



UNIVERSIDAD DE SALAMANCA
MÁSTER UNIVERSITARIO DE MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

Trabajo de Fin de Máster

Sistemas separables en espacios con curvatura
constante:

Integrabilidad y Superintegrabilidad.

Alumno: *Daniel Canillas Martínez*
Tutor: *Miguel Ángel González León*

Curso académico 2020/2021



VNIVERSIDAD
D SALAMANCA

CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

UNIVERSIDAD DE SALAMANCA
MÁSTER UNIVERSITARIO EN MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

**Sistemas separables en espacios con
curvatura constante: Integrabilidad y
Superintegrabilidad.**

Separable systems in constant curvature spaces: Integrability
and Superintegrability.

AUTOR: Daniel Canillas Martínez

TUTOR: Miguel Ángel González León

Curso 2020-2021



VNiVERSIDAD
D SALAMANCA

CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Sistemas separables en espacios con curvatura constante: Integrabilidad y Superintegrabilidad.

Daniel Canillas Martínez

Memoria presentada como parte de los requisitos para la obtención del Máster Universitario en Modelización Matemática por la Universidad de Salamanca.

Dr. Miguel Ángel González León autoriza la entrega del Trabajo de Fin de Máster titulado *Sistemas separables en espacios con curvatura constante: Integrabilidad y Superintegrabilidad*, realizado bajo su dirección por el alumno Daniel Canillas Martínez.

Fdo.: Daniel Canillas Martínez

Fdo.: Miguel Ángel González León

Índice general

| | |
|---|------------|
| Resumen. | I |
| Abstract. | III |
| Introducción. | V |
| 1. Sistemas mecánicos naturales separables. | 1 |
| 1.1. Introducción. | 1 |
| 1.2. Integrabilidad y separabilidad. | 3 |
| 1.3. Variedades Riemannianas con curvatura constante. | 5 |
| 1.4. Sistemas de Liouville. | 7 |
| 2. Superintegrabilidad en espacios con curvatura constante. | 11 |
| 2.1. Introducción. | 11 |
| 2.2. Sistemas superintegrables de segundo orden. | 12 |
| 2.2.1. Superintegrabilidad de segundo orden en 2D. | 13 |
| 2.3. Sistemas superintegrables en \mathbb{S}^n y \mathbb{L}^n | 15 |
| 2.4. Ejemplos característicos. | 17 |
| 2.4.1. Problema de Kepler en \mathbb{S}^2 | 17 |
| 2.4.2. Problema de Kepler en \mathbb{H}^2 | 19 |
| 3. El problema de dos centros Newtonianos. | 23 |
| 3.1. Introducción. | 23 |
| 3.2. Integrabilidad del problema en espacios con curvatura constante. | 24 |
| 3.2.1. Formulación del problema en \mathbb{R}^3 | 24 |
| 3.2.2. Formulación del problema en \mathbb{S}^2 | 27 |
| 3.2.3. Formulación del problema en \mathbb{L}^2 | 31 |
| 3.3. Problema de Kepler como límite del problema de dos centros. | 34 |

| | |
|---|-----------|
| 3.3.1. Resultados sobre el plano \mathbb{R}^2 | 35 |
| 3.3.2. Resultados sobre la esfera \mathbb{S}^2 | 38 |
| 3.3.3. Resultados sobre el hiperboloide \mathbb{H}^2 | 41 |
| 4. Conclusiones | 47 |
| A. Sistemas de coordenadas. | 49 |
| A.1. Sistemas de coordenadas en el plano (\mathbb{R}^2). | 49 |
| A.1.1. Coordenadas elípticas (Versión de Euler). | 49 |
| A.1.2. Coordenadas polares. | 50 |
| A.1.3. Coordenadas parabólicas. | 50 |
| A.2. Sistemas de coordenadas como caso límite de las coordenadas elípticas. | 51 |
| A.3. Sistemas de coordenadas especiales en \mathbb{S}^2 | 53 |
| A.4. Sistemas de coordenadas especiales en \mathbb{L}^2 | 55 |
| Bibliografía | 59 |

Resumen

Se estudian los sistemas Hamiltonianos naturales definidos en variedades con curvatura constante que presentan superintegrabilidad, es decir, un número de integrales primeras independientes superior al número de grados de libertad del sistema. Se analizan los sistemas de Tipo Liouville y se profundiza en la relación entre la superintegrabilidad y separabilidad en más de un sistema de coordenadas. Como ejemplo paradigmático, se estudia el problema de Kepler definido en el plano, en la esfera y en el plano de Lobachevskii. En el caso plano, el problema de Kepler puede ser obtenido como límite del problema de dos centros Newtonianos en varias formas no equivalentes. Se extiende este resultado al caso de variedades con curvatura constante, analizando los sistemas de coordenadas obtenidos en cada caso.

Palabras clave: Separabilidad, Integrabilidad, Superintegrabilidad, Problema de Kepler, Problema de dos Centros.

Abstract

We study the Natural Hamiltonian systems defined in manifolds of constant curvature. We center our attention in systems that exhibit superintegrability, that is, the number of independent first integrals is higher than the degrees of freedom of the system. We analyse the Liouville-Type systems and we provide for more in-depth detail in the relation of superintegrability and separability in more than one system of coordinates. As a paradigmatic example, we study the Kepler problem, defined in the plane, in the sphere and in the Lobachevskii plane. In the planar case, the Kepler problem can be obtained as the limit of two Newtonian centers system in non-equivalent forms. We extend this result to spaces of constant curvature, analysing the coordinate systems obtained in each case.

Keywords: Separability, Integrability, Superintegrability, Kepler problem, Two Newtonian Centers problem.

Introducción.

Una forma estándar de entender el comportamiento subyacente de los sistemas físicos es a partir de la construcción de modelos matemáticos, los cuales pueden ser analizados y usados para obtener predicciones que puedan ser comparadas con los resultados experimentales. En el marco de la Física, estos modelos suelen estar basados en ecuaciones diferenciales ordinarias o en ecuaciones en derivadas parciales. Su complicación matemática puede ser muy alta, teniendo que ser resueltos de forma numérica debido a la imposibilidad de obtener una solución analítica.

Sin embargo, existen unos pocos sistemas que pueden ser resueltos de forma exacta, con expresiones analíticas dependientes de parámetros ajustables, que pueden llegar a predecir el futuro comportamiento del sistema. Se trata en particular de los sistemas Hamiltonianos integrables.

El formalismo Hamiltoniano resulta ser el marco más natural para la Mecánica Clásica. La descripción de un sistema con n grados de libertad a partir de una función Hamiltoniana, la cual relaciona las coordenadas de la posición con los momentos, consiste en el enfoque más usual desde el punto de vista físico.

La información dinámica del sistema queda recogida en las ecuaciones de Hamilton, las cuales son esencialmente equivalentes a las ecuaciones del movimiento Newtonianas. Por lo tanto, el problema fundamental consiste en encontrar la solución de ese sistema de ecuaciones diferenciales.

Esta memoria pretende analizar los sistemas Hamiltonianos naturales que presentan solubilidad, es decir, aquellos sistemas que posean un número adecuado de constantes del movimiento que permitan integrar las ecuaciones de Hamilton mediante cuadraturas. Estos sistemas son denominados sistemas Hamiltonianos integrables, donde la noción de integrabilidad y las condiciones que la determinan viene dada por el Teorema de Liouville-Arnold.

La separación de variables es una de las técnicas más efectivas en la integración de las ecuaciones de movimiento de un sistema dinámico Hamiltoniano. Este método permite reducir la resolución de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias a una secuencia de problemas unidimensionales. En este contexto, separabilidad implica completa integrabilidad en el sentido de Liouville-Arnold, y en consecuencia la existencia de n integrales primeras independientes en involución, siendo n el número de grados de libertad del sistema.

La existencia de integrales primeras adicionales independientes a las n constantes

del movimiento que presenta un sistema Hamiltoniano integrable con n grados de libertad da lugar a un nuevo concepto dentro de los sistemas mecánicos. Se trata de la superintegrabilidad de un sistema Hamiltoniano, la cual está íntimamente ligada con la separabilidad del mismo en más de un sistema de coordenadas diferente.

Dos de los ejemplos más significativos de sistemas Hamiltonianos maximalmente superintegrables lo constituyen el oscilador armónico y el problema de Kepler-Coulomb. La superintegrabilidad maximal es una propiedad que tiene profundas implicaciones geométricas, ya que todas las trayectorias acotadas de un sistema superintegrable son necesariamente periódicas. De esta forma, los sistemas superintegrables serían el ejemplo paradigmático del comportamiento absolutamente no caótico.

Objetivos.

Los objetivos principales de la presente memoria son el estudio de los sistemas separables de tipo Liouville, así como los sistemas Hamiltonianos Superintegrables, todos ellos definidos en espacios con curvatura constante.

De forma complementaria, y para la consecución de los objetivos principales, se presentan los objetivos específicos considerados que se han planteado en esta memoria,

- Análisis de los sistemas superintegrables de segundo orden y la metodología para la construcción de estos sistemas en dos dimensiones.
- Estudio de sistemas superintegrables en espacios de curvatura constante y la formulación de ejemplos característicos, atendiendo a la integrabilidad y separabilidad del problema.
- Formulación del problema de dos centros Newtonianos, mostrando la separabilidad e integración en espacios con curvatura constante.
- Obtención del problema de Kepler a partir de la aplicación de límites no equivalentes en el problema de los dos centros Newtonianos para espacios con curvatura constante, así como el análisis de los sistemas de coordenadas asociados.

Estructura de la Memoria.

La presente memoria está estructurada en tres capítulos que se describen a continuación.

- En Capítulo 1 se hará un breve resumen del formalismo Hamiltoniano, así como de la introducción a la integrabilidad y separabilidad de los sistemas mecánicos.
- En el Capítulo 2 del trabajo se pretende realizar un estudio de los sistemas superintegrables. Asimismo, se mostrarán de forma breve los métodos utilizados para la construcción de sistemas Hamiltonianos completamente superintegrables

de segundo orden, para poder posteriormente hacer un análisis de estos sistemas en espacios con curvatura constante y formular el problema de Kepler en la esfera bidimensional y en el modelo hiperbólico del plano de Lobachevskii.

- En el Capítulo 3, a partir resultados obtenidos anteriormente se procederá a hacer un estudio de la integrabilidad y separabilidad del problema de dos centros Newtonianos en espacios con curvatura constante. Se completará el análisis con la obtención del problema de Kepler en distintos límites no equivalentes.

La memoria finaliza con exposición de las conclusiones de este trabajo, así como una Bibliografía de las referencias utilizadas. Asimismo, se ha introducido un apéndice en que se recogen los principales sistemas de coordenadas que se han utilizado en el trabajo, y varios resultados conocidos sobre ellos.

1 | Sistemas mecánicos naturales separables.

1.1 Introducción.

Un sistema mecánico Hamiltoniano natural en una variedad Riemanniana (M, g) n -dimensional viene determinado por una función *Hamiltoniana* \mathcal{H} de la forma:

$$\mathcal{H}(p, q) = \frac{1}{2m} \sum_{i,j=1}^n g^{ij} p_i p_j + V(q) \quad (1.1)$$

donde $(p, q) \equiv (p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$ es un sistema de coordenadas locales en el espacio de fases del sistema: $\mathcal{M} = T^*M$, g^{ij} son las componentes de la inversa del tensor métrico $g = (g_{ij})$, y $V(q)$ es el potencial del sistema mecánico [31, 26, 3].

Las *Ecuaciones de Hamilton*:

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j}, \quad \dot{q}_j = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j}. \quad (1.2)$$

describen la dinámica del sistema físico (M, g, \mathcal{H}) , con n grados de libertad, donde el punto significa derivada con respecto al tiempo físico $t \in \mathbb{R}$.

Es evidente comprobar que para los sistemas naturales está garantizado que la transformación de Legendre es un difeomorfismo entre los fibrados tangente y cotangente a la variedad M . Por tanto los formalismos Lagrangiano y Hamiltoniano son equivalentes, y, en definitiva, las ecuaciones (1.2) también lo son a las ecuaciones de Euler-Lagrange del *Lagrangiano* \mathcal{L} ,

$$\mathcal{L}(p, q) = \frac{m}{2} \sum_{i,j=1}^n g_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - V(q) \quad (1.3)$$

es decir las ecuaciones de Newton del sistema mecánico:

$$m\ddot{q} = -\text{grad}V \Leftrightarrow m\ddot{q}_i = -\sum_{j=1}^n g^{ji} \frac{\partial V}{\partial q_j}, \quad i = 1, \dots, n$$

El espacio de fases $\mathcal{M} = T^*M$ está dotado de una estructura de *Corchete de Poisson*. Dadas dos funciones diferenciables $f = f(p, q, t)$ y $h = h(p, q, t)$, $f, h : \mathcal{M} \times$

$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, entonces su *Corchete de Poisson* $\{f, h\}$ es lineal en f y en h y satisface las siguientes propiedades,

(a) presenta antisimetría,

$$\{f, h\} = -\{h, f\} \quad (1.4)$$

(b) satisface la identidad de *Jacobi*,

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0 \quad (1.5)$$

(c) satisface la regla de *Leibnitz*

$$\{f, g \cdot h\} = \{f, g\} \cdot h + g \cdot \{f, h\} \quad (1.6)$$

En un sistema de coordenadas locales, el *Corchete de Poisson* se escribe de la forma:

$$\{f, g\} := \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} \quad (1.7)$$

y entonces la dinámica a lo largo de las soluciones $(p(t), q(t))$ de (1.2), para cualquier función $f(p, q)$, viene determinada de la forma,

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, \mathcal{H}\}, \quad (1.8)$$

que equivalen a las propias ecuaciones (1.2) si se fija la función f como $f = p_i$ ó $f = q_i$.

De manera alternativa, es posible escribir las ecuaciones de Hamilton (1.2) en una sola ecuación. Considérense unas coordenadas genéricas,

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{R}^{2n} \text{ con } x &= (x_1, \dots, x_{2n}) \\ x &= (p_1, \dots, p_n, q_{n+1}, \dots, q_{2n}) \end{aligned} \quad (1.9)$$

donde el vector x determina el estado del sistema. El conjunto de estos vectores constituye el espacio de fases del sistema.

Se pueden recuperar las ecuaciones de Hamilton de la forma,

$$\dot{x} = J \cdot \nabla \mathcal{H} \quad \text{con } J = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{I}_n \\ \mathbb{I}_n & 0 \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

siendo $\nabla \mathcal{H}$ el gradiente de la función Hamiltoniana. Teniendo en cuenta que el cuadrado de la matriz J es $J^2 = -\mathbb{I}_{2n}$, se puede por tanto, determinar el inverso de la forma, $J^{-1} = -J$. Esto permite escribir el gradiente como,

$$\nabla \mathcal{H} = -J \cdot \dot{x} \quad (1.11)$$

Sea \mathcal{M} una variedad $2n$ -dimensional dotada con un producto interior (\cdot, \cdot) , entonces se puede escribir el corchete de Poisson de dos funciones f, g como,

$$\{f, g\} = -(\nabla f, J \cdot \nabla g) = \sum_{j,k}^{2n} \frac{\partial f}{\partial x_j} J_{jk} \frac{\partial g}{\partial x_k} \quad (1.12)$$

donde se recupera la definición del corchete de Poisson estándar (1.7) obtenida anteriormente.

Ahora se pueden escribir las ecuaciones del movimiento como,

$$\dot{x}_j = \{H, x_j\} \quad (1.13)$$

En las secciones siguientes, se presentan conceptos de geometría diferencial comentados con precisión.

1.2 Integrabilidad y separabilidad.

Las ecuaciones diferenciales, y concretamente los sistemas Hamiltonianos, pueden ser divididos en integrables o no integrables. Existen muchos intentos de formular una definición precisa de integrabilidad, llegando a aparecer muchas posibilidades, cada una de ellas con cierto interés teórico. A continuación, se procede a dar una serie de definiciones y resultados que permitirán definir un concepto concreto de integrabilidad en el contexto de este trabajo.

Sea $f = f(p, q)$ una función diferenciable que satisface $\dot{f} = 0$ o equivalentemente $\{f, H\} = 0$, cuando se verifica (1.2), entonces se dirá que es una integral primera o constante del movimiento. De forma equivalente,

$$f(p(t), q(t)) = cte$$

si $p(t), q(t)$ son soluciones de (1.2).

Considérese el espacio de fases \mathcal{M} de un sistema Hamiltoniano con n grados de libertad y dotado de un corchete de Poisson estándar y una función Hamiltoniana $\mathcal{H}(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$. Sean N integrales primeras $(f_1(p, q), \dots, f_N(p, q))$ definidas y localmente analíticas en cierta región del espacio de fases $2n$ -dimensional. Se dirá que son independientes en dicha región si la matriz $\left(\frac{\partial f_i}{\partial p_j}, \frac{\partial f_i}{\partial q_k}\right)$ de dimensiones $N \times 2n$ posee rango N en la región, y se dirá que son dependientes si el rango es estrictamente menor que N .

De modo que, un sistema con un Hamiltoniano \mathcal{H} será integrable si admite n integrales primeras $\mathcal{P}_1 = \mathcal{H}, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_n$ en involución,

$$\{\mathcal{P}_j, \mathcal{P}_k\} = 0 \quad 1 \leq j, k \leq n \quad (1.14)$$

y que sean independientes.

Este último resultado se conoce como el *Teorema de Liouville-Arnold* [25, 3]. Se puede entender como la reducción del número de ecuaciones que se han de resolver como consecuencia de la existencia de un número suficiente de integrales primeras. De esta forma, el sistema Hamiltoniano se puede reducir por cuadraturas.

La integración de las ecuaciones de movimiento de sistemas dinámicos como los Hamiltonianos se puede llevar a cabo mediante diferentes métodos. Una de las principales

formas de integración es mediante la separación de variables. Este método permite reducir la integración del sistema con una cantidad considerable de grados de libertad a la integración de una secuencia de problemas unidimensionales.

La noción de separabilidad viene de la *ecuación de Hamilton-Jacobi* [17]. Sean (p, q) coordenadas de un espacio de fases \mathcal{M} , la ecuación de Hamilton-Jacobi asociada al Hamiltoniano \mathcal{H} corresponde a la expresión,

$$\mathcal{H}\left(t, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}, q_1, \dots, q_n\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (1.15)$$

donde S es una función denominada *función principal de Hamilton*, puede ser vista como una función generadora de una transformación canónica $(p, q) \mapsto (P, Q)$.

