VNiVERSiDAD
D SALAMANCA
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Guías para la monitorización del estudio de un estudiante universitario

Implantación en la asignatura de Álgebra de primer curso del Grado en Administración y Dirección de Empresas

Proyecto ID 2021/146

Facultad de Economía y Empresa
Dpto Economía e Historia Económica
Perfil Matemáticas

11 de junio de 2022

VNIVERSIDAD D SALAMANCA
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Rocío de Andrés <rocioac@usal.es>
J. Manuel Cascón, <casbar@usal.es>
M. Dolores García, <dgarcia@usal.es>
Bernardo García-Bernalt, <bgarcia@usal.es>
Aurora Manrique, <amg@usal.es>

11 de junio de 2022

Contenidos

Algunas consideraciones previas

Algunas consideraciones previas

Los continuos cambios en el modelo de enseñanza-aprendizaje (evidenciados algunos por la situación provocada por la pandemia) nos han llevado a una profunda reflexión sobre nuestra actividad docente, de la que hemos concluido que:

- Nuestros estudiantes no son capaces de planificar su estudio
- La autonomía en el proceso de aprendizaje es prácticamente inexistente
- El alumno no sabe gestionar el tiempo y carece de destrezas y herramientas para hacerlo

Todo ello nos ha llevado al desarrollo de una serie de herramientas para cumplir con los objetivos que detallamos a continuación.

Objetivos

Objetivos

- Preparar al alumno para el aprendizaje permanente y autónomo. Desarrollamos **guías de cada tema** con el fin de organizar el estudio, además de ejercicios secuenciados y cuestionarios de autoevaluación con retroalimentación inmediata.
- Proporcionar herramientas para la adquisición de habilidades para la organización y gestión del tiempo. Cada guía establece tiempos orientativos y adaptables a distintos ritmos de estudio para cada una de las actividades propuestas.
- Renovar la metodología de las clases buscando mayor participación y modelos parciales de clase invertida.

Guías de Estudio

Las guías de estudio I

Cada una de las guías se desarrolla en los siguientes apartados:

- Introducción. Se marcan unas pautas comunes generales.
- Conocimientos previos. Se enumeran los contenidos fundamentales que el alumno debe manejar antes de abordar el nuevo tema.
- Estudio de la teoría. Se presenta una relación de resultados que deben ser asimilados.
- Asimilación de contenidos. Se aportan pautas generales para verificar que el estudiante alcanza los objetivos deseados.

Las guías de estudio II

- Revisión de contenidos. Se incide en cuetiones que, de acuerdo con nuestra experiencia, pueden generar dificultades y errores frecuentes.

- Gestión del tiempo. Se pautan tiempos orientativos para cada actividad y siempre adaptables a distintos ritmos de trabajo. La estimación se ha realizado en base a la carga de trabajo no presencial asociada a una asignatura de 6 créditos ECTS (7 horas).

Insistimos en que **este material no pretende ser un resumen o colección de contenidos, sino una pauta de ayuda al estudio.**

Tema 1

Lógica y teoría de conjuntos

Tema 1

Lógica y teoría de conjuntos

Introducción

El objetivo de esta guía es ayudaros a monitorizar el estudio del Tema 1

Aportamos una serie de directrices generales que pretenden facilitaros vuestro aprendizaje, y que podéis adaptar de forma flexible a vuestro ritmo de trabajo

En la fase de estudio debéis distinguir varias etapas:

- Revisión de conocimientos previos
- Estudio de la teoría (definiciones, propiedades, resultados, . . .)
- Asimilación de contenidos: cuestiones teóricas y resolución de ejercicios
- Revisión de contenidos: detección de errores, dudas, . . .

Al finalizar este proceso deberíais plantear y resolver los ejercicios propuestos sin dificultad

Tema 1

Lógica y teoría de conjuntos

Introducción

Conocimientos previos

Estudio de la teoría

Asimilación de contenidos

Revisión de contenidos

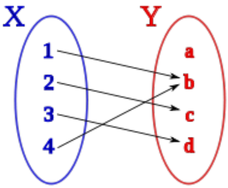
Gestión del tiempo

Conocimientos previos

En este primer tema presentaremos algunas nociones básicas de lógica y de teoría de conjuntos.

