Facultad de Ciencias

Departamento de Matemáticas

VNiVERSiDAD D SALAMANCA

Cálculo de variaciones y aplicaciones

Trabajo de Fin de Grado

Grado en Matemáticas

Julio 2022

Autor: José Daniel Boyero Gómez

Tutor: Jesús Rodríguez Lombardero

Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas

VNiVERSiDAD
D SALAMANCA

Cálculo de variaciones y aplicaciones

Trabajo de Fin de Grado

Grado en Matemáticas

Julio 2022

BOYERO GOMEZ JOSE DANIEL - 76074901D
Firmado digitalmente por BOYERO GOMEZ JOSE DANIEL - 76074901D
Fecha: 2022.07.07 11:13:01 +02'00'

Autor

José Daniel Boyero Gómez

RODRIGUEZ LOMBARDERO JESUS - DNI 10053935Z
Firmado digitalmente por RODRIGUEZ LOMBARDERO JESUS - DNI 10053935Z
Fecha: 2022.07.07 11:29:53 +02'00'

Tutor

Jesús Rodríguez Lombardero

Índice general

Introducción

Llegaron a estos lugares, donde ahora ves enormes murallas
y nace el alcázar de una joven Cartago,
y compraron el suelo, que por esto llamaron Birsa,
cuanto pudieron rodear con una piel de toro.

ENEIDA, Virgilio. Libro I. Versos 365-368.

Se conoce como cálculo de variaciones a la rama de las matemáticas que estudia las funciones que maximizan o minimizan el valor de una funcional definida sobre un determinado espacio, así como las técnicas y herramientas utilizadas para encontrar dichos extremos.

Podemos considerar el origen del cálculo de variaciones en el problema de Dido, planteado en la época de la Grecia clásica y recogido por Virgilio en su *Eneida*. Dicho problema surge de la leyenda que narra la huída de la princesa Dido de su ciudad natal, Tiro, al descubrir que su hermano, el rey Pigmalión, había matado a su marido. El viaje de la princesa concluyó en la costa norte de África, donde el rey Iarba le propuso que podría tomar tanta tierra como pudiera encerrar con la piel de un toro para construir una nueva ciudad. Pese a que Virgilio no describe la resolución del problema, la tradición cuenta que Dido mandó cortar la piel de toro en tiras muy finas y las unió por sus extremos para formar una cuerda. Con ella rodeó una colina y colocó sus extremos en el mar, de manera que la superficie abarcada era la máxima posible sobre el semiplano acotado por la línea de costa; y sobre este territorio fundó la que sería la ciudad de Cartago.

Además de este problema, varios filósofos de la época plantearon otros relacionados con optimizar características de las figuras geométricas del plano o del espacio y, si bien algunos pudieron resolverse entonces de manera empírica, transcurrieron bastantes siglos hasta que se les dio una solución rigurosa.

No obstante, la fecha que marca el inicio del cálculo de variaciones como una disciplina matemática es 1696, cuando el matemático Johann Bernoulli propuso a la Royal Society el problema de la braquistócrona, que consistía en encontrar la curva que une dos puntos dados tal que una partícula con velocidad inicial nula recorre en el menor tiempo posible, únicamente bajo el efecto de la fuerza de la gravedad. De hecho, la decisión del ganador de este desafío ha pasado a la historia de la ciencia como una anécdota memorable: después de prorrogar el periodo establecido para el desafío por falta de resoluciones adecuadas, Johann Bernoulli recibió una respuesta anónima que resolvía con gran elegancia el problema. Sin embargo, después de leerla, no tuvo ninguna duda en declarar vencedor al célebre Isaac Newton, justificándose en la locución latina *Tanquam ex ungue leonem*, es decir,"por las garras se conoce al león".

Durante el siglo XVIII, Euler –quien le dio nombre a esta disciplina–, junto con otros matemáticos de renombre como Leibniz o Lagrange, trataron de encontrar métodos para resolver problemas de este tipo. La formalización de estos métodos tuvo lugar el siglo siguiente, sentando las bases del cálculo de variaciones.

Finalmente, en 1900, David Hilbert presentó en el Congreso de París una lista de veintitrés problemas a modo de incentivo para la investigación matemática contemporánea, cuya formulación ha adquirido gran notoriedad con el tiempo. De entre estos problemas, dos de ellos se referían al cálculo de variaciones: el vigésimo versaba sobre la resolución de los problemas variacionales con condiciones de contorno y el último consistía la extensión de los métodos conocidos para el cálculo de variaciones a casos más generales. En la actualidad, si bien el primero de ellos se ha resuelto, el otro continúa siendo un ámbito de trabajo en la geometría y el análisis.

El presente trabajo trata de introducir el cálculo de variaciones de primer orden abordando las condiciones necesarias de extremo desde dos perspectivas: una analítica o clásica, y otra, geométrica.

El cálculo de variaciones de primer orden tiene como materia de estudio las funcionales $J : X \to \mathbb{R}$ de la forma

$$J(u) = \int F(x, u(x), u'(x))dx,$$

con X un espacio de funciones y F una función (conocida como lagrangiana) adecuados, que definiremos rigurosamente en este trabajo, $u \in X$ y x perteneciente al espacio en el que están definidas las funciones de X.

Desde la perspectiva analítica, se estudiarán las condiciones necesarias de extremo utilizando herramientas del análisis funcional y de la teoría general de ecuaciones diferenciales ordinarias; y desde la perspectiva geométrica, a partir del formalismo de 1-jets de fibrados.

Esta memoria, por lo tanto, se estructura en cinco capítulos, de manera que los dos primeros presentan conocimientos previos necesarios para el desarrollo del trabajo, y los tres siguientes desarrollan los enfoques analítico y geométrico del estudio realizado. Estos últimos se distribuyen, respectivamente, en los capítulos 3 y 4 el primero, y en el capítulo 5 el último. A continuación, se detallan los objetivos y contenidos de cada uno de ellos.

El capítulo 1 tiene como finalidad el estudio del cálculo diferencial en espacios de Banach. En él, se presentan las derivadas de Fréchet y de Gâteaux junto con sus propiedades principales, y se demuestran dos proposiciones que relacionan ambas nociones de derivabilidad. Además, se define la integral de Bochner, se enuncian algunos teoremas clásicos de la integración en espacios de Banach y se prueba el teorema fundamental del cálculo integral, que será necesario para tratar la relación entre las derivadas de Fréchet y de Gâteaux.

En el ámbito del cálculo de variaciones, se denomina primera variación de una funcional a su derivada de Gâteaux. Este concepto es de vital importancia en la búsqueda de condiciones necesarias de extremo de una funcional, y ello justifica la presencia de estos contenidos previos.

Para la elaboración del capítulo, se han empleado las referencias [1], [2], [3], [5] y [9] a las que se remite al lector si desea profundizar en los conceptos desarrollados.

En el capítulo 2, se presenta el formalismo de 1-jets de secciones del fibrado trivial

$$\Pi : X \times Y \to X,$$

donde X e Y son variedades diferenciables de dimensión n y m, respectivamente. Para ello, comenzamos definiendo el espacio de 1-jets de secciones de Π, que se denota por $J^1(\Pi)$, así como el sistema de contacto y la distribución de Cartan en $J^1(\Pi)$; y concluimos desarrollando la prolongación de campos tangentes y automorfismos de la variedad $X \times Y$ al espacio de 1-jets $J^1(\Pi)$.

El objetivo de este capítulo es introducir el marco teórico a partir del que se desarrollan los contenidos del capítulo 4. No obstante, la ubicación al comienzo del documento permite que la exposición de algunos de los contenidos del capítulo 3 sea más sencilla.

Para profundizar en la geometría de los espacios de jets se recomiendan las referencias [14] y [15].

En el capítulo 3, se realiza un estudio de las condiciones necesarias de extremo de una funcional desde un enfoque analítico o clásico. Para ello, se define con rigor la noción de extremo relativo y de punto crítico, y se demuestra que todo extremo relativo es un punto crítico de la funcional dada. A continuación, se exponen los resultados intermedios necesarios para alcanzar las ecuaciones de Euler-Lagrange, a cuyas soluciones se les denomina extremales de la funcional. Finalmente, se ilustra este desarrollo teórico enunciando y resolviendo el problema de la braquistócrona.

Para el desarrollo de estos temas, se ha utilizado principalmente la referencia [8], y también [2], [7], [10], [11] y [16].

El capítulo 4 se centra en el análisis de los problemas variacionales condicionados, es decir, aquellos en los que se buscan extremos de una funcional dada verificando una cierta condición de ligadura. Primero, se aborda el caso holónomo, obteniendo un resultado análogo al de los multiplicadores de Lagrange del cálculo diferencial en variables reales; y se desarrolla el problema del cálculo de geodésicas de una superficie de $\mathbb{R}^3$, que seguidamente se efectúa para la esfera. A continuación, se plantea el caso no holónomo, que se desarrolla únicamente para una variable independiente, por la dificultad de tratamiento del caso general. Se concluye el capítulo con el primero es el problema isoperimétrico, con el que comenzamos esta introducción.

Se han seguido las referencias [8] y [13] para el tratamiento de este tema.

El capítulo 5 retoma la búsqueda de condiciones necesarias de extremo de un problema variacional, esta vez bajo el amparo del formalismo de 1-jets de secciones del fibrado trivial. Por ello, en primer lugar, se presenta qué se entiende por problema variacional en este nuevo lenguaje y, a continuación, se desarrolla la condición de sección crítica: una noción equivalente a la de extremal en el caso clásico. Después, se define la forma de Poincaré-Cartan y se demuestra una condición equivalente a la de sección crítica a partir de dicha forma. Más adelante, se prueban otras dos condiciones equivalentes a las anteriores, una de ellas conocida como las ecuaciones de Euler-Lagrange. Coronan el capítulo, y por lo tanto el trabajo, el teorema de los invariantes de Noether –una consecuencia de los resultados previos con utilidades en la teoría de campos– y su aplicación al problema de la cuerda vibrante.

Las referencias que se han usado son [4] y [12].

En favor de la exposición dual de las condiciones necesarias de extremo de una funcional, se ha decidido no abordar la segunda variación ni las condiciones suficientes de extremo. A partir de aquí y de otros frentes abiertos, como el cálculo de variaciones de orden superior –es decir, para problemas variacionales asociados a funcionales cuya lagrangiana depende de derivadas de orden superior–, se podría continuar el estudio que se expone en esta memoria. Si se quisiera ahondar en esto último desde una perspectiva geométrica, puede seguirse, por ejemplo, la referencia [6].

Capítulo 1

Cálculo infinitesimal en espacios de Banach

Llamamos funcional a toda aplicación de un espacio de funciones con valores en un cuerpo numérico, habitualmente $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Dado un problema variacional, determinar el espacio de funciones sobre el que se plantea suele ser un aspecto a resolver como parte del propio problema. No obstante, mayoritariamente se trata de espacios de Banach. Por ello, es conveniente introducir algunas nociones y resultados del cálculo infinitesimal en espacios de este tipo.

1.1. Derivación en espacios de Banach.

Comencemos definiendo la derivabilidad en el sentido de Fréchet, que puede entenderse como la generalización en dimensión arbitraria de la noción de derivabilidad habitual de $\mathbb{R}^n$ y se obtendrá exigiendo la condición adicional de continuidad a la derivada, en caso de que exista.

Sean X e Y dos espacios de Banach reales dotados de las normas $\| \|_X$, $\| \|_Y$, $U \subset X$ un abierto no vacío, $\mathcal{L}(X,Y)$ el espacio de Banach de operadores lineales continuos entre X e Y y $F : U \to Y$ una aplicación.

Definición 1.1. *Diremos que F es **diferenciable en el sentido de Fréchet** en $a \in U$ si existe un operador $D_aF \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que*

$$F(a+\zeta) = F(a) + D_aF(\zeta) + o(\|\zeta\|)$$

donde $\lim_{\zeta \to 0} \frac{\|o(\zeta)\|_Y}{\|\zeta\|_X} = 0$.

*En tal caso, D_aF es único y lo llamaremos **diferencial de F en a en el sentido de Fréchet**.*

*Además, si F es diferenciable en el sentido de Fréchet en cada $a \in U$, F se dice **diferenciable en U** y la función*

$$\begin{array}{rccc} DF\colon & U & \longrightarrow & \mathcal{L}(X,Y) \\ & a & \longmapsto & D_aF \end{array}$$

*es la **derivada de Fréchet de F**. En el caso en que esta aplicación sea continua, lo denotaremos por $F \in \mathcal{C}^1(U, Y)$.*

Esta derivada verifica las siguientes propiedades, cuya demostración puede consultarse en [1].

Proposición 1.2. *Con las hipótesis y notaciones anteriores, se tiene:*

a) *La operación "tomar derivada de Fréchet" es $\mathbb{R}$-lineal:*

Si $F, G : U \to Y$ son aplicaciones diferenciables en el sentido de Fréchet, y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, se tiene que $\lambda F + \mu G$ es diferenciable Fréchet y, además,

$$D(\lambda F + \mu G) = \lambda DF + \mu DG.$$

b) *La derivada de Fréchet verifica la regla de la cadena:*

Sean X, Y, Z espacios de Banach, $U \subseteq X$, $V \subseteq Y$ abiertos, $F : U \to Y$ una aplicación tal que $F(U) \subseteq V$, y $G : V \to Z$, ambas diferenciables en el sentido de Fréchet. Entonces, se verifica que $G \circ F$ también es diferenciable en el sentido de Fréchet y, además, para todo $x \in U$,

$$D(G \circ F)(x) = (DG)(F(x)) \circ (DF)(x).$$

A continuación, se presenta la generalización a dimensión arbitraria de la derivada direccional para funciones definidas en abiertos de $\mathbb{R}^n$, que será una versión débil de la derivada de Fréchet.

Definición 1.3. *Sea U un abierto de X, $F : U \to Y$, $a \in U$, $h \in X$.*

*Decimos que F es **diferenciable en** a **en el sentido de Gâteaux en la dirección de** h si existe el límite*

$$\tilde{D}_a F(h) := \lim_{t \to 0} \frac{F(a + th) - F(a)}{t}$$

*al que, en tal caso, llamaremos **diferencial de Gâteaux de** F **en** a **en la dirección de** h.*

*Además, si F es diferenciable en el sentido de Gâteaux con cualquier vector $h \in X$, diremos que F es **derivable en a en el sentido de Gâteaux**, y a la aplicación*

$$\begin{array}{rccc} \tilde{D}_a F : & X & \longrightarrow & Y \\ & h & \longmapsto & \tilde{D}_a F(h) \end{array}$$

*la llamaremos **derivada de Gâteaux de** F **en** a.*

Presentemos ahora tres propiedades básicas que verifica esta nueva noción de derivada, de entre las cuales, las dos últimas son las análogas a las que expusimos para la derivada de Fréchet. La demostración de todas ellas puede consultarse en [1].

Proposición 1.4. *Sean X, Y, Z espacios de Banach, U un abierto de X, V un abierto de Y, $F : U \to Y$ una aplicación y $a \in U$.*

a) *La derivada de Gâteaux de F en a, si existe, conserva el producto por escalares: para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y $h \in X$,*

$$\tilde{D}_a F(\lambda h) = \lambda \tilde{D}_a F(h).$$

b) *La operación "tomar derivada en el sentido de Gâteaux en a", con $a \in U$, es $\mathbb{R}-$lineal: sean $F, G : U \to Y$, aplicaciones derivables en a en el sentido de Gâteaux, y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces*

$$\tilde{D}_a(\alpha F + \beta G) = \alpha \tilde{D}_a F + \beta \tilde{D}_a G.$$

c) *La derivada de Gâteaux verifica la regla de la cadena:*

Sea $F : U \to Y$ tal que $F(U) \subseteq V$ y $G : V \to Z$. Si F es derivable en el sentido de Gâteaux en a y G lo es en $F(a)$, entonces $G \circ F$ también es derivable en el sentido de Gâteaux en a y, además, $\tilde{D}_a(G \circ F) = \tilde{D}_{F(a)} G \circ \tilde{D}_a F$.

