



**VNiVERSiDAD  
D SALAMANCA**

**Búsqueda del pulso óptimo en  
esquemas de post-compresión mediante  
propagación no lineal hacia atrás**

**Marina Fernández Galán**

*Trabajo de Fin de Máster*

Máster en Física y Tecnología de los Láseres

5 de julio de 2022

Tutores: Enrique Conejero Jarque  
y Julio San Román Álvarez de Lara



D. Enrique Conejero Jarque y D. Julio San Román Álvarez de Lara, profesores del Departamento de Física Aplicada de la Universidad de Salamanca, autorizan la presentación del Trabajo de Fin de Máster titulado “Búsqueda del pulso óptimo en esquemas de post-compresión mediante propagación no lineal hacia atrás” realizado por Dña. Marina Fernández Galán.

En Salamanca, a 5 de julio de 2022.

Fdo. Enrique Conejero Jarque

Fdo. Julio San Román Álvarez de Lara



*“Aprendí que no se puede dar marcha atrás, que la esencia de la vida es ir hacia  
delante. La vida, en realidad, es una calle de sentido único.”*

AGATHA CHRISTIE



# Índice general

<b>1. Introducción y antecedentes</b>	<b>1</b>
<b>2. Modelo teórico</b>	<b>6</b>
2.1. Propagación no lineal de pulsos ultracortos . . . . .	6
2.2. Dispersión y absorción lineal . . . . .	8
2.3. Respuesta no lineal instantánea y retardada . . . . .	9
<b>3. Metodología</b>	<b>13</b>
3.1. Ecuación de propagación no lineal hacia atrás . . . . .	13
3.2. Resolución numérica de la GNLSE . . . . .	14
3.3. Parámetros de una fibra hueca . . . . .	16
<b>4. Resultados y discusión</b>	<b>19</b>
4.1. Propagación hacia atrás de pulsos límite de Fourier . . . . .	19
4.2. Simetrías de la ecuación de propagación . . . . .	23
4.3. Propagación hacia atrás de pulsos con GDD . . . . .	26
4.3.1. Efectos de la GDD y estrechamiento espectral inverso . . . . .	26
4.3.2. Ajuste de la fase inicial y propagación hacia delante . . . . .	29
4.3.3. Estabilidad de la solución frente a pequeñas perturbaciones . . . . .	33
4.3.4. Valor de GDD óptimo y reordenación espectral . . . . .	34
4.4. Propagación hacia atrás de espectros modulados . . . . .	40
4.4.1. Efectos de la GDD final . . . . .	40
4.4.2. Efectos de la dispersión Raman estimulada . . . . .	42
4.4.3. Efectos de la dispersión de orden alto . . . . .	44

<b>5. Conclusiones</b>	<b>47</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>49</b>
<b>Anexos</b>	<b>55</b>
<b>A. Figuras suplementarias</b>	<b>55</b>
<b>B. Métodos numéricos</b>	<b>59</b>
B.1. Algoritmo numérico RK4IP . . . . .	59
B.2. Algoritmo de paso adaptativo LEM . . . . .	61
B.3. Implementación numérica de la integral Raman . . . . .	62
B.4. Cálculo de los coeficientes de dispersión . . . . .	64
B.5. Compresores de prismas y de redes de difracción . . . . .	65
<b>C. Código fuente</b>	<b>67</b>
<b>Lista de abreviaturas</b>	<b>82</b>

# 1. Introducción y antecedentes

Desde la invención del láser en 1960, el ser humano no ha dejado de aprender a controlar y optimizar sus características. En particular, el desarrollo de los láseres pulsados y de las técnicas de generación de pulsos ultracortos ha permitido un enorme progreso de toda la ciencia ultrarrápida. Así, los pulsos láser de femtosegundo en el visible e infrarrojo se han convertido en una herramienta indispensable en diversos ámbitos de la física, la biología, la química o la ingeniería de materiales, ya que permiten explorar las propiedades más fundamentales de la materia en escalas de tiempo extremadamente cortas. En los últimos años, los pulsos ultracortos en el régimen de pocos ciclos ópticos han despertado un gran interés por sus aplicaciones en espectroscopía ultrarrápida resuelta en el tiempo [1], y en la síntesis de pulsos de attosegundo aislados en el ultravioleta extremo mediante generación de armónicos de orden alto para el estudio y control de la dinámica de los electrones en átomos y moléculas [2, 3]. Debido a sus crecientes aplicaciones, resulta necesario desarrollar nuevas técnicas para generar pulsos cada vez más cortos y energéticos con buena calidad.

Estos pulsos tan cortos requieren espectros muy anchos, de una octava o más, denominados supercontinuos. Sin embargo, en los sistemas láser convencionales, el espectro que se puede conseguir está limitado por la anchura de la curva de ganancia del medio activo y por problemas de estrechamiento de ganancia en el proceso de amplificación de pulsos de gran energía. Hasta la fecha, la mayoría de los montajes experimentales que trabajan con pulsos ultracortos intensos se basan en láseres de Ti:zafiro que funcionan en régimen de *mode-locking* con tecnología CPA (*chirped pulse amplification*), y que son capaces de generar pulsos de varios mJ de energía en el infrarrojo cercano con duraciones mínimas de unos 25 fs, aproximadamente. Por tanto, para conseguir pulsos aún más cortos, su espectro se debe ensanchar primero antes de que puedan

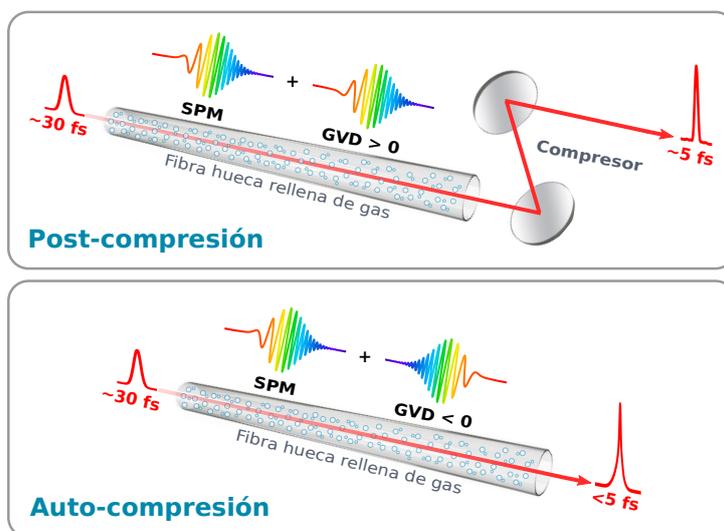
comprimirse a duraciones de pocos ciclos, lo que se conoce como post-compresión [4].

El espectro de un pulso multi-ciclo incidente suficientemente intenso se puede ensanchar de forma coherente por procesos no lineales en la interacción láser-materia cuando se propaga a través de un medio. En 1969, Fisher *et al.* propusieron el esquema que es la base de la mayoría de los sistemas de post-compresión actuales, y que consiste en utilizar la automodulación de fase (*self-phase modulation*, SPM) por efecto Kerr óptico para ensanchar el espectro de un pulso inicial [5]. Desde entonces, se han propuesto numerosas estrategias para aprovechar este fenómeno no lineal, entre las que destaca la propagación no lineal en fibras huecas rellenas de gas, que constituye la técnica más empleada en la actualidad para generar pulsos ultracortos de gran energía en la región del visible y el infrarrojo cercano. Este esquema de post-compresión fue realizado por primera vez en 1996 por Nisoli *et al.* [6] y reemplazó al esquema anterior de post-compresión en fibras ópticas monomodo [7, 8], permitiendo aumentar en más de tres órdenes de magnitud la energía de los pulsos que se podían emplear debido al mayor umbral de daño del núcleo gaseoso. Además, esta técnica destaca por generar haces de gran calidad con un espectro espacialmente homogéneo, y por su extraordinaria flexibilidad, ya que las propiedades de dispersión y de no linealidad de la fibra se pueden controlar muy fácilmente variando el gas de relleno y su presión [9]. Su principal inconveniente es que las fibras huecas presentan pérdidas elevadas debido a que no actúan como guías de ondas al ser menor el índice de refracción del gas que el de cualquier dieléctrico que se use como recubrimiento. Afortunadamente, el proceso de compresión requiere de propagaciones de unos pocos metros, lo que hace que las pérdidas introducidas sean perfectamente asumibles.

Durante la propagación no lineal a través de la fibra hueca, el pulso genera nuevas componentes espectrales por SPM, pero el proceso introduce un *chirp* positivo, generando las frecuencias bajas en la parte delantera del pulso y las frecuencias altas en la cola trasera. Si además la propagación tiene lugar en una región donde la dispersión de la velocidad de grupo (GVD) de la fibra es positiva, ambos efectos colaboran para generar un pulso muy estirado temporalmente a la salida de la fibra, con un *chirp* positivo que debe ser compensado para obtener un pulso ultracorto. Así, los principales esquemas de post-compresión en fibra hueca constan de dos etapas bien diferenciadas [10]:

una primera de ensanchamiento espectral, seguida de una segunda de compensación de la fase en un compresor formado por elementos dispersivos como prismas, redes de difracción, espejos multicapa, o instrumentos más complejos como moduladores de fase de cristal líquido o dispositivos acusto-ópticos.

Aunque el diseño de este tipo de experimentos de post-compresión está muy optimizado, la duración final de los pulsos está limitada por la dificultad para obtener compresores eficaces en una región espectral muy ancha y por la dispersión de orden alto residual que queda sin compensar. Para conseguir pulsos aún más cortos y señales con duraciones por debajo del ciclo óptico, resulta necesario buscar otras estrategias y la auto-compresión solitónica en fibras huecas ofrece una solución prometedora [11]. En este caso, el pulso se propaga en una región de dispersión anómala, donde la GVD de la fibra es negativa, y se comprime por sí solo debido a la interacción entre la SPM y la GVD que introducen un *chirp* de signo contrario que se va compensando de forma dinámica, sin necesidad de un compresor posterior [12].



**Figura 1.1:** Esquemas de post-compresión basados en fibra hueca.

Tanto en el caso más habitual de post-compresión en fibra hueca como en el caso de auto-compresión, la propagación depende de una compleja interacción entre los procesos lineales y no lineales, lo que hace que muchas veces sea complicado predecir cómo se deben modificar los parámetros de la fibra o del pulso inicial para optimizar el proceso. En los últimos años se han estudiado numerosas estrategias para mejorar algunas características de los pulsos de salida, como su energía o duración, la eficiencia del

proceso, la emisión de pulsos secundarios, etc. Entre ellas cabe mencionar el empleo de gradientes de presión crecientes en esquemas de post-compresión para aumentar la energía limitando el impacto de efectos no lineales adversos [13], o de gradientes decrecientes en esquemas de auto-compresión para reducir la duración y mejorar el perfil temporal de los pulsos finales [14]; el desarrollo de las fibras huecas flexibles estiradas de gran longitud y diámetro para aumentar la energía de los pulsos y mejorar el ensanchamiento espectral y la transmisión del sistema [15]; el uso de gases con alto potencial de ionización y de pulsos con polarización circular para trabajar con intensidades elevadas reduciendo el impacto de la ionización y la autofocalización, y mejorar la transmisión y la estabilidad del espectro generado [16]; la pre-compensación de la fase espectral modificando el pulso inicial con un dispositivo acusto-óptico o similar para minimizar la dispersión de orden alto remanente del proceso de propagación no lineal [17]; o el empleo de gases moleculares para ensanchar el espectro de pulsos largos con baja potencia pico aprovechando la respuesta no lineal retardada de las moléculas [18, 19]. Combinando varias de estas estrategias en un mismo experimento, se han conseguido generar pulsos de unos pocos ciclos ópticos en el visible y el infrarrojo cercano con potencias pico en el rango de los teravatios [20, 21].

Por último, con el reciente desarrollo de las técnicas de aprendizaje automático o *machine learning*, se están empezando a utilizar redes neuronales para diseñar y optimizar experimentos de propagación no lineal en tiempo real [22, 23] y para predecir la forma del pulso inicial que optimiza el proceso [24]. No obstante, aunque estos algoritmos pueden ser extremadamente rápidos una vez entrenados, inicialmente necesitan una gran cantidad de datos que a menudo hay que generar resolviendo numéricamente la ecuación de propagación con los métodos tradicionales. Por ello, y dado el creciente interés por la optimización del proceso de generación de pulsos ultracortos en fibras huecas, en este trabajo proponemos la construcción de un modelo numérico de propagación no lineal para explorar la posibilidad de utilizarlo en sentido inverso [25], de forma que, conociendo el pulso final deseado, se obtenga una pista de las características del pulso con el que se debería comenzar la propagación.

El principal objetivo es, por tanto, desarrollar un código que nos permita resolver numéricamente la ecuación de propagación no lineal utilizando algoritmos rápidos y

eficientes, y que incluya todos los efectos lineales y no lineales relevantes en la propagación de pulsos ultracortos a través de una fibra hueca, en particular, las pérdidas por confinamiento, la dispersión completa del gas en la fibra, la automodulación de fase, el *self-steepening* y la dispersión Raman estimulada. Este código deberá funcionar tanto en propagación normal hacia delante como en modo de propagación hacia atrás. A través de diversas simulaciones, estudiaremos la propagación inversa de pulsos finales óptimos (pulsos límite Fourier, pulsos con fase cuadrática pura, etc.) para encontrar en cada caso el pulso inicial a partir del cual se podrían generar. Por último, una vez conocido el pulso óptimo de partida, intentaremos reconstruirlo de forma realista ajustando su fase espectral de forma similar a cómo se haría en un experimento de pre-compensación de la fase, y estudiaremos cómo de sensible es la solución deseada a las pequeñas perturbaciones de la condición inicial.

El trabajo está estructurado de la siguiente manera: en el Capítulo 2 se presentan las ecuaciones y los conceptos previos necesarios para entender la propagación de pulsos ultracortos en medios no lineales y dispersivos. En el Capítulo 3 se describe el modelo numérico que hemos implementado para simular la propagación no lineal en una fibra hueca, resolviendo la ecuación de propagación tanto hacia delante como en sentido inverso. En el Capítulo 4 se presentan y se discuten los resultados obtenidos y, por último, en el Capítulo 5 se resumen las conclusiones principales de nuestro estudio. Al final del trabajo se han incluido una serie de anexos con figuras suplementarias (Anexo A), descripciones detalladas de los métodos numéricos (Anexo B), una copia del código fuente realizado en Matlab (Anexo C) y una lista de las abreviaturas usadas en el texto ([Lista de abreviaturas](#)).

## 2. Modelo teórico

### 2.1. Propagación no lineal de pulsos ultracortos

Cuando un pulso láser intenso se propaga a través de una fibra hueca rellena de gas, su perfil espacio-temporal y su espectro se modifican debido a efectos lineales y no lineales en la interacción láser-materia. Para estudiar estos procesos de forma teórica, consideramos un pulso de luz que se propaga a lo largo de la fibra en la dirección del eje  $z$ , asumiendo que el campo eléctrico está linealmente polarizado en la dirección del eje  $x$  y que mantiene esta polarización durante su propagación. Suponemos también que el espectro del pulso está centrado en la frecuencia  $\omega_0$  y escribimos el campo eléctrico como el producto de una onda plana monocromática de frecuencia  $\omega_0$  y una envolvente compleja, que asumimos que podemos factorizar en términos de una distribución espacial  $F(x, y, z)$  y una envolvente temporal  $A(z, t)$  [26]:

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \left[ F(x, y, z)A(z, t)e^{i(\beta_0 z - \omega_0 t)} + \text{c.c.} \right] \mathbf{u}_x \quad \text{con} \quad \beta_0 \equiv \frac{n_0(\omega_0)\omega_0}{c} \quad (2.1)$$

siendo  $n_0(\omega)$  el índice de refracción lineal del medio,  $c$  la velocidad de la luz en el vacío, y donde la notación c.c. indica que sumamos el complejo conjugado para obtener un campo real. Llevando este campo a la ecuación de ondas que se obtiene de las ecuaciones de Maxwell y tras hacer una serie de aproximaciones y desarrollos para la polarización inducida en el medio, se puede obtener la ecuación que describe la propagación no lineal de un pulso ultracorto. Dicha ecuación se conoce como ecuación de Schrödinger no lineal generalizada (GNLSE) debido a que en su versión más simplificada es formalmente idéntica a la ecuación de Schrödinger con un término no lineal en el potencial. Asumiendo que la estructura espacial del haz láser no cambia durante la

propagación y que la envolvente temporal del pulso varía poco al propagarse desde  $z$  hasta  $z + dz$  en comparación con una longitud de onda [27], la GNLSE unidimensional para la envolvente  $A(z, t)$  en el dominio temporal se puede escribir como [26]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\alpha}{2}A + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{i^{n-1}}{n!} \beta^{(n)} \frac{\partial^n A}{\partial T^n} &= i\gamma \left(1 + \frac{i}{\omega_0} \frac{\partial}{\partial T}\right) \left(A(z, T) \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau) |A(z, T - \tau)|^2 d\tau\right) = \\ &= i\gamma \left(1 + \frac{i}{\omega_0} \frac{\partial}{\partial T}\right) \left((1 - f_R)A|A|^2 + f_RA(z, T) \int_{-\infty}^T h_R(T - t') |A(z, t')|^2 dt'\right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Para llegar a la última expresión hemos hecho el cambio de variable  $t' = T - \tau$ , lo que facilitará la posterior implementación numérica de la integral, y hemos sustituido la función de respuesta no lineal  $R(t) = (1 - f_R)\delta(t) + f_R\Theta(t)h_R(t)$ , siendo  $\Theta(t)$  la función escalón unitario de Heaviside,  $h_R(t)$  la función de respuesta Raman de las moléculas del medio y  $f_R$  una constante característica del medio que toma el valor 0 en gases atómicos y un valor entre 0 y 1 en gases moleculares. En la ecuación (2.2)  $z$  representa la posición a lo largo de la fibra,  $T$  es el tiempo medido en un sistema de referencia que viaja con el pulso a la velocidad de grupo  $v_g = 1/\beta^{(1)}$ ,  $\alpha$  es la constante de atenuación de la fibra,  $\beta^{(n)} = (d^n \beta / d\omega^n)_{\omega_0}$  son los coeficientes de dispersión asociados con un desarrollo en serie de Taylor de la constante de propagación  $\beta(\omega) = n_0(\omega)\omega/c$  en torno a la frecuencia central del pulso  $\omega_0$ , y  $\gamma = n_2\omega_0/(cA_{\text{eff}})$  es el parámetro no lineal, siendo  $n_2$  el índice de refracción no lineal del gas y  $A_{\text{eff}}$  el área transversal efectiva del haz definida según [26]:

$$A_{\text{eff}} = \frac{\left(\int \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x, y)|^2 dx dy\right)^2}{\int \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x, y)|^4 dx dy} = \frac{2\pi \left(\int_0^{\infty} |F(r)|^2 r dr\right)^2}{\int_0^{\infty} |F(r)|^4 r dr} \quad (2.3)$$

siendo  $F(x, y)$  la distribución espacial inicial del campo eléctrico y donde la última expresión es válida cuando esta presenta simetría cilíndrica y depende únicamente de la coordenada radial  $r$ , como será nuestro caso. Esta área representa la sección transversal efectiva del haz que juega un papel relevante en los efectos no lineales. La definición anterior del parámetro no lineal  $\gamma$  implica que la ecuación de propagación está normalizada de forma que  $|A(z, T)|^2$  tiene unidades de potencia.

La ecuación (2.2) es válida para describir la propagación de pulsos ultracortos en el

régimen de pocos ciclos ópticos siempre que se incluya el operador  $\hat{T} = (1 + (i/\omega_0)\partial/\partial T)$  y se retengan suficientes términos de dispersión en el desarrollo en serie de la constante de propagación [28]. Además, en su versión unidimensional, la GNLSE es suficientemente precisa para describir la dinámica de propagación en un régimen de intensidad moderada, donde la ionización y los efectos espaciales son despreciables, y se puede resolver utilizando algoritmos de integración muy rápidos.

El primer miembro de la ecuación (2.2) engloba todos los procesos lineales que afectan a la propagación de la envolvente, incluyendo los efectos de las pérdidas a través de  $\alpha$  y de la dispersión a través de los coeficientes  $\beta^{(n)}$ . En el lado derecho, la función de respuesta no lineal  $R(t)$  incluye tanto una componente retardada como una instantánea en relación  $f_R$  al efecto Kerr óptico [29]. La parte instantánea  $\sim \delta(t)$  describe la respuesta de los electrones ligados, que tiene lugar en escalas del orden de unos pocos femtosegundos o menos, y es responsable de la automodulación de fase (*self-phase modulation*, SPM). La parte retardada  $\sim h_R(t)$  tiene en cuenta la respuesta más lenta de las moléculas del medio y describe la dispersión Raman estimulada (*stimulated Raman scattering*, SRS). El operador  $\hat{T}$  es responsable del fenómeno de *self-steepening*.

## 2.2. Dispersión y absorción lineal

Como primer efecto lineal, las pérdidas por confinamiento de la luz en una fibra hueca pueden ser muy importantes, disminuyendo de forma exponencial la intensidad del pulso según se propaga por su interior:  $I(z) = I(z=0)\exp(-\alpha z)$ . Además, un medio dispersivo se caracteriza por presentar un índice de refracción lineal  $n_0$  que depende de la frecuencia. Dado que un pulso de luz se puede entender como una superposición de ondas monocromáticas de diferentes frecuencias, la dispersión hace que cada componente espectral del pulso se propague por el medio a una velocidad diferente. Como consecuencia, el pulso se estira temporalmente aumentando su duración y, en general, su forma también se modifica. Este fenómeno se conoce como dispersión de la velocidad de grupo (GVD) y aparece en la ecuación (2.2) a través del coeficiente  $\beta^{(2)}$  en el primer término del sumatorio [26]. Cuando  $\beta^{(2)} > 0$  se dice que el medio presenta dispersión normal y las frecuencias bajas viajan más rápido que las frecuencias altas y

se colocan en la parte delantera del pulso. Se dice entonces que el pulso presenta un *chirp* positivo, ya que la frecuencia instantánea aumenta a lo largo del mismo. Lo contrario ocurre cuando la dispersión es anómala ( $\beta^{(2)} < 0$ ), en cuyo caso el pulso adquiere un *chirp* negativo. En una fibra hueca, el límite entre ambas regiones de dispersión se puede variar modificando por ejemplo su radio y/o la presión del gas que la rellena.

En general, la GVD es el término dominante en la expansión de Taylor de  $\beta(\omega)$ , excepto en la proximidades de la dispersión cero donde  $\beta^{(2)} = 0$  y para pulsos muy cortos con una gran anchura espectral. En esos casos, los términos de dispersión de orden superior también pueden jugar un papel muy relevante en la propagación. De especial importancia es el segundo término en el sumatorio  $\beta^{(3)}$ , responsable de la dispersión de tercer orden (TOD). Su principal efecto es introducir una asimetría en la forma temporal del pulso y puede llevar a la aparición de estructuras secundarias como post-pulsos o pre-pulsos [26].

### 2.3. Respuesta no lineal instantánea y retardada

Cuando un haz láser suficientemente intenso se propaga a través de un medio, puede inducir una distorsión importante en el potencial atómico que sienten las cargas ligadas, afectando a las propiedades macroscópicas del material. En particular, el índice de refracción puede depender de la propia intensidad de la luz,  $n = n_0 + n_2 I$ , lo que se conoce como efecto Kerr óptico [4, 27]. Se trata de un efecto no lineal de tercer orden, que puede aparecer en cualquier medio independientemente de su simetría, y auto-inducido, por el cual la propia luz modifica la respuesta óptica del medio por el que se propaga y a la vez experimenta las consecuencias [27]. Como en un láser pulsado la intensidad es una función del tiempo, el efecto Kerr modifica la fase del pulso en una cantidad que depende de su propio perfil temporal:

$$\phi = \frac{n(t)\omega_0}{c}z - \omega_0 t = \frac{n_0\omega_0}{c}z - \omega_0 t + \frac{\omega_0}{c}n_2 z I(t) \quad (2.4)$$

Esta modulación temporal de la fase, conocida como automodulación de fase, es la responsable de que aparezcan nuevas frecuencias en el espectro del pulso y es el me-

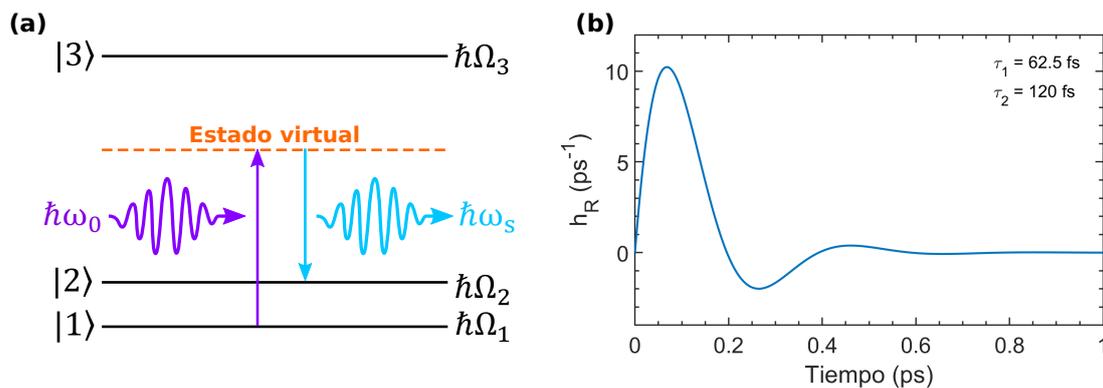
canismo no lineal principal para ensanchar el espectro durante la propagación de un pulso intenso a través de una fibra hueca. El fenómeno de *self-steepening*, que se puede considerar como una corrección de orden alto al efecto Kerr, aparece debido a la dependencia de la velocidad de grupo con la propia intensidad de la luz, lo que hace que el pico del pulso se propague a una velocidad menor que las alas. Esto produce un aumento de pendiente en la cola trasera del perfil temporal del pulso, lo que a su vez se traduce en un ensanchamiento espectral asimétrico hacia las frecuencias altas [4, 26, 30]. Los efectos no lineales instantáneos, como la SPM o el *self-steepening*, son elásticos en el sentido de que no conllevan ninguna transferencia de energía entre el campo electromagnético y el medio dieléctrico [26].

Por otro lado, en medios moleculares, el SRS puede dar lugar a una respuesta no lineal retardada cuando la duración de los pulsos es comparable con el periodo de rotación o vibración de las moléculas. La interacción del láser con una molécula del medio se puede describir cuánticamente utilizando un modelo sencillo de un sistema de tres niveles, compuesto por un estado despoblado de alta energía y dos estados rotacionales de menor energía. En esta descripción, se asume que la molécula tiene dos autoestados rotacionales, el estado fundamental  $|1\rangle$  de energía  $\hbar\Omega_1$  y un estado excitado  $|2\rangle$  de energía  $\hbar\Omega_2$ . Muy por encima se encuentra un estado electrónico  $|3\rangle$  de energía  $\hbar\Omega_3 \gg \hbar\Omega_2 - \hbar\Omega_1$ . Esta molécula interactúa con el campo eléctrico del láser a la frecuencia  $\omega_0$ , que verifica  $\Omega_{31}, \Omega_{32} \gg \omega_0 \gg \Omega_{21}$  ( $\Omega_{nm} \equiv \Omega_n - \Omega_m$ ), de manera que el nivel  $|3\rangle$  no se puede poblar por absorción de fotones. Además, debido a la paridad de los estados moleculares, la transición  $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$  está prohibida por las reglas de selección dipolar, por lo que el estado  $|2\rangle$  solo se puede poblar a través de un estado virtual [29]. Siguiendo este camino, un fotón del campo incidente de energía  $\hbar\omega_0$  se convierte en un fotón de menor energía  $\hbar\omega_s$  y una excitación rotacional que deja a la molécula en el estado excitado [26], tal y como se ve en el esquema de la Fig. 2.1(a).

