(p) = 1$ y $h''(p) = 0$.

1. Si suponemos que $\mathbb{S}f(p) < 0$ entonces $h'''(p) < 0$. Tenemos entonces que p es un punto fijo asintóticamente estable de h y por tanto de f .
2. Si suponemos que $\mathbb{S}f(p) > 0$ entonces $h'''(p) > 0$. Tenemos entonces que p es un punto fijo inestable de h y por tanto de f .

\square

Ejemplo 1.3.2. *Sea $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 1$. Tenemos que $x_1 = -1$ es un punto fijo. Es no hiperbólico pues $f'(x) = 3x^2 + 6x + 4$ y vemos que $f'(-1) = 1$. Usaremos el teorema*

anterior, luego necesitaremos calcular la derivada Schwarziana:

$$\mathbb{S}f(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2$$

Simplemente nos interesa saber si es positiva o negativa en x_1 .

$$\mathbb{S}f(-1) = f'''(-1) - \frac{3}{2}(f''(-1))^2 = 6$$

Luego observamos que $\mathbb{S}f(-1) > 0$ por lo que x_1 es un punto fijo no-hiperbólico inestable.

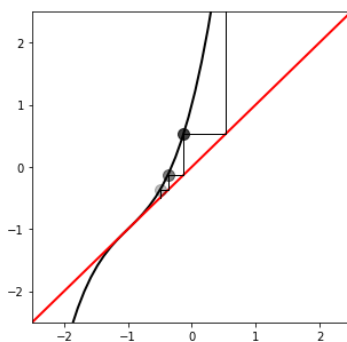


Figura 1.5: $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 1$ y la $\mathbb{O}^+(-0.5, f)$

1.4. Teoría de la bifurcación

En esta sección estudiaremos las bifurcaciones y como afectan a la dinámica de nuestros sistemas. La referencia seguida ha sido Holmgren [8] pág. 59.

Definición 1.4.1. Una familia de funciones uniparamétricas es un conjunto de funciones las cuales están dadas por una función o parametrización en la que un parámetro es variable, $F(x, \lambda) = f_\lambda(x)$. Fijado λ tenemos que $f_\lambda(x)$ es una función de la variable x .

Definición 1.4.2. Sea el sistema dinámico (\mathbb{X}, f_λ) . Una bifurcación ocurre en f_λ para un parámetro λ_0 si existe $\epsilon > 0$ tal que hay parámetros $\lambda_0 - \epsilon < \lambda_1 < \lambda_0$ y $\lambda_0 < \lambda_2 < \lambda_0 + \epsilon$ tales que las dinámicas de f_{λ_1} son distintas de las de f_{λ_2} . La dinámica de la función cambia al cruzar el parámetro el valor λ_0 .

Hay varios tipos de bifurcaciones que procederemos a ver.

Definición 1.4.3. Se dice que nuestra familia de funciones posee una bifurcación tangente para λ_0 si existe un intervalo abierto I y $\epsilon > 0$ tales que:

- Si $\lambda \in (\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0)$, entonces $f_\lambda(x)$ no tiene puntos fijos en I .
- Si $\lambda = \lambda_0$ entonces existe un único punto fijo y es neutral.

- Si $\lambda \in (\lambda_0, \lambda_0 + \epsilon)$, entonces $f_\lambda(x)$ tiene dos puntos fijos en I , con el mayor siendo inestable y el menor estable.

Ejemplo 1.4.1. Usaremos uno de los ejemplos clásicos, $f_r(x) = re^x$ con $r > 0$. Tomaremos $r_0 = 1/e$

Veamos que si $r < 1/e$, por ejemplo $r = 1/3$. Entonces $f_{1/3}(x) = \frac{e^x}{3}$ y haciendo una gráfica podemos ver como tiene dos puntos fijos, $x_1 \approx 0.619$ y $x_2 \approx 1.512$. Si $r = 1/e$, $f_{1/e}(x) = e^{x-1}$ solo tiene un punto fijo $x = 1$. El último caso considerando $r > 1/e$ no nos da ningún punto fijo. Podemos observar estos casos en la Figura 1.6.

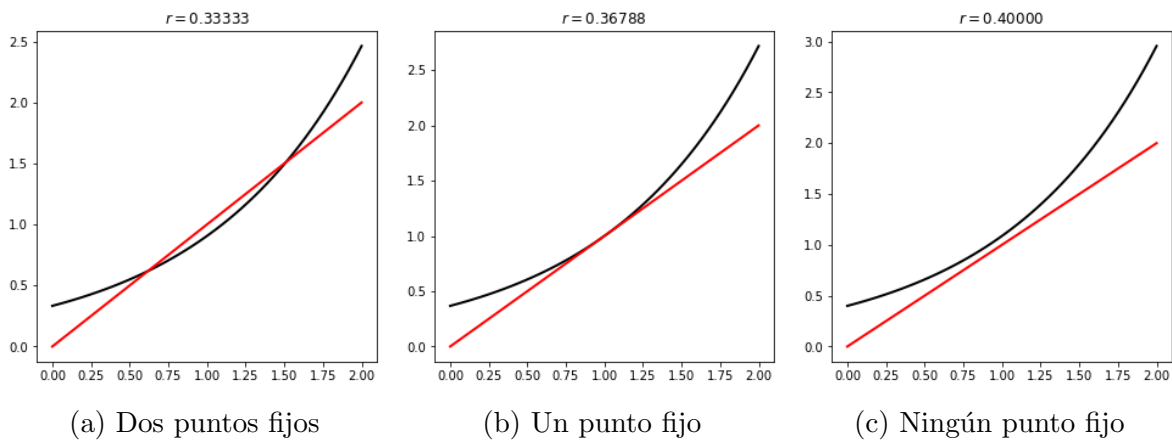


Figura 1.6: Bifurcación tangente de $f_r(x) = re^x$

Definición 1.4.4. Se dice que nuestra familia de funciones posee una bifurcación tridente para λ_0 si existe un intervalo abierto I y $\epsilon > 0$ tales que:

- Si $\lambda \in (\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0)$, entonces $f_\lambda(x)$ tiene un punto fijo estable en I .
- Si $\lambda \in (\lambda_0, \lambda_0 + \epsilon)$, entonces $f_\lambda(x)$ tiene tres puntos fijos en I , el anteriormente mencionado queda situado en el medio y se convierte en inestable.

La bifurcación tridente aparece frecuentemente en funciones con algún tipo de simetría.

Ejemplo 1.4.2. Usaremos uno de los ejemplos clásicos, $f_r(x) = x + rx - x^3$. Observamos que los puntos fijos de $f_r(x)$ son $x_1 = 0, x_2 = \sqrt{r}, x_3 = -\sqrt{r}$. Es fácil ver que en $r_0 = 0$ tenemos una bifurcación tridente.

- Si $r = -1$, $f_{-1}(x) = -x^3$ que tiene un único punto fijo $x_1 = 0$ y $\lambda(0) = 0$ luego es estable.
- Si $r = 1$, $f_1(x) = 2x - x^3$ y los puntos fijos son $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -1$. Tenemos que $\lambda(0) = 2$, luego x_1 se ha vuelto inestable. Veamos la estabilidad de los nuevos puntos fijos. Tenemos que $\lambda(1) = \lambda(-1) = -1$ luego son no-hiperbólicos. Por tanto, tendremos que proseguir el estudio y ver que $f_1''(x) = -6x$, luego tenemos $f_1''(1) = -6 \neq 0$ y $f_1''(-1) = 6 \neq 0$ luego son puntos fijos no-hiperbólicos semi-estables.

Podemos observar estos casos en la Figura 1.7.

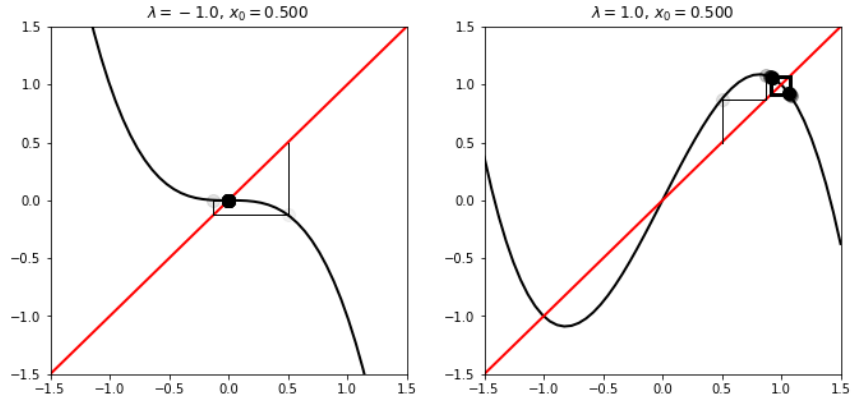


Figura 1.7: Bifurcación tridente de $f_r(x) = x + rx - x^3$

Definición 1.4.5. Se dice que nuestra familia de funciones posee una bifurcación transcítica para λ_0 si existe un intervalo abierto I y $\epsilon > 0$ tales que:

- Siempre existen dos puntos fijos $\forall \lambda \in (\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon)$.
- A medida que el parámetro $\lambda \in (\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon)$ es variado, la estabilidad de los punto fijos es intercambiada de modo que uno es inestable y el otro estable.

Ejemplo 1.4.3. Sea $f_r(x) = (r + 1)x - x^2$. Observamos que los puntos fijos de $f_r(x)$ son $x_1 = 0, x_2 = r \forall r \in \mathbb{R}$. $f'_r(x) = r + 1 - 2x$, y tenemos que:

- $|\lambda(0)| = |r + 1|$, luego será estable si $r \in (-2, 0)$.
- $|\lambda(r)| = |-r + 1|$ que será estable si $r \in (0, 2)$.

Luego vemos que en $r = 0$ tenemos una bifurcación transcítica. Se puede observar es la Figura 1.8.

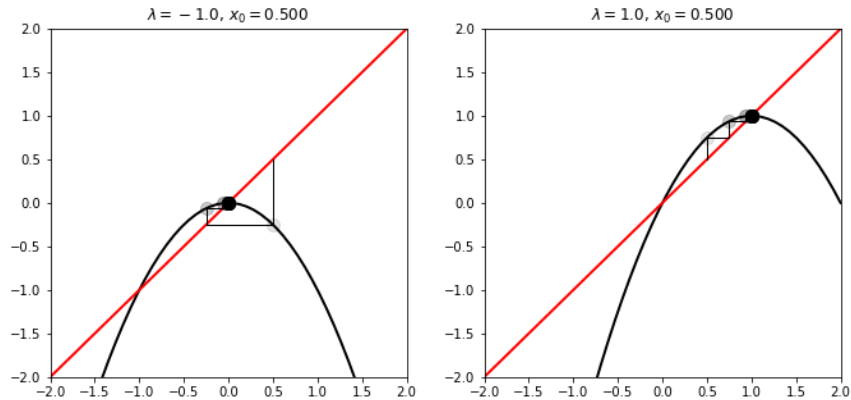


Figura 1.8: Bifurcación transcítica de $f_r(x) = (r + 1)x - x^2$

Definición 1.4.6. Se dice que nuestra familia de funciones posee una bifurcación duplicadora de período para λ_0 si existe un intervalo abierto I y $\epsilon > 0$ tales que:

- Para $\lambda \in (\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0)$, f_λ no tiene puntos 2-periódicos en I y p_λ es punto fijo estable (inestable).
- Para $\lambda \in (\lambda_0, \lambda_0 + \epsilon)$ hay una única órbita 2-periódica con los puntos q_1, q_2 en I que son estables (inestables). El punto fijo p_λ se convierte en inestable (estable).
- Para cada $\lambda \in (\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon)$ hay un único punto fijo p_λ para f_λ en I .

Cuando λ está arbitrariamente cerca de λ_0 , tenemos que la órbita formada por q_i también se acerca a p_{λ_0} .

Ejemplo 1.4.4. Ahora consideraremos $f_\lambda(x) = x^2 + \lambda$ con $\lambda_0 = \frac{-3}{4}$. Vemos fácilmente que existen puntos fijos $x = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1 - 4\lambda})$ que serán reales si $\lambda \leq 1/4$. Vemos que f_λ posee una bifurcación tangente para $\lambda = 1/4$.

Busquemos los puntos 2-periódicos:

$$(x^2 + \lambda)^2 + \lambda - x = 0$$

Sabemos que los puntos fijos de los cuales hemos hablado anteriormente son soluciones, por brevedad los denominaremos p_+, p_- . Tenemos que $x^2 + \lambda - x = (x - p_+)(x - p_-)$. Luego dividiendo de esta manera:

$$\frac{(x^2 + \lambda)^2 + \lambda - x}{x^2 + \lambda - x} = x^2 + x + \lambda + 1$$

Las soluciones de $x^2 + x + \lambda + 1$ son puntos fijos de f_λ^2 luego puntos 2-periódicos de f_λ . Estas soluciones son $q_\pm = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{-4\lambda - 3})$. Es obvio que son reales si y solo si $\lambda \leq \frac{-3}{4}$. Vemos que si $\lambda = \frac{-3}{4}$ entonces $q_+, q_- = p_- = \frac{-1}{2}$. Luego resumiendo:

- Para $\frac{-3}{4} < \lambda < \frac{1}{4}$, f_λ tiene un punto fijo estable en p_- y ningún punto 2-periódico.
- Para $\lambda = \frac{-3}{4}$, f_λ tiene un punto fijo neutral en p_- y ningún punto 2-periódico.
- Para $\frac{-5}{4} < \lambda < \frac{-3}{4}$, f_λ tiene puntos fijos inestables en p_\pm y una órbita 2-periódica estable compuesta por q_\pm .

Estos distintos casos pueden ser apreciados en la Figura 1.10.

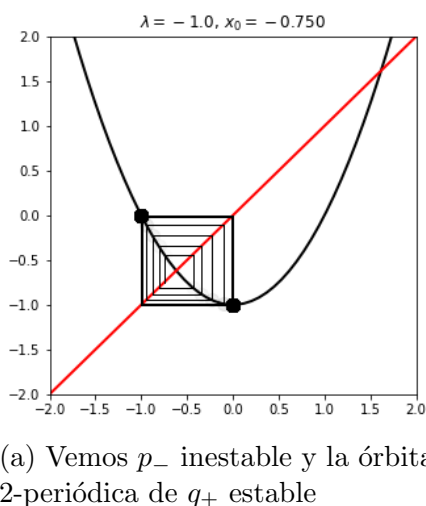
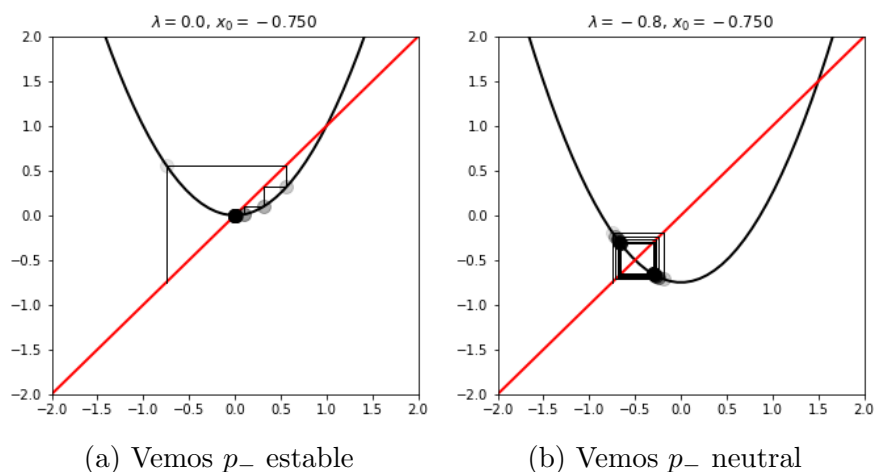


Figura 1.10: Bifurcación duplicadora de período de $f_{\lambda}(x) = x^2 + \lambda$

Además de estas bifurcaciones es importante conocer una herramienta para su estudio, los diagramas de bifurcación. Estos consisten en dibujar en un eje de coordenadas el comportamiento de nuestra familia de funciones respecto de su parámetro. El eje de abscisas será el parámetro y el eje de ordenadas el valor. Hay varios tipos de diagramas según el estudio a realizar. Podemos estudiar la estabilidad de los distintos puntos y como varía, se puede estudiar la aparición de los distintos atractores posibles...