Observación 1.5. *Algunos autores exigen en la definición de derivada de Gâteaux que sea lineal y continua, mientras que otros simplemente imponen esta condición para probar los resultados en los que sea necesaria. En este trabajo, consideraremos que la derivada de Gâteaux será lineal y continua.*

Una vez definidas estas dos derivadas, presentaremos la relación entre ambas. No obstante, para ello será necesario desarrollar algunas nociones básicas de cálculo integral para funciones valoradas en espacios de Banach.

1.2. Integración de funciones valoradas en espacios de Banach.

Sea $f : (A, \mathcal{A}) \to (X, \mathcal{B}(X))$, con $(A, \mathcal{A})$ un espacio medible, X un espacio de Banach y $\mathcal{B}(X)$ su $\sigma-$álgebra de Borel.

Definición 1.6. *Se dice que $f : A \to X$ es una función* ***Borel medible*** *si es medible respecto de las álgebras $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}(X)$. Además, f se dice* ***fuertemente medible*** *si es Borel medible y verifica que $f(A) \subset X$ es separable.*

Observación 1.7. *En el caso de las funciones simples, es decir, aquellas que se pueden expresar de la forma $f = \sum_{i=1}^{k} \chi_{A_i} x_i$, $x_i \in X$, $A_i \in \mathcal{A}$, $k \in \mathbb{N}$, las condiciones de medibilidad de Borel y medibilidad fuerte son equivalentes.*

Si X es un espacio separable, toda función Borel medible es también fuertemente medible. De hecho, si no es separable, esta afirmación no es cierta.

Veamos a continuación algunas propiedades de estas funciones, cuya demostración, junto con la de otros resultados de la subsección que solo enunciamos, puede encontrarse en [3].

Proposición 1.8. *Con las hipótesis y notaciones anteriores, los conjuntos $\mathcal{I} = \{$ funciones $f : A \to X$ Borel medibles $\}$ y $\mathcal{J} = \{$ funciones $f : A \to X$ fuertemente medibles $\}$ son cerrados bajo paso al límite punto a punto.*

Proposición 1.9. *Con las hipótesis y notaciones anteriores, sea $f : A \to X$ fuertemente medible. Entonces, existe una sucesión $\{f_n\}_n$ de funciones simples fuertemente medibles tales que, para cada $a \in A$,*

$$f(a) = \lim_{n \to \infty} f_n(a), \text{ y } |f_n(a)| \leq |f(a)|.$$

Corolario 1.10. *Una función de A en X es fuertemente medible si y solo si es el límite puntual de una sucesión de funciones simples fuertemente medibles.*

Corolario 1.11. *El conjunto $\mathcal{J}$ definido en la Proposición 1.8 tiene estructura de espacio vectorial.*

Consideremos ahora una medida μ para el espacio medible $(A, \mathcal{A})$, y definamos la integral (de Bochner) para las funciones f valoradas en espacios de Banach.

Definición 1.12. *Decimos que una función $f : A \to X$ es* ***Bochner integrable*** *si es fuertemente medible y, además, la función dada por $a \mapsto \|f(a)\|$, con $\|\cdot\|$ la norma de X, es integrable.*

Supongamos primero que f es *simple*, $f = \sum_{i=1}^{k} \chi_{A_i} x_i,\ x_i \in X,\ A_i \in \mathcal{A}$, y Bochner integrable. Se define, entonces, su integral como

$$\int_A f d\mu := \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i)$$

Como f es Bochner integrable, de la integrabilidad de la función $a \mapsto \|f(a)\|$ se deduce que $\mu(A_i) < \infty$ para todo i, de manera que la integral anterior está bien definida. Nótese que esta integral es $\mathbb{R}-$ lineal y verifica la desigualdad

$$\left\| \int f d\mu \right\| \leq \int \|f\| \, d\mu.$$

Presentemos, a continuación, una definición para funciones Bochner integrables cualesquiera.

Definición 1.13. *Sea $f : A \to X$ una función Bochner integrable cualquiera, y $\{f_n\}_n$ una sucesión de funciones simples Bochner integrales tales que la función $a \mapsto \sup_n \|f_n(a)\|$ es integrable, y*

$$f(a) = \lim_{n\to\infty} f_n(a).$$

Se define la ***integral de Bochner*** *de f como*

$$\int f d\mu := \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

Comprobemos que la integral está bien definida.

En efecto, la existencia de una sucesión $\{f_n\}_n$ como antes está garantizada por la proposición 1.9.

Además, la sucesión $\{\int f_n d\mu\}_n$ es de Cauchy en X, puesto que el teorema de convergencia dominada para funciones reales afirma que $\lim\limits_{n\to\infty} \int \|f_n - f\| d\mu = 0$, y por consiguiente $\lim\limits_{m,n\to\infty} \int \|f_m - f_n\| d\mu = 0$; y como X es de Banach, se tiene que la sucesión es convergente, luego su límite existe.

Por último, nos queda justificar que la definición no depende de la sucesión de funciones simples escogida. Consideremos $\{g_n\}_n$ otra sucesión de funciones simples cumpliendo las condiciones que se exigen a $\{f_n\}_n$ en la definición. Entonces, por las propiedades de la integral de Bochner para funciones simples, se tiene la siguiente cadena de desigualdades:

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \left\| \int f_n d\mu - \int g_n d\mu \right\| \leq \lim_{n\to\infty} \int \|f_n - g_n\| d\mu \leq$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \left(\int \|f_n - f\| d\mu + \int \|g_n - f\| d\mu \right) = 0$$

De aquí se deduce que $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int g_n d\mu$, como queríamos ver.

Se puede probar que la integral de Bochner para funciones cualesquiera es $\mathbb{R}-$lineal y, además, verifica la desigualdad $\| \int f d\mu\| \leq \int \|f\| d\mu$.

Por último, presentamos algunos resultados que nos permiten estudiar la integrabilidad de funciones que valoran en espacios de Banach a partir de funciones con valores en $\mathbb{R}$, cuya teoría es conocida. Para ello, a menudo será necesario utilizar el teorema de Hahn-Banach y, en particular, algunos de sus corolarios, que enunciamos a continuación.

Teorema 1.14. ***(de Hahn-Banach)***
Sea X un espacio vectorial normado, e Y un subespacio de X. Si φ es una funcional lineal continua definida en Y, entonces existe una funcional lineal continua ϕ definida en X tal que $\phi(x) = \varphi(x)$ si $x \in Y$ y, además, $\|\phi\| = \|\varphi\|$.

Corolario 1.15. *Sea X un espacio vectorial normado no nulo. Entonces, para cada $x \in X$ existe una forma lineal continua ϕ de X tal que $\|\phi\| = 1$, y $\phi(x) = \|x\|$.*

Corolario 1.16. *El dual topológico de X, X^*, separa puntos de X, es decir, dados $x, y \in X$ distintos, existe una forma $\varphi \in X^*$ tal que $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.*

Enunciemos ahora un resultado que caracteriza las funciones con valores en espacios de Banach fuertemente medibles. Para demostrarlo, usaremos el siguiente lema, cuya demostración se puede consultar en [3].

Lema 1.17. *Sea X un $\mathbb{R}$-espacio vectorial normado separable. Entonces, existe una sucesión de elementos del dual topológico de X, $\{\varphi_n\}_n$, tal que para cada $x \in X$ se tiene que*

$$\|x\| = \sup_n\{\|\varphi_n(x)\|\}.$$

Teorema 1.18. *Con las hipótesis y notaciones anteriores, una función $f : A \to X$ es fuertemente medible si y solo si se verifican, simultáneamente, las siguientes condiciones:*

- *la imagen de A por f, $f(A) \subset X$, es separable;*
- *para cada $\varphi \in X^*$, la función $\varphi \circ f$ es $\mathcal{A}-$medible, donde X^* es el dual topológico de X.*

Demostración. Supongamos que f es fuertemente medible. La primera condición del enunciado se tiene por definición, y la segunda se deduce de que toda función continua es medible, por lo que todo elemento del dual topológico lo es; y la composición de funciones medibles también lo es.

Recíprocamente, supongamos que se verifican las dos condiciones del enunciado. Entonces, por la primera condición, bastará comprobar que f es Borel medible para demostrar que es fuertemente medible.

Consideremos el menor subespacio cerrado de X tal que contiene a $f(A)$, y denotémoslo por Y. Observemos que Y es separable, puesto que dado un subconjunto D numerable denso de $f(A)$, el conjunto formado por las combinaciones lineales finitas de elementos de D con coeficientes racionales es un subconjunto numerable denso de Y. Por lo tanto, basta comprobar la medibilidad Borel para $f : A \to Y$, considerando para Y su $\sigma-$álgebra de Borel, $\mathcal{B}(Y)$. Notemos que $\mathcal{B}(Y)$ está generada por las bolas cerradas de Y, puesto que todo abierto de Y es unión finita o numerable de bolas abiertas de Y, y cada una de estas bolas abiertas es unión finita o numerable de bolas cerradas de Y. Por lo tanto, concluiremos la demostración probando que $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ para toda bola cerrada B de Y.

Tomemos una sucesión $\{\varphi_n\}_n$ de elementos del dual topológico de Y tal que, para cada $y \in Y$, $\|y\| = \sup_n\{\|\varphi_n(y)\|\}$, cuya existencia está garantizada por el lema 1.17. Por el teorema de Hahn-Banach, 1.14, se tiene que cada φ_n de la sucesión anterior es la restricción a Y de un elemento de X^*; y por lo tanto, de la segunda condición del enunciado se puede deducir que $\varphi_n \circ f$ es $\mathcal{A}-$medible para todo n.

Sea entonces $B = \overline{B}(y_0, r)$ una bola cerrada de Y. Por la elección de la sucesión $\{\varphi_n\}_n$, se tiene que

$$f^{-1}(B) = \bigcap_n \{a \in A : \|\varphi_n \circ f(a) - \varphi_n(y_0)\| \leq r\}$$

y, por la medibilidad de $\varphi_n \circ f$ y la de φ_n (recordemos que φ_n es del dual topológico de X, luego en particular es continua) se tiene que $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, de manera que se concluye la demostración. $\square$

Enunciemos, a continuación, un resultado análogo al teorema de convergencia dominada para esta nueva integral.

Teorema 1.19. *Con las hipótesis y notaciones anteriores, consideremos una función integrable $g : A \to [0, +\infty]$, y funciones f, $\{f_n\}_n$ de A en X fuertemente medibles tales que, para cada $a \in A$, $\lim_{n\to\infty} f_n(a) = f(a)$ y $\|f_n(a)\| \leq g(a)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Entonces, f, $\{f_n\}_n$ son integrables, y además

$$\int f d\mu := \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

Tenemos, finalmente, las herramientas para enunciar y probar el teorema fundamental del cálculo integral para espacios de Banach, cuyo corolario aplicaremos en la próxima sección para relacionar las derivadas de Frêchet y de Gâteaux.

Teorema 1.20. ***(fundamental del cálculo integral)***

Sean $(A, \mathcal{A}, \mu)$, $(X, \mathcal{B}(X))$ como antes, y sea $f : A \to X$ integrable. Entonces, para cada forma $\varphi \in X^*$, $\varphi \circ f$ es integrable y, además,

$$\int \varphi \circ f d\mu = \varphi \left(\int f d\mu \right).$$

Demostración. La integrabilidad de $\varphi \circ f$ se deduce de la de f.

Tratemos primero el caso en que f es simple, $f = \sum_{i=1}^{k} \chi_{A_i} x_i$. En este caso, se ve fácilmente que $\int \varphi \circ f d\mu = \int \left(\sum_{i=1}^{k} \chi_{A_i} \varphi(x_i) \right) d\mu = \sum_{i=1}^{k} \varphi(x_i) \mu(A_i)$. Por otro lado, $\varphi \left(\int f d\mu \right) = \varphi \left(\sum_{i=1}^{k} \mu(A_i) x_i \right) = \sum_{i=1}^{k} \mu(A_i) \varphi(x_i)$, de manera que se prueba la igualdad para el caso de funciones simples.

Para una función f integrable Bochner cualquiera, consideremos una sucesión $\{f_n\}$ de funciones simples que, para cada $a \in A$, converge a $f(a)$ y tal que $\sup_n \|f_n(a)\| \leq \|f(a)\|$ (cuya existencia se tiene de la proposición 1.9). Por el teorema de la convergencia dominada (teorema 1.19), tomando límites en la igualdad $\int \varphi \circ f_n \, d\mu = \varphi \left(\int f_n \right) d\mu$, tendremos la del enunciado. □

Corolario 1.21. ***(Regla de Barrow)***

Sea $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, y $g : I \to X$ una función de clase $\mathcal{C}^1$. Entonces, se cumple que

$$g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t).$$

Demostración. Sea $\varphi \in X^*$. Observemos que $\varphi \circ g$ es una función de I en $\mathbb{R}$, luego se tiene la siguiente cadena de igualdades, donde en (1) se aplica el teorema fundamental del cálculo integral para funciones reales de variable real, en (2), la linealidad de φ y su independencia respecto de t; y en (3), el teorema 1.20:

$$\varphi \left(g(1) - g(0) \right) = \varphi(g(1)) - \varphi(g(0)) \overset{(1)}{=} \int_0^1 \frac{d}{dt} (\varphi \circ g)(t) dt \overset{(2)}{=}$$

$$\overset{(2)}{=} \int_0^1 \varphi \circ \left(\frac{d}{dt} g \right) (t) \overset{(3)}{=} \varphi \left(\int_0^1 \frac{d}{dt} g(t) \right).$$

Del corolario 1.16 del teorema de Hahn-Banach, tenemos que el dual topológico de X separa puntos y, por lo tanto, la cadena anterior nos da el enunciado que buscábamos. □

1.3. Relación entre las derivadas de Fréchet y Gâteaux.

A continuación, se presentan las relaciones existentes entre la derivada de Fréchet y la derivada de Gâteaux.