Como resultado de este análisis, se puede obtener la función de respuesta Raman del medio, que en una aproximación sencilla tiene forma de un oscilador armónico amortiguado con dos tiempos característicos [29, 30]:

$$h_R(t) = \frac{\tau_1^2 + \tau_2^2}{\tau_1 \tau_2^2} \exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{t}{\tau_1}\right) \quad (2.5)$$

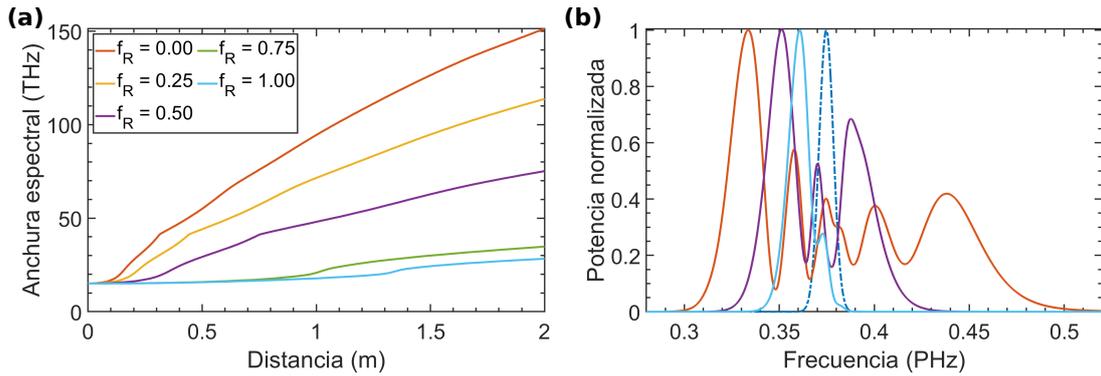
donde  $\tau_1 = 1/\Omega_{21}$  es el inverso de la frecuencia de la transición entre los estados rotacionales,  $\tau_2$  es el tiempo de amortiguamiento de las oscilaciones y la función está normalizada de forma que  $\int_0^\infty h_R(t) dt = 1$ . En la Fig. 2.1(b) podemos ver la forma de la función de respuesta Raman de la molécula de nitrógeno  $N_2$  con los tiempos característicos usados en [31].



**Figura 2.1:** (a) Esquema de niveles de energía y transiciones en una molécula para entender el SRS. (b) Función de respuesta Raman de la molécula de  $N_2$ .

Para pulsos cuya duración es menor que los dos tiempos característicos de la función de respuesta Raman, el SRS es poco relevante en la propagación debido a que apenas hay solapamiento entre el propio pulso y la respuesta retardada del medio [19]. En este régimen, conocido como régimen impulsivo, el SRS induce un pequeño ensanchamiento espectral continuo del pulso acompañado de un corrimiento al rojo de la frecuencia central [32]. Esto puede entenderse porque, en pulsos cortos con un espectro ancho, el SRS puede amplificar las componentes de baja frecuencia transfiriendo energía desde las componentes de alta frecuencia del mismo pulso. Este fenómeno se conoce como dispersión Raman intra-pulso y, como consecuencia, todo el espectro se desplaza hacia frecuencias bajas según el pulso se propaga por el medio molecular. Por consiguiente, en presencia de SRS, la energía del pulso no se conserva porque una parte se transfiere a las moléculas del medio dejándolas en un estado rotacional excitado. Esta fuente de pérdidas no lineales está incluida en la GNLSE [26].

En la Fig. 2.2 podemos ver el efecto de los términos no lineales tanto retardados como instantáneos en el ensanchamiento espectral de un pulso corto cuando se propaga por una fibra hueca rellena de  $N_2$  en función del cociente  $f_R$  entre el SRS y la SPM. Como vemos, para valores de  $f_R$  bajos, la no linealidad instantánea es muy eficiente y



**Figura 2.2:** (a) Evolución de la anchura espectral a  $1/e^2$  de la intensidad de un pulso de 50 fs y  $70 \mu\text{J}$  centrado en 800 nm cuando se propaga a través de una fibra hueca de  $125 \mu\text{m}$  de radio y 2 m de longitud rellena de 1 bar de  $\text{N}_2$  para diferentes valores del cociente  $f_R$  entre el SRS y la SPM. (b) Espectros finales en los casos  $f_R = 0.0$  (SPM pura), 0.5 y 1.0 (SRS puro). La línea discontinua representa el espectro inicial.

la SPM genera un espectro muy ancho con modulaciones de amplitud características que son el resultado de la interferencia entre las componentes espectrales de la misma frecuencia que se generan en distintos instantes del pulso [4, 26]. En el caso  $f_R = 0$ , la mayor extensión del espectro hacia las frecuencias altas es debida al *self-steepening*. Por el contrario, para valores de  $f_R$  altos, el efecto Kerr retardado apenas produce un pequeño ensanchamiento espectral en un pulso inicial de 50 fs, y el SRS desplaza todo el espectro hacia frecuencias menores que la frecuencia central inicial.

## 3. Metodología

### 3.1. Ecuación de propagación no lineal hacia atrás

Para estudiar la propagación no lineal de pulsos ultracortos a través de una fibra hueca debemos resolver la GNLSE presentada en el capítulo anterior. Se trata de una ecuación diferencial no lineal en derivadas parciales que, en general, no tiene solución analítica, por lo que resulta necesario recurrir a soluciones numéricas. Además, como nuestro objetivo es construir un modelo de propagación inversa, debemos primero entender cómo se obtiene la ecuación de propagación no lineal hacia atrás. Para ello, comenzamos escribiendo la GNLSE de forma compacta como:

$$\frac{\partial}{\partial z}A(z, T) = \left( \hat{D} + \hat{N}[A(z, T)] \right) A(z, T) \quad (3.1)$$

donde  $\hat{D}$  es un operador que incluye los efectos lineales (pérdidas y dispersión) y  $\hat{N}$  es un operador que depende de la propia envolvente del pulso  $A(z, T)$  y que engloba los efectos no lineales (efecto Kerr instantáneo y retardado, y *self-steepening*). Comparando con la ecuación (2.2), estos operadores vienen dados por:

$$\hat{D} = -\frac{\alpha}{2} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{i^{n-1}}{n!} \beta^{(n)} \frac{\partial^n}{\partial T^n} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \hat{N}[A(z, T)] = & i\gamma \frac{1}{A(z, T)} \left( 1 + \frac{i}{\omega_0} \frac{\partial}{\partial T} \right) \left( (1 - f_R)A(z, T)|A(z, T)|^2 + \right. \\ & \left. + f_RA(z, T) \int_{-\infty}^T h_R(T - t')|A(z, t')|^2 dt' \right) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Matemáticamente, podemos integrar la ecuación (3.1) y obtener la envolvente del

pulso final aplicando el operador de propagación al pulso de entrada:

$$A(L, T) = \exp \left\{ L\hat{D} + \int_0^L \hat{N}[A(z, T)] dz \right\} A(0, T) \quad (3.4)$$

siendo  $L$  la distancia de propagación, en nuestro caso, la longitud de la fibra hueca. De igual forma, también podemos invertir la relación anterior y expresar el pulso de entrada en función del de salida utilizando el operador de propagación inverso [25]:

$$A(0, T) = \exp \left\{ -L\hat{D} - \int_0^L \hat{N}[A(z, T)] dz \right\} A(L, T) \quad (3.5)$$

Como vemos, la expresión (3.5) es formalmente idéntica a la ecuación (3.4) sin más que invertir el signo de los operadores  $\hat{D}$  y  $\hat{N}$ . Por tanto, la ecuación de propagación no lineal hacia atrás, que nos permitirá conocer las características del pulso de entrada a partir de un pulso de salida deseado, viene dada por:

$$\frac{\partial}{\partial z} A(-z, T) = -(\hat{D} + \hat{N}[A(-z, T)]) A(-z, T) \quad (3.6)$$

Como es lógico, esta ecuación también se obtiene directamente de hacer la transformación  $z \rightarrow -z$ , ya que  $z$  es la variable de evolución de la GNLSE [33].

## 3.2. Resolución numérica de la GNLSE

Para resolver numéricamente la ecuación de propagación no lineal hacia delante (3.1) y su inversa (3.6), hemos implementado en Matlab el algoritmo de Runge-Kutta de cuarto orden en la representación de interacción (RK4IP) [34] en combinación con el método del error local (LEM) para adaptar continuamente el tamaño del paso [35]. En el RK4IP original con paso constante, la fibra se divide en segmentos de igual longitud  $h$  y la propagación de la envolvente en cada uno de ellos se lleva a cabo asumiendo que los efectos de la dispersión y la no linealidad actúan de forma independiente si  $h$  es lo suficientemente pequeño. Esto permite utilizar diferentes técnicas de integración para cada uno de los términos. En nuestro caso, hemos resuelto los efectos lineales y la derivada temporal responsable del *self-steepening* en el dominio de frecuencia ha-

ciendo uso del algoritmo de la transformada rápida de Fourier (FFT) [36], ya que una discretización de las derivadas temporales en  $\hat{D}$  y  $\hat{N}$  requeriría de una resolución muy grande [37]. Por otro lado, hemos tratado el resto de términos no lineales responsables de la SPM y del SRS directamente en el dominio temporal. Para resolver la integral de convolución que aparece en el término de SRS hemos desarrollado específicamente para este trabajo un método recursivo que permite realizar las simulaciones muy rápidamente, ya que una implementación directa utilizando un doble bucle resultó ser extremadamente lenta, especialmente en Matlab. La deducción completa y la implementación numérica de nuestro algoritmo, con el que conseguimos reducir en más de doscientas veces los tiempos de cálculo, se pueden consultar en el Anexo B.3.

En el método RK4IP, los términos lineales contenidos en  $\hat{D}$  se separan de los efectos no lineales contenidos en  $\hat{N}[A(z, T)]$  transformando la GNLSE a una imagen de interacción [34]. Esto permite factorizar la actuación de los operadores  $\hat{D}$  y  $\hat{N}$  sobre la envolvente del pulso, y la ecuación transformada que se obtiene se resuelve entonces utilizando el Runge-Kutta de cuarto orden [36]. En el Anexo B.1 se puede consultar una descripción detallada de la derivación e implementación del algoritmo numérico.

Para reducir el tiempo de cálculo de las simulaciones y obtener una estimación del error cometido, hemos combinado el RK4IP con el método LEM, que constituye uno de los algoritmos de paso adaptativo más empleados. El LEM se basa en una estimación del error local aplicando las técnicas de duplicación de cada paso y extrapolación local [35], y permite ir seleccionando de forma eficiente el tamaño del paso  $h$  según se calcula la solución. Para ello, cada paso se lleva a cabo de dos formas independientes, primero como un solo paso completo de tamaño  $h$  para calcular una solución gruesa y después como dos medios pasos de tamaño  $h/2$  para obtener una solución más precisa. La diferencia entre ambos resultados proporciona una estimación del error local y el tamaño del paso se adapta entonces para la siguiente iteración con el objetivo de que este permanezca en un intervalo  $(\delta_G, 2\delta_G)$ , siendo  $\delta_G$  una tolerancia definida al comienzo del programa. En el Anexo B.2 se ha incluido una descripción completa del cálculo del error local y de los criterios para adaptar continuamente el tamaño del paso.

Para implementar estos algoritmos de forma numérica, comenzamos definiendo la ventana temporal  $-T_{\max} \leq T \leq T_{\max}$  donde vamos a calcular la solución. El valor

de  $T_{\max}$  debe ser suficientemente grande comparado con la duración inicial del pulso para evitar que este se salga por los bordes de la ventana temporal durante la propagación. A continuación, discretizamos la envolvente  $A(z, T)$  utilizando una serie de  $N$  puntos, con lo que la resolución temporal viene dada por  $\Delta T = 2T_{\max}/N$  y el intervalo temporal correspondiente es  $[-N\Delta T/2, (N/2 - 1)\Delta T]$ . Fijados  $N$  y  $T_{\max}$ , el empleo de la FFT para trabajar con los términos que se resuelven en el espacio de frecuencias determina automáticamente el intervalo espectral como  $[-N\Delta\omega/2, (N/2 - 1)\Delta\omega]$  con  $\Delta\omega = \pi/T_{\max}$ . En nuestras simulaciones escogemos  $T_{\max}$  para que sea 10 veces la anchura inicial del pulso, discretizamos la ventana temporal utilizando  $N = 2^{12}$  puntos y fijamos una tolerancia  $\delta_G = 10^{-8}$  para el algoritmo de paso adaptativo. En el Anexo C se adjunta una copia del *script* realizado en Matlab de forma original para este trabajo. Se incluye solo el programa que resuelve la GNLSE en sentido inverso, pero la versión de propagación hacia delante es análoga sin más que invertir el sentido de avance del vector de distancias  $z$  y los signos de los operadores  $\hat{D}$  y  $\hat{N}$ .

### 3.3. Parámetros de una fibra hueca

En cuanto a los parámetros que aparecen en la GNLSE, utilizamos los correspondientes a una fibra hueca de sílice fundida rellena de argón (Ar) o de nitrógeno ( $N_2$ ). El primero es un gas atómico, por lo que solo presenta respuesta no lineal instantánea asociada a los electrones ligados. El segundo está formado por moléculas diatómicas homonucleares, y nos permite analizar el efecto del SRS que surge de la interacción del láser con los modos rotacionales de las mismas [19].

Debido al confinamiento de la luz en su interior, las fibras huecas dieléctricas soportan una serie de distribuciones espaciales del campo eléctrico, conocidas como modos transversales, que son solución de la ecuación de ondas con las condiciones de contorno apropiadas en la frontera de separación entre el núcleo y el recubrimiento. En particular, nosotros consideramos solo los denominados modos híbridos  $EH_{mn}$  con  $m = 1$  que están linealmente polarizados [38]. Estos modos presentan una distribución radial de intensidad de la forma  $|F_{mn}(r)|^2 = J_{m-1}^2(u_{mn}r/a)$ , siendo  $u_{mn}$  el  $n$ -ésimo cero de la función de Bessel de primera especie  $J_{m-1}(x)$  y  $m$  y  $n$  dos números enteros que

identifican el modo. En nuestro código, integramos la respuesta lineal completa en el dominio de frecuencias utilizando las expresiones analíticas para la constante de propagación y el coeficiente de atenuación del modo híbrido  $\text{EH}_{mn}$  de una fibra hueca con recubrimiento dieléctrico, que vienen dadas por [11, 38]:

$$\beta_{mn}(\omega) = \frac{\omega}{c} n_{mn}(\omega) = \frac{\omega}{c} \sqrt{n_{\text{gas}}^2(\omega) - \frac{u_{mn}^2 c^2}{\omega^2 a^2}} \quad (3.7)$$

$$\alpha_{mn}(\omega) = \left( \frac{u_{mn}}{n_{\text{gas}}(\omega)} \right)^2 \frac{c^2}{\omega^2 a^3} \frac{v^2(\omega) + 1}{\sqrt{v^2(\omega) - 1}} \quad ; \quad v(\omega) = \frac{n_{\text{clad}}(\omega)}{n_{\text{gas}}(\omega)} \quad (3.8)$$

donde  $a$  representa el radio del núcleo y  $n_{\text{clad}}$  y  $n_{\text{gas}}$  son los índices de refracción del recubrimiento dieléctrico de la fibra y del gas en su interior, respectivamente. Consideramos siempre el modo fundamental  $\text{EH}_{11}$  por ser el más común en los experimentos y para el cual  $u_{11} = 2.4048$ . Para  $n_{\text{clad}}$  utilizamos la relación de dispersión de la sílice fundida dada por ejemplo en [26]:

$$n_{\text{clad}}^2(\lambda) = 1 + \frac{0.6961663\lambda^2}{\lambda^2 - 0.0684043^2} + \frac{0.4079426\lambda^2}{\lambda^2 - 0.1162414^2} + \frac{0.8974794\lambda^2}{\lambda^2 - 9.896161^2} \quad (3.9)$$

siendo  $\lambda$  la longitud de onda en micras. Para  $n_{\text{gas}}$  sustituimos la fórmula de Sellmeier con dos términos y cuatro parámetros dependiente de la presión obtenida por A. Börzsönyi *et al.* [39]:

$$n_{\text{gas}}^2(\lambda, p, T) = 1 + \frac{p}{p_0} \frac{T_0}{T} \left( \frac{B_1 \lambda^2}{\lambda^2 - C_1} + \frac{B_2 \lambda^2}{\lambda^2 - C_2} \right) \quad (3.10)$$

siendo  $p$  la presión del gas,  $T$  su temperatura que consideramos igual a la temperatura ambiente  $T = 293$  K,  $p_0 = 1$  bar y  $T_0 = 273$  K. Los valores de los coeficientes  $B_i$  y  $C_i$  del Ar y el  $\text{N}_2$  se encuentran recogidos en la Tabla 3.1, junto con el índice de refracción no lineal  $n_2$ , el cociente  $f_R$  entre la contribución retardada e instantánea al efecto Kerr y los tiempos característicos  $\tau_1$  y  $\tau_2$  de la función de respuesta Raman de ambos gases.

El coeficiente de atenuación en (3.8) representa las pérdidas asociadas al mal confinamiento de la luz en la fibra hueca, despreciando la absorción en el gas en nuestro rango de longitudes de onda por estar alejado de sus frecuencias de resonancia. Como vemos, el valor de  $\alpha_{mn}$  diverge para frecuencias bajas. Esto no supone ningún proble-

	Ar	N <sub>2</sub>
$B_1$	$20332.29 \times 10^{-8}$	$39209.95 \times 10^{-8}$
$B_2$	$34458.31 \times 10^{-8}$	$18806.48 \times 10^{-8}$
$C_1$ ( $\mu\text{m}^2$ )	$206.12 \times 10^{-6}$	$1146.24 \times 10^{-6}$
$C_2$ ( $\mu\text{m}^2$ )	$8.066 \times 10^{-3}$	$13.476 \times 10^{-3}$
$n_2$ ( $\text{cm}^2/\text{W}$ )	$1.08 \times 10^{-19}p$	$2.20 \times 10^{-19}p$
$f_R$	0.0	0.7
$\tau_1$ (fs)	–	62.5
$\tau_2$ (fs)	–	120

**Tabla 3.1:** Coeficientes de la fórmula de Sellmeier [39], índice de refracción no lineal [40, 41], cociente entre la contribución retardada e instantánea al efecto Kerr y tiempos característicos de la función de respuesta Raman [31] del Ar y el N<sub>2</sub>.

ma en el programa de propagación hacia delante, pero sí en el modelo de propagación inversa donde el término de pérdidas de la GNLSE se convierte en un factor de amplificación exponencial. Aunque en la realidad el espectro de los pulsos nunca llega a frecuencias tan bajas como para que esto sea relevante, en el código numérico la ventana espectral sí incluye el entorno de  $\omega = 0$ , por lo que el vector  $\alpha_{mn}(\omega)$  contiene valores muy elevados en esas posiciones. Esto amplifica muy rápidamente el ruido numérico que aparece en el borde inferior de la ventana espectral, haciendo que el algoritmo de propagación hacia atrás no pueda converger a una solución. Para solucionar este problema, hemos implementado en el programa un filtro que elimina los elementos del vector de atenuación mayores que 10, pertenecientes a la región espectral por debajo de  $7 \mu\text{m}$ , aproximadamente, muy alejada de la zona del infrarrojo cercano en torno a  $800 \text{ nm}$  de nuestro interés.

## 4. Resultados y discusión

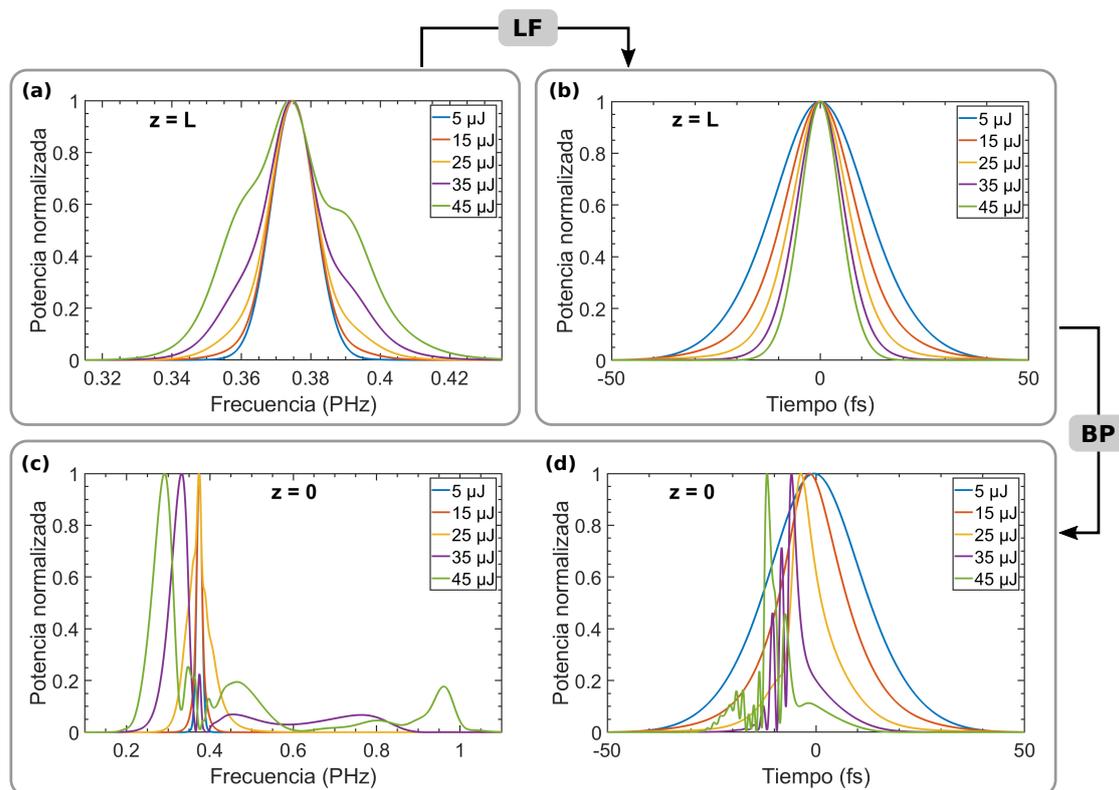
### 4.1. Propagación hacia atrás de pulsos límite de Fourier

Quizá la situación más ideal que podemos imaginar para generar un pulso láser ultracorto y limpio consiste en dejar que un pulso multi-ciclo inicial se propague por una fibra hueca rellena de gas en presencia de dispersión anómala para que ensanche su espectro por SPM y, al mismo tiempo, se auto-comprima hasta alcanzar exactamente un límite de Fourier a la salida de la fibra, el pulso más corto que podríamos obtener con el espectro generado. Para estudiar la posibilidad de alcanzar esta meta, utilizamos el modelo numérico descrito en el capítulo anterior para simular la propagación no lineal inversa de pulsos limitados por transformada de Fourier.

Cabe esperar que, al final de la fibra, los pulsos objetivo presenten un espectro ensanchado característico de la SPM, bastante simétrico y sin modulaciones de amplitud si la energía es moderada. Por tanto, para partir de situaciones finales realistas, en primer lugar propagamos hacia delante un pulso gaussiano de 30 fs de duración, con diferentes valores de energía y centrado en 800 nm, a través de una fibra hueca de 3 m de longitud y 125  $\mu\text{m}$  de radio rellena de Ar a 200 mbar. Este valor de presión se encuentra por debajo de la presión de dispersión cero que, para una fibra de estas características, es de 470 mbar, lo que nos asegura que la dispersión es anómala. A continuación, eliminamos la fase del espectro final obtenido de esta simulación y propagamos hacia atrás su pulso límite de Fourier en las mismas condiciones. Para ayudarnos a comprender los resultados, aumentamos progresivamente la energía del pulso gaussiano de partida de 30 fs desde 5 hasta 45  $\mu\text{J}$  para comenzar en un régimen lineal, donde podemos predecir exactamente cómo es la propagación inversa, y a par-

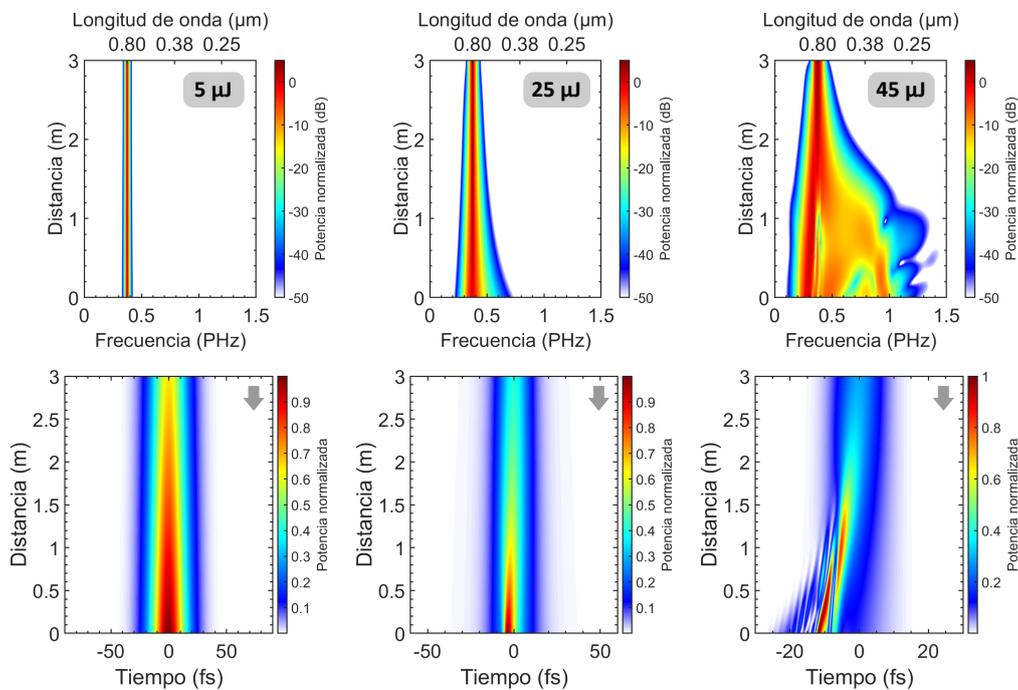
tir de ahí, añadir la no linealidad e incrementar la complejidad de forma gradual. Para entender mejor este procedimiento podemos fijarnos en la Fig. 4.1.

En la Fig. 4.1(a) podemos observar los espectros obtenidos a la salida de la fibra tras propagar hacia delante el pulso de partida gaussiano. Como vemos, el ensanchamiento espectral aumenta con la energía debido a un aumento en la no linealidad, lo que a su vez conlleva una disminución en la duración de los pulsos límite de Fourier correspondientes, representados en la Fig. 4.1(b). Estos pulsos constituyen el objetivo que nos gustaría alcanzar mediante una auto-compresión en fibra hueca. Para determinar cómo debería ser en cada caso el pulso de partida a partir del cual podrían generarse, simulamos su propagación no lineal inversa. En la Fig. 4.1(d) hemos representado los pulsos obtenidos a la entrada de la fibra de dicha propagación hacia atrás, es decir, los pulsos que en propagación hacia delante se auto-comprimen exactamente hasta un límite de Fourier. Como vemos, al aumentar la energía de partida desde 5 hasta 45  $\mu\text{J}$ ,



**Figura 4.1:** (a) Espectros obtenidos a la salida de una fibra hueca de 3 m de longitud y 125  $\mu\text{m}$  de radio rellena de Ar a 200 mbar tras propagar hacia delante un pulso de partida gaussiano de 30 fs con diferentes energías centrado en 800 nm. (b) Pulsos límite de Fourier (LF) correspondientes. (c) Espectros y (d) sus pulsos respectivos obtenidos a la entrada la misma fibra tras propagar hacia atrás (BP) los pulsos objetivo de (b).