Si se conoce una solución completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi, es decir una función $S(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ con α_i constantes de movimiento, entonces las soluciones de las ecuaciones de Hamilton vienen determinadas de forma implícita por las expresiones,

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = cte \quad (1.16)$$

Ahora bien, si \mathcal{H} no depende explícitamente del tiempo,

$$\mathcal{H}\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}, q_1, \dots, q_n\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (1.17)$$

la ecuación de Hamilton-Jacobi anterior admite para S la forma siguiente,

$$S(q_1, \dots, q_n, t) = W(q_1, \dots, q_n) - \alpha_1 t \quad (1.18)$$

donde α_1 es el propio Hamiltoniano, es decir la energía E del sistema. En cuanto a W , se trata de la *función característica de Hamilton*. Si ahora se sustituye (1.18) en la ecuación de Hamilton-Jacobi (1.17), resulta,

$$\mathcal{H}\left(\frac{\partial W(q)}{\partial q}, q\right) = \alpha_1 \quad (1.19)$$

Se dirá que el sistema es separable en el sistema de coordenadas locales q_i si la ecuación (1.19) admite soluciones de la forma,

$$W(q_1, \dots, q_n) = \sum_{j=1}^n W_j(q_j) \quad (1.20)$$

El conocimiento de una solución completa de (1.17) es por tanto equivalente a la resolución de n ecuaciones diferenciales ordinarias. La separabilidad de la ecuación de Hamilton-Jacobi depende del Hamiltoniano y del sistema de coordenadas canónico (p, q) . Se puede decir que \mathcal{H} es separable en coordenadas (p, q) si la ecuación de Hamilton-Jacobi asociada es separable en el sentido anterior.

1.3 Variedades Riemannianas con curvatura constante.

Una variedad diferenciable M se puede definir de forma conceptual como un espacio topológico que localmente se asemeja a \mathbb{R}^n [27]. De manera más precisa, se dirá que M es una variedad diferenciable n -dimensional si,

- M es un espacio topológico;
- M está provisto de un atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}$;
- $\{U_i\}$ es una familia de conjuntos abiertos que recubren M , es decir $\cup_i U_i = M$;
- Sea φ_i un homeomorfismo de U_i sobre un subconjunto abierto U'_i de \mathbb{R}^n . Entonces, dados U_i y U_j tales que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, la aplicación $\psi_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ que va desde $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ a $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ es infinitamente diferenciable.

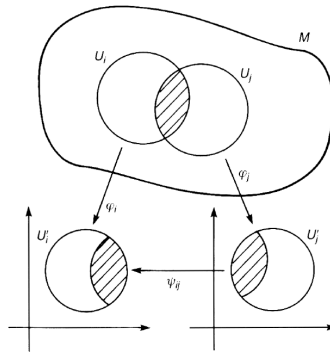


Figura 1.1: Un homeomorfismo φ_i aplicado sobre U_i tiene como imagen $U'_i \subset \mathbb{R}^n$, dando coordenadas al punto $p \in U_i$. Si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, la transición desde un sistema de coordenadas a otro es suave. [27]

El cálculo en una variedad está asegurado por la existencia de sistemas de coordenadas suaves. La estructura de una variedad puede ser más compleja si está dotada de un tensor métrico, el cual se trata de una generalización natural del producto interno entre dos vectores en \mathbb{R}^n a una variedad arbitraria.

En una variedad diferenciable M , el producto interno está definido en cada espacio tangente $T_p M$.

Sea M una variedad diferenciable. Una métrica Riemanniana g en M es un tensor 2-covariante que satisface los siguientes axiomas en cada punto $p \in M$,

- (i) g_p es un tensor simétrico: $g_p(U, V) = g_p(V, U)$.
- (ii) g_p es un tensor definido positivo: $g_p(U, U) \geq 0$, donde la igualdad se cumple para $U = 0$.

Aquí $U, V \in T_p M$ y $g_p = g|_p$. En resumen g_p es una forma bilineal definida positiva en $T_p M$. Podemos por tanto extender la definición del tensor métrico al fibrado tangente TM , es decir la unión (disjunta) de todos los espacios tangentes en cada punto de M . De esta forma escribiremos g como la aplicación que en cada punto p de M toma como valor el tensor g_p .

Sea (U, ϕ) una carta en la variedad M y x^μ un sistema coordenadas locales. Como $g \in \mathcal{T}_2^0(M)$ es un tensor 2-covariante, se puede expandir en términos de $dx^\mu \otimes dx^\nu$ de la forma,

$$g_p = g_{\mu\nu}(p)dx^\mu \otimes dx^\nu \quad (1.21)$$

Como $g_{\mu\nu}$ es una matriz simétrica, los autovalores son reales. Si g es Riemanniana, todos los valores propios son estrictamente positivos.

Con estos resultados se puede definir una variedad Riemanniana como aquella variedad diferencial M que admite una métrica Riemanniana g en cada espacio tangente a la misma. El par (M, g) define una variedad Riemanniana.

Como es bien sabido [27, 10], dada una variedad Riemanniana (M, g) existe una conexión ∇ que satisface que la torsión es nula, y es compatible con la métrica $\nabla g = 0$. Esta conexión se llama de Levi-Civita, cuyos símbolos de la conexión se conocen como símbolos de Christoffel,

$$\Gamma^\nu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\nu\gamma} (\partial_\alpha g_{\beta\gamma} + \partial_\beta g_{\alpha\gamma} - \partial_\gamma g_{\alpha\beta}) \quad (1.22)$$

En este trabajo se van a utilizar variedades con curvatura constante. La idea geométrica de la curvatura es medir la diferencia entre un vector V_0 en un punto p y su transporte paralelo a lo largo de las curvas C y C' dadas por los lados de un paralelogramo infinitesimal (1.2).

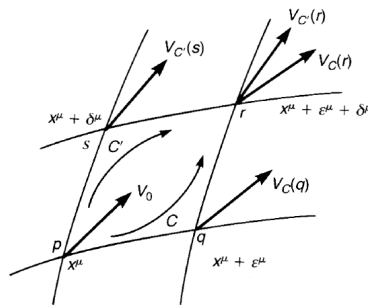


Figura 1.2: El vector V_0 en p es transportado paralelamente a lo largo de C y C' dando lugar a $V_C(r)$ y $V_{C'}(r)$ en r . La curvatura mide la diferencia entre los dos vectores. [27]

Si se transporta paralelamente $V_0 \in T_p M$ a lo largo de $C = pqr$ se obtiene el vector $V_C(r) \in T_r M$. Análogamente, si se transporta paralelamente $V_0 \in T_p M$ a lo largo de $C' = psr$, se obtiene el vector $V_{C'}(r) \in T_r M$. La diferencia entre los dos vectores, tras calcular el transporte paralelo, viene dada por,

$$V_{C'}(r) - V_C(r) = V_0^\kappa R^\mu_{\kappa\lambda\nu} \epsilon^\lambda \delta^\nu \quad (1.23)$$

donde $R^\mu{}_{\kappa\lambda\nu}\varepsilon^\lambda$ corresponde al tensor de curvatura de Riemann. Se trata de un operador antisimétrico que actúa sobre tres campos de vectores X, Y, Z y proporciona el campo vectorial,

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]}Z \quad (1.24)$$

La contracción del tensor de Riemann da lugar al tensor de Ricci. Dadas las propiedades algebraicas que tiene el tensor de curvatura, solamente se puede construir una traza independiente. El resto de trazas del tensor de Riemann o bien se anulan o bien proporcionan tensores que se pueden escribir en términos del tensor de Ricci. Por lo tanto, se tiene que el tensor de Ricci es,

$$R_{\alpha\beta} = R^\mu{}_{\alpha\mu\beta} \quad (1.25)$$

A partir del tensor de Ricci se puede definir una única traza. El resultado es una función escalar que se conoce como escalar de curvatura y viene definido por,

$$R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \quad (1.26)$$

Cuando el escalar de curvatura R sea una función constante, se puede afirmar que la variedad diferencial posee curvatura constante. El tensor de Riemann de un espacio con curvatura constante se puede escribir en términos de la curvatura y el tensor métrico mediante la expresión [35],

$$R^i{}_{jlk} = R (\delta_k^i g_{jl} - \delta_l^i g_{jk}) \quad (1.27)$$

Dependiendo del signo del escalar de curvatura se pueden distinguir tres casos,

- (a) Espacio Euclídeo \mathbb{E}^n de dimensión n : $R = 0$.
- (b) Esfera \mathbb{S}^n de dimensión n de radio $1/\sqrt{R}$: $R > 0$.
- (c) Espacio de Lobachevskii \mathbb{L}^n de dimensión n : $R < 0$.

Resulta interesante resaltar que, en dos dimensiones, la curvatura escalar es dos veces la curvatura Gaussiana κ , y que caracteriza completamente la curvatura de la superficie. Por ello, las superficies con curvatura constante que se pueden distinguir según el signo de κ son,

- (a) Plano \mathbb{E}^2 : $\kappa = 0$.
- (b) Esfera \mathbb{S}^2 : $1/\sqrt{R}$: $\kappa > 0$.
- (c) Hiperboloide de dos hojas \mathbb{H}^2 de dimensión n : $\kappa < 0$.

1.4 Sistemas de Liouville.

Un ejemplo de los sistemas en los que se puede aplicar el proceso de la separación de variables son los sistemas de Liouville [31]. Se trata de sistemas de la forma,

$$\mathcal{H} = \mathcal{T} + \mathcal{U} \quad (1.28)$$

donde el término cinético \mathcal{T} y la energía potencial \mathcal{U} vienen dados por,

$$\begin{aligned}\mathcal{T} &= \frac{1}{2}c \sum_{j=1}^n \frac{\dot{q}_j^2}{a_j} = \frac{1}{2c} \sum_{j=1}^n a_j p_j^2 \\ \mathcal{U} &= \frac{1}{c} \sum_{j=1}^n \mathcal{U}_j, \quad c = \sum_{j=1}^n c_j\end{aligned}\tag{1.29}$$

donde las funciones a_j, c_j y \mathcal{U}_j dependen únicamente de la variable q_j .

Las ecuaciones de Hamilton para este tipo de sistemas se reducen a,

$$\dot{q}_j = \frac{a_j}{c} p_j, \quad \dot{p}_j = -\frac{1}{c} \left(\frac{dc_j}{dq_j} \mathcal{H} + \frac{1}{2} \frac{da_j}{dq_j} p_j^2 + \frac{d\mathcal{U}_j}{dq_j} \right)\tag{1.30}$$

y se puede comprobar fácilmente que las cantidades,

$$I_j = \frac{1}{2} a_j p_j^2 + \mathcal{U}_j - \mathcal{H} c_j, \quad j = 1, 2, \dots, n\tag{1.31}$$

son integrales primeras, ya que verifican $\{I_j, \mathcal{H}\} = 0$. Obsérvese que sólo $(n - 1)$ de estas constantes del movimiento son independientes, ya que se ve,

$$\sum_{j=1}^n I_j = 0\tag{1.32}$$

De esta manera, se tienen n integrales primeras independientes incluyendo el Hamiltoniano \mathcal{H} , estando todas ellas en involución,

$$\{I_j, I_k\} = 0\tag{1.33}$$

para todo i, j , y consecuentemente, los sistemas descritos anteriormente son completamente integrables.

Para los sistemas de Liouville la resolución explícita de la ecuación de Hamilton-Jacobi no es necesaria, ya que de forma equivalente se pueden obtener las cuadraturas que resuelven el sistema de forma directa a partir de las integrales primeras, como se muestra a continuación. Teniendo en cuenta que $I_j = \alpha_j = cte$, se puede obtener fácilmente el sistema de ecuaciones diferenciales para q_j ,

$$\frac{dq_j}{\sqrt{2a_j(\alpha_j + Ec_j - U_j)}} = \frac{dt}{c(q_1, \dots, q_n)}, \quad j = 1, \dots, n\tag{1.34}$$

Escogiendo la variable τ como el tiempo “local” de acuerdo a,

$$d\tau = \frac{dt}{c(q_1, \dots, q_n)}\tag{1.35}$$

de modo que se llega al sistema,

$$\frac{dq_j}{\sqrt{2a_j(\alpha_j + Ec_j - U_j)}} = d\tau\tag{1.36}$$

Por tanto se puede encontrar $q_j = f_j(\tau)$ por cuadraturas, y de forma análoga, τ puede ser expresado en términos de t mediante cuadraturas,

$$t = \int^{\tau} c(q_1(\tau'), \dots, q_n(\tau')) d\tau' \quad (1.37)$$

De esta forma, la solución del problema queda reducido a resolver una secuencia de problemas unidimensionales, que es en esencia el método de separación de variables.

Algunos sistemas, como el oscilador armónico o el problema de Kepler poseen propiedades que les otorga un especial interés, como por ejemplo que todas sus trayectorias finitas son periódicas, es decir las órbitas correspondientes son cerradas [3]. Esto es debido a que los potenciales admiten soluciones separables en la ecuación de Hamilton-Jacobi en más de un sistema de coordenadas.

El problema de Kepler restringido al plano, puede tomar la forma de Liouville después de cambiarlos a coordenadas elípticas, polares, parabólicas o cartesianas. Cuando se consideran sistemas con un número mayor de grados de libertad, existen casos en los que los sistemas son integrables pero no se pueden reducir a la forma de Liouville.

En el problema tridimensional de Kepler existen once sistemas de coordenadas en los que la ecuación de Hamilton-Jacobi se puede separar. Estos sistemas de coordenadas son, Cartesianas, esféricas, cilíndricas, parabólicas rotacionales, cilindro-parabólicas, cilindro-elípticas, esferoidales prolatas, esferoidales oblatas, cónicas, paraboloidales y elipsoidales cofocales [13].

2 | Superintegrabilidad en espacios con curvatura constante.

2.1 Introducción.

La integrabilidad de un sistema Hamiltoniano n -dimensional viene dada por la existencia de n integrales primeras independientes en involución. Esta afirmación, que se trata del teorema de Liouville-Arnold, no descarta la existencia de un número adicional $k \leq n - 1$ de constantes del movimiento.

De modo que, la existencia de un número de integrales primeras I_j adicionales, las cuales sean independientes y se encuentren en involución con el Hamiltoniano ($\{H, I_j\} = 0$), se entiende como sobreintegrabilidad o superintegrabilidad.

El sistema Hamiltoniano n -dimensional será *maximalmente superintegrable* (MS) cuando el número de constantes del movimiento independientes sea $2n - 1$ [26]. Asimismo, se dice que un sistema Hamiltoniano n -dimensional será *cuasi-maximalmente superintegrable* (CMS) cuando el número de integrales primeras independientes sea $2n - 2$ [5].

Una de las características más significativas de estos sistemas, es que un sistema Hamiltoniano superintegrable puede ser resuelto de forma algebraica mientras que los sistemas integrables simplemente pueden ser reducidos a cuadraturas.

La existencia de sistemas que sean maximalmente superintegrables para una dimensión n arbitraria, y que las integrales del movimiento sean cuadráticas en los momentos se reduce a un lista bastante breve.

Entre los ejemplos que se pueden destacar [5],

- El movimiento libre en espacios con curvatura constante que es dado por los flujos geodésicos en estos espacios.
- El problema Kepler-Coulomb generalizado en espacios con curvatura constante.
- El sistema Smorodinsky–Winternitz en espacios con curvatura constante, esto es, el potencial de oscilador armónico en estos espacios con n términos centrífugos.
- El movimiento libre y el sistema Smorodinsky–Winternitz en el espacio de Darboux III, que es la superposición del oscilador intrínseco y n potenciales centrífugos en una generalización n -dimensional de la superficie de Darboux del tipo III,

el cual es una variedad Riemanniana con curvatura no constante.

Los ejemplos más significativos lo constituyen el oscilador armónico y el problema de Kepler-Coulomb. La superintegrabilidad es una propiedad que tiene profundas implicaciones geométricas, ya que todas las trayectorias acotadas de un sistema MS son necesariamente periódicas. De esta forma, los sistemas superintegrables serían el ejemplo paradigmático del comportamiento absolutamente no caótico.

2.2 Sistemas superintegrables de segundo orden.

A continuación se van a considerar sistemas Hamiltonianos de la forma,

$$\mathcal{H} = \sum_{ij} g^{ij}(x)p_i p_j + V(x) \quad (2.1)$$

donde $x = (x_1, \dots, x_n)$ son coordenadas locales de una variedad Riemanniana con un tensor métrico contravariante $g^{ij}(x)$, o lo que es lo mismo, la inversa de la métrica Riemanniana.

Como ya se ha mencionado, un sistema superintegrable presenta un número adicional de integrales primeras independientes. Dentro de estos sistemas superintegrables se van a considerar aquellos en que las integrales primeras son cuadráticas en los momentos. Estos sistemas Hamiltonianos se denominan sistemas superintegrables de segundo orden [26, 32].

Los sistemas superintegrables de segundo orden suelen ser escogidos por su fácil manipulación y por sus relaciones con la separabilidad. Además existe una relación entre los sistemas superintegrables y la solubilidad [18, 37].

Arnold Sommerfeld en “Atomic structure and Spectral Lines” [36] parece ser el primero en darse cuenta de que si un potencial es separable en más de un sistema de coordenadas, posee una integral primera totalmente independiente, y por tanto superintegrable. El primer trabajo de investigación sistemático en este tema lo empezaron Winternitz y colaboradores. Buscaron todos los potenciales en dos dimensiones que eran separables de más de una forma no equivalente. Posteriormente, extendieron su trabajo a tres dimensiones. En [15], Evans analiza algunos de los Hamiltonianos superintegrables con tres grados de libertad y con integrales primeras cuadráticas en el momento que admiten soluciones separables de la ecuación de Hamilton-Jacobi.

Se ha probado que las álgebras de los operadores de simetría para sistemas superintegrables de segundo orden en dos dimensiones forman álgebras cuadráticas, donde el cuadrado del conmutador de cualquiera de los operadores de simetría se puede expresar en función de los operadores de simetría en un polinomio de segundo orden.

Considérese el siguiente ejemplo de sistema superintegrable en dos dimensiones [32],

$$\mathcal{H} = p_x^2 + p_y^2 + \alpha (4x^2 + y^2) + \beta x + \frac{\gamma}{y}. \quad (2.2)$$

Una base de los generadores para los operadores de simetría viene dado por el Hamiltoniano y las siguientes integrales primeras,

$$\mathcal{L}_1 = p_x^2 - 4\alpha x^2 - \beta x, \quad \mathcal{L}_2 = (xp_y - yp_x)p_y + y^2 \left(\frac{\beta}{4} - x\alpha \right) - \gamma \frac{x}{y^2} \quad (2.3)$$

En este ejemplo el corchete de Poisson de \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 es un nuevo operador que no puede ser expresado como una función de otros operadores y por tanto este álgebra no posee una estructura de álgebra de Lie. El álgebra de la simetría del sistema Hamiltoniano, se puede incluir un nuevo operador de simetría de tercer orden $\mathcal{R} = \{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2\}$

Se puede ver que, el corchete de Poisson del nuevo operador \mathcal{R} con los otros operadores y el cuadrado del mismo se puede expresar como un polinomio de los generadores. Se llamará a esta estructura a un álgebra cuadrática. Para este sistema el álgebra cuadrática es,

$$\begin{aligned} \{\mathcal{R}, \mathcal{L}_1\} &= -2\beta(\mathcal{L}_1 - \mathcal{H}) + 16\alpha\mathcal{L}_2 \\ \{\mathcal{R}, \mathcal{L}_2\} &= 6\mathcal{L}_1^2 + 2\mathcal{H}^2 - 8\mathcal{L}_1\mathcal{H} - 2\beta\mathcal{L}_2 - 8\alpha\gamma \\ \mathcal{R}^2 - 4\mathcal{L}_1(\mathcal{L}_1 - \mathcal{H})^2 + 16\alpha\mathcal{L}_2^2 - 4\beta\mathcal{L}_2(\mathcal{L}_1 - \mathcal{H}) + 16\alpha\gamma\mathcal{L}_1 + \gamma\beta^2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

2.2.1 Superintegrabilidad de segundo orden en 2D.

A continuación se muestra de manera resumida, cómo se determinan los sistemas Hamiltonianos en dos dimensiones, con una función Hamiltoniana e integrales primeras cuadráticas en el momento [33].