En la Figura 1.11 veremos el diagrama del Ejemplo 1.4.2. En él estudiamos como se comporta la estabilidad de los puntos fijos. Podemos ver el punto fijo $x = 0$ estable para $r < 0$. En $r = 0$ sucede la bifurcación tridente y aparecen dos nuevos puntos fijos estables y el punto fijo anterior se vuelve inestable. El trazo negro significa estabilidad y el rojo inestabilidad.

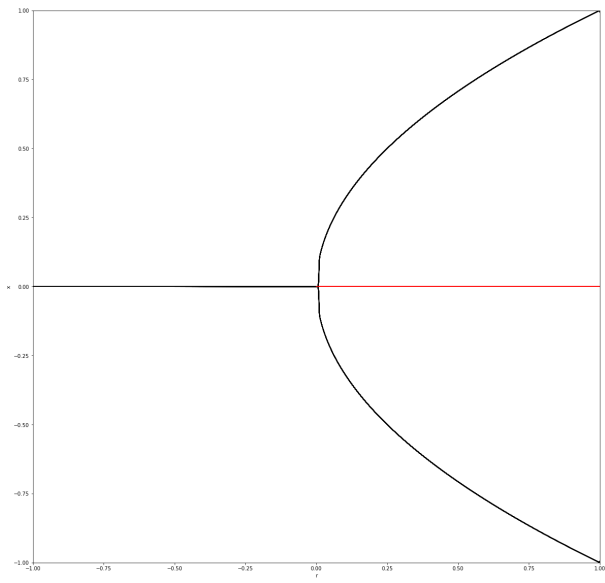


Figura 1.11: Diagrama de bifurcación del Ejemplo 1.4.2

Capítulo 2

Caos

En este segundo capítulo nuestro objetivo será definir que es el caos. Nos encontramos ante una pregunta complicada pues en la literatura podemos encontrar muchas definiciones distintas. Nosotros estudiaremos la más aceptada que es la noción de Caos de Devaney. Además, también daremos otro ejemplo de definición de caos basada en la entropía topológica. El camino que seguiremos hasta llegar a la noción de caos será el necesario para que el lector entienda las nociones incluidas en la definición. Para finalizar este capítulo estudiaremos la dinámica simbólica que es un importante ejemplo de aplicación caótica. Las referencias principales seguidas son Devaney [6] [5], Bahi [2] y Katok [9].

2.1. Dinámica topológica

A partir de este apartado consideraremos el espacio \mathbb{X} de nuestros sistemas dinámicos discretos dotado de una topología. Ahora veremos una serie de definiciones referentes a sistemas dinámicos según su topología:

Definición 2.1.1. Sea (\mathbb{X}, τ) un espacio topológico y \mathbb{U} un subconjunto de \mathbb{X} . Diremos que x es un punto de acumulación de \mathbb{U} si y solo si para cualquier subconjunto abierto de \mathbb{U} que contenga al punto x , lo denotaremos \mathbb{U}_x , se tiene que:

$$\mathbb{U} \cap (\mathbb{U}_x \setminus \{x\}) \neq \emptyset$$

Definición 2.1.2. Un conjunto \mathbb{X} es perfecto si es cerrado y todos sus puntos son puntos de acumulación. Un sistema dinámico se dirá que es perfecto si \mathbb{X} es perfecto.

Definición 2.1.3. Sea (\mathbb{X}, τ) un espacio topológico y \mathbb{U} un subconjunto de \mathbb{X} . Diremos que \mathbb{U} es denso si $\bar{\mathbb{U}} = \mathbb{X}$.

Definición 2.1.4. Un sistema dinámico es regular si el conjunto de puntos periódicos de f es denso en \mathbb{X} .

2.2. Dependencia sensible de las condiciones iniciales

Supongamos que \mathbb{X} es un espacio métrico con distancia d . A continuación, veremos una de las definiciones más importantes para entender la dinámica caótica:

Definición 2.2.1. Una aplicación $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ se dice que tiene dependencia sensible de las condiciones iniciales si existe un $\delta > 0$ tal que para cada $x \in \mathbb{X}$ y cualquier entorno \mathbb{U}_x de x , existe $y \in \mathbb{U}_x \setminus \{x\}$ y un entero $k \geq 0$ tal que $d(f^k(x), f^k(y)) > \delta$. La constante de sensibilidad es el supremo de estas δ .

Tenemos por tanto una pareja de puntos x, y que se separa al menos δ iterando f . Es importante destacar que esto no se debe cumplir para todo $y \in \mathbb{U}_x \setminus \{x\}$, con que se cumpla para alguno basta. Obsérvese que si x no es punto de acumulación, puede no haber tal y .

A continuación, enunciamos otra definición proveniente de Katok [9] pág. 125:

Definición 2.2.2. Una aplicación $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ se dice que es expansiva si hay una constante $\delta > 0$ tal que para cada par de puntos distintos $x, y \in \mathbb{X}$, existe $k \geq 0$ con $d(f^k(x), f^k(y)) > \delta$. La constante de expansión es el supremo de estas δ .

Suponiendo que \mathbb{X} es perfecto (todos los puntos son de acumulación) la expansividad es más fuerte que la dependencia sensible de las condiciones iniciales, pues requiere $\forall x, y \in \mathbb{X}$ con $x \neq y$ como única condición.

Ejemplo 2.2.1. Veamos un ejemplo clásico¹. Sea \mathbb{S}_1 la circunferencia unidad entendida como el cociente \mathbb{R}/\mathbb{Z} de números reales módulo 1, con la distancia d normalizada. Es decir, la circunferencia total tiene longitud 1, y la distancia $d(x, y)$ es la longitud normalizada del menor arco que une x con y .

Consideremos la aplicación $\mathbf{D} : \mathbb{S}_1 \rightarrow \mathbb{S}_1$ tal que $\mathbf{D}(\theta) = 2\theta \pmod{1}$. Veamos que es expansiva, por tanto, tiene dependencia sensible de las condiciones iniciales. Como la distancia es invariante por rotaciones, sin pérdida de generalidad podemos suponer $x = 0$, que además es punto fijo, e $y \neq 0$. Verificamos que $\delta = \frac{1}{4}$ cumple la condición:

- Si y es tal que $d(y, 0) \geq \frac{1}{4}$ entonces sirve $k = 0$.
- Si y es tal que $d(y, 0) < \frac{1}{4}$, entonces es fácil verificar que se duplica la distancia:

$$d(\mathbf{D}(y), 0) = 2d(y, 0)$$

(esto no es cierto en general, por ejemplo $d(\mathbf{D}(\frac{1}{2}), 0) = 0$).

Repetiendo el razonamiento con $\mathbf{D}(y)$, vemos que o bien $d(\mathbf{D}^k(y), 0) \geq \frac{1}{4}$ para algún k , o si no $d(\mathbf{D}^k(y), 0) < \frac{1}{4}$ para todo k , lo cual es imposible porque sería $d(\mathbf{D}^k(y), 0) = 2^k d(y, 0) < \frac{1}{4}$ para todo k , y esto sólo ocurre para $y = 0$.

¹Este ejemplo puede verse detalladamente en Katok [9].

Veamos un caso ilustrativo. Considerando $x_0 = \frac{1}{12}$ e $y_0 = \frac{7}{72}$:

$$\mathbb{O}^+(x_0, f) = \left\{ \frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \dots \right\}$$

$$\mathbb{O}^+(y_0, f) = \left\{ \frac{7}{72}, \frac{7}{36}, \frac{7}{18}, \frac{7}{9}, \frac{5}{9}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{8}{9}, \frac{7}{9}, \dots \right\}$$

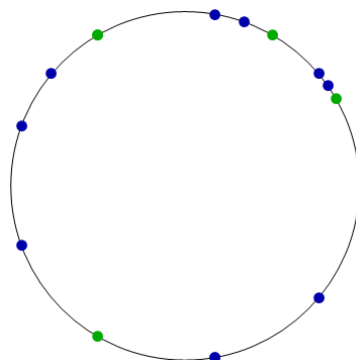


Figura 2.1: Podemos ver como la primera órbita (en verde) acaba “cayendo” en una órbita 2-periódica y la segunda órbita (en azul) “cae” en una órbita 6-periódica.

2.3. Transitividad topológica

Supongamos que \mathbb{X} es un espacio métrico con distancia d . Ahora veremos otra de las definiciones fundamentales que necesitamos para definir el caos. Las referencias seguidas han sido Bahi [2] pág. 23 y Formenti [7] pág. 9.

Definición 2.3.1. Una aplicación f diremos que es topológicamente transitiva sobre \mathbb{X} si para cada dos conjuntos abiertos $\mathbb{U}, \mathbb{V} \subset \mathbb{X}$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(\mathbb{U}) \cap \mathbb{V} \neq \emptyset$. La función f se llama totalmente topológicamente transitiva cuando f^n es topológicamente transitiva para todo $n \geq 1$.

Podemos ver que lo que nos dice esta definición es que f mueve a los $x \in \mathbb{U} \subset \mathbb{X}$ por todo el espacio \mathbb{X} . Es decir, si tomamos un $y \in \mathbb{X}$ podemos llegar a estar arbitrariamente cerca de él empezando en cualquier entorno e iterando.

Tenemos dos definiciones análogas a la anterior:

Definición 2.3.2. Un sistema dinámico es topológicamente transitivo si para cada subespacio abierto no vacío $U \subset \mathbb{X}$, el conjunto $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(U)$ es denso en \mathbb{X} , es decir,

$$\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(U)} = \mathbb{X}.$$

Definición 2.3.3. Un sistema discreto dinámico es transitivo si para cada pareja $(x, y) \in \mathbb{X} \times \mathbb{X}$, y para cada bola B_x, B_y centradas respectivamente en x e y tenemos que existe un elemento $z \in B_x$ y un entero positivo n tal que $f^n(z) \in B_y$.

Proposición 2.3.1. Si un sistema discreto dinámico es transitivo entonces $\overline{f(\mathbb{X})} = \mathbb{X}$.

Demostración. Sea $x \in \mathbb{X}$. Si existe un bola B_x tal que $B_x \cap f(\mathbb{X}) = \emptyset$, y un abierto U que es disjunto de B_x , por transitividad existirá $n > 0$ tal que:

$$\emptyset \neq B_x \cap f^n(U) \subset B_x \cap f^n(\mathbb{X}) \subset B_x \cap f(\mathbb{X}) = \emptyset$$

Con lo cual hemos llegado a contradicción. □

Proposición 2.3.2. Sea un sistema dinámico perfecto. Si hay una órbita densa en \mathbb{X} entonces el sistema dinámico es transitivo. Si además \mathbb{X} es compacto entonces el recíproco es cierto.

Demostración. Sea \mathbb{X} perfecto, luego todos los puntos de \mathbb{X} son puntos de acumulación y una órbita $\mathcal{O}(x_0, f)$ densa en X , luego $\overline{\mathcal{O}(x_0, f)} = \mathbb{X}$. Veamos que el sistema es transitivo, es decir, para cada dos abiertos $U, V \subset \mathbb{X}$ existe k tal que $U \cap f^k(V) \neq \emptyset$. Podemos considerar algún $x_k = f^k(x_0) \in U$ y algún $x_m = f^m(x_0) \in V \setminus \{x_0, \dots, x_k\}$ que es abierto y no vacío. Para $m > k$ tenemos que $V \cap f^{m-k}(U) \neq \emptyset$. Luego tenemos la transitividad.

Veamos el recíproco. Si \mathbb{X} es compacto, entonces es también un espacio separable. Sean entonces $U_0, U_1, \dots \subset \mathbb{X}$ una base numerable de abiertos. Podemos construir una órbita que interseque con todos los U_n . Por la transitividad existe n_0 tal que $U_0 \cap f^{n_0}(U_1) \neq \emptyset$. Sea V_0 un abierto tal que $\overline{V_0} \subset U_0 \subset f^{-n_0}(U_1)$. De manera similar podemos encontrar un $n_i \in \mathbb{N}$ y un abierto V_i tal que $\overline{V_i} \subset U_i \subset f^{-n_i}(U_i)$. Por la compacidad de \mathbb{X} , la unión $V = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \overline{V_i}$ es no vacío. Tenemos que para todo $x \in V$ y $\forall i \in \mathbb{N}$, $x \in f^{n_i}(x) \in U_i$. □

Definición 2.3.4. Una aplicación f diremos que es fuertemente transitiva si para cada $x, y \in \mathbb{X}$ y para todo real positivo r existe $k \in \mathbb{N}$ y $z \in B(x, r)$ tal que $f^k(z) = y$. Siendo $B(x, r)$ la bola centrada en x de radio r . Por esta definición vemos que para cada $x, y \in \mathbb{X}$ se pueden encontrar al menos un punto z cercano a x tal que bajo iteración pertenece a un entorno de y .

Definición 2.3.5. Sea una aplicación $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ diremos que es topológicamente mezclada si para cada parejas de abiertos no vacíos $U, V \subset \mathbb{X}$ disjuntos, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq m$ $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Observación 2.3.1. Si una aplicación topológicamente mezclada también es totalmente topológicamente transitiva si consideramos $m = 1$.

La siguiente proposición es siguiendo la referencia de Holgrem [8] pág. 115.

Proposición 2.3.3. *Sea \mathbb{X} un espacio métrico y $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$. Sea E un subconjunto invariante de (\mathbb{X}, f) . Si los puntos periódicos de f son densos en E y hay un punto cuya órbita es densa en E , entonces f es topológicamente transitiva sobre E .*

Demostración. Supongamos lo dicho en el enunciado y sea x_0 dicho punto de órbita densa. Primeramente, comentemos lo siguiente: Si E es finito entonces E consiste en una única órbita periódica. Luego f sería topológicamente transitiva. Si E es infinito, no es posible ninguna órbita periódica densa ya que éstas son finitas como conjunto.

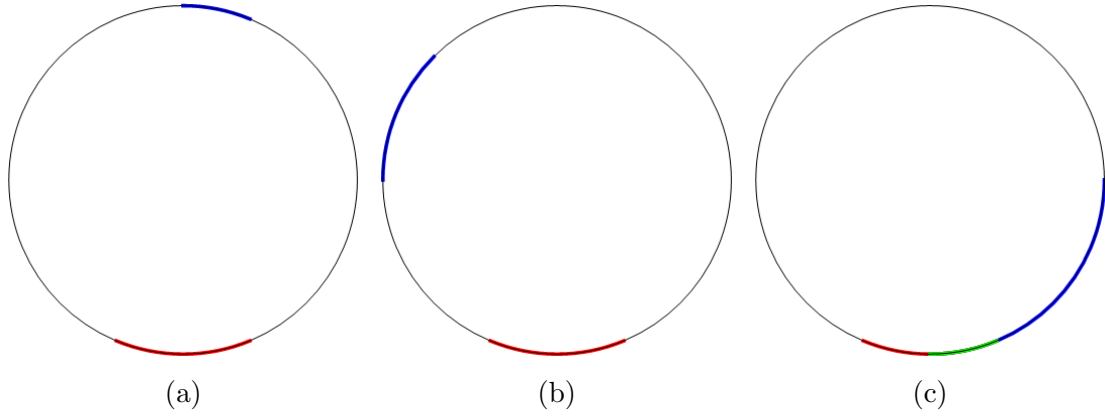
Sean ahora dos abiertos U, V con intersección no vacía con E . Veamos que hay un $x \in U \cap E$ tal que para un $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $f^n(x) \in V$. Por lo considerado anteriormente nos limitaremos al caso donde E es infinito. Por hipótesis tenemos un punto en E cuya órbita es densa en E . Sea x_0 ese punto y elijamos k tal que $f^k(x_0) \in U$. Para finalizar la demostración basta con ver que existe $m > k$ tal que $f^m(x_0) \in V$. Podemos tomar $x = f^k(x_0)$ y $n = m - k$. Para ver que dicha m existe es suficiente con probar que hay infinitas iteraciones de x_0 en V . Luego hay un número finito de números enteros menores que k y hay infinitas iteraciones de $f^m(x_0) \in V$ con $m > k$. Lo demostraremos por reducción al absurdo.