Es importante que reviséis los siguientes conceptos:

- Conjunto
- Unión: $\cup$ / intersección: $\cap$
- Producto cartesiano
- Aplicación/función
- Dominio/imagen



Tema 1

Lógica y teoría de conjuntos

Estudio de la teoría: Lógica

Los definiciones fundamentales son:

- Proposición
- Proposición universal, proposición existencial
- Operadores:
  - Negación ($\neg$)
  - Conjunción $\wedge$)
  - Disyunción ($\vee$)
- Proposición condicional o hipotético deductiva (hipótesis / tesis)
- Condición suficiente / Condición necesaria / Condición necesaria y suficiente (equivalencia)
- Clases de proposiciones: Directa, Contraria, Recíproca, Contrarecíproca

Los resultados fundamentales son:

- Relación entre los operadores de negación, conjunción y disyunción (Leyes de Morgan)
- Una implicación y su contrarrecíproca son lógicamente equivalentes (Demostración por reducción al absurdo)
- Demostración por inducción

Estudio de la teoría: Conjuntos

Las definiciones fundamentales son:

- Conjunto/subconjunto/conjunto vacío /cardinal/complementario
- Cuantificadores:
  - Universal $\forall$
  - Existencial $\exists$
- Unión $\cup$, intersección $\cap$
- Conjuntos de las partes de un conjunto X, $\mathcal{P}(X)$
- Producto cartesiano

Los resultados fundamentales son:

- Dos conjuntos son iguales si el primero está incluido en el segundo y, a su vez, el segundo está incluido en el primero
- La negación del cuantificador universal es el cuantificador existencial
- La negación del cuantificador existencial es el cuantificador universal
- Propiedades de la unión e intersección de conjuntos. Leyes de Morgan

Estudio de la teoría: Aplicaciones

Las definiciones fundamentales son:

- Aplicación
- Conjunto imagen, imagen inversa de un elemento
- Aplicación identidad
- Composición $\circ$
- Clases de aplicaciones
  - Inyectiva
  - Epiyectiva
  - Biyectiva
- Aplicación inversa

Las resultados fundamentales son:

- Caracterización de las aplicaciones inyectivas, epiyectivas y biyectivas
- Composición de una aplicación biyectiva y su inversa (en ambos sentidos)

Estudio de la teoría: Relaciones binarias

Las definiciones fundamentales son:

- Relación binaria
- Propiedades:
  - Reflexiva
  - Simétrica
  - Antisimétrica
  - Transitiva
- Relación de equivalencia, clases de equivalencia, conjunto cociente
- Relación de orden, conjunto ordenado
- Orden parcial, orden total
- Cota superior, supremo, máximo
- Cota inferior, ínfimo, mínimo
- Orden bueno

Los resultados fundamentales son:

- Una relación de equivalencia en un conjunto clasifica (en clases de equivalencia) dicho conjunto
- Relación entre orden total y orden bueno

Tema 1

Lógica y teoría de conjuntos

Introducción

Conocimientos previos

Estudio de la teoría

Asimilación de contenidos

Revisión de contenidos

Gestión del tiempo

Asimilación de contenidos

Al finalizar la etapa anterior deberíais afrontar las siguientes actividades:

Teóricas

- Revisar las definiciones de los conceptos fundamentales y entender los resultados/relaciones entre ellas
- Realizar las cuestiones del tema, consultando los contenidos teóricos si fuera preciso

Ejemplos y ejercicios: Lógica

- Distinguir entre proposiciones universales y existenciales
- Distinguir entre condición suficiente y condición necesaria
- Determinar las proposiciones recíproca, contraria y contrarecíproca de una implicación
- Demostrar resultados sencillos por el procedimiento de reducción al absurdo
- Demostrar que una proposición es falsa a partir de un contraejemplo
- Demostrar por inducción que una proposición es cierta a partir de un número natural dado

Asimilación de contenidos

Ejemplos y ejercicios: Conjuntos

- Demostrar las principales propiedades de la unión e intersección de conjuntos

Ejemplos y ejercicios: Aplicaciones

- Estudiar si una asignación entre conjuntos define una aplicación
- Calcular la imagen e imagen inversa
- Estudiar si una aplicación es inyectiva, epiyectiva, biyectiva.
- Calcular la composición de aplicaciones
- Calcular la inversa de una aplicación biyectiva

Ejemplos y ejercicios: Relaciones binarias

- Estudiar si una relación binaria es de equivalencia/orden
- Determinar el conjunto cociente asociado a una relación de equivalencia
- Decidir si un orden es parcial, total, bueno

Es importante que apuntéis vuestras dudas, las comentéis con vuestros compañeros y se las preguntéis a vuestros profesores

Tema 1

Lógica y teoría de conjuntos

Revisión de contenidos

En esta etapa final deberíais:

- Escribir formalmente las definiciones de los conceptos fundamentales y comprobar que son correctas
- Revisar los ejemplos resueltos
- Realizar los ejercicios propuestos
- Detectar vuestros errores y su origen (dificultades con los conceptos y/o los razonamientos, errores en los cálculos, ...)
- Apuntar vuestras dudas, comentarlas con vuestros compañeros y preguntar a vuestros profesores