Considérese un sistema Hamiltoniano natural,

$$\mathcal{H} = \sum_{i,j=1}^2 g^{ij}(x_1, x_2)p_i p_j + V(x_1, x_2) \quad (2.5)$$

con un potencial $V(x_1, x_2)$, definido en una variedad Riemanniana,

$$ds^2 = g_{ij}(x_1, x_2)dx^i \otimes dx^j \text{ con } i, j = 1, 2 \quad (2.6)$$

donde se van a buscar integrales primera de segundo orden de la forma,

$$\mathcal{I} = \sum_{i,j=1}^2 a^{ij}(x_1, x_2)p_i p_j + W(x_1, x_2) \quad (2.7)$$

Por tanto $a^{ij}(x_1, x_2)$ y $W(x_1, x_2)$ deben ser determinadas de forma que se satisfaga la condición de integral primera $\{\mathcal{H}, \mathcal{I}\} = 0$, que es equivalente a las *ecuaciones de Killing* [6],

$$a_{ij;k} = 0, \quad 2a_{ij}g^{jk}V_{,k} = W_{,a} \quad (2.8)$$

donde se está utilizando la notación “,” para la derivada covariante, y “,” para la derivada parcial habitual. En cuanto al primer conjunto de ecuaciones, teniendo en cuenta que

el tensor de Killing es simétrico, se reduce a las siguientes expresiones,

$$\begin{aligned} a^{ii}{}_{,i} + \Gamma^i{}_{ij} a^{ij} &= 0 \quad i = 1, 2 \\ 2a^{ij}{}_{,i} + a^{ii}{}_{,j} + 2(\Gamma^j{}_{ij} a^{ij} + \Gamma^i{}_{ij} a^{jj} + \Gamma^j{}_{ii} a^{ii}) \\ &+ 2(\Gamma^i{}_{ji} a^{ii} + \Gamma^i{}_{jj} a^{ij}) = 0, \quad i, j = 1, 2, i \neq j. \end{aligned} \quad (2.9)$$

donde Γ corresponde a los símbolos de Christoffel dados por la expresión (1.22).

Teniendo en cuenta la condición de compatibilidad, $\partial_1 W_{,2} = \partial_2 W_{,1}$, se obtiene la *ecuación de Bertrand-Darboux*. Las derivadas $\partial_2 W_{,1}$ y $\partial_1 W_{,2}$ son

$$\begin{aligned} \partial_1 W_{,2} &= \partial_1 (a_{21}g^{11} + a_{22}g^{21}) V_{,1} + (a_{21}g^{11} + a_{22}g^{21}) V_{,11} + \\ &+ \partial_1 (a_{21}g^{12} + a_{22}g^{22}) V_{,2} + (a_{21}g^{12} + a_{22}g^{22}) V_{,21} \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \partial_2 W_{,1} &= \partial_2 (a_{11}g^{11} + a_{12}g^{21}) V_{,1} + (a_{11}g^{11} + a_{12}g^{21}) V_{,12} + \\ &+ \partial_2 (a_{11}g^{12} + a_{12}g^{22}) V_{,2} + (a_{21}g^{11} + a_{12}g^{22}) V_{,22} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Por tanto la *ecuación de Bertrand-Darboux* más general para dos dimensiones es,

$$\begin{aligned} V_{,1} [\partial_1 (a_{21}g^{11} + a_{22}g^{21}) - \partial_2 (a_{11}g^{11} + a_{12}g^{21})] + \\ + V_{,2} [\partial_1 (a_{21}g^{12} + a_{22}g^{22}) - \partial_2 (a_{11}g^{12} + a_{12}g^{22})] + \\ + (a_{21}g^{11} + a_{22}g^{21}) V_{,11} - (a_{21}g^{11} + a_{12}g^{22}) V_{,22} \\ + (a_{21}g^{12} + a_{22}g^{22}) V_{,21} - (a_{11}g^{11} + a_{12}g^{21}) V_{,12} = 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

donde el potencial $V(x_1, x_2)$, teniendo alguna constante del movimiento cuadrática en el momento debe satisfacer esta ecuación diferencial.

Considérese el caso de un sistema Hamiltoniano descrito en coordenadas cartesianas, en el que existe una constante del movimiento \mathcal{I} la cual es cuadrática en el momento. Entonces, se debe verificar que el Hamiltoniano conmuta con la integral primera verificando las ecuaciones (2.8), obteniendo así,

$$\begin{aligned} a^{xx}{}_{,x} = 0, \quad a^{xx}{}_{,y} + 2a^{xy}{}_{,x} = 0, \quad a^{yy}{}_{,x} + 2a^{xy}{}_{,y} = 0, \quad a^{yy}{}_{,y} = 0 \\ W_{,x} = 2a_{xx} V_x + 2a_{xy} V_y, \quad W_{,y} = 2a_{xy} V_x + 2a_{yy} V_y \end{aligned} \quad (2.13)$$

En cuanto a la condición de compatibilidad, se reduce a la siguiente ecuación diferencial,

$$a_{xy} (V_{,yy} - V_{,xx}) + (a_{xx} - a_{yy}) V_{,xy} + (a_{xx,y} - a_{xy,x}) V_{,x} + (a_{xy,y} - a_{yy,x}) V_{,y} = 0 \quad (2.14)$$

donde, como se comentó anteriormente en el caso general, el potencial $V(x, y)$ debe satisfacer esta ecuación dada cualquier integral primera de segundo orden.

Las cuatro primeras ecuaciones (2.13), que son independientes del potencial, permiten determinar la posible forma de las funciones a_{xx}, a_{xy}, a_{yy} . Para que resulte más sencillo, se va a realizar un cambio de notación,

$$a_{xx} = a \quad a_{xy} = b \quad a_{yy} = c.$$

De modo que, integrando, resulta,

$$\begin{aligned} a(x, y) &= a_0 + a_1 y + a_2 y^2 \\ b(x, y) &= \frac{1}{2} (b_0 - a_1 x - c_1 y - 2a_2 xy) \\ c(x, y) &= c_0 + c_1 x + a_2 x^2 \end{aligned} \quad (2.15)$$

donde $(a_0, b_0, c_0, a_1, c_1, a_2)$ son parámetros reales cuyo índice indica el orden en x o en y de cada término. La elección de estos parámetros determina una ecuación en derivadas parciales, y por tanto una familia de potenciales que poseen una integral primera \mathcal{I} cuadrática en el momento. En el caso en que todos los parámetros se anulan, la ecuación se reduce a la identidad, donde se satisface para cualquier potencial arbitrario y por lo que la constante del movimiento \mathcal{I} resulta ser la energía del sistema. Cualquier otra elección de parámetros da como resultado otras integrales del movimiento.

Teniendo en cuenta la forma de los parámetros (2.15), se puede reescribir la ecuación (2.14) de la forma siguiente,

$$b(V_{,yy} - V_{,xx}) + (a - c)V_{,xy} - 3b_{,x}V_{,x} + 3b_{,y}V_{,y} = 0 \quad (2.16)$$

Si se fijan los parámetros $(a_0, b_0, c_0, a_1, c_1, a_2)$, esta ecuación resulta ser lineal para V , mientras que, si se fija V , la ecuación es lineal en los seis parámetros, cuyas soluciones determinan un subespacio lineal en espacio de parámetros (\mathbb{R}^6). La dimensión m de este subespacio dependerá del potencial. Para dimensión $m = 2$ implica la existencia de una integral primera a parte de la energía, la cual es cuadrática en el momento.

Para el caso en el que la dimensión es $m = 3$, existen dos integrales primeras de segundo orden distintas de la energía. En este caso, el potencial $V(x, y)$ debería ser solución de un sistema de dos ecuaciones en derivadas parciales, determinadas para dos conjuntos diferentes de parámetros, $(a_0, b_0, c_0, a_1, c_1, a_2)$ y $(A_0, B_0, C_0, A_1, C_1, A_2)$.

2.3 Sistemas superintegrables en \mathbb{S}^n y \mathbb{L}^n .

Los sistemas Hamiltonianos pueden estar definidos en espacios cuya curvatura puede ser distinta de la nula, como es el caso del espacio Euclídeo n -dimensional. En este trabajo se van a estudiar espacios cuya curvatura es constante, donde se pueden destacar dos situaciones distintas al caso plano, el caso positivo con la esfera \mathbb{S}^n y el negativo con el espacio de Lobachevskii \mathbb{L}^n .

Se puede usar una notación que permita englobar los tres casos de espacios Riemannianos con curvatura constante, y en particular, que presenten una simetría “esférica”. Sea la métrica en coordenadas genéricas $q = (q_1, \dots, q_n)$ que describe un espacio con curvatura constante la siguiente,

$$ds^2 = f(|q|)^2 dq^2, \quad (2.17)$$

donde $f(|q|)$ representa una función suave, normalmente interpretada como un factor conforme de la métrica. En particular, si se toma,

$$f(|q|) = \frac{2}{1 + \kappa q^2} \quad (2.18)$$

se recuperan los espacios Riemannianos de curvatura constante κ ,

- $\kappa = 0$ espacio Euclídeo \mathbb{R}^n ,

$$ds^2 = dq^2 \quad (2.19)$$

- $\kappa = -1$ espacio hiperbólico \mathbb{L}^n ,

$$ds^2 = \frac{4 dq^2}{(1 - q^2)^2} \quad (2.20)$$

- $\kappa = 1$ espacio esféricos \mathbb{S}^n ,

$$ds^2 = \frac{4 dq^2}{(1 + q^2)^2} \quad (2.21)$$

Debido a la simetría “esférica”, la métrica puede ser escrita en coordenadas esféricas de la forma siguiente

$$ds^2 = f(r)^2 (dr^2 + r^2 d\Omega^2), \quad (2.22)$$

donde existe una coordenada radial $r = |q| \in \mathbb{R}^+$ y $n-1$ variables angulares $\theta_j \in [0, 2\pi)$ con $j = 1, \dots, n-1$, donde la parte angular de la métrica tiene la forma,

$$d\Omega^2 = \sum_{j=1}^{N-1} d\theta_j^2 \prod_{k=1}^{j-1} \sin^2 \theta_k \quad (2.23)$$

La relación entre las coordenadas generalizadas q y las coordenadas esféricas es,

$$q_j = r \cos \theta_j \prod_{k=1}^{j-1} \sin \theta_k, \quad 1 \leq j < n, \quad q_n = r \prod_{k=1}^{n-1} \sin \theta_k, \quad (2.24)$$

Se puede considerar un Hamiltoniano \mathcal{H} donde el término cinético \mathcal{T} es cuadrático en los momentos y el potencial \mathcal{U} sólo depende del módulo de $|q|$. En este caso, la energía cinética toma la forma,

$$\mathcal{T} = \frac{p^2}{2f(|q|)^2} \quad (2.25)$$

donde usando las ecuaciones de Hamilton, se puede establecer una relación con las velocidades de las coordenadas generalizadas de la forma,

$$\dot{q}_j = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} = \frac{1}{f(|q|)^2} p_j \quad (2.26)$$

Por lo tanto, los momentos canónicos p, p_r, p_{θ_j} se pueden obtener de la forma,

$$p = f(|q|)^2 \dot{q}, \quad p_r = f(r)^2 \dot{r}, \quad p_{\theta_j} = f(r)^2 r^2 \dot{\theta}_j \prod_{k=1}^{j-1} \sin^2 \theta_k. \quad (2.27)$$

Se puede escribir finalmente el término cinético \mathcal{T} en función de las coordenadas esféricas, resultando

$$\mathcal{T} = \frac{p^2}{2f(|q|)^2} = \frac{1}{2f(r)^2} \left(p_r^2 + \frac{1}{r^2} \mathbf{L}^2 \right) \quad (2.28)$$

donde \mathbf{L}^2 es el momento angular total, que tiene la forma

$$\mathbf{L}^2 = \sum_{j=1}^{N-1} p_{\theta_j}^2 \prod_{k=1}^{j-1} \frac{1}{\sin^2 \theta_k} \quad (2.29)$$

Falta, por tanto, determinar un potencial para el cual el sistema Hamiltoniano sea superintegrable. Si se consideran sistemas con integrales primeras de segundo orden, se puede utilizar el formalismo del tensor de Killing visto en (2.2) y desarrollado en [33] para dos dimensiones con coordenadas cartesianas y polares.

Es posible construir, en casos con dimensiones mayores, sistemas completamente integrables desde la representación de coálgebras con los elementos del Casimir [4]. En particular [5], para sistemas n -dimensionales con Hamiltonianos de la forma,

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2f(|q|)^2} \left\{ p^2 + \frac{\mu^2}{q^2} + \sum_{i=1}^N \frac{b_i}{q_i^2} \right\} + \mathcal{U}(|q|) \quad (2.30)$$

a través de la simetría subyacente del coálgebra $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ del Hamiltoniano \mathcal{H} , es posible obtener un conjunto de $2n - 2$ funcionalmente independientes integrales de movimiento.

2.4 Ejemplos característicos.

Los sistemas superintegrables, como se ha visto a lo largo del capítulo, representan uno de los casos de gran interés para la entender la solubilidad de los sistemas Hamiltonianos. Dentro de estos sistemas superintegrables, se tienen los maximalmente superintegrables, siendo el problema de Kepler-Coulomb uno de los pocos ejemplos existentes de sistemas MS más notables y más investigados a lo largo de la literatura científica.

Se procede a hacer a continuación una descripción del problema de Kepler en espacios con curvatura constante, en particular las superficies bidimensionales de la esfera \mathbb{S}^2 , (como ejemplo de espacio con curvatura positiva) y la hoja superior del hiperboloi-de \mathbb{H}^2 , o modelo hiperbólico del plano de Lobachevskii, (como ejemplo de espacio con curvatura negativa). Para ello se va a analizar la forma del potencial en cada una de las superficies, dando la función Hamiltoniana del sistema así como las integrales primeras que demuestran que el sistemas es maximalmente superintegrable.

2.4.1 Problema de Kepler en \mathbb{S}^2 .

Considérese la 2-esfera como una superficie bidimensional embebida en el espacio Euclídeo tridimensional [21]. A continuación se va a analizar el movimiento de una

partícula de masa puntual m debido a campo gravitatorio creado por un potencial V que depende únicamente de la distancia entre la partícula y un punto fijo de masa M . Sea $R\theta$ la longitud de arco que une los puntos m y M . De modo que V es una función dependiente sólo de la longitud del arco de circunferencia θ . Utilizando la ecuación Laplace-Beltrami para determinar la forma del potencial,

$$\Delta V = R^2 \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin^2 \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (2.31)$$

que tiene como solución,

$$V = -\alpha \frac{1 \cos \theta}{R \sin \theta} + \gamma, \quad \alpha, \gamma = \text{const} \quad (2.32)$$

donde la constante γ no es esencial. En cuanto a la constante α , se asume que es estrictamente positiva, jugando el papel de constante gravitacional.

Se observa que el potencial V tiene una singularidad en $\theta = 0$. Además, el potencial es de signo opuesto en los dos hemisferios. Si α es positivo, entonces se tiene una singularidad atractora en $\theta = 0$ y una singularidad igual pero repulsora en el punto antipodal (para $\theta = \pi$).

Sean x_1, x_2, x_3 las coordenadas cartesianas habituales. De modo que la ecuación,

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2 \quad (2.33)$$

define la esfera de radio R . El Hamiltoniano en coordenadas cartesianas es [26],

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) - \frac{\alpha x_3}{R \sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \quad (2.34)$$

donde se está tomando $m = 1$.

Como el vector tangente a cualquier trayectoria sobre la esfera es ortogonal al vector normal, se tiene una nueva restricción sobre el espacio de fases,

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 = 0 \quad (2.35)$$

Aunque el espacio ambiente sea tridimensional, y su correspondiente espacio de fases de dimensión seis, es evidente que el espacio de fases del sistema definido en \mathbb{S}^2 tiene dimensión cuatro. Las condiciones (2.33) y (2.35) restringen a las coordenadas $(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3)$ a sólo cuatro independientes.

Se puede reescribir el Hamiltoniano en función de las componentes del momento angular, $L_i = x_j p_k - x_k p_j$ con $i, j, k = 1, 2, 3$ y $i \neq j \neq k$, teniendo en cuenta las condiciones (2.33) y (2.35). Por lo tanto \mathcal{H} es de la forma,

$$\mathcal{H}' = \frac{1}{2R^2} (L_1^2 + L_2^2 + L_3^2) - \frac{\alpha x_3}{R \sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \quad (2.36)$$

que se obtiene de realizar la siguiente transformación sobre el Hamiltoniano \mathcal{H} ,

$$\mathcal{H}' = \frac{K(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - \frac{1}{2}(x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3)^2}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)} + V \quad (2.37)$$

donde K y V son el término cinético y potencial respectivamente.

Como en el problema original en el plano, una de las integrales primeras que se observa es el cuadrado del momento angular L^2 así como su tercera componente L_3 . Análogamente, existen dos constantes del movimiento adicionales que se asemejan a las componentes del vector de Runge-Lenz,

$$\mathcal{I}_3 = 2L_1L_3 - \frac{\alpha x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \quad \mathcal{I}_4 = 2L_2L_3 - \frac{\alpha x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \quad (2.38)$$

Se puede observar por tanto que existen tres integrales primeras independientes, siendo distintas a la energía. De modo que se puede concluir que el sistema es super-integrable.

