MEMORIA DE EJECUCIÓN DEL PROYECTO DE INNOVACIÓN DOCENTE ID2019/077

Título: ¿QUÉ PUEDO HACER COMO PROFESOR PARA QUE LOS ALUMNOS NO ABANDONEN MIS ASIGNATURAS?

Coordinador: HIGINIO RAMOS CALLE

Participantes: SUSANA NIETO ISIDRO

Lugar de ejecución: ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR DE ZAMORA. UNIVERSIDAD DE SALAMANCA.

¿QUÉ PUEDO HACER COMO PROFESOR PARA QUE LOS ALUMNOS NO ABANDONEN MIS ASIGNATURAS?

Este proyecto ha sido desarrollado durante el primer cuatrimestre del curso 2019-2020 en la E.P.S. de Zamora, bajo la coordinación del Profesor D. Higinio Ramos Calle, en colaboración con la profesora D.ª Susana Nieto Isidro, los cuales imparten docencia en distintas titulaciones de Ingeniería en la ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR DE ZAMORA (Universidad de Salamanca).

INTRODUCCIÓN

El objetivo de este Proyecto de Innovación Docente es el tratar de reducir el abandono escolar en la Universidad. Concretamente se ha aplicado a la asignatura MATEMÁTICAS I, que se cursa en a E.P.S. de Zamora, en los grados: Grado en Ingeniería Mecánica, Grado de Ingeniería de Materiales, Doble Grado en Ingeniería Mecánica y de Materiales, y Grado en Ingeniería Agroalimentaria.

El abandono escolar, sobre todo en la etapa de enseñanza obligatoria, constituye un verdadero problema del que ya llevan tiempo ocupándose las autoridades académicas. Así por ejemplo en Estados Unidos existe desde 1986 el National Dropout Prevention Center (NDPC) que trabaja muy activamente para atajar el problema, y en Europa, la Comisión Europea cuenta con una comisión especial (ECEC) que desde hace unos años se ha propuesto como objetivo reducir el abandono escolar a un porcentaje menor del 10%, con la mirada puesta en el año 2020.

Este abandono de los estudios no es ajeno a la Universidad. El Higher Education Funding Council for England, en un estudio realizado, determinó que más del 8% de los estudiantes universitarios abandonan en primer año. Según otros estudios del Consejo de Universidades, en España, los alumnos que abandonan los estudios universitarios se sitúan en torno al 32%.

En las asignaturas en las que se centra el proyecto (tienen el mismo título, MATEMÁTICAS I, pero se imparte en distintos grados) hemos constatado en los últimos años un abandono en torno al 25%. Nos parece una cifra muy elevada, que conlleva efectos económicos negativos y el menoscabo de la autoestima y de la capacidad de los jóvenes para desarrollar sus capacidades personales y sociales. El objetivo del proyecto es reducir al máximo posible el abandono de las asignaturas mediante un enfoque personalizado que incluye un diagnóstico de la situación, selección de los estudiantes con alto riesgo de abandono, apoyo on-line, un programa de tutorías personalizadas, clases de refuerzo complementarias, control de asistencia, etc.

COMPOSICIÓN DEL EQUIPO

Los dos profesores implicados en el proyecto son miembros del Departamento de Matemática Aplicada e imparten docencia en los distintos grados de Ingeniería de la Escuela Politécnica Superior de Zamora.

Los dos profesores que forman el equipo de trabajo estamos interesados en el mejor desempeño del proceso educativo, y prueba de ello es que hemos participado a lo largo de nuestras carreras docentes, en numerosas actividades relacionadas con la docencia. Sólo mostramos a continuación las de los últimos cinco cursos para no alargar la lista desmesuradamente.

Proyectos nacionales de investigación de tipo educativo (últimos cinco años):

- Análisis de las herramientas de evaluación de la calidad docente mediante contrastes basados en estándares internacionales de excelencia, EA2011-0113. Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, Programa de Estudios y Análisis.
- Evaluación, Formación e Innovación sobre competencias clave en Educación Secundaria: TIC, Competencia INformacional y Resolución de COnflictos (EFI-CINCO), EDU2012-34000. Ministerio de Economía y Competitividad. Proyectos I+D, Subprograma de Proyectos de Investigación fundamental no orientada.
- Evaluación de impacto del desarrollo de competencias básicas sobre el rendimiento académico en Educación Secundaria: Propuesta de Formación e Innovación docente, EDU2015-64524-P. Ministerio de Economía y Competitividad.

Proyectos de Innovación docente dirigidos por algún miembro del equipo (últimos cinco cursos):

- Una experiencia de aplicación de rúbricas para la evaluación de trabajos de matemática aplicada en Ingeniería (Proyecto ID2014-0067).
- Una estrategia para disminuir las respuestas en blanco en los exámenes de matemáticas de los primeros cursos de ingeniería (Proyecto ID2015-0098).

- Fomento del uso del programa Mathematica en las asignaturas de ingenierías (Proyecto ID2016-190).
- Elaboración de recursos didácticos para ingenieria mediante el programa Mathematica (Proyecto ID2017-079).
- Programa on-line de apoyo en matematicas basicas en la Escuela Politecnica Superior de Zamora (Proyecto ID2018-202).

Proyectos de Innovación docente en que han participado (últimos cinco cursos):

- EMCVV2: Elaboración de materiales de Cálculo en varias variables: nuevas aportaciones (Proyecto ID2014-0235)
- Implantación de un sistema integral de gestión del conocimiento para los procesos de innovación docente de la Universidad de Salamanca (Proyecto ID2014-0312)
- Bachillerato de Excelencia. E.P.S. /I.E.S. Claudio Moyano. Zamora. Curso 2014-2015 (Proyecto ID2014/0326).
- Aplicación de automatismos a los procesos de molienda (Proyecto ID2014/0134)
- Definición de un proceso de gestión de la innovación docente en la Universidad de Salamanca sobre la base de un sistema integral de gestión del conocimiento (Proyecto ID2015/0045).

Ponencias de contenido educativo presentadas por algún miembro del equipo (últimos cinco cursos):

- Second Workshop on Information and Communication Technology in Higher Education: Learning Mathematics (2014), *Materiales para un curso de cálculo en varias variables*.
- 9ª Conferencia Ibérica en Sistemas y Tecnologías de la Información (2014) Visualización de funciones de dos variables mediante el programa Mathematica (explorando las posibilidades pedagógicas del programa más allá de lo evidente).
- Technological Ecosystems for Enhancing Multiculturality (2014), A global approach to improve the mathematical level of engineering students.
- Technological Ecosystems for Enhancing Multiculturality (2014), *Evaluation in education and guidance*.