En particular en este tema deberías prestar especial atención a las siguientes aspectos:

- Distinguir expresamente entre condición necesaria y condición suficiente
- Una proposición existencial queda demostrada encontrando un elemento que verifique la propiedad

Revisión de contenidos

- Para negar un proposición universal basta con encontrar un elemento que no verifique la propiedad
- Para negar una proposición existencia hay que comprobar que ningún elemento verifica la propiedad (*todos no la verifican*)
- Para demostrar que una proposición es falsa basta con encontrar un elemento que no verifica la propiedad
- La inclusión, $\subseteq$, relaciona conjuntos. La pertenencia $\in$ relaciona un elemento con el conjunto que lo contiene
- La composicion de las aplicaciones $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ se escribe $g \circ f : X \to Z$
- En principio $g \circ f$ y $f \circ g$ son distintas aplicaciones, de hecho, puede estar definida una de ellas y la otra no
- Todo máximo (mínimo) es supremo (ínfino) pero no al revés.

Tema 1

Lógica y teoría de conjuntos

Introducción

Conocimientos previos

Estudio de la teoría

Asimilación de contenidos

Revisión de contenidos

Gestión del tiempo

Gestión del tiempo

La siguiente tabla, de carácter orientativo, proporciona el tiempo que consideramos apropiado para preparar esta sección a la que se dedicarán tres sesiones en el aula:

	Tiempo (horas)
Conocimientos previos	0,5
Estudio de teoría	5
Asimilación de contenidos	5
Revisión de contenidos	3,5
Total	14

La estimación del tiempo se ha realizado en base a la carga de trabajo no presencial asociada a una asignatura de 6 créditos ECTS (7 horas semanales) y a la planificación del tema 1 recogida en la guía académica

Tema 2

Espacios vectoriales

Tema 2

Espacios vectoriales

Introducción

El objetivo de esta guía es ayudaros a monitorizar el estudio del Tema 2

Aportamos una serie de directrices generales que pretenden facilitaros vuestro aprendizaje, y que podéis adaptar de forma flexible a vuestro ritmo de trabajo

En la fase de estudio debéis distinguir varias etapas:

- Revisión de conocimientos previos
- Estudio de la teoría (definiciones, propiedades, resultados, . . .)
- Asimilación de contenidos: cuestiones teóricas y resolución de ejercicios
- Revisión de contenidos: detección de errores, dudas, . . .

Al finalizar este proceso deberíais plantear y resolver los ejercicios propuestos sin dificultad

Tema 2

Espacios vectoriales

Introducción

Conocimientos previos

Estudio de la teoría

Asimilación de contenidos

Revisión de contenidos

Gestión del tiempo

Conocimientos previos

Antes de abordar el estudio de este tema es importante que reviséis los siguientes contenidos:

Tema 0

- Vectores en $\mathbb{R}^n$: suma y producto por escalar
- Matrices: Operaciones, matriz inversa, transformaciones elementales y rango
- Sistemas de ecuaciones lineales
  - Teorema de Rouche-Frobenius
  - Resolución de un sistema compatible determinado (SCD)
  - Resolución de un sistema compatible indeterminado (SCI)

Tema 2

Espacios vectoriales

Estudio de la teoría: Espacios vectoriales y subsepacios

Los definiciones fundamentales son:

- Espacios vectorial
- Subespacio (vectorial)
- Combinación lineal
- Subespacio generado
- Sistema generador

Los resultados fundamentales son:

- Son espacios vectoriales:
  - El espacio euclideo $\mathbb{R}^n$
  - El conjunto de las matrices $\mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$
  - El conjunto de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que n, $\mathbb{R}_n[x]$
- Un subconjunto es subespacio vectorial si: contiene al vector cero y opuesto de cada vector del subconjunto
- La intersección de subespacios es subespacio
- La unión de subespacios no es un subespacio (salvo que uno de ellos este incluido en el otro)
- El subespacio generado por un conjunto de vectores es el menor subespacio que los contiene

Estudio de la teoría: Sistemas generadores y libres. Bases

Las definiciones fundamentales son:

- Vectores linealmente dependientes (l.d.) /independientes (l.i.)
- Vector dependiente de un conjunto de vectores
- Base
- Dimensión
- Coordenadas/rango

Estudio de la teoría: Sistemas generadores y libres. Bases

Los resultados fundamentales son:

- Caracterización de vectores l.i. / l.d.: combinación lineal de ellos igual al vector cero única / no única
- Propiedades de la dependencia/independencia lineal.