El problema de Kepler sobre la esfera \mathbb{S}^2 también puede ser descrito en coordenadas esféricas. Para ello hay que tener en cuenta que la restricción (2.33) se reduce en estas coordenadas a que $r = R$, y por tanto,

$$\begin{aligned} x_1 &= R \sin \theta \cos \phi \\ x_2 &= R \sin \theta \sin \phi \\ x_3 &= R \cos \theta \end{aligned} \quad (2.39)$$

De modo que, el Hamiltoniano en coordenadas esféricas es de la forma,

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left(\frac{P_\theta^2}{R^2} + \frac{P_\phi^2}{R^2 \sin^2 \theta} \right) - \frac{\alpha}{R} \cot \theta \quad (2.40)$$

2.4.2 Problema de Kepler en \mathbb{H}^2 .

De forma análoga como se hizo para la superficie de la esfera \mathbb{S}^2 se puede realizar para el caso de la superficie del hiperboloide \mathbb{H}^2 [38]. Como es bien conocido, una de las posibles modelizaciones del llamado Plano de Lobachevskii (superficie bidimensional con curvatura constante negativa) es la hoja superior del hiperboloide de dos hojas, de ecuación: $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -R^2$ dotada con la métrica que se obtiene al restringir la métrica de Minkowski tridimensional a dicha superficie, es decir lo que habitualmente se denota $\mathbb{R}^{2,1}$. Resulta interesante comentar que aunque la métrica que se considera en el espacio ambiente no sea Riemanniana (es Lorentziana), su restricción a \mathbb{H}^2 sí que lo es, de manera que \mathbb{H}^2 queda así dotado con estructura de variedad Riemanniana. Finalmente, es adecuado precisar que no existen superficies bidimensionales con curvatura constante negativa globalmente embebidas en el espacio Euclídeo tridimensional, como demostró Hilbert.

Como se mencionó anteriormente, el problema de Kepler pretende determinar el movimiento de una partícula de masa puntual m debido a un campo gravitatorio creado por un potencial V debido a un centro fijo de masa M . La distancia entre las partículas viene dado por la distancia geodésica dada por el ángulo $R\theta$. Utilizando la ecuación Laplace-Beltrami para determinar la forma del potencial sobre la superficie de \mathbb{H}^2 se

llega a la siguiente expresión,

$$\Delta V = R^2 \frac{1}{\sinh^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sinh^2 \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (2.41)$$

que tiene como solución,

$$V = -\alpha \frac{1 \cosh \theta}{R \sinh \theta} + \gamma, \quad \alpha, \gamma = \text{const} \quad (2.42)$$

donde la constante γ no es esencial. En cuanto a la constante α , se asume que es estrictamente positiva, jugando el papel de constante gravitacional.

Sean x_1, x_2, x_3 las coordenadas cartesianas habituales. De modo que la ecuación,

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -R^2 \quad (2.43)$$

define el hiperboloide de radio R .

Como el vector tangente a cualquier trayectoria sobre la esfera es ortogonal al vector normal, se tiene una nueva restricción sobre el espacio de fases,

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 - x_3 p_3 = 0 \quad (2.44)$$

Aunque el espacio ambiente sea tridimensional, y su correspondiente espacio de fases de dimensión seis, es evidente que el espacio de fases del sistema definido en \mathbb{H}^2 tiene dimensión cuatro. Las condiciones (2.43) y (2.44) restringen a las coordenadas $(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3)$ a sólo cuatro independientes.

El Hamiltoniano en coordenadas cartesianas es,

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2 - p_3^2) - \frac{\alpha x_3}{R \sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \quad (2.45)$$

donde se está tomando $m = 1$.

El problema de Kepler sobre el hiperboloide \mathbb{H}^2 también puede ser descrito en coordenadas pseudo-esféricas. Para ello hay que tener en cuenta que la restricción (2.43) se reduce en estas coordenadas a que $r = R$, y por tanto,

$$\begin{aligned} x_1 &= R \sinh \theta \cos \phi \\ x_2 &= R \sinh \theta \sin \phi \\ x_3 &= R \cosh \theta \end{aligned} \quad (2.46)$$

Es importante observar que cuando $R > 0$ se va a describir la hoja superior \mathbb{H}_+^2 del hiperboloide, mientras que si $R < 0$ se va a describir la hoja inferior \mathbb{H}_-^2 del hiperboloide.

El Hamiltoniano en coordenadas pseudo-esféricas toma la siguiente forma,

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left(\frac{P_\theta^2}{R^2} + \frac{P_\phi^2}{R^2 \sinh^2 \theta} \right) - \frac{\alpha}{R} \coth \theta \quad (2.47)$$

Escribiendo el Hamiltoniano en coordenadas pseudo-esféricas, resulta más fácil de observar que el momento P_ϕ es una variable cíclica,

$$\dot{P}_\phi = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} = 0 \quad (2.48)$$

de modo que se trata de una constante del movimiento. El resto de constantes del movimiento son análogas al vector de Runge-Lenz sobre el hiperboloide \mathbb{H}^2 .

3 | El problema de dos centros Newtonianos.

3.1 Introducción.

Anteriormente, se ha analizado la superintegrabilidad del problema de Kepler-Coulomb tanto en el caso plano como en espacios con curvatura constante, atendiendo a la separabilidad e integrabilidad. Este capítulo de la memoria se centrará en la dinámica de una partícula libre en el seno de un campo creado por dos centros Newtonianos sobre una superficie. Se trata concretamente, del problema de tres cuerpos más simple de interés físico que se puede formular y analizar con bastante detalle.

La formulación del problema se le atribuye a Euler [14], que demuestra que posee una solución exacta, además de establecer la integrabilidad por medio de separación de variables del problema en los años sesenta del siglo XVIII. Casi de forma simultánea, Lagrange [22] resuelve el problema generalizado en el cual ambos centros ejercen una fuerza proporcional a la distancia, y al inverso del cuadrado de la distancia.

Las generalizaciones del problema a espacios con curvatura constante la formula por primera vez en 1885 W. Killing [19]. Será a finales del siglo pasado cuando, primero Kolzov y Harin [21], y luego Borisov y Mamaev [9] recuperan el problema.

En el artículo de Borisov y Mamaev [8], inspirados por Albouy y Stuchi [1, 2], establecen lo que denominan un isomorfismo de trayectorias entre las órbitas sobre la semiesfera que contiene los dos centros atractivos y las órbitas acotadas asociadas al caso de dos centros plano. Esto es posible por el uso de la proyección gnomónica de \mathbb{S}^2 al espacio tangente plano al punto medio entre los dos centros, junto con una redefinición del tiempo y una transformación afín en el plano.

En el trabajo de González León *et al.* [24, 23], se extienden los resultados de [8] a la esfera completa a partir de dos proyecciones gnomónicas simultáneas. Se establece así un isomorfismo entre el conjunto completo de órbitas del problema original y el correspondiente con los dos problemas planos asociados. La idea subyacente es identificar cada trayectoria que cruza el ecuador con la conjunción de dos órbitas no acotadas, una del problema de los dos centros atractivos y la otra de los dos centros repulsivos.

Además, este problema ha sido analizado desde otros puntos de vista, como la generalización del problema plano con la adición de dos centros fijos imaginarios en dirección perpendicular a los dos centros originales. Este problema planteado por Dar-

boux en 1901, presenta aplicaciones en la dinámica de satélites [20]. El análogo a este problema en espacios de curvatura constante se puede encontrar en el artículo [7].

No sólo en mecánica clásica, sino también en el campo de la física cuántica, el problema de dos centros ha sido utilizado para la descripción de la molécula de hidrógeno por Pauli en 1922 [30].

En este capítulo de la memoria se pretende realizar un análisis de la integrabilidad del problema en espacios con curvatura constante, formulando el problema en el caso plano, en la esfera y en el espacio de Lobachevskii.

Además, se analizarán los casos límites del problema, en el que fijado uno de los centros se hace tender a infinito el otro, o en el que la distancia de separación de los dos centros se hace nulo, recuperando el caso superintegrable del problema de Kepler de un único centro.

Aunque no se trate del problema de dos centros, uno de los ejemplos más destacados en mecánica cuántica es la resolución del átomo de hidrógeno sobre la esfera S^3 por Schrödinger [34]. En este artículo, asumió un universo con curvatura espacial constante positiva (S^3) y obtener el espectro del átomo de hidrógeno. El mismo problema, en espacios con curvatura constante negativa lo resolvieron Infeld y Schild [16].

3.2 Integrabilidad del problema en espacios con curvatura constante.

A continuación, se procede a formular el problema de los dos centros fijos en espacios con curvatura constante, analizando el problema y obteniendo las integrales primeras.

3.2.1 Formulación del problema en \mathbb{R}^3 .

El primer problema que se va a considerar es el de la dinámica de una partícula material puntual en el espacio Euclídeo, en el seno de un campo gravitatorio generado por la superposición de dos centros Newtonianos fijos.

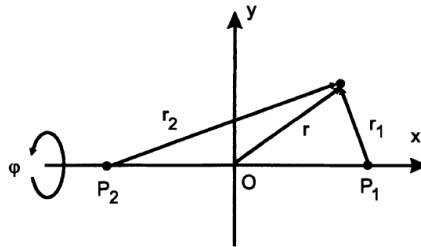


Figura 3.1: Problema de los dos centros fijos en el espacio Euclídeo en coordenadas esferoidales prolatas. [38]

Para este problema, la energía cinética viene determinada por la métrica Euclídea \mathbb{R}^3 , mientras que la energía potencial es igual a la suma de los potenciales generados

por cada uno de los centros. En este caso se considera el potencial Newtoniano. Por tanto, el Hamiltoniano en coordenadas cartesianas del sistema mecánico natural del problema es igual a la suma de la energía cinética y potencial,

$$\mathcal{H}_{2C} = \frac{1}{2} (P_x^2 + P_y^2 + P_z^2) + \mathcal{U}(x, y, z) \quad (3.1)$$

donde,

$$\mathcal{U}(x, y, z) = -\frac{\alpha_1}{r_1} - \frac{\alpha_1}{r_2} \quad (3.2)$$

con

$$r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2 + z^2} \quad r_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2 + z^2} \quad (3.3)$$

Los centros se fijan en los puntos $(c, 0, 0)$ y $(-c, 0, 0)$ sin pérdida de generalidad. Si ahora se consideran las coordenadas esferoidales prolatas,

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{c}uv \\ y &= \frac{1}{c}\sqrt{u^2 - c^2}\sqrt{c^2 - v^2} \cos \varphi \\ z &= \frac{1}{c}\sqrt{u^2 - c^2}\sqrt{c^2 - v^2} \sin \varphi \end{aligned} \quad (3.4)$$

donde la transformación inversa es de la forma,

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}(r_2 + r_1) \\ v &= \frac{1}{2}(r_2 - r_1) \\ \varphi &= \arctan \frac{z}{y} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Se puede escribir el Hamiltoniano como un sistema de *Liouville* (tal y como se mencionó en la Sección 1.4) mediante separación de variables de la forma siguiente,

$$\mathcal{H}_{2C} = \frac{1}{2c} (a_u P_u^2 + a_v P_v^2 + a_\varphi P_\varphi^2) + \frac{1}{c} (U_u + U_v + U_\varphi) \quad (3.6)$$

Para las coordenadas esferoidales prolatas los coeficientes a_u, a_v, a_φ son,

$$\begin{aligned} a_u &= u^2 - c^2 \\ a_v &= c^2 - v^2 \\ a_\varphi &= \frac{c^2(u^2 - v^2)}{(u^2 - c^2)(c^2 - v^2)} \end{aligned} \quad (3.7)$$

y los coeficientes c_u, c_v, c_φ son,

$$\begin{aligned} c_u &= u^2 \\ c_v &= -v^2 \\ c_\varphi &= 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

donde se cumple que,

$$c = \sum_{i=1}^3 c_i = u^2 - v^2 \quad (3.9)$$

Por lo tanto, se pueden escribir los momentos en función de las velocidades de la forma,

$$\begin{aligned} P_u &= \frac{u^2 - v^2}{u^2 - c^2} \dot{u} \\ P_v &= \frac{u^2 - v^2}{c^2 - v^2} \dot{v} \\ P_\varphi &= \frac{1}{c} (u^2 - c^2)(c^2 - v^2) \dot{\varphi} \end{aligned} \quad (3.10)$$

donde se ha tenido en cuenta que,

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \frac{a_i}{c} p_i \quad (3.11)$$

De esta manera, es posible escribir la energía cinética en función de las velocidades, donde resulta la siguiente expresión,

$$K = \frac{1}{2} (u^2 - v^2) \left(\frac{\dot{u}^2}{u^2 - c^2} + \frac{(u^2 - c^2)(c^2 - v^2) \dot{\varphi}^2}{c^2 (u^2 - v^2)} + \frac{\dot{v}^2}{c^2 - v^2} \right) \quad (3.12)$$

En cuanto al potencial \mathcal{U} , los coeficientes U_u, U_v, U_φ son,

$$\begin{aligned} U_u &= -u(\alpha_1 + \alpha_2) \\ U_v &= -v(\alpha_1 - \alpha_2) \\ U_\varphi &= 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Por consiguiente, es posible escribir el potencial \mathcal{U} de la forma,

$$\mathcal{U} = \frac{1}{c} (U_u + U_v + U_\varphi) = \frac{-(\alpha_1 + \alpha_2)u + (\alpha_2 - \alpha_1)v}{u^2 - v^2} \quad (3.14)$$

Haciendo un análisis de la integrabilidad del sistema mecánico, se observa que existe al menos una integral primera distinta del Hamiltoniano. Se trata de la coordenada cíclica φ , donde se observa que,

$$\dot{P}_\varphi = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow P_\varphi = cte \quad (3.15)$$

Además, la posibilidad de escribir el Hamiltoniano como un sistema de Liouville, permite obtener tres integrales primeras de la forma siguiente,

$$I_j = \frac{1}{2} a_j p_j^2 + U_j - H c_j, \quad j = u, v, \varphi \quad (3.16)$$

Donde hay 2 que son independientes, ya que,

$$\sum_{j=1}^n I_j = 0 \quad (3.17)$$

Por lo tanto se tiene,

$$\begin{aligned} I_u &= \frac{1}{2} \left(-p_v^2 (c^2 - v^2) - \frac{c^2 (u^2 - v^2) p_\varphi^2}{(u^2 - c^2)(c^2 - v^2)} + 2(\alpha_1 - \alpha_2)v \right) \\ I_v &= \frac{1}{2} \left(-p_u^2 (u^2 - c^2) - \frac{c^2 (u^2 - v^2) p_\varphi^2}{(u^2 - c^2)(c^2 - v^2)} + 2(\alpha_1 + \alpha_2)u \right) \\ I_\varphi &= \frac{1}{2} \left(\frac{2c^2 (u^2 - v^2) p_\varphi^2}{(u^2 - c^2)(c^2 - v^2)} + (u^2 - c^2) p_u^2 + (c^2 - v^2) p_v^2 - 2(\alpha_1 + \alpha_2)u - 2(\alpha_1 - \alpha_2)v \right) \end{aligned} \quad (3.18)$$

donde es fácil observar que,

$$I_u + I_v = -I_\varphi \quad (3.19)$$

La reducción a cuadraturas del problema se encuentra recogida por ejemplo en [38]. Para el caso plano, es decir, en el que φ es constante, se puede encontrar por ejemplo en [29, 12].

3.2.2 Formulación del problema en \mathbb{S}^2 .

El siguiente caso de estudio es el problema de la dinámica de una partícula material puntual sobre la superficie de la esfera tridimensional de radio R embebida en el espacio Euclídeo \mathbb{R}^3 , en el seno de un campo gravitatorio generado por dos centros Newtonianos fijos.

Por tanto, la descripción del problema sobre la superficie bidimensional de la esfera \mathbb{S}^2 es la siguiente: considérense dos centros Newtonianos fijos sobre la esfera de radio R , situados sin pérdida de generalidad en $F_1 = (R\bar{\sigma}, 0, R\sigma)$ y $F_2 = (-R\bar{\sigma}, 0, R\sigma)$, donde $\sigma = \cos \theta_f$ y $\bar{\sigma} = \sin \theta_f$. Considérense además las distancias geodésicas $R\theta_1$ y $R\theta_2$ dadas por la longitud de arco desde la posición de un punto p hasta los dos centros fijos. Se puede ver representado el problema en la Figura 3.2.

En el problema de Killing (problema de Euler sobre la esfera), la energía potencial es igual a la suma de los potenciales generados por cada uno de los centros Newtonianos. Recordando tal y como se hizo en la Sección 2.4.1, se tiene que \mathcal{V} es una función dependiente sólo de las longitudes de arco de circunferencia θ_1 y θ_2 . Utilizando la ecuación Laplace-Beltrami para determinar la forma del potencial se obtiene el potencial \mathcal{V} ,

$$\mathcal{V}(\theta_1, \theta_2) = -\frac{\alpha_1}{R} \cot \theta_1 - \frac{\alpha_2}{R} \cot \theta_2 \quad (3.20)$$

El Hamiltoniano en coordenadas cartesianas del sistema mecánico natural del problema es el siguiente,

$$\mathcal{H}_{2C} = \frac{1}{2R^2} (L_X^2 + L_Y^2 + L_Z^2) - \frac{1}{R} \left(\frac{\alpha_1(\sigma Z + \bar{\sigma} X)}{\sqrt{R^2 - (\sigma Z + \bar{\sigma} X)^2}} + \frac{\alpha_2(\sigma Z - \bar{\sigma} X)}{\sqrt{R^2 - (\sigma Z - \bar{\sigma} X)^2}} \right) \quad (3.21)$$

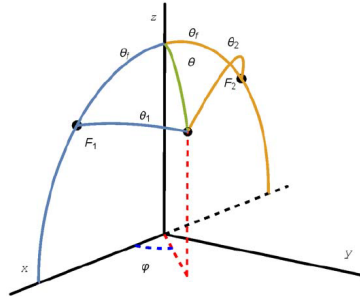


Figura 3.2: Esquema sobre la superficie del hemisferio superior de la esfera, para construcción de las coordenadas esferocónicas. [23]

donde L_j con $j = X, Y, Z$ son las componentes del momento angular dadas de la forma, $\vec{L} = \vec{X} \times \vec{P}$ con $\vec{X} = (X, Y, Z)$ y $\vec{P} = (P_X, P_Y, P_Z)$.

El potencial $\mathcal{V}(\theta_1, \theta_2)$, obtenido en (3.20), se puede reescribir teniendo en cuenta identidades trigonométricas de la forma siguiente,

$$\mathcal{V}(\theta_1, \theta_2) = -\frac{(\alpha_1 + \alpha_2) \sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \cos \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} + (\alpha_1 - \alpha_2) \sin \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \cos \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}}{R (\sin^2 \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} - \sin^2 \frac{\theta_2 - \theta_1}{2})} \quad (3.22)$$

donde ahora es posible introducir las coordenadas esferocónicas¹ dadas por las variables auxiliares U y V , definidas como el seno de la suma y la diferencia de las distancias a los focos θ_1 y θ_2 ,

$$U = \sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}, \quad V = \sin \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \quad (3.23)$$

donde $-\bar{\sigma} < V < \bar{\sigma}$ y $\bar{\sigma} < U < 1$.

La transformación de coordenadas Cartesianas a coordenadas esferocónicas viene dada por las siguientes expresiones,

$$\begin{aligned} x &= \frac{R}{\bar{\sigma}} UV \\ y &= \pm \frac{R}{\sigma \bar{\sigma}} \sqrt{U^2 - \bar{\sigma}^2} \sqrt{\bar{\sigma}^2 - V^2} \\ z &= \pm \frac{R}{\sigma} \sqrt{1 - U^2} \sqrt{1 - V^2} \end{aligned} \quad (3.24)$$

¹Para más información sobre las coordenadas esferocónicas véase la Sección A.3 del Apéndice A.