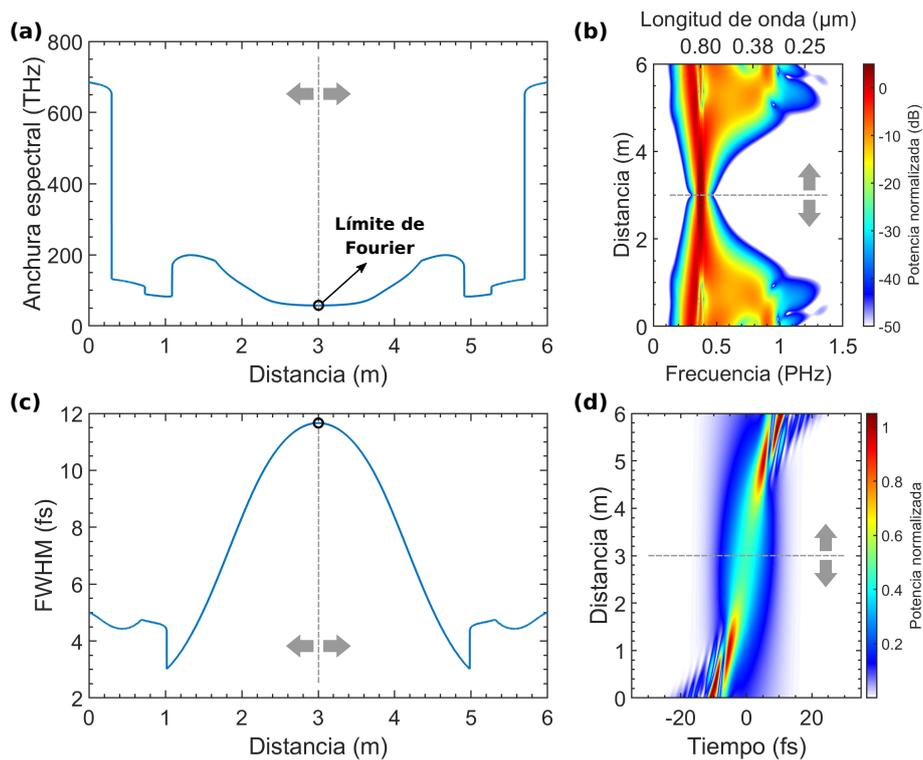
estos pulsos se vuelven cada vez más complejos y terminan desarrollando una fuerte estructura de pre-pulsos. Además, sus espectros (ver Fig. 4.1(c)) se hacen cada vez más anchos, de forma que, en propagación hacia delante, la situación inicial en  $z = 0$  debería presentar un mayor espectro que la que se alcanzaría en  $z = L$ . Esto último se ve muy claramente en la Fig. 4.2 donde hemos representado la evolución espectral y temporal completa de los casos de mayor y menor energía y de una situación intermedia. Incluso si sustituimos el gas en el interior de la fibra por un gas molecular para incorporar los efectos del SRS, encontramos resultados muy parecidos a energías ligeramente mayores que en el Ar debido a la menor contribución de la SPM a la no linealidad, como vemos en las Figs. A.1 y A.2 del Anexo A.



**Figura 4.2:** Evolución espectral (fila superior) y temporal (fila inferior) completa obtenida de la propagación inversa (según indican las flechas) de un pulso limitado por transformada de Fourier a través de una fibra hueca de 125  $\mu\text{m}$  de radio rellena de 200 mbar de Ar para tres valores diferentes de la energía del pulso de partida de 30 fs (ver texto). En todos los casos la potencia está normalizada con respecto a su valor máximo a la entrada de la fibra.

Como podemos observar en la Fig. 4.2, en el caso de 5  $\mu\text{J}$  el espectro apenas varía porque la propagación es esencialmente lineal. Al aumentar la energía, la SPM comienza a generar nuevas frecuencias en el espectro y la situación de 45  $\mu\text{J}$  recuerda mucho a una imagen invertida de una propagación convencional hacia delante en dispersión anómala. Desde el final hacia la entrada de la fibra, el espectro se ensancha, el pulso se

auto-comprime y termina fisionándose por las perturbaciones introducidas por la dispersión de orden alto y el *self-steepening*. Para explorar esta aparente similitud entre las propagaciones hacia delante y su inversa, tomamos el pulso obtenido a la entrada de la fibra en el caso de 35  $\mu\text{J}$ , representado en línea morada en la Fig. 4.1(d), y simulamos su propagación hacia delante en una fibra de longitud doble (6 m). Lo que encontramos es que, en la segunda mitad de la propagación, tras alcanzar el límite de Fourier, el pulso parece imitar su dinámica de la primera mitad pero en sentido inverso. Sin embargo, debido a las pérdidas, la propagación no es perfectamente simétrica porque la reducción en la energía hace que disminuya la importancia de la no linealidad y el ensanchamiento espectral final es menor que su reflexión a la entrada de la fibra. Si artificialmente eliminamos el término de pérdidas de las simulaciones y repetimos todo el procedimiento, obtenemos los resultados que se muestran en la Fig. 4.3.



**Figura 4.3:** (a) Evolución simétrica de la anchura a  $1/e^2$  de la intensidad espectral durante la propagación hacia delante y hacia atrás (desde  $z = 3$  m) del pulso límite de Fourier objetivo correspondiente al espectro generado tras propagar hacia delante un pulso gaussiano de 30 fs y 35  $\mu\text{J}$  centrado en 800 nm por una fibra hueca de 3 m de longitud y 125  $\mu\text{m}$  de radio rellena de Ar a 200 mbar eliminando el término de pérdidas de todas las simulaciones. (b) Dinámica espectral completa, (c) evolución de la duración temporal a mitad de altura de la intensidad (FWHM) y (d) dinámica temporal completa correspondientes. En (b) y en (d) la potencia está normalizada con respecto a su valor máximo a la entrada de la fibra.

Como vemos, en ausencia de pérdidas, las propagaciones hacia delante y hacia atrás de un pulso limitado por transformada de Fourier están estrechamente relacionadas: el espectro evoluciona de forma simétrica con respecto a la posición central  $z = 3$  m en la que se alcanza el pulso límite de Fourier. La dinámica temporal también parece tener simetría de reflexión en  $z$  y de inversión en  $T$ . Solo lo parece porque en la Fig. 4.3(d) hemos representado únicamente la intensidad de la envolvente del pulso. Sin embargo, si nos fijamos en la fase temporal, la inversión en las coordenadas  $z$  y  $T$  no basta para relacionar las dos mitades de la propagación, pero sí se obtiene una relación aparentemente perfecta si además se invierte el signo de la fase o, lo que es lo mismo, si se conjuga la envolvente compleja.

Si repetimos el mismo procedimiento para tratar de relacionar la propagación hacia delante y hacia atrás de un pulso límite de Fourier pero en una fibra hueca rellena de  $N_2$ , encontramos una propagación muy similar a la obtenida en el caso del Ar, como podemos ver en la Fig. A.3. Sin embargo, incluso despreciando el término de absorción, la dinámica deja de ser perfectamente simétrica debido a las pérdidas no lineales introducidas por el SRS, que hacen que el ensanchamiento espectral final sea menor que su inverso a la entrada de la fibra.

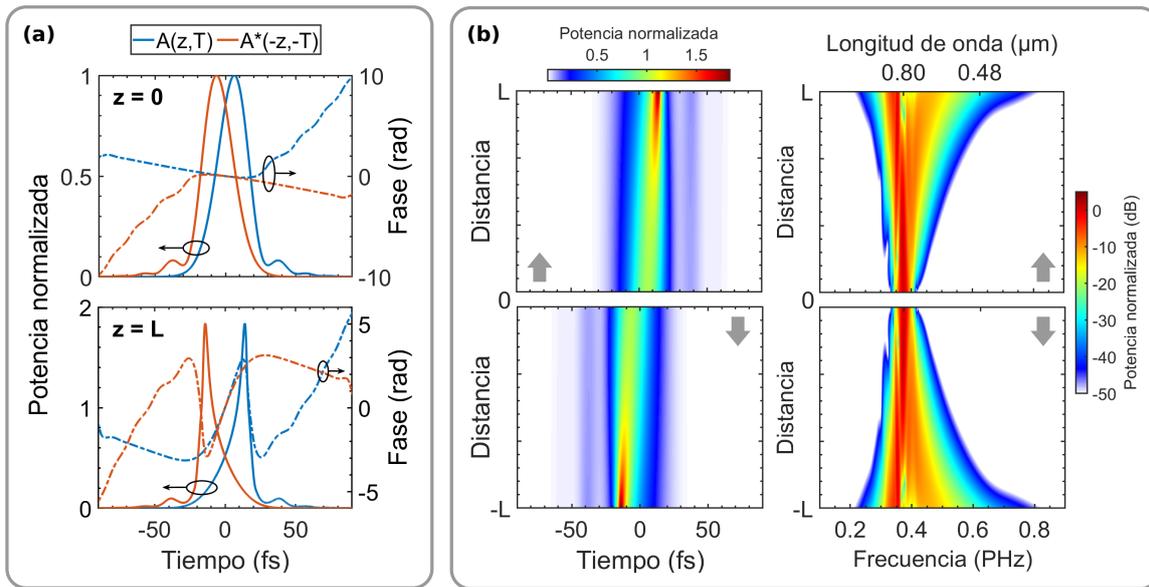
Todos estos resultados nos hacen pensar que, en determinadas circunstancias, las propagaciones hacia delante y hacia atrás puedan estar físicamente relacionadas en general por las propiedades fundamentales de simetría de la GNLSE, por lo que vamos a estudiar estas últimas a continuación.

## 4.2. Simetrías de la ecuación de propagación

Es fácil comprobar que, en ausencia de pérdidas ( $\alpha = 0$ ) y de SRS ( $f_R = 0$ ), la GNLSE tiene simetría  $\mathcal{PT}$ <sup>1</sup>, es decir, es invariante bajo la transformación conjunta de inversión espacial ( $z \rightarrow -z$ ), inversión temporal ( $T \rightarrow -T$ ) y conjugación compleja ( $i \rightarrow -i, A \rightarrow A^*$ ). Por tanto, en esos supuestos, si  $A(z, T)$  es una solución de la ecuación con condición inicial  $A_0(0, T)$ , entonces  $A^*(-z, -T)$  también es solución con condición inicial  $A_0^*(0, -T)$ , como podemos ver en la Fig. 4.4 para un pulso arbitrario. Dado que

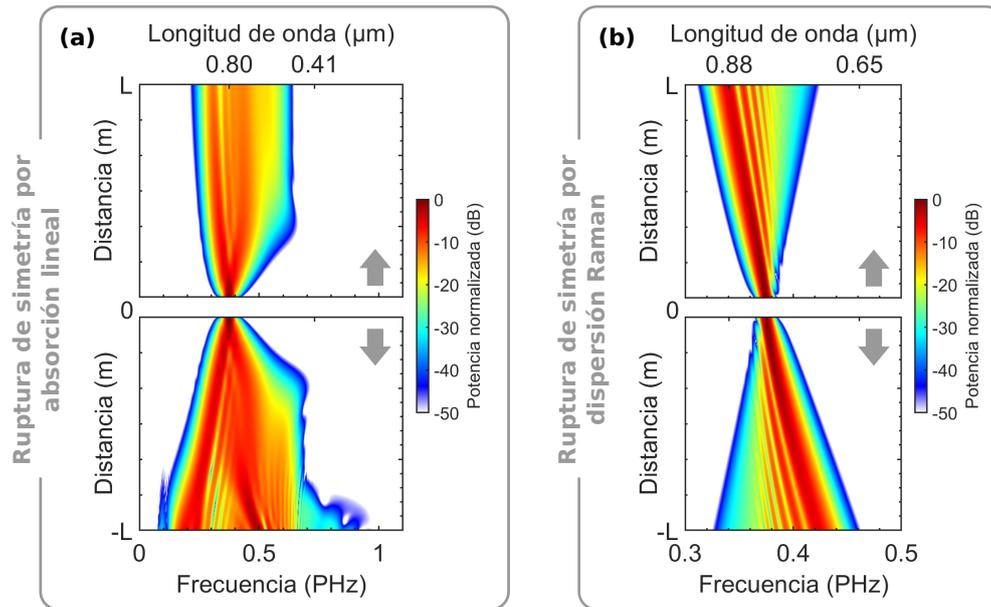
<sup>1</sup>Se definen los operadores de paridad y de inversión temporal, respectivamente, como  $\mathcal{P} : \{z \rightarrow -z\}$  y  $\mathcal{T} : \{T \rightarrow -T, i \rightarrow -i, A \rightarrow A^*\}$ .

hemos definido la ecuación de propagación hacia atrás como la inversión espacial de la GNLSE, esta simetría implica que, en ausencia de pérdidas y de SRS, propagar hacia atrás un pulso es equivalente a propagar hacia delante su inversión temporal compleja conjugada, por lo que ambas direcciones de propagación son físicamente equivalentes. Además, es sencillo demostrar que si  $\tilde{A}(z, \omega)$  es el espectro del pulso  $A(z, T)$ , entonces el espectro de la otra solución  $A^*(-z, -T)$  viene dado por  $\tilde{A}^*(-z, \omega)$ , lo que explica la simetría de reflexión en la evolución de la potencia espectral.



**Figura 4.4:** (a) Pulso arbitrario (azul) y su inversión temporal compleja conjugada (naranja) a la entrada de una fibra hueca (panel superior) y los correspondientes pulsos finales obtenidos tras propagarlos hacia delante y hacia atrás, respectivamente, en ausencia de pérdidas y de SRS (panel inferior). (b) Evolución temporal (izquierda) y espectral (derecha) completa de los pulsos iniciales de (a) al propagarlos hacia delante (pulso en azul) y hacia atrás (pulso en naranja) según indican las flechas. En todos los casos la potencia está normalizada con respecto a su valor máximo en  $z = 0$ .

En la Fig. 4.5 podemos ver los resultados de dos simulaciones en las que hemos potenciado artificialmente los efectos de la absorción lineal y del SRS para analizar cómo estos términos rompen la simetría anterior entre las propagaciones hacia delante y hacia atrás. Por un lado, en la Fig. 4.5(a) podemos ver como, en propagación hacia delante, las pérdidas de energía reducen el impacto de la no linealidad y el ensanchamiento espectral por SPM termina saturando. Sin embargo, en propagación hacia atrás, el término de absorción cambia de signo y amplifica exponencialmente la energía, haciendo que la SPM genere un espectro final mucho más ancho y complejo. Por otro



**Figura 4.5:** Evolución espectral obtenida de propagar hacia delante y hacia atrás (según indican las flechas) un pulso por el interior de una fibra hueca con el término (a) de absorción lineal y (b) de SRS artificialmente exagerado en las simulaciones para ilustrar cómo estos dos procesos rompen la simetría  $\mathcal{PT}$  de la GNLSE.

lado, en la Fig. 4.5(b) podemos ver que, en propagación hacia delante, el SRS produce un corrimiento al rojo de todo el espectro. Lo contrario ocurre en propagación hacia atrás, donde el SRS desplaza todo el espectro hacia frecuencias mayores para que la frecuencia central sea mayor a la entrada que a la salida de la fibra. Además, como el SRS introduce pérdidas no lineales debidas a la interacción de la luz con los estados rotacionales de las moléculas del medio, el ensanchamiento espectral es menor cuando el pulso se propaga hacia delante que cuando lo hace en sentido inverso.

Otro punto interesante es que, al añadir las pérdidas, la GNLSE se vuelve irreversible y las direcciones de propagación hacia delante y hacia atrás también dejan de ser equivalentes en cuanto a su estabilidad frente a pequeñas perturbaciones. Cuando  $\alpha \neq 0$ , el problema de propagación hacia atrás no está bien definido matemáticamente, ya que la solución es extremadamente sensible a las pequeñas perturbaciones de la condición inicial. En nuestro programa de simulación esto se veía reflejado en el hecho de que, en propagación hacia atrás, la exponencial creciente amplificaba el ruido numérico que aparecía en las frecuencias bajas de la ventana espectral, haciendo divergir la solución, y para evitarlo tuvimos que implementar un filtro. Esta pérdida de reversibilidad es un remanente de la flecha del tiempo en termodinámica [33]. En

nuestro problema, la dirección de propagación que está bien definida<sup>2</sup> en términos matemáticos es aquella en la que la energía se emite hacia fuera del sistema (propagación hacia delante) y no aquella en la que la energía fluye hacia el sistema desde el infinito (propagación hacia atrás), en conexión con la condición de radiación de Sommerfeld para la ecuación de Helmholtz [33].

En el caso particular de los pulsos limitados por transformada de Fourier que estudiamos en la sección anterior, como siempre tienen amplitud par en  $T$  y fase temporal impar, entonces verifican  $A_0^*(0, -T) = A_0(0, T)$ , de forma que podemos empalmar las dos soluciones  $A(z, T)$  y  $A^*(-z, -T)$  para conseguir propagaciones continuas y simétricas como la de la Fig. 4.3 en sistemas donde las pérdidas y el SRS son despreciables. Además, si la no linealidad domina la propagación, como habitualmente ocurre en experimentos de post-compresión en fibra hueca, y si el pulso inicial  $A_0(0, T)$  es un límite de Fourier, entonces la SPM solo puede producir un ensanchamiento espectral tanto en propagación hacia delante [26], como hacia atrás porque ambos sentidos son equivalentes. Como veíamos en la Fig. 4.5, esto ocurre incluso en presencia de pérdidas y de SRS, haciendo que un pulso limitado por transformada de Fourier no pueda propagarse hacia atrás estrechando su espectro hacia la entrada de la fibra. Por tanto, podemos concluir que, en los esquemas de post-compresión habituales donde la no linealidad domina, es imposible que un pulso se auto-comprima exactamente hasta alcanzar un límite de Fourier partiendo de una situación inicial peor que la final, entendiendo que lo deseable sería ensanchar el espectro de partida y no destruirlo.

## 4.3. Propagación hacia atrás de pulsos con GDD

### 4.3.1. Efectos de la GDD y estrechamiento espectral inverso

Ahora que hemos aprendido que no podemos generar un espectro sin fase propagando hacia delante un pulso con un espectro inicial más estrecho cuando la no linealidad domina, estudiamos qué ocurre al propagar hacia atrás un espectro objetivo

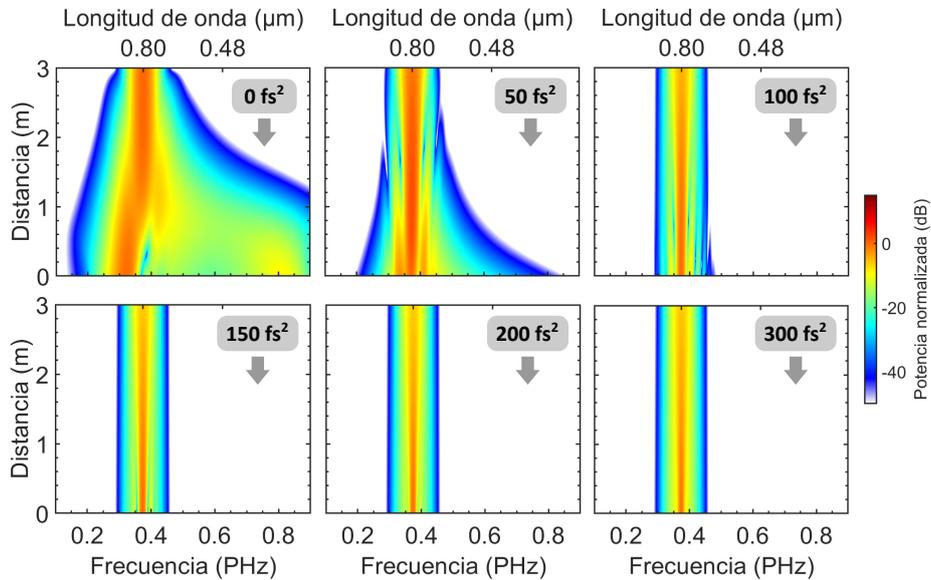
---

<sup>2</sup>Se entiende que un problema está bien definido cuando la solución cambia de forma continua al variar las condiciones iniciales. Es decir, que si dos condiciones iniciales son próximas entre sí, entonces las respectivas soluciones deben ser también cercanas, garantizando que pequeñas perturbaciones en la condición de partida no conlleven grandes errores o divergencias en la solución [33].

con fase. Comenzamos analizando la situación más sencilla, que consistiría en obtener un pulso objetivo gaussiano con *chirp* lineal al final de una fibra hueca, lo que se corresponde con una fase espectral cuadrática que podría compensarse posteriormente utilizando un conjunto de espejos multicapa (*chirped mirrors*). Para ello, simulamos la propagación inversa de un espectro gaussiano con una fase de la forma:

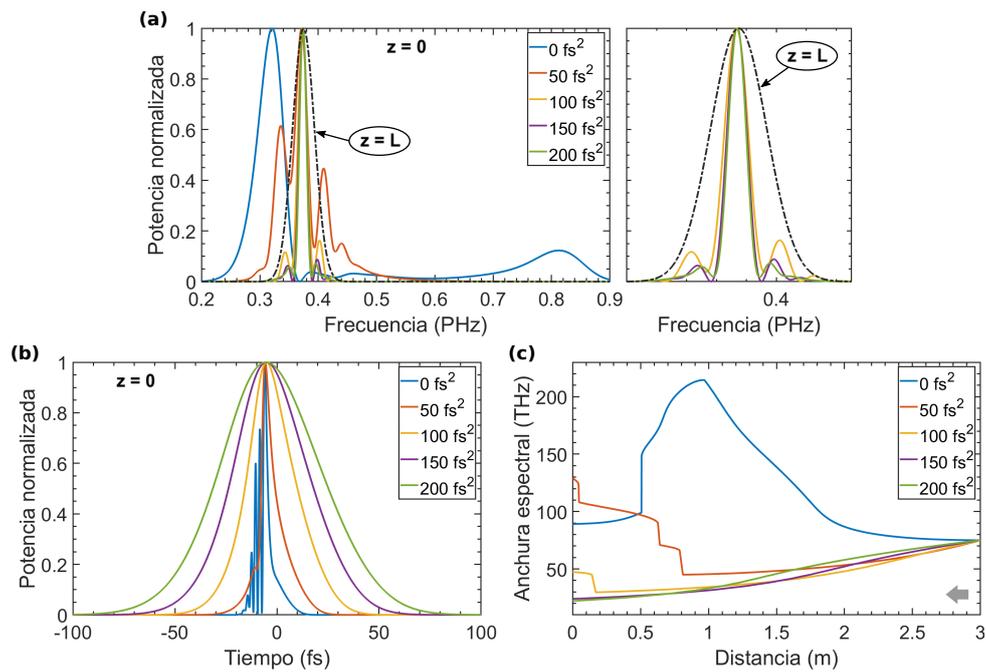
$$\phi(\omega) = \frac{\text{GDD}}{2}(\omega - \omega_0)^2 \quad (4.1)$$

siendo GDD la dispersión del retardo de grupo. En la Fig. 4.6 podemos ver la evolución espectral obtenida tras propagar hacia atrás un espectro objetivo gaussiano centrado en 800 nm, cuyo pulso límite de Fourier tiene una duración de 10 fs, a través de una fibra hueca de 3 m de longitud y 125  $\mu\text{m}$  de radio rellena de 200 mbar de Ar en función del valor de la GDD a la salida de la fibra. Dado que, al aumentar el valor del *chirp* final, los pulsos en  $z = L$  se estiran temporalmente y su potencia pico se reduce, para garantizar que todas las situaciones son equivalentes en cuanto a la importancia de la no linealidad, ajustamos en cada caso la energía de los pulsos objetivo para que la potencia pico  $P_0$  se mantenga constante en 1.5 GW. Este valor de  $P_0$  es unas treinta veces



**Figura 4.6:** Evolución espectral obtenida de propagar hacia atrás en una fibra hueca de 125  $\mu\text{m}$  de radio rellena de Ar a 200 mbar un espectro gaussiano centrado en 800 nm, cuyo pulso límite de Fourier tendría una duración de 10 fs, en función del valor de la GDD al final de la fibra. En todos los casos, la potencia pico de los pulsos objetivo correspondientes en  $z = L$  es de 1.5 GW y la potencia espectral está normalizada con respecto a su valor máximo en  $z = 0$ .

menor que la potencia crítica del modo fundamental de una fibra hueca rellena de Ar a 200 mbar, lo que garantiza que nuestro modelo unidimensional es válido<sup>3</sup>. Lo primero que podemos observar es que, al aumentar el valor de la GDD final, el ensanchamiento espectral hacia atrás se contiene y, en los últimos casos, el espectro es más estrecho a la entrada que a la salida de la fibra. Además, comprobamos que esto solo ocurre para valores de GDD positivos, mientras que para valores negativos la situación empeora aún más. En la Fig. 4.7 hemos representado la evolución de la anchura espectral a lo largo de cinco de las propagaciones inversas anteriores, y el perfil temporal y espectral de los pulsos que se obtienen a la entrada de la fibra. Como vemos, a medida que aumenta el valor de la GDD final, los espectros en  $z = 0$  parecen converger a una misma solución con dos pequeños lóbulos laterales y un máximo central tres veces más estrecho que en  $z = L$ . Al mismo tiempo, los pulsos se vuelven cada vez más limpios y simétricos a la entrada de la fibra.



**Figura 4.7:** (a) Espectros obtenidos a la entrada de la fibra en cinco de las situaciones de la Fig 4.6. La línea discontinua representa el espectro gaussiano objetivo en  $z = 3$  m que propagamos hacia atrás. (b) Pulsos correspondientes en  $z = 0$  y (c) evolución de la anchura espectral a  $1/e^2$  de la intensidad durante la propagación inversa (según indica la flecha).

<sup>3</sup>La potencia crítica viene dada por  $P_{cr} = 1.86225\pi c^2 / (n_2 n_0 \omega_0^2)$  para el modo fundamental de una fibra hueca [42]. Si  $P_0 \gtrsim P_{cr}$ , entonces la dinámica transversal del haz puede empezar a ser relevante, haciendo que nuestro modelo 1D deje de ser válido y desencadenando procesos como la ionización que tampoco están incluidos en nuestro código.

Para terminar, estudiamos cómo influyen en la propagación hacia atrás de espectros gaussianos con GDD distintos parámetros como la potencia pico de los pulsos, la anchura del espectro final en  $z = L$  o la dispersión de la fibra. En primer lugar, comprobamos que, si el resto de parámetros se mantienen constantes, cuanto mayor es la potencia pico de los pulsos, mayor debe ser la GDD positiva del espectro final para producir el mismo estrechamiento espectral al propagarse hacia atrás. En segundo lugar, observamos que, cuanto más ancho es el espectro objetivo o, lo que es lo mismo, cuanto menor es la duración de su pulso límite de Fourier, menor es el valor de GDD final necesario para estrechar el espectro en propagación inversa. La razón de estos dos comportamientos se hará evidente en la Sección 4.3.4. Por último, comprobamos que se pueden conseguir los mismos resultados si aumentamos la presión del gas por encima de la presión de dispersión cero de manera que la propagación suceda en una región dispersión normal, como vemos en la Fig. A.4. Lo más llamativo es que, en todos los casos, la GDD final tiene que ser necesariamente positiva para que se produzca un estrechamiento espectral en propagación hacia atrás y que, aunque esto ocurra para diferentes valores de GDD según el resto de parámetros, el espectro en  $z = 0$  siempre termina convergiendo a una solución similar.

Podemos intentar entender algunos de estos resultados de la siguiente manera: como sabemos, cuando propagamos hacia delante un pulso gaussiano con GDD negativa, la modulación espectral inicial puede ser compensada por el *chirp* positivo introducido por la SPM, produciendo un estrechamiento espectral [26,43]. Además, como vimos en la Sección 4.2, propagar hacia delante un espectro es equivalente a propagar hacia atrás su complejo conjugado, lo que conlleva un cambio de signo de toda la fase. Dado que el *chirp* introducido por SPM siempre es positivo independientemente de la dispersión del medio, llegamos a la conclusión de que para que un espectro se estreche en propagación hacia atrás necesariamente tiene que tener GDD final positiva.

### 4.3.2. Ajuste de la fase inicial y propagación hacia delante

En la sección anterior hemos demostrado que, al menos teóricamente, es posible generar un espectro gaussiano con fase cuadrática propagando hacia delante un pulso con un espectro inicial más estrecho. No obstante, el espectro con el que habría que co-

menzar la propagación en  $z = 0$ , además de tener una amplitud poco habitual con dos lóbulos laterales, veremos que presenta una fase complicada. Por tanto, a continuación nos planteamos cómo se podría reconstruir dicha fase espectral de manera experimental y cómo de afectada se vería la propagación ideal hacia delante si se utilizase este ajuste más próximo a la realidad.