Supongamos que V contiene un número finito de iteraciones de x_0 y que p es un punto periódico en V . Sabemos que p existe pues los puntos periódicos son densos en E . Por ser E infinito, p no está en la órbita de x_0 .

Al suponer sólo un número finito de iteraciones en V y no ser ninguna p , habrá una iteración de x_0 que será la más cercana, a la distancia de esta a p lo llamaremos ϵ . Tenemos que $B_\epsilon(p)$ es abierto y $B_\epsilon(p) \cap V$ es abierto y contiene a p , la intersección de ambos con E es no vacía. Como la órbita de x_0 es densa en E , debe existir i tal que $f^i(x_0) \in B_\epsilon(p) \cap V$. Pero entonces $f^i(x_0) \in V$ y por la definición de ϵ , tenemos que $d(f^i(x_0), p) > \epsilon$. Por lo que $f^i(x_0)$ no puede estar en $B_\epsilon(p)$ y tampoco en $B_\epsilon(p) \cap V$. Luego llegamos a contradicción. Tenemos que V contiene infinitas iteraciones de x_0 . \square

Ejemplo 2.3.1. *Usaremos el ejemplo anterior, la aplicación $\mathbf{D} : \mathbb{S}_1 \rightarrow \mathbb{S}_1$ tal que $\mathbf{D}(\theta) = 2\theta$. Veamos que es topológicamente transitiva. El razonamiento es análogo a la demostración de expansividad: si U es menos de media circunferencia, al duplicar su longitud es el doble. Por tanto eventualmente acaba siendo de longitud mayor que la mitad, y al volver a duplicar será toda la circunferencia, con lo cual obviamente se cumplirá la transitividad topológica.*

Por ejemplo, sea $\mathbb{U} = [\frac{3}{16}, \frac{1}{4}]$ y $\mathbb{V} = [\frac{11}{16}, \frac{13}{16}]$. Podemos ver que $\mathbf{D}^2(\mathbb{U}) \cap \mathbb{V} \neq \emptyset$.



En (a) tenemos $\mathbb{U} = [\frac{3}{16}, \frac{1}{4}]$ y $\mathbb{V} = [\frac{11}{16}, \frac{13}{16}]$, en (b) $\mathbf{D}(\mathbb{U}) = [\frac{3}{8}, \frac{1}{2}]$ y $\mathbb{V} = [\frac{11}{16}, \frac{13}{16}]$ y finalmente en (c) $\mathbf{D}^2(\mathbb{U}) = [0, \frac{3}{4}]$ y $\mathbb{V} = [\frac{11}{16}, \frac{13}{16}]$ con $\mathbb{U} \cap \mathbb{V} = [\frac{12}{16}, \frac{13}{16}]$.

2.4. Caos de Devaney

Finalmente, hemos llegado a nuestro objetivo de este capítulo, la definición de Caos de Devaney.

Definición 2.4.1. Sea el sistema dinámico (\mathbb{X}, f) con \mathbb{X} espacio métrico. Se dice que f es una aplicación caótica en un subconjunto invariante $A \subseteq \mathbb{X}$ si se cumplen las siguientes condiciones:

1. f tiene dependencia sensible de las condiciones iniciales sobre A .
2. f es topológicamente transitiva sobre A .
3. El conjunto de puntos periódicos de f es denso en A .

Esta definición fue dada por Robert Devaney en [5] por lo cual se denomina Caos de Devaney. Pero se vio que era inexacta al demostrarse en el artículo “On Devaney’s definition of chaos” [3] que las condiciones 2 y 3 implican 1 en espacios métricos. Veámoslo siguiendo [3]:

Teorema 2.4.1. Si f es transitiva y tiene un conjunto de puntos periódicos denso entonces f tiene dependencia sensible de las condiciones iniciales.

Demostración. Existe un $\delta > 0$ tal que $\forall x \in \mathbb{X}$ existe un punto periódico $q \in \mathbb{X}$ tal que $\mathbb{O}(q, f)$ está a una distancia menor que $\frac{\delta}{2}$ de x . Elijamos ahora dos puntos periódicos q_1 y q_2 con órbitas disjuntas tal que sea δ la menor distancia entre estas órbitas. Entonces por la desigualdad triangular tenemos que cada punto $x \in \mathbb{X}$ está a una distancia al menos $\frac{\delta}{2}$ de una de las dos órbitas elegidas:

$$\delta \leq d(\mathbb{O}(q_1, f), \mathbb{O}(q_2, f)) \leq d(\mathbb{O}(q_1, f), x) + d(x, \mathbb{O}(q_2, f))$$

Ahora veremos que f tiene dependencia sensible de las condiciones iniciales tomando una constante de sensibilidad $s = \frac{\delta}{8}$.

Sea x un punto arbitrario de X y sea U_x un entorno de x . Como los puntos periódicos de f son densos, existe un punto n -periódico p en la intersección de U_x con la bola de radio s centrada en x , $V = U_x \cap B_s(x)$. Como habíamos visto existe un punto periódico $q \in \mathbb{X}$ tal que su órbita está al menos a distancia $4s = \frac{\delta}{2}$ de x . Sea

$$W = \bigcap_{i=0}^n f^{-i}(B_s(f^i(q)))$$

W es un abierto no vacío al cual pertenece q . Dado que f es transitiva, existe $y \in V$ y un número natural k tal que $f^k(y) \in W$. Sea j la parte entera de $k/n + 1$. Por lo tanto, $1 \leq nj - k \leq n$. Por construcción tenemos:

$$f^{nj}(y) = f^{nj-k}(f^k(y)) \in f^{nj-k}(W) \subseteq B_s(f^{nj-k}(q))$$

Sea $f^{nj}(p) = p$, y por la desigualdad triangular,

$$d(f^{nj}(p), f^{nj}(y)) = d(p, f^{nj}(y)) \geq d(x, f^{nj-k}(q)) - d(f^{nj}(y), f^{nj-k}(q)) - d(x, p)$$

Siendo d la función distancia en \mathbb{X} . Como $p \in B_s(x)$ y $f^{nj}(x) \in B_s(f^{nj-k}(q))$, tenemos:

$$d(f^{nj}(p), f^{nj}(y)) \geq 4s - s - s = 2s$$

Por lo que usando la desigualdad triangular de nuevo, tenemos que $d(f^{nj}(x), f^{nj}(y)) > s$ o $d(f^{nj}(p), f^{nj}(x)) > s$. En cualquiera de los casos, habremos encontrado un punto en U_x tal que su nj -ésima iteración está a distancia mayor que s de $f^{nj}(x)$. Hemos acabado. \square

Ejemplo 2.4.1. Sea la aplicación ya habitual $\mathbf{D} : \mathbb{S}_1 \rightarrow \mathbb{S}_1$ tal que $\mathbf{D}(\theta) = 2\theta$. Veamos que es caótica. Nos queda ver que el conjunto de puntos periódicos de \mathbf{D} es denso en \mathbb{S}_1 . Busquemos los puntos n -periódicos, o sea

$$\mathbf{D}^n x = 2^n x \equiv x \pmod{1} \iff x = \frac{k}{2^n - 1} \text{ con } k \in \mathbb{N}.$$

Tenemos por tanto que los puntos n -periódicos son las raíces $(2^n - 1)$ -ésimas de la unidad. Luego para n suficientemente grande el conjunto de puntos periódicos de \mathbf{D} es un subconjunto denso de \mathbb{S}_1 . Luego, hemos visto que \mathbf{D} es caótica en \mathbb{S}_1 .

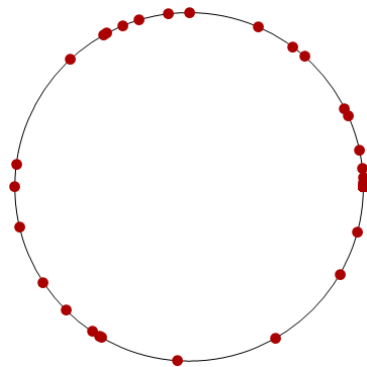


Figura 2.3: La órbita de $x = \frac{2252458}{2^{100}-1}$ que tiene período 100

2.5. Entropía topológica

En esta sección vamos a introducir el concepto de entropía topológica basada en la separación de los puntos de un sistema dinámico. Este concepto será una medida de la complejidad dinámica de los sistemas y por tanto es otra manera de ver su comportamiento dinámico. Seguiremos Bahi [2] pág. 40.

Definición 2.5.1. *Supongamos que \mathbb{X} es un espacio métrico con distancia d . Dos puntos $x, y \in \mathbb{X}$ se dice que son ϵ -separados en tiempo n , con $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ y $n \in \mathbb{N}$, si existe $k \leq n$ tal que $d(f^k(x), f^k(y)) > \epsilon$.*

Definición 2.5.2. *Sea f una aplicación continua y \mathbb{X} un espacio compacto métrico con distancia d . Para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos una distancia en X :*

$$d_n(x, y) = \max\{d(f^k(x), f^k(y)) : 0 \leq k \leq n\}$$

Es decir, tenemos una distancia que nos mide la mayor distancia entre órbitas de los puntos x e y durante las primeras n iteraciones de f .

Definición 2.5.3. *Un subconjunto \mathbb{E} de \mathbb{X} se dice es un conjunto (n, ϵ) -separado si $\forall x, y \in \mathbb{E}$ con $x \neq y$, $\exists k, 0 \leq k \leq n - 1$ que cumple $d(f^k(x), f^k(y)) > \epsilon$.*

Definición 2.5.4. *Denotaremos $\mathbf{N}_f(n, \epsilon)$ de \mathbb{X} al máximo cardinal de los conjuntos (n, ϵ) -separados por f de \mathbb{X} .*

Este cardinal es siempre finito dado que X es compacto y se podría extraer un subrecubrimiento finito de tamaño m y entonces tendríamos que $\mathbf{N}_f(n, \epsilon) \leq m$.

Usando estas nociones definimos la entropía:

Definición 2.5.5. *La entropía topológica de f en \mathbb{X} es definida por:*

$$h(\mathbb{X}, f) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbf{N}(n, \epsilon)$$

Con esta definición tenemos una definición alternativa de aplicación caótica:

Definición 2.5.6. *Sea una aplicación $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$. Se dice que es una aplicación caótica si $h(f) > 0$.*

Ejemplo 2.5.1. *Sea $\mathbf{R}_\alpha : \mathbb{S}_1 \rightarrow \mathbb{S}_1$ tal que $\mathbf{R}_\alpha(\theta) = \theta + \alpha$. Veamos su entropía topológica. Si consideremos una distancia d podemos ver que esta se mantiene bajo las rotaciones. Luego $d_n = d$ para $n \in \mathbb{N}$. Tenemos así que:*

$$h(\mathbb{S}_1, \mathbf{R}_\alpha) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbf{N}(1, \epsilon) = 0$$

Ejemplo 2.5.2. Sea la aplicación ya habitual $\mathbf{D} : \mathbb{S}_1 \rightarrow \mathbb{S}_1$ tal que $\mathbf{D}(\theta) = 2\theta \pmod{1}$. Se puede demostrar que su entropía topológica es $\log(2)$. Podemos verlo en [9].

2.6. Dinámica simbólica

Como ejemplo de aplicación caótica estudiaremos la dinámica simbólica que además es una herramienta que nos será de utilidad más tarde. La referencia a seguir ha sido Devaney [5].

Definición 2.6.1. El espacio de sucesiones sobre un conjunto finito Σ es

$$\Sigma^\omega = \{s_0s_1s_2 \dots : s_i \in \Sigma\}.$$

Se dice que Σ es el alfabeto y los miembros de Σ^ω son las palabras infinitas. También se consideran las palabras (sucesiones) finitas, de longitud n , denotadas Σ^n , y el conjunto $\Sigma^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Sigma^n$ de todas las palabras (entendiéndose “palabra” por defecto como finita).

La operación de concatenar palabras (por ejemplo “ab” con “ba” para formar “abba”) dota al espacio Σ^* de estructura de monoide, con la palabra vacía ϵ como elemento neutro.

Nosotros trabajaremos con sucesiones binarias, eligiendo como alfabeto los símbolos 0, 1 y denotaremos al espacio de sucesiones infinitas Σ^ω en este caso por Σ_2 . Nos referiremos a los elementos de Σ_2 simplemente como puntos.

Definición 2.6.2. La distancia entre dos puntos $s, t \in \Sigma_2$ se define por:

$$d(s, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}.$$

Tenemos que $|s_i - t_i|$ es 0 o 1 según s_i, t_i son iguales o no (distancia trivial), luego $d(s, t) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 2$. Por lo que Σ_2 es un espacio acotado.

Se puede observar que la noción de estar cerca dos puntos es coincidir en sus primeras posiciones.

Proposición 2.6.1. d es una métrica en Σ_2 .

Demostración. Podemos ver que $d(s, t) > 0$ para todo s y t distintas, y $d(s, t) = 0$ si $s_i = t_i \forall i$. Para ver que $d(s, t) = d(t, s)$ es inmediato pues $|s_i - t_i| = |t_i - s_i|$. Veamos la desigualdad triangular. Sean $r, s, t \in \Sigma_2$. Tenemos que $|r_i - s_i| + |s_i - t_i| \geq |r_i - t_i|$ luego $d(r, s) + d(s, t) \geq d(r, t)$. \square

Proposición 2.6.2. Sea $s, t \in \Sigma_2$ y supongamos que $s_i = t_i$ para $i = 0, 1, \dots, n$. Entonces $d(s, t) \leq \frac{1}{2^n}$. Recíprocamente si $d(s, t) < \frac{1}{2^n}$ entonces $s_i = t_i$ para $i = 0, 1, \dots, n$.

Demostración. Supongamos que $s_i = t_i$, para $i \leq n$, entonces:

$$d(s, t) = \sum_{i=0}^n \frac{|s_i - s_i|}{2^i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^n}$$

Veamos el recíproco. Si $s_i \neq t_i$ para $j \leq n$, entonces tenemos que $d(s, t) \geq \frac{1}{2^j} \geq \frac{1}{2^n}$. Luego si $d(s, t) < \frac{1}{2^n}$, entonces $s_i = t_i$ para $i \leq n$. \square

Definición 2.6.3. La aplicación desplazamiento $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ está definida por $\sigma(s_0s_1s_2\dots) = s_1s_2s_3\dots$. O sea $\sigma(s_i) = s_{i+1}$.

Proposición 2.6.3. La aplicación desplazamiento es continua con la métrica anterior.

Demostración. Por definición

$$d(\sigma(s), \sigma(t)) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_{i+1} - t_{i+1}|}{2^i} = 2 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_{i+1} - t_{i+1}|}{2^{i+1}} = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} \leq 2d(s, t).$$

Por tanto es una función lipschitziana (con constante 2), luego continua. \square

Podemos ver que la distancia se va duplicando al menos si $d(s, t)$ es pequeña, porque recordamos que $d(s, t) \leq 2$. Nos puede recordar el ejemplo de la aplicación duplicadora $\mathbf{D}(x) = 2x \pmod{1}$. De hecho si escribimos $x \in [0, 1)$ en binario, obtenemos un $s = s_0s_1s_2\dots \in \Sigma_2$, entonces $\mathbf{D}(x)$ en binario es $\sigma(s)$. Por ejemplo, sea $x = 0.125$ en binario es 0.001 pues $0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} = 0.125$. Tenemos que $s = 001000\dots$ luego $\sigma(s) = 010000\dots$ que en decimal es 0.25 .

Teorema 2.6.1. La aplicación desplazamiento tiene las siguientes propiedades:

1. $\text{Per}(\sigma)$, es decir, el conjunto de puntos periódicos de σ , es denso en Σ_2 .
2. Hay 2^n puntos n -periódicos.
3. Existe una órbita densa en Σ_2 .

Demostración. Comencemos a demostrar las distintas propiedades:

1. Supongamos $s = s_0s_1\dots$ un punto k -periódico de σ , luego $s_n = s_{n+k}$ para todo n . Luego s es un punto k -periódico si y solo si se repite la sucesión $s_0s_1\dots s_{k-1}$, es decir, son palabras finitas compuestas por la misma palabra (finita) repetida infinitas veces.