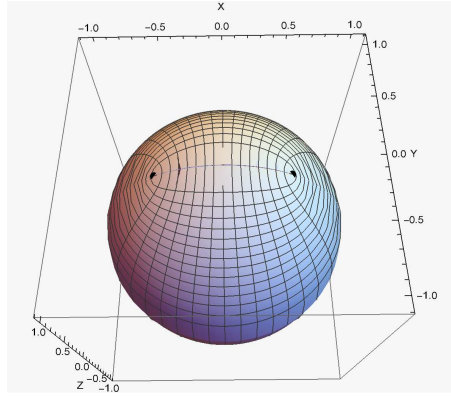


Figura 3.3: Isocurvas de coordenadas esféricas en la superficie de una esfera de radio unidad con los centros Newtonianos situados en $F_1 = (R\bar{\sigma}, 0, R\sigma)$ y $F_2 = (-R\bar{\sigma}, 0, R\sigma)$.

Se puede escribir el Hamiltoniano como un sistema de *Liouville* mediante separación de variables de la forma siguiente,

$$\mathcal{H}_{2C} = \frac{1}{2c} (a_U P_U^2 + a_V P_V^2) + \frac{1}{c} (\mathcal{V}_U + \mathcal{V}_V) \quad (3.25)$$

Para las coordenadas esféricas los coeficientes a_U, a_V son,

$$\begin{aligned} a_U &= \frac{(1 - U^2)(U^2 - \bar{\sigma}^2)}{R^2} \\ a_V &= \frac{(1 - V^2)(\bar{\sigma}^2 - V^2)}{R^2} \end{aligned} \quad (3.26)$$

y los coeficientes c_U, c_V , son,

$$\begin{aligned} c_U &= U^2 \\ c_V &= -V^2 \end{aligned} \quad (3.27)$$

donde se cumple que,

$$c = \sum_{i=1}^2 c_i = U^2 - V^2 \quad (3.28)$$

Por lo tanto, se pueden escribir los momentos en función de las velocidades de la forma,

$$\begin{aligned} P_U &= R^2 \frac{U^2 - V^2}{(1 - U^2)(U^2 - \bar{\sigma}^2)} \dot{U} \\ P_V &= R^2 \frac{U^2 - V^2}{(1 - V^2)(\bar{\sigma}^2 - V^2)} \dot{V} \end{aligned} \quad (3.29)$$

donde se ha tenido en cuenta que,

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \frac{a_i}{c} p_i \Leftrightarrow p_i = \frac{c}{a_i} \dot{q}_i \quad (3.30)$$

De esta manera, es posible escribir la energía cinética en función de las velocidades, donde resulta la siguiente expresión,

$$\mathcal{K} = \frac{R^2}{2} \left[\frac{U^2 - V^2}{(1 - U^2)(U^2 - \bar{\sigma}^2)} \dot{U}^2 + \frac{U^2 - V^2}{(1 - V^2)(\bar{\sigma}^2 - V^2)} \dot{V}^2 \right] \quad (3.31)$$

El potencial (3.22) se puede escribir con dos expresiones distintas dependiendo del hemisferio en el que esté descrito el problema. Para el hemisferio superior ($\mathbb{S}_+^2 = \{(X, Y, Z) \in \mathbb{S}^2, Z \geq 0\}$),

$$\mathcal{V}_+(U, V) = -\frac{1}{R(U^2 - V^2)} \left[(\alpha_1 + \alpha_2) U \sqrt{1 - U^2} + (\alpha_1 - \alpha_2) V \sqrt{1 - V^2} \right] \quad (3.32)$$

mientras que para el hemisferio inferior ($\mathbb{S}_-^2 = \{(X, Y, Z) \in \mathbb{S}^2, Z \leq 0\}$) se tiene,

$$\mathcal{V}_-(U, V) = -\frac{1}{R(U^2 - V^2)} \left[-(\alpha_1 + \alpha_2) U \sqrt{1 - U^2} + (\alpha_1 - \alpha_2) V \sqrt{1 - V^2} \right] \quad (3.33)$$

En cuanto a los coeficientes $\mathcal{V}_{U\pm}, \mathcal{V}_{V\pm}$, se tiene que,

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{U\pm} &= -\frac{(\pm 1)}{R} (\alpha_1 + \alpha_2) U \sqrt{1 - U^2} \\ \mathcal{V}_{V\pm} &= -\frac{1}{R} (\alpha_1 - \alpha_2) V \sqrt{1 - V^2} \end{aligned} \quad (3.34)$$

y por consiguiente, es posible escribir el potencial \mathcal{V}_\pm de la formas (3.32) y (3.33).

Finalmente se tiene que el Hamiltoniano en coordenadas esferocónicas es de la forma,

$$\mathcal{H}_\pm = \frac{1}{2R^2(U^2 - V^2)} \left[(U^2 - \bar{\sigma}^2) (1 - U^2) P_U^2 + (\bar{\sigma}^2 - V^2) (1 - V^2) P_V^2 \right] + \mathcal{U}_\pm(U, V) \quad (3.35)$$

Se puede hacer un estudio sobre la integrabilidad del sistema mecánico teniendo en cuenta que el sistema es de tipo Liouville, de modo que se pueden obtener dos integrales primeras para el hemisferio superior de la forma,

$$I_j = \frac{1}{2} a_j p_j^2 + \mathcal{V}_{j+} - \mathcal{H}_+ c_j, \quad j = U, V \quad (3.36)$$

donde se observa que existe una clara relación entre ellas, ya que debe de haber $n - 1$ (donde $n = 2$) integrales del movimiento independientes, entonces,

$$I_U + I_V = 0 \quad (3.37)$$

La integral primera resultante distinta del Hamiltoniano es,

$$\begin{aligned} I_U = -I_V &= \frac{-1}{2R^2(U^2 - V^2)} \left[P_U^2 (1 - U^2) (U^2 - \bar{\sigma}^2) V^2 + P_V^2 (1 - V^2) (\bar{\sigma}^2 - V^2) U^2 \right] \\ &+ \frac{1}{R(U^2 - V^2)} \left[UV \left((\alpha_1 - \alpha_2) U \sqrt{1 - V^2} + (\alpha_1 + \alpha_2) V \sqrt{1 - U^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.38)$$

Las soluciones explicitas del problema se encuentran recogidas en [23].

3.2.3 Formulación del problema en \mathbb{L}^2 .

El problema de Killing en el plano de Lobachevskii \mathbb{L}^2 se va a plantear sobre la hoja superior \mathbb{H}^2 del hiperboloide de dos hojas embebido en el espacio de Minkowski $\mathbb{R}^{2,1}$.

En este caso y de forma análoga que el sistema mecánico sobre la 2-esfera, el problema consiste en la descripción de la dinámica de una partícula en el seno de un campo gravitatorio creado por dos centros fijos situados sin pérdida de generalidad en la hoja superior $F_1 = (R\bar{\sigma}, 0, R\sigma)$ y $F_2 = (-R\bar{\sigma}, 0, R\sigma)$, donde $\sigma = \cosh \theta_f$ y $\bar{\sigma} = \sinh \theta_f$. Considérense además las distancias geodésicas $R\theta_1$ y $R\theta_2$ dadas por la longitud de arco desde la posición de un punto p hasta los dos centros fijos.

La energía potencial es igual a la suma de los potenciales generados por cada uno de los centros Newtonianos. El potencial \mathcal{V} va a depender de la distancia geodésica y por lo tanto de la geometría del espacio. Recordando tal y como se hizo en la Sección 2.4.2, se tiene que \mathcal{V} es una función dependiente sólo de las longitudes de arco de circunferencia θ_1 y θ_2 . Utilizando la ecuación Laplace-Beltrami para determinar la forma del potencial se obtiene el potencial \mathcal{V} ,

$$\mathcal{V}(\theta_1, \theta_2) = -\frac{\alpha_1}{R} \coth \theta_1 - \frac{\alpha_2}{R} \coth \theta_2 \quad (3.39)$$

El Hamiltoniano en coordenadas cartesianas del sistema mecánico natural del problema sobre la superficie del hiperboloide es el siguiente,

$$\mathcal{H}_{2C} = \frac{1}{2R^2} (L_X^2 + L_Y^2 - L_Z^2) - \frac{1}{R} \left(\frac{\alpha_1(\sigma Z + \bar{\sigma} X)}{\sqrt{R^2 - (\sigma Z + \bar{\sigma} X)^2}} + \frac{\alpha_2(\sigma Z - \bar{\sigma} X)}{\sqrt{R^2 - (\sigma Z - \bar{\sigma} X)^2}} \right) \quad (3.40)$$

donde L_j con $j = X, Y, Z$ son las componentes del momento angular dadas de la forma, $\vec{L} = \vec{X} \times \vec{P}$ con $\vec{X} = (X, Y, Z)$ y $\vec{P} = (P_X, P_Y, P_Z)$.

La diferencia en los signos con respecto al Hamiltoniano de los centros sobre la superficie de la esfera viene dada porque el hiperboloide se encuentra embebido en una variedad de Lorentz $\mathbb{R}^{2,1}$, de modo que el producto escalar de dos vectores viene dado de la forma siguiente,

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R}^{2,1} \times \mathbb{R}^{2,1} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u, v &\longmapsto u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 - u_3 v_3 \end{aligned} \quad (3.41)$$

donde $u, v \in \mathbb{R}^{2,1}$.

Se pueden hacer una serie de transformaciones a partir de identidades trigonométricas sobre el potencial $\mathcal{V}(\theta_1, \theta_2)$, obtenido en (3.39), donde se puede reescribir de la forma siguiente,

$$\mathcal{V}(\theta_1, \theta_2) = -\frac{(\alpha_1 + \alpha_2) \sinh \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \cosh \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} + (\alpha_1 - \alpha_2) \sinh \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \cosh \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}}{R (\sinh^2 \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} - \sinh^2 \frac{\theta_2 - \theta_1}{2})} \quad (3.42)$$

donde ahora es posible introducir las coordenadas pseudo-esferocónicas² sobre la hoja superior \mathbb{H}_+^2 , dadas por las variables auxiliares U y V , definidas como el seno de la

²Para más información sobre las coordenadas pseudo-esferocónicas véase la Sección A.4 del Apéndice A.

suma y la diferencia de las distancias a los focos θ_1 y θ_2 ,

$$U = \sinh \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}, \quad V = \sinh \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \quad (3.43)$$

donde $-\bar{\sigma} < U < \bar{\sigma}$ y $\bar{\sigma} < V$. Se puede hacer de forma análoga para la hoja inferior \mathbb{H}^2 teniendo en cuenta la definición de las variables U y V para esta hoja.

La transformación de coordenadas Cartesianas a coordenadas esferocónicas en la hoja superior del hiperboloide viene dada por las siguientes expresiones,

$$\begin{aligned} x &= \frac{R}{\bar{\sigma}} UV \\ y &= \frac{R}{\sigma \bar{\sigma}} \sqrt{U^2 - \bar{\sigma}^2} \sqrt{\bar{\sigma}^2 - V^2} \\ z &= \frac{R}{\sigma} \sqrt{1 + U^2} \sqrt{1 + V^2} \end{aligned} \quad (3.44)$$

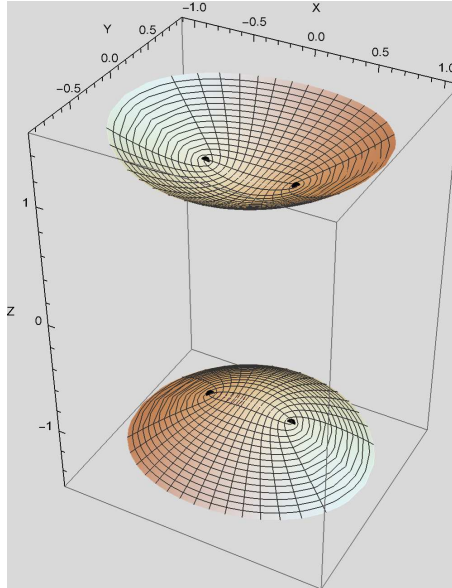


Figura 3.4: Isocurvas de coordenadas pseudo-esferocónicas en la superficie de un hiperboloide con los centros Newtonianos situados en $F_1 = (R\bar{\sigma}, 0, R\sigma)$ y $F_2 = (-R\bar{\sigma}, 0, R\sigma)$.

Es interesante comentar que aunque el modelo hiperbólico del plano de Lobachevskii es simplemente una hoja del hiperboloide, es posible describir simultáneamente el caso de dos centros atractivos y el de dos centros repulsivos interpretándolo como el problema asociado en la hoja inferior del hiperboloide, a completa semejanza del caso de la esfera con respecto a los dos hemisferios. Ver Figura 3.4 para la representación simultánea de ambos problemas.

El Hamiltoniano escrito como un sistema de *Liouville* mediante separación de variables posee la forma siguiente,

$$\mathcal{H}_{2C} = \frac{1}{2c} (a_U P_U^2 + a_V P_V^2) + \frac{1}{c} (\mathcal{V}_U + \mathcal{V}_V) \quad (3.45)$$

Para las coordenadas pseudo-esferocónicas los coeficientes a_U, a_V son,

$$\begin{aligned} a_U &= \frac{(1+U^2)(U^2-\bar{\sigma}^2)}{R^2} \\ a_V &= \frac{(1+V^2)(\bar{\sigma}^2-V^2)}{R^2} \end{aligned} \quad (3.46)$$

y los coeficientes c_U, c_V , son,

$$\begin{aligned} c_U &= U^2 \\ c_V &= -V^2 \end{aligned} \quad (3.47)$$

donde se cumple que,

$$c = \sum_{i=1}^2 c_i = U^2 - V^2 \quad (3.48)$$

Por lo tanto, se pueden escribir los momentos en función de las velocidades de la forma,

$$\begin{aligned} P_U &= R^2 \frac{U^2 - V^2}{(1+U^2)(U^2-\bar{\sigma}^2)} \dot{U} \\ P_V &= R^2 \frac{U^2 - V^2}{(1+V^2)(\bar{\sigma}^2-V^2)} \dot{V} \end{aligned} \quad (3.49)$$

donde se ha tenido en cuenta que,

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \frac{a_i}{c} p_i \Leftrightarrow p_i = \frac{c}{a_i} \dot{q}_i \quad (3.50)$$

De esta manera, es posible escribir la energía cinética para la hoja superior en función de las velocidades, donde resulta la siguiente expresión,

$$\mathcal{K} = \frac{R^2}{2} \left[\frac{U^2 - V^2}{(1+U^2)(U^2-\bar{\sigma}^2)} \dot{U}^2 + \frac{U^2 - V^2}{(1+V^2)(\bar{\sigma}^2-V^2)} \dot{V}^2 \right] \quad (3.51)$$

En cuanto al potencial (3.42), éste se puede escribir con dos expresiones distintas dependiendo de la hoja en el que esté descrito el problema. Para el hemisferio superior ($\mathbb{H}_+^2 = \{(X, Y, Z) \in \mathbb{H}^2, Z \geq 0\}$),

$$\mathcal{V}_+(U, V) = -\frac{1}{R(U^2 - V^2)} \left[(\alpha_1 + \alpha_2) U \sqrt{1+U^2} + (\alpha_1 - \alpha_2) V \sqrt{1+V^2} \right] \quad (3.52)$$

mientras que para el hemisferio inferior ($\mathbb{H}_-^2 = \{(X, Y, Z) \in \mathbb{H}^2, Z \leq 0\}$) se tiene,

$$\mathcal{V}_-(U, V) = -\frac{1}{R(U^2 - V^2)} \left[-(\alpha_1 + \alpha_2) U \sqrt{1+U^2} + (\alpha_1 - \alpha_2) V \sqrt{1+V^2} \right] \quad (3.53)$$

En cuanto a los coeficientes $\mathcal{V}_{U\pm}, \mathcal{V}_{V\pm}$, se tiene que,

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{U\pm} &= -\frac{(\pm 1)}{R} (\alpha_1 + \alpha_2) U \sqrt{1+U^2} \\ \mathcal{V}_{V\pm} &= -\frac{1}{R} (\alpha_1 - \alpha_2) V \sqrt{1+V^2} \end{aligned} \quad (3.54)$$

y por consiguiente, es posible escribir el potencial \mathcal{V}_\pm de la formas (3.52) y (3.53).

Finalmente se tiene que el Hamiltoniano en coordenadas pseudo-esferocónicas es de la forma,

$$\mathcal{H}_\pm = \frac{1}{2R^2(U^2 - V^2)} [(U^2 - \bar{\sigma}^2) (1 + U^2) P_U^2 + (\bar{\sigma}^2 - V^2) (1 + V^2) P_V^2] + \mathcal{V}_\pm(U, V) \quad (3.55)$$

Se puede hacer un estudio sobre la integrabilidad del sistema mecánico teniendo en cuenta que el sistema es de tipo Liouville, de modo que se pueden obtener dos integrales primeras para la hoja superior de la forma,

$$I_j = \frac{1}{2} a_j p_j^2 + \mathcal{V}_{j+} - \mathcal{H}_+ c_j, \quad j = U, V \quad (3.56)$$

donde se observa que existe una clara relación entre ellas, ya que debe de haber $n - 1$ (donde $n = 2$) integrales del movimiento independientes, entonces,

$$I_U + I_V = 0 \quad (3.57)$$

La integral primera resultante distinta del Hamiltoniano es,

$$I_U = -I_V = \frac{-1}{2R^2(U^2 - V^2)} [P_U^2 (1 + U^2) (U^2 - \bar{\sigma}^2) V^2 + P_V^2 (1 + V^2) (\bar{\sigma}^2 - V^2) U^2] + \frac{1}{R(U^2 - V^2)} [UV ((\alpha_1 + \alpha_2)U\sqrt{1 + V^2} + (\alpha_1 + \alpha_2)V\sqrt{1 + U^2})] \quad (3.58)$$

3.3 Problema de Kepler como límite del problema de dos centros.

A lo largo de la memoria se ha comentado que el problema de Kepler corresponde a un sistema Hamiltoniano maximalmente superintegrable, ya que posee un número adicional de integrales primeras, concretamente $2n - 1$. La integrabilidad del problema en espacios con curvatura constante, sobre la esfera \mathbb{S}^2 y la superficie del hiperboloide \mathbb{H}^2 (como modelo del plano de Lobachevskii \mathbb{L}^2) ya ha sido comentada en este trabajo, y sobre el plano es posible encontrarlo en numerosas referencias bibliográficas sobre dinámica celeste como por ejemplo [31, 26, 3, 38].

Un resultado muy interesante es recuperar el problema de Kepler como límite del problema de dos centros Newtonianos. Además de la forma obvia de anular uno de los dos centros, existen dos límites posibles en los que obtendremos este resultado, por un lado hacer tender la distancia entre los centros a infinito, pero manteniendo uno de ellos en un punto finito, y por otro, hacer tender a cero dicha distancia de separación.