Para ello, tomamos el espectro obtenido a la entrada de la fibra tras la propagación hacia atrás descrita en la Sección 4.3.1 en los casos con GDD final de 150 y 300 fs<sup>2</sup>, mantenemos su amplitud teórica y aproximamos su fase espectral por un desarrollo en serie con unos pocos términos de dispersión. La idea es que esta fase aproximada se podría conseguir experimentalmente con sistemas de prismas y/o redes de difracción, espejos con *chirp*, moduladores de fase o dispositivos acusto-ópticos. Para ajustar la fase espectral en  $z = 0$  probamos dos estrategias diferentes.

En primer lugar, aproximamos la fase espectral por un desarrollo en serie de Taylor en torno a la frecuencia central  $\omega_0$  (calculada como el primer momento del espectro) incluyendo los primeros términos de dispersión hasta tercer o cuarto orden:

$$\phi(\omega) \approx \phi_0 + \text{GD}(\omega - \omega_0) + \frac{\text{GDD}}{2}(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\text{TOD}}{6}(\omega - \omega_0)^3 + \frac{\text{FOD}}{24}(\omega - \omega_0)^4 \quad (4.2)$$

$$\phi_0 \equiv \phi(\omega_0) \quad \text{GD} \equiv \left( \frac{d\phi}{d\omega} \right)_{\omega_0} \quad \text{GDD} \equiv \left( \frac{d^2\phi}{d\omega^2} \right)_{\omega_0} \quad \text{TOD} \equiv \left( \frac{d^3\phi}{d\omega^3} \right)_{\omega_0} \quad \text{etc.} \quad (4.3)$$

Para construir el desarrollo, las derivadas de la fase en  $\omega_0$  las calculamos numéricamente utilizando las fórmulas de diferencias finitas centradas de orden alto [44], cuyas expresiones se pueden consultar en el Anexo B.4. Como veremos, esta primera forma reproduce bien la parte central de la fase, pero falla al alejarnos de  $\omega_0$  y no ajusta la pequeña estructura escalonada de la fase teórica en  $z = 0$ .

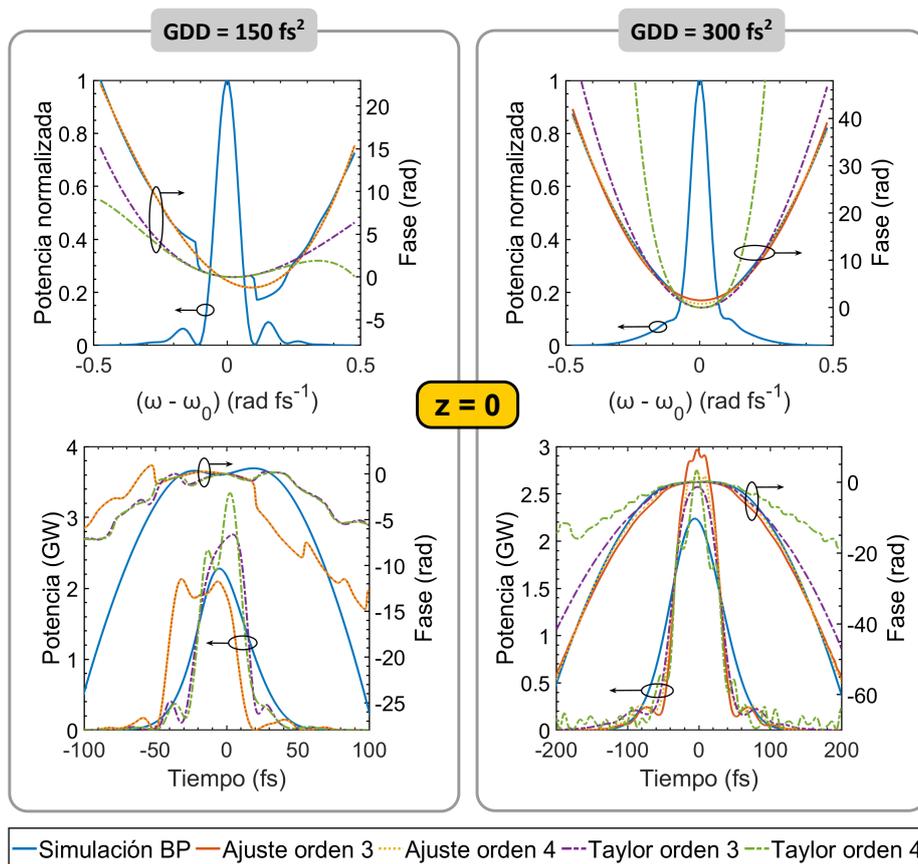
En segundo lugar, aproximamos la fase espectral por un ajuste polinómico por mínimos cuadrados hasta tercer o cuarto orden:

$$\phi(x) \approx a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \quad \text{con} \quad x = (\omega - \omega_0) \quad (4.4)$$

Comparando las ecuaciones (4.2) y (4.4) podemos obtener a partir de los coeficientes  $a_i$  los términos de dispersión de una fase que se ajusta bien a la teórica:  $\phi_0 = a_0$ ,  $\text{GD} = a_1$ ,

$GDD = 2a_2$ ,  $TOD = 6a_3$  y  $FOD = 24a_4$ . Como veremos, esta segunda forma reproduce bien la estructura global de la fase teórica, ya que, al forzar a un polinomio de cierto grado a parecerse a la función, los distintos coeficientes  $a_i$  pueden mezclar información de toda la fase. En la Tabla 4.1 se recogen los valores de los coeficientes de dispersión obtenidos por cada uno de los métodos para las fases de los espectros generados al propagar hacia atrás un espectro gaussiano con valores de GDD final de 150 y 300  $\text{fs}^2$ . Así mismo, en la Fig. 4.8 hemos representado los dos espectros correspondientes a la entrada de la fibra junto con las cuatro fases obtenidas por cada uno de los ajustes.

Como podemos ver, en el caso de GDD final de 150  $\text{fs}^2$  todos los ajustes fallan en reproducir la estructura escalonada de la fase espectral teórica en  $z = 0$  en torno a los dos lóbulos laterales del espectro. Como consecuencia, ninguno de los pulsos recons-



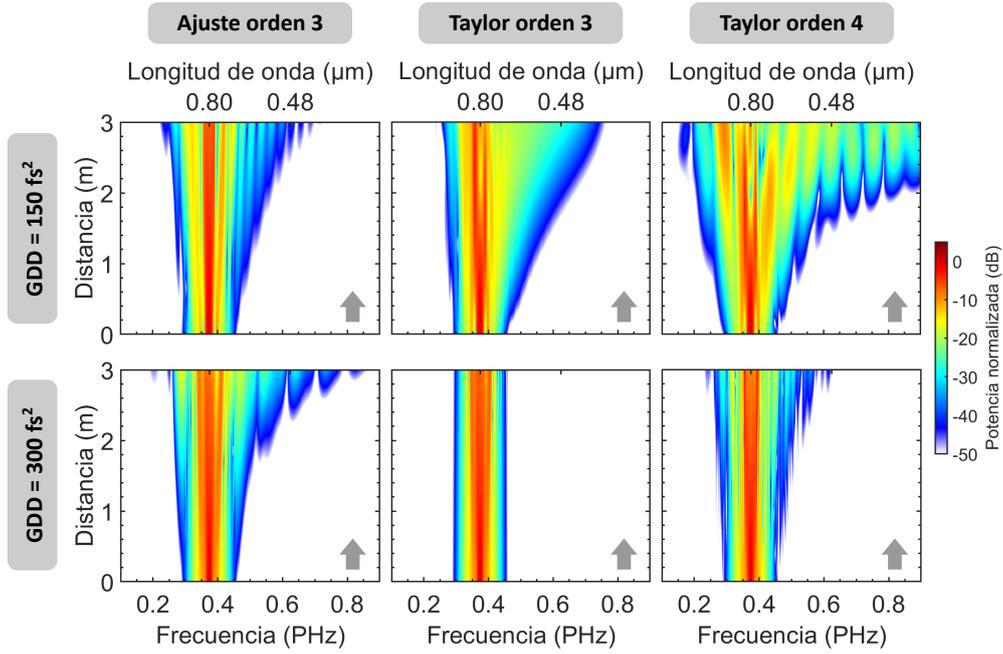
**Figura 4.8:** (Arriba) Espectros teóricos con sus fases (línea azul continua) obtenidos a la entrada de la fibra tras propagar hacia atrás un espectro gaussiano con dos valores diferentes de GDD final positiva. En cada caso, se representan también las fases aproximadas en  $z = 0$  calculadas a partir de un ajuste polinómico por mínimos cuadrados o un desarrollo en serie de Taylor, ambos hasta tercer y cuarto orden. (Abajo) Pulsos correspondientes a cada uno de los espectros compuestos por la amplitud teórica y la fase ajustada a la entrada de la fibra.

Término	GDD = 150 fs <sup>2</sup>			GDD = 300 fs <sup>2</sup>		
	Ajuste 3	Ajuste 4	Taylor	Ajuste 3	Ajuste 4	Taylor
$\phi_0$	-0.4304	-0.4433	0.0125	1.5267	0.7899	0.0159
GD (fs)	-16.964	-16.965	-2.193	-2.515	-2.607	-3.877
GDD (fs <sup>2</sup> )	171.11	172.23	95.020	343.95	407.49	448.90
TOD (fs <sup>3</sup> )	241.41	241.51	-189.26	-26.233	-20.665	-150.89
FOD (fs <sup>4</sup> )	–	-67.242	-2906.9	–	-3835.9	2.351×10 <sup>5</sup>

**Tabla 4.1:** Valores de los primeros coeficientes de dispersión de la fase aproximada en  $z = 0$  calculados por los métodos de ajuste polinómico por mínimos cuadrados hasta tercer orden, ajuste polinómico hasta cuarto orden y desarrollo en serie de Taylor en torno a la frecuencia central, para los dos espectros obtenidos de propagar hacia atrás un espectro gaussiano con valores de GDD final de 150 y 300 fs<sup>2</sup>.

truidos a la entrada de la fibra se parece al pulso teórico obtenido de la propagación hacia atrás. Por otro lado, al aumentar el valor de la GDD final, los lóbulos laterales del espectro en  $z = 0$  desaparecen y se funden con el pico central, haciendo que la fase sea mucho más suave. Así, en el caso de GDD final de 300 fs<sup>2</sup> los ajustes de la fase espectral son bastante mejores. Sin embargo, aunque sí hay una mejora considerable, ninguno de los pulsos reconstruidos se aproxima al teórico.

Si tomamos los pulsos reconstruidos en  $z = 0$  por cada uno de los métodos (fila inferior de la Fig. 4.8) y los propagamos hacia delante en la misma fibra hueca de 3 m de longitud y 125  $\mu\text{m}$  de radio rellena de Ar a 200 mbar obtenemos la evoluciones espectrales que se muestran en la Fig. 4.9 en cada uno de los casos. De los dos ajustes polinómicos de la fase mostramos solo los resultados para el ajuste hasta tercer orden porque los obtenidos con el ajuste hasta cuarto orden son prácticamente idénticos como se puede comprobar en la Fig. 4.8. Como podemos observar, en todos los casos el espectro inicial compuesto por la amplitud teórica en  $z = 0$  y la fase ajustada se ensancha al propagarse hacia delante, y la mayoría de los resultados son completamente diferentes a las evoluciones teóricas de la Fig. 4.6 que nos gustaría reproducir. Como era de esperar a la vista de los pulsos reconstruidos de la Fig. 4.8, los resultados mejoran ligeramente en las situaciones asociadas al espectro gaussiano objetivo con mayor valor de GDD final. Además, en todos los casos, el método de reconstrucción de la fase espectral inicial que mejor funciona es el desarrollo en serie de Taylor hasta tercer orden en torno a la frecuencia central. Por último, hemos comprobado que en regiones de dispersión normal de la fibra se obtienen resultados muy similares.



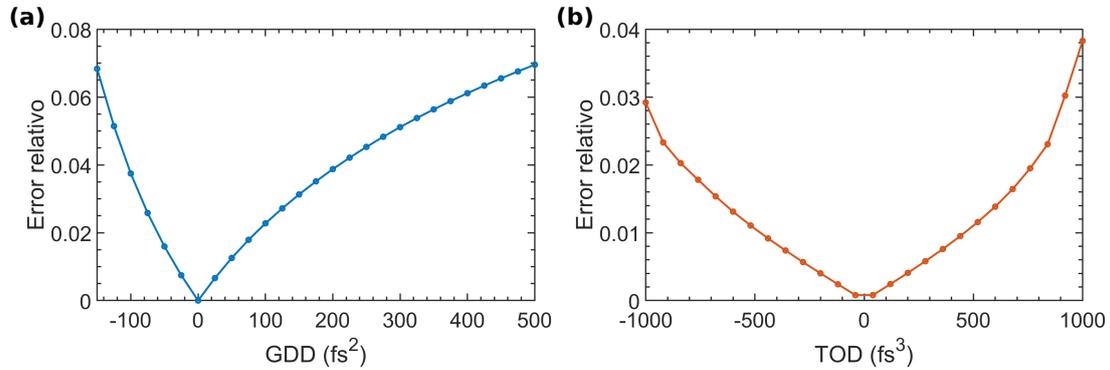
**Figura 4.9:** Evoluciones espectrales obtenidas de propagar hacia delante por una fibra hueca de 125  $\mu\text{m}$  de radio rellena de Ar a 200 mbar los pulsos reconstruidos de la Fig. 4.8 con su fase espectral aproximada por un ajuste polinómico hasta tercer orden (izquierda) o un desarrollo en serie de Taylor hasta tercer (centro) o cuarto orden (derecha), en los dos casos de GDD final de 150  $\text{fs}^2$  (fila superior) y de 300  $\text{fs}^2$  (fila inferior).

### 4.3.3. Estabilidad de la solución frente a pequeñas perturbaciones

Dado que ninguno de los ajustes anteriores para la fase espectral inicial permite recuperar el espectro objetivo propuesto, resulta lógico preguntarse si se trata de un problema de complejidad de la fase o de que la solución es muy sensible a pequeñas perturbaciones de la condición inicial. Para comprobarlo, tomamos el espectro teórico completo obtenido a la entrada de la fibra tras la propagación hacia atrás del espectro gaussiano objetivo descrita en la Sección 4.3.1 en el caso de GDD final de 300  $\text{fs}^2$  y añadimos sobre la fase ideal en  $z = 0$  pequeñas perturbaciones de GDD y TOD. El pulso resultante lo propagamos hacia delante a través de la misma fibra hueca de 3 m de longitud y 125  $\mu\text{m}$  de radio rellena de Ar a 200 mbar y comparamos el resultado final  $A^{\text{pert}}$  con la solución teórica objetivo  $A^{\text{teor}}$  (el espectro gaussiano con fase cuadrática pura). Para comparar ambas soluciones calculamos el error relativo de la intensidad, definido como [34]:

$$\varepsilon = \frac{\sum_{k=1}^N \left| |A_k^{\text{pert}}|^2 - |A_k^{\text{teor}}|^2 \right|}{N \cdot \max(|A^{\text{teor}}|^2)} \quad (4.5)$$

siendo  $N$  el número de puntos del mallado temporal en las simulaciones. En la Fig. 4.10 podemos ver la evolución del error  $\varepsilon$  en función de las perturbaciones de GDD y TOD añadidas sobre la fase espectral ideal en  $z = 0$ . En la Fig. A.5 del Anexo A hemos incluido las evoluciones espectrales completas obtenidas en varios de los casos.



**Figura 4.10:** Error relativo de la intensidad cometido con respecto a la propagación ideal al añadir perturbaciones (a) de GDD o (b) de TOD sobre la fase espectral teórica en  $z = 0$ .

Como podemos ver, el pulso teórico admite perturbaciones considerables de la fase espectral inicial antes de que la solución deje de parecerse a la evolución ideal deseada. Por tanto, la propagación hacia delante es robusta frente a pequeñas perturbaciones de la condición inicial, como le corresponde por ser la dirección de evolución de la GNLSE que está bien definida matemáticamente. Así pues, el hecho de que ninguno de los ajustes de la sección anterior permitiese reproducir la propagación ideal es debido a que la fase espectral no lineal es muy compleja y somos incapaces de aproximarla de manera adecuada controlando únicamente los primeros términos de dispersión.

#### 4.3.4. Valor de GDD óptimo y reordenación espectral

En la Sección 4.3.2 hemos demostrado que, a pesar de que ninguna de las técnicas de ajuste de la fase espectral inicial permite reproducir perfectamente la propagación teórica hacia delante deseada, los resultados mejoran al aumentar el valor de la GDD final del espectro gaussiano objetivo. El valor de GDD óptimo depende de todos los parámetros de las simulaciones y, en cada caso, es el que produce el espectro inicial más estrecho, sin lóbulos laterales y con una fase espectral más suave y sencilla de ajustar. Por tanto, para terminar vamos a analizar el papel de los distintos procesos lineales y no lineales que afectan al estrechamiento espectral en la propagación ha-

cia atrás de un espectro gaussiano para obtener una fórmula general que nos permita predecir el valor de GDD final óptimo que resulta en la propagación más sencilla de reproducir de forma realista. Para ello, conviene definir dos distancias características para la dispersión y la no linealidad [26]:

$$L_D = \frac{T_{\text{FWHM}}^2}{4 \ln 2 |\beta_2|} \quad ; \quad L_{NL} = \frac{1}{\gamma P_0} \quad (4.6)$$

siendo  $T_{\text{FWHM}}$  la duración de los pulsos en  $z = L$  medida como anchura completa a mitad de altura (FWHM) de la intensidad,  $P_0$  su potencia pico,  $\beta_2$  la GVD del gas en la fibra y  $\gamma$  el parámetro no lineal definido en la Sección 2.1.

En todas nuestras simulaciones, y en la mayoría de experimentos de post-compresión en fibra hueca, la longitud  $L$  de la fibra verifica  $L_{NL} < L < L_D$ , por lo que la propagación está dominada por la no linealidad y la dispersión del gas en la fibra juega un papel menor. De hecho, en los casos de mayor GDD final descritos antes ( $150 \text{ fs}^2$  y  $300 \text{ fs}^2$ ) comprobamos que si eliminamos o duplicamos artificialmente la dispersión del medio, la propagación no se modifica de manera apreciable. Por tanto, la dinámica de estrechamiento espectral hacia atrás está gobernada principalmente por el balance entre la GDD final y el *chirp* positivo que introduce la SPM. Esto nos permite hacer una estimación del valor de GDD final que produce el espectro más estrecho a la entrada de la fibra como se detalla a continuación.

Por un lado, para introducir la GDD en el pulso objetivo que se desea obtener al final de la fibra, tomamos un espectro gaussiano  $\tilde{A}$  cuyo pulso límite de Fourier  $A^{\text{LF}}$  tiene una anchura completa a mitad de altura  $T_{\text{FWHM}} = 2\sqrt{\ln 2} T_0$ :

$$A^{\text{LF}}(L, T) \sim \exp\left(-\frac{T^2}{2T_0^2}\right) \Rightarrow \tilde{A}(L, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(L, T) e^{i\omega T} dT \sim \exp\left(-\frac{T_0^2 \omega^2}{2}\right) \quad (4.7)$$

A este espectro le añadimos una fase cuadrática con GDD positiva, volvemos al dominio temporal y normalizamos la envolvente de forma que el pulso estirado por el *chirp* tenga una potencia pico  $P_0$ :

$$\tilde{A}(L, \omega) \sim \exp\left(-\frac{T_0^2 \omega^2}{2}\right) \exp\left(i \frac{\text{GDD}}{2} \omega^2\right) \Rightarrow \quad (4.8)$$

$$\Rightarrow A(L, T) = \sqrt{P_0} e^{i\Phi} \exp \left\{ -\frac{T^2 T_0^2}{2(\text{GDD}^2 + T_0^4)} \right\} \exp \left\{ -i \frac{T^2 \text{GDD}}{2(\text{GDD}^2 + T_0^4)} \right\} \quad (4.9)$$

siendo  $\Phi$  un factor de fase constante que viene del cálculo de la transformada de Fourier inversa. Como vemos, la GDD añade al pulso una fase que depende del tiempo de forma cuadrática, lo que se corresponde con un *chirp* lineal positivo:

$$\delta\omega_L(T) = -\frac{\partial\phi_L(T)}{\partial T} = \frac{\text{GDD}}{\text{GDD}^2 + T_0^4} T \quad (4.10)$$

Por otro lado, la SPM introduce en el pulso una fase no lineal que, en propagación hacia atrás desde  $z = L$  hasta  $z = 0$ , viene dada por:

$$\phi_{NL}(T) = \frac{\omega_0}{c} n_2 \int_L^0 I(z, T) dz = \gamma \int_L^0 |A(z, T)|^2 dz \quad (4.11)$$

Como la dispersión del medio es despreciable frente a la no linealidad, podemos asumir que la envolvente del pulso no varía durante la propagación, como sucedería en presencia solo de SPM, y que la potencia solo aumenta de forma exponencial en propagación hacia atrás por el término de amplificación proporcional a  $\alpha$ . Así, podemos aproximar la fase no lineal acumulada por:

$$\begin{aligned} \phi_{NL}(T) &\approx \gamma \int_L^0 |A(L, T)|^2 e^{\alpha z} dz = \gamma |A(L, T)|^2 \left( \frac{1 - e^{\alpha L}}{\alpha} \right) = \\ &= \gamma P_0 \left( \frac{1 - e^{\alpha L}}{\alpha} \right) \exp \left( -\frac{T^2 T_0^2}{\text{GDD}^2 + T_0^4} \right) \approx \gamma P_0 \left( \frac{1 - e^{\alpha L}}{\alpha} \right) \left[ 1 - \frac{T^2 T_0^2}{\text{GDD}^2 + T_0^4} + \dots \right] \end{aligned} \quad (4.12)$$

donde en la última igualdad hemos aproximado la gaussiana por un desarrollo en serie de Taylor de la exponencial en torno a  $T = 0$ . Por tanto, la SPM introduce un *chirp* que es aproximadamente lineal en la parte central de un pulso gaussiano [26]:

$$\delta\omega_{NL}(T) = -\frac{\partial\phi_{NL}(T)}{\partial T} \approx \gamma P_0 \left( \frac{1 - e^{\alpha L}}{\alpha} \right) \frac{2T_0^2}{\text{GDD}^2 + T_0^4} T \quad (4.13)$$

El máximo estrechamiento espectral hacia atrás se produce cuando las dos contribuciones lineales al *chirp* (4.10) y (4.13) se cancelan exactamente, lo que ocurre para

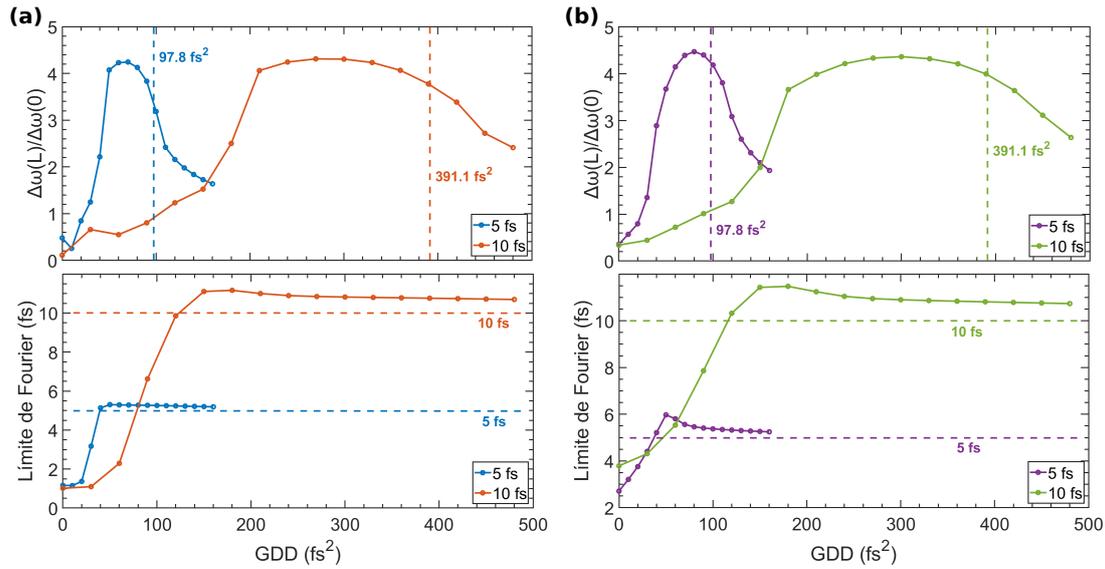
un valor de GDD final:

$$\text{GDD} = \frac{\gamma P_0 T_{\text{FWHM}}^2}{2 \ln 2} \left( \frac{e^{\alpha L} - 1}{\alpha} \right) \quad (4.14)$$

Dado que todos los parámetros que aparecen en esta expresión son siempre positivos (asumiendo  $\gamma \sim n_2 > 0$ ), este análisis confirma que el valor de GDD final que produce un estrechamiento espectral en propagación hacia atrás es siempre positivo. Además, a partir de esta fórmula podemos entender dos comportamientos que comentamos en la Sección 4.3.1. En primer lugar, a mayor potencia pico de los pulsos y/o a mayor longitud de fibra, mayor debe ser la GDD positiva del espectro final, lo cual es lógico porque tiene que compensar una mayor cantidad de *chirp* no lineal. En segundo lugar, el valor de GDD final disminuye rápidamente al reducir la duración del límite de Fourier del espectro en  $z = L$ , lo cual puede ser debido a que el *chirp* lineal es tanto mayor cuanto mayor es el contenido espectral del pulso objetivo.

Para analizar la validez de la fórmula (4.14) hemos simulado la propagación inversa de dos pulsos gaussianos objetivo centrados en 800 nm con una duración  $T_{\text{FWHM}}$  de 5 y 10 fs en límite de Fourier y una potencia pico de 2.0 GW (una vez estirados por el *chirp* positivo) a través de una fibra hueca de 125  $\mu\text{m}$  de radio y 3 m de longitud rellena de Ar a 200 mbar (en régimen de dispersión anómala). En el panel superior de la Fig. 4.11(a) podemos ver el factor de ensanchamiento espectral, definido como el cociente entre la anchura a  $1/e^2$  de la intensidad del espectro objetivo a la salida de la fibra y la anchura del espectro estrechado correspondiente a la entrada de la fibra, en función del valor de GDD final en cada uno de los dos casos. Como vemos, la ecuación (4.14) predice valores de GDD óptima (líneas verticales discontinuas) algo mayores que los necesarios para lograr el máximo estrechamiento espectral en propagación hacia atrás. No obstante, como ya vimos en la Sección 4.3.2, hemos comprobado que estos valores de GDD algo más elevados producen una fase espectral más suave y fácil de ajustar en  $z = 0$  con pocos términos de dispersión, lo que permitiría aproximarse más a la propagación teórica ideal de manera experimental.