Para ver que el conjunto de puntos periódicos es denso debemos ver que para todos los puntos $t \in \Sigma_2$ y todo $\epsilon > 0$, hay un punto periódico de σ contenido en un entorno de t . Luego debemos encontrar un punto en dicho entorno que tenga una repetición de los k dígitos iniciales. Si tomamos $t = t_0t_1t_2\dots$ y elegimos $\frac{1}{2^n} < \epsilon$, entonces podemos considerar un $s = t_0t_1\dots t_n t_0 t_1 \dots$. Tenemos así que tanto t como s tienen los primeros $n + 1$ dígitos iguales, luego $d(s, t) \leq \frac{1}{2^n} < \epsilon$. Luego s está en el entorno de t y es un punto periódico por construcción. Hemos demostrado lo deseado.

2. Sea $s \in \text{Per}_n(\sigma)$, luego $s = s_0 \dots s_{n-1} s_0 \dots s_{n-1} s_0 \dots$ donde $s_k = 0$ o 1 , $k = 0, 1, \dots, n-1$. Por lo tanto existen 2^n valores distintos.
3. Debemos ver que hay puntos en Σ_2 cuyas órbitas se vuelven arbitrariamente cercanas a cualquier otro punto de Σ_2 .

Por ello vamos a tomar $s' = 0\ 1\ 00\ 01\ 10\ 11\ 000\ 001\ 010\ 011\ 100\ 101\ 110\ 111\dots$ que se construye mediante la sucesión de todos los posibles bloques de longitud finita de manera creciente, por ejemplo, podemos ver como en los de longitud 2 tenemos al 0, 1, 2, 3 en binario. Claramente alguna iteración de σ aplicada a s nos dará un punto que será igual que cualquier punto dado. Luego sea $a = (a_0 a_1 a_2 \dots) \in \Sigma_2$, queremos ver que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists s \in \Sigma_2$ tal que $d(a, s) < \frac{1}{2^n}$, luego coinciden en sus $n+1$ primeros dígitos. Este s viene dado por $\sigma^k(s')$ para algún $k \in \mathbb{N}$.

□

Teorema 2.6.2. *La aplicación desplazamiento es caótica en el sentido de Devaney en Σ_2 .*

Demostración. Tenemos la transitividad topológica por la Proposición 2.3.3 y por el teorema anterior los $\text{Per}(\sigma)$ son densos. □

Capítulo 3

Conjugación topológica

En este tercer capítulo veremos la importancia de que dos aplicaciones sean conjugadas topológicamente pues podremos relacionar sus dinámicas topológicas. Primeramente, definiremos la conjugación topológica y después tendremos dos secciones. En la primera sección veremos como los puntos fijos y periódicos se mantienen bajo conjugación. En la segunda sección veremos que el caos también se mantiene. Las referencias seguidas han sido Layek [10] pág. 481 y Barreira [4] pág. 43.

Definición 3.0.1. Sean dos aplicaciones $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ y $g : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Y}$ con \mathbb{X}, \mathbb{Y} espacios topológicos. Se dice que son topológicamente semiconjugadas si existe una aplicación continua y epiyectiva $H : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ tal que $H \circ f = g \circ H$, es decir, tenemos que el diagrama conmutativo siguiente conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{X} & \xrightarrow{f} & \mathbb{X} \\ H \downarrow & & \downarrow H \\ \mathbb{Y} & \xrightarrow{g} & \mathbb{Y} \end{array}$$

El sistema dinámico (\mathbb{Y}, g) se denomina factor del sistema (\mathbb{X}, f) .

Definición 3.0.2. Dos sistemas discretos dinámicos son topológicamente conjugados si la función H de la semiconjugación es un homeomorfismo.

Proposición 3.0.1. Sean dos aplicaciones $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ y $g : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Y}$ semiconjugadas bajo $H : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$, o sea $g \circ H = H \circ f$. Entonces f^n y g^n también son semiconjugadas bajo H para todo n .

Demostración. Queremos ver que $g^n \circ H = H \circ f^n$. Para $n = 1$ es la hipótesis. Suponiéndolo cierto para $n - 1$, por inducción tenemos $g^n \circ H = g^{n-1} \circ (g \circ H) = (g^{n-1} \circ H) \circ f = (H \circ f^{n-1}) \circ f = H \circ f^n$. \square

Ahora veamos que la conjugación es una relación de equivalencia:

Proposición 3.0.2. *Sean las aplicaciones $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$, $g : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Y}$ y $r : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{W}$. Entonces se cumple:*

1. *Reflexividad. La aplicación f es conjugada consigo misma.*
2. *Simetría. Si f es conjugada de g por $H : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ entonces g es conjugada de f por H^{-1} .*
3. *Transitividad. Si f es conjugada de g por H y r es conjugada de f a través de $L : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{X}$ entonces r es conjugada de g a través de $H \circ L : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{Y}$.*

Demostración. Veamos cada una de las condiciones:

1. La primera demostración es inmediata tomando $\text{Id}_{\mathbb{X}} : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ para probar que f es conjugada consigo misma.
2. Tenemos el homeomorfismo $H : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ tal que $H \circ f = g \circ H$. Por ser homeomorfismo existe $H^{-1} : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$ tal que $f \circ H^{-1} = H^{-1} \circ g$ que nos dice que g es conjugada de f por H^{-1} .
3. Tenemos el homeomorfismo $H : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ tal que $H \circ f = g \circ H$. También tenemos el homeomorfismo $L : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{X}$ tal que $L \circ r = f \circ L$. Por ser homeomorfismos tenemos que $H \circ L$ también lo es. Veamos que r es conjugada de g a través de $H \circ L$:

$$g \circ (H \circ L) = (g \circ H) \circ L = (H \circ f) \circ L = H \circ (f \circ L) = H \circ (L \circ r) = (H \circ L) \circ r$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{W} & \xrightarrow{r} & \mathbb{W} \\ L \downarrow & & \downarrow L \\ \mathbb{X} & \xrightarrow{f} & \mathbb{X} \\ H \downarrow & & \downarrow H \\ \mathbb{Y} & \xrightarrow{g} & \mathbb{Y} \end{array}$$

□

3.1. Puntos bajo conjugación

Veamos como los puntos fijos, periódicos y eventuales se mantienen bajo la conjugación.

Proposición 3.1.1. *Sean dos aplicaciones $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ y $g : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Y}$ semiconjugadas por $H : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$, o sea $H \circ f = g \circ H$. Si $H(x_0) = y_0$ entonces H manda la órbita de x_0 bajo f a la órbita de y_0 bajo g .*

Demostración. Por la Proposición 3.0.1 $H(f^n(x_0)) = g^n(H(x_0)) = g^n(y_0)$. □

Proposición 3.1.2. Sean dos aplicaciones $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ y $g : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Y}$ con \mathbb{X}, \mathbb{Y} semiconjugadas por $H : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ tal que $H \circ f = g \circ H$. Si x es un punto fijo de f , entonces $H(x)$ es un punto fijo de g .

Demostración. Como $x = f(x)$ al ser punto fijo, $H(x) = H(f(x)) = (H \circ f)(x) = (g \circ H)(x) = g(H(x))$, o sea $H(x)$ es un punto fijo de g . \square

Proposición 3.1.3. Sean dos aplicaciones $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ y $g : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Y}$ con \mathbb{X}, \mathbb{Y} semiconjugadas por $H : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ tal que $H \circ f = g \circ H$. Si x es un punto fijo eventual de f , entonces $H(x)$ es un punto fijo eventual de g .

Demostración. Tenemos que x es un punto fijo eventual de f , luego $f^{k+1}(x) = f^k(x)$ para algún entero $k > 0$. Por la Proposición 3.0.1 $H \circ f^n = g^n \circ H \forall n \in \mathbb{N}$, luego

$$(g^{k+1} \circ H)(x) = (H \circ f^{k+1})(x) = H(f^k(x)) = g^k(H(x))$$

Tenemos así que $H(x)$ es un punto fijo eventual de g . \square

Proposición 3.1.4. Sean dos aplicaciones $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ y $g : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Y}$ con \mathbb{X}, \mathbb{Y} semiconjugadas por $H : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ tal que $H \circ f = g \circ H$. Entonces si x es un punto n -periódico de f , entonces $H(x)$ es un punto m -periódico de g con $m|n$, es decir, m divide a n .

Demostración. Sea x un punto n -periódico de f , luego $f^n(x) = x$. Entonces como $H \circ f = g \circ H$ tenemos que $H \circ f^n = g^n \circ H \forall n \in \mathbb{N}$, luego $g^n(H(x)) = H(f^n(x)) = H(x)$, por lo que $H(x)$ es un punto n -periódico de g . Recordando la Observación 1.1.3 concluimos que el período mínimo m de $H(x)$ divide á cualquier período n . \square

Proposición 3.1.5. Sean dos aplicaciones $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ y $g : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Y}$ con \mathbb{X}, \mathbb{Y} conjugadas por $H : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ tal que $H \circ f = g \circ H$. Tenemos que x es un punto n -periódico de f si y solo si $H(x)$ es un punto n -periódico de g .

Demostración. Si x es un punto n -periódico de f , entonces por la proposición anterior tenemos que $H(x)$ es un punto m -periódico de g con $m|n$. Tenemos que H es un homeomorfismo luego podemos operar con $H^{-1} : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$ y vemos que siendo $y \in \mathbb{Y}$ un punto m -periódico de g entonces $H^{-1}(y)$ es un punto n -periódico de f con $n|m$. Sea un punto $y \in \mathbb{Y}$ tal que $x = H^{-1}(y) \in \mathbb{X}$. Viendo los dos resultados tenemos que $m = n$. El recíproco se prueba de manera análoga. \square

Proposición 3.1.6. Sean dos aplicaciones $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ y $g : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Y}$ con \mathbb{X}, \mathbb{Y} conjugadas por $H : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ tal que $H \circ f = g \circ H$. Tenemos que x es un punto periódico eventual de f entonces $H(x)$ es un punto periódico eventual de g .

Demostración. Sea x un punto periódico eventual y p un punto n -periódico de f . Luego $f^m(x) = p$ con $f^k(x) \neq p$, $0 \leq k < m$. Tenemos por la proposición anterior que $H(p)$ es un punto n -periódico de g . Usando la conjugación:

$$g^m(H(x)) = H(f^m(x)) = H(p)$$

Por lo que $H(x)$ es un punto periódico eventual de g . Tenemos que $g^k(H(x)) \neq H(p)$ porque si esto fuera cierto al aplicar conjugación llegaríamos a contradicción. \square

Proposición 3.1.7. *Sean dos aplicaciones $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ y $g : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Y}$ con \mathbb{X}, \mathbb{Y} conjugadas por $H : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ tal que $H \circ f = g \circ H$. f tiene un punto x cuya órbita es densa en \mathbb{X} si y sólo si la órbita de $H(x)$ es densa en \mathbb{Y} .*

Demostración. Supongamos que $\mathbb{O}^+(f, x)$ es densa. Veamos que $\mathbb{O}^+(g, H(x))$ es densa en \mathbb{Y} . Para cualquier abierto $U \subset \mathbb{Y}$ no vacío, $H^{-1}(U) \subset \mathbb{X}$ es un abierto dado que H^{-1} es continua porque H es homeomorfismo y este abierto es no vacío porque es epiyectiva. Por densidad de $\mathbb{O}^+(f, x)$ tenemos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que:

$$f^k(x) \in H^{-1}(U) \iff H(g^k(x)) \in U$$

Dado que $f^k \circ H = H \circ g^k$. Por lo que $H(g^k(x))$ interseca a U y tenemos que la órbita es densa. El recíproco podemos verlo considerando H^{-1} . \square

3.2. Caos bajo conjugación

Ahora veremos como se comportan los aspectos estudiados en el Capítulo 2 bajo conjugación. Veremos que ocurre con las aplicaciones topológicamente transitivas, con las aplicaciones que tienen dependencia sensible de las condiciones iniciales, con la entropía topológica de dos aplicaciones conjugadas y finalmente con aplicaciones caóticas.

Teorema 3.2.1. *Sean dos aplicaciones $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ y $g : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Y}$ con \mathbb{X}, \mathbb{Y} semiconjugadas por $H : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ tal que $H \circ f = g \circ H$. Si f es topológicamente transitiva en \mathbb{X} entonces g también lo es en \mathbb{Y} .*

Demostración. Recordemos que g será topológicamente transitiva si para cada dos conjuntos abiertos $V, V' \subset \mathbb{Y}$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $g^k(V') \cap V \neq \emptyset$.

Sean V_1, V_2 dos subconjuntos abiertos de \mathbb{Y} . Como H continua y epiyectiva, entonces los subconjuntos $U_1 = H^{-1}(V_1), U_2 = H^{-1}(V_2)$ son abiertos de \mathbb{X} tal que $H(U_1) = V_1$ y $H(U_2) = V_2$. Como f es topológicamente transitiva, existe un entero $k > 0$ tal que $f^k(U_1) \cap U_2 \neq \emptyset$, o sea hay $x_1 \in U_1$ y $x_2 \in U_2$ con $x_2 = f^k(x_1)$. Haciendo $y_i = H(x_i)$ para $i = 1, 2$ tenemos $y_i \in V_i$ con

$$y_2 = H(x_2) = H(f^k(x_1)) = (H \circ f^k)(x_1) = (g^k \circ H)(x_1) = g^k(H(x_1)) = g^k(y_1)$$

por tanto $g^k(V_1) \cap V_2 \neq \emptyset$. Luego g es topológicamente transitiva. \square

Teorema 3.2.2. *Sean dos aplicaciones $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ y $g : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Y}$ con \mathbb{X}, \mathbb{Y} conjugadas por $H : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ tal que $H \circ f = g \circ H$. Suponiendo que \mathbb{X}, \mathbb{Y} son espacios métricos compactos perfectos, si f tiene dependencia sensible en \mathbb{X} entonces g tiene dependencia sensible en \mathbb{Y} .*

Demostración. Recordemos que una aplicación f se dice que tiene dependencia sensible de las condiciones iniciales si existe un $\delta > 0$ tal que para cada $x \in \mathbb{X}$ y cualquier entorno \mathbb{U}_x de x , existe $y \in \mathbb{U}_x \setminus \{x\}$ y un entero $k \geq 0$ tal que $d(f^k(x), f^k(y)) > \delta$.