Si escribimos el problema de Kepler del caso plano en coordenadas elípticas, entonces podemos aplicar los límites comentados de forma directa para obtener el mismo problema en coordenadas polares, parabólicas y cartesianas³.

³ Véase la Sección A.2 del Apéndice A para más información sobre los límites.

A continuación, se va a mostrar como en los límites del problema de Euler plano en las que las distancias interfocales tienden a cero o infinito, se recuperan los resultados para el problema de Kepler en coordenadas polares y parabólicas respectivamente. Además, se pretende extender estos resultados obtenidos para los casos de la esfera y el hiperboloide para obtener el problema de Kepler en cada uno de estos espacios con curvatura constante.

3.3.1 Resultados sobre el plano \mathbb{R}^2 .

El problema de Euler sobre el plano es una restricción sobre el problema comentado anteriormente en la Subsección 3.2.1 en el que la variable angular φ es constante, pudiendo considerar un problema bidimensional. En este caso, se obtiene el siguiente Hamiltoniano,

$$\mathcal{H}_{2C} = \frac{1}{2} \frac{1}{u^2 - v^2} [(u^2 - c^2)P_u^2 + (c^2 - v^2)P_v^2] - \frac{u(\alpha_1 + \alpha_2) + v(\alpha_1 - \alpha_2)}{u^2 - v^2} \quad (3.59)$$

donde los momentos P_u y P_v son,

$$P_u = \frac{u^2 - v^2}{u^2 - c^2} \dot{u} \quad P_v = \frac{u^2 - v^2}{c^2 - v^2} \dot{v} \quad (3.60)$$

Como el problema esta formulado en coordenadas elípticas, se van a considerar los límites en los que la distancia interfocal es nula, y en el que fijando uno de los centros se hace tender el otro a infinito obteniendo el problema de Kepler en coordenadas polares y parabólicas respectivamente.

Límite a coordenadas Polares.

En primer lugar se va a considerar la situación en el que los dos centros se encuentran en el origen ($c \rightarrow 0$). Bajo esta definición de las coordenadas elípticas, el límite no se puede aplicar directamente y hay que tener en cuenta una serie de consideraciones. Se van a redefinir las variables u y v de la forma que se muestra a continuación,

$$u \rightarrow r \quad v \rightarrow c \cos \phi \quad (3.61)$$

Reescribiendo la energía cinética y potencial en términos de las variables elípticas redefinidas se obtiene,

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \frac{1}{2}(u^2 - v^2) \left[\frac{\dot{u}^2}{u^2 - c^2} + \frac{\dot{v}^2}{c^2 - v^2} \right] = \\ &= \frac{1}{2}(r^2 - c \cos \phi) \left[\frac{\dot{r}^2}{r^2 - c^2} + \frac{c^2 \sin^2 \phi \dot{\phi}^2}{c^2(1 - \cos^2 \phi)} \right] \end{aligned} \quad (3.62)$$

$$\mathcal{U} = -\frac{ku - k'v}{u^2 - v^2} = -\frac{kr - k'c \cos \phi}{r^2 - c^2 \cos^2 \phi} \quad (3.63)$$

donde se está utilizando $k = \alpha_1 + \alpha_2$ y $k' = \alpha_2 - \alpha_1$.

Si ahora se toma el límite $c \rightarrow 0$, entonces,

$$\lim_{c \rightarrow 0} \mathcal{H}_{2C} = \frac{1}{2}(\dot{r} + r^2 \dot{\phi}^2) - \frac{k}{r} \quad (3.64)$$

Este resultado se puede identificar con el problema de Kepler en coordenadas polares,

$$\mathcal{H}_{1C} = \frac{1}{2}(P_r^2 + \frac{P_\phi^2}{r^2}) - \frac{\beta}{r} \quad (3.65)$$

donde resulta fácil identificar P_r y P_ϕ de la forma,

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{\partial \mathcal{H}_{1C}}{\partial P_r} = P_r \\ \dot{\phi} &= \frac{\partial \mathcal{H}_{1C}}{\partial P_\phi} = \frac{P_\phi}{r^2} \end{aligned} \quad (3.66)$$

El sistema Hamiltoniano es integrable y por tanto existe una integral primera adicional. Se va a utilizar la constante del movimiento obtenida por C.A. Coulson y A. Joseph [11],

$$I_2 = \frac{1}{2}(L^2 + c^2 P_x^2) - cx \left(\frac{\alpha_1}{r_1} - \frac{\alpha_2}{r_2} \right) \quad (3.67)$$

Si ahora se escribe en función de las coordenadas elípticas u y v , entonces se tiene,

$$I_2 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{v(c^2 - v^2)\dot{u} + u(c^2 - u^2)\dot{v}}{\sqrt{u^2 - c^2}\sqrt{c^2 - v^2}} \right)^2 + (u\dot{v} + v\dot{u})^2 \right] - uv \frac{ku - k'v}{u^2 - v^2} \quad (3.68)$$

Reescribiendo la integral del movimiento en función de las variables redefinidas $u \rightarrow r$ y $v \rightarrow c \cos \phi$, para poder hacer el límite, resulta,

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{c \cos \phi (c^2 - c^2 \cos^2 \phi) \dot{r} - rc \sin \phi (c^2 - r^2) \dot{\phi}}{\sqrt{r^2 - c^2} \sqrt{c^2 - c^2 \cos^2 \phi}} \right)^2 + (-rc \sin \phi \dot{\phi} + c \cos \phi \dot{r})^2 \right] \\ &\quad - rc \cos \phi \frac{kr - k'c \cos \phi}{r^2 - c^2 \cos^2 \phi} \end{aligned} \quad (3.69)$$

Cuando se toma el límite $c \rightarrow 0$, es fácil observar que todo se anula salvo el primer sumando, que resulta,

$$\lim_{c \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left(\frac{c \cos \phi (c^2 - c^2 \cos^2 \phi) \dot{r} - rc \sin \phi (c^2 - r^2) \dot{\phi}}{\sqrt{r^2 - c^2} \sqrt{c^2 - c^2 \cos^2 \phi}} \right)^2 = \frac{1}{2} r^4 \dot{\phi}^2 \quad (3.70)$$

este resultado coincide con $\frac{1}{2} P_\phi^2 = \frac{1}{2} L^2$, siendo L^2 el cuadrado momento angular y una de las integrales del movimiento del problema de Kepler.

Límite a coordenadas Parabólicas.

Las coordenadas parabólicas son un caso límite en el que la distancia interfocal tiende a infinito ($c \rightarrow \infty$) cuando uno de los centros se mantiene fijo. Para hacer el límite, es pertinente hacer una redefinición de las coordenadas elípticas de la forma,

$$u \rightarrow \sqrt{c(c + \xi_1^2)} \quad v \rightarrow \pm \sqrt{c(c - \xi_2^2)} \quad (3.71)$$

En las nuevas variables, el Hamiltoniano es,

$$\mathcal{H}_{2C} = \frac{1}{2}c (\xi_1^2 + \xi_2^2) \left(\frac{\dot{\xi}_1^2}{c + \xi_1^2} + \frac{\dot{\xi}_2^2}{c - \xi_2^2} \right) - \frac{k\sqrt{c(c + \xi_1^2)} - k'\sqrt{c(c - \xi_2^2)}}{c(\xi_1^2 + \xi_2^2)} \quad (3.72)$$

Si ahora se toma el límite $c \rightarrow \infty$, entonces,

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \mathcal{H}_{2C} = \frac{1}{2} (\xi_1^2 + \xi_2^2) (\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2) - \frac{k - k'}{\xi_1^2 + \xi_2^2} \quad (3.73)$$

Este resultado se puede identificar con el problema de Kepler en coordenadas parabólicas,

$$\mathcal{H}_{1C} = \frac{1}{2} (P_{\xi_1}^2 + P_{\xi_2}^2) - \frac{\beta}{\xi_1^2 + \xi_2^2} \quad (3.74)$$

donde resulta fácil identificar P_{ξ_1} y P_{ξ_2} de la forma,

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \frac{\partial \mathcal{H}_{1C}}{\partial \xi_1} = \frac{P_{\xi_1}}{(\xi_1^2 + \xi_2^2)} \\ \dot{\xi}_2 &= \frac{\partial \mathcal{H}_{1C}}{\partial \xi_2} = \frac{P_{\xi_2}}{(\xi_1^2 + \xi_2^2)} \end{aligned} \quad (3.75)$$

Como en el caso anterior, se va a utilizar la integral primera (3.67). Si se escribe en coordenadas elípticas se obtendría el resultado anterior (3.68). La integral primera es invariante bajo sumas y productos de constantes. Por lo tanto, se puede realizar la siguiente transformación,

$$\frac{I_2 - c^2 H - c\alpha_2}{c} = \frac{1}{c} \left[\frac{1}{2} (l^2 - c^2 p_2^2) + c \left(\frac{(c - q_1)\alpha_1}{r_1} + \frac{(c + q_1)\alpha_2}{r_2} - c\alpha_2 \right) \right] \quad (3.76)$$

donde ahora, tras aplicar las redefiniciones de las variables u y v , y calcular el límite cuando la distancia interfocal c tiende a infinito, se obtiene,

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \frac{I_2 - c^2 H - c\alpha_2}{c} = \frac{1}{2} (\xi_1^2 + \xi_2^2) (\xi_1^2 \xi_2'^2 - \xi_2^2 \xi_1'^2) + \alpha_1 \frac{(\xi_2^2 - \xi_1^2)}{\xi_1^2 + \xi_2^2} \quad (3.77)$$

que coincide con la primera componente del vector de Runge-Lenz.

El vector de Runge-Lenz corresponde a la segunda integral del movimiento distinta del Hamiltoniano que da lugar a que el problema de Kepler sea superintegrable.

3.3.2 Resultados sobre la esfera \mathbb{S}^2 .

Lo que se pretende realizar a continuación es recuperar, de forma análoga como se ha hecho en el plano, el problema de Kepler como límite del problema de Euler sobre de la superficie esférica. Para ello, se va a utilizar la proyección gnomónica (tal como se muestra en la Figura 3.5) para trasladar los resultados de \mathbb{R}^2 a \mathbb{S}^2 .

La proyección gnomónica consiste la aplicación,

$$\Pi_{\pm} : \mathbb{S}_{\pm}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{R}{Z}X = R \tan \theta \cos \varphi \\ y = \frac{R}{Z}Y = R \tan \theta \sin \varphi \end{cases}, \quad \varphi \in [0, 2\pi) \quad (3.78)$$

donde $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ para el caso en el que Π_+ y $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ para el caso en el que Π_- .

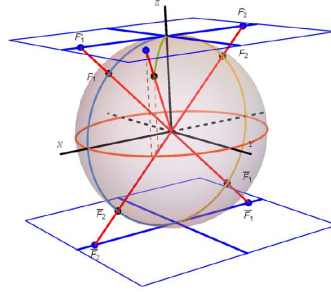


Figura 3.5: Proyección gnomónica en la esfera. [24]

De modo que, la proyección Π_{\pm} permite ir de \mathbb{S}^2 a \mathbb{R}^2 . Sin embargo, el objetivo es, a partir de los resultados en el caso plano obtener una analogía en la esfera. Para ello se va a considerar la aplicación gnomónica inversa,

$$\Pi_{\pm}^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{S}_{\pm}^2 \quad (3.79)$$

donde

$$X = \frac{Rx}{\sqrt{R^2 + x^2 + y^2}}, Y = \frac{Ry}{\sqrt{R^2 + x^2 + y^2}}, Z = \frac{\pm R^2}{\sqrt{R^2 + x^2 + y^2}} \quad (3.80)$$

Límite a coordenadas esféricas.

En el límite en el que la distancia de los dos centros Newtonianos tiende a cero, debería recuperarse el problema de Kepler descrito en coordenadas esféricas.

Recuérdese que en el plano, las coordenadas elípticas son,

$$x = \frac{1}{c}uv \quad y = \pm \frac{1}{c}\sqrt{u^2 - c^2}\sqrt{c^2 - v^2} \quad (3.81)$$

donde para recuperar en el límite $c \rightarrow 0$ las coordenadas polares era necesario realizar la redefinición (3.61).

De modo que al sustituir las coordenadas elípticas (3.81) en (3.80) se llega a las expresiones,

$$\begin{aligned} X &= \frac{Ruv}{c\sqrt{R^2 + u^2 + v^2 - c^2}} \\ Y &= \frac{R\sqrt{u^2 - c^2}\sqrt{c^2 - v^2}}{c\sqrt{R^2 + u^2 + v^2 - c^2}} \\ Z &= \frac{R^2}{\sqrt{R^2 + u^2 + v^2 - c^2}} \end{aligned} \quad (3.82)$$

y si ahora se aplica la redefinición (3.61) se obtiene,

$$\begin{aligned} X &= \frac{rR \cos \phi}{\sqrt{(r^2 - c^2) \sin^2 \phi + r^2 \cos^2 \phi + R^2}} \\ Y &= \frac{R \sin \phi \sqrt{r^2 - c^2}}{\sqrt{(r^2 - c^2) \sin^2 \phi + r^2 \cos^2 \phi + R^2}} \\ Z &= \frac{R^2}{\sqrt{(r^2 - c^2) \sin^2 \phi + r^2 \cos^2 \phi + R^2}} \end{aligned} \quad (3.83)$$

Ahora se puede calcular el límite para el caso en el que $c \rightarrow 0$. Pero primero hay que tomar una serie de consideraciones. En primer lugar el límite cuando $c \rightarrow 0$ es lo mismo que tomar el límite $\theta_f \rightarrow 0$. Esto se puede observar de la definición de c ,

$$c = R \frac{\bar{\sigma}}{\sigma} = R \tan \theta_f \quad (3.84)$$

La segunda consideración es la definición de r sobre la esfera, que corresponde a $R \tan \theta$. Por tanto, haciendo las sustituciones se obtiene,

$$\begin{aligned} X &= \frac{R^2 \tan \theta \cos \phi}{\sqrt{R^2 \sec^2 \theta - c^2 \sin^2 \phi}} \\ Y &= \frac{R \sin \phi \sqrt{R^2 \tan^2 \theta - c^2}}{\sqrt{R^2 \sec^2 \theta - c^2 \sin^2 \phi}} \\ Z &= \frac{R^2}{\sqrt{R^2 \sec^2 \theta - c^2 \sin^2 \phi}} \end{aligned} \quad (3.85)$$

Cuando se determina el límite,

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow 0} X &= R \sin \theta \cos \phi \\ \lim_{c \rightarrow 0} Y &= R \sin \theta \sin \phi \\ \lim_{c \rightarrow 0} Z &= R \cos \theta \end{aligned} \quad (3.86)$$

donde se recuperan las coordenadas esféricas.

Lo que se acaba de conseguir es la descripción del problema de Euler sobre la esfera \mathbb{S}^2 en coordenadas X, Y y Z en función de las coordenadas elípticas en el plano u y v . Esto da lugar a que se puede expresar el Hamiltoniano (3.21) en función de las variables u y v , permitiendo que en el límite en el que la distancia entre los centros es nula, se recupera el problema de Kepler.

Límite a coordenadas “esferoparabólicas”.

En el límite en el que uno de los centros Newtonianos se mantiene fijo y el otro se le hace tender a infinito, debería recuperarse el problema de Kepler de forma análoga a como ocurre en el caso plano descrito en coordenadas parabólicas.

Para recuperar en el límite $c \rightarrow \infty$ las coordenadas parabólicas es necesario realizar una traslación de la forma,

$$x = \frac{1}{c}uv - c \quad y = \pm \frac{1}{c}\sqrt{u^2 - c^2}\sqrt{c^2 - v^2} \quad (3.87)$$

además de la redefinición (3.71).

Sustituyendo (3.87) en (3.80) y aplicando la redefinición (3.71) de las variables u y v se obtiene,

$$\begin{aligned} X &= \frac{R\sqrt{c(c + \xi_1^2)}\sqrt{c(c - \xi_2^2)} - c^2R}{c\sqrt{c(2c + \xi_1^2 - \xi_2^2)} - 2\sqrt{c(c + \xi_1^2)}\sqrt{c(c - \xi_2^2)} + R^2} \\ Y &= \frac{R\xi_1\xi_2}{\sqrt{c(2c + \xi_1^2 - \xi_2^2)} - 2\sqrt{c(c + \xi_1^2)}\sqrt{c(c - \xi_2^2)} + R^2} \\ Z &= \frac{R^2}{\sqrt{c(2c + \xi_1^2 - \xi_2^2)} - 2\sqrt{c(c + \xi_1^2)}\sqrt{c(c - \xi_2^2)} + R^2} \end{aligned} \quad (3.88)$$

Donde si ahora se calcula el límite resulta,

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow \infty} X &= \frac{R(\xi_1^2 - \xi_2^2)}{\sqrt{(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2 + 4R^2}} \\ \lim_{c \rightarrow \infty} Y &= \frac{2\xi_1\xi_2R}{\sqrt{(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2 + 4R^2}} \\ \lim_{c \rightarrow \infty} Z &= \frac{2R^2}{\sqrt{(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2 + 4R^2}} \end{aligned} \quad (3.89)$$

Hay que resaltar que este límite aplicado sobre la superficie de la esfera, debido a su geometría, puede no resultar obvio ya que aparentemente no existe un límite en el que los centros puedan estar separados por distancias infinitas. Sin embargo, es posible ver que con la proyección gnomónica y la definición de c sobre la esfera (3.84), hacer tender la distancia de separación a infinito es situar a uno de los centros Newtonianos en uno de los polos, y el otro en el ecuador ($\theta = \pi/2$).

El sistema de coordenadas resultante (3.89), al que se le ha denominado *sistema de coordenadas esferoparabólicas* por su analogía a las coordenadas parabólicas en la esfera, no es un sistema ortogonal de coordenadas. Este resultado es coherente con el obtenido por M.N. Olevskii [28], en el que demuestra que el número de sistemas ortogonales definidos sobre la superficies esférica se reduce a dos: coordenadas esféricas

y esferocónicas. No obstante, mediante un cambio de variables adecuado, es posible recuperar uno u otro sistema de coordenadas.

Puede resultar interesante hacer un análisis de la geometría dada por las coordenadas obtenidas. En la Figura (3.6) se muestran las isocurvas de las coordenadas *esferoparabólicas*.

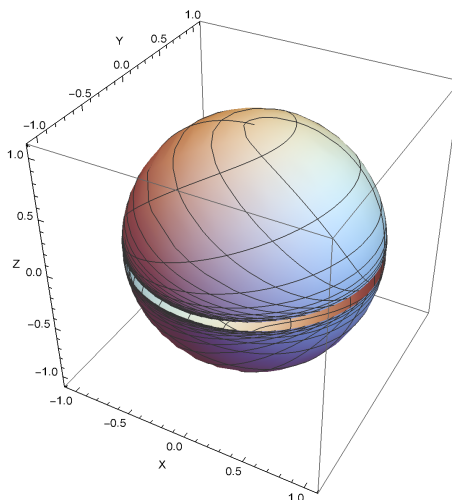


Figura 3.6: Isocurvas de coordenadas *esferoparabólicas* en la superficie de una esfera.