  Es especialmente relevante:

  - Si un conjunto de vectores es l.i., cualquier vector del subespacio que generan se escribe como combinación lineal de ellos
- Teorema de independencia lineal
- Caracterización de base
- Teorema de la base
- Teorema de la dimensión
- Relación entre dimensión /número de vectores l.i./ número de vectores de un sistema generador
- Teorema de la base incompleta
- Cálculo efectivo del rango de un sistema de vectores
- Relación entre rango /número de vectores l.i./ número de vectores de un sistema generador/dimensión del espacio

Estudio de la teoría: Sumas y sumas directas de subespacios

Las definiciones fundamentales son:

- Suma de subespacios
- Suma directa
- Suplementario de un subespacio

Las resultados fundamentales son:

- La suma de subespacios es el menor subespacio que los contiene
- La unión de un sistema generador de cada subespacio, es un sistema generador del subespacio suma
- Caracterización de suma directa: Dos subespacios estan en posición de suma directa si y solo si su intersección es el vector cero
- Si dos subespacios están en posición de suma directa, la dimesión del subespacio suma es la suma de las dimensiones
- Caracterización de subespacios suplementarios
- Fórmula de Grassmann

Tema 2

Espacios vectoriales

Asimilación de contenidos

Al finalizar la etapa anterior deberíais afrontar las siguientes actividades:

Teóricas

- Revisar las definiciones de los conceptos fundamentales y entender los resultados/relaciones entre ellas
- Revisar y entender las demostraciones de las propiedades
- Realizar las cuestiones del tema, consultando los contenidos teóricos si fuera preciso

Ejemplos y ejercicios: Espacios vectoriales y subespacios

- Identificar si un conjunto de vectores es o no espacio vectorial
- Identificar si un subconjunto de un espacio vectorial es o no subespacio vectorial

Asimilación de contenidos

Ejemplos y ejercicios: Sistemas generadores y libres. Bases

- Decidir si un conjunto de vectores es linealmente independiente / generador / base
- Estudiar si un vector pertenece al subespacio generado por un conjunto de vectores
- Ampliar un sistema de vectores linealmente independientes a una base del espacio vectorial
- Obtener una base a partir de un sistema generador
- Determinar la dimensión de un subespacio / del espacio vectorial
- Hallar las coordenadas de un vector en una base

Ejemplos y ejercicios: Sumas y sumas directas de subespacios

- Hallar una base del los subespacios intersección/suma
- Determinar si la suma de dos subespacios es el espacio vectorial
- Determinar si dos subespacios están en posición de suma directa
- Hallar un suplementario de un subespacio vectorial dado
- Expresar un vector como suma de un vector de un subespacio y otro vector de un subespacio suplementario

Es importante que apuntéis vuestras dudas, las comentéis con vuestros compañeros y se las preguntéis a vuestros profesores

Tema 2

Espacios vectoriales

Introducción

Conocimientos previos

Estudio de la teoría

Asimilación de contenidos

Revisión de contenidos

Gestión del tiempo

Revisión de contenidos

En esta etapa final deberíais:

- Escribir formalmente las definiciones de los conceptos fundamentales y comprobar que son correctas
- Revisar los enunciados y demostraciones de las proposiciones
- Revisar los ejemplos resueltos
- Realizar los ejercicios propuestos
- Detectar vuestros errores y su origen (dificultades con los conceptos y/o los razonamientos, errores en los cálculos, ...)
- Apuntar vuestras dudas, comentarlas con vuestros compañeros y preguntar a vuestros profesores

Revisión de contenidos

En particular en este tema deberías prestar especial atención a las siguientes aspectos:

- La intersección de dos subespacios siempre contiene al vector cero (nunca es el conjunto vacío)
- Cualquier conjunto de vectores que contenga al cero es linealmente dependiente
- Si la dimensión de un espacio vectorial es n:
  - Todo sistema de generadores debe estar formado por al menos n vectores
  - Todo sistema de vectores linealmente independientes tiene como máximo n vectores
- Existen infinitas bases pero, fijada una, las coordenadas de un vector en dicha base son únicas
- Siempre es posible determinar la suma de dos subespacios, pero esa suma no es necesariamente directa
- Dadas dos bases de dos subespacios, la unión de dichas bases es un sistema generador del subespacio suma pero no necesariamente una base (salvo que estén en posición de suma directa)
- La dimensión de la suma de dos subespacios es menor o igual que la suma de sus dimensiones

Tema 2

Espacios vectoriales

Gestión del tiempo

La siguiente tabla, de carácter orientativo, proporciona el tiempo que consideramos apropiado para preparar esta sección a la que se dedicarán tres sesiones en el aula:

	Tiempo (horas)
Conocimientos previos	1
Estudio de teoría	9
Asimilación de contenidos	12
Revisión de contenidos	6
Total	28

La estimación del tiempo se ha realizado en base a la carga de trabajo no presencial asociada a una asignatura de 6 créditos ECTS (7 horas semanales) y a la planificación del tema 1 recogida en la guía académica

Tema 3

Aplicaciones lineales

Tema 3

Aplicaciones lineales

Introducción

Conocimientos previos

Estudio de la teoría

Asimilación de contenidos

Revisión de contenidos

Gestión del tiempo

Introducción

El objetivo de esta guía es ayudaros a monitorizar el estudio del tema Aplicaciones Lineales

Aportamos una serie de directrices generales que pretenden facilitaros vuestro aprendizaje, y que podéis adaptar de forma flexible a vuestro ritmo de trabajo

En la fase de estudio debéis distinguir varias etapas:

- Revisión de conocimientos previos
- Estudio de la teoría (definiciones, propiedades, resultados, . . .)
- Asimilación de contenidos: cuestiones teóricas y resolución de ejercicios
- Revisión de contenidos: detección de errores, dudas, . . .

Al finalizar este proceso deberíais plantear y resolver los ejercicios propuestos sin dificultad

Tema 3

Aplicaciones lineales

Conocimientos previos

Antes de abordar el estudio de este tema es importante que reviséis los siguientes contenidos:

Tema 0

- Matrices: inversa y rango
- Determinantes
- Sistemas de Ecuaciones Lineales: Teorema de Rouche Frobenius y resolución

Tema 1

- Definición de aplicación
- Conjunto imagen
- Composición de funciones
- Clases de aplicaciones: inyectiva, epiyectiva, biyectiva
- Aplicación inversa

Tema 2

- Espacio vectorial, subespacios
- Combinación lineal
- Sistema generador, vectores linealmente dependientes / independientes, base
- Coordenadas

Tema 3

Aplicaciones lineales

Estudio de la teoría: Aplicaciones lineales

Los definiciones fundamentales son:

- Aplicación lineal, Endomorfismo, Isomorfismo
- Núcleo
- Imagen, Rango

Los propiedades fundamentales son:

- La imagen de un sistema de vectores linealmente dependientes es linealmente dependiente
- La composición de aplicaciones lineales es lineal
- El núcleo y la imagen son subespacios vectoriales
- La imagen de un sistema generador es un sistema generador de la imagen
- Caracterización aplicación lineal inyectiva (f inyectiva $\Leftrightarrow \ker f = \{\mathbf{0}\}$)
- La imagen de un sistema de vectores linealmente independientes por una aplicación lineal inyectiva es linealmente independiente
- Fórmula de la dimensión y su aplicación para determinar el tipo de aplicación (inyectiva, epiyectiva, biyectiva)

Estudio de la teoría: Matrices

Los definiciones fundamentales son:

- Matriz asociada a una aplicación lineal f, fijadas bases B y B' de los espacios vectoriales E y E', respectivamente
- Matriz de cambio de base
- Matrices equivalentes
- Matrices semejantes

Los propiedades fundamentales son:

- Relación entre las coordenadas de un vector de E en la base B y las coordenadas de su imagen en la base B'
- Relación entre la composición de aplicaciones lineales y el producto de las matrices asociadas
- Relación entre el tipo de aplicación lineal (inyectiva, epiyectiva, isomorfismo) y las propiedades de una matriz asociada
- Fórmula de cambio de base y su aplicación al caso de endomorfismo
- Dos matrices semejantes tienen el mismo determinante

Tema 3

Aplicaciones lineales

Asimilación de contenidos: Aplicaciones lineales

Al finalizar la etapa anterior deberíais afrontar las siguientes actividades:

Teóricas

- Revisar y entender las demostraciones de las propiedades
- Realizar las cuestiones del tema, consultando los contenidos teóricos si fuera preciso

Ejemplos y ejercicios: Aplicaciones lineales

- Estudiar si una aplicación es lineal
- Hallar la expresión en coordenadas de una aplicación lineal a partir de la imagen de los vectores de una base
- Calcular una base del núcleo y de la imagen y sus dimensiones
- Estudiar el tipo de aplicación lineal (inyectiva, epiyectiva, biyectiva)