Tenemos H homeomorfismo, luego H^{-1} también es un homeomorfismo. Dado que \mathbb{X} y \mathbb{Y} son espacios compactos tenemos que H y H^{-1} son uniformemente continuas. Sea $y_1, y_2 \in \mathbb{Y}$ e $x_1, x_2 \in \mathbb{X}$ tal que $x_1 = H^{-1}(y_1)$, $x_2 = H^{-1}(y_2)$ y también $y_1 = H(x_1)$, $y_2 = H(x_2)$. Como H^{-1} es uniformemente continua, dado $r > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $y_1, y_2 \in \mathbb{Y}$:

$$d_{\mathbb{Y}}(y_1, y_2) < \delta \Rightarrow d_{\mathbb{X}}(H^{-1}(y_1), H^{-1}(y_2)) = d_{\mathbb{X}}(x_1, x_2) < r$$

siendo $d_{\mathbb{X}}, d_{\mathbb{Y}}$ las distancias en \mathbb{X}, \mathbb{Y} respectivamente. Por tanto

$$d_{\mathbb{X}}(x_1, x_2) \geq r \Rightarrow d_{\mathbb{Y}}(H(x_1), H(x_2)) = d_{\mathbb{Y}}(y_1, y_2) \geq \delta \quad (3.1)$$

Sea $y = H(x) \in \mathbb{Y}$, con $x \in \mathbb{X}$. Dado que H es uniformemente continua, dado $\epsilon > 0$ existe $\epsilon' > 0$ tal que $p = H(q) \in U_{\epsilon}(y)$, con $q \in U_{\epsilon'}(x)$. Tenemos así,

$$d_{\mathbb{Y}}(y, p) = d_{\mathbb{Y}}(H(x), H(q)) < \epsilon \text{ cuando } d_{\mathbb{X}}(x, q) < \epsilon' \quad (3.2)$$

Ahora probaremos la dependencia sensible de g en \mathbb{Y} . Tenemos que f tiene dependencia sensible de las condiciones iniciales en \mathbb{X} luego para $q \in U_{\epsilon'}(x)$ y dado $r > 0$ existe $k > 0$ tal que:

$$d_{\mathbb{X}}(f^k(x), f^k(q)) \geq r \text{ para } d_{\mathbb{X}}(x, q) < \epsilon' \quad (3.3)$$

Tomando $f^k(x) = x_1$ y $f^k(q) = x_2$, y usando la desigualdad anterior 3.1 tenemos:

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{X}}(f^k(x), f^k(q)) = d_{\mathbb{X}}(x_1, x_2) \geq r \Rightarrow \\ d_{\mathbb{Y}}(H(x_1), H(x_2)) = d_{\mathbb{Y}}(H(f^k(x)), H(f^k(q))) \geq \delta \end{aligned} \quad (3.4)$$

Ahora usando la conjugación, $H \circ f^k = g^k \circ H \ \forall k \in \mathbb{N}$, nos queda:

$$d_{\mathbb{Y}}(H(f^k(x)), H(f^k(q))) = d_{\mathbb{Y}}(g^k(H(x)), g^k(H(q))) = d_{\mathbb{Y}}(g^k(y), g^k(p)) \quad (3.5)$$

Sustituyendo 3.5 en 3.4 nos queda:

$$d_{\mathbb{X}}(f^k(x), f^k(q)) = d_{\mathbb{X}}(x_1, x_2) \geq r \Rightarrow d_{\mathbb{Y}}(g^k(y), g^k(p)) \geq \delta \quad (3.6)$$

Combinando 3.6 y 3.3 tenemos:

$$d_{\mathbb{Y}}(g^k(y), g^k(p)) \geq \delta \text{ para } d_{\mathbb{X}}(x, q) < \epsilon' \quad (3.7)$$

Por último usando 3.2 y 3.7, podemos decir que existe $k > 0$ tal que:

$$d_{\mathbb{Y}}(g^k(y), g^k(p)) \geq \delta \text{ cuando } d_{\mathbb{Y}}(y, p) < \epsilon$$

Luego g tiene dependencia sensible de las condiciones iniciales en \mathbb{Y} . □

Teorema 3.2.3. *Sean dos aplicaciones $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ y $g : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Y}$ con \mathbb{X}, \mathbb{Y} espacios métricos compactos. Si f y g son conjugadas entonces tienen la misma entropía topológica, $h(\mathbb{X}, f) = h(\mathbb{Y}, g)$.*

Demostración. Sea un homeomorfismo $H : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ tal que $H \circ f = g \circ H$. Como H es uniformemente continuo, dado un $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que:

$$d_{\mathbb{Y}}(H(x), H(y)) < \epsilon$$

cuando $d_{\mathbb{X}}(x, y) < \delta$. Siendo $d_{\mathbb{X}}, d_{\mathbb{Y}}$ las distancias en \mathbb{X}, \mathbb{Y} respectivamente. Podemos observar que $\delta \rightarrow 0$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$.

Por otro lado, tenemos que se cumple para $m \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{X}$:

$$H(f^m(x)) = g^m(H(x))$$

Por lo tanto por las desigualdades anteriores si $p_1, \dots, p_m \in \mathbb{Y}$ son tales que:

$$\max\{d_{\mathbb{Y}}(g^m(H(p_i)), g^m(H(p_j))) : m = 0, \dots, n-1\} \geq \epsilon \text{ para } i \neq j,$$

entonces,

$$\max\{d_{\mathbb{X}}(f^m(p_i), f^m(p_j)) : m = 0, \dots, n-1\} \geq \delta \text{ para } i \neq j.$$

Tenemos así que $\mathbf{N}_f(n, \delta) \geq \mathbf{N}_g(n, \epsilon)$ que por la definición de entropía tenemos que:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbf{N}_f(n, \delta) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbf{N}_g(n, \epsilon)$$

Tomando $\epsilon \rightarrow 0$, entonces $\delta \rightarrow 0$ y tenemos que $h(\mathbb{X}, f) \geq h(\mathbb{Y}, g)$. Para demostrar la igualdad debemos ver la desigualdad contraria que es con el procedimiento análogo, pero considerando $H^{-1} \circ g = f \circ H^{-1}$. Así habríamos acabado. \square

Observación 3.2.1. *Hay que destacar que en estos dos últimos teoremas referidos a la dependencia sensible y la entropía topológica hemos requerido que los espacios sean compactos.*

Teorema 3.2.4. *Sean (\mathbb{X}, f) y (\mathbb{Y}, g) son aplicaciones conjugadas con \mathbb{X}, \mathbb{Y} espacios métricos. Si f es caótica, entonces g es caótica.*

Demostración. Si f es caótica entonces f es transitiva topológica y el conjunto de puntos periódicos de f es denso en A , siendo A un subconjunto invariante de \mathbb{X} . Por el Teorema 3.2.1 y la Proposición 3.1.5 tenemos que g es caótica. \square

Observación 3.2.2. *El teorema anterior es cierto para la definición de Caos de Devaney y también para la definición que depende de la entropía topológica si incluimos la condición de que los espacios sean compactos.*

Luego hemos visto que el caos se conserva bajo conjugación lo cual facilita el estudio de aplicaciones caóticas pues si tenemos dos aplicaciones conjugadas podemos limitarnos a estudiar la más simple.

Capítulo 4

Teorema de Sharkovskii

En este cuarto capítulo estudiaremos uno de los resultados más importantes de los sistemas dinámicos, el Teorema de Sharkovskii. Para su demostración primeramente tendremos que demostrar una serie de teoremas y lemas previos. La referencia seguida ha sido Barreira [4] pág. 75. No ha sido el artículo original [18] pues con el paso del tiempo la demostración se ha acortado aunque sigue siendo extensa.

Definición 4.0.1. Sea $f : I \rightarrow I$ una aplicación continua del intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Sean los intervalos $J, K \subset I$ tales que $K \subset f(J)$. Se dice que J cubre a K , usaremos la siguiente notación: $J \rightarrow K$.

Proposición 4.0.1. $f : I \rightarrow I$ una aplicación continua del intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Si existen intervalos cerrados $I_0, I_1, \dots, I_{n-1} \subset I$ tales que:

$$I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_{n-1} \rightarrow I_0$$

entonces f tiene un punto n -periódico $x \in I$ tal que $f^m(x) \in I_m$ para $m = 0, 1, \dots, n - 1$.

Demostración. Veamos primeramente que existe un intervalo cerrado $J_0 \subset I_0$ tal que $f(J_0) = I_1$. Tenemos que $f(I_0) \supset I_1$ por hipótesis. Existen puntos $a_0, b_0 \in I_0$ cuyas imágenes son los extremos de I_1 . Si J_0 es un intervalo cerrado con extremos a_0, b_0 entonces $f(J_0) = I_1$.

Supongamos ahora que hemos construido m intervalos cerrados tales que:

$$J_0 \supset J_1 \supset \dots \supset J_{m-1}$$

contenidos en I_0 para algún $m < n$ tal que $f^{k+1}(J_k) = I_{k+1}$ para $k = 0, \dots, m - 1$. Entonces tenemos

$$\begin{aligned} f^{m+1}(J_{m-1}) &= f(I_m) \\ f(I_m) &\supset I_{m+1} \end{aligned}$$

y con un argumento análogo vemos que existe un intervalo cerrado $J_m \subset J_{m-1}$ tal que $f^{m+1}(J_m) = I_{m+1}$. Entonces tenemos los intervalos cerrados:

$$J_0 \supset J_1 \supset \cdots \supset J_{n-1}$$

tal que $f^{k+1}(J_k) = I_{k+1}$ para $k = 0, \dots, n-1$, donde $I_n = I_0$. En particular,

$$\begin{aligned} f^n(J_{n-1}) &= I_0 \\ I_0 &\supset J_{n-1} \end{aligned} \tag{4.1}$$

y cada punto $x \in J_{n-1}$ satisface

$$f^m(x) \in f^m(J_{n-1}) \subset f^m(J_{m-1}) = I_m \tag{4.2}$$

para $m = 0, \dots, n-1$. Luego tenemos por la ecuación 4.1 y el Lema 1.1.1 que f^n tiene un punto fijo en J_{n-1} . Entonces, f tiene un punto n -periódico en J_{n-1} que satisface la ecuación 4.2. Hemos demostrado lo deseado. \square

Ahora veremos el teorema enunciado por Li y Yorke:

Teorema 4.0.1 (Período tres implica caos). *Sea $f : I \rightarrow I$ una aplicación continua del intervalo acotado $I \subset \mathbb{R}$. Si f tiene un punto periódico con período 3, entonces tiene puntos periódicos de todos los períodos.*

Demostración. Sean $x_1 < x_2 < x_3$ los elementos de la órbita periódica de período 3. Podemos suponer que $f(x_2) = x_1$ y $f(x_1) = x_3$ (también podemos suponer el orden opuesto, $f(x_2) = x_3$ y $f(x_3) = x_1$). En ambos órdenes del período, tenemos $I \rightarrow I$, tomando $I = [x_2, x_3]$ o $I = [x_1, x_2]$, según la f considerada (por ejemplo, con $I = [x_1, x_2]$ y f que nos lleva en el orden 1321 tenemos que $f(I) = [x_1, x_3]$). Tenemos por la Proposición 4.0.1 que f tiene un punto fijo. Además, sea un entero $n \geq 2$ con $n \neq 3$, tenemos

$$I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow I_2 \rightarrow \overset{n-4}{\cdots} \rightarrow I_2 \rightarrow I_1 \tag{4.3}$$

con $n+1$ elementos, tomando, respectivamente, $I_1 = [x_2, x_3]$ y $I_2 = [x_1, x_2]$. Tenemos por la Proposición 4.0.1 que f tiene un punto n -periódico $x \in I_1$. Si este no tiene período n , entonces $x \in I_1 \cap I_2 = \{x_2\}$. La órbita de x_2 pertenece sucesivamente a los intervalos $I_1, I_2, I_1, I_1, I_2, I_1, \dots$ pues $\mathcal{O}(x_2, f) = \{x_2, x_1, x_3, x_2, x_1, \dots\}$. y entonces tenemos que no puede pertenecer sucesivamente a los intervalos de la ecuación 4.3 a menos que $n = 3$, por lo cual llegamos a contradicción. Esta contradicción nos dice que el punto periódico x tiene período n . \square

Definición 4.0.2. *El orden de Sharkovskii de los números naturales es:*

$$\begin{aligned} 3 \succ 5 \succ 7 \succ \cdots \succ 2 \cdot 3 \succ 2 \cdot 5 \succ 2 \cdot 7 \succ \cdots \\ \cdots \succ 2^2 \cdot 3 \succ 2^2 \cdot 5 \succ 2^2 \cdot 7 \succ \cdots \succ 2^n \cdot 3 \succ 2^n \cdot 5 \succ \cdots \succ 2^3 \succ 2^2 \succ 2 \succ 1 \end{aligned}$$

La relación $a \succ b$ indica que a es mayor en el orden. Su ordenación en orden descendente es la siguiente: primero están todos los impares en orden ascendente desde el 3 (que es

el mayor de todos los naturales), posteriormente la primera potencia de 2 por todos los impares, luego la segunda potencia de 2 por los impares y así sucesivamente. Finalmente, aparecen las potencias de dos en orden decreciente hasta por último el 1. Todos los números naturales aparecen únicamente una vez en el orden de Sharkovskii.

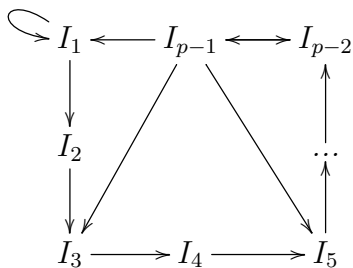
A partir de esta ordenación tenemos el Teorema de Sharkovskii:

Teorema 4.0.2 (Teorema de Sharkovskii). *Sea $f : I \rightarrow I$ una aplicación continua de un intervalo compacto $I \subset \mathbb{R}$. Si f tiene un punto p -periódico y $p \succ q$, entonces f tiene un punto q -periódico.*

Observación 4.0.1. *El Teorema de Li-Yorke como comentamos en la introducción es un corolario del Teorema de Sharkovskii como ahora podemos observar fácilmente al tener sus respectivos enunciados.*

A continuación, daremos dos lemas auxiliares para facilitar la demostración del teorema.

Lema 4.0.1. *Sea $x \in I$ un punto periódico con período impar $p > 1$ tal que no existe puntos periódicos con período impar menor que p . Entonces los intervalos determinados en I por las órbitas de x pueden ser numerados I_1, \dots, I_{p-1} de modo que el grafo obtenido de la relaciones de cobertura entre ellos contiene el siguiente subgrafo*



o lo que es lo mismo

$$I_1 \rightarrow I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_{p-1}$$

$$I_{p-1} \rightarrow I_k \text{ para cada impar } k$$

Demostración. Consideramos el intervalo $I_1 = [u, v]$, donde

$$u = \max\{y \in \mathbb{O}(x, f) : f(y) > y\}$$

$$v = \min\{y \in \mathbb{O}(x, f) : y > u\}$$

Sabemos que por definición de u es el máximo $y \in \mathbb{O}(x, f)$ que cumple $f(y) > y$ y como por definición de v se cumple que $v > u$ tenemos que $f(v) < v$ (tengamos en cuenta que x no es un punto fijo luego $f(v) \neq v$). Tenemos que $f(u) > u$, $f(v) < v$ y $v > u$ luego $f(u) \geq v$ y $f(v) \leq u$. Por lo tanto,

$$I_1 \rightarrow I_1 \tag{4.4}$$

Además, la inclusión $f(I_1) \supset I_1$ es estricta, sino x tendría período 2. Entonces

$$f^p(I_1) \supset f^{p-1}(I_1) \supset \dots \supset f(I_1) \supset I_1$$

y x es p -periódico, tenemos $f^p(I_1) \supset \mathbb{O}(x, f)$ y entonces $f^p(I_1)$ contiene a todos los intervalos determinados por los puntos adyacentes en la órbita de x (estamos considerando la órbita como conjunto).

Sea $r = \text{card}(I^-)$ y $s = \text{card}(I^+)$, siendo $I^- = \mathbb{O}(x, f) \cap (-\infty, u]$ y $I^+ = \mathbb{O}(x, f) \cap [v, +\infty)$.

Tenemos que $r + s = p$, evidentemente $r \neq s$ pues p es impar. Esto implica que hay puntos adyacentes de $\mathbb{O}(x, f)$ en I^- o en I^+ que determinan un intervalo J , tal que solo uno de ellos es mandado por f al otro intervalo. Si no fuera así tendríamos que $f(I^-) \subset I^+$ y $f(I^+) \subset I^-$ porque $f(u) > u$ y $f(v) < v$, pero esto es imposible dado que $r \neq s$. Luego $J \rightarrow I_1$.

Sea

$$I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \cdots \rightarrow I_k \rightarrow I_1$$

el ciclo más corto de la forma $I_1 \rightarrow \dots \rightarrow I_1$ que es diferente de $I_1 \circlearrowright$ pues este último siempre existe como hemos visto antes. Claramente $k \leq p-1$ luego la órbita de x determina $p-1$ intervalos. Sea q el elemento impar de $\{k, k+1\}$. Entonces tenemos:

$$I_1 \rightarrow \cdots \rightarrow I_k \rightarrow I_1$$

y

$$I_1 \rightarrow \cdots \rightarrow I_k \rightarrow I_1 \rightarrow I_1$$

luego por la Proposición 4.0.1 tenemos que f^q tiene un punto fijo y_0 . Veamos que y_0 no es un punto fijo de f , sino tendríamos:

$$y_0 \in I_1 \cap \cdots \cap I_k \subset I_1 \cap I_2 \tag{4.5}$$

y estaría en la órbita de x , lo que nos lleva a contradicción pues x no es un punto fijo. De la minimalidad del período impar p deducimos que $q \geq p$. Entonces como $k \leq p-1$ y q era el elemento impar de $\{k, k+1\}$ tenemos que $k = p-1$. Esto nos muestra que:

$$I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \cdots \rightarrow I_{p-1} \rightarrow I_1 \tag{4.6}$$

que como habíamos visto era el ciclo más corto de la forma $I_1 \rightarrow \dots \rightarrow I_1$ (ignorando $I_1 \circlearrowright$).