Para comprobar que la fórmula (4.14) es igualmente válida en la región de dispersión normal de la fibra, aumentamos la presión del Ar a 800 mbar y reducimos la potencia pico de los pulsos a 0.5 GW para mantener el mismo grado de no linealidad  $\gamma P_0 = 1.45 \text{ m}^{-1}$  que en los casos anteriores. En el panel superior de Fig. 4.11(b) pode-



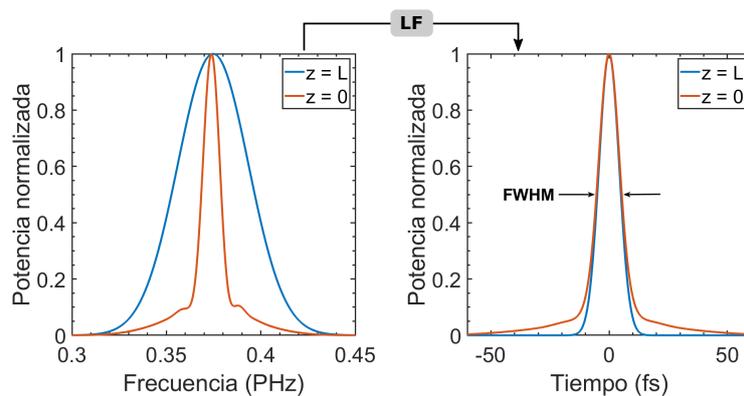
**Figura 4.11:** (Arriba) Factor de ensanchamiento espectral desde  $z = 0$  hasta  $z = L$  para los dos pulsos objetivo de salida gaussianos de 5 y 10 fs de duración mínima en función de la GDD final en dos situaciones de dispersión **(a)** anómala y **(b)** normal de la fibra hueca con el mismo grado de no linealidad. Las líneas verticales discontinuas representan el valor de GDD óptimo obtenido en cada caso según la ecuación (4.14). (Abajo) Duración FWHM del pulso límite de Fourier correspondiente al espectro estrechado a la entrada de la fibra en cada uno de los casos. Las líneas horizontales discontinuas indican la duración mínima a la salida de la fibra.

mos observar que los resultados para el ensanchamiento espectral desde  $z = 0$  hasta  $z = L$  en función de la GDD final son prácticamente idénticos a los anteriores en dispersión anómala. En todos los casos, el máximo factor de ensanchamiento espectral está en torno a 4.4 y comprobamos que este valor depende exclusivamente de la no linealidad y es proporcional al producto  $\gamma P_0$  [43, 45]. Esto invitaría a aumentar la potencia pico de los pulsos o la presión del gas en el interior de la fibra para conseguir factores de ensanchamiento espectral hacia delante elevados, que podrían ser interesantes en esquemas de post-compresión para generar pulsos ultracortos de pocos ciclos partiendo de pulsos multi-ciclo con un espectro estrecho.

Sin embargo, vamos a ver que esta idea que venimos explorando de generar un espectro gaussiano con fase cuadrática pura partiendo de un espectro más estrecho es en realidad inútil. Para ello, podemos fijarnos en los dos paneles inferiores de la Fig. 4.11 donde hemos representado la duración temporal del pulso límite de Fourier correspondiente al espectro estrechado que se obtiene a la entrada de la fibra en cada uno de los casos. Como ya sabemos, para una GDD final nula, un pulso limitado por transformada de Fourier ensancha su espectro en propagación hacia atrás y la duración

mínima a la entrada de la fibra es menor que a la salida (indicada por líneas horizontales discontinuas). Al aumentar el valor de la GDD positiva final, el ensanchamiento espectral inverso se empieza a contener y la duración del pulso límite de Fourier en  $z = 0$  aumenta aproximándose a su valor en  $z = L$ .

Lo ideal en un experimento de post-compresión sería que la duración mínima a la entrada de la fibra fuese varias veces mayor que a la salida. Uno esperaría que esto sucediera en el entorno del valor de GDD final óptimo, donde la razón entre las anchuras espectrales a la salida y a la entrada de la fibra se maximiza. De hecho, esta misma estrategia para producir un estrechamiento espectral pero en propagación hacia delante se ha propuesto en numerosas ocasiones como una alternativa mucho más eficiente que el filtrado espectral para generar pulsos de picosegundo a partir de pulsos de femtosegundo [43, 45–48]. No obstante y en contra de nuestra intuición, lo que encontramos es que la duración del pulso límite de Fourier correspondiente al espectro estrechado a la entrada de la fibra apenas supera en ningún momento la duración mínima del pulso objetivo a la salida de la fibra, suponiendo una mejora de poco más de 1 fs en los casos más destacados. Para hacernos una mejor idea de lo que esto significa, en el panel izquierdo de la Fig. 4.12 podemos ver una comparación entre el espectro gaussiano objetivo en  $z = L$  y el correspondiente espectro estrechado que se obtiene en  $z = 0$  para el valor de GDD final óptimo según la fórmula (4.14) en uno de los casos anteriores. En el panel derecho de la misma figura hemos representado sus respectivos pulsos límite de



**Figura 4.12:** (Izquierda) Espectro gaussiano objetivo en  $z = L$  (azul) correspondiente a un pulso de 10 fs de duración en límite de Fourier y 2.0 GW de potencia pico centrado en 800 nm y espectro estrechado (naranja) obtenido tras propagarlo hacia atrás con una GDD final de 391.1 fs<sup>2</sup> por el interior de un fibra hueca de 3 m de longitud y 125  $\mu\text{m}$  de radio rellena de Ar a 200 mbar. (Derecha) Pulsos límite de Fourier (LF) correspondientes a ambos espectros.

Fourier. Como vemos, el espectro a la entrada de la fibra tiene un pico central mucho más estrecho que el del espectro objetivo a la salida. Sin embargo, y aunque parezca sorprendente, los pulsos límite de Fourier de ambos espectros tienen prácticamente la misma duración.

Parece, por tanto, que esta estrategia no produce un verdadero ensanchamiento espectral en propagación hacia delante con generación de nuevas frecuencias, sino más bien una redistribución de la energía contenida en el pico central del espectro hacia las frecuencias altas y bajas, como se apreciaba en la Fig. 4.6 incluso aunque la escala de color logarítmica pueda a veces considerarse engañosa.

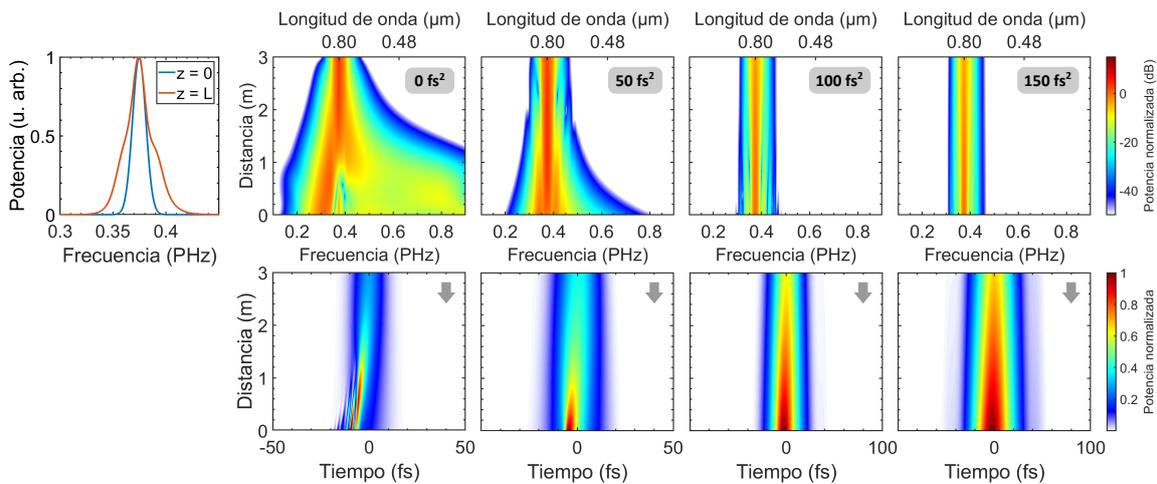
## 4.4. Propagación hacia atrás de espectros modulados

### 4.4.1. Efectos de la GDD final

Para terminar, probamos a propagar hacia atrás espectros con una amplitud final más realista que una simple gaussiana, que incorpore las modulaciones características de la SPM, pero con una fase sencilla que se pudiera compensar completamente de manera experimental. Para ello, seguimos un procedimiento similar al ya descrito en la Sección 4.1. Para generar un espectro final realista en  $z = L$ , en primer lugar propagamos hacia delante un pulso gaussiano de 30 fs centrado en 800 nm a través de una fibra hueca de 3 m de longitud y 125  $\mu\text{m}$  de radio rellena de Ar, variando la energía por pulso y la presión del gas para analizar diferentes situaciones. A continuación, sustituimos la fase del espectro final obtenido de esta simulación por una fase deseada con pocos términos de dispersión, comenzando por la situación más sencilla de GDD positiva pura. Por último, propagamos hacia atrás el pulso objetivo resultante de esta operación en las mismas condiciones.

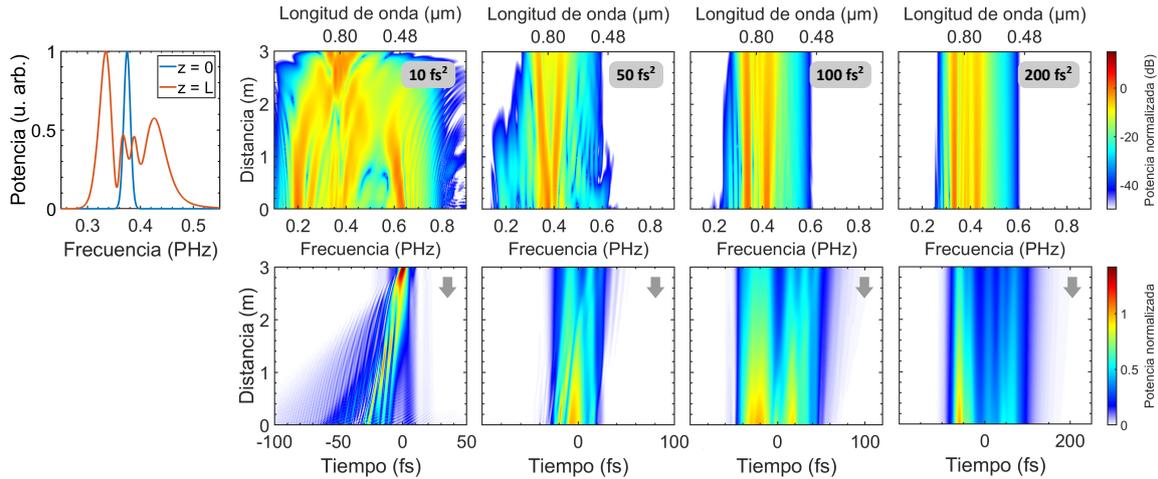
En el panel izquierdo de la Fig. 4.13 podemos ver el espectro objetivo obtenido en  $z = L$  tras propagar hacia delante un pulso gaussiano de partida de 40  $\mu\text{J}$  a través de una fibra hueca rellena de Ar a 200 mbar. A la derecha podemos ver los resultados obtenidos para la evolución espectral y temporal completa durante la propagación inversa de dicho espectro objetivo con diferentes valores de GDD positiva final. Como vemos,

el espectro en  $z = L$ , aunque lejos de ser gaussiano, es bastante simétrico y presenta un único máximo central de intensidad. Como consecuencia, su evolución en propagación hacia atrás es análoga a la de los espectros gaussianos que estudiamos en la Sección 4.3: al aumentar el valor de la GDD positiva final, el ensanchamiento espectral inverso se contiene y se produce una redistribución de la energía hacia el pico central del espectro, pero sin desaparición de frecuencias. Además, en los casos de mayor GDD final, la envolvente temporal del pulso apenas varía.



**Figura 4.13:** (Izquierda) Espectro obtenido (naranja) tras propagar hacia delante un pulso gaussiano de 30 fs y 40  $\mu\text{J}$  centrado en 800 nm (azul) a través de una fibra hueca de 3 m de longitud y 125  $\mu\text{m}$  de radio rellena de Ar a 200 mbar. (Derecha) Evolución espectral (fila superior) y temporal (fila inferior) obtenida de la propagación hacia atrás del espectro en  $z = L$  del panel izquierdo con una fase cuadrática pura con diferentes valores de GDD positiva.

Aumentando la estructura del espectro en  $z = L$ , en la Fig. 4.14 se muestran los resultados obtenidos para un pulso gaussiano de partida de 50  $\mu\text{J}$  que se propaga a través de una fibra hueca rellena de Ar a 800 mbar. En este caso, el espectro objetivo a la salida de la fibra presenta una amplitud más compleja con cuatro máximos de intensidad. Sin embargo, su propagación hacia atrás con fase cuadrática pura no supone ninguna mejora con respecto a los resultados anteriores. De forma similar, al aumentar el valor de la GDD positiva final, se frena el ensanchamiento espectral inverso y la energía se redistribuye hacia los picos de mayor intensidad del espectro, fundamentalmente hacia los dos laterales, pero sin generación ni destrucción de frecuencias. Además, la estructura temporal de la envolvente se vuelve muy compleja y el pulso se separa en varios picos, con un perfil en  $z = L$  que se parece cada vez más al espectro de salida.

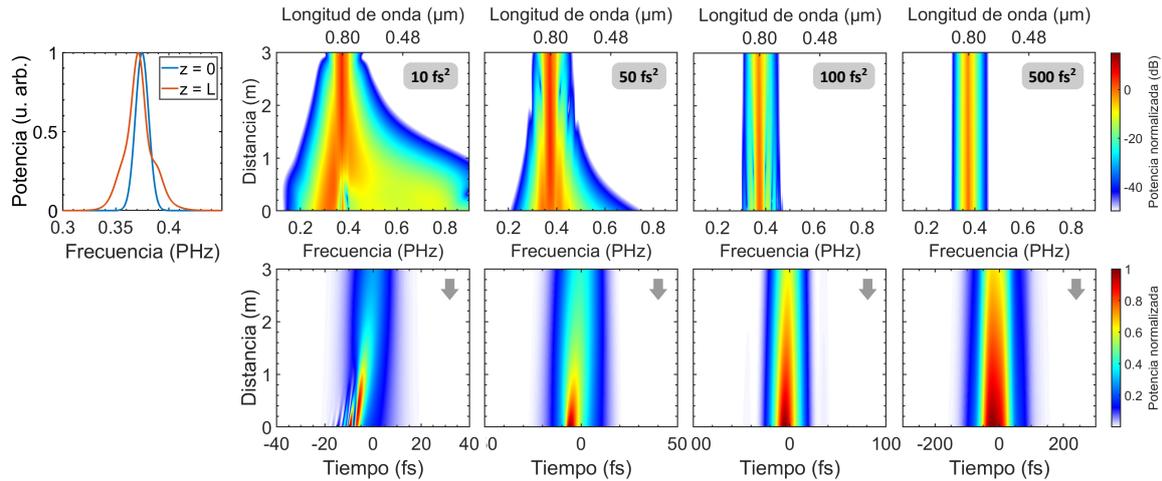


**Figura 4.14:** (Izquierda) Espectro obtenido (naranja) tras propagar hacia delante un pulso gaussiano de 30 fs y 50  $\mu\text{J}$  centrado en 800 nm (azul) a través de una fibra hueca de 3 m de longitud y 125  $\mu\text{m}$  de radio rellena de Ar a 800 mbar. (Derecha) Evolución espectral (fila superior) y temporal (fila inferior) obtenida de la propagación hacia atrás del espectro en  $z = L$  del panel izquierdo con una fase cuadrática pura con diferentes valores de GDD positiva.

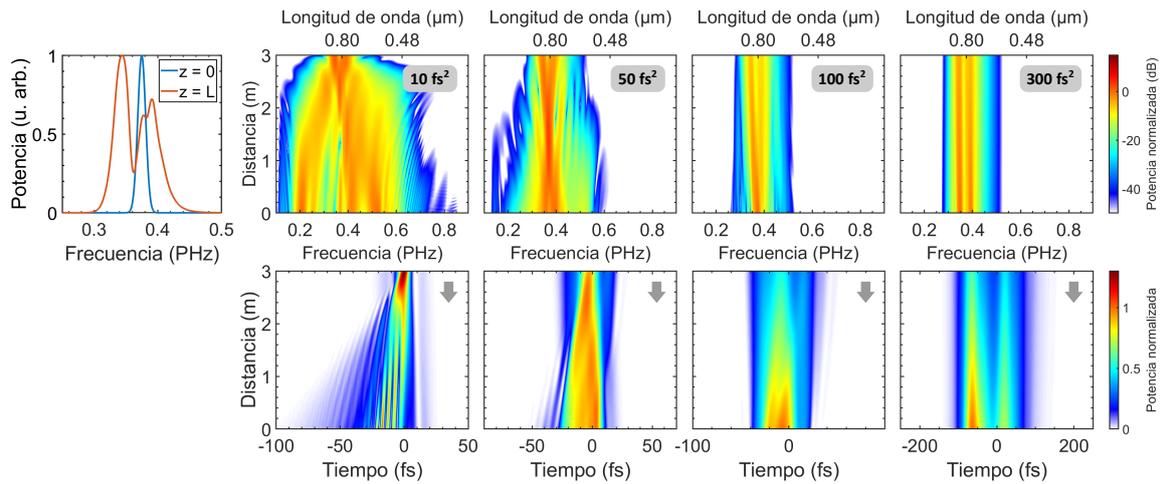
#### 4.4.2. Efectos de la dispersión Raman estimulada

Dado que al aumentar la GDD final de los espectros modulados en  $z = L$  los pulsos objetivo correspondientes también se estiran temporalmente, es posible que el SRS pueda jugar un papel relevante en la propagación hacia atrás en gases moleculares, ya que para pulsos largos la respuesta no lineal retardada del medio puede empezar a solaparse con el propio pulso. Para comprobar si este término podría ayudar a conseguir un estrechamiento espectral inverso útil, repetimos el mismo procedimiento que en la sección anterior pero en una fibra hueca rellena de  $\text{N}_2$ .

De forma análoga a lo que hicimos en el Ar, comenzamos propagando hacia delante un pulso gaussiano de 30 fs centrado en 800 nm a través de una fibra hueca de 3 m de longitud y 125  $\mu\text{m}$  de radio rellena de  $\text{N}_2$ . Esto lo hacemos para dos combinaciones diferentes de la energía por pulso y la presión del gas para generar dos espectros objetivo diferentes en  $z = L$ : uno bastante simétrico y otro con una amplitud más modulada. A continuación, sustituimos la fase de estos espectros por una fase cuadrática con GDD positiva pura y los propagamos hacia atrás en las mismas condiciones. En las Figs. 4.15 y 4.16 se representan los resultados obtenidos para un pulso gaussiano de partida de 70  $\mu\text{J}$  propagándose a través de una fibra hueca rellena de  $\text{N}_2$  a 200 mbar y



**Figura 4.15:** (Izquierda) Espectro obtenido (naranja) tras propagar hacia delante un pulso gaussiano de 30 fs y 70  $\mu\text{J}$  centrado en 800 nm (azul) a través de una fibra hueca de 3 m de longitud y 125  $\mu\text{m}$  de radio rellena de  $\text{N}_2$  a 200 mbar. (Derecha) Evolución espectral (fila superior) y temporal (fila inferior) obtenida de la propagación hacia atrás del espectro en  $z = L$  del panel izquierdo con una fase cuadrática pura con diferentes valores de GDD positiva.



**Figura 4.16:** (Izquierda) Espectro obtenido (naranja) tras propagar hacia delante un pulso gaussiano de 30 fs y 50  $\mu\text{J}$  centrado en 800 nm (azul) a través de una fibra hueca de 3 m de longitud y 125  $\mu\text{m}$  de radio rellena de  $\text{N}_2$  a 1000 mbar. (Derecha) Evolución espectral (fila superior) y temporal (fila inferior) obtenida de la propagación hacia atrás del espectro en  $z = L$  del panel izquierdo con una fase cuadrática pura con diferentes valores de GDD positiva.

para un pulso gaussiano de 50  $\mu\text{J}$  propagándose en  $\text{N}_2$  a 1000 mbar, respectivamente. En los casos de mayor GDD positiva final, al añadir el término de SRS, comprobamos que las simulaciones numéricas se hacen unas cincuenta veces más lentas que con el SRS apagado. Por tanto, este proceso no lineal sí se hace relevante en la propagación hacia atrás de pulsos largos. Sin embargo, los resultados obtenidos en  $\text{N}_2$  son prácticamente idénticos a los obtenidos en Ar y el SRS apenas produce un desplazamiento casi

inapreciable del espectro en  $z = 0$  hacia frecuencias ligeramente mayores. Así pues, podemos concluir que el término de SRS no introduce ninguna mejora en el régimen que estamos estudiando para conseguir estrechamientos espectrales hacia atrás útiles.

### 4.4.3. Efectos de la dispersión de orden alto

Hasta el momento, hemos estudiado exclusivamente la propagación inversa de espectros con fase plana o cuadrática pura. En el primer caso, hemos demostrado que, si la no linealidad domina, es imposible conseguir que el espectro de partida en  $z = 0$  sea más estrecho que el espectro objetivo en  $z = L$ . Añadiendo GDD positiva al espectro final, hemos encontrado situaciones en las que el espectro inicial puede ser más estrecho, lo cual comienza a parecerse a lo que sería más deseable en un experimento de post-compresión. Sin embargo, esta aproximación tan sencilla de la fase en  $z = L$  produce, al propagar hacia atrás, situaciones de partida muy complejas y singulares, especialmente en los casos en los que el espectro objetivo presenta modulaciones de amplitud por SPM. Además, hemos comprobado que esta estrategia no permite reducir la duración del pulso límite de Fourier del espectro de partida, ya que solo produce una redistribución de la energía en el espectro.

El siguiente paso lógico consiste en añadir más términos de dispersión a la fase del espectro objetivo, para comprobar si de esta forma es posible encontrar situaciones verdaderamente útiles y realizables al propagarlo hacia atrás. En este sentido, lo más interesante sería que la fase final del espectro en  $z = L$  fuese igual y de signo opuesto a la que pudiese introducir posteriormente un compresor conocido, para que, tras el ensanchamiento espectral en la fibra, la compensación de la fase en el compresor fuese perfecta y se obtuviera finalmente un pulso límite de Fourier. Por tanto, para concluir nuestro trabajo, probamos a propagar hacia atrás espectros modulados con una fase contraria a la que introducirían diferentes tipos de compresores de los que se conoce el primer término de dispersión de orden alto.

Para ello, consideramos un compresor de doble par de prismas, de doble par de redes de difracción o una combinación de ambos. En la Fig. B.1 podemos ver un esquema simplificado de este tipo de compresores. Como parámetros típicos consideramos que los prismas son equiláteros, están fabricados de BK7 y que el tamaño del haz sobre

el primer prisma del compresor es de 2 mm. Así mismo, suponemos que la redes de difracción tienen 600 líneas por milímetro y que el ángulo de incidencia es de  $45^\circ$ . En estas condiciones, la GDD y TOD de cada uno de estos compresores vienen dadas por:

$$\text{Prismas} \rightarrow \begin{cases} \text{GDD}_p(\text{fs}^2) = 116.188 - 9.0897L_p \\ \text{TOD}_p(\text{fs}^3) = 246.872 - 35.8614L_p \end{cases} \quad (4.15)$$

$$\text{Redes} \rightarrow \begin{cases} \text{GDD}_g(\text{fs}^2) = -7067.7L_g \\ \text{TOD}_g(\text{fs}^3) = 3.14646 \times 10^5 L_g \end{cases} \quad (4.16)$$

siendo  $L_p$  y  $L_g$  las distancias en centímetros entre los prismas o las redes de difracción de cada par, respectivamente. Estas expresiones han sido derivadas a partir de las fórmulas generales dadas en [8], que pueden también consultarse en el Anexo B.5.

Para analizar los efectos de la dispersión de orden alto en  $z = L$ , simulamos la propagación hacia atrás de los dos espectros objetivo más modulados obtenidos en Ar en la Sección 4.4.1 y en  $N_2$  en la Sección 4.4.2 con una fase espectral opuesta a la que introduciría un compresor de doble par de prismas o una combinación de prismas y redes de difracción. De acuerdo con resultados anteriores, escogemos configuraciones que proporcionen siempre una GDD negativa, opuesta a la GDD positiva que debe tener el espectro en  $z = L$  para que se estreche en propagación hacia atrás. Para analizar el papel de la dispersión de orden superior, permitimos también que estas configuraciones proporcionen TOD tanto positiva como negativa de diferente magnitud.

Por concreción y porque los resultados obtenidos no aportan nada nuevo a la física que presentamos, los resultados de las simulaciones realizadas en varios casos diferentes se muestran en las Figs. A.6 y A.7 del Anexo A. De nuevo encontramos que, incluso añadiendo un término de asimetría importante a la fase espectral en  $z = L$ , la propagación inversa del espectro objetivo es muy compleja y produce situaciones de partida muy extrañas y difíciles de reproducir. En algunos casos la TOD genera estructuras secundarias en los pulsos y en sus espectros (Fig. A.6). En otros, ayuda a concentrar la energía del espectro en un pico principal más estrecho (caso II de la Fig. A.6 y caso I de la Fig. A.7) o mejora la estructura temporal de los pulsos en  $z = 0$  (caso I de la Fig. A.7). En los casos más optimistas, la TOD comienza a producir una evolución

espectral hacia atrás más parecida a lo que uno esperaría de una propagación no lineal convencional (caso II de la Fig. A.7). No obstante, los resultados aún están muy lejos de parecerse a algo realista y está claro que habría que añadir muchos más términos de dispersión de orden alto a la fase espectral en  $z = L$  para dar con alguna situación interesante. Todos estos resultados ponen de manifiesto la complejidad de la fase no lineal y su importancia en la propagación.

## 5. Conclusiones

En este trabajo hemos desarrollado un código numérico que resuelve en sentido inverso la ecuación de propagación no lineal de pulsos ultracortos en fibras huecas rellenas de gas, con el objetivo de utilizarlo para optimizar el proceso de post-compresión en este tipo de esquemas. Con él hemos simulado la propagación no lineal hacia atrás de espectros finales óptimos con fase plana, con una amplitud sencilla y una fase cuadrática pura, o con una amplitud realista modulada por SPM y una fase simple con pocos términos de dispersión que se pudiera compensar perfectamente en un compresor habitual formado por espejos multicapa, prismas o redes de difracción.

En el primer caso, hemos demostrado que, si la no linealidad domina, es imposible conseguir que el espectro a la entrada de la fibra sea más estrecho que el espectro objetivo a la salida de la misma, haciendo que en los esquemas de post-compresión habituales sea imposible que un pulso se auto-comprima en dispersión anómala hasta alcanzar exactamente un límite de Fourier partiendo de un espectro más estrecho que el final. En el resto de casos, hemos comprobado que, añadiendo GDD positiva al espectro objetivo, es posible encontrar situaciones en las que el espectro de partida sea más estrecho que el final, lo cual comienza a parecerse a lo que sería deseable en un experimento de post-compresión. Sin embargo, una aproximación sencilla de la fase final produce, al propagar hacia atrás, situaciones muy complejas y singulares. Además, esta estrategia no permite reducir apenas la duración mínima del pulso inicial, ya que solo produce una redistribución de la energía en el espectro. Aunque no se pueda aprovechar para la post-compresión de pulsos ultracortos, quizá esta idea sí pueda tener aplicaciones en el diseño a medida de espectros de supercontinuo.

Muchas de estas observaciones se pueden entender en términos de resultados bien conocidos de propagación no lineal hacia delante, debido a las simetrías fundamenta-

les de la ecuación de Schrödinger no lineal generalizada que describe la propagación. Así, en la mayoría de los casos que hemos estudiado, la propagación inversa de un pulso ha resultado ser físicamente equivalente a la inversión temporal complejo conjugada de su propagación no lineal hacia delante. Este hecho ha limitado considerablemente la aplicación de nuestro modelo de propagación hacia atrás para optimizar el proceso de post-compresión. Lo habitual en los experimentos es que la situación de partida sea sencilla y que la propagación no lineal genere, a la salida de la fibra, un espectro complejo, tanto en amplitud como en fase, debido a la interacción entre todos los procesos que intervienen en la propagación. Si entendemos que propagar hacia atrás es equivalente, entonces, de forma análoga, si pretendemos alcanzar una situación óptima sencilla a la salida de la fibra, la condición de partida debe ser necesariamente no lineal y difícil de realizar experimentalmente.

Por tanto, si queremos encontrar una dinámica realista en propagación hacia atrás que produzca una situación de partida que se pueda reproducir en el laboratorio, debemos plantear un pulso objetivo complicado. Pero esto es imposible de hacer mediante las técnicas habituales de ajuste de la fase espectral con pocos términos de dispersión. Tampoco sirve tomar un espectro generado en una propagación no lineal hacia delante y simplificar su fase o su amplitud, ya que ambas están estrechamente relacionadas por la no linealidad y son el resultado de una interacción única y compleja entre todos los procesos implicados en la propagación que, en principio, desconocemos.