Asimilación de contenidos

Ejemplos y ejercicios: Matrices

- Calcular la matriz asociada a una aplicación lineal en las bases canónicas
- Calcular la matriz asociada a una aplicación lineal en bases cualesquiera aplicando la definición y a través de la fórmula de cambio de base
- Fijadas bases de los espacios vectoriales, determinar la aplicación lineal asociada a una matriz
- Hallar núcleo e imagen de una aplicación lineal a partir de una matriz asociada
- Determinar el tipo de aplicación lineal (inyectiva, epiyectiva, isomorfismo) a partir de una matriz asociada
- Hallar el isomorfismo inverso

Es importante que apuntéis vuestras dudas, las comentéis con vuestros compañeros y se las preguntéis a vuestros profesores

Tema 3

Aplicaciones lineales

Revisión de contenidos

En esta etapa final deberíais:

- Escribir formalmente las definiciones de los conceptos fundamentales y comprobar que son correctas
- Revisar los ejemplos resueltos
- Realizar los ejercicios propuestos
- Detectar vuestros errores y su origen (dificultades con los conceptos y/o los razonamientos, errores en los cálculos, ...)
- Apuntar vuestras dudas, comentarlas con vuestros compañeros y preguntar a vuestros profesores

Revisión de contenidos

En particular en este tema deberías prestar especial atención a las siguientes aspectos:

- Una aplicación lineal queda determinada conociendo los elementos de una base
- Fijadas las bases, la matriz asociada es única
- La matriz asociada a una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tiene dimensión $m \times n$. En particular, la matriz asociada a un endomorfismo es una matriz cuadrada
- Sea A una matriz asociada a una aplicación lineal, su rango coincide con la dimensión de la imagen de la aplicación
- Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal, la dimensión del núcleo de f más la dimensión de la imagen es igual a n. Por tanto la dimensión del núcleo es n menos el rango de una matriz asociada a f
- La matriz asociada a un isomorfismo es invertible
- Dos matrices equivalentes tienen el mismo rango
- Dos matrices semejantes tienen el mismo determinante
- Las matrices semejantes son equivalentes (el recíproco no es cierto en general)

Tema 3

Aplicaciones lineales

Gestión del tiempo

La siguiente tabla, de carácter orientativo, proporciona el tiempo que consideramos apropiado para preparar esta sección a la que se dedicarán tres sesiones en el aula:

	Tiempo (horas)
Conocimientos previos	1,5
Estudio de teoría	9
Asimilación de contenidos	9
Revisión de contenidos	5
Total	24,5

La estimación del tiempo se ha realizado en base a la carga de trabajo no presencial asociada a una asignatura de 6 créditos ECTS (7 horas semanales)

Tema 4

Diagonalización de endoformismos

Tema 4

Diagonalización de endoformismos

Introducción

Conocimientos previos

Estudio de la teoría

Asimilación de contenidos

Revisión de contenidos

Revisión de contenidos

Gestión del tiempo

Introducción

El objetivo de esta guía es ayudaros a monitorizar el estudio del tema diagonalización de endomorfismos

Aportamos una serie de directrices generales que pretenden facilitaros vuestro aprendizaje, y que podéis adaptar de forma flexible a vuestro ritmo de trabajo

En la fase de estudio debéis distinguir varias etapas:

- Revisión de conocimientos previos
- Estudio de la teoría (definiciones, propiedades, resultados, . . .)
- Asimilación de contenidos: cuestiones teóricas y resolución de ejercicios
- Revisión de contenidos: detección de errores, dudas, . . .

Al finalizar este proceso deberíais plantear y resolver los ejercicios propuestos sin dificultad

Tema 4

Diagonalización de endoformismos

Introducción

Conocimientos previos

Estudio de la teoría

Asimilación de contenidos

Revisión de contenidos

Revisión de contenidos

Gestión del tiempo

Conocimientos previos

Antes de abordar el estudio de este tema es importante que reviséis los siguientes contenidos:

Tema 0

- Matrices: inversa y rango
- Determinantes
- Sistemas de Ecuaciones Lineales: Teorema de Rouche Frobenius y resolución

Tema 1

- Definición de aplicación
- Conjunto imagen
- Composición de funciones
- Clases de aplicaciones: inyectiva, epiyectiva, biyectiva
- Aplicación inversa

Conocimientos previos

Tema 2

- Espacio vectorial, subespacios
- Combinación lineal
- Sistema generador, vectores linealmente dependientes / independientes, base
- Coordenadas

Tema 3

- Núcleo e imagen de una aplicación lineal
- Matriz asociada a un endomorfismo
- Fórmula de cambio de base
- Matrices equivalentes

Tema 4

Diagonalización de endoformismos

Estudio de la teoría

Los definiciones fundamentales de esta sección son:

- Valor propio y vector propio de un endomorfismo
- Subespacio de vectores propios asociados a un valor propio
- Polinomio característico de una matriz cuadrada
- Valor propio de una matriz
- Multiplicidad geométrica y algebraica de un endomorfismo
- Endomorfismo y matriz diagonalizables