Veamos ahora que $I_{p-1} \rightarrow I_k$ con k impar (recordemos que p es impar, luego evidentemente $p-1$ par). Tenemos por lo tanto que $I_{p-1} \rightarrow I_{p-2}$. Verificamos que los intervalos I_i están ordenados ascendentemente en I de la forma:

$$I_{p-1}, I_{p-3}, \dots, I_2, I_1, I_3, \dots, I_{p-2} \tag{4.7}$$

Por lo que $I_1 \rightarrow \cdots \rightarrow I_{p-1} \rightarrow I_1$ es el ciclo más corto de la forma ya mencionada. Podemos concluir viendo que si $I_k \rightarrow I_l$, entonces $l \leq k+1$ (o sino existiría un ciclo más corto de esta forma). Esto implica que si únicamente I_1 cubre a I_1 y I_2 (como hemos visto en las ecuaciones 4.4 y 4.6) y por lo tanto I_2 es adyacente a I_1 (luego $f(I_1)$ es conexo). Entonces tenemos $I_1 = [u, v]$, $I_2 = [w, u]$ con $f(u) = v$ y $f(v) = w$ (también podemos tomar $I_2 = [v, w]$ cambiando la definición de f). Nos quedaremos en el primer

caso dado que el segundo es análogo. Como $f(u) = v$ y I_2 no cubre a I_1 , obtenemos que $f(I_2) \subset [v, +\infty)$. Y como I_2 cubre a I_3 tenemos que $I_3 = [v, t]$, con $t = f(u) = f^2(v)$. Continuando este proceso tendremos el orden de 4.7. Esto implica que:

$$u_{p-1} < u_{p-3} < \cdots < u_2 < u < u_1 < \cdots < u_{p-2}$$

con $u_i = f^i(u)$. De aquí obtenemos que $I_{p-1} = [u_{p-1}, u_{p-3}] \rightarrow I_k$ con k impar tal que $f(u_{p-1}) = u$ y $f(u_{p-3}) = u_{p-2}$. Esto concluye la demostración del lema. \square

Lema 4.0.2. *Si f tiene un punto periódico con período par mayor que 2, entonces tiene un punto 2-periódico.*

Demostración. Sea x un punto p -periódico con $p > 2$ par. Sea el intervalo $I_1 = [u, v]$ como en el lema anterior. Consideremos dos casos:

1. Primero supongamos que no hay puntos adyacentes en la órbita de x determinando un intervalo $J \neq I_1$ que cubre I_1 . Sea y y z respectivamente el mínimo y máximo de la órbita de x . Por construcción $f(u) \geq v$ y entonces $f([y, u])$ interseca $[v, +\infty)$. Por otro lado, tenemos por hipótesis que el intervalo $[y, u]$ no cubre a I_1 y entonces $f([y, u]) \subset [v, +\infty)$. Análogamente podemos ver que $f([v, z]) \subset (-\infty, u]$. Así obtenemos:

$$[y, u] \rightarrow [v, z] \rightarrow [y, u]$$

y por la Proposición 4.0.1 tenemos que f tiene un punto 2-periódico.

2. Ahora supongamos que tenemos puntos adyacentes en la órbita de x determinando un intervalo $I_k \neq I_1$, que cubre a I_1 . Si

$$I_1 \rightarrow \cdots \rightarrow I_k \rightarrow I_1$$

es el ciclo más corto de la forma $I_1 \rightarrow \cdots \rightarrow I_1$ que es diferente de $I_1 \circlearrowleft$, luego $k \leq p - 1$. Tomemos $q \in \{k, k + 1\}$ par, luego con $q \leq p$. Entonces tenemos

$$I_1 \rightarrow \cdots \rightarrow I_k \rightarrow I_1$$

y

$$I_1 \rightarrow \cdots \rightarrow I_k \rightarrow I_1 \rightarrow I_1$$

Por la Proposición 4.0.1 tenemos que f^q tiene un punto fijo y_0 . Podemos observar que y_0 no es un punto fijo de f como ya hemos visto en el Lema anterior. Si p es el menor período par, entonces $q = p$ necesariamente y $k = p - 1$. Procediendo como en el Lema anterior podemos ver que los intervalos I_i deben estar ordenados ascendentemente de la siguiente forma:

$$I_{p-2}, \dots, I_2, I_1, I_3, \dots, I_{p-1}$$

Tenemos por tanto que $I_{p-1} \rightarrow I_k$ para k par. En particular, obtendríamos el ciclo $I_{p-1} \rightarrow I_{p-2} \rightarrow I_{p-1}$ y por la Proposición 4.0.1 tendríamos que f tiene un punto 2-periódico ya que $I_{p-2} \cap I_{p-1} = \emptyset$. Esta contradicción nos muestra que p no puede ser el menor período par. Luego podemos considerar un punto periódico con período par aún menor y repetir el proceso. Así se obtiene el resultado deseado.

□

Finalmente, tras estos lemas procedamos a demostrar el Teorema de Sharkovskii. Antes de comenzar la demostración se recomienda al lector que relea la definición de orden de Sharkovskii (Definición 4.0.2). Enunciaremos nuevamente el teorema para recordar nuestro objetivo.

Teorema 4.0.3 (Teorema de Sharkovskii). *Sea $f : I \rightarrow I$ una aplicación continua de un intervalo compacto $I \subset \mathbb{R}$. Si f tiene un punto p -periódico y $p \succ q$, entonces f tiene un punto q -periódico.*

Demostración. Tendremos 4 casos:

1. $p = 2^k$ y $q = 2^l \prec p$ luego $l < k$.

Tomemos $l > 0$. Si x es un punto p -periódico de f , entonces es un punto periódico de $f^{q/2}$ con período 2^{k-l+1} . Como $k-l+1 \geq 2$, tenemos por el Lema 4.0.2 que $f^{q/2}$ tiene un punto 2-periódico, que además es un punto q -periódico de f .

Tomemos $l = 0$, luego $q = 1$. Si x es un punto p -periódico de f (siendo $p = 2^k$ con $k > 0$) entonces tenemos por el Lema 4.0.2 que f tiene un punto 2-periódico. Este determina un intervalo I_1 en I cuyos extremos son permutados por f . Como f es continua, debe tener un punto fijo en I_1 .

2. $p = 2^k r$ y $q = 2^k s \prec p$ con $r > 1$ impar mínimo y s par.

Observemos que r es el menor período impar de los puntos periódicos de f^{2^k} . Tenemos por el Lema 4.0.1 que existe un ciclo de longitud s . Luego cuando $s < r$ tenemos:

$$I_{r-1} \rightarrow I_{r-s} \rightarrow \cdots \rightarrow I_{r-2} \rightarrow I_{r-1}$$

y cuando $s \geq r$ tenemos:

$$I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \cdots \rightarrow I_{r-1} \rightarrow I_1 \rightarrow I_1 \rightarrow \cdots \rightarrow I_1$$

Tenemos por la Proposición 4.0.1 que f^{2^k} tiene un punto s -periódico que es un punto periódico de f con período $2^k s = q$.

3. $p = 2^k r$ y $q = 2^l \prec p$ con $r > 1$ impar mínimo y $l \leq k$.

Tomando $s = 2$ en el caso 2, tenemos un punto periódico de f con período $q = 2^k s = 2^{k+1}$. Del caso 1 tenemos que f tiene un punto periódico de período 2^l para cada $l \leq k$.

4. $p = 2^k r$ y $q = 2^k s \prec p$ con $r > 1$ impar mínimo y $s > r$ impar.

Nuevamente r es el menor período impar de los puntos periódicos de f^{2^k} . Tenemos por el Lema 4.0.1 que existe un ciclo de longitud s dado por:

$$I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \cdots \rightarrow I_{r-1} \rightarrow I_1 \rightarrow I_1 \rightarrow \cdots \rightarrow I_1$$

Tenemos por la Proposición 4.0.1 que f^{2^k} tiene un punto s -periódico x . Si x es un punto periódico de f con período $2^k s$ entonces hemos acabado. Si no es así, x tiene un período $2^l s$ para algún $l < k$. Tomando $\bar{p} = 2^l s$ y $\bar{q} = 2^l \bar{s} = q$, con $\bar{s} = 2^{k-l} s$. Entonces \bar{s} es par, por lo que por el Caso 2 existe un punto periódico de f con período $\bar{q} = q$.

□

Capítulo 5

La ecuación logística

En este capítulo abordaremos finalmente la ecuación logística que fue presentada históricamente en la introducción. Ahora con los conocimientos adquiridos de los capítulos anteriores procederemos a estudiar su dinámica. Las referencias seguidas son Devaney [5], Layek [10] y Holmgren [8].

Primeramente, recordemos que cuando hablamos de la ecuación logística nos referimos a la familia de curvas:

$$f_r(x) := rx(1 - x) \text{ con } r > 0 \text{ y } x \in [0, 1]$$

Es una familia de parábolas con máximo en $x = 1/2$ donde el valor es $r/4$. Es fácil ver que corta el eje de abscisas en el 0 y en el 1. Empezaremos suponiendo $r < 4$ para que de esta manera la función actúe sobre el intervalo $[0, 1]$ en sí mismo.

Viéndolo como ecuación de modelización del crecimiento da la población la constante r es la tasa de crecimiento de la población y x es la población.

5.1. Puntos fijos y periódicos

Comenzaremos estudiando la teoría vista en el Capítulo 1.

Veamos sus puntos fijos:

$$x(r(1 - x) - 1) = 0$$

Tenemos dos puntos fijos $x_1 = 0$ y $x_2 = 1 - \frac{1}{r}$. Ambos puntos fijos no son iguales pues x_1 siempre existe independientemente del valor de r . En cambio, para la existencia de x_2 como punto fijo de f_r , debe ser $r \geq 1$ pues si no $x_2 \notin [0, 1]$.

Veamos la estabilidad de estos puntos fijos:

Tenemos que $f'(x) = r - 2rx$ por lo que $\lambda(x_1) = r$ y $\lambda(x_2) = r - 2r \cdot \frac{r-1}{r} = 2 - r$. Luego x_1 es estable para $r < 1$. Por otro lado, x_2 será estable para $r \in (1, 3)$.

Veamos ahora sus puntos 2-periódicos mediante $f_r^2(x)$:

$$\begin{aligned} x(r^2(1-x)(1-rx(1-x)) - 1) &= 0 \\ x(r^2(1-x) - r^3x(1-x)^2 - 1) &= 0 \\ x(r^2(1-x) + r^3(1-x-1)(1-x)^2 - 1) &= 0 \\ x(r^2(1-x) + r^3(1-x)^3 - r^3(1-x)^2 - 1) &= 0 \\ x[x - (1 - \frac{1}{r})][r^2(1-x)(1-r) + r^3(1-x)^2 + r] &= 0 \end{aligned}$$

Tenemos así los dos puntos fijos ya conocidos y resolviendo la ecuación de segundo grado (tomando como variable auxiliar $z = 1 - x$) tenemos dos puntos 2-periódicos que son $p = \frac{r+1+\sqrt{(r+1)(r-3)}}{2r}$ y $q = \frac{r+1-\sqrt{(r+1)(r-3)}}{2r}$. Estos dos puntos serán reales si $r \geq 3$.

5.2. Bifurcaciones

Ahora aplicaremos la teoría de bifurcaciones vista en la Sección 1.4 a la ecuación logística.

Proposición 5.2.1. *La ecuación logística tiene una bifurcación transcítica en $r=1$.*

Demostración. Recordemos brevemente que una bifurcación transcítica era en la cual teníamos dos puntos fijos que se intercambian la estabilidad. Hemos visto anteriormente que los puntos fijos son $x_1 = 0$ y $x_2 = 1 - \frac{1}{r}$. x_2 existe únicamente cuando $r \geq 1$. También conocemos cuando son estables, x_1 es estable para $r < 1$ y x_2 es estable para $r \in (1, 3)$. Es inmediato ver que en $r = 1$, x_1 pierde su estabilidad y la gana x_2 . \square

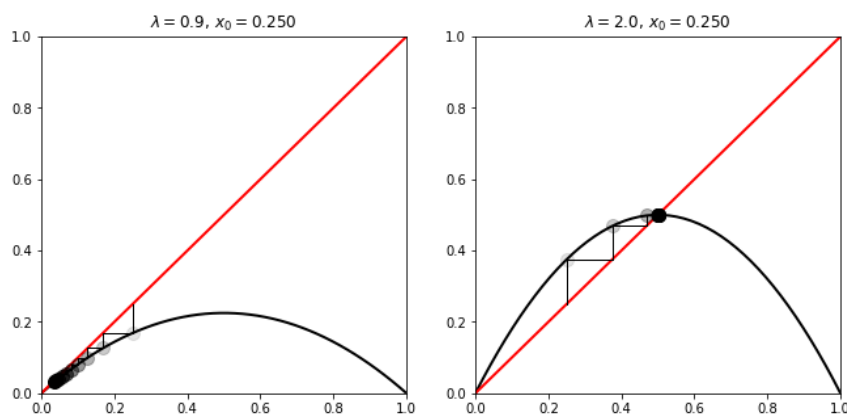


Figura 5.1: Bifurcación transcítica de $f_r(x)$ en $r = 1$

Proposición 5.2.2. *La ecuación logística tiene una bifurcación duplicadora de período en $r=3$.*

Demostración. Por el apartado anterior en el cual estudiábamos los puntos 2-periódicos sabemos que en $r = 3$ aparece una órbita 2-periódica formado por $p = \frac{r+1+\sqrt{(r+1)(r-3)}}{2r}$ y

$q = \frac{r+1-\sqrt{(r+1)(r-3)}}{2r}$. El punto fijo que consideramos es $x_2 = 1 - \frac{1}{r}$ el cual es estable hasta $r = 3$ y pasa a convertirse en inestable. Veamos que la órbita 2-periódica es estable para $r > 3$:

Usando propiedades de la Sección 1.3.4 debemos ver si $|f'_r(p)f'_r(q)| < 1$. Tenemos que $p + q = \frac{r+1}{r}$ y $p \cdot q = \frac{r+1}{r^2}$, además $f'(p) = r - 2rp$ y $f'(q) = r - 2rq$. Luego:

$$\begin{aligned} |(r - 2rp)(r - 2rq)| &< 1 \\ |r^2 - 2r^2q - 2r^2p + 4r^2pq| &< 1 \\ r^2|1 - 2(p + q) + 4pq| &< 1 \\ r^2\left|1 - 2\frac{r+1}{r} + 4\frac{r+1}{r^2}\right| &< 1 \\ |r^2 - 2r(r+1) + 4(r+1)| &< 1 \\ |-r^2 + 2r + 4| &< 1 \\ 2 + 1 &< r < \sqrt{6} + 1 \end{aligned}$$

Luego tenemos que la órbita 2-periódica es estable para $3 < r < \sqrt{6} + 1$.