- Frontiers in Mathematics and Science Education Research Conference (2014) Cryptography: optional subject in the degree in computer engineering in information technologies

- Frontiers in Mathematics and Science Education Research Conference (2014) *New Trends in computer math teaching*

- 17th Seminar of the Mathematical Working Group of Société Européene pour la Formation des Ingénieurs (2014) *E-Assessment and Mathematical Learning: A Spanish Overview*

- XVII Congreso Nacional y III Internacional de Investigación Educativa (2015), Aprender de los errores: una estrategia didáctica para mejorar las habilidades matemáticas de los estudiantes universitarios.

- III Congreso Internacional sobre Aprendizaje, Innovación y Competitividad (2015), Como mejorar las capacidades de visualización tridimensional de los estudiantes de Ingeniería.

- IX Congreso Internacional de Docencia Universitaria e Innovación (2016). *De la Innovación a la Investigación en docencia universitaria* (Scholarship of Teaching and Learning, SoTL), Impactos de la innovación en la docencia y el aprendizaje.

- 13th International Congress on Mathematical Education (2016), A novel procedure for obtaining indefinite integrals using the concept of inverse of a function.

- XVIII Simposio Internacional de Informática Educativa (2016) Construcción de funciones booleanas extendidas a partir de tablas de verdad utilizando el programa Mathematica.

- Fourth International Conference on Technological Ecosystems for Enhancing Multiculturality (2016), Salamanca. *Dynamic visualization of the relative position of straight lines on the plane using Mathematica*

- Jornadas Ingeniería para Matemáticas IngxMat (2017). Mathematica, geometría y resolución de sistemas de ecuaciones.

- XVIII Congreso Internacional de Investigación Educativa (2017), Una experiencia de uso de una rúbrica para evaluar trabajos de matemáticas en ingeniería

- VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (2017) Representación interactiva de rectas y planos y sus posiciones relativas en el espacio afín utilizando Mathematica.

- VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, (2017) Representaciones gráficas y resolución de ecuaciones y sistemas no lineales por métodos numéricos: dos aspectos complementarios. Aplicación en el caso del sistema Mathematica.

- IV Congreso Internacional sobre Aprendizaje, Innovación y Competitividad (CINAIC 2017), Zaragoza. Un proyecto interdepartamental de promoción de herramientas tecnológicas en ingeniería. El caso del sistema Mathematica.

- Technological Ecosystems for Enhancing Multiculturality (2019), General versus specific recipients for online training courses.

Publicaciones de tipo educativo en revistas (últimos cinco años):

- Nieto, S and Ramos, H. (2014) Improving mathematical competencies of students accessing to Higher Education from Vocational Training Modules. *Journal of Cases on Information Technologies*, 16 (3), pp. 56-69.

- Nieto, S and Ramos, H. (2016). Uso de un Programa de Cálculo Simbólico para Reforzar las Habilidades Espaciales de los Estudiantes de Ingeniería. *VAEP-RITA*, 4 (2), pp. 57-64.

- Nieto, S and Ramos, H. (2017). Use of a Symbolic Computation Program to Reinforce the Spatial Abilities of Engineering Students, *Revista Iberoamericana de Tecnologias del Aprendizaje* 12 (1), pp. 37-44.

- Nieto, S., Martínez-Abad, F. and Rodríguez-Conde, M.J. (2017) La influencia de la elección de materias en la Prueba de Acceso a la Universidad en los conocimientos matemáticos de los estudiantes de Ingeniería. *Revista Complutense de Educación* 28 (1) 125-144.

Proyectos fin de carrera/fin de grado, dirigidos en la E.P.S de Zamora por algún miembro del equipo:

- Interpretación geométrica de los métodos de resolución de ecuaciones no lineales (2014).

- Métodos libres de derivadas para la aproximación de raíces de ecuaciones no lineales (2014)

- Métodos en bloque para resolver problemas de valor inicial de ecuaciones diferenciales de segundo orden (2015)

- Métodos en bloque para la resolución de problemas de valor inicial de primer orden (2015).

- Métodos numéricos para la aproximación de raíces múltiples de ecuaciones no lineales (2017).

- Autómatas de Wolfram (2017).

- La variable Gamma en teoría de colas y confiabilidad de productos y sistemas (2017).

- Analisis de metodos libres de derivadas para la resolucion de ecuaciones no lineales (2018)
- Formulacion secuencial y global de metodos en bloque para la resolucion de problemas diferenciales de segundo orden (2019).
- Análisis de métodos multipunto para la resolución de ecuaciones no lineales (2019).
- Reformulación eficiente de métodos de Runge-Kutta implícitos como métodos híbridos (2019).

DESARROLLO DEL PROYECTO

El proyecto se ha desarrollado a lo largo del primer cuatrimestre del curso 2019-2020, correspondiendo al desarrollo de la asignatura MATEMÁTICAS I que se imparte en las titulaciones de Grado de la Escuela Politécnica Superior de Zamora antes mencionadas. Hemos de señalar que la asistencia a clase no es obligatoria, lo que hace que el absentismo se pueda manifestar de forma más evidente. Esto puede traducirse en un abandono definitivo si el absenstismo perdura en el tiempo, por cuanto el alumno desconecta cada vez más con la materia de estudio.

Se eligió la asignatura de MATEMÁTICAS I porque es una de las que tiene más alumnos matriculados, para que así los datos obtenidos resultaran más representativos. El hecho de que sea una asignatura de primer curso también fue determinante en la elección, pues en el primer curso es donde más deserciones se producen. Es un curso clave por cuanto se completa la transición entre secundaria y universidad, y en muchas ocasiones, además de otros factores, entran en juego la integración académica y la adecuada elección de los estudios.

A partir de las pruebas iniciales y de los datos de matrícula se detectaron 47 posibles casos de alumnos susceptibles de abandono, de los cuales 11 se encontraban entre los más probables (por los malos resultados en los test iniciales, aun siendo alumnos que repetían la matrícula en la asignatura).

Se les comunicó la posibilidad de acceder a clases de refuerzo (una clase semanal de carácter optativo) así como la posibilidad de acceder a contenidos básicos de la asignatura para reforzar los conocimientos (un curso en Studium, que se puso a disposición de todos los alumnos).

Esta asignatura de primer curso se imparte a los alumnos a lo largo de cuatro horas semanales. De ellas, una hora semanal se utiliza para trabajar en las aulas de Informática del Campus las prácticas correspondientes.

Las prácticas concretas que se han realizado en las aulas de informática se detallan a continuación:

- Matemáticas I:
  - 1-Introducción
  - 2-Desigualdades y funciones
  - 3-Funciones inversas
  - 4-Método de bisección
  - 5-Limites y continuidad de funciones
  - 6-Desarrollo de Taylor
  - 7-Aproximación de raíces de ecuaciones mediante el método de Newton
  - 8-Representación gráfica de curvas
  - 9-Derivación e integración con Mathematica
  - 10-Integración numérica
  -

Se llevó un control de asistencia a las prácticas, no debiendo hacerse ninguna observación particular en este sentido, pues la mayoría de los alumnos acudieron con asiduidad.
A lo largo del curso se mantuvieron tutorías con los alumnos para aconsejarles y resolver sus dudas relacionadas con el desarrollo de la asignatura. No hay que señalar en este sentido ninguna incidencia de especial interés.