Proposición 1.22. *Si F es diferenciable en el sentido de Fréchet en un punto $a \in U$, entonces es derivable en el sentido de Gâteaux en a y ambas derivadas coinciden.*

Demostración. Por ser F diferenciable en el sentido de Fréchet en $a \in U$,

$$F(a+\zeta) = F(a) + D_a F(\zeta) + o(\|\zeta\|)$$

Computando la derivada de Gâteaux en este punto,

$$\tilde{D}_a F(\zeta) = \lim_{t \to 0} \frac{F(a+t\zeta) - F(a)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{D_a F(t\zeta) + o(\|t\zeta\|)}{t} \overset{*}{=} D_a F(\zeta)$$

donde en * se ha utilizado la linealidad de la diferencial de Fréchet. Con esto, tenemos que la derivada de Gâteaux existe y coincide con la de Fréchet. $\square$

Proposición 1.23. *Supongamos que F es derivable en el sentido de Gâteaux en todos los puntos de un entorno V del punto $a \in U$ y que la asignación $a \mapsto \tilde{D}_a F$ es continua en V. Entonces, F es diferenciable en el sentido de Fréchet en a y las derivadas coinciden.*

Demostración. Por hipótesis, existe un $r > 0$ tal que F es derivable en el sentido de Gâteaux en todo $a + \zeta$, $\zeta \in B(0,r)$. Tomemos, entonces, un $\zeta \in B(0,r)$ y definamos la función auxiliar $G(t) := F(a+t\zeta)$ de manera que

$$\begin{tikzcd}
{[0,1]} \arrow[r, "\gamma"] \arrow[rr, bend left, "G"] & B(a,r) \arrow[r, "F"] & Y \\
t \arrow[r, mapsto] \arrow[ddrr, mapsto, bend right] & a + t\zeta & \\
& x \arrow[r, mapsto] & F(x) \\
& & G(t) = F(a+t\zeta)
\end{tikzcd}$$

Aplicando la regla de la cadena, $G'(t) = (F \circ \gamma)'(t) = \tilde{D}_{\gamma(t)} F\,(\gamma'(t)) = \tilde{D}_{a+t\zeta} F(\zeta)$. Por la regla de Barrow (corolario 1.21)

$$G(1) - G(0) = \int_0^1 G'(t)dt = \int_0^1 \tilde{D}_{a+t\zeta} F(\zeta) dt$$

En consecuencia,

$$F(a+\zeta) - F(a) - \tilde{D}_a F(\zeta) = G(1) - G(0) - \tilde{D}_a F(\zeta) = \int_0^1 \left(\tilde{D}_{a+t\zeta} F(\zeta) - \tilde{D}_a F(\zeta) \right) dt$$

Tomando normas, obtenemos la desigualdad

$$\|F(a+\zeta) - F(a) - \tilde{D}_a F(\zeta)\|_Y \le \sup_{0 \le t \le 1} \|\tilde{D}_{a+t\zeta} F - \tilde{D}_a F\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \|\zeta\|_X$$

Como $\tilde{D}F$ es continua en $B(a,r)$, eligiendo r suficientemente pequeño y $\zeta \in B(0,r)$, se puede hacer $\|\tilde{D}_{a+t\zeta} F - \tilde{D}_a F\|$ tan pequeño como se quiera, de manera que

$$F(a+\zeta) - F(a) - \tilde{D}_a F(\zeta) = o(\|\zeta\|).$$

Por lo tanto, F es diferenciable en el sentido de Fréchet en a, con diferencial de Fréchet $D_a F(\zeta) = \tilde{D}_a F(\zeta)$ para todo $\zeta \in B(0,r)$, y en consecuencia, para todo $\zeta \in X$. $\square$

Concluimos la sección haciendo notar que, en la literatura habitual del cálculo de variaciones, se denomina primera variación a la derivada de Gâteaux. Definamos con rigor esta noción.

Definición 1.24. *Sean X, Y espacios de Banach, $U \subset X$ un abierto, $J : U \to Y$ una funcional y $a \in U,\ \ \zeta \in X$. Conocemos por* ***primera variación de J*** *en a en la dirección de ζ, y denotamos por $\delta_a J(\zeta)$, a la derivada de Gâteaux $\tilde{D}_a J(\zeta)$.*

Podemos generalizar la definición para dar la ***n-ésima variación*** *de F en a en la dirección de $\zeta \in X$ como*

$$\delta_a^n J(\zeta) = \frac{d^n}{dt^n}(J(a + t\zeta))\big|_{t=0},$$

donde $\frac{d}{dt}$ tiene el sentido habitual del cálculo en variable real.

Observación 1.25. *Cabe destacar que la primera variación de una funcional es, por definición, lineal y continua. En el caso de los autores que no imponen a la derivada de Gâteaux estas dos condiciones, se precisa que la derivada de Gâteaux se denomina primera variación cuando sí las cumplan.*

Capítulo 2

Espacios de jets

2.1. Definición y notaciones.

En este capítulo, definiremos el espacio de 1-jets de secciones de un fibrado trivial $\Pi : X \times Y \to X$ o, lo que es lo mismo, el espacio de 1-jets de aplicaciones diferenciables entre variedades. Esto es suficiente para el trabajo posterior, por lo que no generalizaremos más.

Sean X, Y variedades diferenciables de dimensión n y m respectivamente, y denotaremos por $\mathcal{V}$ a la variedad producto $X \times Y$, de dimensión $n+m$. Consideremos la proyección natural

$$\begin{aligned} \Pi : \mathcal{V} = X \times Y &\longrightarrow X \ . \\ (x, y) &\longmapsto x \end{aligned}$$

Definición 2.1. *Una* ***sección local de*** Π *en un abierto* U *de* X *es una aplicación diferenciable* $s : U \to \mathcal{V}$ *tal que* $\Pi \circ s = Id$.

Al conjunto de secciones de Π *en* U *se le denota por* $\Gamma(U, \mathcal{V})$

$$\begin{tikzcd} \Pi : \mathcal{V} = X \times Y \arrow[r] & X \arrow[l, bend left, "s"] \end{tikzcd}$$

Definición 2.2. *Sean dos secciones de* Π, s, s', *definidas en un entorno de un punto* $a \in X$. *Se dice que* s *y* s' *tienen* ***contacto de primer orden*** *en* a *si* $s(a) = s'(a)$ *y también* $s_{*,a} = s'_{*,a}$, *donde* $s_{*,a} : T_a X \to T_{s(a)}\mathcal{V}$ *es la aplicación lineal tangente a* s *en* a, *y análogamente para* $s'_{*,a}$.

Podemos definir, entonces, una relación de equivalencia en el conjunto de las secciones definidas en un entorno de a, como

$$s \sim s' \Leftrightarrow s \text{ y } s' \text{ tienen contacto de primer orden en } a.$$

Definición 2.3. *Llamamos* ***1-jet*** *de una sección* s *en* a, *y denotamos por* $j^1_a s$, *a la clase de equivalencia de* s *módulo la relación anterior.*

Al conjunto de estas clases de equivalencia de secciones de Π lo denotaremos por $J^1_a(\Pi)$, es decir,

$$J^1_a(\Pi) = \{j^1_a s | s \in \Gamma(U, \mathcal{V}),\ a \in U\}.$$

Llamemos $J^1(\Pi)$ al conjunto de 1-jets de secciones de Π,

$$J^1(\Pi) = \bigcup_{a \in X} J^1_a(\Pi),$$

y dotémoslo de una estructura diferenciable:

Consideremos un abierto coordenado de $\mathcal{V}$, que podemos suponer de la forma $U \times V$, con U un abierto de X y V un abierto de Y, coordenado por funciones $x_1, ..., x_n, z_1, ..., z_m$, y sea s una sección de Π definida en U tal que $\mathrm{Im}(s) \subset U \times V$. Entonces, podemos expresarla como $s(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, f_1(\mathbf{x}), ..., f_m(\mathbf{x}))$, donde $f_j = s^*(z_j)$, $1 \leq j \leq m$, son funciones $\mathcal{C}^\infty$ diferenciables de U en $\mathbb{R}$. Por lo tanto, el 1-jet de s en un punto $a \in U$ queda completamente determinado por:

$$\left.\begin{aligned} & x_i(j^1_a s) = x_i(a) \\ & z_j(j^1_a s) = s^*(z_j)(a) = f_j(a) \\ & p_{ji}(j^1_a s) = \tfrac{\partial f_j}{\partial x_i}(a), \end{aligned}\right\},$$

para todo $1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m$.

Estas funciones son un sistema de coordenadas locales para el abierto de $J^1(\Pi)$ formado por los 1-jets de secciones definidas en abiertos contenidos en U y cuya imagen está en $U \times V$.

La estructura de variedad diferenciable se obtiene recubriendo la variedad $\mathcal{V}$ por abiertos de este tipo, de manera que se obtiene un atlas para $J^1(\Pi)$. Su dimensión como variedad diferenciable es $n + m + nm$.

Una vez definido $J^1(\Pi)$, destaquemos las proyecciones naturales en $\mathcal{V}$ y en X:

$$\begin{aligned} \Pi^1 \colon \quad J^1(\Pi) &\longrightarrow \mathcal{V} \\ j^1_a s &\longmapsto s(a). \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} \Pi_X \colon \quad J^1(\Pi) &\longrightarrow X \\ j^1_a s &\longmapsto a. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Observación 2.4. *Otra notación habitual para $J^1(\Pi)$ es $J^1(\mathcal{V}/X)$, a partir de la que, quizá, puedan resultar más intuitivas las proyecciones anteriores. No obstante, en este trabajo se utilizará la primera.*

Finalmente, podemos definir la extensión 1-jet de una sección como sigue:

Definición 2.5. *Si $s \in \Gamma(U, \mathcal{V})$ se define su **extensión 1-jet** como la aplicación*

$$\begin{array}{rccc} j^1 s\colon & U & \longrightarrow & J^1(\Pi) \\ & a & \longmapsto & j^1_a s. \end{array}$$

La interpretación geométrica de estas nociones comienza por entender el 1-jet de una sección local de Π, s, en $a \in X$, como el espacio tangente a la imagen de s, $\mathrm{Im}(s)$, en $s(a)$.

De hecho, la aplicación lineal tangente $\Pi_{*,s(a)} : T_{s(a)}\mathrm{Im}(s) \to T_a X$ es un isomorfismo, por lo que $T_{s(a)}\mathrm{Im}(s)$ no contiene vectores no nulos que se proyectan en 0 mediante Π, es decir, vectores verticales. Por analogía con esta última denominación, diremos que $T_{s(a)}\mathrm{Im}(s)$ es un *espacio horizontal* para Π.

En consecuencia, se pueden caracterizar los 1-jets de secciones de Π como los subespacios $n-$dimensionales del espacio tangente a $\mathcal{V}$ en cada punto que son horizontales para Π.

Observación 2.6. *Dados $a \in X$ y dos aplicaciones diferenciables $f, g\colon U_a \to Y$, con U_a un entorno de a, se define el **1-jet** de f en a como la clase de equivalencia de f módulo la relación de equivalencia que sigue:*

$$f \sim g \Leftrightarrow f(a) = g(a) \text{ y } d_a f = d_a g.$$

La noción de 1-jet de aplicaciones diferenciables es equivalente a la que hemos expuesto al comienzo del apartado, puesto que una aplicación diferenciable $f : X \to Y$ se puede entender como la sección del fibrado trivial $\Pi : X \times Y \to X$ definida por $s(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))$.

De esta manera, las notaciones anteriores se escriben como las que siguen:

$$J^1_a(X, Y) \equiv J^1_a(\Pi), \quad J^1(X, Y) = J^1(\Pi),$$

y las coordenadas que dotan a este último de estructura de variedad diferenciable son análogas: $x_i(j^1_a f) = x_i(a)$, $z_j(j^1_a f) = z_j(f(a)) = f_j(a)$, $p_{ji}(j^1_a f) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a)$.

Concluimos la observación haciendo notar que para definir el 1-jet en un punto de una aplicación $f : X \to Y$, basta con que esta sea diferenciable, es decir, no es necesario exigir que sea $\mathcal{C}^\infty$-diferenciable.

En consecuencia, si consideramos aplicaciones de clase $\mathcal{C}^1$, como haremos en los próximos capítulos, se obtiene el mismo espacio de jets $J^1(X, Y)$.

2.2. El sistema de contacto y la distribución de Cartan.

Con las definiciones y notaciones anteriores, consideremos $S = \mathrm{Im}(s)$, que es una subvariedad de dimensión n de $\mathcal{V}$. Por la interpretación geométrica de la noción de 1-jet dada en el apartado anterior, $j^1_a s$ puede entenderse como el espacio tangente $T_a S$ e $\mathrm{Im}(j^1 s)$ será por lo tanto la subvariedad de $J^1(\Pi)$ definida como

$$J^1 S = \{(a, T_a S) | a \in S\}.$$

Definición 2.7. *Se llama* ***sistema de contacto*** *en* $J^1(\Pi)$*, y se denota por* $\mathcal{P}(J^1(\Pi))$ *(o, abreviadamente, si no hay peligro de confusión,* $\mathcal{P}$*), al sistema de Pfaff que tiene como soluciones todas las subvariedades de la forma* J^1S*, donde* S *es como antes, es decir, la imagen de una sección local de* Π.

Equivalentemente, se dice que una forma ω *pertenece al sistema de contacto* $\mathcal{P}$ *si y solo si* $(j^1s)^*(\omega) = 0$ *para cada sección* s *de* Π.

Localmente, sea $(a, b) \in S$, y $U \times V$ un entorno del punto con coordenadas $x_1, ..., x_n, z_1, ...z_m$ tales que, en este entorno, las ecuaciones locales de S son

$$z_j = f_j(x_1, ..., x_n),\ 1 \leq j \leq m,$$

con f_j funciones diferenciables en U.

Por lo tanto, las ecuaciones locales de J^1S serán

$$\left.\begin{array}{l} z_j = f_j(x_1, ..., x_n) \\ \\ p_{ji} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_1, ..., x_n) \end{array}\right\},$$

para $1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m$.

De aquí se deduce que el sistema de contacto de $J^1(\Pi)$, $\mathcal{P}$, está generado localmente por las 1-formas

$$\omega_j = dz_j - \sum_{i=1}^{n} p_{ji} dx_i,\ 1 \leq i \leq m. \tag{2.3}$$

Llamamos **1-formas de contacto** a las 1-formas del sistema de contacto.

Por otro lado, una noción relevante en el estudio de los espacios de jets, y subordinada al sistema de contacto, es la que se define a continuación.

Definición 2.8. *Se conoce como* ***distribución de Cartan*** *en* $J^1(\Pi)$ *a la distribución de campos tangentes incidentes con* $\mathcal{P}(J^1(\Pi))$.

Del estudio local del sistema de contacto, se deduce que la distribución de Cartan en $J^1(\Pi)$ está generada localmente por los campos

$$\left(\partial_i := \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} p_{ji} \frac{\partial}{\partial z_j}, \frac{\partial}{\partial p_{li}}\right),\ \ 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq l \leq m. \tag{2.4}$$

2.3. Prolongación de campos tangentes.

Concluimos el estudio de los 1-jets desarrollando cómo se prolongan los campos tangentes de la subvariedad $\mathcal{V}$ al espacio de 1-jets $J^1(\Pi)$.

Definición 2.9. *Sea* φ *un automorfismo diferenciable de* X*. Un* ***automorfismo de*** Π ***sobre*** φ *es un difeomorfismo* $\Phi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ *que hace conmutativo el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V} & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{V} \\ \downarrow{\scriptstyle \Pi} & & \downarrow{\scriptstyle \Pi} \\ X & \xrightarrow{\varphi} & X \end{array}.$$

Sea s una sec ción local de Π y Φ un automorfismo de Π sobre φ. En adelante, denotaremos $\Phi_*(s)$ a la sección definida por

$$\Phi_*(s) := \Phi \circ s \circ \varphi^{-1},$$

es decir, aquella que hace el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{V} \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\Pi"] & \mathcal{V} \arrow[d, "\Pi"] \\
X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[u, bend left, "s"] & X \arrow[u, bend right, "\Phi_* s"']
\end{tikzcd} .$$

En particular, si $\varphi = \mathrm{Id}$, será $\Phi_* s = \Phi \circ s$.

Sean φ y Φ como en la definición anterior, entoncesΦ induce un automorfismo diferenciable de $J^1(\Pi)$ definido como

$$\begin{array}{rccc} j^1\Phi\colon & J^1(\Pi) & \longrightarrow & J^1(\Pi) \\ & j^1_a s & \longmapsto & j^1_{\varphi(a)}(\Phi_* s). \end{array}$$

Se puede probar que la definición no depende de s, sino solamente de $j^1 s$. Esta aplicación $j^1\Phi$ recibe el nombre de **prolongación 1-jet de** Φ.

Se deduce de las definiciones que la prolongación de la composición de morfismos de fibrados es la composición de sus prolongaciones. Ademñas, Si s es una sección local de Π y S es su imagen en $\mathcal{V}$, $j^1\Phi$ transforma a $J^1 S$ en $J^1\Phi(S)$, y en consecuencia deja estable el sistema de contacto.

Sea $\{\chi_t\}$ un grupo uniparamétrico de automorfismos de X, y $\{\tau_t\}$ un grupo uniparamétrico de automorfismos de $\mathcal{V}$ sobre $\{\chi_t\}$. Entonces, $\{j^1\tau_t\}$ es un grupo uniparamétrico de automorfismos de $J^1(\Pi)$.