Así pues, el modelo de propagación no lineal hacia atrás sirve para encontrar el pulso de partida incógnita que produce, tras su propagación no lineal en una determinada fibra hueca cuyos parámetros son conocidos, una situación final también conocida, ya que la ecuación de propagación no lineal se puede invertir de forma determinista. Sin embargo, no es útil para optimizar el proceso de post-compresión debido a nuestra incapacidad para proponer una situación final que sea compleja y verdaderamente no lineal, y que a la vez consideremos sencilla y óptima. Cualquier pulso objetivo que planteemos generará, previsiblemente, una situación de partida imposible de reproducir experimentalmente con la precisión necesaria como para que, al propagarla hacia delante, resulte finalmente en nuestro objetivo ideal.

# Bibliografía

- [1] M. Maiuri, M. Garavelli, and G. Cerullo, “Ultrafast spectroscopy: state of the art and open challenges,” *J. Am. Chem. Soc.* **142**(1), 3–15 (2019).
- [2] G. Sansone, E. Benedetti, F. Calegari, C. Vozzi, L. Avaldi, R. Flammini, L. Poletto, P. Villoresi, C. Altucci, R. Velotta, S. Stagira, S. De Silvestri, and M. Nisoli, “Isolated single-cycle attosecond pulses,” *Science* **314**(5798), 443–336 (2006).
- [3] P. B. Corkum, and F. Krausz, “Attosecond science,” *Nat. Phys.* **3**(6), 381–387 (2007).
- [4] T. Nagy, P. Simon, and L. Veisz, “High-energy few-cycle pulses: post-compression techniques,” *Adv. Phys.: X* **6**(1), 1845795 (2020).
- [5] R. A. Fisher, P. L. Kelley, and T. K. Gustafson, “Subpicosecond pulse generation using the optical Kerr effect,” *Appl. Phys. Lett.* **14**(4), 140–143 (1969).
- [6] M. Nisoli, S. De Silvestri, and O. Svelto, “Generation of high energy 10 fs pulses by a new pulse compression technique,” *Appl. Phys. Lett.* **68**(20), 2793–2795 (1996).
- [7] D. Grischkowsky, and A. C. Balant, “Optical pulse compression based on enhanced frequency chirping,” *Appl. Phys. Lett.* **41**(1), 1–3 (1982).
- [8] R. L. Fork, C. H. Brito Cruz, P. C. Becker, and C. V. Shank, “Compression of optical pulses to six femtoseconds by using cubic phase compensation,” *Opt. Lett.* **12**(7), 483–485 (1987).
- [9] J. C. Travers, W. Chang, J. Nold, N. Y. Joly, and P. St. J. Russell, “Ultrafast nonlinear optics in gas-filled hollow-core photonic crystal fibers,” *J. Opt. Soc. Am. B* **28**(12), A11–A26 (2011).

- [10] E. C. Jarque, J. San Roman, F. Silva, R. Romero, W. Holgado, M. A. Gonzalez-Galicia, B. Alonso, I. J. Sola, and H. Crespo, “Universal route to optimal few- to single-cycle pulse generation in hollow-core fiber compressors,” *Sci. Reports* **8**(1), 2256 (2018).
- [11] J. C. Travers, T. F. Grigorova, C. Brahms, and F. Belli, “High-energy pulse self-compression and ultraviolet generation through soliton dynamics in hollow capillary fibres,” *Nat. Photonics* **13**(8), 547–554 (2019).
- [12] L.F. Mollenauer, R.H. Stolen, J.P. Gordon, and W.J. Tomlinson, “Extreme picosecond pulse narrowing by means of soliton effect in single-mode optical fibers,” *Opt. Lett.* **8**(5), 289–291 (1983).
- [13] A. Suda, M. Hatayama, K. Nagasaka, and K. Midorikawa, “Generation of sub-10-fs, 5-mJ-optical pulses using a hollow fiber with a pressure gradient,” *Appl. Phys. Lett.* **86**(11), 111116 (2005).
- [14] M. F. Galán, E. C. Jarque, and J. San Roman, “Optimization of pulse self-compression in hollow capillary fibers using decreasing pressure gradients,” *Opt. Express* **30**(5), 6755–6767 (2022).
- [15] T. Nagy, V. Pervak, and P. Simon, “Optimal pulse compression in long hollow fibers,” *Opt. Lett.* **36**(22), 4422–4424 (2011).
- [16] X. Chen, A. Jullien, A. Malvache, L. Canova, A. Borot, A. Trisorio, C. G. Durfee, and R. Lopez-Martens, “Generation of 4.3 fs, 1 mJ laser pulses via compression of circularly polarized pulses in a gas-filled hollow-core fiber,” *Opt. Lett.* **34**(10), 1588–1590 (2009).
- [17] F. Silva, B. Alonso, W. Holgado, R. Romero, J. San Roman, E. C. Jarque, H. Koop, V. Pervak, H. Crespo, and I. J. Sola, “Strategies for achieving intense single-cycle pulses with in-line post-compression setups,” *Opt. Lett.* **43**(2), 337–340 (2018).
- [18] E. Haddad, R. Safaei, A. Leblanc, R. Piccoli, Y.-G. Jeong, H. Ibrahim, B. E. Schmidt, R. Morandotti, L. Razzari, F. Légaré, and P. Lassonde, “Molecular gases for pulse compression in hollow core fibers,” *Opt. Express* **26**(19), 25426–25436 (2018).

- [19] J. E. Beetar, M. Nrisimhamurty, T.-C. Truong, G. C. Nagar, Y. Liu, J. Nesper, O. Suarez, F. Rivas, Y. Wu, B. Shim, and M. Chini, “Multioctave supercontinuum generation and frequency conversion based on rotational nonlinearity,” *Sci. Adv.* **6**(34), eabb5375 (2020).
- [20] F. Böhle, M. Kretschmar, A. Jullien, M. Kovacs, M. Miranda, R. Romero, H. Crespo, U. Morgner, P. Simon, R. Lopez-Martens, and T. Nagy, “Compression of CEP-stable multi-mJ laser pulses down to 4 fs in long hollow fibers,” *Laser Phys. Lett.* **11**(9), 095401 (2014).
- [21] T. Nagy, M. Kretschmar, M. J. J. Vrakking, and A. Rouzée, “Generation of above-TW 1.5-cycle visible pulses at 1 kHz by post-compression in a hollow fiber,” *Opt. Lett.* **45**(12), 3313–3316 (2020).
- [22] L. Salmela, N. Tsipinakis, A. Foi, C. Billet, J. M. Dudley, and G. Genty, “Predicting ultrafast nonlinear dynamics in fibre optics with a recurrent neural network,” *Nat. Mach. Intell.* **3**(4), 344–354 (2021).
- [23] Y. Gao, X. Wang, X. Zhu, K. Zhao, H. Liu, Z. Wang, S. Fang, and Z. Wei, “Quantification and analysis of the nonlinear effects in spectral broadening through solid medium of femtosecond pulses by neural network,” *Phys. Rev. Res.* **4**(1), 013035 (2022).
- [24] H. Sui, H. Zhu, L. Cheng, B. Luo, S. Taccheo, X. Zou, and L. Yan, “Deep learning based pulse prediction of nonlinear dynamics in fiber optics,” *Opt. Express* **29**(26), 44080–44092 (2021).
- [25] M. Tsang, D. Psaltis, and F. G. Omenetto, “Reverse propagation of femtosecond pulses in optical fibers,” *Opt. Lett.* **28**(20), 1873–1875 (2003).
- [26] G. P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics*, 6th ed. (Academic Press, 2019).
- [27] R. W. Boyd, *Nonlinear Optics*, 3rd ed. (Academic Press, 2008).
- [28] T. Brabec, and F. Krausz, “Nonlinear optical pulse propagation in the single-cycle regime,” *Phys. Rev. Lett.* **78**(17), 3282–3285 (1997).

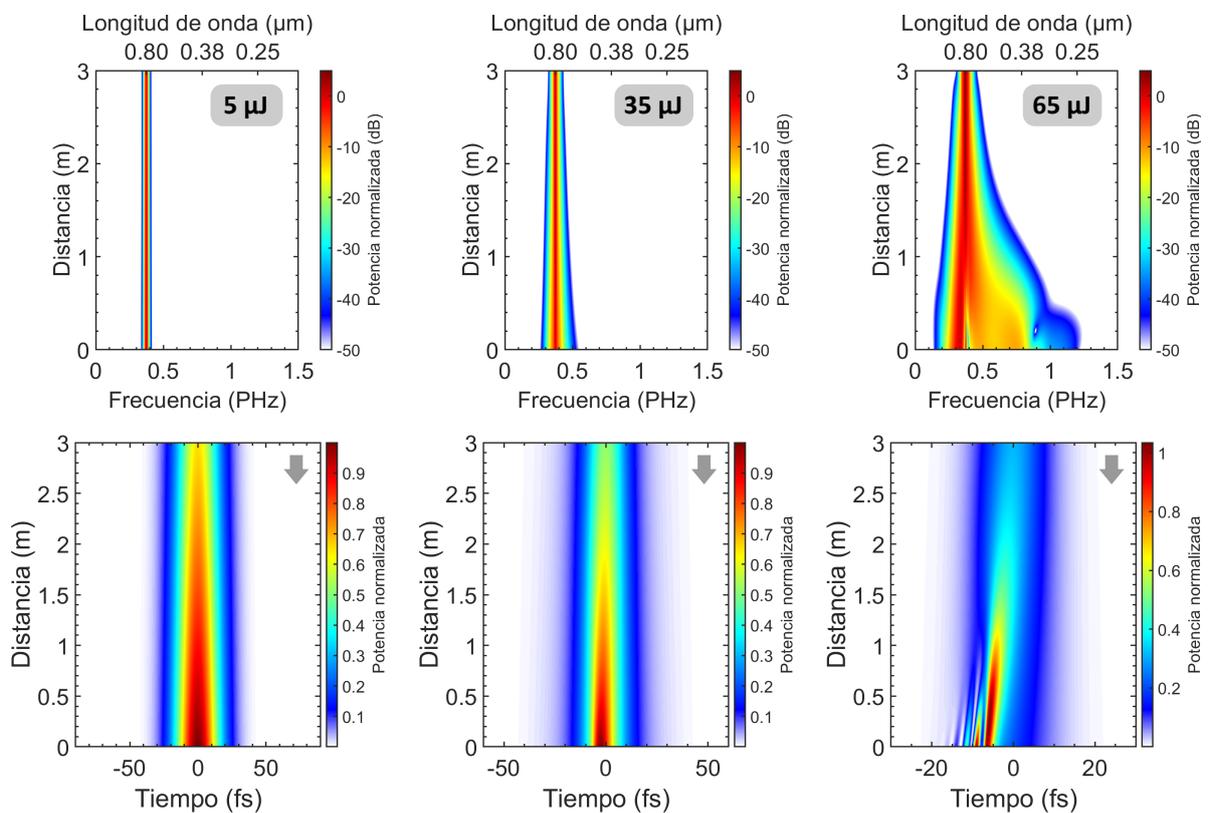
- [29] L. Bergé, S. Skupin, R. Nuter, J. Kasparian, and J. P. Wolf, “Ultrashort filaments of light in weakly ionized, optically transparent media,” *Rep. Prog. Phys.* **70**(10), 1633–1713 (2007).
- [30] A. Couairon, and A. Mysyrowicz, “Femtosecond filamentation in transparent media,” *Phys. Rep.* **441**(2–4), 47–189 (2007).
- [31] P. A. Carpeggiani, G. Coccia, G. Fan, E. Kaksis, A. Pugzlys, A. Baltuska, R. Piccoli, Y. G. Jeong, A. Rovere, R. Morandotti, L. Razzari, B. E. Schmidt, A. A. Voronin, and A. M. Zheltikov, “Extreme Raman red shift: ultrafast multimode nonlinear space-time dynamics, pulse compression, and broadly tunable frequency conversion,” *Optica* **7**(10), 1349–1354 (2020).
- [32] F. Belli, A. Abdolvand, W. Chang, J. C. Travers, and P. St. J. Russell, “Vacuum-ultraviolet to infrared supercontinuum in hydrogen-filled photonic crystal fiber,” *Optica* **2**(4), 292–300 (2015).
- [33] A. Sagiv, A. Ditkowski, R. H. Goodman, and G. Fibich, “Loss of physical reversibility in reversible systems,” *Physica D* **410**, 132515 (2020).
- [34] J. Hult, “A fourth-order Runge-Kutta in the interaction picture method for simulating supercontinuum generation in optical fibers,” *J. Lightwave Technol.* **25**(12), 3770–3775 (2007).
- [35] A. M. Heidt, “Efficient adaptive step size method for the simulation of supercontinuum generation in optical fibers,” *J. Lightwave Technol.* **27**(18), 3984–3991 (2009).
- [36] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical Recipes* (Cambridge University Press, 2007).
- [37] R. Deiterding, R. Glowinski, H. Oliver, and S. Poole, “A reliable split-step Fourier method for the propagation equation of ultra-fast pulses in single-mode optical fibers,” *J. Lightwave Technol.* **31**(12), 2008–2017 (2013).

- [38] E. A. J. Marcatili, and R. A. Schmelzter, “Hollow metallic and dielectric waveguides for long distance optical transmission and lasers,” *Bell Syst. Tech. J.* **43**(4), 1783–1809 (1964).
- [39] A. Börzsönyi, Z. Heiner, M. P. Kalashnikov, A. P. Kovács, and K. Osvay, “Dispersion measurement of inert gases and gas mixtures at 800 nm,” *Appl. Opt.* **47**(27), 4856–4863 (2008).
- [40] D. Wang, Y. Leng, and Z. Xu, “Measurement of nonlinear refractive index coefficient of inert gases with hollow-core fiber,” *Appl. Phys. B* **111**(3), 447–452 (2013).
- [41] V. Lorient, E. Hertz, O. Faucher, and B. Lavorel, “Measurement of high order Kerr refractive index of major air components,” *Opt. Express* **17**(16), 13429–13434 (2009).
- [42] G. Fibich, and A. L. Gaeta, “Critical power for self-focusing in bulk media and in hollow waveguides,” *Opt. Lett.* **25**(5), 335–337 (2000).
- [43] M. Oberthaler, and R. A. Höpfel, “Special narrowing of ultrashort laser pulses by self-phase modulation in optical fibers,” *Appl. Phys. Lett.* **63**(8), 1017–1019 (1993).
- [44] S. S. Rao, “Finite difference methods,” in *Encyclopedia of Vibration*, S. Braun, ed. (Academic Press, 2001), pp. 520–530.
- [45] B. R. Washburn, J. A. Buck, and S. E. Ralph, “Transform-limited spectral compression due to self-phase modulation in fibers,” *Opt. Lett.* **25**(7), 445–447 (2000).
- [46] E. R. Andresen, J. Thøgersen, and S. R. Keiding, “Spectral compression of femtosecond pulses in photonic crystal fibers,” *Opt. Lett.* **30**(15), 2025–2027 (2005).
- [47] C. Finot, and S. Boscolo, “Design rules for nonlinear spectral compression in optical fibers,” *J. Opt. Soc. Am. B* **33**(4), 760–767 (2016).
- [48] N. Daher, F. Guichard, X. Délen, Y. Zaouter, M. Hanna, and P. Georges, “Spectral compression in a multipass cell,” *Opt. Express* **28**(15), 21571–21577 (2020).

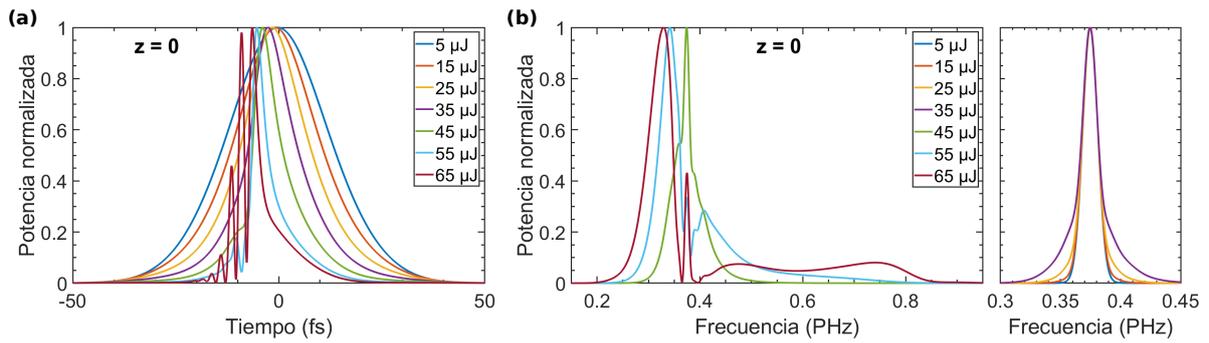


# Anexo A

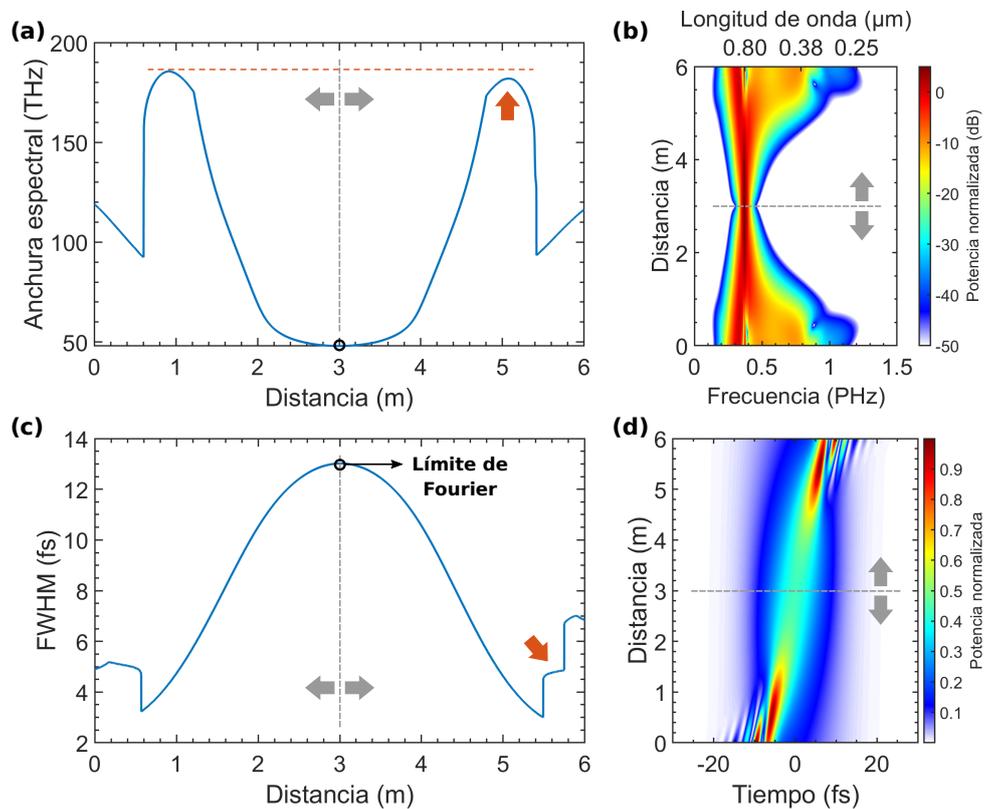
## Figuras suplementarias



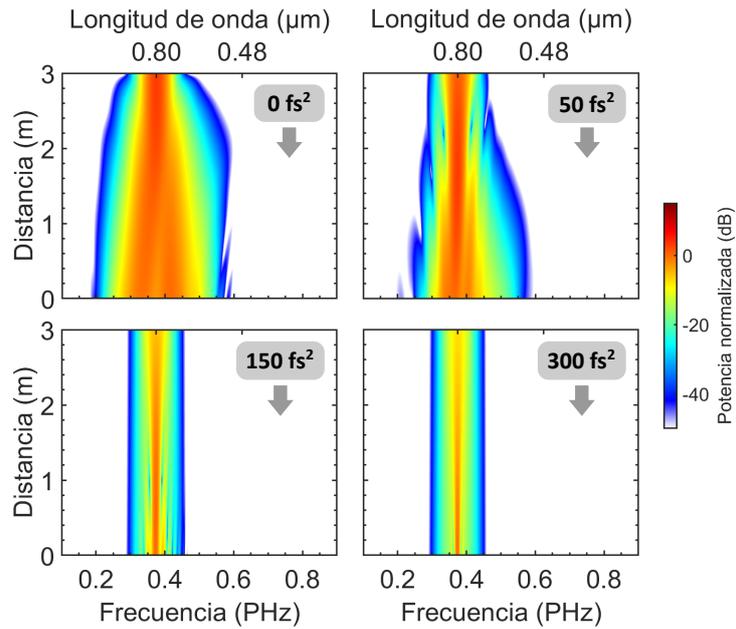
**Figura A.1:** Evolución espectral (fila superior) y temporal (fila inferior) completa obtenida de la propagación inversa del pulso límite de Fourier correspondiente al espectro generado al propagar hacia delante un pulso gaussiano de 30 fs centrado en 800 nm con diferentes energías por el interior de una fibra hueca de 3 m de longitud y 125  $\mu\text{m}$  de radio rellena de  $\text{N}_2$  a una presión de 200 mbar. En todos los casos la potencia está normalizada con respecto a su valor máximo a la entrada de la fibra.



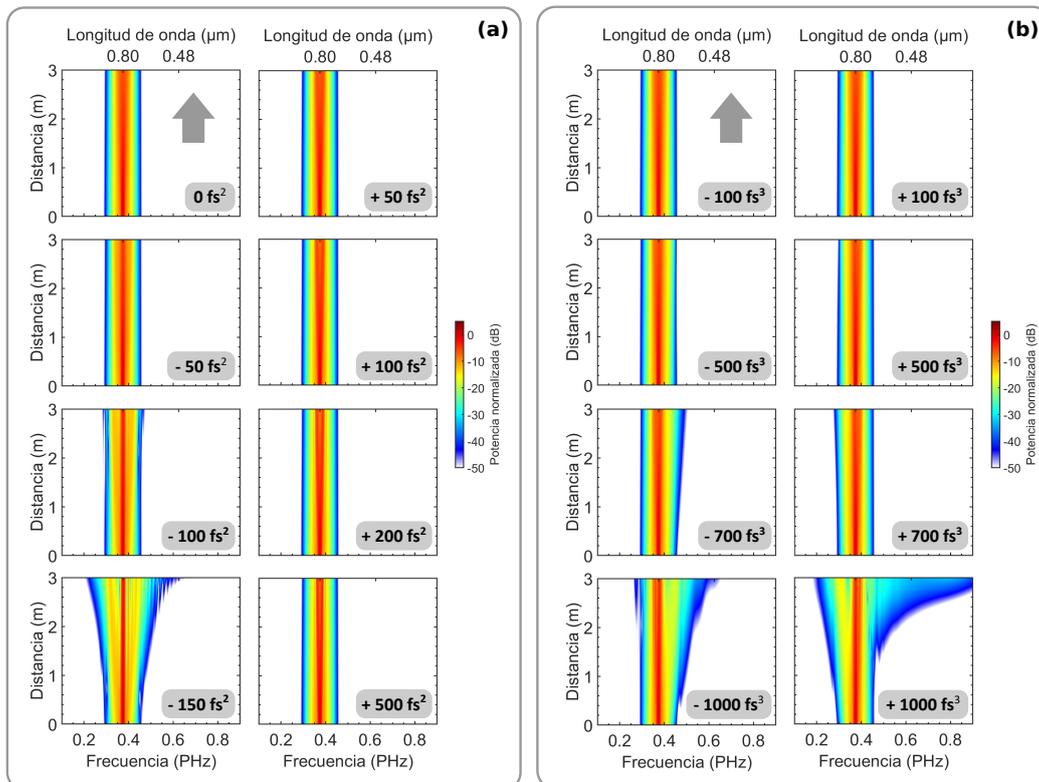
**Figura A.2:** (a) Pulsos y (b) sus espectros correspondientes obtenidos a la entrada de una fibra hueca de 3 m de longitud y 125  $\mu\text{m}$  de radio rellena de  $\text{N}_2$  a 200 mbar tras propagar hacia atrás el pulso límite de Fourier objetivo del espectro generado al final de la propagación hacia delante de un pulso de partida gaussiano de 30 fs centrado en 800 nm con diferentes energías. El panel derecho de (b) muestra ampliada la región en torno a 800 nm (0.375 PHz) con los espectros obtenidos en las cuatro situaciones de menor energía.



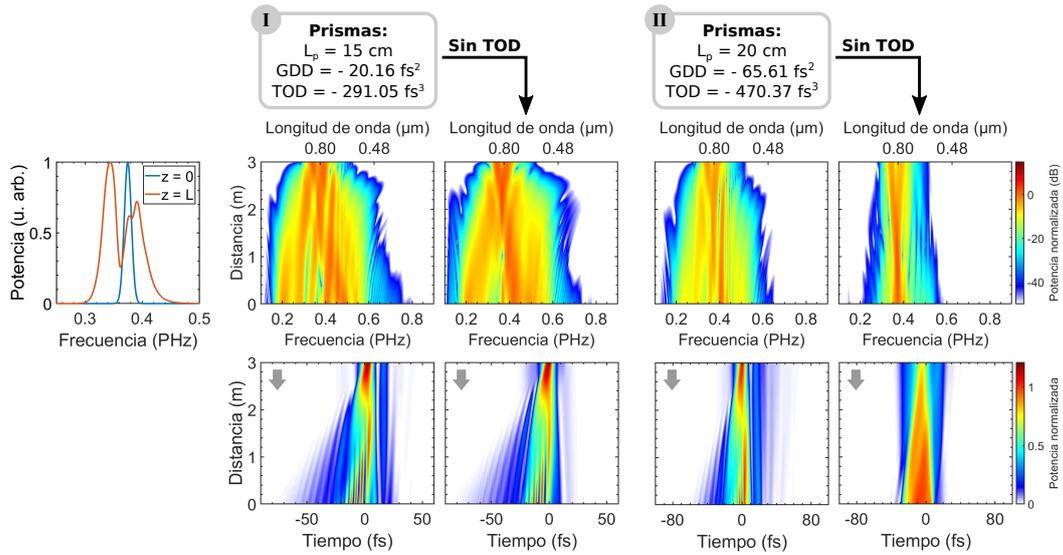
**Figura A.3:** (a) Evolución de la anchura a  $1/e^2$  de la intensidad espectral durante la propagación hacia delante y hacia atrás (desde  $z = 3$  m) del pulso límite de Fourier correspondiente al espectro generado tras propagar hacia delante un pulso gaussiano de 30 fs y 55  $\mu\text{J}$  centrado en 800 nm por una fibra hueca de 3 m de longitud y 125  $\mu\text{m}$  de radio rellena de  $\text{N}_2$  a 200 mbar eliminando el término de absorción lineal de todas las simulaciones. (b) Dinámica espectral completa, (c) evolución de la duración temporal a mitad de altura de la intensidad (FWHM) y (d) dinámica temporal completa correspondientes. En (b) y en (d) la potencia está normalizada con respecto a su valor máximo a la entrada de la fibra. La flechas naranjas en (a) y en (c) indican los puntos donde mejor se aprecia la pérdida de simetría por SRS.



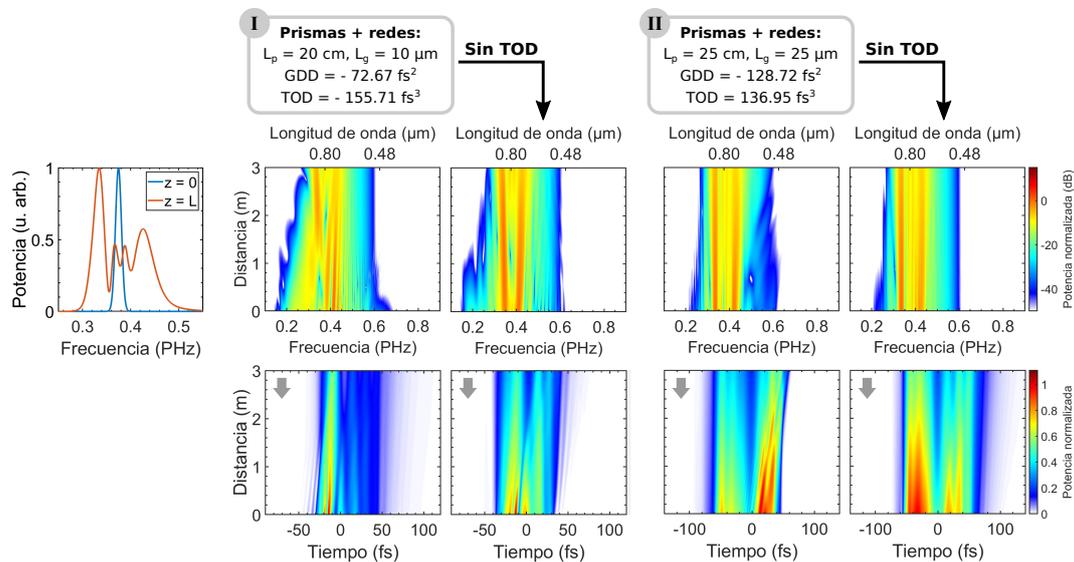
**Figura A.4:** Evolución espectral obtenida de propagar hacia atrás en una fibra hueca de  $125 \mu\text{m}$  de radio rellena de Ar a 800 mbar un espectro gaussiano centrado en 800 nm, cuyo pulso límite de Fourier tendría una duración de 10 fs, en función del valor de la GDD al final de la fibra. En todos los casos, la potencia pico de los pulsos correspondientes es de  $0.5 \text{ GW} \approx P_{\text{cr}}/20$ .