Estudio de la teoría

Los propiedades fundamentales de esta sección son:

- Caracterización de valor propio (Proposición 1) y subespacio de vectores propios (Proposición 2)
- Un vector no nulo, no puede ser vector propio de dos valores propios diferentes
- Dos vectores no nulos asociados a dos valores propios diferentes son linealmente independientes
- Dos matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico
- Los valores propios de un endomorfismo coinciden con los de la matriz asociada en una base y viceversa
- Dimensión del subespacio de vectores propios en términos del rango de la matriz asociada
- Relación entre multiplicidad algebraica y geométrica de un valor propio y consecuencias (corolarios)
- Un endomorfismo es diagonalizable si y solo si la matriz asociada en una base lo es
- Teorema de diagonalización de endomorfismos y corolario
- Cálculo del la potencia n-ésima de una matriz diagonalizable
- Cualquier matriz simétrica con coeficientes reales es diagonalizable

Tema 4

Diagonalización de endoformismos

Asimilación de contenidos

Al finalizar la etapa anterior deberíais afrontar las siguientes actividades:

Teóricas

- Revisar y entender las demostraciones de las propiedades
- Realizar las cuestiones del tema, consultando los contenidos teóricos si fuera preciso

Ejemplos y ejercicios

- Cálculo del polinomio característico de una matriz y sus raíces (valores propios)
- Cálculo de una base del subespacio de vectores propios asociado a un valor propio
- Cálculo de las multiplicidades algebraica y geométrica de un valor propio
- Cálculo efectivo de vectores y valores propios de un endomorfismo / matriz
- Cálculo de una base de diagonalización
- Cálculo de la potencia de una matriz cuadrada diagonalizable
- Estudio de la diagonalización de una matriz con parámetros

Es importante que apuntéis vuestras dudas, las comentéis con vuestros compañeros y se las preguntéis a vuestros profesores

Tema 4

Diagonalización de endoformismos

Revisión de contenidos

En esta etapa final deberíais:

- Escribir formalmente las definiciones de los conceptos fundamentales y comprobar que son correctas
- Revisar los ejemplos resueltos
- Realizar los ejercicios propuestos
- Detectar vuestros errores y su origen (dificultades con los conceptos y/o los razonamientos, errores en los cálculos, ...)
- Apuntar vuestras dudas, comentarlas con vuestros compañeros y preguntar a vuestros profesores

Tema 4

Diagonalización de endoformismos

Revisión de contenidos

En particular en este tema deberías prestar especial atención a las siguientes aspectos:

- El polinomio característico no depende de la base que se utiliza para escribir la matriz asociada
- Los valores propios son las raíces del polinomio característico
- El subespacio de vectores propios de un endomorfismo f asociados al valor propio λ es el núcleo de $f - \lambda \mathrm{Id}$
- Las multiplicidades (algebraica / geométrica) son siempre mayores o iguales que uno
- La multiplicidad geométrica de un valor propio no puede ser mayor que la algebraica
- Un endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ no puede tener más de n valores propios distintos
- Si un endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tiene n valores propios distintos entonces es diagonalizable

Revisión de contenidos

- Si una matriz cuadrada A es diagonalizable, existen matrices P y D tales que $\boxed{A = PDP^{-1}}$ donde
  - D es la matriz diagonal de los valores propios (contando multipicidades)
  - P es la matriz de los respectivos vectores propios (por columnas)
- Una matriz simétrica de orden n tiene exactamente n valores propios reales (contando multiplicidades)
- Una matriz cuadrada y su traspuesta tienen los mismos valores propios. En general, no existe ninguna relación entre los correspondientes vectores propios
- Si λ es valor propio de A, entonces λ^n es valor propio de A^n
- Sea A cuadrada, el determinante de A es el producto de sus valores propios (contando multiplicidades)
- Si una matriz es invertible todos sus valores propios son distintos de cero
- Si A es invertible y λ es valor propio de A, entonces λ^{-1} es valor propio de A^{-1}
- Si A es matriz cuadrada diagonalizable, entonces A^t es diagonalizable; si además es invertible, A^{-1} es diagonalizable

Tema 4

Diagonalización de endoformismos

Gestión del tiempo

La siguiente tabla, de carácter orientativo, proporciona el tiempo que consideramos apropiado para preparar esta sección a la que se dedicarán tres sesiones en el aula:

	Tiempo (horas)
Conocimientos previos	1
Estudio de teoría	6,5
Asimilación de contenidos	6,5
Revisión de contenidos	3,5
Total	17,5