Si D es el generador infinitesimal de $\{\tau_t\}$ y $\tilde{D}$ el de $\{j^1\tau_t\}$, $\tilde{D}$ es un campo tangente en $J^1(\Pi)$ que se proyecta en D y además es una simetría infinitesimal del sistema de contacto, $\tilde{D}^L\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}$. Diremos que $\tilde{D}$ es la **prolongación 1-jet de D**.

Estas condiciones permiten definir la prolongación de cualquier campo tangente a $\mathcal{V}$, aunque no sea el generador infinitesimal del grupo uniparamétrico de automorfismos de $\mathcal{V}$.

Proposición 2.10. *Dado un campo tangente D en $\mathcal{V}$, existe un único campo tangente $\tilde{D}$ en $J^1(\Pi)$ tal que:*

- *$\tilde{D}$ se proyecta en D mediante Π^1, y*
- *$\tilde{D}$ es una simetría infinitesimal del sistema de contacto, es decir,*

$$\tilde{D}^L(\mathcal{P}(J^1(\Pi))) \subseteq \mathcal{P}(J^1(\Pi)),$$

donde $\tilde{D}^L$ denota la derivada de Lie con el campo $\tilde{D}$.

Demostración. Probemos el enunciado trabajando en coordenadas locales. Sea W un abierto de $\mathcal{V}$ de la forma $U \times V$, como el que consideramos al comienzo de la sección, coordenado por $\{x_1, ..., x_n, z_1, ..., z_m\}$; y sean $\{x_1, ..., x_n, z_1, ..., z_m, p_{11}, ..., p_{mn}\}$ las coordenadas en el abierto correspondiente de $J^1(\Pi)$.

Sea $D = \sum_{i=1}^n \xi_i(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^m \eta_j(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \frac{\partial}{\partial z_j}$.

Imponiendo la primera condición del enunciado, se tiene que la prolongación de D a $J^1(\Pi)$ es de la forma

$$\tilde{D} = D + \sum_{i,j} \varphi_{ji}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{p}) \frac{\partial}{\partial p_{ji}}.$$

A continuación, impongamos la segunda condición, es decir, que sea una simetría infinitesimal del sistema de contacto. Apliquemos la derivada de Lie con $\tilde{D}$ a ña forma de contacto $\omega_l = dz_l - \sum_{k=1}^n p_{lk} dx_k$, y apliquémosle la derivada de Lie con $\tilde{D}$:

$$\tilde{D}^L \omega_l = d\eta_l - \sum_{k=1}^n (\varphi_{lk}\, dx_k - p_{lk}\, d\xi_k) \tag{2.5}$$

Dada una función f en $\mathcal{V}$, operando se tiene que

$$df = \sum_{i=1}^n \partial_i f\, dx_i + \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial z_j} \omega_j,$$

luego sustituyendo en la ecuación anterior, tenemos que

$$\tilde{D}^L \omega = \sum_{i,l} \partial_i \eta_l dx_i + \sum_{j,l} \frac{\partial \eta_l}{\partial z_j} \omega_j - \sum_{k,l} \varphi_{lk}\, dx_k -$$

$$- \sum_{i,k,l} p_{lk} \left(\partial_i \xi_k\, dx_i + \sum_j \frac{\partial \xi_k}{\partial z_j} \omega_j \right).$$

De esta expresión se deduce que la condición necesaria y suficiente para que $\tilde{D}^L \omega_j \in \mathcal{P}(J^1(\Pi))$, es decir, para que $\tilde{D}$ sea una simetría infinitesimal, es que

$$\partial_k \eta_l - \varphi_{lk} - \sum_{i,l,k} p_{lk} \partial_k \xi_i = 0,$$

o equivalentemente,

$$\varphi_{lk} = \partial_k \eta_l - \sum_{i=1}^n p_{lk} \partial_k\, \xi_i = 0. \tag{2.6}$$

Así, quedan determinados todos los coeficientes φ_{lk} y, por lo tanto, queda probado el resultado. $\square$

Al campo tangente a $J^1(\Pi)$, $\tilde{D}$, del enunciado se le denomina *prolongación 1-jet de D.*

Capítulo 3

Estudio analítico del cálculo de variaciones

3.1. Condiciones necesarias para el extremo de una funcional

En esta sección trataremos de plantear con rigor el problema variacional sin ligaduras en varias variables. Para ello, definiremos los conceptos previos pertinentes y, bajo las condiciones de este problema, llegaremos a una condición necesaria para la existencia de extremo: las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Sea Ω un abierto conexo y acotado de $\mathbb{R}^n$, y $\Pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ la proyección natural. En adelante, en $J^1(\Pi) \simeq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{mn}$ consideraremos las coordenadas $\{x_i, y_j, p_{ji}\}_{1\leq i\leq n; 1\leq j\leq m}$; y, por simplicidad de notación, utilizaremos $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$, $\mathbf{z} = (z_1, ..., z_m)$, $\mathbf{p} = (p_{11}, ..., p_{mn})$. Denotaremos, además, por $\|\cdot\|$ la norma del espacio $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ definida como

$$\|f\| = \sum_{j=1}^{m} \sup_{x\in\overline{\Omega}} \{|f_j(x)|\} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \sup_{x\in\overline{\Omega}} \left\{\left|\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)\right|\right\},$$

para $f = (f_1, ..., f_m) \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$.

Sea $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$, $\mathbf{u} = (u_1, ..., u_m)$. Como ya hemos dicho en el capítulo anterior, $\mathbf{u}$ se puede entender como una sección del fibrado trivial Π. Consideremos, entonces, su prolongación 1-jet por

$$\begin{aligned} j^1\mathbf{u} : \overline{\Omega} &\longrightarrow J^1(\Pi)\,, \\ a &\longmapsto j^1_a\mathbf{u} \end{aligned}$$

donde $j^1_a\mathbf{u}$ tiene por coordenadas $x_i(j^1_a\mathbf{u}) := x_i(a)$, $z_j(j^1_a\mathbf{u}) := u_j(a)$, $p_{ji}(j^1_a\mathbf{u}) := \frac{\partial u_j}{\partial x_i}(a)$.

Sea $\mathcal{A}$ un abierto de $J^1(\Pi)$, y $F \in \mathcal{C}^1(\mathcal{A}, \mathbb{R})$. Para cada función $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ tal que la imagen de $j^1\mathbf{u}$ esté contenido en $\mathcal{A}$ podemos definir la funcional

$$J(\mathbf{u}) := \int_\Omega F(j^1_{\mathbf{x}}\mathbf{u})d\mathbf{x} = \int_\Omega F(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{u}'(\mathbf{x}))d\mathbf{x},$$

donde la notación $\mathbf{u}'(\mathbf{x})$ hace referencia a los elementos de la matriz jacobiana de $\mathbf{u}$, es decir, $\mathbf{u}'(\mathbf{x}) \equiv (\frac{\partial u_1}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u_1}{\partial x_n}, ..., \frac{\partial u_m}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u_m}{\partial x_n})$. En la literatura habitual, conocemos a la función $F(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{p})$ como la *lagrangiana asociada a la funcional.*

Observemos que existe un $\rho > 0$ tal que si $\mathbf{v} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ y $\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\| < \rho$, la imagen de $j^1\mathbf{v}$ está contenida en $\mathcal{A}$, luego la funcional J está definida en un entorno de $\mathbf{u}$ en $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$; en particular, si $\varphi \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$, la función

$$t \mapsto J(\mathrm{u} + t\mathrm{v})$$

está definida para $|t| < \frac{\rho}{\|\varphi\|}$, luego podemos definir la primera variación de J en u en la dirección de φ que, según la definición 1.24, será

$$\delta_{\mathbf{u}} J(\varphi) = \frac{d}{dt} J(\mathbf{u} + t\varphi)\Big|_{t=0} .$$

Aplicando la regla de derivación bajo el signo integral, podemos computar la expresión anterior:

$$\delta_{\mathbf{u}} J(\varphi) = \frac{d}{dt}\left(\int_\Omega F(\mathbf{x}, \mathbf{u} + t\varphi, \mathbf{u}' + t\varphi')d\mathbf{x}\right)\Big|_{t=0} = \int_\Omega \left(\frac{d}{dt} F(\mathbf{x}, \mathbf{u} + t\varphi, \mathbf{u}' + t\varphi')\right) d\mathbf{x}\Big|_{t=0} =$$

$$= \int_\Omega \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial F}{\partial z_j}\varphi_j + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_{ji}} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\right) d\mathbf{x}\Big|_{t=0} =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \int_\Omega \left(\frac{\partial F}{\partial z_j}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{u}')\varphi_j + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_{ji}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{u}') \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\right) d\mathbf{x}. \tag{3.1}$$

donde $F \equiv F(\mathbf{x}, \mathbf{u} + t\varphi, \mathbf{u}' + t\varphi')$ en los cálculos intermedios.

Observación 3.1. *A menudo se denomina variación general de $\mathbf{u}$ en la dirección de φ a toda aplicación $\psi : \overline{\Omega} \times [-t_0, t_0] \to \mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^1$ verificando $\psi(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}(\mathbf{x})$ y $\frac{\partial \psi}{\partial t}(\mathbf{x}, t)\big|_{t=0} = \varphi(\mathbf{x})\ \ \forall \mathbf{x} \in \overline{\Omega}$ e, incluso en algunas fuentes, se exige la condición adicional de contorno $\psi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x})\ \ \forall x \in \partial\Omega,\ \ |t| < t_0$, de manera que $\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t}\big|_{t=0} = 0\ \ \forall x \in \partial\Omega$. Así, se puede expresar la primera variación en función de ψ como:*

$$\delta_{\mathbf{u}} J(\varphi) = \frac{d}{dt}\left(J(\psi)\right)\big|_{t=0}$$

A continuación daremos la noción de extremo de una funcional y relacionaremos el cómputo anterior con una condición necesaria para la existencia de extremo.

Definición 3.2. *Sea $\mathfrak{C}$ un subconjunto abierto de $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$. Se dice que $\mathbf{u} \in \mathfrak{C}$ es un **mínimo relativo** de J en $\mathfrak{C}$ si existe algún $\varsigma > 0$ tal que $J(\mathbf{u}) \leq J(\mathbf{v})$, para todo $\mathbf{v} \in \mathfrak{C}$ verificando $\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\| < \varsigma$*

Observación 3.3. *La definición de máximo relativo es la análoga a la anterior, modificando el sentido de la desigualdad entre $J(\mathbf{u})$ y $J(\mathbf{v})$.*

Definición 3.4. *Sea J una funcional derivable Gâteaux. Diremos que* $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ *es un* ***punto crítico*** *de J si* $\delta_{\mathbf{u}} J(\varphi) = 0$ *para todo* $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$.

Observación 3.5. *En la definición de punto crítico, nos podemos restringir al caso* $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$ *porque estas funciones son suficientes para obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange y, además, evitan explicitar las condiciones de diferenciabilidad que debe cumplir φ en cada caso.*

Proposición 3.6. ***(Condición Necesaria de Extremo)***
Sea J derivable Gâteaux. Todo extremo relativo de J es un punto crítico de J, es decir, si $\mathbf{u}$ *es un extremo relativo de J, entonces*

$$\delta_{\mathbf{u}} J(\varphi) = 0, \ \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$$

Demostración. Supongamos que $\mathbf{u}$ es un mínimo relativo de J. Entonces, fijado $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$ y un t_0 suficientemente pequeño, $J(\mathbf{u}) \leq J(\mathbf{u} + t\varphi)$, $|t| < t_0$. Así, como la primera variación existe por hipótesis, por definición, el siguiente límite existe

$$\delta_{\mathbf{u}} J(\varphi) = \lim_{t \to 0} \frac{J(\mathbf{u} + t\varphi) - J(\mathbf{u})}{t} \bigg|_{t=0}$$

y, en consecuencia, también existen los límites laterales y coinciden.

Pero

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{J(\mathbf{u} + t\varphi) - J(\mathbf{u})}{t} \geq 0 \text{ y } \lim_{t \to 0^-} \frac{J(\mathbf{u} + t\varphi) - J(\mathbf{u})}{t} \leq 0,$$

luego el límite es 0 y, por lo tanto, $\delta_{\mathbf{u}} J(\varphi) = 0$, como queríamos ver. □

Definición 3.7. *A la ecuación $\delta_{\mathbf{u}} J(\varphi) = 0$ se le conoce como* ***ecuación débil de Euler****.*

De esta ecuación se deducirán las de Euler-Lagrange. Para ello, necesitaremos algunos resultados auxiliares.

Definición 3.8. *Sea U un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ orientado por una forma de volumen ω, y sea D un campo tangente en U. Llamamos* ***divergencia del campo*** *D y denotamos por* $\operatorname{div} D$*, a la única función verificando* $\operatorname{div}(D)\omega = D^L \omega$*, donde $D^L \omega$ es la derivada de Lie de ω con D.*

Teorema 3.9. ***(de la divergencia)*** *Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$ orientado por una forma de volumen ω, y sea Ω un abierto de cierre compacto $\overline{\Omega} \subset U$ que cumpla las condiciones para ser una subvariedad con borde de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos de U. Si D es un campo tangente en U, entonces*

$$\int_\Omega \operatorname{div}(D)\omega = \int_{\partial\Omega} i_D \omega.$$

Demostración. Ver, por ejemplo, [11], Capítulos 17-18. □

Corolario 3.10. ***(Integración por partes en varias variables)***
Sea U un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, coordenado por $\{x_1, ..., x_n\}$, Ω un abierto cuyo cierre es una subvariedad orientada de dimensión n, compacta y con borde de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos contenida en U.

Sea ω la forma de volumen dada por $\omega = dx_1 \wedge ... \wedge dx_n$, y $f, g_i \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$, $1 \leq i \leq n$, f con soporte contenido en Ω. Entonces, se verifica que

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^n g_i(\mathbf{x}) \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) d\mathrm{x} = -\int_\Omega \sum_{i=1}^n f(\mathbf{x}) \frac{\partial g_i}{\partial x_i}(\mathbf{x}) d\mathrm{x}$$

Demostración. Basta aplicar el teorema 3.9 al campo fD, donde $D = \sum_{i=1}^n g_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i}$.

En efecto, $\mathrm{div}(fD) = D(f) + f\mathrm{div}(D)$, luego por el teorema,

$$\int_\Omega Df + \int_\Omega f\mathrm{div}(D) = \int_{\partial\Omega} i_{fD}\omega$$

pero $\int_{\partial\Omega} i_{fD}\omega = \int_{\partial\Omega} f i_D \omega = 0$, puesto que $\mathrm{Sop} f \subset \Omega$, luego

$$\int_\Omega Df = -\int_\Omega f\mathrm{div}(D)$$

que en coordenadas es la expresión que buscábamos. □

Lema 3.11. ***(fundamental del cálculo de variaciones)***

Sea f una función continua de $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$. Si $\int_\Omega f(\mathbf{x})\eta(\mathbf{x})d\mathbf{x} \geq 0$ para toda función $\eta \geq 0$ con soporte compacto, entonces $f(\mathbf{x}) \geq 0 \ \ \forall \mathbf{x} \in \Omega$.

En particular, si $\int_\Omega f(\mathbf{x})\eta(\mathbf{x})d\mathbf{x} = 0$, entonces $f(\mathbf{x}) = 0 \ \ \forall \mathbf{x} \in \Omega$.

Demostración. Razonemos por reducción al absurdo. Si existiera un punto $a \in \Omega$ tal que $f(a) < 0$, podríamos encontrar un $\varepsilon > 0$ y una bola $B(a, r)$ con $\overline{B(a, r)} \subset \Omega$ tal que $f(\mathbf{x}) < -\varepsilon$ en $B(a, r)$.