**Figura A.5:** Evolución espectral obtenida de propagar a través de un fibra hueca de  $125 \mu\text{m}$  de radio rellena de Ar a 200 mbar el espectro teórico completo del panel superior derecho de la Fig. 4.8 con diferentes perturbaciones (a) de GDD y (b) de TOD añadidas sobre la fase espectral ideal en  $z = 0$ .



**Figura A.6:** (Izquierda) Espectro obtenido (naranja) tras propagar hacia delante un pulso gaussiano de 30 fs y 50  $\mu\text{J}$  centrado en 800 nm (azul) a través de una fibra hueca de 3 m de longitud y 125  $\mu\text{m}$  de radio rellena de  $\text{N}_2$  a 1000 mbar. (Derecha) Evolución espectral (fila superior) y temporal (fila inferior) obtenida de la propagación hacia atrás del espectro en  $z = L$  del panel izquierdo con una fase igual y de signo contrario a la que introduciría un compresor de doble par de prismas en dos configuraciones diferentes. En cada uno de los dos casos se muestran también los resultados obtenidos de la propagación inversa con GDD final pura para comprobar las diferencias que supone incluir el primer término de dispersión de orden alto (TOD).



**Figura A.7:** (Izquierda) Espectro obtenido (naranja) tras propagar hacia delante un pulso gaussiano de 30 fs y 50  $\mu\text{J}$  centrado en 800 nm (azul) a través de una fibra hueca de 3 m de longitud y 125  $\mu\text{m}$  de radio rellena de Ar a 800 mbar. (Derecha) Evolución espectral (fila superior) y temporal (fila inferior) obtenida de la propagación hacia atrás del espectro en  $z = L$  del panel izquierdo con una fase igual y de signo contrario a la que introduciría un compresor de doble par de prismas y doble par de redes de difracción en dos configuraciones diferentes. En cada uno de los dos casos se muestran también los resultados obtenidos de la propagación inversa con GDD final pura para comprobar los efectos de la TOD.

# Anexo B

## Métodos numéricos

### B.1. Algoritmo numérico RK4IP

El algoritmo de Runge-Kutta de cuarto orden en la representación de interacción fue desarrollado por Hult en 2007 [34] y constituye uno de los métodos más eficientes para resolver la GNLSE, con un error global de orden cuatro en el paso  $h$  con el que se avanza la solución. En el RK4IP, los efectos lineales contenidos en  $\hat{D}$  se separan de los términos no lineales en  $\hat{N}[A(z, T)]$  transformando la GNLSE a una imagen de interacción, similar a como se hace en mecánica cuántica. El algoritmo se puede aplicar por igual a la ecuación (3.1) o a su inversa (3.6). Por simplicidad, explicamos a continuación cómo se emplea para resolver la GNLSE en el sentido de propagación hacia delante, pero su implementación en el modelo de propagación hacia atrás es idéntica sin más que invertir el sentido de avance de la coordenada  $z$  y los signos de los operadores  $\hat{D}$  y  $\hat{N}$ . Comenzamos escribiendo la envolvente del pulso  $A(z, T)$  en la representación de interacción como:

$$A_I = \exp\left(-(z - z')\hat{D}\right)A \quad (\text{B.1})$$

siendo  $z'$  la distancia entre la imagen de interacción y la normal, que se escoge de forma adecuada para simplificar los cálculos. Derivando en esta expresión y sustituyendo (3.1) obtenemos la ecuación diferencial que debe satisfacer  $A_I$ :

$$\frac{\partial A_I}{\partial z} = \hat{N}_I[z, A_I]A_I \quad (\text{B.2})$$

donde  $\hat{N}_I$  es el operador no lineal en la nueva representación y tiene la forma:

$$\hat{N}_I[z, A_I] = \exp(-(z-z')\hat{D}) \underbrace{\hat{N}[\exp((z-z')\hat{D})A_I]}_{\hat{N}[A]} \exp((z-z')\hat{D}) \quad (\text{B.3})$$

Una vez que hemos conseguido factorizar la actuación de los operadores  $\hat{D}$  y  $\hat{N}$  sobre  $A(z, T)$ , la ecuación (B.2) se puede resolver utilizando métodos numéricos explícitos como el Runge-Kutta de cuarto orden [36]. Eligiendo  $z' = z+h/2$  para eliminar el operador  $\hat{D}$  de las dos trayectorias intermedias, el algoritmo que avanza un paso la solución  $A_I(z, T)$  a  $A_I(z+h, T)$  tiene entonces la siguiente forma:

$$A_I = \exp\left(\frac{h}{2}\hat{D}\right)A(z, T) \quad (\text{B.4})$$

$$k_1 = h\hat{N}_I[z, A_I]A_I = \exp\left(\frac{h}{2}\hat{D}\right)(h\hat{N}[A(z, T)])A(z, T) \quad (\text{B.5})$$

$$k_2 = h\hat{N}_I[z+h/2, A_I+k_1/2](A_I+k_1/2) = h\hat{N}[A_I+k_1/2](A_I+k_1/2) \quad (\text{B.6})$$

$$k_3 = h\hat{N}_I[z+h/2, A_I+k_2/2](A_I+k_2/2) = h\hat{N}[A_I+k_2/2](A_I+k_2/2) \quad (\text{B.7})$$

$$\begin{aligned} k_4 &= h\hat{N}_I[z+h, A_I+k_3](A_I+k_3) = \\ &= h\exp\left(-\frac{h}{2}\hat{D}\right)\hat{N}\left[\exp\left(\frac{h}{2}\hat{D}\right)(A_I+k_3)\right]\exp\left(\frac{h}{2}\hat{D}\right)(A_I+k_3) \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

$$A_I(z+h, T) = A_I + k_1/6 + k_2/3 + k_3/3 + k_4/6 \quad (\text{B.9})$$

Antes de empezar el siguiente paso hay que deshacer la transformación para devolver la envolvente a la representación normal:

$$\begin{aligned} A(z+h, T) &= \exp\left(\frac{h}{2}\hat{D}\right)A_I(z+h, T) = \exp\left(\frac{h}{2}\hat{D}\right)(A_I + k_1/6 + k_2/3 + k_3/3 + k_4/6) = \\ &= \exp\left(\frac{h}{2}\hat{D}\right)(A_I + k_1/6 + k_2/3 + k_3/3) + k'_4/6 \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

de manera que podemos evitar una evaluación del operador  $\hat{D}$  en (B.8) manteniendo la última trayectoria en la representación normal, calculando  $k'_4$  en lugar de  $k_4$ :

$$k'_4 = h\hat{N}\left[\exp\left(\frac{h}{2}\hat{D}\right)(A_I+k_3)\right]\left(\exp\left(\frac{h}{2}\hat{D}\right)(A_I+k_3)\right) \quad (\text{B.11})$$

De forma práctica, el operador exponencial  $\exp(h\hat{D}/2)$  se evalúa en el dominio de frecuencia de la siguiente forma:

$$\exp\left(\frac{h}{2}\hat{D}\right)A(z, T) = \mathcal{F}^{-1} \exp\left(\frac{h}{2}\hat{D}(\omega)\right)\mathcal{F}A(z, T) \quad (\text{B.12})$$

$$\hat{D}(\omega) = -\frac{\alpha(\omega)}{2} + i\left[\beta(\omega) - \beta^{(0)} - \beta^{(1)}(\omega - \omega_0)\right] \quad (\text{B.13})$$

donde  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{F}^{-1}$  denotan la transformada de Fourier y su inversa, respectivamente, y se calculan numéricamente utilizando el algoritmo de la transformada rápida de Fourier (FFT) [36]. El operador  $\hat{D}(\omega)$  anterior se obtiene sustituyendo las derivadas  $\partial/\partial T$  en (3.2) por  $-i(\omega - \omega_0)$  y deshaciendo el desarrollo en serie de Taylor de la constante de propagación en torno a la frecuencia central.

Por otra parte, el primer término del operador no lineal  $\hat{N}$  se evalúa directamente en el dominio del tiempo. La integral temporal responsable del SRS se resuelve de forma recursiva como se explica en el Anexo B.3. La derivada temporal responsable del *self-steepening* en el segundo término de  $\hat{N}$  se evalúa aplicándole transformadas de Fourier directas e inversas de forma independiente para transformarla en una multiplicación en el espacio de frecuencia, eliminando así los errores asociados a la discretización temporal [37]. De esta forma, la actuación del operador  $\hat{N}$  sobre la envolvente que aparece al calcular las  $k_i$  en el algoritmo RK4IP se convierte en:

$$\begin{aligned} \hat{N}[A]A = & i\gamma(1 - f_R)|A|^2A + i\gamma f_R A(z, T) \int_{-\infty}^T h_R(T - t')|A(z, t')|^2 dt' + \\ & -\frac{\gamma}{\omega_0} \mathcal{F}^{-1} \left[ -i\omega \mathcal{F} \left( (1 - f_R)|A|^2A + f_R A(z, T) \int_{-\infty}^T h_R(T - t')|A(z, t')|^2 dt' \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

## B.2. Algoritmo de paso adaptativo LEM

El método numérico RK4IP que hemos descrito hasta ahora utiliza un tamaño de paso  $h$  constante. Sin embargo, para reducir el tiempo de cálculo de las simulaciones y obtener una estimación del error cometido, se pueden utilizar algoritmos de paso adaptativo para ir seleccionando de forma eficiente el tamaño del paso según se calcula la solución. En nuestro caso, hemos combinado el RK4IP con el método LEM, que

se basa en una estimación del error local aplicando las técnicas de duplicación de cada paso y extrapolación local [35]. En el LEM, cada paso se lleva a cabo de dos formas independientes utilizando el RK4IP para avanzar la solución: primero como un solo paso completo para calcular una solución gruesa  $A_{\text{coarse}}$  y después como dos medios pasos para calcular una solución más precisa  $A_{\text{fine}}$ . La diferencia entre estos dos resultados proporciona una estimación del error local, que se puede aproximar como:

$$\delta = \frac{\|A_{\text{fine}} - A_{\text{coarse}}\|}{\|A_{\text{fine}}\|} \quad ; \quad \|A\| = \left( \int |A(z, T)|^2 dT \right)^{1/2} \quad (\text{B.15})$$

El tamaño del paso  $h$  se adapta entonces continuamente con el objetivo de que  $\delta$  permanezca en un intervalo  $(\delta_G, 2\delta_G)$ , siendo  $\delta_G$  un objetivo de error o tolerancia definido al comienzo del programa. Si  $\delta > 2\delta_G$  entonces la solución se descarta y la iteración se repite con un tamaño de paso mitad. Si  $\delta$  está en el rango  $(\delta_G, 2\delta_G)$ , el paso  $h$  se divide por  $2^{(1/\eta)}$  para la siguiente iteración. Y si  $\delta < \delta_G$  entonces  $h$  se multiplica por  $2^{(1/\eta)}$  para el próximo paso. El factor  $\eta$  está relacionado con el método particular que se utilice para calcular las dos soluciones en cada paso. En nuestro caso,  $\eta = 5$  para el algoritmo RK4IP. Una ventaja adicional del LEM es que permite construir una solución de orden superior  $A_{\eta+1}$  mediante una combinación lineal de las dos soluciones calculadas de forma independiente:

$$A_{\eta+1} = \frac{2^{\eta-1}}{2^{\eta-1} - 1} A_{\text{fine}} - \frac{1}{2^{\eta-1} - 1} A_{\text{coarse}} \quad (\text{B.16})$$

### B.3. Implementación numérica de la integral Raman

En esta sección describimos la implementación numérica de la integral que aparece en el operador no lineal y que es responsable del SRS. Considerando una función de respuesta Raman en forma de oscilador armónico amortiguado con dos tiempos característicos  $\tau_1$  y  $\tau_2$ , dicha integral se puede escribir como:

$$I_S = \int_{-\infty}^T \eta \exp\left(-\frac{T-t'}{\tau_2}\right) \text{sen}\left(\frac{T-t'}{\tau_1}\right) |A(z, t')|^2 dt' \quad \text{con} \quad \eta \equiv \frac{\tau_1^2 + \tau_2^2}{\tau_1 \tau_2^2} \quad (\text{B.17})$$

Numéricamente, el valor de la integral en el punto  $T_i$  del mallado temporal se pue-

de aproximar de manera simple por:

$$I_S[i] \approx \sum_{-T_{\max}}^{T_i} \eta \exp\left(-\frac{T_i - t'}{\tau_2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{T_i - t'}{\tau_1}\right) |A(z, t')|^2 \Delta T \quad (\text{B.18})$$

La forma más directa de resolver la integral en el programa es utilizando un doble bucle, uno para recorrer el sumatorio y otro para recorrer todos los puntos del intervalo temporal. Sin embargo, este método es muy lento, especialmente en Matlab. Otra forma mucho más eficiente de realizar el cálculo es hacerlo de forma recursiva, expresando la integral en cada punto del mallado temporal en función de la integral en los puntos anteriores. De esta forma se elimina el bucle que recorre continuamente el sumatorio. Para encontrar una regla de recurrencia, comenzamos escribiendo la integral  $I_S[i + 1]$  separando el último término de la suma:

$$\begin{aligned} I_S[i + 1] &= \sum_{-T_{\max}}^{T_i + \Delta T} \eta \exp\left(-\frac{T_i + \Delta T - t'}{\tau_2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{T_i + \Delta T - t'}{\tau_1}\right) |A(z, t')|^2 \Delta T = \\ &= \sum_{-T_{\max}}^{T_i} \eta \exp\left(-\frac{T_i + \Delta T - t'}{\tau_2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{T_i + \Delta T - t'}{\tau_1}\right) |A(z, t')|^2 \Delta T + \\ &\quad + \eta \exp(0) \operatorname{sen}(0) |A(z, T_i + \Delta T)|^2 \Delta T \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

A continuación, para relacionar este resultado con cálculos previos, separamos la exponencial en el producto de dos exponenciales y utilizamos  $\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen}(a) \cos(b) + \cos(a) \operatorname{sen}(b)$  para descomponer el seno de la suma:

$$\begin{aligned} I_S[i + 1] &= \sum_{-T_{\max}}^{T_i} \eta \exp\left(-\frac{T_i - t'}{\tau_2}\right) \exp\left(-\frac{\Delta T}{\tau_2}\right) |A(z, t')|^2 \Delta T \times \\ &\quad \times \left\{ \operatorname{sen}\left(\frac{T_i - t'}{\tau_1}\right) \cos\left(\frac{\Delta T}{\tau_1}\right) + \cos\left(\frac{T_i - t'}{\tau_1}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\Delta T}{\tau_1}\right) \right\} = \\ &= \exp\left(-\frac{\Delta T}{\tau_2}\right) \cos\left(\frac{\Delta T}{\tau_1}\right) I_S[i] + \exp\left(-\frac{\Delta T}{\tau_2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\Delta T}{\tau_1}\right) I_C[i] \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

Como vemos, la integral  $I_S[i + 1]$  se puede obtener a partir de la integral en el punto anterior  $I_S[i]$  y de una nueva integral  $I_C$  análoga a  $I_S$  pero con  $\cos(t/\tau_1)$  en lugar de  $\operatorname{sen}(t/\tau_1)$  en la función de respuesta Raman. Por tanto, para terminar debemos obtener

otra relación de recurrencia para calcular  $I_C$  de forma eficiente. Siguiendo el mismo procedimiento que antes obtenemos:

$$\begin{aligned}
I_C[i+1] &= \sum_{-T_{\max}}^{T_i} \eta \exp\left(-\frac{T_i + \Delta T - t'}{\tau_2}\right) \cos\left(\frac{T_i + \Delta T - t'}{\tau_1}\right) |A(z, t')|^2 \Delta T + \\
&\quad + \eta \exp(0) \cos(0) |A(z, T_i + \Delta T)|^2 \Delta T = \\
&= \sum_{-T_{\max}}^{T_i} \eta \exp\left(-\frac{T_i - t'}{\tau_2}\right) \exp\left(-\frac{\Delta T}{\tau_2}\right) |A(z, t')|^2 \Delta T \times \\
&\quad \times \left\{ \cos\left(\frac{T_i - t'}{\tau_1}\right) \cos\left(\frac{\Delta T}{\tau_1}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{T_i - t'}{\tau_1}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\Delta T}{\tau_1}\right) \right\} + \eta |A(z, T_i + \Delta T)|^2 \Delta T = \\
&= \exp\left(-\frac{\Delta T}{\tau_2}\right) \cos\left(\frac{\Delta T}{\tau_1}\right) I_C[i] - \exp\left(-\frac{\Delta T}{\tau_2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\Delta T}{\tau_1}\right) I_S[i] + \eta |A(z, T_i + \Delta T)|^2 \Delta T \quad (\text{B.21})
\end{aligned}$$

## B.4. Cálculo de los coeficientes de dispersión

Para calcular numéricamente los cuatro primeros coeficientes de dispersión que aparecen en el desarrollo en serie de Taylor de la fase espectral en torno a la frecuencia central  $\omega_0$  de un pulso, utilizamos las fórmulas de diferencias finitas centradas de orden alto, que vienen dadas por [44]:

$$\text{GD} = \left(\frac{d\phi}{d\omega}\right)_{\omega_0} \approx \frac{-\phi_2 + 8\phi_1 - 8\phi_{-1} + \phi_{-2}}{12\Delta\omega} \quad \text{con} \quad \phi_i = \phi(\omega_0 + i\Delta\omega) \quad (\text{B.22})$$

$$\text{GDD} = \left(\frac{d^2\phi}{d\omega^2}\right)_{\omega_0} \approx \frac{-\phi_2 + 16\phi_1 - 30\phi_0 + 16\phi_{-1} - \phi_{-2}}{12(\Delta\omega)^2} \quad (\text{B.23})$$

$$\text{TOD} = \left(\frac{d^3\phi}{d\omega^3}\right)_{\omega_0} \approx \frac{-\phi_3 + 8\phi_2 - 13\phi_1 + 13\phi_{-1} - 8\phi_{-2} + \phi_{-3}}{8(\Delta\omega)^3} \quad (\text{B.24})$$

$$\text{FOD} = \left(\frac{d^4\phi}{d\omega^4}\right)_{\omega_0} \approx \frac{-\phi_3 + 12\phi_2 - 39\phi_1 + 56\phi_0 - 39\phi_{-1} + 12\phi_{-2} - \phi_{-3}}{6(\Delta\omega)^4} \quad (\text{B.25})$$

## B.5. Compresores de prismas y de redes de difracción

Las fórmulas generales para la GDD y la TOD de un compresor de doble par de prismas equiláteros como el de la Fig. B.1 son [8]:

$$\text{GDD}_p = \left( \frac{d^2 \phi_p}{d\omega^2} \right)_{\omega_0} = \frac{\lambda_0^3}{2\pi^2 c^2} \left( \frac{d^2 P}{d\lambda^2} \right)_{\lambda_0} \quad (\text{B.26})$$

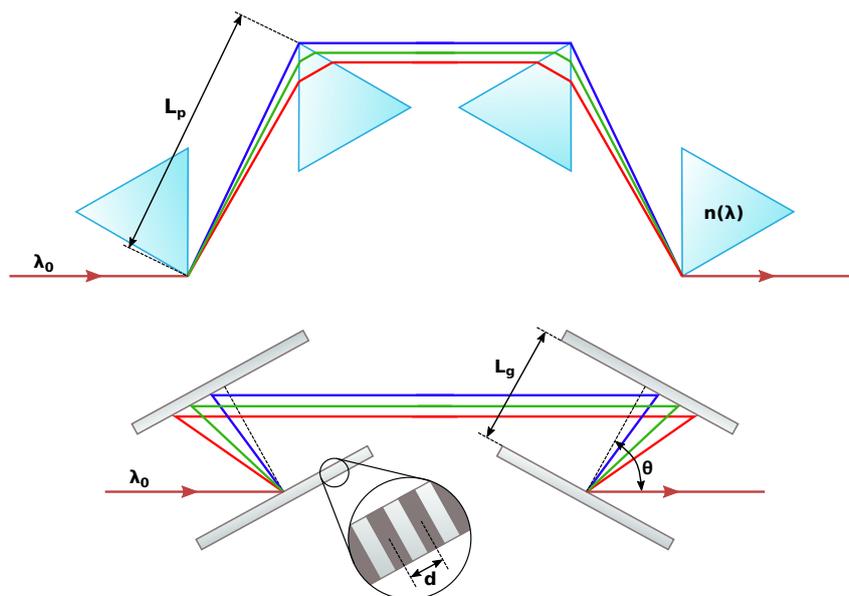
$$\text{TOD}_p = \left( \frac{d^3 \phi_p}{d\omega^3} \right)_{\omega_0} = -\frac{\lambda_0^4}{4\pi^2 c^3} \left[ 3 \left( \frac{d^2 P}{d\lambda^2} \right)_{\lambda_0} + \lambda \left( \frac{d^3 P}{d\lambda^3} \right)_{\lambda_0} \right] \quad (\text{B.27})$$

con:

$$\frac{d^2 P}{d\lambda^2} \approx 4D \left[ \frac{d^2 n}{d\lambda^2} + (2n - n^{-3}) \left( \frac{dn}{d\lambda} \right)^2 \right] - 8L_p \left( \frac{dn}{d\lambda} \right)^2 \quad (\text{B.28})$$

$$\frac{d^3 P}{d\lambda^3} \approx 4D \frac{d^3 n}{d\lambda^3} - 24L_p \frac{dn}{d\lambda} \frac{d^2 n}{d\lambda^2} \quad (\text{B.29})$$

siendo  $\lambda_0$  la longitud de onda central de los pulsos láser,  $c$  la velocidad de la luz en el vacío,  $D$  el diámetro del haz sobre el primer prisma,  $n(\lambda)$  el índice de refracción del material y  $L_p$  la separación entre los prismas de cada par.



**Figura B.1:** Esquemas de un compresor de doble par de prismas (arriba) y de un compresor de doble par de redes de difracción (abajo).

Por otro lado, la GDD y la TOD que introduce un compresor de doble par de redes de difracción en la disposición que se muestra en la Fig. B.1 vienen dadas por [8]:

$$\text{GDD}_g = \left( \frac{d^2 \phi_g}{d\omega^2} \right)_{\omega_0} = \frac{\lambda_0^3 L_g}{\pi c^2 d^2} \left[ 1 - \left( \frac{\lambda_0}{d} - \text{sen } \theta \right)^2 \right]^{-3/2} \quad (\text{B.30})$$

$$\text{TOD}_g = \left( \frac{d^3 \phi_g}{d\omega^3} \right)_{\omega_0} = -\frac{6\pi\lambda}{c} \frac{1 + (\lambda_0/d)\text{sen } \theta - \text{sen}^2 \theta}{1 - (\lambda_0/d - \text{sen } \theta)^2} \left( \frac{d^2 \phi_g}{d\omega^2} \right)_{\omega_0} \quad (\text{B.31})$$

siendo  $L_g$  la distancia entre las redes de cada pareja,  $d$  el paso de red (inverso de la densidad de líneas) y  $\theta$  el ángulo de incidencia.