La estimación del tiempo se ha realizado en base a la carga de trabajo no presencial asociada a una asignatura de 6 créditos ECTS (7 horas semanales)

Tema 5

Formas cuadráticas

Tema 5

Formas cuadráticas

Introducción

El objetivo de esta guía es ayudaros a monitorizar el estudio del tema formas cuadráticas

Aportamos una serie de directrices generales que pretenden facilitaros vuestro aprendizaje, y que podéis adaptar de forma flexible a vuestro ritmo de trabajo

En la fase de estudio debéis distinguir varias etapas:

- Revisión de conocimientos previos
- Estudio de la teoría (definiciones, propiedades, resultados, ...)
- Asimilación de contenidos: cuestiones teóricas y resolución de ejercicios
- Revisión de contenidos: detección de errores, dudas, ...

Al finalizar este proceso deberíais plantear y resolver los ejercicios propuestos sin dificultad

Tema 5

Formas cuadráticas

Conocimientos previos

Antes de abordar el estudio de este tema es importante que reviséis los siguientes contenidos:

Curso 0

- Tema 5: Polinomios

Tema 0

- Determinantes

Tema 2

- Espacio vectorial, subespacios, bases

Tema 4

- Polinomio característico
- Valores propios

Tema 5

Formas cuadráticas

Introducción

Conocimientos previos

Estudio de la teoría

Asimilación de contenidos

Revisión de contenidos

Gestión del tiempo

Estudio de la teoría

Los definiciones fundamentales de esta sección son:

- Forma cuadrática
- Matriz (simétrica) asociada a una forma cuadrática
- Clases de formas cuadráticas (dp, dn, sdp, sdn, indefinida)

Los propiedades fundamentales de esta sección son:

- Dada una forma cuadrática, existe una base en la cual la matriz asociada es diagonal
- Teorema de clasificación de formas cuadráticas
- Forma efectiva de clasificación de formas cuadráticas:
  - Criterio de Sylvester
  - Regla de Descartes
  - Cálculo de las raíces del polinomio característico
- Restricción de una forma cuadrática a un subespacio

Tema 5

Formas cuadráticas

Asimilación de contenidos

Al finalizar la etapa anterior deberíais afrontar las siguientes actividades:

Teóricas

- Revisar y entender las demostraciones de las propiedades
- Realizar las cuestiones del tema, consultando los contenidos teóricos si fuera preciso

Ejemplos y ejercicios

- Clasificar formas cuadráticas atendiendo a los tres criterios
- Clasificar formas cuadráticas con parámetros
- Restringir una forma cuadrática a un subespacio

Es importante que apuntéis vuestras dudas, las comentéis con vuestros compañeros y se las preguntéis a vuestros profesores

Tema 5

Formas cuadráticas

Revisión de contenidos

En esta etapa final deberíais:

- Escribir formalmente las definiciones de los conceptos fundamentales y comprobar que son correctas
- Revisar los ejemplos resueltos
- Realizar los ejercicios propuestos
- Detectar vuestros errores y su origen (dificultades con los conceptos y/o los razonamientos, errores en los cálculos, ...)
- Apuntar vuestras dudas, comentarlas con vuestros compañeros y preguntar a vuestros profesores

Revisión de contenidos

En particular en este tema deberías prestar especial atención a las siguientes aspectos:

- La matriz asociada a una forma cuadrática es simétrica
- Como toda matriz simétrica es diagonalizable, existe una base en la matriz asociada a la forma cuadrática es diagonal
- Los valores propios de la matriz asociada a una forma cuadrática son reales
- Una forma cuadrática queda clasificada si se conoce el signo de los valores propios de su matriz asociada
- El criterio de Sylvester solo permite clasificar ciertas formas cuadráticas
- La regla de Descartes permite clasificar una forma cuadrática sin hallar los valores propios
- La restricción de una forma cuadrática a un subespacio es una herramienta que permite clasificar máximos y mínimos de una función (en varias variables)

Tema 5

Formas cuadráticas

Introducción

Conocimientos previos

Estudio de la teoría

Asimilación de contenidos

Revisión de contenidos

Gestión del tiempo

Gestión del tiempo

La siguiente tabla, de carácter orientativo, proporciona el tiempo que consideramos apropiado para preparar esta sección a la que se dedicarán tres sesiones en el aula:

	Tiempo (horas)
Conocimientos previos	0,5
Estudio de teoría	2
Asimilación de contenidos	3
Revisión de contenidos	1,5
Total	7

La estimación del tiempo se ha realizado en base a la carga de trabajo no presencial asociada a una asignatura de 6 créditos ECTS (7 horas semanales)