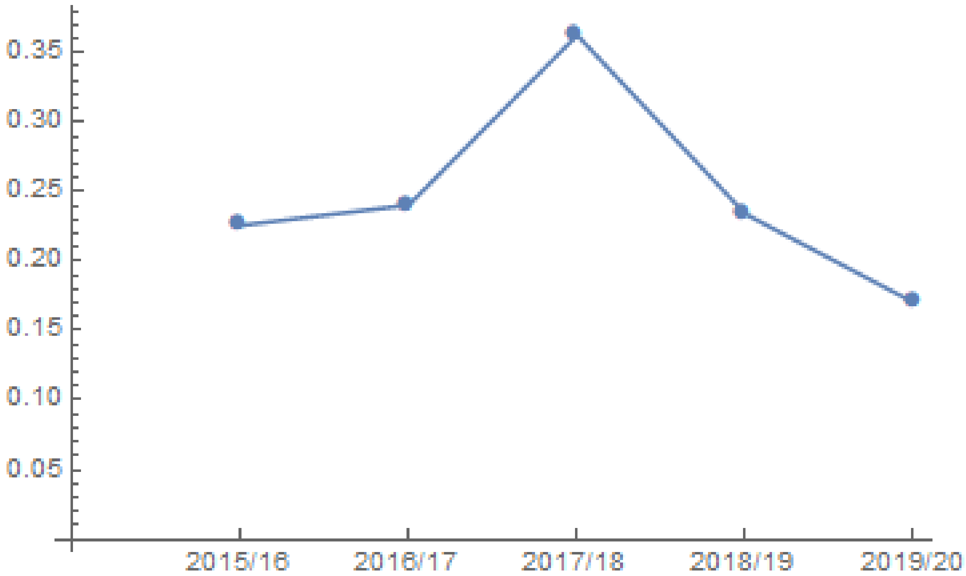
RESULTADOS

El análisis de resultados se referirá a los datos referidos a los últimos cinco cursos.

En el cuadro adjunto se incluyen el número de alumnos totales matriculados en la asignatura, el número de alumnos que abandonaron la asignatura y el porcentaje de abandono

	Nº alumnos matriculados	Nº aumnos que abandonaron	Porcentaje de abandono
2015-2016	93	21	22.58%
2016-2017	79	19	24.05%
2017-2018	102	37	36.27%
2018-2019	94	22	23.40%
2019-2020	94	16	17.02%

En la gráfica que sigue se aprecia mejor la evolución del abandono, medido en porcentajes.



La media de abandono en los cinco cursos es del 24.66%, de manera que el dato correspondiente al último curso es el mejor de todos. Esto nos hace pensar que algunas de las medidas adoptadas pueden haber influido en la disminución de la tasa de abandono. Nuestra intención es seguir manteniendo las estrategias señaladas, y así en el futuro ver si se mantiene el descenso el el porcentaje de abandono. Naturalmente, se podrán tomas otras medidas que estimemos convenientes.

CONCLUSIONES

Podemos destacar las siguiente conclusiones sobre el proyecto realizado:

1. Creemos que el principal objetivo del proyecto, que era disminuir la tasa de abandono de la asignatura, se ha cumplido.
2. Pensamos que este tipo de actuaciones son importantes por cuanto cada alumno que abandona supone una pérdida económica irreparable, y una posible vocación perdida.
3. Las actuaciones que se han llevado a cabo para tratar de reducir el abandono parecen haber sido efectivas, si bien no es posible cuantificar en qué medida. Debido a la crisis generada por la pandemia global que estamos sufriendo, habrá que pensar en potenciar más la enseñanza online, con medidas de control que permitan determinar el grado de asistencia.

BIBLIOGRAFÍA:

Agudo, J.C. (2017). ¿Pueden los MOOC favorecer el aprendizaje disminuyendo las tasas de abandono universitario? Revista Iberoamericana de Educación a Distancia, 20(1), 125-143.

Antúnez, A., Cervero, A., Solano, P., Bernardo, I., & Carbajal, R. (2017). Engagement: a new perspective for reducing dropout through selfregulation. In J.A. González-Pienda, A. Bernardo, J.C. Núñez & C. Rodríguez (Eds.). Factors affecting academic performance (pp. 25-46). New York: Nova Science Publishers.

Araque, F., Roldán, C., & Salguero, A. (2009). Factors influencing university drop outrates. Computers & Education, 53, 563-57. org/10.1016/j.compedu.2009.03.013

Belloc, F., Maruotti, A., & Petrella, L. (2011). How individual characteristics affect university students drop-out: a semiparamentric mixed-effects model for an Italian case study. Journal of Applied Statistics, 38(10), 2225-2239. 10.1080/02664763.2010.545373

Bethencourt, J., Cabrera, L., Hernández, J., Álvarez, P., y González, M. (2008). Variables psicológicas y educativas en el abandono universitario. Revista Electrónica de Investigación Psicoeducativa, 6(3), 603-622.

Cabrera, L., Bethencourt, J.T., González, M., y Álvarez, P. (2006). Un estudio transversal retrospectivo sobre la prolongación y abandono de estudios universitarios. Revista Electrónica de Investigación y Evaluación Educativa, 12(1), 105-127.

Castaño, E., Gallón, S., Gómez, K., y Vázquez, J. (2008). Análisis de los factores asociados a la deserción estudiantil en la Educación Superior. Revista de Educación, 345, 255-280.

Corominas Rovira E. (2001). La transición a los estudios universitarios. Abandono o cambio en el primer año de universidad. Revista de Investigación Educativa, Vol. 19, n.º 1, 127-151.

Cox, L. (2016). Absentismo en las aulas universitarias. Contextos, 35, 69-80.

Esteban, M., Bernardo, A., y Rodríguez-Muñiz, L.J. (2016). Permanencia en la universidad: la importancia de un buen comienzo. Aula Abierta, 44, 1-6.

Fernández, F., Arco, J L., López, S., y Heilborn, V.A. (2011). Prevención del fracaso académico universitario mediante tutoría entre iguales. Revista Latinoamericana de Psicología, 43(1), 59-71.

García, A., y Adrogué, C. (2015). Abandono de los estudios universitarios: dimensión, factores asociados y desafíos de la política pública. Revista Fuentes, 16, 85-106. http://dx.doi.org/10.12795/revistafuentes.2015.i16.04

González, M., Álvarez, P., Cabrera, L., y Bethencourt, J. (2007). El abandono de los estudios universitarios: factores determinantes y medidas preventivas. Revista Española de Pedagogía, 45(236), 71-85.

Nieto, S., y Ramos, H. (2012). Pre-knowledge of basic mathematics topics in engineering students in Spain. *16th SEFI-MWG European Seminar on Mathematics in Engineering Education*.