La métrica asociada a las coordenadas *esferoparabólicas* para radio unidad es la siguiente.

$$ds^2 = \frac{4(\xi_1^2 + \xi_2^2)}{(4 + (\xi_1^2 + \xi_2^2))^2} \left[(4 + \xi_1^2 \xi_2^2 + \xi_2^2) d\xi_1^2 - 2 \xi_1^2 \xi_2^2 (\xi_1^2 + \xi_2^2) d\xi_1 d\xi_2 + (4 + \xi_1^2 \xi_2^2 + \xi_1^2) d\xi_2^2 \right] \quad (3.90)$$

Aunque la métrica no sea ortogonal, es directo demostrar que la curvatura escalar asociada es constante, como debe ser para un sistema definido sobre la esfera.

3.3.3 Resultados sobre el hiperboloide \mathbb{H}^2 .

Los resultados que se muestran a continuación para el problema de Kepler como límite del problema de Euler sobre el Hiperboloide se han obtenido mediante la proyección gnomónica, tal y como se planteó sobre la esfera.

La proyección gnomónica en la hoja superior del hiperboloide (Figura 3.7) consiste en la aplicación,

$$\Pi_+ : \mathbb{H}_+^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{R}{Z}X = R \tanh \theta \cos \varphi \\ y = \frac{R}{Z}Y = R \tanh \theta \sin \varphi \end{cases}, \quad \varphi \in [0, 2\pi) \quad (3.91)$$

donde $\theta \in [0, \infty)$, ya que se va a trabajar en la hoja superior del hiperboloide \mathbb{H}^2 .

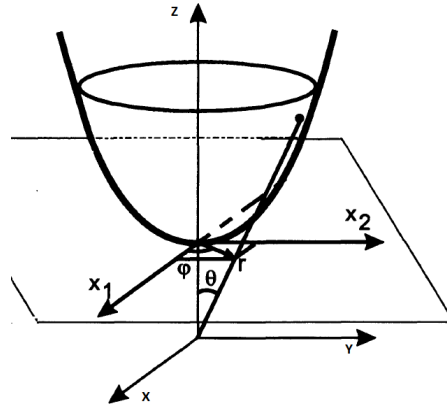


Figura 3.7: Proyección gnomónica en la hoja superior del Hiperboloide [38].

Tal y como se ha planteado anteriormente en el caso esférico, el objetivo es, a partir de los resultados en el caso plano obtener una analogía para el hiperboloide. Para ello se va a considerar la aplicación gnomónica inversa que va desde \mathbb{R}^2 a \mathbb{H}^2 ,

$$\Pi_+^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{H}_+^2 \quad (3.92)$$

donde

$$X = \frac{Rx}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, Y = \frac{Ry}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, Z = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \quad (3.93)$$

Límite a coordenadas pseudo-esféricas.

El primer límite que se va a plantear es en el que la distancia c entre los dos centros Newtonianos se hace nula. En el plano, este límite conlleva recuperar el problema de Kepler descrito coordenadas polares, pero si se traslada al problema formulado sobre el hiperboloide debería obtenerse el sistema mecánico de un centro fijo descrito en coordenadas pseudo-esféricas.

En general, el planteamiento es similar al caso de la esfera bidimensional, donde al sustituir las coordenadas elípticas en la proyección gnomónica inversa (3.93) se tienen las siguientes expresiones,

$$\begin{aligned} X &= \frac{Ruv}{c\sqrt{R^2 - u^2 - v^2 + c^2}} \\ Y &= \frac{R\sqrt{u^2 - c^2}\sqrt{c^2 - v^2}}{c\sqrt{R^2 - u^2 - v^2 + c^2}} \\ Z &= \frac{R^2}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2 + c^2}} \end{aligned} \quad (3.94)$$

Si se aplican ahora las consideraciones para poder hacer correctamente el límite, es

decir las redefiniciones de las variables u y v (3.61) se llega a las ecuaciones,

$$\begin{aligned} X &= \frac{rR \cos \phi}{\sqrt{c^2 \sin^2 \phi - r^2 + R^2}} \\ Y &= \frac{R \sin \phi \sqrt{r^2 - c^2}}{\sqrt{c^2 \sin^2 \phi - r^2 + R^2}} \\ Z &= \frac{R^2}{\sqrt{c^2 \sin^2 \phi - r^2 + R^2}} \end{aligned} \quad (3.95)$$

Ahora bien, en el hiperboloide, la nueva variable r queda definida como $R \tanh \theta$. Esto da lugar a las expresiones,

$$\begin{aligned} X &= \frac{R^2 \tanh \theta \cos \phi}{\sqrt{c^2 \sin^2 \phi + R^2 (1 - \tanh^2 \theta)}} \\ Y &= \frac{R \sin \phi \sqrt{R^2 \tanh^2 \theta - c^2}}{\sqrt{c^2 \sin^2 \phi + R^2 (1 - \tanh^2 \theta)}} \\ Z &= \frac{R^2}{\sqrt{c^2 \sin^2 \phi + R^2 (1 - \tanh^2 \theta)}} \end{aligned} \quad (3.96)$$

Tomando el límite en el caso en el que la distancia de los centros se hace nula se llega a las siguientes expresiones,

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow 0} X &= R \sinh \theta \cos \phi \\ \lim_{c \rightarrow 0} Y &= R \sinh \theta \sin \phi \\ \lim_{c \rightarrow 0} Z &= R \cosh \theta \end{aligned} \quad (3.97)$$

que corresponden a las coordenadas pseudo-esféricas.

Con estos resultados se puede describir el problema de Killing, o Euler en el hiperboloide, en las coordenadas X, Y y Z , las cuales son función de las coordenadas elípticas en el plano u y v . Esto permite que en el límite en que la distancia ente los focos se hace nula, en el plano se recuperen las coordenadas polares y sobre el hiperboloide, las coordenadas pseudo-esféricas. En este límite, el Hamiltoniano (3.40), se transforma en la función Hamiltoniana del problema de Kepler sobre el Hiperboloide.

Límite a coordenadas “pseudo-esferoparábolicas”.

El otro límite que se va a considerar sobre el Hiperboloide \mathbb{H}^2 es en el que, fijado uno de los centros Newtonianos, el otro se le hace tender a infinito. En el plano, este límite conlleva recuperar el problema de Kepler descrito coordenadas parabólicas.

El planteamiento del límite se va a realizar mediante el uso de la proyección gnomónica inversa (3.93), y las coordenadas elípticas en el plano, las cuales se les ha realizado

una traslación (tal y como se hizo en (3.87)) y una redefinición de las variables u y v de la forma (3.71). Por lo tanto se llega a las siguientes expresiones,

$$\begin{aligned}
X &= \frac{R\sqrt{c(c+\xi_1^2)}\sqrt{c(c-\xi_2^2)} - c^2R}{c\sqrt{R^2 - c(2c + \xi_1^2 - \xi_2^2)} + 2\sqrt{c(c+\xi_1^2)}\sqrt{c(c-\xi_2^2)}} \\
Y &= \frac{R\xi_1\xi_2}{\sqrt{R^2 - c(2c + \xi_1^2 - \xi_2^2)} + 2\sqrt{c(c+\xi_1^2)}\sqrt{c(c-\xi_2^2)}} \\
Z &= \frac{R^2}{\sqrt{R^2 - c(2c + \xi_1^2 - \xi_2^2)} + 2\sqrt{c(c+\xi_1^2)}\sqrt{c(c-\xi_2^2)}}
\end{aligned} \tag{3.98}$$

Tomando el límite cuando la distancia c entre los centros tiende a infinito,

$$\begin{aligned}
\lim_{c \rightarrow \infty} X &= \frac{R(\xi_1^2 - \xi_2^2)}{\sqrt{4R^2 - (\xi_1^2 + \xi_2^2)^2}} \\
\lim_{c \rightarrow \infty} Y &= \frac{2\xi_1\xi_2R}{\sqrt{4R^2 - (\xi_1^2 + \xi_2^2)^2}} \\
\lim_{c \rightarrow \infty} Z &= \frac{2R^2}{\sqrt{4R^2 - (\xi_1^2 + \xi_2^2)^2}}
\end{aligned} \tag{3.99}$$

El resultado es un sistema de coordenadas no ortogonal, el cual, por su analogía con las coordenadas parabólicas se ha denominado *sistema de coordenadas pseudo-esferoparabólicas*.

Puede resultar interesante hacer un análisis de la geometría dada por las coordenadas obtenidas. En la Figura (3.6) se muestran las isocurvas de las coordenadas *esferoparabólicas*.

La métrica asociada a las coordenadas *pseudo-esferoparabólicas* para R unidad es la siguiente.

$$\begin{aligned}
ds^2 = & -\frac{4(\xi_1^2 + \xi_2^2)}{\left((\xi_1^2 + \xi_2^2)^2 - 4\right)^2} \left[(\xi_1^2\xi_2^2 + \xi_2^4 - 4) d\xi_2^2 - 2\xi_1\xi_2(\xi_1^2 + \xi_2^2) d\xi_1 d\xi_2 + \right. \\
& \left. + (\xi_1^2\xi_2^2 + \xi_1^4 - 4) d\xi_1^2 \right]
\end{aligned} \tag{3.100}$$

Conocida la métrica, es posible comprobar la curvatura escalar y así verificar que se sigue trabajando en un espacio de curvatura constante negativa.

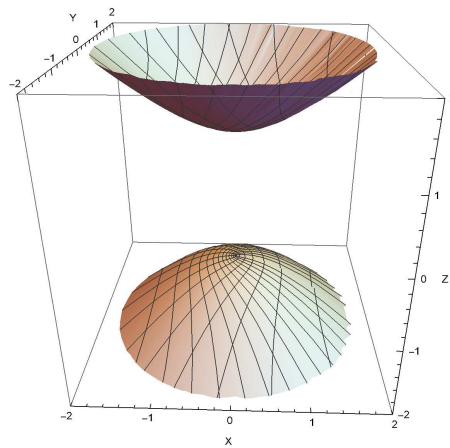


Figura 3.8: Isocurvas de coordenadas *pseudo-esferoparábólicas* en la superficie del hiperboloide de dos hojas.

4 | Conclusiones

Las conclusiones más importantes que hemos obtenido tras la realización de este trabajo son las siguientes:

- Ha sido posible completar un estudio de los sistemas separables de tipo Liouville, así como de los sistemas Hamiltonianos Superintegrables definidos en espacios con curvatura constante.
- Se ha obtenido un método de construcción de sistemas superintegrables de segundo orden en dos dimensiones para espacios con curvatura constante a partir de las ecuaciones de Killing. Asimismo, se ha indicado la metodología para la construcción de dichos sistemas en más dimensiones, mencionando otros mecanismos como la representación de coálgebras.
- Ha sido posible analizar los sistemas superintegrables de segundo orden en espacios de curvatura constante, atendiendo a la separabilidad e integrabilidad de uno de sus ejemplos más relevantes: el problema de Kepler.
- Se ha formulado el problema de dos centros Newtonianos en espacios con curvatura constante, mostrando que el problema es separable y obteniendo sus integrales primeras para cada uno de los casos analizados.
- Se han recuperado resultados conocidos a la hora de obtener el problema de Kepler a través de límites no equivalentes del problema de dos centros plano.
- La extensión de los límites no equivalentes en el problema de dos centros Newtonianos en espacios con curvatura constante ha producido resultados que se presumían conocidos para el caso en el que la distancia de los centros se hacía nula.

Además se han obtenido nuevos resultados, en el caso de curvatura negativa, para el límite en el que la distancia entre los centros se tiende a infinito. Se han analizado los sistemas de coordenadas no ortogonales que resultan en dicho límite.

A | Sistemas de coordenadas.

A.1 Sistemas de coordenadas en el plano (\mathbb{R}^2).

A continuación se muestran los sistemas de coordenadas utilizados en a lo largo de la memoria, así como los sistemas de coordenadas que son resultado de tomar ciertos límites sobre las coordenadas elípticas.

A.1.1 Coordenadas elípticas (Versión de Euler).

Considérense dos puntos fijos en plano F_1 y F_2 situados en $(c, 0)$ y $(-c, 0)$. Las distancias euclídeas de los puntos F_1 y F_2 a un punto cualquiera del plano $p = (x_1, x_2)$ son (ver Figura (A.1)),

$$r_1 = \sqrt{(x_1 - c)^2 + x_2^2} \quad r_2 = \sqrt{(x_1 + c)^2 + x_2^2} \quad (\text{A.1})$$

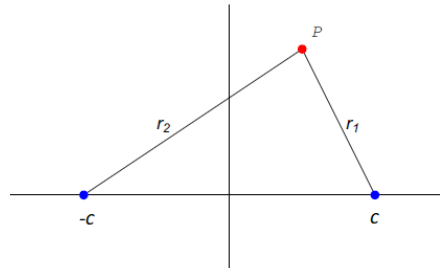


Figura A.1: Distancias euclídeas de los puntos F_1 y F_2 a un punto cualquiera p .

Se definen las coordenadas elípticas en el punto (x_1, x_2) son,

$$u = \frac{r_1 + r_2}{2} \quad v = \frac{r_2 - r_1}{2} \quad (\text{A.2})$$
$$0 < c < u \quad -c < v < c$$

donde el cambio de variable inverso corresponde a las siguientes expresiones,

$$x_1 = \frac{1}{c}uv \quad x_2 = \pm \frac{1}{c}\sqrt{u^2 - c^2}\sqrt{c^2 - v^2} \quad (\text{A.3})$$

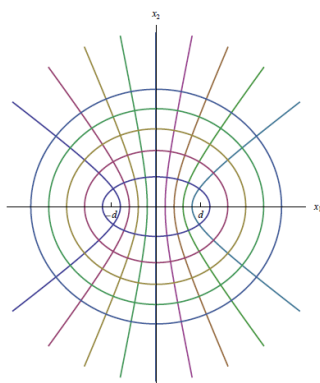


Figura A.2: Isocurvas de las coordenadas elípticas.

A.1.2 Coordenadas polares.

Tómese un punto O como origen de coordenadas en el plano. Todo punto $p = (x_1, x_2)$ del plano se hace corresponder con un par ordenado (r, θ) donde r es la distancia de p al origen y θ es el ángulo formado entre el eje polar y la recta dirigida OP . De modo que se tiene que las coordenadas polares son,

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \theta & x_2 &= r \sin \theta \\ r &> 0 & 0 &\leq \theta \leq 2\pi \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

donde el cambio de variables inverso es,

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad \theta = \text{atan} \frac{x_2}{x_1} \quad (\text{A.5})$$

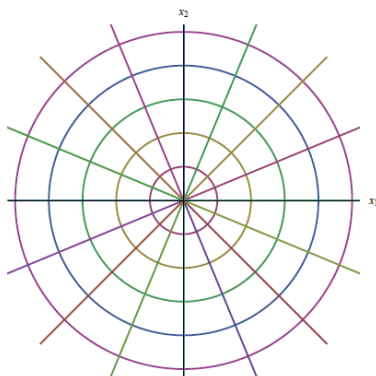


Figura A.3: Isocurvas de las coordenadas polares.

A.1.3 Coordenadas parabólicas.

Se trata de un sistema de coordenadas donde las líneas coordenadas son dos sistemas de parábolas mutuamente ortogonales con ejes opuestos. De esta forma se tiene que las

coordenadas parabólicas son,

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2} (\xi_1^2 - \xi_2^2), & x_2 &= \xi_1 \xi_2 \\ -\infty < \xi_1 < \infty, & 0 \leq \xi_2 < \infty \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

donde el cambio de variable inverso resulta ser,

$$\xi_1 = \pm \sqrt{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} + x_1}, \quad \xi_2 = \sqrt{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - x_1} \quad (\text{A.7})$$

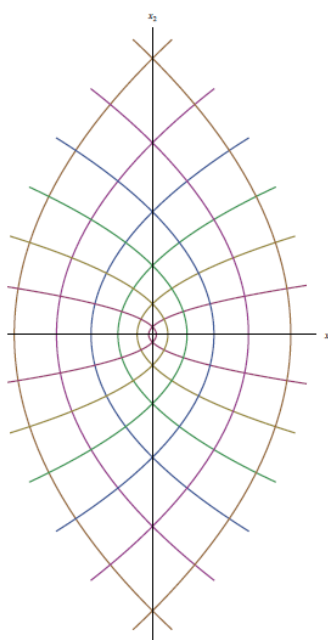


Figura A.4: Isocurvas de las coordenadas parabólicas.

A.2 Sistemas de coordenadas como caso límite de las coordenadas elípticas.

Existen dos límites naturales de las coordenadas elípticas: $c \rightarrow 0$ y $c \rightarrow \infty$. En estos casos es posible obtener las coordenadas polares, parabólicas y cartesianas tomando una serie de consideraciones.

Coordenadas polares como límite de las coordenadas elípticas.

Las coordenadas polares resultan ser el caso límite de las coordenadas elípticas para la situación en el que $c \rightarrow 0$. Hay que tener en cuenta que no se puede hacer

directamente y que se deben tomar una serie de consideraciones. Se van a redefinir las variables u y v .

$$u \rightarrow r \quad v \rightarrow c \cos \theta \quad (\text{A.8})$$

De modo que, sustituyendo (A.8) en (A.3) y calculando el límite,

$$\lim_{c \rightarrow 0} \frac{1}{c} r c \cos \theta = r \cos \theta \quad (\text{A.9})$$

$$\lim_{c \rightarrow 0} \frac{1}{c} \sqrt{r^2 - c^2} \sqrt{c^2 (1 - \cos \theta)} = r \sin \theta \quad (\text{A.10})$$

Coordenadas parabólicas como límite de las coordenadas elípticas.

En \mathbb{R}^2 las coordenadas parabólicas son un caso límite cuando $c \rightarrow \infty$. Para poder hacer el límite, primero se va a tomar en consideración una traslación desde las coordenadas (x_1, x_2) a (x, y) ,

$$\begin{aligned} x_1 = x - c &\longrightarrow x = x_1 + c \\ x_2 = y &\longrightarrow y = x_2 \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Seguidamente se introduce una redefinición de las coordenadas elípticas (u, v) de la forma,

$$\begin{aligned} \xi_1 = \pm \sqrt{\frac{u^2 - c^2}{c}}, \quad \xi_2 = \sqrt{\frac{c^2 - v^2}{c}} \\ \sqrt{c} \xi_1 = \sinh \xi, \quad \sqrt{c} \xi_2 = |\sin \eta| \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

de modo que se tiene,

$$u \rightarrow \sqrt{c^2 + \xi_1^2 c} \quad v \rightarrow \pm \sqrt{c^2 - \xi_2^2 c} \quad (\text{A.13})$$

Ahora las coordenadas (x_1, x_2) se escriben,

$$\begin{aligned} x_1 = x - c = \frac{1}{c} uv - c = \pm \sqrt{(\xi_1^2 + c)(c - \xi_2^2)} - c \\ x_2 = y = \frac{1}{c} \xi_1 \sqrt{c} \xi_2 \sqrt{c} = \xi_1 \xi_2 \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Sólo hay que tomar el límite para la coordenada x_1 , donde se tiene,

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow \infty} \sqrt{(\xi_1^2 + c)(c - \xi_2^2)} - c &= \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{(\xi_1^2 + c)(c - \xi_2^2) - c^2}{\sqrt{(\xi_1^2 + c)(c - \xi_2^2)} + c} = \\ &= \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{c(\xi_1^2 - \xi_2^2)}{\sqrt{c^2 + c(\xi_1^2 - \xi_2^2)} + \xi_1^2 \xi_2^2 + c} = \frac{1}{2} (\xi_1^2 - \xi_2^2) \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Coordenadas cartesianas como límite de las coordenadas elípticas.