# Anexo C

## Código fuente

```
%----- PARAMETROS DE ENTRADA -----%

T0 = 10E-15/(2*sqrt(log(2))); %Duracion pulso inicial en s
E0 = 40E-6; %Energia inicial del pulso en J
P0 = E0/(T0*sqrt(pi)); %Potencia pico inicial en W
lambda0 = 800.0E-9; %Longitud de onda central en m

GDD = 0*1E-30; %Chirp inicial en s^2
TOD = 0*1E-45; %TOD inicial en s^3

L = 3.0; %Longitud de la fibra en m
a = 125E-6; %Radio de la fibra hueca en m
Umn = 2.4048; %n-esimo cero de la funcion de Bessel J_{m-1}

N = 4096; %Numero puntos mallado temporal --> potencia de 2 para FFT
h = 0.001; %Paso inicial (dar un valor algo alto al inicio)
eta = 5; %Error local del metodo (3 para SSFM_RK4 y 5 para RK4IP)
dG = 1E-8; %Objetivo de error local

%---Seleccion del gas de relleno:
GAS = 2; %1 = argon // 2 = nitrogeno
p = 0.2; %Presion del gas en bar

%---Terminos incluidos: (1 = activado, 0 = desactivado)
LOSSES = 1; %Perdidas
DISPER = 1; %Dispersion
SPM = 1; %Automodulacion de fase
SRS = 1; %Scattering Raman estimulado (desactivar en el Ar)
SS = 1; %Self-steepening
```

```

%----- PROPAGACION 1D HACIA ATRAS -----%

% Resolvemos la GNLSE utilizando el metodo RK4IP (Hult, 2007) con
% transformadas de Fourier para las derivadas en el termino de
% self-steepening y LEM (Heidt, 2009) para adaptar el paso h

% La ecuacion incluye perdidas, la dispersion completa, SPM, SRS y SS,
% y esta normalizada de forma que  $|A|^2$  tiene unidades de potencia

%-----%

c = 299792458; %Velocidad de la luz en el vacio en m/s

%--Parametros:
param_entrada;
w0 = 2*pi*c/lambda0; %Frecuencia central en rad/s

%---Intervalo de tiempos:
Tmax = 10*2*sqrt(log(2))*T0; %Limite ventana --> 10 veces FWHM del pulso
deltat = (2*Tmax)/N;
T = -(N/2)*deltat:deltat:(N/2-1)*deltat;

arch = fopen('tiempo.txt','w');
fprintf(arch, '%.12g\n', T);
fclose(arch);

%---Intervalo de frecuencias:
deltaomega = pi/Tmax;
% Vector de frecuencias para split-step ordenado segun FFT:
omega = fftshift(-(N/2)*deltaomega:deltaomega:(N/2-1)*deltaomega);
% Vector de frecuencias ordenado para graficas (en PHz):
freq = ((-N/2)*deltaomega:deltaomega:(N/2-1)*deltaomega)+w0/(2*pi*1E15);

arch = fopen('frecuencia.txt','w');
fprintf(arch, '%.12g\n', freq);
fclose(arch);

%---Pulso inicial para BP (a la salida de la fibra):
A = sqrt(P0)*exp(-T.^2/(2*T0^2)); %Envolvente gaussiana
espectro = ifft(A).*exp(1i*(GDD/2)*omega.^2+1i*(TOD/6)*omega.^3);
A = fft(espectro);

%---Indice de refraccion al cuadrado del recubrimiento (fused silica):
B1 = 0.6961663; C1 = 0.0684043;
B2 = 0.4079426; C2 = 0.1162414;

```

```

B3 = 0.8974794; C3 = 9.896161;
nclad2 = abs(1+(B1*(2*pi*c*1E6./(omega+w0)).^2) ...
    ./((2*pi*c*1E6./(omega+w0)).^2-C1^2)+(B2*(2*pi*c*1E6 ...
    ./(omega+w0)).^2)./(2*pi*c*1E6./(omega+w0)).^2-C2^2) ...
    +(B3*(2*pi*c*1E6./(omega+w0)).^2) ...
    ./((2*pi*c*1E6./(omega+w0)).^2-C3^2));

%---Parametros del gas de relleno:
if (GAS == 1)
    % ARGON:
    B1g = 20332.29E-8; %Coeficientes de Sellmeier
    C1g = 206.12E-6; B2g = 34458.31E-8; C2g = 8.066E-3;
    n2 = 1.08E-23*p; %Indice de refraccion no lineal en m^2/W
    fR = 0; %Fraccion SRS/SPM
    tau1 = 62.5E-15; %Tiempos para la funcion de respuesta Raman
    tau2 = 120.0E-15;

elseif (GAS == 2)
    % NITROGENO:
    B1g = 39209.95E-8; %Coeficientes de Sellmeier
    C1g = 1146.24E-6; B2g = 18806.48E-8; C2g = 13.476E-3;
    n2 = 2.2E-23*p; %Indice de refraccion no lineal en m^2/W
    fR = 0.7; %Fraccion SRS/SPM
    tau1 = 62.5E-15; %Tiempos para la funcion de respuesta Raman
    tau2 = 120.0E-15;
else
    fprintf('ERROR: No se ha elegido un gas de relleno');
    quit
end

%---Indice de refraccion al cuadrado del gas:
ngas2 = 1+(p*273/293)*((B1g*(2*pi*c*1E6./(omega+w0)).^2) ...
    ./((2*pi*c*1E6./(omega+w0)).^2-C1g)+(B2g*(2*pi*c*1E6 ...
    ./(omega+w0)).^2)./(2*pi*c*1E6./(omega+w0)).^2-C2g));

%---Coeficiente no lineal en 1/(Wm):
r = 0:1E-7:a;
F = besselj(0,Umn.*r./a);
Aeff = abs((2*pi*(trapz(r.*abs(F).^2,r)).^2)/trapz(r.*abs(F).^4,r));
gama = (w0*n2)/(c*Aeff);

%---Coeficiente de atenuacion en 1/m:
alfa = real((Umn^2*c^2*(nclad2./ngas2+1))./(ngas2.*(omega+w0).^2*a^3 ...
    .*sqrt(nclad2./ngas2-1)));
alfa(alfa>10) = alfa(1); %Para que no explote al ir hacia atras

```

```

%---Constante de propagacion y coefs de dispersion:
betaw = real(((omega+w0)/c).*sqrt(ngas2-(Umn^2*c^2)./(a^2*(omega+w0).^2)));
beta0 = betaw(1,1);
beta1 = (betaw(1,2)-betaw(1,N))/(2*deltaomega); %Formula centrada derivada

%---Comprobamos que estamos por debajo de la potencia critica:
Pcr = 1.86225*pi*c^2/(n2*sqrt(ngas2(1))*w0^2);
fprintf('P0/Pcr: %f\n',P0/Pcr);

Npasos = 0;
Nbucles = 0;
z = L;
D = LOSSES*(-alfa/2)+DISPER*1i*(betaw-beta0-beta1*omega);

archz = fopen('BACK_distancia.txt','w');
archp = fopen('BACK_paso.txt','w');
archfwhm = fopen('BACK_fwhm.txt','w');
archancho = fopen('BACK_anchoW.txt','w');
archegy = fopen('BACK_energia.txt','w');
archpt = fopen('BACK_potT.txt','w');
archft = fopen('BACK_faseT.txt','w');
archpw = fopen('BACK_potW.txt','w');
archfw = fopen('BACK_faseW.txt','w');

fprintf(archz,'%12g\n',z);
fprintf(archp,'%12g\n',h);
fprintf(archfwhm,'%12g\n',FWHM(abs(A).^2,T));
fprintf(archancho,'%12g\n',ANCHO(abs(fftshift(espectro)).^2,freq));
fprintf(archegy,'%12g\n',abs(trapz(abs(A).^2,T));
fprintf(archpt,'%12g\n',abs(A).^2);
fprintf(archft,'%12g\n',unwrap(angle(A)));
fprintf(archpw,'%12g\n',abs(fftshift(espectro)).^2);
fprintf(archfw,'%12g\n',unwrap(angle(fftshift(espectro ...
    .*exp(-1i*omega*N*deltat/2)))));

%%%%%%%%%%%%%%-----BUCLE PRINCIPAL-----%%%%%%%%%%%%%%
while (z > 0)
%---Para que el ultimo paso llegue justo hasta L:
    if ((z-h) < 0)
        h = z;
    end

%---Un solo paso para calcular la solucion peor Acoarse:
    hc = h;
    dispersion = exp(-(hc/2).*D);

```

```

AI = fft(dispersion.*ifft(A));

% k1 del RK4IP:
integral = RAMAN(A,T,taul,tau2,deltat);
k1 = fft(dispersion.*ifft(-SPM*hc*li*gama*(1-fR)*A.*abs(A).^2 ...
    -SRS*hc*li*gama*fR*A.*integral+SS*(hc*gama/w0)*fft(-li ...
    *omega.*ifft(SPM*(1-fR)*A.*abs(A).^2+SRS*fR*A.*integral)));

% k2 del RK4IP:
Acalc = AI+k1/2;
integral = RAMAN(Acalc,T,taul,tau2,deltat);
k2 = -SPM*hc*li*gama*(1-fR)*Acalc.*abs(Acalc).^2 ...
    -SRS*hc*li*gama*fR*Acalc.*integral+SS*(hc*gama/w0) ...
    *fft(-li*omega.*ifft(SPM*(1-fR)*Acalc.*abs(Acalc).^2 ...
    +SRS*fR*Acalc.*integral));

% k3 del RK4IP:
Acalc = AI+k2/2;
integral = RAMAN(Acalc,T,taul,tau2,deltat);
k3 = -SPM*hc*li*gama*(1-fR)*Acalc.*abs(Acalc).^2 ...
    -SRS*hc*li*gama*fR*Acalc.*integral+SS*(hc*gama/w0) ...
    *fft(-li*omega.*ifft(SPM*(1-fR)*Acalc.*abs(Acalc).^2 ...
    +SRS*fR*Acalc.*integral));

% k4 del RK4IP:
Acalc = fft(dispersion.*ifft(AI+k3));
integral = RAMAN(Acalc,T,taul,tau2,deltat);
k4 = -SPM*hc*li*gama*(1-fR)*Acalc.*abs(Acalc).^2 ...
    -SRS*hc*li*gama*fR*Acalc.*integral+SS*(hc*gama/w0) ...
    *fft(-li*omega.*ifft(SPM*(1-fR)*Acalc.*abs(Acalc).^2 ...
    +SRS*fR*Acalc.*integral));

Acoarse = fft(dispersion.*ifft(AI+k1/6+k2/3+k3/3))+k4/6;

%---Dos medios pasos para calcular la solucion fina Afine:
hf = h/2;
dispersion = exp(-(hf/2).*D);
Afine = A;

for l=1:2
    AI = fft(dispersion.*ifft(Afine));

    % k1 del RK4IP:
    integral = RAMAN(Afine,T,taul,tau2,deltat);
    k1 = fft(dispersion.*ifft(-SPM*hf*li*gama*(1-fR)*Afine ...

```

```

.*abs(Afine).^2-SRS*hf*li*gama*fR*Afine.*integral ...
+SS*(hf*gama/w0)*fft(-li*omega.*ifft(SPM*(1-fR)*Afine ...
.*abs(Afine).^2+SRS*fR*Afine.*integral)));

% k2 del RK4IP:
Acalc = AI+k1/2;
integral = RAMAN(Acalc,T,tau1,tau2,deltat);
k2 = -SPM*hf*li*gama*(1-fR)*Acalc.*abs(Acalc).^2 ...
-SRS*hf*li*gama*fR*Acalc.*integral+SS*(hf*gama/w0) ...
*fft(-li*omega.*ifft(SPM*(1-fR)*Acalc.*abs(Acalc).^2 ...
+SRS*fR*Acalc.*integral));

% k3 del RK4IP:
Acalc = AI+k2/2;
integral = RAMAN(Acalc,T,tau1,tau2,deltat);
k3 = -SPM*hf*li*gama*(1-fR)*Acalc.*abs(Acalc).^2 ...
-SRS*hf*li*gama*fR*Acalc.*integral+SS*(hf*gama/w0) ...
*fft(-li*omega.*ifft(SPM*(1-fR)*Acalc.*abs(Acalc).^2 ...
+SRS*fR*Acalc.*integral));

% k4 del RK4IP:
Acalc = fft(dispersion.*ifft(AI+k3));
integral = RAMAN(Acalc,T,tau1,tau2,deltat);
k4 = -SPM*hf*li*gama*(1-fR)*Acalc.*abs(Acalc).^2 ...
-SRS*hf*li*gama*fR*Acalc.*integral+SS*(hf*gama/w0) ...
*fft(-li*omega.*ifft(SPM*(1-fR)*Acalc.*abs(Acalc).^2 ...
+SRS*fR*Acalc.*integral));

Afine = fft(dispersion.*ifft(AI+k1/6+k2/3+k3/3))+k4/6;
end

%---Comparamos las dos soluciones para estimar el error local (dl):
dl = sqrt(trapz((abs(Afine-Acoarse)).^2))/sqrt(trapz((abs(Afine)).^2));

%---Comparando el error local dl con el objetivo dG ajustamos
%---el paso h para la siguiente iteracion:
if (dl >= 2*dG)
    %La solucion se descarta (no actualizamos A ni z)
    h = h/2;

elseif (dl >= dG) && (dl < 2*dG)
    z = z-h;
    A = (Afine*2^(eta-1))/(2^(eta-1)-1)-Acoarse/(2^(eta-1)-1);
    espectro = fftshift(ifft(A).*exp(-li*omega*N*deltat/2));
    h = h/(2^(1/eta));

```

```

Npasos = Npasos+1;

fprintf(archz, '%.12g\n', z);
fprintf(archp, '%.12g\n', h);
fprintf(archfwhm, '%.12g\n', FWHM(abs(A).^2, T));
fprintf(archancho, '%.12g\n', ANCHO(abs(espectro).^2, freq));
fprintf(archegy, '%.12g\n', abs(trapz(abs(A).^2, T)));
fprintf(archpt, '%.12g\n', abs(A).^2);
fprintf(archft, '%.12g\n', unwrap(angle(A)));
fprintf(archpw, '%.12g\n', abs(espectro).^2);
fprintf(archfw, '%.12g\n', unwrap(angle(espectro)));

elseif (dl <= 1/(2*dG))
    z = z-h;
    A = (Afine*2^(eta-1))/(2^(eta-1)-1)-Acoarse/(2^(eta-1)-1);
    espectro = fftshift(iff(A).*exp(-1i*omega*N*deltat/2));
    h = h*2^(1/eta);
    Npasos = Npasos+1;

    fprintf(archz, '%.12g\n', z);
    fprintf(archp, '%.12g\n', h);
    fprintf(archfwhm, '%.12g\n', FWHM(abs(A).^2, T));
    fprintf(archancho, '%.12g\n', ANCHO(abs(espectro).^2, freq));
    fprintf(archegy, '%.12g\n', abs(trapz(abs(A).^2, T)));
    fprintf(archpt, '%.12g\n', abs(A).^2);
    fprintf(archft, '%.12g\n', unwrap(angle(A)));
    fprintf(archpw, '%.12g\n', abs(espectro).^2);
    fprintf(archfw, '%.12g\n', unwrap(angle(espectro)));
end
Nbucles = Nbucles+1;
end
%%%%%%%%%%-----FIN BUCLE PRINCIPAL-----%%%%%%%%%%

fprintf('Numero de bucles: %d\n', Nbucles);
fprintf('Numero de pasos: %d\n', Npasos);

fclose(archz);
fclose(archp);
fclose(archfwhm);
fclose(archancho);
fclose(archegy);
fclose(archpt);
fclose(archft);
fclose(archpw);
fclose(archfw);

```

```
%%%%%%%%%%-----FUNCIONES-----%%%%%%%%%%
```

```
%---Funcion para calcular la integral del termino Raman (exp x sin):
```

```
function intraman = RAMAN(A,T,tau1,tau2,deltat)

N = length(T);
intraman = zeros(1,N);
otracosas = zeros(1,N);
intraman(1,2) = ((tau1^2+tau2^2)/(tau1*tau2^2))*exp(-deltat/tau2) ...
                *sin(deltat/tau1)*abs(A(1,1))^2*deltat;

for k=1:2
    otracosas(1,2) = otracosas(1,2)+((tau1^2+tau2^2)/(tau1*tau2^2)) ...
                    *exp(-(T(1,2)-T(1,k))/tau2)*cos((T(1,2) ...
                    -T(1,k))/tau1)*abs(A(1,k))^2*deltat;
end
for j=3:N
    intraman(1,j) = exp(-deltat/tau2)*cos(deltat/tau1) ...
                  *intraman(1,j-1)+exp(-deltat/tau2) ...
                  *sin(deltat/tau1)*otracosas(1,j-1);

    otracosas(1,j) = exp(-deltat/tau2)*cos(deltat/tau1) ...
                  *otracosas(1,j-1)-exp(-deltat/tau2) ...
                  *sin(deltat/tau1)*intraman(1,j-1) ...
                  +((tau1^2+tau2^2)/(tau1*tau2^2)) ...
                  *abs(A(1,j))^2*deltat;
end
end
```

```
%---Funcion para calcular la anchura a mitad de altura de la curva y(x)
```

```
function anchura = FWHM(y,x)

half_max = max(y)/2;
N = length(y);

i1 = 1;
while (y(1,i1) < half_max)
    i1 = i1+1;
end
xlead = x(1,i1-1)+(x(1,i1)-x(1,i1-1))* ...
        ((half_max-y(1,i1-1))/(y(1,i1)-y(1,i1-1))); %Interp lineal
i2 = N;
while (y(1,i2) < half_max)
    i2 = i2-1;
end
```

```

    xtrail = x(1,i2)+(x(1,i2+1)-x(1,i2))* ...
            ((half_max-y(1,i2))/(y(1,i2+1)-y(1,i2))); %Interp lineal
    anchura = xtrail-xlead;
end

%---Funcion para calcular la anchura a altura 1/e^2 de la curva y(x)
function anchura = ANCHO(y,x)

    half_max = max(y)/(exp(1)^2);
    N = length(y);

    i1 = 1;
    while (y(1,i1) < half_max)
        i1 = i1+1;
    end
    xlead = x(1,i1-1)+(x(1,i1)-x(1,i1-1))* ...
            ((half_max-y(1,i1-1))/(y(1,i1)-y(1,i1-1))); %Interp lineal
    i2 = N;
    while (y(1,i2) < half_max)
        i2 = i2-1;
    end
    xtrail = x(1,i2)+(x(1,i2+1)-x(1,i2))* ...
            ((half_max-y(1,i2))/(y(1,i2+1)-y(1,i2))); %Interp lineal
    anchura = xtrail-xlead;
end

%----- RECONSTRUCCION -----%

% Reconstruimos de forma realista la fase espectral del pulso a
% la entrada de la fibra (z = 0) haciendo un desarrollo en serie
% de Taylor en torno a la frecuencia central para obtener los
% primeros ordenes de dispersion (GDD, TOD y FOD) y tambien con
% un ajuste polinomico por minimos cuadrados

%-----%

fs = 32; %Font size
lw = 3; %Grosor de linea graficas
lwax = 2; %Grosor de linea ejes

c = 299792458;

T = load('tiempo.txt');
f = load('frecuencia.txt');

```

```

z = load('BACK_distancia.txt');
potT = load('BACK_potT.txt');
potW = load('BACK_potW.txt');
faseT = load('BACK_faseT.txt');
faseW = load('BACK_faseW.txt');

Np = length(z);
Nt = length(T);
dt = T(2)-T(1);

evol_potT = zeros(Np,Nt);
evol_potW = zeros(Np,Nt);
evol_faseT = zeros(Np,Nt);
evol_faseW = zeros(Np,Nt);

for i=1:Np
    evol_potT(i,:) = potT(Nt*(i-1)+1:Nt*i,1);
    evol_potW(i,:) = potW(Nt*(i-1)+1:Nt*i,1);
    evol_faseT(i,:) = faseT(Nt*(i-1)+1:Nt*i,1);
    evol_faseW(i,:) = faseW(Nt*(i-1)+1:Nt*i,1);
end

%---Pulso a la entrada de la fibra (z = 0):
pulso = sqrt(evol_potT(Np,:)).*exp(1i*evol_faseT(Np,:));
faset = unwrap(angle(pulso));

figure(1)
yyaxis left;
plot(T*1E15,abs(pulso).^2*1E-9,'-','Color', ...
    [0.00 0.45 0.74],'LineWidth',lw);
xlabel('Tiempo (fs)'); ylabel('Potencia (GW)');
set(gca,'FontSize',fs); set(gca,'TickLength',[0.015 0.025]);
set(gca,'LineWidth',lwax); set(gca,'XMinorTick','on');
set(gca,'YMinorTick','on'); set(gca,'YColor','k');
set(gca,'PlotBoxAspectRatio',[1 1 1]); hold on

yyaxis right;
plot(T*1E15,faset-faset(Nt/2+1),'-','Color', ...
    [0.00 0.45 0.74],'LineWidth',lw);
xlabel('Tiempo (fs)'); ylabel('Fase (rad)');
set(gca,'FontSize',fs); set(gca,'TickLength',[0.015 0.025]);
set(gca,'LineWidth',lwax); set(gca,'XMinorTick','on');
set(gca,'YMinorTick','on'); set(gca,'YColor','k'); hold on

```

```

%---Espectro a la entrada de la fibra (z = 0):
espectro = sqrt(evol_potW(Np, :)).*exp(1i*evol_faseW(Np, :));
fase = unwrap(angle(espectro));
normaw = max(abs(espectro).^2);

figure(2)
yyaxis left;
plot(f,abs(espectro).^2/normaw,'-','LineWidth',lw);
xlabel('Frecuencia (PHz)'); ylabel('Potencia normalizada');
set(gca,'FontSize',fs); set(gca,'TickLength',[0.015 0.025]);
set(gca,'LineWidth',lwax); set(gca,'XMinorTick','on');
set(gca,'YMinorTick','on'); set(gca,'YColor','k');
set(gca,'PlotBoxAspectRatio',[1 1 1])

yyaxis right;
plot(f,fase-fase(Nt/2+1),'-','LineWidth',lw);
xlabel('Frecuencia (PHz)'); ylabel('Fase (rad)');
set(gca,'FontSize',fs); set(gca,'TickLength',[0.015 0.025]);
set(gca,'LineWidth',lwax); set(gca,'XMinorTick','on');
set(gca,'YMinorTick','on'); set(gca,'YColor','k')

%---Frecuencia central del espectro a la entrada de la fibra:
omega = transpose(2*pi*f);
w0 = trapz(omega.*abs(espectro).^2)./trapz(abs(espectro).^2);
omega = omega-w0;

%---Recortamos la parte relevante de la fase:
corte = normaw/1E4;
y = abs(espectro).^2;
i1 = 1;
i2 = Nt;

while y(1,i1) < corte
    i1 = i1+1;
end

while y(1,i2) < corte
    i2 = i2-1;
end

figure(3)
yyaxis left;
plot(omega(1,i1:i2),y(1,i1:i2)/normaw,'-','Color', ...
      [0.00 0.45 0.74],'LineWidth',lw);
xlabel('(\omega - \omega_{0}) (rad fs^{-1})');

```

```

ylabel('Potencia normalizada');
set(gca,'FontSize',fs); set(gca,'TickLength',[0.015 0.025]);
set(gca,'LineWidth',lwax); set(gca,'XMinorTick','on');
set(gca,'YMinorTick','on'); set(gca,'YColor','k');
set(gca,'PlotBoxAspectRatio',[1 1 1]); hold on

yyaxis right;
plot(omega(1,i1:i2),fase(1,i1:i2)-fase(1,Nt/2+1),'-','Color', ...
      [0.00 0.45 0.74],'LineWidth',lw);
xlabel('\omega - \omega_{0} (rad fs^{-1})'); ylabel('Fase (rad)');
set(gca,'FontSize',fs); set(gca,'TickLength',[0.015 0.025]);
set(gca,'LineWidth',lwax); set(gca,'XMinorTick','on');
set(gca,'YMinorTick','on'); set(gca,'YColor','k');
set(gca,'PlotBoxAspectRatio',[1 1 1]); hold on

%%%-----AJUSTE POLINOMICO-----%%%

%---Hacemos un ajuste polinomico hasta TERCER orden de la fase:
p = polyfit(omega(1,i1:i2),fase(1,i1:i2)-fase(1,Nt/2+1),3);

fprintf('Ajuste hasta tercer orden:\n');
fprintf('phi0 = %d, GD = %d, GDD = %d, TOD = %d\n', ...
        p(4),p(3),2*p(2),6*p(1));
fase_recons = zeros(1,Nt);
fase_recons(1,i1:i2) = p(4)+p(3)*omega(1,i1:i2)+p(2)*omega(1,i1:i2).^2 ...
                      +p(1)*omega(1,i1:i2).^3;
fase_recons(1,1:(i1-1)) = fase_recons(1,i1);
fase_recons(1,(i2+1):Nt) = fase_recons(1,i2);

figure(3)
yyaxis right;
plot(omega(1,i1:i2),fase_recons(1,i1:i2),'-','Color', ...
      [0.85 0.33 0.10],'LineWidth',lw); hold on

%---Pulso reconstruido con la fase espectral hasta tercer orden:
espectro_recons = sqrt(evol_potW(Np,:)).*exp(1i*fase_recons);
pulso_recons = fftshift(fft(espectro_recons).*exp(1i*omega*1E15*Nt*dt/2));
faset_recons = unwrap(angle(pulso_recons));
save pulso_ajuste3.mat pulso_recons

figure(1)
yyaxis left;
plot(T*1E15,abs(pulso_recons).^2*1E-9,'-','Color', ...
      [0.85 0.33 0.10],'LineWidth',lw); hold on

```

```

yyaxis right;
plot(T*1E15,faset_recons-faset_recons(Nt/2+1),'-','Color', ...
      [0.85 0.33 0.10],'LineWidth',lw); hold on

%---Hacemos un ajuste polinomico hasta CUARTO orden de la fase:
p = polyfit(omega(1,i1:i2),fase(1,i1:i2)-fase(1,Nt/2+1),4);

fprintf('Ajuste hasta cuarto orden:\n');
fprintf('phi0 = %d, GD = %d, GDD = %d, TOD = %d, FOD = %d\n', ...
        p(5),p(4),2*p(3),6*p(2),24*p(1));
fase_recons = zeros(1,Nt);
fase_recons(1,i1:i2) = p(5)+p(4)*omega(1,i1:i2)+p(3)*omega(1,i1:i2).^2 ...
                      +p(2)*omega(1,i1:i2).^3+p(1)*omega(1,i1:i2).^4;
fase_recons(1,1:(i1-1)) = fase_recons(1,i1);
fase_recons(1,(i2+1):Nt) = fase_recons(1,i2);

figure(3)
yyaxis right;
plot(omega(1,i1:i2),fase_recons(1,i1:i2),':', 'Color', ...
      [0.93 0.69 0.13],'LineWidth',lw); hold on

%---Pulso reconstruido con la fase espectral hasta cuarto orden:
espectro_recons = sqrt(evol_potW(Np,:)).*exp(1i*fase_recons);
pulso_recons = fftshift(fft(espectro_recons).*exp(1i*omega*1E15*Nt*dt/2));
faset_recons = unwrap(angle(pulso_recons));
save pulso_ajuste4.mat pulso_recons

figure(1)
yyaxis left;
plot(T*1E15,abs(pulso_recons).^2*1E-9,':', 'Color', ...
      [0.93 0.69 0.13],'LineWidth',lw); hold on

yyaxis right;
plot(T*1E15,faset_recons-faset_recons(Nt/2+1),':', 'Color', ...
      [0.93 0.69 0.13],'LineWidth',lw); hold on

%%%-----DESARROLLOS EN SERIE DE TAYLOR-----%%%

%---Calculamos las derivadas de la fase en la frecuencia central:
dw = omega(2)-omega(1);
phi = spline(omega,fase-fase(1,Nt/2+1));

phi0 = ppval(phi,0);
gd = (-ppval(phi,2*dw)+8*ppval(phi,dw)-8*ppval(phi,-dw) ...

```

```

+ppval(phi,-2*dw))/(12*dw);
gdd = (-ppval(phi,2*dw)+16*ppval(phi,dw)-30*phi0 ...
+16*ppval(phi,-dw)-ppval(phi,-2*dw))/(12*dw^2);
tod = (-ppval(phi,3*dw)+8*ppval(phi,2*dw)-13*ppval(phi,dw) ...
+13*ppval(phi,-dw)-8*ppval(phi,-2*dw)+ppval(phi,-3*dw))/(8*dw^3);
fod = (-ppval(phi,3*dw)+12*ppval(phi,2*dw)-39*ppval(phi,dw) ...
+56*phi0-39*ppval(phi,-dw)+12*ppval(phi,-2*dw) ...
-ppval(phi,-3*dw))/(6*dw^4);

fprintf('Desarrollo de Taylor:\n');
fprintf('phi0 = %d, GD = %d, GDD = %d, TOD = %d, FOD = %d\n', ...
phi0,gd,gdd,tod,fod);

%---Desarrollo hasta tercer orden y pulso reconstruido:
taylor3 = phi0+gd*omega+(gdd/2)*omega.^2+(tod/6)*omega.^3;

figure(3)
yyaxis right;
plot(omega(1,i1:i2),taylor3(1,i1:i2),'-.','Color', ...
[0.49 0.18 0.56], 'LineWidth',lw); hold on

espectro_recons = sqrt(evol_potW(Np,:)).*exp(1i*taylor3);
pulso_recons = fftshift(fft(espectro_recons).*exp(1i*omega*1E15*Nt*dt/2));
faset_recons = unwrap(angle(pulso_recons));
save pulso_taylor3.mat pulso_recons

figure(1)
yyaxis left;
plot(T*1E15,abs(pulso_recons).^2*1E-9,'-.','Color', ...
[0.49 0.18 0.56], 'LineWidth',lw); hold on

yyaxis right;
plot(T*1E15,faset_recons-faset_recons(Nt/2+1),'-.','Color', ...
[0.49 0.18 0.56], 'LineWidth',lw); hold on

%---Desarrollo hasta cuarto orden y pulso reconstruido:
taylor4 = phi0+gd*omega+(gdd/2)*omega.^2 ...
+(tod/6)*omega.^3+(fod/24)*omega.^4;

figure(3)
yyaxis right;
plot(omega(1,i1:i2),taylor4(1,i1:i2),'-.','Color', ...
[0.47 0.67 0.19], 'LineWidth',lw); hold on

espectro_recons = sqrt(evol_potW(Np,:)).*exp(1i*taylor4);

```

```
pulso_recons = fftshift(fft(espectro_recons).*exp(1i*omega*1E15*Nt*dt/2));
faset_recons = unwrap(angle(pulso_recons));
save pulso_taylor4.mat pulso_recons
```

```
figure(1)
yyaxis left;
plot(T*1E15,abs(pulso_recons).^2*1E-9,'-.','Color',...
     [0.47 0.67 0.19],'LineWidth',lw); hold on

yyaxis right;
plot(T*1E15,faset_recons-faset_recons(Nt/2+1),'-.','Color',...
     [0.47 0.67 0.19],'LineWidth',lw); hold on
```

# Lista de abreviaturas

FFT	transformada rápida de Fourier <i>fast Fourier transform</i>
FOD	dispersión de cuarto orden <i>fourth-order dispersion</i>
FWHM	anchura completa a mitad de altura <i>full width at half maximum</i>
GD	retardo de grupo <i>group delay</i>
GDD	dispersión del retardo de grupo <i>group-delay dispersion</i>
GNLSE	ecuación de Schrödinger no lineal generalizada <i>generalized nonlinear Schrödinger equation</i>
GVD	dispersión de la velocidad de grupo <i>group-velocity dispersion</i>
LEM	método del error local <i>local error method</i>
RK4IP	Runge-Kutta de cuarto orden en la representación de interacción <i>fourth-order Runge-Kutta in the interaction picture</i>
SPM	automodulación de fase <i>self-phase modulation</i>
SRS	dispersión Raman estimulada <i>stimulated Raman scattering</i>
TOD	dispersión de tercer orden <i>third-order dispersion</i>