Nieto, S y Ramos, H. (2014). A global approach to improve the mathematical level of engineering students. *Proceedings of the Second International Conference on Technological Ecosystem for Enhancing Multiculturality*, pp. 435-440.

Nieto, S., y Ramos, H. (2017). Use of a symbolic computation program to reinforce the spatial abilities of engineering students. *IEEE Revista Iberoamericana de Tecnologías del Aprendizaje*, 12 (1), 37-44.

Ramos, H. y Nieto, S. (2014) Visualización de funciones de dos variables mediante el programa *Mathematica* (explorando las posibilidades pedagógicas del programa más allá de lo evidente). *Sistemas y Tecnologías de Información.* Vol. I, pp. 1021-1026.

Ramos, H.; Rodríguez-Sánchez, G.; Queiruga, A.; Hernández-Encinas, A.; Nieto, S.; Martín del Rey, A.; de la Villa, A. and Pérez-Gómez, S. (2014). Materials for a course in Calculus on several variables: An example of inter-university collaboration," *9th Iberian Conference on Information Systems and Technologies (CISTI),* pp. 1-4.

Thomas, M. and oth (1996). Student Withdrawal from Higher Education, Educational Management & Administration, 24 (2), 207-221.

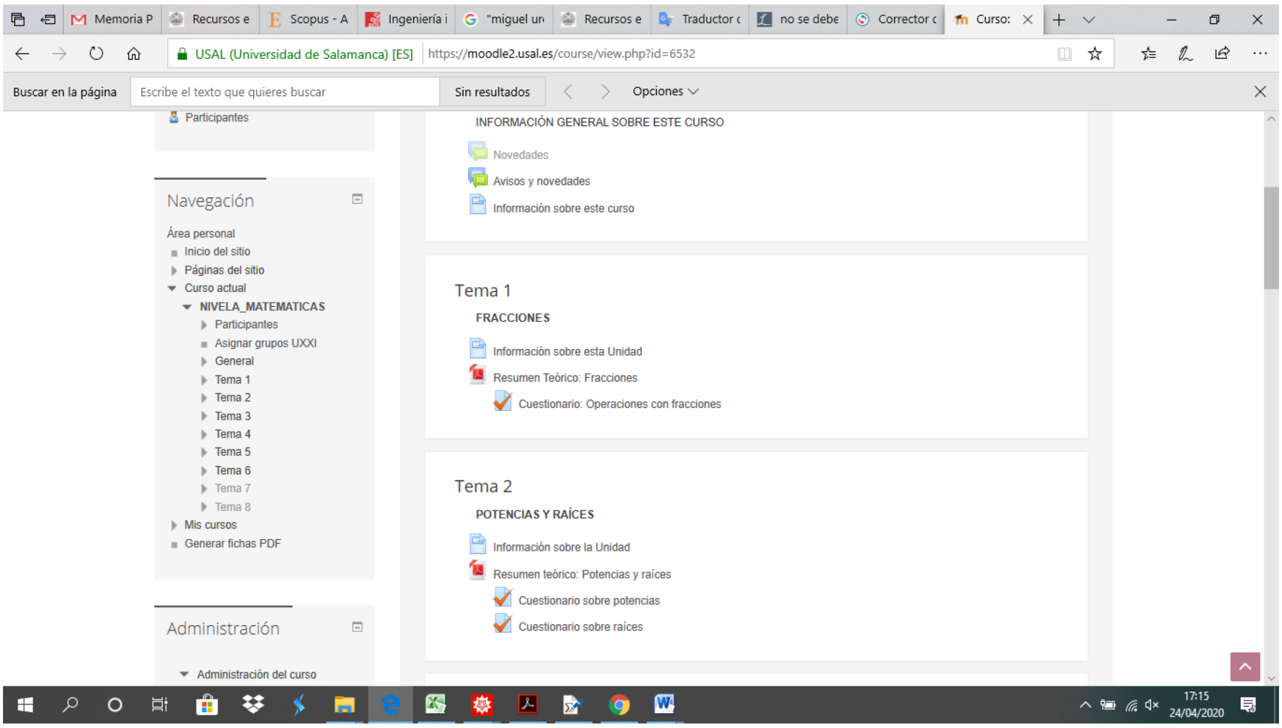
Tinto, V.J. (1975). Dropout from higher education: a theoretical synthesis of recent research. Review of Educational Research, 45, 89-125.

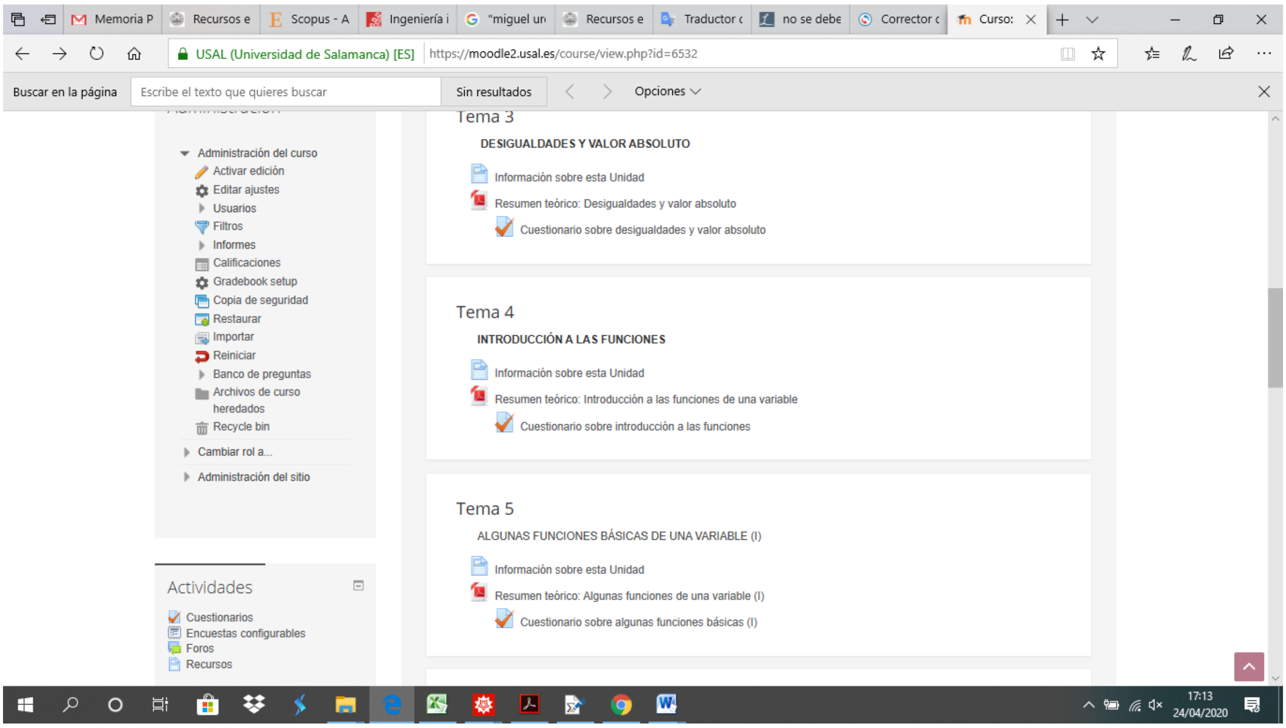
ANEXOS:

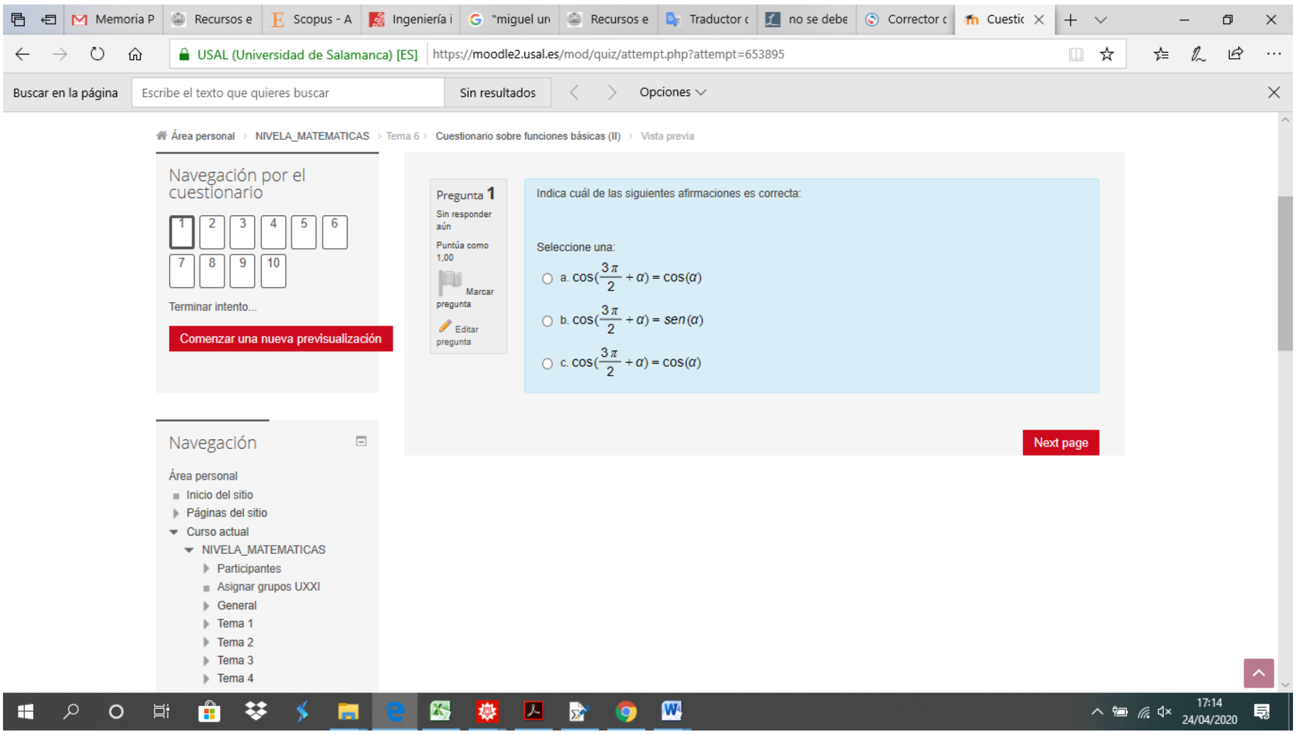
- **ANEXO I:** copia de la página web de Studium que se ha desarrollado para uso de los participantes
- **ANEXO II:** ejemplo de un documento puesto a disposición de los alumnos

ANEXO I:

A continuación se muestran algunas imágenes copiadas de la página web de Studium que se ha desarrollado para uso de los participantes en el proyecto:




https://moodle2.usal.es/course/view.php?id=6532
Administración del curso
Activar edición
Editar ajustes
Usuarios
Filtros
Informes
Calificaciones
Gradebook setup
Copia de seguridad
Restaurar
Importar
Reiniciar
Banco de preguntas
Archivos de curso heredados
Recycle bin
Cambiar rol a...
Administración del sitio
Actividades
Cuestionarios
Encuestas configurables
Foros
Recursos
Tema 3
DESIGUALDADES Y VALOR ABSOLUTO
Información sobre esta Unidad
Resumen teórico: Desigualdades y valor absoluto
Cuestionario sobre desigualdades y valor absoluto
Tema 4
INTRODUCCIÓN A LAS FUNCIONES
Información sobre esta Unidad
Resumen teórico: Introducción a las funciones de una variable
Cuestionario sobre introducción a las funciones
Tema 5
ALGUNAS FUNCIONES BÁSICAS DE UNA VARIABLE (I)
Información sobre esta Unidad
Resumen teórico: Algunas funciones de una variable (I)
Cuestionario sobre algunas funciones básicas (I)


https://moodle2.usal.es/mod/quiz/attempt.php?attempt=653895
Área personal › NIVELA_MATEMATICAS › Tema 6 › Cuestionario sobre funciones básicas (II) › Vista previa
Navegación por el cuestionario
Terminar intento...
Comenzar una nueva previsualización
Pregunta 1
Sin responder aún
Puntúa como 1,00
Marcar pregunta
Editar pregunta
Indica cuál de las siguientes afirmaciones es correcta:
Seleccione una:
a. $\cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=\cos(\alpha)$
b. $\cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=sen(\alpha)$
c. $\cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=\cos(\alpha)$
Next page
Navegación
Área personal
Inicio del sitio
Páginas del sitio
Curso actual
NIVELA_MATEMATICAS
Participantes
Asignar grupos UXXI
General
Tema 1
Tema 2
Tema 3
Tema 4

ANEXO II:

Uno de los documentos con contenidos básicos puestos a disposición de los alumnos:

DESIGUALDADES Y VALOR ABSOLUTO

1 - Relación de orden: Una relación de orden total, denotada por $\leq$ ("ser menor o igual que") es una relación entre los elementos de un conjunto X que cumple las siguientes propiedades:

- Reflexiva: para todo $x \in X$, se verifica que $x \leq x$
- Antisimétrica: para todo par de elementos $x, y \in X$, se verifica que si $x \leq y$ y a la vez $y \leq x$, entonces $x = y$.
- Transitiva: para todos tres elementos $x, y, z \in X$, se verifica que si $x \leq y$ y a la vez $y \leq z$, entonces $x \leq z$.

Si no se verifica la propiedad reflexiva, la relación es de orden parcial, denotada por $<$ ("ser menor que").