Existe una alternativa cuando se toma el límite $c \rightarrow \infty$, en la que esta vez no se consideran traslaciones. Considérese la redefinición siguiente para las coordenadas u y v ,

$$u \longrightarrow \sqrt{y^2 + c^2} \quad v \longrightarrow x \quad (\text{A.16})$$

de modo que al sustituir (A.6) en se obtiene,

$$x_1 = \frac{\sqrt{c^2 + y^2}}{c}x, \quad x_2 = \frac{\sqrt{c^2 - x^2}}{c}y \quad (\text{A.17})$$

donde se ha tenido en cuenta que $y = \pm\sqrt{u^2 - c^2}$. Ahora si se toma el límite $c \rightarrow \infty$ se tiene,

$$x_1 = x \quad x_2 = y \quad (\text{A.18})$$

A.3 Sistemas de coordenadas especiales en \mathbb{S}^2 .

Dentro de los sistemas de coordenadas ortogonales en \mathbb{S}^2 a parte de las coordenadas esféricas, hay que destacar las coordenadas esferocónicas, que serán usadas para describir el problema de dos centros Newtonianos sobre la esfera.

Considérense dos puntos fijos sobre la esfera de radio R , situados sin pérdida de generalidad en $F_1 = (R\bar{\sigma}, 0, R\sigma)$ y $F_2 = (-R\bar{\sigma}, 0, R\sigma)$, donde $\sigma = \cos \theta_f$ y $\bar{\sigma} = \sin \theta_f$. Considérense además las distancias geodésicas $R\theta_1$ y $R\theta_2$ dadas por la longitud de arco desde la posición de un punto p hasta los dos centros fijos. Se puede ver representado el problema en la Figura A.5. Los arcos de circunferencia θ_1 y θ_2 , teniendo en cuenta el teorema del coseno en trigonometría esférica, resultan ser,

$$\begin{aligned} \cos \theta_1 &= \cos \theta_f \cos \theta + \sin \theta_f \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta_2 &= \cos \theta_f \cos \theta + \sin \theta_f \sin \theta \cos(\pi - \varphi) \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

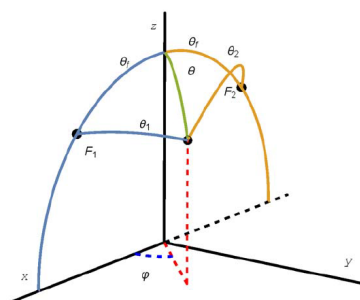


Figura A.5: Esquema sobre la superficie del hemisferio superior de la esfera, para construcción de las coordenadas esferocónicas.

Estrictamente hablando, estas fórmulas son sólo válidas para el caso mostrado en la Figura (A.6), donde $x > 0$ e $y > 0$. Se puede probar que para el resto de los cuadrantes se llega a una situación equivalente. De modo que $\forall(x, y, z) \in \mathbb{S}^2$ se tiene,

$$\begin{aligned}\cos \theta_1 &= \cos \theta_f \cos \theta + \sin \theta_f \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta_2 &= \cos \theta_f \cos \theta - \sin \theta_f \sin \theta \cos \varphi\end{aligned}\tag{A.20}$$

Sumando y restando estas expresiones se tiene,

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{1}{2 \cos \theta_f} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) \\ \cos \varphi &= \frac{1}{2 \sin \theta \sin \theta_f} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)\end{aligned}\tag{A.21}$$

Si ahora se consideran las coordenadas esféricas sobre la esfera de radio R ,

$$\begin{aligned}x &= R \sin \theta \cos \varphi \\ y &= R \sin \theta \sin \varphi \\ z &= R \cos \theta\end{aligned}\tag{A.22}$$

Sustituyendo las expresiones (A.21) en (A.22) y usando las transformaciones de suma a producto, se obtiene,

$$\begin{aligned}x &= \frac{R}{\sin \theta_f} \sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \sin \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \\ y &= \frac{\pm R}{\sin \theta_f \cos \theta_f} \sqrt{\sin^2 \theta_f - \sin^2 \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}} \sqrt{\sin^2 \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} - \sin^2 \theta_f} \\ z &= \frac{R}{\cos \theta_f} \cos \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \cos \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\end{aligned}\tag{A.23}$$

Es posible definir unas variables auxiliares U y V , definidas como el seno de la suma y la diferencia de las distancias a los focos θ_1 y θ_2 ,

$$U = \sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}, \quad V = \sin \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\tag{A.24}$$

donde $-\bar{\sigma} < v < \bar{\sigma}$ y $\bar{\sigma} < u < 1$. Por tanto,

$$\begin{aligned}x &= \frac{R}{\bar{\sigma}} UV \\ y &= \pm \frac{R}{\sigma \bar{\sigma}} \sqrt{\bar{\sigma}^2 - V^2} \sqrt{U^2 - \bar{\sigma}^2} \\ z &= \pm \frac{R}{\sigma} \sqrt{1 - U^2} \sqrt{1 - V^2}\end{aligned}\tag{A.25}$$

A.4 Sistemas de coordenadas especiales en \mathbb{L}^2 .

Dentro de los sistemas de coordenadas ortogonales en \mathbb{L}^2 y concretamente en el hiperboloide de dos hojas \mathbb{H}^2 , a parte de las coordenadas pseudo-esféricas, hay que destacar las coordenadas pseudo-esferocónicas, que serán usadas para describir el problema de dos centros Newtonianos sobre el hiperboloide de dos hojas.

Considérense dos puntos fijos sobre la esfera de radio R , situados sin pérdida de generalidad en la hoja superior (inferior) $F_1 = (R\bar{\sigma}, 0, R\sigma)$ y $F_2 = (-R\bar{\sigma}, 0, R\sigma)$ ($F_1 = (R\bar{\sigma}, 0, -R\sigma)$ y $F_2 = (-R\bar{\sigma}, 0, -R\sigma)$), donde $\sigma = \cosh \theta_f$ y $\bar{\sigma} = \sinh \theta_f$. Considérense además las distancias geodésicas $R\theta_1$ y $R\theta_2$ dadas por la longitud de arco desde la posición de un punto p hasta los dos centros fijos. Los arcos de circunferencia θ_1 y θ_2 , teniendo en cuenta el teorema del coseno en trigonometría esférica, resultan ser tanto para la hoja superior como la inferior,

$$\begin{aligned} \cosh \theta_1 &= \cosh \theta_f \cosh \theta - \sinh \theta_f \sinh \theta \cosh \varphi \\ \cosh \theta_2 &= \cosh \theta_f \cosh \theta + \sinh \theta_f \sinh \theta \cosh \varphi \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

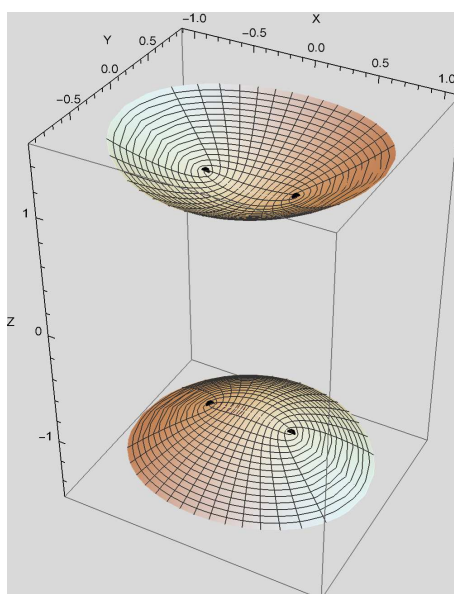


Figura A.6: Isocurvas de las coordenadas esferocónicas sobre las hojas superior e inferior del hiperboloide.

Sumando y restando estas expresiones se tiene,

$$\begin{aligned} \cosh \theta &= \frac{1}{2 \cosh \theta_f} (\cosh \theta_1 + \cosh \theta_2) \\ \cosh \varphi &= \frac{1}{2 \sinh \theta \sinh \theta_f} (\cosh \theta_1 - \cosh \theta_2) \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Si ahora se consideran las coordenadas pseudo-esféricas sobre una de las hojas del hiperboloide \mathbb{H}^2 ,

- Hoja superior \mathbb{H}_+^2 ,

$$\begin{aligned}x &= R \sin \theta \cos \varphi \\y &= R \sin \theta \sin \varphi \\z &= R \cos \theta\end{aligned}\tag{A.28}$$

- Hoja inferior \mathbb{H}_-^2 ,

$$\begin{aligned}x &= -R \sin \theta \cos \varphi \\y &= -R \sin \theta \sin \varphi \\z &= -R \cos \theta\end{aligned}\tag{A.29}$$

Sustituyendo las expresiones (A.27) en (A.28) y (A.29), y usando las transformaciones de suma a producto junto a la definición de las variables U y V para cada hoja del hiperboloide, se obtiene,

- En la hoja superior \mathbb{H}_+^2 , las variables auxiliares U y V vienen dadas de la forma,

$$U = \sinh \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}, \quad V = \sinh \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}; \quad -\bar{\sigma} < V < \bar{\sigma}, \quad \bar{\sigma} < U\tag{A.30}$$

y por tanto las transformaciones de coordenadas pseudo-esferocónicas a cartesianas son,

$$\begin{aligned}X &= \frac{R}{\bar{\sigma}} UV \\Y^2 &= \frac{R^2}{\sigma^2 \bar{\sigma}^2} (U^2 - \bar{\sigma}^2) (\bar{\sigma}^2 - V^2) \\Z &= \frac{R}{\sigma} \sqrt{1 + U^2} \sqrt{1 + V^2}\end{aligned}\tag{A.31}$$

- En la hoja inferior \mathbb{H}_-^2 , las variables auxiliares U y V vienen dadas de la forma,

$$U = \sinh \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}, \quad V = \sinh \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}; \quad -\bar{\sigma} < V < \bar{\sigma}, \quad \bar{\sigma} < U\tag{A.32}$$

y por tanto las transformaciones de coordenadas pseudo-esferocónicas a cartesianas son,

$$\begin{aligned}X &= \frac{R}{\bar{\sigma}} UV \\Y^2 &= \frac{R^2}{\sigma^2 \bar{\sigma}^2} (U^2 - \bar{\sigma}^2) (\bar{\sigma}^2 - V^2) \\Z &= -\frac{R}{\sigma} \sqrt{1 + U^2} \sqrt{1 + V^2}\end{aligned}\tag{A.33}$$

Bibliografía

- [1] A. Albouy. “The underlying geometry of the fixed centers problems”. En: (mar. de 2003). DOI: 10.1142/9789812704283_0002.
- [2] A. Albouy y T. Stuchi. “Generalizing the classical fixed-centres problem in a non-Hamiltonian way”. En: *Journal of Physics A: Mathematical and General* 37 (sep. de 2004), pág. 9109. DOI: 10.1088/0305-4470/37/39/005.
- [3] V. I. Arnol'd. *Mathematical methods of classical mechanics*. Vol. 60. Springer Science & Business Media, 2013.
- [4] A. Ballesteros y O. Ragnisco. “A systematic construction of completely integrable Hamiltonians from coalgebras”. En: *Journal of Physics A: Mathematical and General* 31.16 (1998), págs. 3791-3813. DOI: 10.1088/0305-4470/31/16/009.
- [5] A. Ballesteros y col. “Superintegrability on N-dimensional curved spaces: Central potentials, centrifugal terms and monopoles”. En: *Annals of Physics* 324.6 (2009), págs. 1219-1233. ISSN: 0003-4916. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.aop.2009.03.001>.
- [6] D. Boccaletti y G. Pucacco. “Killing equations in classical mechanics”. En: *Nuovo Cimento della Societa Italiana di Fisica [Sezione] B* 112B (2-3).
- [7] A. Borisov e I. Mamaev. “Generalized Problem of Two and Four Newtonian Centers”. En: *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 92 (mar. de 2005). DOI: 10.1007/s10569-005-1557-y.
- [8] A. Borisov e I. Mamaev. “Relations between integrable systems in plane and curved spaces”. En: *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 99 (dic. de 2007), págs. 253-260. DOI: 10.1007/s10569-007-9098-1.
- [9] A.V. Borisov e I.S. Mamaev. *Poisson structures and Lie algebras in Hamiltonian mechanics, Izhevsk: Izd. Russian. UdsU*, 1999.
- [10] S. M. Carroll. *Spacetime and geometry*. Cambridge University Press, 2019.
- [11] C. A. Coulson y A. Joseph. “A constant of the motion for the two-centre Kepler problem”. En: *International Journal of Quantum Chemistry* 1.4 (1967), págs. 337-347. DOI: <https://doi.org/10.1002/qua.560010405>.
- [12] V.G. Demin. “Orbits in the problem of two fixed centers”. En: *Soviet Astronomy* 4 (1961), pág. 1005.

- [13] L. P. Eisenhart. “Enumeration of Potentials for Which One-Particle Schroedinger Equations Are Separable”. En: *Phys. Rev.* 74 (1 1948), págs. 87-89. DOI: 10.1103/PhysRev.74.87.
- [14] L. Euler. “Probleme. Un corps étant attiré en raison réciproque quarrée des distances vers deux points fixes donnés trouver les cas où la courbe décrite par ce corps sera algébrique”. En: *Mémoires de l’académie des sciences de Berlin* (1760), págs. 228-249.
- [15] N. W. Evans. “Superintegrability in classical mechanics”. En: *Phys. Rev. A* 41 (1990), págs. 5666-5676. DOI: 10.1103/PhysRevA.41.5666.
- [16] L. Infeld y A. Schild. “A Note on the Kepler Problem in a Space of Constant Negative Curvature”. En: *Phys. Rev.* 67 (3-4 1945), págs. 121-122. DOI: 10.1103/PhysRev.67.121.
- [17] C. G. J. Jacobi y A. Clebsch. *CGJ Jacobi’s Gesammelte Werke: Vorlesungen über Dynamik gehalten an der Universität zu Königsberg im Wintersemester 1842-1843 und nach einem von CW Borchardt ausgearbeiteten Hefte. Supplementbd.* Reimer, 1884.
- [18] E. G. Kalnins, W. Miller y G. S. Pogosyan. “Exact and quasiexact solvability of second-order superintegrable quantum systems: I. Euclidean space preliminaries”. En: *Journal of Mathematical Physics* 47.3 (2006), págs. 033502. DOI: 10.1063/1.2174237. eprint: <https://doi.org/10.1063/1.2174237>.
- [19] W. Killing. “Die Mechanik in den Nicht-Euklidischen Raumformen.” En: (1885).
- [20] I.S. Kozlov. “Problem of four fixed centers with applications to celestial mechanics”. En: *Soviet Astronomy* 18 (1974), págs. 112.
- [21] V. V. Kozlov y A. O. Harin. “Kepler’s problem in constant curvature spaces”. En: *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 54.4 (1992), págs. 393-399.
- [22] J.L. Lagrange. “Recherches sur la mouvement d’un corps qui est attiré vers deux centres fixes”. En: *Miscellanea Taurinensia* 14 (1766).
- [23] M. A Gonzalez Leon, J. Mateos Guilarte y M. de la Torre Mayado. “Orbits in the problem of two fixed centers on the sphere”. En: *Regular and Chaotic Dynamics* 22.5 (2017), págs. 520-542.
- [24] M. A. González León, J. Mateos Guilarte y M. de la Torre Mayado. “On the Equivalence Between Type I Liouville Dynamical Systems in the Plane and the Sphere”. En: *Integrability, Supersymmetry and Coherent States*. Springer, 2019, págs. 359-373.
- [25] J. Liouville. “Note sur l’intégration des équations différentielles de la Dynamique, présentée au Bureau des Longitudes le 29 juin 1853.” En: *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (1855), págs. 137-138.
- [26] W. Miller Jr, S. Post y P. Winternitz. “Classical and quantum superintegrability with applications”. En: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 46.42 (2013), págs. 423001.
- [27] M. Nakahara. *Geometry, topology and physics*. CRC press, 2003.

- [28] M.N. Olevskii. “Triorthogonal systems in spaces of constant curvature in which the equation $\Delta_2 u + \lambda u = 0$ allows a complete separation of variables”. En: *Matematicheskii Sbornik* 69.3 (1950), págs. 379-426.
- [29] D. Ó’Mathúna. *Integrable systems in celestial mechanics*. Vol. 51. Springer Science & Business Media, 2008.
- [30] W. Pauli Jr. “Über das modell des wasserstoffmolekülions”. En: *Annalen der Physik* 373.11 (1922), págs. 177-240.
- [31] A. M. Perelomov. *Integrable systems of classical mechanics and Lie algebras*. Birkhäuser, 1990.
- [32] S Post. “Models of second-order superintegrable systems”. Tesis doct. University of Minnesota, 2009.
- [33] M. F. Rañada y M. Santander. “Superintegrable systems on the two-dimensional sphere S^2 and the hyperbolic plane H^2 ”. En: *Journal of Mathematical Physics* 40.10 (1999), págs. 5026-5057. DOI: 10.1063/1.533014. eprint: <https://doi.org/10.1063/1.533014>.
- [34] E. Schrödinger. “A Method of Determining Quantum-Mechanical Eigenvalues and Eigenfunctions”. En: *Proceedings of the Royal Irish Academy. Section A: Mathematical and Physical Sciences* 46 (1940), págs. 9-16. ISSN: 00358975.
- [35] D.D. Sokolev. *Space of Constant curvature. Encyclopedia of Mathematics*. 1977. ISBN: 1402006098.
- [36] A. Sommerfeld. “Atomic structure and spectral lines”. En: (1923).
- [37] F. Tremblay, A. V. Turbiner y P. Winternitz. “An Infinite family of solvable and integrable quantum systems on a plane”. En: *J. Phys. A* 42 (2009), pág. 242001. DOI: 10.1088/1751-8113/42/24/242001. arXiv: 0904.0738 [math-ph].
- [38] T. G. Vozmischeva. *Integrable problems of celestial mechanics in spaces of constant curvature*. Vol. 295. Springer Science & Business Media, 2013.