Consideremos la función $\eta \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ definida por

$$\eta(\mathbf{x}) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{r^2 - \|\mathbf{x} - a\|^2}}, & \text{si } \mathbf{x} \in B(a, r) \\ 0, & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega - B(a, r) \end{cases}$$

Entonces, se verificaría la siguiente cadena de desigualdades

$$0 \leq \int_\Omega f(\mathbf{x})\eta(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_{B(a,r)} f(\mathbf{x})\eta(\mathbf{x})d\mathbf{x} < -\varepsilon \int_{B(a,r)} \eta(\mathbf{x})d\mathbf{x} < 0$$

donde la primera desigualdad se tiene por hipótesis y en la igualdad simplemente se restringe el recinto de integración al soporte de la función η. Con esto llegamos a contradicción.

La segunda parte se deduce inmediatamente de lo anterior. □

Teorema 3.12. ***(Ecuaciones de Euler-Lagrange)***

Sea U un abierto de $J^1(\Pi)$, $F \in \mathcal{C}^2(U)$, Ω un abierto relativamente compacto de $\mathbb{R}^n$ contenido en la proyección de U y $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ una función tal que la imagen de $j^1\mathbf{u}$ esté contenida en U.

Sea J la funcional definida en un entorno de $\mathbf{u}$ en $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ como

$$J(\mathbf{v}) = \int_\Omega F(\mathbf{x}, \mathbf{v}(\mathbf{x}), \mathbf{v}'(\mathbf{x})).$$

Si $\delta_{\mathbf{u}} J(\varphi) = 0$ para cada $\varphi \in \mathcal{C}^2_c(\Omega, \mathbb{R}^m)$, entonces se verifican las siguientes ecuaciones, conocidas como ***ecuaciones de Euler-Lagrange****:*

$$\frac{\partial F}{\partial z_j}(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{u}'(\mathbf{x})) - \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i}\left(\frac{\partial F}{\partial p_{ji}}\right)(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{u}'(\mathbf{x})) = 0, \quad 1 \leq j \leq m,$$

donde $\frac{d}{dx_i}$ es la derivada total,

$$\frac{d}{dx_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{l=1}^{m} p_{li} \frac{\partial}{\partial z_l}.$$

Demostración. Sea $\varphi \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Como $\delta_{\mathbf{u}} J(\varphi) = 0$, según la fórmula (3.1) tenemos

(3.2)
$$0 = \delta_{\mathbf{u}} J(\varphi) = \sum_{j=1}^{m} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial F}{\partial z_j}(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{u}'(\mathbf{x}))\varphi_j(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_{ji}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{u}'(\mathbf{x}))\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \right) d\mathbf{x}.$$

Aplicando la fórmula de integración por partes (corolario 3.10) a la segunda suma, para cada $j = 1, ..., m$, resulta

(3.3)
$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_{ji}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{u}'(\mathbf{x}))\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = -\int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i}\left(\frac{\partial F}{\partial p_{ji}}\right)(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{u}'(\mathbf{x}))\varphi_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Sustituyendo en la ecuación (3.2), se obtiene la igualdad

$$0 = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial F}{\partial z_j}(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{u}'(\mathbf{x})) - \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i}\left(\frac{\partial F}{\partial p_{ji}}\right)(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{u}'(\mathbf{x})) \right) \varphi_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \tag{3.4}$$

Fijemos ahora el índice j, y consideremos $\varphi_j(\mathbf{x}) = \eta(\mathbf{x})$ y $\varphi_l(\mathbf{x}) = 0$ para $l \neq j$. De la ecuación (3.4), obtenemos

$$0 = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial F}{\partial z_j}(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{u}'(\mathbf{x})) - \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i}\left(\frac{\partial F}{\partial p_{ji}}\right)(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{u}'(\mathbf{x})) \right) \eta(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \tag{3.5}$$

para $1 \leq j \leq m$. Concluimos la demostración por el lema 3.11, fundamental del cálculo de variaciones, de donde se tiene

$$\frac{\partial F}{\partial z_j}(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{u}'(\mathbf{x})) - \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i}\left(\frac{\partial F}{\partial p_{ji}}\right)(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{u}'(\mathbf{x})) = 0, \quad 1 \leq j \leq m. \tag{3.6}$$

□

Definición 3.13. *Se dice que $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R}^m)$ es un* ***extremal*** *de J si verifica las ecuaciones de Euler-Lagrange.*

Observación 3.14. *Nótese que pueden existir extremos de la funcional J que no verifiquen la ecuación de Euler-Lagrange: en efecto, hemos demostrado que esta es condición necesaria si este extremo es de clase $\mathcal{C}^2$.*

3.2. Ejemplo: la braquistócrona

El problema de la braquistócrona se puede presentar como sigue:

Enunciado 3.15. Dada una curva diferenciable $y = u(x)$ en $\mathbb{R}^2$ que une los puntos $P = (x_P, y_P)$, $Q = (x_Q, y_Q)$, se deja caer (es decir, con velocidad inicial nula), únicamente bajo la acción de la fuerza de la gravedad y sin rozamiento, una partícula puntual. Se pide encontrar la curva, conocida como braquistócrona, para la que el tiempo que tarda la partícula en llegar a Q desde P es mínimo.

Supóngase, por simplicidad, que $P = (0,0)$ e $y_Q \leq 0 \leq x_Q$.

La longitud de la curva viene dada por la expresión $l = \int_{x_P}^{x_Q} ds$, donde

$$ds = \sqrt{1 + (u'(x))^2}dx.$$

Observemos que la velocidad de la partícula se corresponde con el cociente $v = \frac{ds}{dt}$, luego por el teorema de la función inversa, $dt = \frac{ds}{v}$. Así, el tiempo que la partícula tarda en recorrer la curva $y = u(x)$ es

$$T = \int_0^T dt = \int_P^Q \frac{1}{v} ds.$$

Calculemos ahora $v(x)$. Para ello, notemos que, por la conservación de la energía mecánica en el sistema, esta es en todo punto igual a la inicial, que coincide con el potencial de la partícula en P, es decir, con $mg|y_Q|$, debido a que $v(0) = 0$ por hipótesis, e $|y_Q|$ es, en este caso, la altura a la que se encuentra la partícula respecto del punto de llegada. Podemos escribir esto como

$$\frac{1}{2} mv(x)^2 + mg|u(x) - y_Q| = mg|y_Q|,$$

donde m es la masa de la partícula y g, la aceleración de la gravedad. De aquí se tiene que $v(x) = \sqrt{2g|u(x)|}$ y sustituyendo en T:

$$T = \int_0^{x_Q} \frac{1}{\sqrt{2g|u(x)|}} \sqrt{1 + (u'(x))^2} dx$$

En definitiva, el problema de la braquistócrona se puede entender como encontrar la curva $y = u(x)$ que minimice la funcional $T(u) = \int_0^{x_Q} F(x, u(x), u'(x))dx$, donde la lagrangiana es $F(x, y, p) = \frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{2g|y|}}$ en un cierto conjunto de funciones. Tratemos de determinar este conjunto:

En primer lugar, tengamos en cuenta las condiciones iniciales del problema: $u(0) = 0$, $u(x_Q) = y_Q$; así como que u debe pertenecer al dominio de la funcional, T. Para este problema,

$$\mathrm{Dom}(T) = \{u \in \mathcal{C}^1([0, x_Q]) : (x, u(x), u'(x)) \in U \ \ \forall x \in [0, x_Q]\}$$

donde U es el abierto de $\mathbb{R}^3$ en que la lagrangiana está definida. Nos queda estudiar cuándo está definida la primera variación de la funcional: para ello, calculémosla en u en una dirección dada φ, de acuerdo con la fórmula que hemos expuesto en este capítulo.

$$\delta_u T(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_Q} \left[-\frac{1}{2} \frac{\sqrt{1+u'(x)^2}}{\sqrt{u(x)^3}} \varphi(x) + \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}\sqrt{1+u'(x)^2}} \varphi'(x) \right] dx.$$

Con todo, el conjunto sobre el que queda definido el problema es:

$$\Gamma = \{u \in \mathcal{C}^2(0, x_Q) | u \geq 0, u(0) = 0, u(x_Q) = y_Q, \int_0^{x_Q} \frac{1}{\sqrt{u(x)^3}} dx < \infty\}$$

A continuación, operemos para alcanzar una condición necesaria de extremo: observemos que como F no depende de x,

$$\frac{d}{dx}\left(F - u'(x)\frac{\partial F}{\partial p}\right) = u'(x)\frac{\partial F}{\partial y} + u''(x)\frac{\partial F}{\partial p} - u''(x)\frac{\partial F}{\partial p} - u'(x)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial p} - u'(x)u''(x)\frac{\partial^2 F}{\partial p^2} =$$

$$= u'(x)\left(\frac{\partial F}{\partial y} - u'(x)\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial p} - u''(x)\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}\right) = u'(x)\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial p}\right),$$

que es igual a 0 por las ecuaciones de Euler-Lagrange. Por lo tanto, se tiene que

$$F - u'(x)\frac{\partial F}{\partial p} = \lambda$$

con λ una constante.

Sustituyendo por la lagrangiana de nuestro problema, la condición necesaria para que u sea extremo de la funcional es:

$$\frac{\sqrt{1+u'(x)^2}}{\sqrt{u(x)}} - u'(x)\left(\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}\sqrt{1+u'(x)^2}}\right) = \lambda$$

que implica la ecuación diferencial $u(x)\left(1 + (u'(x))^2\right) = \frac{1}{\lambda^2}$. Llamemos, por simplicidad, $\mu := \frac{1}{\lambda^2}$, y apliquemos el teorema de la función inversa. Entonces:

$$x'(u) = \int \sqrt{\frac{u}{\mu - u}} du$$

Para integrarlo, hagamos el siguiente cambio de variable: $u = \mu \operatorname{sen}^2 t$, $du = 2\mu \operatorname{sen} t \cos t dt$, de manera que

$$x(t) = \int \sqrt{\frac{\mu \operatorname{sen}^2 t}{\mu(1 - \operatorname{sen}^2 t)}} 2\mu \operatorname{sen} t \cos t dt = 2\mu \int \operatorname{sen}^2 t dt = 2\mu\left(\frac{1}{2}t - \frac{\operatorname{sen} 2t}{4}\right) + K$$

Por las condiciones iniciales de nuestro problema, se tiene que $K = 0$, así que, llamando $a = \frac{\mu}{2}$ y $\theta = 2t$ y reescribiendo la expresión de u respecto de t, obtenemos que las únicas curvas que verifican la ecuación de Euler-Lagrange son aquellas cuyas ecuaciones paramétricas son :

$$\begin{cases} x = a\,(\theta - \sin\theta) \\ \\ y = a\,(1 - \cos\theta) \end{cases}$$

llamadas habitualmente **cicloides**.

Capítulo 4

Problemas variacionales con ligaduras

En este capítulo, consideraremos el problema de encontrar extremos de funcionales $J(\mathbf{u}) = \int_\Omega F(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{u}')d\mathbf{x}$ de manera que se satisfagan ciertas restricciones dadas sobre el espacio de funciones consideradas. Estas restricciones, o **ligaduras**, como las designaremos en adelante, son de la forma $G(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{u}') = 0$, con $G(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{p})$ una función con valores en $\mathbb{R}^r$, $r < m$, donde $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$, $\mathbf{z} = (z_1, ..., z_m)$ y $\mathbf{p} = (p_{11}, ..., p_{nm})$ y $\mathbf{u}'$ denota las coordenadas del jacobiano de $\mathbf{u}$, como definimos en el capítulo anterior.

Habitualmente se distinguen dos tipos de ligaduras, cuyo estudio es notablemente distinto: las ligaduras **holónomas**, que son aquellas que, mediante integración respecto de $\mathbf{x}$, pueden expresarse de la forma $G(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0$, es decir, sin depender explícitamente de $\mathbf{u}'$; en otro caso, se dicen **no holónomas**. A continuación desarrollaremos la teoría de multiplicadores de Lagrange para estos dos tipos y lo aplicaremos al cálculo de geodésicas y al problema isoperimétrico.

4.1. Ligaduras holónomas

Sea Ω un abierto conexo acotado de $\mathbb{R}^m$, $G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^r$, $G \equiv (G_1, ..., G_r)$ una función de clase $\mathcal{C}^2$. Definamos un subconjunto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$:

$$\mathcal{M} := \{(\mathbf{x}, \mathbf{z}) : \mathbf{x} \in \overline{\Omega},\ G(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = 0\}.$$

Para dotarlo de estructura de subvariedad diferenciable de clase $\mathcal{C}^2$, de dimensión $n + m - r$, basta con que las diferenciales de las componentes $G_1, ..., G_r$ sean linealmente independientes en cada punto de $\mathcal{M}$. Supondremos que la matriz jacobiana $\left(\frac{\partial G_j}{\partial z_l}\right)_{\substack{1\le l\le n\\ 1\le j\le r}}$ es de rango máximo, r, en todos los puntos de $\mathcal{M}$, de manera que la proyección natural $\mathcal{M} \to \overline{\Omega}$ es epiyectiva.

El problema variacional tratado consistirá en la minimización de la funcional J para funciones $\mathbf{u} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^m$ de clase $\mathcal{C}^1$ tales que la gráfica de $\mathbf{u}$, a la que denotaremos en adelante por $\Gamma(\mathbf{u})$, esté contenida en $\mathcal{M}$. De otra manera, podemos caracterizar las funciones admisibles como aquellas tales que, para $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$, $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ pertenece a la subvariedad $M(\mathbf{x}) := \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m : G(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = 0\}$ de $\mathbb{R}^m$.

Observación 4.1. *$M(\mathbf{x})$ también tiene estructura de variedad diferenciable de clase $\mathcal{C}^2$ para todo $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$, por las condiciones exigidas a G, y además existe una proyección canónica de $\mathcal{M}$ sobre $M(\mathbf{x})$, fijada $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$, dada por*

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &\longrightarrow M(\mathbf{x}) . \\ (\mathbf{x}, \mathbf{z}) &\longmapsto \mathbf{z} \end{aligned}$$

Con las hipótesis y notaciones anteriores, presentaremos dos lemas, análogos al lema fundamental del cálculo de variaciones (lema 3.11) y a la proposición 3.6, respectivamente, pero previamente es necesaria la siguiente

Definición 4.2. *Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$. Un* ***campo tangente a** $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ **a lo largo de una sección s*** *$\in \Gamma(\Omega, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$* ***(o con soporte en s)****, definida por $s(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}))$ con $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$, es una aplicación que asigna a cada punto $\mathbf{a} \in \Omega$ un vector tangente a $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ en el punto $s(\mathbf{a})$:*

$$\mathbf{a} \mapsto D_{s(\mathbf{a})} \in T_{s(\mathbf{a})}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m).$$

Diremos, además, que D_s es ***vertical*** *si, para cada $\mathbf{a} \in \Omega$, el vector $D_{s(\mathbf{a})}$ se proyecta en 0 mediante la aplicación lineal tangente $\Pi_{*,s(\mathbf{a})} : T_{s(\mathbf{a})}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) \to T_{\mathbf{a}}\mathbb{R}^n$. En otras palabras, D_s es* ***vertical*** *si $D_{s(\mathbf{a})} \in \operatorname{Ker} \Pi_{*,s(\mathbf{a})}$, $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. A este núcleo se le conoce habitualmente como* ***espacio tangente vertical de*** *$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ en $s(\mathbf{a})$, y se denota por $V_{s(\mathbf{a})}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$.*

Toda sección del fibrado $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es de la forma $s(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}))$, donde $\mathbf{u}$ es una función de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$. En este sentido, hablaremos de *campos tangentes con soporte en* $\mathbf{u}$.

Observación 4.3. *Existe una identificación canónica entre el espacio tangente vertical de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ en un punto fijado de este, $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $V_{(\mathbf{a},\mathbf{b})}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$, y el espacio tangente $T_b\mathbb{R}^m$, puesto que $\Pi_{*,(\mathbf{a},\mathbf{b})}(T_{\mathbf{b}}\mathbb{R}^m) = 0$.*

Además como, fijada una base, existe un isomorfismo entre $T_{\mathbf{b}}\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^m$, se tiene que $V_{(\mathbf{a},\mathbf{b})}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) \simeq \mathbb{R}^m$.