Un ejemplo de relación de orden es la propia ordenación de los números reales representados en la recta real: en este caso, si $a < b$ (decimos que "a es menor que b") para dos números reales $a, b \in R$, el número a está situado más a la izquierda que b en la recta real, dado que el sentido de crecimiento de la recta real es de izquierda a derecha. Así, cualquier número negativo siempre es menor que cualquier número positivo.

$$\text{Por ejemplo} \begin{cases} 2 < 3 & \text{2 está situado a la izquierda del 3 en la recta real} \\ -3 < -2 & -3 \text{ está situado a la izquierda del } -2 \text{ en la recta real} \\ -3 < 2 & -3 \text{ está situado a la izquierda del 2 en la recta real} \end{cases}$$

Existen varias leyes de manejo de desigualdades que se derivan de la relación de orden, entre las que podemos citar las siguientes:

- Si $a < b$, sumar una cantidad c en ambos miembros no cambia la desigualdad:

$$a < b \qquad \Rightarrow a + c < b + c \qquad \forall c$$

$$\text{por ejemplo, si } 2 < 3 \qquad \begin{cases} \text{sea } c = 4 & 2 + 4 < 3 + 4 & \text{pues} \quad 6 < 7 \\ \text{sea } c = -4 & 2 - 4 < 3 - 4 & \text{pues} \ -2 < -1 \end{cases}$$

- Si $a < b$, multiplicar una cantidad c **positiva** no cambia la desigualdad, pero si la cantidad c es negativa, se cambia el sentido de la desigualdad.

$$\text{sea } a < b \qquad \begin{cases} \text{si } c > 0 & a \cdot c < b \cdot c \\ \text{si } c < 0 & a \cdot c > b \cdot c \end{cases}$$

$$\text{por ejemplo, si } 2 < 3 \qquad \begin{cases} \text{sea } c = 4 & 2 \cdot 4 < 3 \cdot 4 & \text{pues } 8 < 12 \\ \text{sea } c = -4 & 2 \cdot (-4) > 3 \cdot (-4) & \text{pues } -8 > -12 \end{cases}$$

FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES

Los errores más comunes que se cometen con las desigualdades se refieren a la aplicación de funciones sobre estas desigualdades, entre ellas las operaciones necesarias para resolver inecuaciones, que son las ecuaciones en las que el símbolo "=" está sustituido por alguno de los símbolos $<$, $>$, $\leq$ o $\geq$. Para entender este comportamiento de las desigualdades, vamos a definir el concepto de función creciente y función decreciente.

2 - Función creciente y decreciente: Sea $f : A \subset R \rightarrow R$ una función real de variable real, y sea $(a, b) \subset A$ un intervalo de los números reales.

- f es creciente en (a, b) si para todo $x_1, x_2 \in (a, b)$ con $x_1 < x_2$ se verifica $f(x_1) \leq f(x_2)$. Si $f(x_1) < f(x_2)$, se dice que f es estrictamente creciente en (a, b).

$$\text{por ejemplo, } e^x \text{ es una función creciente en todo } R$$

- f es decreciente en (a, b) si para todo $x_1, x_2 \in (a, b)$ con $x_1 < x_2$ se verifica $f(x_1) \geq f(x_2)$. Si $f(x_1) > f(x_2)$, se dice que f es estrictamente decreciente en (a, b).

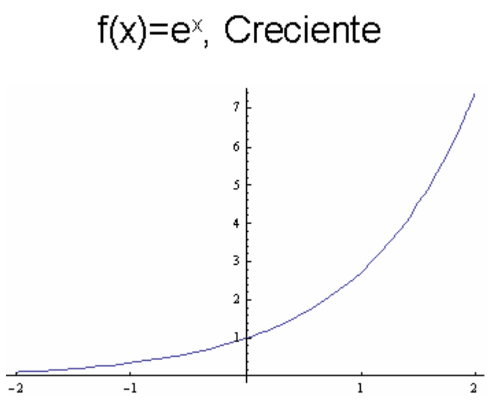
$$\text{por ejemplo, } f(x) = \frac{1}{x} \text{ es una función decreciente en todo } R$$

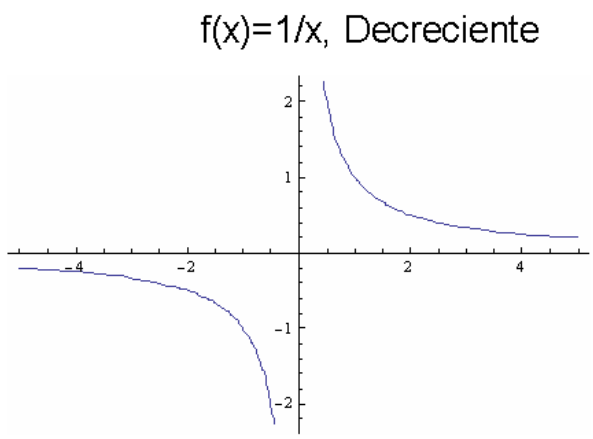
El carácter creciente o decreciente de una función queda claramente reflejado en su gráfica:

-La gráfica de una función creciente "crece", es decir, según desplazamos el argumento de la función hacia la parte positiva del eje de las x (hacia la derecha), la función se desplaza hacia la parte positiva del eje de las y (hacia arriba).

-Al contrario, la gráfica de una función decreciente "decrece", es decir, según desplazamos al argumento de la función hacia la parte positiva del eje de las x (hacia la derecha), la función se desplaza hacia la parte negativa del eje de las y (hacia abajo).

Podemos ver la diferencia observando las gráficas de las funciones $f(x) = e^x$ (creciente) y $f(x) = \frac{1}{x}$ (decreciente).



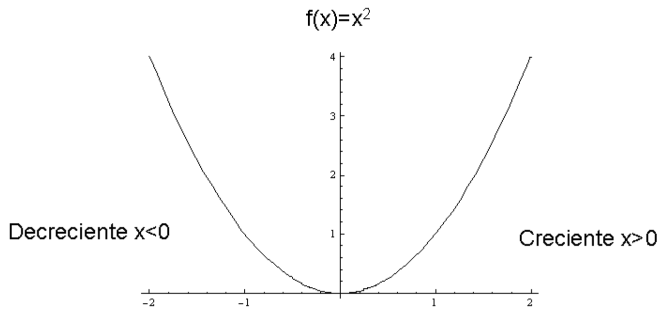


3 - Intervalos de crecimiento y decrecimiento: Puede ocurrir que las funciones sean crecientes en unos intervalos de su dominio y decrecientes en otras. Es el comportamiento de funciones de uso habitual, como es el caso de las funciones $f(x) = x^2$ o $f(x) = |x|$.