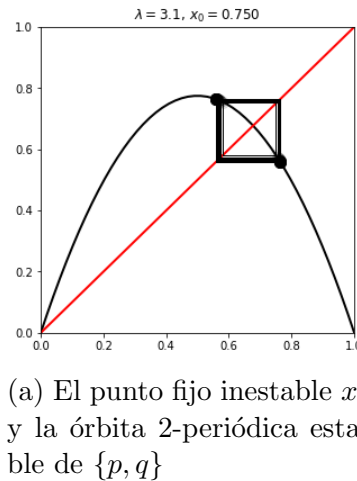
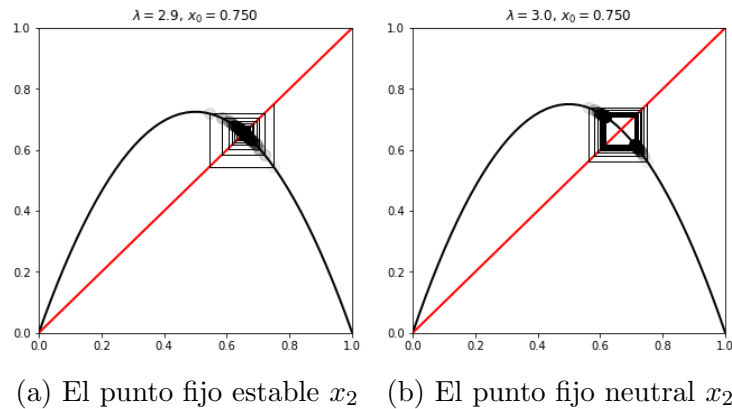


Figura 5.3: Bifurcación duplicadora de período de $f_r(x) = rx(1 - x)$

□

En la ecuación logística sucede un fenómeno que se denomina la cascada duplicadora de período. Consiste en lo siguiente:

Tenemos un punto fijo estable hasta $r = 3$ donde aparece una órbita 2-periódica estable hasta $\sqrt{6} + 1 \approx 3.449489$ que es lo que acabamos de ver. Si continuamos con el estudio observaremos que sucede otra bifurcación duplicadora de período en $r = \sqrt{6} + 1$ y aparece una órbita 4-periódica estable hasta $r \approx 3.544091$ donde sucede el mismo fenómeno, duplicándose nuevamente y apareciendo una órbita 8-periódica. Las bifurcaciones cada vez aparecen más rápidamente y acaba resultando en una órbita densa periódica. Lo veremos más tarde al estudiar su diagrama de bifurcación.

Además podemos ver que aplicando el Teorema 1.3.5 a la ecuación logística tenemos que la derivada Schwarziana es $\mathbb{S}(f_r) = \frac{-6}{(1-2x)^2}$ que es negativa en nuestro intervalo $[0, 1]$ (excepto en $x = 1/2$). Luego como f_r tiene solo un punto crítico que es el $1/2$ y estamos en un intervalo finito tendremos únicamente una órbita periódica estable. Estas órbitas estables son los atractores que veremos en el diagrama.

5.3. La conjugación topológica y el caos

Primeramente, demos unas breves definiciones de topología:

Definición 5.3.1. Sea (\mathbb{X}, τ) un espacio topológico y \mathbb{U} un subconjunto de \mathbb{X} . Diremos que \mathbb{U} es un espacio conexo si no puede ser expresado como unión disjunta de dos conjuntos abiertos no vacíos de la topología.

Definición 5.3.2. Un conjunto \mathbb{X} se llama totalmente desconexo si no tiene subconjuntos conexos con más de un punto. Es decir, los conjuntos conexos de \mathbb{X} son los conjuntos de un punto.

Definición 5.3.3. Un conjunto Λ se llama conjunto Cantor si es cerrado, acotado, totalmente desconexo y perfecto (todos sus puntos son de acumulación).

Hablemos brevemente del conjunto clásico de Cantor que es el ejemplo más famoso de este tipo de conjuntos:

Ejemplo 5.3.1 (El conjunto de Cantor). Se construye tomando el intervalo $[0, 1]$, el cual dividimos en tercios: $[0, 1] = [0, \frac{1}{3}] \cup (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Ahora quitamos el intervalo del medio, el $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, y procedemos a realizar el mismo procedimiento de partir en tercios y sustraer el del medio con los intervalos de los extremos. Así recursivamente. El conjunto de Cantor es el conjunto de los puntos no eliminados. Podemos ver que efectivamente es Cantor en Holmgren [8] pág. 75.

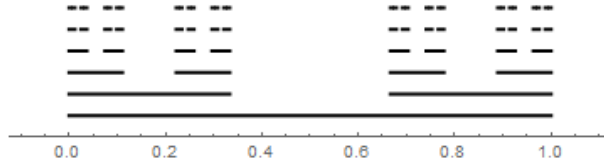


Figura 5.4: El Conjunto de Cantor

Observación 5.3.1. Otra interesante construcción del conjunto de Cantor es considerar cada número real en $[0, 1]$ en base 3. Entonces el Cantor son los $s = 0.s_0s_1s_2\dots$ tal que $s_i \neq 1$. Es decir tenemos $s \in \Sigma^\omega$ considerando como alfabeto los símbolos 0, 2. Eligiendo el 1 en vez del 2 tendremos nuestro ya usado Σ_2 .

Supongamos $r > 4$. A continuación, para cada $n \in \mathbb{N}$ definiremos:

$$A_n = \{x \in I = [0, 1] \mid f_r^k(x) \in I \text{ con } k \leq n \text{ y } f_r^{n+1}(x) \notin [0, 1]\}$$

Es decir, el conjunto A_n son los puntos que en la iteración $n + 1$ -ésima de f no están en I . Es fácil ver, por ejemplo, que $A_0 = (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{r^2-4r}}{2r}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{r^2-4r}}{2r})$ como se puede ver en la Figura 5.5. Observamos que $\bigcup_{k=0}^n A_k$ es la unión de intervalos abiertos. Denotaremos

$\Lambda_r = I - \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$, que serán los puntos que siempre permanecen en I .

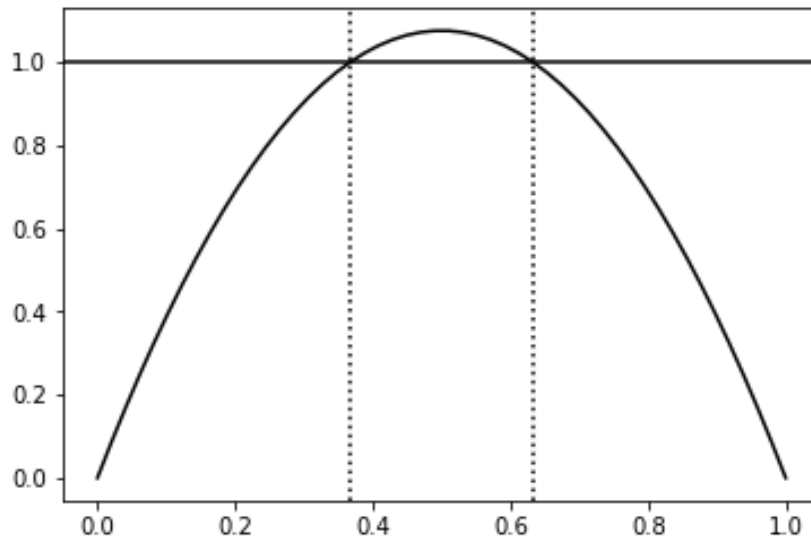


Figura 5.5: Intervalo abierto A_0

Teorema 5.3.1. El conjunto Λ_r es un conjunto invariante para la ecuación logística en $I = [0, 1]$.

Demostración. Nuestro objetivo es probar que si $x \in \Lambda_r$ entonces $f_r^n(x) \in \Lambda_r \forall n$. Tenemos que si $x \in I$ tal que $f_r(x) \notin \Lambda_r$ entonces $x \in \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$, luego $x \notin \Lambda_r$. Luego es claro que

$x \notin \Lambda_r \iff f_r(x) \notin \Lambda_r$. Por lo tanto, $f_r(\Lambda_r) = \Lambda_r$. Luego tenemos que Λ_r es un conjunto invariante para la ecuación logística en I . \square

Teorema 5.3.2. *Para $r > 2 + \sqrt{5}$, el conjunto Λ_r es un conjunto de Cantor.*

Demostración. Veamos que Λ_r cumple la definición de conjunto de Cantor:

- El conjunto Λ_r es cerrado y acotado.

Tenemos que $\Lambda_r = I - \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$. Como cada A_n es abierto, $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ es también abierto y por tanto Λ_r es cerrado. $\Lambda_r \subset [0, 1]$ luego está acotado.

- El conjunto Λ_r es totalmente desconexo, es decir, no contiene intervalos.

Por hipótesis, $r > 2 + \sqrt{5}$, luego $|f'_r(x)| > 1 \forall x \in \Lambda_r$, lo cual veremos a continuación:

Consideremos $A_0 = (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{r^2-4r}}{2r}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{r^2-4r}}{2r})$, llamaremos a sus extremos p_- y p_+ , respectivamente (recordemos que p_-, p_+ son soluciones de $rx(1-x) = 1$).

Entonces $|f'_r(x)| > 1 \forall x \in \Lambda_r \subset I - A_0$ siempre y cuando $|f'_r(p_{\pm})| > 1$ (pues a partir de esos puntos es donde la derivada empieza a disminuir al acercarse al máximo de la parábola). Tenemos que:

$$\begin{aligned} |f'_r(p_{\pm})| > 1 &\Rightarrow |r - 2rp_{\pm}| > 1 \\ |r - r \pm \sqrt{r^2 - 4r}| > 1 &\Rightarrow r^2 - 4r > 1 \\ r > 2 + \sqrt{5} \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que existe $\lambda > 1$ tal que $|f'_r(x)| > \lambda \forall x \in \Lambda_r$ considerando $r > 2 + \sqrt{5}$. Usando la regla de la cadena tenemos que $|(f_r^n)'(x)| > \lambda^n \forall x \in \Lambda_r$. Ahora veamos que Λ_r no contiene ningún intervalo.

Supongamos que fuera posible. Sea $x, y \in \Lambda_r$ dos puntos distintos tales que el intervalo cerrado $[x, y] \subset \Lambda_r$. Por el Teorema del Valor Medio 1.3.1 tenemos que existe $z \in (x, y)$ tal que $|f_r^n(y) - f_r^n(x)| = |(f_r^n)'(z)||y - x|$. Tenemos que $|(f_r^n)'(z)| > \lambda^n$ pues $z \in \Lambda_r$. Por lo que $|f_r^n(y) - f_r^n(x)| > \lambda^n|y - x|$, eligiendo n tal que $\lambda^n|y - x| > 1$. Entonces $|f_r^n(y) - f_r^n(x)| > 1$, luego es claro que una de los dos, $f_r^n(y)$ o $f_r^n(x)$ está fuera del intervalo I . Luego al menos uno de ellos no está en Λ_r . Hemos llegado a contradicción. Por lo que Λ_r es totalmente desconexo.

- El conjunto Λ_r es un conjunto perfecto, es decir, todo punto de Λ_r es punto de acumulación.

Tenemos que Λ_r es cerrado. Luego podemos expresarlo como intersección de conjunto cerrados C_k , donde cada uno de ellos es unión de k intervalos cerrados. Luego, $\Lambda_r = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k$. El conjunto C_1 se forma quitando el conjunto A_0 del intervalo cerrado I . Luego $C_1 = I - A_0 = I_0 \cup I_1 = \bigcup_{i=0,1} I_i$, con I_i dos subintervalos cerrados de I .

Podemos verificar que $f_r(I_0) = f_r(I_1) = I$. Si x e y son los extremos de I_0 (o de I_1), entonces por el Teorema del Valor Medio tenemos que existe $z \in (y, x)$ tal que

$|f_r(y) - f_r(x)| = |f'_r(z)||y - x| > \lambda|y - x|$, λ es mínima para toda pareja por ser Λ_r compacto. Por lo tanto:

$$1 = |f_r(y) - f_r(x)| = L(I) > \lambda L(I_i)$$

donde $L(I_i)$ denota la longitud del intervalo I_i .

$$L(I_i) < \frac{1}{\lambda} L(I) = \frac{1}{\lambda}$$

El conjunto C_2 se forma quitando el conjunto A_1 de C_1 . Esto es:

$$C_2 = C_1 - A_1 = I - (A_1 \cup A_0) = \bigcup_{i_0, i_1=0}^1 I_{i_0 i_1} = (I_{00} \cup I_{01}) \cup (I_{10} \cup I_{11})$$

Tenemos que C_2 es la unión de cuatro subintervalos cerrados y por tanto un conjunto cerrado. Sean a, b dos puntos extremos de, por ejemplo, I_{00} (análogamente para cualquiera de los otros tres subintervalos). Repitiendo el razonamiento anterior tenemos que:

$$L(I_{i_0 i_1}) < \frac{1}{\lambda} L(I_i) < \frac{1}{\lambda^2}$$

Podemos análogamente generar los intervalos cerrados C_k sustrayendo A_{k-1} de C_{k-1} . Podemos expresar por tanto:

$$C_k = \bigcup_{i_0, i_1, \dots, i_{k-1}=0}^1 I_{i_0 i_1 \dots i_{k-1}}$$

y $L(I_{i_0 i_1 \dots i_{k-1}}) < \frac{1}{\lambda^k}$. Podemos así ver que $\Lambda_r = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k$. Cada C_k será cerrado y $C_k \subset C_{k-1}$. Ahora probaremos que cada $x \in \Lambda_r$ es punto de acumulación. Sea $x \in \Lambda_r$, entonces $x \in C_k$, $k \in \mathbb{N}$. Sea para cada $k \in \mathbb{N}$, $a_k = a_k(x)$ uno de los extremos del intervalo cerrado C_k que contiene al punto x , si fuera necesario se cambiaría de extremo. Entonces $a_k \in \Lambda_r$ y x es un punto límite de la sucesión $\{a_k\}$. Luego cada $x \in \Lambda_r$ es punto de acumulación de Λ_r y por lo tanto Λ_r es perfecto.

Hemos visto que Λ_r es cerrado, acotado, totalmente desconexo y perfecto luego es un conjunto de Cantor. \square

Corolario 5.3.1. *Sea Λ_r^n el conjunto de puntos que permanecen en I tras n iteraciones de f_r . La longitud de cada intervalo en Λ_r^n es menor que $\frac{1}{\lambda^n}$.*

Observación 5.3.2. *Λ_r también es un conjunto de Cantor para $4 < r < 2 + \sqrt{5}$, pero inesperadamente es mucho más complicado y extenso de probar. El problema principal aparece en la demostración de que Λ_r sea totalmente desconexo pues no podemos tomar $|f'_r(x)| > 1$ dado que esto se cumple con $r > 2 + \sqrt{5}$ luego el razonamiento cambia. El lector interesado puede estudiar esta demostración en Robinson [16] pág. 32.*

A continuación, veremos como f_r con $r > 4$ es caótica en Λ_r . Para ello usaremos las herramientas de la dinámica simbólica vistos en la Sección 2.6 y la conjugación topológica, vista en el Capítulo 3.

Recordemos previamente a las siguientes definiciones que $\Lambda_r \subset I_0 \cup I_1$. Si $x \in \Lambda_r$ entonces sus órbitas están contenidas en uno de estos dos intervalos.

Definición 5.3.4. *La aplicación itinerario de x se define por:*

$$\mathbf{S}(x) = s_0 s_1 s_2 \dots$$

con $s_j = 0$ si $f_r^j(x) \in I_0$ o $s_j = 1$ si $f_r^j(x) \in I_1$.

Observación 5.3.3. $\mathbf{S}(x) \in \Sigma_2$ pues es una sucesión de ceros y unos.

Teorema 5.3.3. $\mathbf{S} : \Lambda_r \rightarrow \Sigma_2$ es un homeomorfismo.

Demostración. Dividiremos la demostración en ver la inyectividad, la epiyectividad, la continuidad de \mathbf{S} y finalmente la continuidad de \mathbf{S}^{-1} .

1. Veamos que \mathbf{S} es inyectiva por contradicción. Sea $x, y \in \Lambda_r$ y supongamos que $\mathbf{S}(x) = \mathbf{S}(y)$. Entonces, tenemos que para cada n $f_r^n(x)$ y $f_r^n(y)$ caen en el mismo lado, es decir, I_0 o I_1 . Luego f_r es monótona en el intervalo entre $f_r^n(x)$ y $f_r^n(y)$. Por lo que todos los puntos de este intervalo permanecen en $I_0 \cup I_1$. Esto contradice que Λ_r es totalmente desconexo.
2. Ahora veamos que \mathbf{S} es epiyectiva.

Sea $J \subset I$ un intervalo cerrado. Entonces podemos definir:

$$f_r^{-n}(J) = \{x \in I \mid f_r^n(x) \in J\}$$

Si $J \subset I$ es un intervalo cerrado entonces $f_r^{-1}(J)$ consiste en dos subintervalos, uno en I_0 y otro en I_1 .