De esta manera, los campos tangentes verticales a lo largo de una sección s se pueden entender como aplicaciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, es decir, $D : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. En adelante, se considerarán como campos o aplicaciones según convenga.

Para el siguiente resultado, denotaremos por $\Pi^{(\mathbf{x},\mathbf{z})}$ a la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^m$ sobre el espacio tangente de $M(\mathbf{x})$ en $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$, $T_{\mathbf{z}}M(\mathbf{x})$.

Lema 4.4. *Sea $\psi : \Omega \to \mathbb{R}^m$ una aplicación continua, y $\mathbf{u} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^m$ de clase $\mathcal{C}^1$ cuya gráfica esté contenida en la subvariedad $\mathcal{M}$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.*

Si $\int_\Omega \psi(\mathbf{x}) \cdot \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0$ para todo $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ campo tangente vertical con soporte en $\mathbf{u}$, entonces:

$$\Pi^{(\mathbf{x},\mathbf{z})}(\psi(\mathbf{x})) = 0, \text{ para todo } x \in \Omega.$$

Demostración. Fijemos un $\mathbf{x_0} \in \Omega$, y sea $\mathbf{z_0} := \mathbf{u}(\mathbf{x_0})$. Sean $D_1, ..., D_{m-r}, V_1, ..., V_r$ campos tangentes a $\mathcal{M}$ de clase $\mathcal{C}^1$ cuyos valores en cada punto $(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ de un entorno $\mathcal{U}$ de $(\mathbf{x_0}, \mathbf{z_0})$ en $\mathcal{M}$ sean una base ortonormal de $T_{(\mathbf{x},\mathbf{z})}\mathcal{M}$ donde para cada $(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in \mathcal{U}$, los valores de

$D_1, ..., D_{m-r}$ en $(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ forman base de $T_{\mathbf{z}}M(\mathbf{x})$, donde $M(x)$ se entiende como subvariedad de $\mathcal{M}$ y $T_{\mathbf{z}}M(\mathbf{x})$ como subespacio de $T_{(\mathbf{x},\mathbf{z})}\mathcal{M}$.

Escojamos una bola $\mathcal{B} = B(x_0, R)$, de centro x_0 y radio R con $\{(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x})) : \mathbf{x} \in \mathcal{B}\} \subset \mathcal{U}$, y funciones $\varphi_1, ..., \varphi_{m-r} \in \mathcal{C}_c^1(\mathcal{B}, \mathbb{R})$. Entonces, se tiene que

$$\varphi(\mathbf{x}) := \varphi_1(\mathbf{x})(D_1)_{(\mathbf{x},\mathbf{u}(\mathbf{x}))} + ... + \varphi_{m-r}(\mathbf{x})(D_{m-r})_{(\mathbf{x},\mathbf{u}(\mathbf{x}))}$$

es un campo tangente vertical de clase $\mathcal{C}_c^1(\mathcal{B}, \mathbb{R}^m)$ a lo largo de $\mathbf{u}$.

Por la identificación de $\mathbb{R}^m$ con $V_{(\mathbf{x},\mathbf{u}(\mathbf{x}))}\mathcal{M}$ fijadas bases, como $\psi(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m$, existen funciones continuas de $\mathcal{B}$ en $\mathbb{R}$, $a_l(\mathbf{x})$, $b_k(\mathbf{x})$ tales que

$$\psi(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^{m-r} a_l(\mathbf{x})(D_l)_{(\mathbf{x},\mathbf{u}(\mathbf{x}))} + \sum_{k=1}^{r} b_k(\mathbf{x})(V_k)_{(\mathbf{x},\mathbf{u}(\mathbf{x}))},\ \mathbf{x} \in \mathcal{B} \tag{4.1}$$

Por la elección de los campos D_l y V_k, la hipótesis de que $\int_\Omega \psi(\mathbf{x}) \cdot \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0$ puede escribirse como

$$\int_\Omega \left[a_l(\mathbf{x})\varphi_1(\mathbf{x}) + ... + a_{m-r}(\mathbf{x})\varphi_{m-r}(\mathbf{x})\right] d\mathbf{x} = 0 \tag{4.2}$$

Aplicando el lema 3.11, se tiene que $a_l(\mathbf{x}) = 0$ en $\mathcal{B}$ para $1 \leq l \leq m - r$. Observando la ecuación (4.1), se puede deducir que esto es equivalente a que $\Pi^{(\mathbf{x},\mathbf{u}(\mathbf{x}))}(\psi(\mathbf{x})) = 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathcal{B}$. En particular, será cierto para $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, que como es arbitrario en Ω, se tiene el enunciado del lema. □

Lema 4.5. *Consideremos la clase $\mathfrak{C}$ de aplicaciones $\mathbf{v} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ tales que la imagen de la prolongación 1-jet de $\mathbf{v}$, $j^1\mathbf{v}$, está contenida en el dominio de una funcional J dada,* $\mathrm{Dom}(J)$*, y que satisfacen la condición de ligadura $G(\mathbf{x}, \mathbf{v}(\mathbf{x})) = 0\ \ \forall \mathbf{x} \in \Omega$.*

Si $\mathbf{u} \in \mathfrak{C}$ es un mínimo relativo débil de J en la clase $\mathfrak{C}$, entonces la primera variación $\delta_{\mathbf{u}}J(\varphi) = 0$ para todo $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ campo vectorial tangente a lo largo de $\mathbf{u}$.

Demostración. Por ser $\mathbf{u}$ un mínimo relativo de J, se verifica que existe $\varsigma > 0$ tal que $J(\mathbf{u}) \leq J(\mathbf{v})$, $\ \forall \mathbf{v} \in \mathfrak{C}$ verificando $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ en $\partial\Omega$, y $\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\| < \varsigma$.

Sea $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ un campo vectorial arbitrario tangente a lo largo de $\mathbf{u}$. Mediante construcciones elementales, podemos encontrar una variación general de $\mathbf{u}$ en la dirección de φ, en el sentido de la observación 3.1, del capítulo anterior, que denotaremos por $\psi(\mathbf{x}, t)$.

Definamos, entonces, $\Phi(t) := J(\psi(\cdot, t))$, es decir, la función que resulta de aplicar la funcional J a la variación general, fijada t y dejando libre la variable $\mathbf{x} \in \Omega$. Esta función satisface $\Phi(t) \geq \Phi(0)$, para valores de $|t|$ suficientemente pequeños. De aquí se deduce que $\delta_{\mathbf{u}}J(\varphi) \overset{*}{=} \frac{d}{dt}(J(\psi))|_{t=0} = \frac{d}{dt}\Phi(t)|_{t=0} = 0$, donde en * hemos razonado como en la observación 3.1; y concluimos lo que queríamos ver.

□

Este último resultado nos motiva la siguiente

Definición 4.6. *Una aplicación* $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ *sujeta a alguna ligadura holónoma* $G(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x})) = 0$ *se dice* ***punto crítico ligado*** *de* J *si* $\delta_{\mathbf{u}} J(\varphi) = 0$ *para todo* $\varphi \in \mathcal{C}^1_c(\Omega, \mathbb{R}^m)$ *campo vectorial tangente a lo largo de* $\mathbf{u}$*.*

El resultado principal de esta sección nos permite asignar a todo problema variacional con ligaduras holónomas un problema variacional equivalente sin ligaduras. Este método se conoce como regla de los multiplicadores de Lagrange, y lo probamos a continuación.

Teorema 4.7. *Sea* $\mathbf{u}$ *de clase* $\mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R}^m)$*. Si* $\mathbf{u}$ *es un extremal débil ligado de* J *con respecto a las condiciones de ligadura* $G_j(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x})) = 0, \quad 1 \leq j \leq r$*, entonces existen funciones continuas en* Ω*,* $\lambda_1, ..., \lambda_r$*, llamadas* ***multiplicadores de Lagrange****, tales que* $\mathbf{u}$ *es un extremal de la funcional* $J^*(\mathbf{v}) = \int_\Omega F^*(\mathbf{x}, \mathbf{v}(\mathbf{x}), \mathbf{v}'(\mathbf{x}))d\mathbf{x}$*, donde la lagrangiana es*

$$F^*(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{p}) = F(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{p}) - \sum_{j=1}^{r} \lambda_j(\mathbf{x}) G_j(\mathbf{x}, \mathbf{z}).$$

Demostración. Por simplicidad de lectura, usaremos la notación del operador de Lagrange:

$$\begin{aligned} L_F : \mathcal{C}^s(\Omega, \mathbb{R}^m) &\longrightarrow \mathcal{C}^{s-2}(\Omega, \mathbb{R}^m)\ , \\ \mathbf{u} &\longmapsto L_F(\mathbf{u}) \end{aligned}$$

definida por $L_F(\mathbf{u}) = (v_1, ..., v_m)$, donde, para cada $1 \leq j \leq m$,

$$v_j = \frac{\partial F}{\partial z_j}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{u}') - \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i}\left(\frac{\partial F}{\partial p_{ji}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{u}')\right)$$

de modo que las ecuaciones de Euler-Lagrange presentadas en el apartado anterior se pueden escribir como $L_F(\mathbf{u}) = 0$.

Si $\mathbf{u}$ es un punto crítico ligado de clase $\mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R}^m)$, por el lema 4.5, se tiene que $0 = \delta_{\mathbf{u}} J(\varphi) = \int_\Omega L_F(\mathbf{u})\varphi d\mathbf{x}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}^1_c(\Omega, \mathbb{R}^m)$ campos vectoriales tangentes a lo largo de $\mathbf{u}$. Aplicando el lema 4.4, tendremos que $\Pi^{(\mathbf{x},\mathbf{u})}(L_F(\mathbf{u})) = 0$, es decir, que $L_F(\mathbf{u})(\mathbf{x})$ es perpendicular al espacio tangente $T_{\mathbf{u}(\mathbf{x})}M(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$. Entonces, $L_F(\mathbf{u})(\mathbf{x})$ debe ser una combinación lineal de los gradientes de las funciones de ligadura, puesto que forman base de los vectores normales a la subvariedad. En otras palabras, existen funciones $\lambda_1(\mathbf{x}), ..., \lambda_r(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in \Omega$ tal que

$$L_F(\mathbf{u})(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k(\mathbf{x}) \nabla_{(\mathbf{x},\mathbf{u}(\mathbf{x}))} G_k, \text{ con } \nabla_{(\mathbf{x},\mathbf{u}(\mathbf{x}))} G_k := \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial G_k}{\partial z_j}(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x})) \left(\frac{\partial}{\partial z_j}\right)_{(\mathbf{x},\mathbf{u}(\mathbf{x}))}.$$

En definitiva, se tiene que, para cada $1 \leq j \leq r$,

$$\frac{\partial F}{\partial z_j}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{u}') - \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i}\left(\frac{\partial F}{\partial p_{ji}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{u}')\right) = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k(\mathbf{x}) \frac{\partial G_k}{\partial z_j}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

Esto es equivalente a que $L_{F^*}(\mathbf{u}) = 0$ para F^* como en el enunciado, de manera que concluimos lo que queríamos ver.

$\square$

4.2. Cálculo de geodésicas

Dada una superficie $\mathbb{S}$ de $\mathbb{R}^3$, llamamos **geodésicas** de $\mathbb{S}$ a las curvas sobre ella que representan la trayectoria más corta entre dos puntos cualesquiera de la superficie.

Abordemos el cálculo de geodésicas sobre $\mathbb{S}$ como un problema variacional condicionado por ligaduras holónomas, planteándolo como sigue.

Una curva parametrizada de $\mathbb{R}^3$ es una aplicación $v : [a,b] \to \mathbb{R}^3$, donde $[a,b]$ es un segmento de $\mathbb{R}$. Si $\{z_1, z_2, z_3\}$ son las coordenadas de $\mathbb{R}^3$, consideremos una superficie $\mathbb{S}$ dada

$$\mathbb{S} \equiv \{z \in \mathbb{R}^3 : G(z) = c\},$$

siendo G una función de $\mathbb{R}^3$ con valores en $\mathbb{R}$ y c una constante. La condición para que una curva v esté en $\mathbb{S}$ es que $G(v(t)) = c$ para todo $t \in [a,b]$.

La longitud de la curva v está dada por la funcional $\mathcal{L}(t, v, v') := \int_a^b \|v'(t)\| dt$, luego las **geodésicas** que unen los puntos A y B de $\mathbb{S}$ son aquellas curvas $v : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ tales que $v(a) = A,\ v(b) = B$ que minimizan la funcional $\mathcal{L}$ y además verifican la condición de ligadura $G(v(t)) = c$. Caractericemos computacionalmente estas curvas.

De los resultados teóricos desarrollados en este capítulo, deducimos que los extremales $u \in \mathcal{C}^2([a,b], \mathbb{R}^3)$ de $\mathcal{L}$ sujetos a la ligadura holónoma $G(z) = c$, son extremales de la funcional

$$\mathcal{L}^*(t, v, v') := \int_a^b (|v'(t)| + \lambda(t)G(v(t)))\, dt,$$

para alguna aplicación continua $\lambda(t)$. Por lo tanto, si llamamos F a la lagrangiana asociada a $\mathcal{L}$, $F(t, v, v') = |v'(t)|$, y F^*, a la asociada a $\mathcal{L}^*$, $F^*(t, v, v') = |v'(t)| + \lambda(t)G(v(t))$, se verifican las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial F^*}{\partial z}(t, u, u') - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F^*}{\partial p}(t, u, u')\right) = 0$$

ó, equivalentemente,

$$\frac{\partial F}{\partial z}(t, u, u') - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial p}(t, u, u')\right) = \lambda(t)\frac{\partial G}{\partial z}(t, u),$$

que en nuestro caso se corresponde con

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{u'(t)}{|u'(t)|}\right) = \lambda(t)\frac{\partial G}{\partial z}(t, u),$$

donde usamos notación matricial para $\frac{\partial F}{\partial z}$, $\frac{\partial F}{\partial p}$, $\frac{\partial F^*}{\partial z}$ y $\frac{\partial F^*}{\partial p}$.

Por lo tanto, si u es una geodésica de $\mathbb{S}$ que une a y b, verifica la ecuación anterior y, además, es parametrizable por la longitud del arco, es decir, $|u'(t)| = \text{constante} \neq 0$, $\forall t \in [a,b]$. Reparametrizando, entonces, podemos suponer que $|u'(t)| = 1$, y la ecuación anterior queda

$$\frac{d^2u(s)}{dt^2} = \lambda(t)\frac{\partial G(\tilde{u}(t))}{\partial z}. \tag{4.3}$$

Recíprocamente, toda solución de la ecuación (4.3) $u(t)$ de clase $\mathcal{C}^2$ no constante y que verifique las condiciones de ligadura que definen $\mathbb{S}$ con $a \leq t \leq b$, también es parametrizable por la longitud del arco y, por lo tanto, es una geodésica en $\mathbb{S}$.

En efecto, consideremos las ecuaciones 4.3. La ecuación de ligadura $G(u(t)) = c$ implica que $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial G}{\partial z_i}(u(t))u_i'(t) = 0$. Por otra parte, $\frac{d}{dt}|u'(t)|^2 = 2\displaystyle\sum_{i=1}^{3} u_i'(t)u_i''(t)$, luego

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u'(t)|^2 = \sum_{i=1}^{3} u_i'(t)u_i''(t) = \lambda(t)\sum_{i=1}^{3} u_i'(t)\frac{\partial G}{\partial z_i}(u(t)) = 0,$$

de modo que $|u'(t)|$ es constante, y es no nula porque $u(t)$ no es constante, entonces es parametrizable por la longitud del arco.