Por ejemplo, la función x^2 es creciente para valores $x > 0$, pero decreciente para valores $x < 0$, por lo que **no** podemos afirmar de forma general que si $a < b$, siempre se va verificar que $a^2 < b^2$:

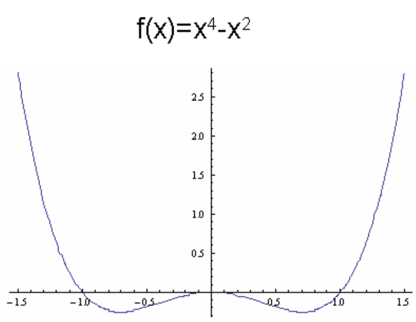
Veamos $a < b < 0$	por ejemplo $-2 < -1$	$\Rightarrow (-2)^2 > (-1)^2$	pues $4 > 1$
Veamos $0 < a < b$	por ejemplo $1 < 2$	$\Rightarrow 1^2 < 2^2$	pues $1 < 4$

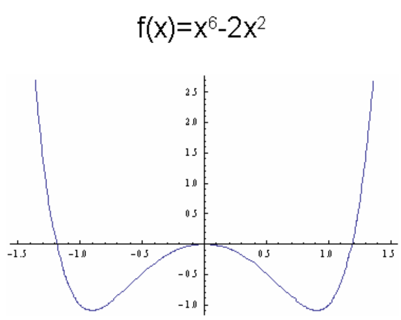
Podemos ver estos intervalos de crecimiento en la gráfica de la función: la rama negativa es decreciente y la rama positiva es creciente.



Este tipo de comportamiento es habitual en las potencias de exponente par: por ejemplo $f(x) = x^4$ o $f(x) = x^6$. Además,también ocurre en general para funciones del tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, que se pueden re-escribir como funciones del tipo $f(x) = (x - x_o)^2 + y_o$, es decir, como parábolas desplazadas en los ejes x e y.

Sin embargo, hay que tener en cuenta que los polinomio en x no lo verifican en general si hay diferencias, incluso aunque las potencias sean pares: podemos ver por ejemplo las gráficas de $f(x) = x^4 - x^2$ o de $f(x) = x^6 - x^2$, que tienen intervalos de crecimiento y de decrecimiento.





LA FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO

Además de la función $f(x) = x^2$, una función de uso muy habitual y que suele dar lugar a errores es la función $f(x) = |x|$ o función valor absoluto, que se define de la siguiente manera:

$$f(x) = |x| \qquad \begin{cases} -x & \text{para } x < 0 \\ x & \text{para } x \geq 0 \end{cases}$$

A la hora de resolver ecuaciones que contengan un valor absoluto, es necesario tener en cuenta dos casos: uno en el que el argumento del valor absoluto sea positivo (y por lo tanto, no cambia de signo) y otro en el que el argumento del valor absoluto sea negativo (y sí hay cambio de signo).

Por ejemplo, resolvemos la ecuación $|x + 1| = 2$. Tenemos dos posibilidades:

- Si $x + 1 \geq 0$ (es decir, $x \geq -1$), entonces $|x + 1| = x + 1$. La ecuación queda entonces:

$$x + 1 = 2 \qquad \Rightarrow \qquad x = 1 \qquad \text{(que verifica } x \geq -1\text{)}$$

- Si $x + 1 < 0$ (es decir, $x < -1$), entonces $|x + 1| = -(x + 1)$. La ecuación queda entonces:

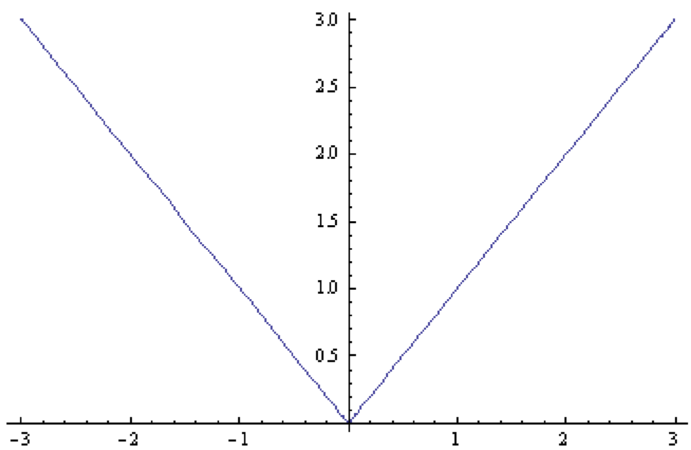
$$-(x + 1) = 2 \qquad \Rightarrow \qquad x + 1 = -2 \qquad \Rightarrow \qquad x = -3 \qquad \text{(que verifica } x < -1\text{)}$$

Podemos ver que ambos valores son solución de la ecuación: si $x = 1$, se verifica que $x+1 = 1+1 = 2$, cuyo valor absoluto es 2. Lo mismo si $x = -3$, en ese caso $x + 1 = -3+1 = -2$, cuyo valor absoluto es también 2.

En cuanto a los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $f(x) = |x|$, es decreciente para $x < 0$ y creciente para $x > 0$, por lo que **no** podemos afirmar de forma general que si $a < b$, siempre se va a verificar que $|a| < |b|$:

$$\begin{cases} -2 < -1 & |-2| > |-1| & \text{pues } 2 > 1 \\ 1 < 2 & |1| < |2| & \text{pues } 1 < 2 \end{cases}$$

También podemos ver este comportamiento en la gráfica de la función $f(x) = |x|$, que mostramos a continuación:



Vemos como la rama negativa $x < 0$ es decreciente y la positiva $x \geq 0$ es creciente.

Por lo tanto, si queremos aplicar una función a una desigualdad, hay que estudiar si es creciente o decreciente en el intervalo en el que nos encontramos para determinar si la desigualdad se mantiene o si cambia de sentido. Veamos algunos casos habituales:

- Si $a < b \Rightarrow e^a < e^b$ pues la función$f(x) = e^x$ es siempre creciente.

$$\text{por ejemplo}\begin{cases} 2 < 3 \Rightarrow & e^2 < e^3 \\ -3 < -2 \Rightarrow & \dfrac{1}{e^3} < \dfrac{1}{e^2} \end{cases}$$

- Si $0 < a < b \Rightarrow \log_c a < \log_c b$ pues la función $f(x) = \log_c x$ es siempre creciente para cualquier base.

$$\text{por ejemplo } 2 < 3 \Rightarrow \mathrm{Ln}\, 2 < \mathrm{Ln}\, 3$$

- Si $a < b \Rightarrow a^3 < b^3$, pues la función $f(x) = x^3$ es siempre creciente. Esto ocurre en general para las potencias de exponente impar (aunque no para sus polinomios).

$$\text{por ejemplo} - \begin{cases} 2 < 3 \Rightarrow & 2^3 < 3^3 & \text{pues } 8 < 27 \\ 2 < -1 \Rightarrow & (-2)^3 < (-1)^3 & \text{pues } -8 < -1 \end{cases}$$

Sin embargo, hay algunos casos en los que es fácil cometer errores:

- si $a < b$, sólo podemos afirmar que $a^2 < b^2$ si a y b son valores positivos ($a > 0$ y $b > 0$). Si ambos valores son negativos ($a < 0$ y $b < 0$), se verifica que $a^2 > b^2$, y si un valor es positivo y otro negativo, no podemos afirmar nada sobre la relación entre a^2 y b^2. Por ejemplo:

$$\begin{cases} 0 < a < b & 2 < 3 & \Rightarrow & 2^2 < 3^2 & \text{pues } 4 < 9 \\ a < b < 0 & -4 < -2 & \Rightarrow & (-4)^2 > (-2)^2 & \text{pues } 16 > 4 \\ a < 0, b > 0 & -3 < 1 & \Rightarrow & (-3)^2 > 1^2 & \text{pues } 9 > 1 \\ a < 0, b > 0 & -1 < 5 & \Rightarrow & (-1)^2 < 5^2 & \text{pues } 1 < 25 \end{cases}$$

- Si $a < b$, solo podemos afirmar que $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$ si a y b tienen el mismo signo, pues la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ decreciente en las dos zonas de su dominio. Sin embargo, si a es negativo y b es positivo, $\dfrac{1}{a}$ será negativo y $\dfrac{1}{b}$ será positivo, por lo que siempre $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$. Por ejemplo:

$$\begin{cases} 0 < a < b & 2 < 3 & \Rightarrow & \dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{3} \\ a < b < 0 & -4 < -2 & \Rightarrow & -\dfrac{1}{4} > -\dfrac{1}{2} \\ a < 0, b > 0 & -3 < 2 & \Rightarrow & -\dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

INECUACIONES

4 - Inecuaciones: Son expresiones matemáticas que contienen una o más incógnitas y una desigualdad. A la hora de obtener el valor o valores de la incógnita, es necesario operar correctamente con las desigualdades, y en ocasiones se obtienen diferentes soluciones en función de los diferentes casos que se pueden presentar para cumplir la desigualdad.

Veamos algunos ejemplos habituales:

-Resolver la inecuación $x - 5 < 11$. Podemos sumar en ambos miembros la cantidad 5, que no cambia el sentido de la desigualdad:

$$x - 5 + 5 < 11 + 5 \qquad \text{por lo tanto} \qquad x < 16$$

-Resolver la inecuación $5 - x < 11$. En este caso, primero sumamos en ambos miembros la cantidad -5, que no cambia el sentido de la desigualdad:

$$5 - x - 5 < 11 - 5 \qquad \text{por lo tanto} \qquad -x < 6$$

Para obtener la solución, debemos multiplicar por -1, que como es una cantidad negativa **sí** cambia el sentido de la desigualdad, es decir $x > -6$.

-Otra opción para resolver la inecuación anterior $5 - x < 11$ es la siguiente: sumamos la cantidad x en ambos miembros:

$$5 - x + x < 11 + x \qquad \text{por lo tanto} \qquad 5 < 11 + x$$

y a continuación sumamos la cantidad -11 en ambos miembros:

$$5 - 11 < 11 + x - 11 \qquad \text{por lo tanto} \qquad -6 < x$$

que se puede escribir como $x > -6$.

- Resolver la inecuación $3x + 4 < x - 10$. Sumamos la cantidad $-x$ en ambos miembros:

$$3x + 4 - x < x - 10 - x \Rightarrow 2x + 4 < -10$$

y a continuación sumamos -4 en ambos miembros:

$$2x + 4 - 4 < -10 - 4 \qquad \text{por lo tanto} \qquad 2x < -14$$

Multiplicamos por $\frac{1}{2} > 0$, que no modifica el sentido de la desigualdad:

$$\frac{1}{2}2x < \frac{1}{2}(-14) \Rightarrow x < -7$$

En el caso de que la función a aplicar tenga intervalos de crecimiento y de decrecimiento, es necesario tenerlos en cuenta. La inecuación puede presentar entonces diferentes soluciones para cada uno de los casos de estudio (aunque en ocasiones, alguno de ellos puede llevar a una inecuación que no tenga solución).

Veamos algunos ejemplos:

1) Resolver la inecuación $x^2 < 4$. Para resolverla tenemos dos posibles soluciones:

$$\begin{cases} \text{si } x < 0, \text{ entonces verifican la ecuación los valores } -2 < x < 0 \\ \text{si } x > 0 \text{ entonces verifican la ecuación los valores } 0 < x < 2 \end{cases}$$

de manera que la solución de la inecuación es $x^2 < 4 \Rightarrow -2 < x < 2$

2) Resolver la inecuación $|x| \leq 3$. Para resolverla tenemos dos posibles soluciones:
- Si $x \geq 0$ entonces $|x| = x$, por lo que la inecuación es $x \leq 3$. Entonces $\begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq 0 \end{cases}$
Los valores de x que verifican ambas condiciones de forma simultánea son los $0 \leq x \leq 3$.
- Si $x < 0$, entonces $|x| = -x$, por lo que la inecuación es $-x \leq 3 \Rightarrow x \geq -3$. Entonces $\begin{cases} x \geq -3 \\ x < 0 \end{cases}$ Los valores de x que verifican ambas condiciones son los $-3 \leq x < 0$.
La solución de la inecuación es entonces: $|x| \leq 3 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3$

3) Resolver la inecuación $|x+1| > 2$. Tenemos dos posibilidades:
- Si $x+1 \geq 0$ (y en ese caso $x \geq -1$), entonces $|x+1| = x+1$. La inecuación queda:

$$x+1 > 2 \qquad \Rightarrow x > 1 \qquad \begin{cases} x > 1 \\ x \geq -1 \end{cases} \Rightarrow x > 1 \text{ cumple las dos}$$

- Si $x+1 < 0$ (y en ese caso $x < -1$), entonces $|x+1| = -(x+1)$. La inecuación queda:

$$-(x+1) > 2 \qquad \Rightarrow x+1 < -2 \qquad \Rightarrow x < -3 \quad \begin{cases} x < -3 \\ x < -1 \end{cases} \Rightarrow x < -3 \text{ cumple las dos}$$

La solución de la inecuación es entonces: $|x+1| > 2 \Longleftrightarrow (x < -3) \cup (x > 1)$

4) Resolver la inecuación $|x-3| < 2x$. Tenemos dos posibilidades:
- Si $x-3 \geq 0$ (y en ese caso $x \geq 3$), entonces $|x-3| = x-3$. La inecuación queda entonces:

$$x-3 < 2x \Rightarrow \qquad -3 < x \qquad \Rightarrow x > -3 \Rightarrow \begin{cases} x > -3 \\ x \geq 3 \end{cases} \text{y la solución es} \quad x \geq 3$$

- Si $x-3 < 0$ (y en ese caso $x < 3$), entonces $|x-3| = -(x-3)$. La inecuación queda entonces:

$$-(x-3) < 2x \Rightarrow \qquad -x+3 < 2x \qquad \Rightarrow 3 < 3x \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < 3 \end{cases} \text{y la solución es} \quad 1 < x < 3$$

La solución de la inecuación es entonces la unión de los intervalos $1 < x < 3$ y $x \geq 3$, es decir $|x-3| > 2x \Longleftrightarrow x > 1$