Sea entonces $s = s_0 s_1 \dots$. Debemos conseguir un $x \in \Lambda_r$ con $\mathbf{S}(x) = s$, por lo cual definimos:

$$\begin{aligned} I_{s_0 s_1 \dots s_n} &= \{x \in I \mid x \in I_{s_0}, f_r(x) \in I_{s_1}, \dots, f_r^n(x) \in I_{s_n}\} \\ &= I_{s_0} \cap f_r^{-1}(I_{s_1}) \cap \dots \cap f_r^{-n}(I_{s_n}) \end{aligned}$$

Podemos afirmar que $I_{s_1 \dots s_n}$ son una sucesión anidada de intervalos cerrados no vacíos. Observemos que:

$$I_{s_0 \dots s_n} = I_{s_0} \cap f_r^{-1}(I_{s_1 \dots s_n})$$

Por inducción, podemos asumir que $I_{s_1 \dots s_n}$ es también un subintervalo no vacío que por la observación anterior consiste en dos intervalos cerrados uno en I_0 y otro en I_1 . Por lo que $I_{s_0} \cap f_r^{-1}(I_{s_1 \dots s_n})$ es solo un intervalo cerrado.

Estos intervalos están anidados pues:

$$I_{s_0 \dots s_n} = I_{s_0 \dots s_{n-1}} \cap f_r^{-n}(I_{s_n}) \subset I_{s_0 \dots s_{n-1}}$$

Podemos concluir que $\bigcap_{n \geq 0} I_{s_0 \dots s_n}$ es no vacío. Observemos que si $x \in \bigcap_{n \geq 0} I_{s_0 \dots s_n}$ entonces $x \in I_{s_0}$, $f_r(x) \in I_{s_1}, \dots$. Por lo tanto $\mathbf{S}(x) = s_0 s_1 \dots$. Esto prueba la epiyectividad de \mathbf{S} .

Observemos que $\bigcap_{n \geq 0} I_{s_0 \dots s_n}$ es un único punto dado que \mathbf{S} es inyectiva.

3. Veamos la continuidad de \mathbf{S} . Sea $x \in \Lambda_r$ y supongamos que $\mathbf{S}(x) = s_0 s_1 \dots$. Sea $\epsilon > 0$, tomemos n tal que $\frac{1}{2^n} < \epsilon$. Consideremos los subintervalos cerrados $I_{t_0 \dots t_n}$ definidos por todas las posibles combinaciones de $t_0 \dots t_n$. Estos subintervalos son disjuntos y Λ_r está contenido en su unión. Hay 2^{n+1} subintervalos y $I_{s_0 s_1 \dots s_n}$ es uno de ellos. Podemos elegir δ tal que $|x - y| < \delta$ e $y \in \Lambda_r$ implica que $y \in I_{s_0 s_1 \dots s_n}$. Entonces $\mathbf{S}(x)$ y $\mathbf{S}(y)$ coinciden en los primeros $n+1$ dígitos. Luego tenemos que $d(\mathbf{S}(x), \mathbf{S}(y)) < \frac{1}{2^n} < \epsilon$. Hemos probado la continuidad de \mathbf{S} .
4. Finalmente, veamos que \mathbf{S}^{-1} es continua. Como Λ_r y Σ_2 son espacios métricos, Λ_r es compacto y \mathbf{S} es biyectiva continua tenemos que \mathbf{S} es un homeomorfismo.

□

Teorema 5.3.4. f_r y σ son topológicamente conjugados mediante \mathbf{S} .

$$\mathbf{S} \circ f_r = \sigma \circ \mathbf{S}$$

Demostración. Un punto $x \in \Lambda_r$ se puede definir únicamente por la sucesión anidada de intervalos $\bigcap_{n \geq 0} I_{s_0 \dots s_n}$ determinada por $\mathbf{S}(x)$. Teníamos que:

$$I_{s_0 \dots s_n} = I_{s_0} \cap f_r^{-1}(I_{s_1}) \cap \dots \cap f_r^{-n}(I_{s_n})$$

Luego podemos expresar $f_r(I_{s_0 \dots s_n})$ como

$$I_{s_1} \cap f_r^{-1}(I_{s_2}) \cap \dots \cap f_r^{-n+1}(I_{s_n}) = I_{s_1 \dots s_n}$$

ya que $f_r(I_{s_0}) = I$. Por lo que tenemos

$$(\mathbf{S} \circ f_r)(x) = (\mathbf{S} \circ f_r)\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} I_{s_0 \dots s_n}\right) = \mathbf{S}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} I_{s_1 \dots s_n}\right) = s_1 s_2 \dots = (\sigma \circ \mathbf{S})(x)$$

□

Tenemos por tanto que f_r es topológicamente conjugado en Λ_r de σ en Σ_2 mediante \mathbf{S} . Por tanto, podemos afirmar lo siguiente de manera inmediata:

Teorema 5.3.5. f_r con $r > 4$ en Λ_r tiene las siguientes propiedades:

1. El conjunto de puntos periódicos de f_r es denso en Λ_r .
2. Hay 2^n puntos n -periódicos.
3. Existe una órbita densa en Λ_r .

Teorema 5.3.6. $f_r : \Lambda_r \rightarrow \Lambda_r$ es caótica en el sentido de Devaney para $r > 4$.

5.4. Diagrama de bifurcación

Finalmente, veremos y explicaremos el diagrama de bifurcación de la ecuación logística. Estos diagramas han sido explicados al final de la Sección 1.4.

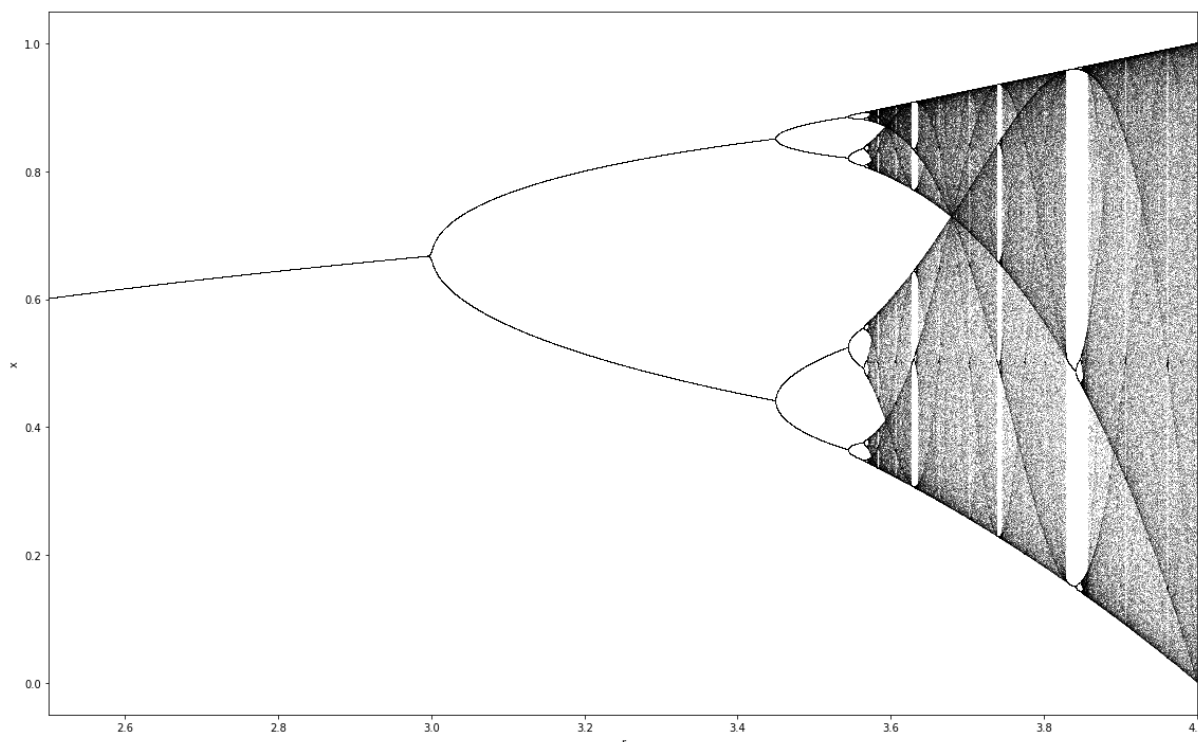


Figura 5.6: Diagrama de bifurcación de la ecuación logística para $2.5 < r < 4$

En la Figura 5.6 podemos observar los atractores que tiene f_r para distintos valores de r que son los que tenemos en el eje de las abscisas. Expliquemos los diferentes casos:

- Si $r < 1$ sabemos que el atractor sería el punto fijo 0.
- Si $1 < r < 3$ tenemos como atractor el punto fijo $\frac{r-1}{r}$.
- En $r = 3$ comienza la cascada duplicadora de período y aparecen dos puntos periódicos estables que pierden su estabilidad en $r = \sqrt{6} + 1 \approx 3.449489$ donde aparece la órbita 4-periódica. Podemos observar como rápidamente sucede la cascada duplicadora de período y se convierte en una órbita periódica densa.
- Podemos observar que en $1 + \sqrt{8} \approx 3.828427$ comienza la órbita 3-periódica estable que rápidamente se transforma en tres cascadas duplicadoras de período. Esta órbita 3-periódica puede ser hallada de diversas maneras, la más reciente puede ser vista en el artículo de C. Zhang [24]. Utilizando el Teorema de Sharkovskii, visto en el Capítulo 4, podemos afirmar que hay órbitas periódicas de todos los períodos y no aparecen en el diagrama porque son inestables.
- A partir de $r = 4$ sabemos que la ecuación logística es caótica y la mayoría de los puntos del intervalo $[0, 1]$ abandonan este tras sucesivas iteraciones.

Apéndice A

Código de las imágenes

Para el lector interesado en como se han realizado las imágenes que ilustran la Sección 1.4 a continuación se le muestra el código utilizado en lenguaje Python para obtenerlas, la idea proviene de Rossant [17]. Mostraremos el código para poder ver puntos fijos y por ejemplo el de la bifurcación duplicadora de período para la ecuación logística. El código es análogo para todas las imágenes de la sección Teoría de la bifurcación, únicamente basta con modificar la ecuación y el parámetro a estudiar.

```
# Primeramente importaremos las librerías necesarias
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Definimos la función logística
def f(r, x):
    return r*x*(1-x)

# Definimos para hacer las gráficas de los puntos fijos

def plot_system(r, ax=None):
    t = np.linspace(0, 1) # t pueda tener valores desde el 0 hasta el 1
    ax.plot(t, f(r, t), 'k', lw=2) # Plot de la función
    ax.plot([0, 1], [0, 1], 'r', lw=2) # Plot de la ecuación y=x
    ax.set_title(f"$r={r:.5f}$") # Valor del parámetro con 5 decimales

fig, (ax1) = plt.subplots(1, 1, figsize=(5, 5), sharey=True)
plot_system(3, ax1)
# Hemos puesto que se visualice los puntos fijos para r=3

# A continuación el código será para ver el comportamiento
# de una órbita de un punto dado

def plot_system(r, x0, n, ax=None):
    # Ahora se añade el punto y n del número de iteraciones
```

```

t = np.linspace(0, 1)
ax.plot(t, f(r, t), 'k', lw=2)
ax.plot([0, 1], [0, 1], 'r', lw=2)
x = x0
for i in range(n):
    y = f(r, x) #Hallamos de manera recursiva y=f_r(x)
    # Pintamos las líneas
    ax.plot([x, x], [x, y], 'k', lw=1)
    ax.plot([x, y], [y, y], 'k', lw=1)
    # Se pintan las distintas posiciones con opacidad creciente
    ax.plot([x], [y], 'ok', ms=10,
            alpha=(i + 1) / n)
    x = y
# Ponemos límites por si la órbita se escapa
ax.set_xlim(0, 1)
ax.set_ylim(0, 1)
ax.set_title(f"$\lambda$={r:5.1f}, \, x_0={x0:5.3f}$")

fig, (ax1) = plt.subplots(1, 1, figsize=(5, 5),
                          sharey=True)
plot_system(3.1, 0.75, 20, ax1)
# Elegimos el valor de r, x0 y n

```

Ahora veremos el código para crear el Diagrama de Bifurcación de la ecuación logística.

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def logistic(r, x):
    return r*x*(1 - x)

n = 10000
r = np.linspace(2.5, 4.0, n) # Tomamos n valores de r entre 2.5 y 4

iterations = 1000
last = 100

x = 1e-5 * np.ones(n)
# Todos nuestros sistemas inicializan en la misma condición

fig, (ax1) = plt.subplots(1, 1, figsize=(8, 5),
                          sharex=True)
for i in range(iterations):
    x = logistic(r, x)
    # Creamos cada camino del diagrama
    # quedándonos con las últimas 100 iteraciones

```

```
    if i >= (iterations - last):
        ax1.plot(r, x, ',k', alpha=.25)
ax1.set_xlim(2.5, 4)
ax1.set_xlabel('r') # Nombramos los ejes
ax1.set_ylabel('x')
plt.tight_layout()
```

Bibliografía

- [1] Marcel Ausloos and Michel Dirickx, *The logistic map and the route to chaos: From the beginnings to modern applications*, Springer Science & Business Media, 2006.
- [2] Jacques M. Bahi and Christophe Guyeux, *Discrete dynamical systems and chaotic machines: theory and applications*, CRC Press, 2013.
- [3] John Banks, Jeffrey Brooks, Grant Cairns, Gary Davis, and Peter Stacey, *On devaney's definition of chaos*, The American Mathematical Monthly **99** (1992), no. 4, 332–334.
- [4] Luis Barreira and Claudia Valls, *Dynamical systems: An introduction*, Springer Science & Business Media, 2012.
- [5] Robert L. Devaney, *An introduction to chaotic dynamical systems, 2nd edition*, Addison-Wesley, 1989.
- [6] Robert L. Devaney, *A first course in chaotic dynamical systems: Theory and experiment*, Addison-Wesley, 1992.
- [7] Enrico Formenti, *Automates cellulaires et chaos: de la vision topologique à la vision algorithmique*, Ph.D. thesis, Lyon, École Normale Supérieure, 1998.
- [8] Richard A. Holmgren, *A first course in discrete dynamical systems*, Springer Science & Business Media, 2012.
- [9] Anatole Katok and Boris Hasselblatt, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, vol. 54, Cambridge university press, 1995.
- [10] G.C. Layek, *An introduction to dynamical systems and chaos*, Springer, 2015.
- [11] Tien-Yien Li and James A. Yorke, *Period three implies chaos*, The American Mathematical Monthly **82** (1975), no. 10, 985–992.
- [12] Edward Lorenz, *The butterfly effect*, World Scientific Series on Nonlinear Science Series A **39** (2000), 91–94.
- [13] Robert M. May, *Simple mathematical models with very complicated dynamics*, Nature **261** (1976), no. 5560, 459.
- [14] Adilson E. Motter and David K. Campbell, *Chaos at fifty*, Phys. Today **66** (2013), no. 5, 27.

- [15] Raymond Pearl and Lowell J Reed, *On the rate of growth of the population of the united states since 1790 and its mathematical representation*, Proceedings of the national academy of sciences **6** (1920), no. 6, 275–288.
- [16] Clark Robinson, *Dynamical systems: stability, symbolic dynamics, and chaos*, CRC press, 1998.
- [17] Cyrille Rossant, *Python interactive computing and visualization cookbook: Over 100 hands-on recipes to sharpen your skills in high-performance numerical computing and data science in the jupyter notebook*, Packt Publishing Ltd, 2018.
- [18] Oleksandr Mykolayovych Sharkovsky, *Coexistence of the cycles of a continuous mapping of the line into itself*, Ukrainskij Matematicheskij Zhurnal **16** (1964), no. 01, 61–71.
- [19] David Singer, *Stable orbits and bifurcation of maps of the interval*, SIAM Journal on Applied Mathematics **35** (1978), no. 2, 260–267.
- [20] Shlomo Sternberg, *Dynamical systems*, Courier Corporation, 2010.
- [21] Gerald Teschl, *Ordinary differential equations and dynamical systems*, vol. 140, American Mathematical Soc., 2012.
- [22] Hans Thunberg, *Periodicity versus chaos in one-dimensional dynamics*, SIAM review **43** (2001), no. 1, 3–30.
- [23] Pierre-François Verhulst, *Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement*, Corresp. Math. Phys. **10** (1838), 113–126.
- [24] Cheng Zhang, *Period three begins*, Mathematics Magazine **83** (2010), no. 4, 295–297.