En definitiva, hemos probado que las geodésicas de $\mathbb{S}$ que unen los puntos a y b son todas las soluciones de la ecuación (4.3) que cumplen la condición de ligadura considerada.

Ejemplo 4.8. ***Cálculo de geodésicas en una esfera.***
Consideremos aplicaciones u como antes, para la superficie $\mathbb{S} \equiv \{z \in \mathbb{R}^3 : |z| = R\}$. Las geodésicas de una esfera $\mathbb{S}$ son segmentos de circunferencias máximas de esta, entendidas como aquellas que se forman por la intersección de la frontera de dicha esfera con un plano que contiene a su centro.

En efecto, sea $u(t)$ una geodésica de $\mathbb{S}$. En este caso, la condición de ligadura es $G(u(t)) \equiv \{|u(t)| = R\}$, y por la ecuación (4.3), existe una función $\lambda(t)$ tal que

$$u_i''(t) = \lambda(t)\frac{u_i(t)}{|u(t)|} = \lambda(t)\frac{u_i(t)}{R}, \quad 1 \leq i \leq 3.$$

Calculemos qué función es $\lambda(t)$ derivando dos veces respecto de t la igualdad $|u(t)|^2 = R^2$. Obtenemos $u \cdot u'' = -|u'|^2 = -1$, de donde se tiene $-1 = \sum_i u_i \cdot u_i'' = \lambda \sum_i \frac{u_i^2}{R}$ y, finalmente, $\lambda = -\frac{R}{|u|^2} = -\frac{1}{R}$.

Sustituyendo entonces en la expresión obtenida por (4.3), $u_i'' = -\frac{u_i}{R^2}$ y, por lo tanto, su norma es $|u''(t)| = \sqrt{\sum_i u''^2_i} = \sqrt{\frac{1}{R^4}\sum_i u_i^2} = \sqrt{\frac{1}{R^2}} = \frac{1}{R}$. La función curvatura de $y = u(t)$ está definida en cada punto como $t_0 \longmapsto |u''(t_0)|$ y, como $R > 0$, en este caso es constante mayor que cero, así que necesariamente la geodésica es una circunferencia máxima de la esfera $\mathbb{S}$, o un segmento de esta.

4.3. Ligaduras no holónomas

Para comenzar esta sección, observemos que todo problema variacional de orden mayor que uno podría expresarse como otro problema equivalente de orden uno sujeto a ligaduras no holónomas. Ilustrémoslo, por ejemplo, para el caso de segundo orden:
la integral $\int_\Omega F(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{u}'')dx$ podría escribirse como $\int_\Omega F(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{v}')d\mathbf{x}$ con $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ definida como $\mathbf{v}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}'(\mathbf{x}) = 0$, es decir, dada por una ligadura no holónoma de la forma

$G(\mathbf{w}, \mathbf{w}') = 0$, donde $\mathbf{w}(\mathbf{x}) := (\mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{v}(\mathbf{x}))$.

Sea $F(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{p}) \in \mathcal{C}^1(\mathcal{A}, \mathbb{R})$, con $\mathcal{A}$ un abierto de $J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, la lagrangiana considerada, y sea $G(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{p}) = (G_1(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{p}), ..., G_r(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{p}))$ de clase $\mathcal{C}^1(\mathcal{A}, \mathbb{R}^r)$.

Sea Ω un abierto conexo acotado de $\mathbb{R}^n$. Si $\mathbf{v} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ es una función tal que la imagen de $j^1\mathbf{v}$ está contenida en $\mathcal{A}$, podemos definir la funcional

$$J(\mathbf{v}) = \int_\Omega F(\mathbf{x}, \mathbf{v}(\mathbf{x}), \mathbf{v}'(\mathbf{x}))d\mathbf{x}.$$

En adelante, llamaremos **funciones admisibles** a aquellas $\mathbf{v}$ que verifican la condición anterior.

Sea $\mathbf{u}$ un mínimo relativo de la funcional J dentro de la clase $\mathfrak{C}$ de funciones admisibles $\mathbf{v}$ tales que $\mathbf{v}|_{\partial\Omega} = \mathbf{u}|_{\partial\Omega}$ y que verifican las condiciones de ligadura

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{v}') = 0.$$

En general, es difícil establecer resultados sobre condiciones necesarias de extremo. Entendiendo la función G como un operador diferencial de primer orden y bajo ciertas hipótesis sobre $\mathbf{u}$ y la clase $\mathfrak{C}$ se puede demostrar que existen funciones $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_r) \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^r)$, denominadas **multiplicadores de Lagrange**, tales que

$$\int_\Omega \left[\left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{z}} + \lambda \frac{\partial G}{\partial \mathbf{z}} \right) \cdot \varphi + \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}} + \lambda \frac{\partial G}{\partial \mathbf{p}} \right) \cdot \varphi' \right] d\mathbf{x} = 0, \text{ para todo } \varphi \in \mathcal{C}^1_c(\Omega, \mathbb{R}^m).$$

Además, bajo ciertas condiciones de diferenciabilidad sobre $\mathbf{u}$ y los multiplicadores, λ, como las que se presentan en [10], se pueden deducir de la identidad anterior las ecuaciones de Lagrange

$$\frac{d}{d\mathbf{x}} \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}} + \lambda \frac{\partial G}{\partial \mathbf{p}} \right) - \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{z}} + \lambda \frac{\partial G}{\partial \mathbf{z}} \right) = 0$$

No obstante, estas condiciones no son fáciles de comprobar en la práctica.

En los enunciados anteriores hemos utilizado notación matricial, donde $\frac{\partial F}{\partial \mathbf{z}} = \left(\frac{\partial F}{\partial z_1}, \cdots, \frac{\partial F}{\partial z_m} \right)$, y análogamente para $\frac{\partial G}{\partial \mathbf{z}}, \frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}}, \frac{\partial G}{\partial \mathbf{p}}$.

Como consecuencia de las dificultades expuestas, en este apartado nos restringiremos al caso de una variable independiente.

Sea, entonces, la funcional

$$\begin{aligned} J : \mathcal{C}^2([a,b], \mathbb{R}^m) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{v} &\longmapsto J(\mathbf{v}) = \int_a^b F(x, \mathbf{v}, \mathbf{v}')dx = \int_a^b F(j^1_x \mathbf{v})dx \end{aligned}.$$

Nuestro objetivo es alcanzar una regla análoga a la de los multiplicadores de Lagrange con las hipótesis adecuadas, que enunciamos a continuación.

Teorema 4.9. ***(Regla de los multiplicadores de Lagrange)***
Sea $\mathcal{A}$ un abierto de $J^1(\Pi)$, $F, G_1, ..., G_r \in \mathcal{C}^3(\mathcal{A}, \mathbb{R})$ y supongamos que la matriz $\frac{\partial(G_1,...,G_r)}{\partial(p_1,...,p_m)}$ es de rango r en cada punto.

Sea $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{R}^m)$ un mínimo local de la funcional J dentro de la clase de funciones admisibles $\mathbf{v}$ que verifican las condiciones de ligadura

$$G_j(x,\mathbf{v}(x),\mathbf{v}'(x)),\ \ 1 \leq j \leq r.$$

Existen, entonces, funciones $\lambda_1, ..., \lambda_r \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ tales que $\mathbf{u}$ es un extremal de la funcional

$$J^*(\mathbf{v}) = \int_a^b F^*(x,\mathbf{v}(x),\mathbf{v}'(x))dx,$$

donde

$$F^*(x,\mathbf{z},\mathbf{p}) + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i(x) G_i(x,\mathbf{z},\mathbf{p}).$$

Dedicaremos el resto del apartado a probar este resultado.

Comencemos observando que, por hipótesis, podemos suponer que $\det\left(\frac{\partial(G_1,...,G_r)}{\partial(p_1,...,p_r)}\right) \neq 0$, reordenando las coordenadas si es preciso.

Se tiene, entonces, por el teorema de las funciones implícitas, que cada punto del subconjunto de $J^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ dado por las ecuaciones de ligadura $G_j(x,\mathbf{z},\mathbf{p}) = 0$ tiene un entorno en el cual las ecuaciones de ligadura son equivalentes a

$$p_i = g_i(x,\mathbf{z},p_{r+1},...,p_n),\ 1 \leq i \leq r, \tag{4.4}$$

con g_i funciones de clase $\mathcal{C}^3$.

En consecuencia, si descomponemos $\mathbf{u} = (u_1,...,u_n)$ como $\mathbf{u} = (\mathbf{v},\mathbf{w})$, de manera que $\mathbf{v} = (u_1,...,u_r)$, $\mathbf{w} = (u_{r+1},...,u_n)$, es decir,

$$\begin{cases} v_i = u_i, & 1 \leq i \leq r \\ \\ w_j = u_{r+j}, & 1 \leq j \leq m-r \end{cases},$$

localmente se puede escribir

$$v_i'(x) = g_i(x,\mathbf{v}(x),\mathbf{w}(x),\mathbf{w}'(x)),\ 1 \leq i \leq r.$$

Definamos, a continuación, una "variación" $(r+1)-$paramétrica de $\mathbf{w}(x)$, con parámetros $t = (t_0,...,t_r) \in \mathbb{R}^{r+1}$

$$\begin{aligned} \mathcal{W} : (-\epsilon,\epsilon)^{r+1} \times [a,b] &\longrightarrow \mathbb{R}^{m-r} \\ (t_0,...,t_r,x) &\longmapsto \mathcal{W}(t_0,t_1,...,t_r,x) = \mathbf{w}(x) + \sum_{h=0}^{r} t_h \varphi_h(x) \end{aligned}, \tag{4.5}$$

con $\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_r \in \mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{R}^{m-r})$ funciones que se anulan en a y b.

De la definición se tiene que

$$
\begin{cases} \mathcal{W}(0,x) = \mathbf{w}(x), & a \leq x \leq b \\ \\ \mathcal{W}(t,a) = \mathbf{w}(a), \mathcal{W}(t,b) = \mathbf{w}(b), & \forall t \in (-\epsilon, \epsilon) \\ \\ \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial t_h} = \varphi_h, & 0 \leq h \leq r \end{cases} \tag{4.6}
$$

Observemos que, en particular, sus extremos son fijos.

Fijando los parámetros $t = (t_0, ..., t_r)$, consideremos el siguiente sistema de r ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$
G_j(x, \mathbf{y}, \mathcal{W}, \mathbf{y}', \mathcal{W}') \tag{4.7}
$$

con incógnita $\mathbf{y}(x) = (y_1(x), ..., y_r(x))$.

Para $t = 0$, el sistema anterior tiene $\mathbf{y}(x) = \mathbf{v}(x)$ como solución, luego del teorema de existencia y dependencia diferenciable de las condiciones iniciales se deduce que existe un $k > 0$ tal que para $|t_h| < k,\ 0 \leq h \leq r$, el sistema (4.7) tiene una solución $\mathbf{y}(x) := \mathcal{V}(t,x),\ \mathcal{V} = (\mathcal{V}_1, ..., \mathcal{V}_r)$, de clase $\mathcal{C}^1$ que verifica las condiciones iniciales

$$
\mathcal{V}(t,a) = \mathbf{v}(a). \tag{4.8}
$$

y tal que las derivadas segundas $\left\{ \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial x \partial t_h} \right\}_{0 \leq h \leq r}$ son continuas.

De la unicidad de la solución del problema de Cauchy (4.7), (4.8), se deduce que

$$
\mathcal{V}(0,x) = \mathbf{v}(x), \qquad \forall x \in [a,b]. \tag{4.9}
$$

Nuestro objetivo ahora es obtener una variación de $\mathbf{u}(x)$ a partir de $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$, es decir, una $\mathcal{U}(\tau,x) = (\mathcal{V}(\tau,x), \mathcal{W}(\tau,x))$ con los extremos fijos:

$$
\mathcal{U}(\tau,a) = u(a),\ \mathcal{U}(\tau,b) = u(b), \qquad \tau \in (-\epsilon, \epsilon). \tag{4.10}
$$

Para ello, trataremos de encontrar soluciones al sistema de ecuaciones

$$
\mathcal{V}_i(t,b) = v_i(b), \qquad 1 \leq i \leq r \tag{4.11}
$$

despejando r de los parámetros en función de uno de ellos, por ejemplo t_0. Así, si escribimos $t_1, ..., t_r$ en función de t_0, por las ecuaciones (4.6), (4.8) y (4.11), se tiene que la variación

$$
\mathcal{U}(t_0,x) = (\mathcal{V}(t_0, t_1(t_0), ..., t_r(t_0), x), \mathcal{W}(t_0, t_1(t_0), ..., t_r(t_0), x))
$$

verificará (4.10), como queríamos, y además, por las ecuaciones (4.6) y (4.9), como $t_i(0) = 0,\ 1 \leq i \leq r$, entonces $\mathcal{U}(0,x) = \mathbf{u}(x),\ \forall x \in [a,b]$. Por todo ello, estudiemos el sistema (4.11).

Sea $y(x) = \mathcal{V}(t,x)$ una solución del sistema de ecuaciones (4.7), es decir,

$$G_j(x, \mathcal{V}(t,x), \mathcal{W}(t,x), \mathcal{V}'(t,x), \mathcal{W}'(t,x)) = 0, \ 1 \leq j \leq r. \tag{4.12}$$

Derivémoslas, respecto de los parámetros t_h y valoremos en $t = 0$. Para simplificar la exposición, usaremos la siguiente notación:

$$\overline{\frac{\partial G_j}{\partial \mathbf{z}}}(x) := \left(\overline{\frac{\partial G_j}{\partial z_1}}(x), ..., \overline{\frac{\partial G_j}{\partial z_m}}(x) \right), \text{ con } \overline{\frac{\partial G_j}{\partial z_k}}(x) := \frac{\partial G_j}{\partial z_k}(x, \mathbf{u}(x), \mathbf{u}'(x)), \ 1 \leq k \leq m,$$

$$\overline{\frac{\partial G_j}{\partial \mathbf{p}}}(x) := \left(\overline{\frac{\partial G_j}{\partial p_1}}(x), ..., \overline{\frac{\partial G_j}{\partial p_m}}(x) \right), \text{ con } \overline{\frac{\partial G_j}{\partial p_k}}(x) := \frac{\partial G_j}{\partial p_k}(x, \mathbf{u}(x), \mathbf{u}'(x)), \ 1 \leq k \leq m.$$

Obtenemos la expresión que sigue:

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{\frac{\partial G_j}{\partial z_i}}(x) \frac{\partial \mathcal{V}_i}{\partial t_h}(0,x) + \sum_{j=1}^{m-r} \overline{\frac{\partial G_j}{\partial z_{r+j}}}(x) \frac{\partial \mathcal{W}_j}{\partial t_h}(0,x) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{r} \overline{\frac{\partial G_j}{\partial p_i}}(x) \frac{\partial \mathcal{V}_i'}{\partial t_h}(0,x) + \sum_{j=1}^{m-r} \overline{\frac{\partial G_j}{\partial p_{r+j}}}(x) \frac{\partial \mathcal{W}_j'}{\partial t_h}(0,x) = 0.$$

De la ecuación (4.6) se tiene que $\frac{\partial \mathcal{W}_j}{\partial t_h}(0,x) = (\varphi_h)_j(x), \ 0 \leq h \leq r$. De esta manera, la expresión anterior será

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{\frac{\partial G_j}{\partial z_i}}(x) \frac{\partial \mathcal{V}_i}{\partial t_h}(0,x) + \sum_{j=1}^{m-r} \overline{\frac{\partial G_j}{\partial z_{r+j}}}(x) (\varphi_h)_j(x) + \tag{4.13}$$

$$+ \sum_{i=1}^{r} \overline{\frac{\partial G_j}{\partial p_i}}(x) \frac{\partial \mathcal{V}_i'}{\partial t_h}(0,x) + \sum_{j=1}^{m-r} \overline{\frac{\partial G_j}{\partial z_{r+j}}}(x) (\varphi_h')_j(x) = 0, \ 0 \leq h \leq r.$$

Si denotamos $\mathcal{Z}(t,x) = (\mathcal{V}(t,x), \mathcal{W}(t,x))$, y $\overline{\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial t_h}}(x) := \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial t_h}(0,x)$, podemos escribir las ecuaciones anteriores matricialmente de la manera que sigue:

$$\overline{\frac{\partial G_j}{\partial \mathbf{z}}}(x) \overline{\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial t_h}}(x) + \overline{\frac{\partial G_j}{\partial \mathbf{p}}}(x) \overline{\frac{\partial \mathcal{Z}'}{\partial t_h}}(x) = 0, \quad 0 \leq h \leq r, \ 1 \leq j \leq r. \tag{4.14}$$

Cabe resaltar, por otro lado, que de las ecuaciones (4.6) y (4.8) podemos deducir las identidades

$$\overline{\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial t_h}}(a) = \left(\overline{\frac{\partial \mathcal{Z}_1}{\partial t_h}}(a), ..., \overline{\frac{\partial \mathcal{Z}_m}{\partial t_h}}(a) \right) = 0, \ \ \overline{\frac{\partial \mathcal{Z}_j}{\partial t_h}}(b) = 0, \ \ 0 \leq h \leq r, \ r+1 \leq j \leq m. \tag{4.15}$$

Concluido el estudio de las ecuaciones y condiciones que tenemos, construyamos los multiplicadores de Lagrange que buscamos, $\lambda_1(x), ..., \lambda_r(x)$. Para ello, en primer lugar, observemos que como $\mathbf{u} = (\mathbf{v}, \mathbf{w})$ es un mínimo local de J condicionado a las ligaduras (4.4), la función definida por

$$\Phi(t) := \int_a^b F(x, \mathcal{V}(t,x), \mathcal{W}(t,x), \mathcal{V}'(t,x), \mathcal{W}'(t,x)) dx$$

tiene un mínimo local en $t = 0$ condicionado a las ligaduras dadas por el sistema (4.11).

Supongamos que las diferenciales en $t = 0$ de las funciones $\mathcal{V}_1, ..., \mathcal{V}_r$ son linealmente independientes (para no alargar la exposición, no tratamos el caso en que sean linealmente dependientes, que puede consultarse si se desea, por ejemplo, en [8]). Entonces podremos aplicar el teorema de los multiplicadores de Lagrange para funciones diferenciables en abiertos de $\mathbb{R}^n$, según el que existen constantes $l_1, ..., l_r \in \mathbb{R}$ no todas nulas tales que $d_0\Phi = \sum_{i=1}^r l_i d_0 \mathcal{V}_i$. Cambiando l_i por $-l_i$, el origen será punto crítico de la función

$$\Psi(t) := \Phi(t) + \sum_{i=1}^{r} l_i \mathcal{V}_i(t, b).$$

En consecuencia, por la definición de punto crítico, se tiene el sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t_h}(0) + \sum_{i=1}^{r} l_i \frac{\partial \mathcal{V}_i}{\partial t_h}(0, b) = 0, \quad 1 \leq h \leq r. \tag{4.16}$$

Nuestro objetivo es elegir los $\varphi_1, ..., \varphi_r$ adecuadamente dejando libre φ_0. Para ello, veamos cómo dependen los $l_1, ..., l_r$ de la elección de los φ_h.

De las ecuaciones (4.14) y (4.15) se deduce que, para cada h fijo, las funciones $\overline{\frac{\partial \mathcal{Z}_j}{\partial t_h}}(x) = \frac{\partial \mathcal{V}_j}{\partial t_h}(0, x)$, $1 \leq j \leq r$ se anulan en a y son solución de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales no homogéneas como el que sigue:

$$\frac{d}{dx} \overline{\frac{\partial \mathcal{Z}_j}{\partial t_h}} + c_{hi}^j(x) \overline{\frac{\partial \mathcal{Z}_i}{\partial t_h}} = f_h^j(x), \quad 1 \leq j \leq r, \ 0 \leq h \leq r, \tag{4.17}$$

en el que las funciones $f_h^j(x)$ quedan completamente determinadas por los valores de $\mathbf{u}(x) = \mathcal{Z}(0, x)$ y de $\varphi_h(x)$, luego no dependen de la elección de las φ_i con $i \neq h$.

Consideremos ahora las ecuaciones (4.16):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t_h}(0) + \sum_{i=1}^{r} l_i \frac{\partial \mathcal{V}_i}{\partial t_h}(0, b) = 0$$

Como las diferenciales en $t = 0$ de las funciones $\mathcal{V}_j$ son linealmente independientes por hipótesis, reordenando si es necesario, podemos considerar $\det \left(\frac{\partial(\mathcal{V}_1, ..., \mathcal{V}_r)}{\partial(t_1, ..., t_r)} \right)_0 \neq 0$. Entonces existe una única solución $(l_1, ..., l_r)$ del sistema, que depende exclusivamente de la elección de las $\varphi_1(x), ..., \varphi_r(x)$, es decir, no depende del φ_0.

Una vez concluido el análisis de la dependencia de los l_i respecto de los $\varphi_1, ..., \varphi_r$ escogidos, consideremos la lagrangiana del enunciado del teorema:

$$F^*(x, \mathbf{z}, \mathbf{p}) := F(x, \mathbf{z}, \mathbf{p}) + \sum_{j=1}^{r} \lambda_j G_j(x, \mathbf{z}, \mathbf{p}),$$

siendo los multiplicadores λ_j de clase $\mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$, de momento, arbitrarios. Para simplificar la notación, denotaremos $\overline{F^*}(x) := F^*(x, \mathbf{u}(x), \mathbf{u}'(x)) = F^*(j_x^1\mathbf{u})$. Notemos que, a partir de las ecuaciones (4.14) y (4.16), podemos deducir que

$$\int_a^b \left(\frac{\partial \overline{F^*}}{\partial \mathbf{z}} \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial t_0} + \frac{\partial \overline{F^*}}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial \mathcal{Z}'}{\partial t_0} \right) dx + \sum_{j=1}^{r} l_j \frac{\partial \mathcal{Z}_j}{\partial t_0}(0,b) = 0. \tag{4.18}$$

Integrando por partes y sustituyendo con las identidades (4.15):

$$\int_a^b \left[\frac{\partial \overline{F^*}}{\partial \mathbf{z}} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \overline{F^*}}{\partial \mathbf{p}} \right] \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial t_0} dx + \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial \mathcal{Z}_j}{\partial t_0}(0,b) \left(l_j + \frac{\partial \overline{F^*}}{\partial p_j}(b) \right) = 0 \tag{4.19}$$

Para que $\overline{F^*}$ sea extremal de la funcional J^*, escojamos los $\lambda_i(x)$, que hasta ahora eran arbitrarios, como aquellos que resuelven el siguiente problema de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \overline{F}^*}{\partial z_j} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \overline{F}^*}{\partial p_j} = 0 \\ \\ l_j + \frac{\partial \overline{F}^*}{\partial p_j}(b) = 0, \ 1 \leq j \leq r \end{array} \right. \tag{4.20}$$

Desarrollando las ecuaciones y las condiciones iniciales de este problema de Cauchy, quedan las expresiones:

$$\left(\frac{\partial \overline{F}}{\partial z_j} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \overline{F}}{\partial p_j} \right) + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \left(\frac{\partial \overline{G}_i}{\partial z_j} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \overline{G}_i}{\partial p_j} \right) \right) - \sum_{i=1}^{r} \lambda_i' \frac{\partial \overline{G}_i}{\partial p_j} = 0, \ 1 \leq j \leq r \tag{4.21}$$

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i(b) \frac{\partial \overline{G}_i}{\partial p_j}(b) + l_j + \frac{\partial \overline{F}}{\partial p_j}(b) = 0, \ 1 \leq j \leq r. \tag{4.22}$$

Por hipótesis, tenemos que $\det(\frac{\partial G_i}{\partial p_j}) \neq 0$, luego la matriz de coeficientes de las λ_j' deberá ser invertible. Por ello, con los valores de $\lambda_1(b), ..., \lambda_r(b)$ obtenidos en (4.15), de (4.14) podremos deducir cuáles son las funciones $\lambda_1(x), ..., \lambda_r(x)$ que buscábamos: así, queda resuelto el problema (4.13) con una solución, $(\lambda_1, ..., \lambda_r)$ de clase $\mathcal{C}^1$ independiente de la elección de φ, ya que todos los l_i lo son.

Fijadas las $\lambda_1(x), ..., \lambda_r(x)$ como las soluciones a este problema de Cauchy, la integral (4.19) reduce su expresión a las últimas componentes de $\mathbf{z}$ y $\mathbf{p}$:

$$\int_a^b \sum_{j=r+1}^{m} \frac{\partial \mathcal{Z}_j}{\partial t_0} \left[\frac{\partial \overline{F}^*}{\partial z_j} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \overline{F}^*}{\partial p_j} \right] dx = 0$$

o equivalentemente,

$$\int_a^b \sum_{j=r+1}^{m} (\varphi_0)_{j-r} \left[\frac{\partial \overline{F}^*}{\partial z_j} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \overline{F}^*}{\partial p_j} \right] dx = 0$$

para todo $\varphi_0 \in \mathcal{C}^2([a,b], \mathbb{R}^{m-r})$ verificando $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, puesto que $\frac{\partial \mathcal{Z}_j}{\partial t_0}(x) = \frac{\partial \mathcal{W}_{j-r}}{\partial t_0}(x) = (\varphi_0)_{m-r}(x),\ r+1 \leq j \leq m$, por definición.

Aplicando el lema fundamental del cálculo de variaciones (lema 3.11) a esta segunda ecuación, se deduce que

$$\frac{\partial \overline{F}^*}{\partial z_j} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \overline{F}^*}{\partial p_j} = 0,\ r+1 \leq j \leq m \tag{4.23}$$

Como esta igualdad se satisface para $1 \leq j \leq r$, por ser $\lambda_1(x), ..., \lambda_r(x)$ solución del problema de Cauchy (4.20), y acabamos de deducirla para $r+1 \leq j \leq m$, entonces es cierta para todo j, como queríamos ver.

4.4. Problema isoperimétrico

Concluimos el capítulo con el caso particular del problema isoperimétrico, refiriéndonos así a los problemas variacionales cuyas ligaduras son de la forma

$$\mathcal{G}(\mathbf{y}) := \int_\Omega G(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\mathbf{x}), \mathbf{y}'(\mathbf{x}))d\mathbf{x} = c$$

con c constante, G una función y Ω el dominio de integración. Deben su nombre al problema clásico referido a encontrar la curva cerrada de longitud dada que encierra un área máxima, que citamos en la introducción del trabajo y trataremos como caso particular un poco más adelante. Explicitemos las hipótesis con las que vamos a trabajar.

Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$, $\mathcal{A}$ un abierto de $J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ que contiene la imagen de la prolongación 1-jet de $\mathbf{u}$, $j^1\mathbf{u}$. Supongamos $F(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{p}), G(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{p}) \in \mathcal{C}^2(\mathcal{A}, \mathbb{R})$, y fijemos la constante $c := \mathcal{G}(\mathbf{u})$.

Supondremos además que el espacio de funciones, $\mathcal{S}$, en que trabajaremos verifica la propiedad variacional, que definiremos como sigue:

Definición 4.10. *Decimos que un espacio de funciones $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ verifica la **propiedad variacional** si para cada $\mathbf{v} \in \mathcal{S}$ y cada par de funciones $\psi, \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$ existen constantes $\epsilon_0, t_0 > 0$ tales que $\mathbf{v} + \epsilon\varphi + t\psi \in \mathcal{S}$ para $|\epsilon| < \epsilon_0,\ |t| < t_0$.*

Observación 4.11. *Si $\mathcal{S}$ verifica la propiedad variacional, existe la primera variación de toda $\mathbf{v} \in \mathcal{S}$ en cualquier dirección $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$.*

Para este caso, suponiendo una única ligadura, la regla de los multiplicadores de Lagrange puede enunciarse como sigue:

Teorema 4.12. *Sea $\mathbf{u}$ un mínimo relativo débil de la funcional J, definida por $J(\mathbf{y}) := \int_\Omega F(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\mathbf{x}), \mathbf{y}'(\mathbf{x}))d\mathbf{x}$ en $\mathcal{S}_c := \mathcal{S} \cap \{\mathbf{v} : \mathcal{G}(\mathbf{v}) = c\}$.*

Si $\delta_\mathbf{u}\mathcal{G}(\varphi) \neq 0$ para alguna $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$, entonces existe un número real λ tal que

$$\delta_\mathbf{u} J(\varphi) + \lambda \delta_\mathbf{u}\mathcal{G}(\varphi) = 0,\ \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$$

Si además suponemos que $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R}^m)$, entonces se verifican las ecuaciones de Euler en Ω:

$$\frac{d}{d\mathbf{x}}\left(\frac{\partial F}{\partial p_i} + \lambda \frac{\partial G}{\partial p_i}\right) - \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{z}} + \lambda \frac{\partial G}{\partial \mathbf{z}}\right) = 0, \ 1 \leq i \leq m$$

Demostración. Por hipótesis, existe una función $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$ tal que $\delta_{\mathbf{u}}\mathcal{G}(\psi) = 1$. Tomemos otra función, arbitraria, $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$ y definamos las funciones

$$\Phi(\epsilon, t) := J(\mathbf{u} + \epsilon\varphi + t\psi), \ \Psi(\epsilon, t) := \mathcal{G}(\mathbf{u} + \epsilon\varphi + t\psi)$$

con $(\epsilon, t) \in [-\epsilon_0, \epsilon_0] \times [-t_0, t_0] =: Q$, de manera que para $\epsilon_0, t_0 > 0$ suficientemente pequeños se tiene que $\Phi(\epsilon, t) \geq \Phi(0,0)$ para todos los $(\epsilon, t) \in Q$ verificando $\Psi(\epsilon, t) = c$. Observemos que $\frac{\partial \Psi}{\partial t}(0,0) = \delta_{\mathbf{u}}\mathcal{G}(\psi) = 1$, por lo que podemos aplicar el teorema de los multiplicadores de Lagrange habitual, que nos permite afirmar la existencia de un número real λ tal que $\Phi(\epsilon, t) + \lambda\Psi(\epsilon, t)$ tiene un punto crítico en $(0,0)$. De aquí resulta:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon}(0,0) + \lambda \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon}(0,0) = 0, \ \ \frac{\partial \Phi}{\partial t}(0,0) + \lambda \frac{\partial \Psi}{\partial t}(0,0) = 0$$

o, de otra manera,

$$\delta_{\mathbf{u}}J(\varphi) + \lambda\delta_{\mathbf{u}}\mathcal{G}(\varphi) = 0, \ \ \delta_{\mathbf{u}}J(\psi) + \lambda\delta_{\mathbf{u}}\mathcal{G}(\psi) = 0$$

De la última ecuación se deduce claramente que $\lambda = -\delta_{\mathbf{u}}J(\psi)$, por la elección de la ψ, lo que prueba la independencia respecto de λ de la $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$ escogida. La primera ecuación es, por tanto, la relación del enunciado. La ecuación de Euler-Lagrange se deduce de esta igualdad tal y como hicimos en el capítulo anterior. □

Una vez presentado el resultado para una única ligadura de esta forma, podemos generalizarlo a una colección finita de ellas. Para hacerlo, fijemos las siguientes notaciones: $\mathcal{G}_k(\mathbf{y}) := \int_\Omega G_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{y}')d\mathbf{x}$, con $G_k(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{p}) \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U})$, $1 \leq k \leq r$; $c = (c_1, ..., c_r)$, $c_k := \mathcal{G}_k(\mathbf{u})$, y por último, $\mathcal{S}_c := \mathcal{S} \cap \{\mathbf{v} : \mathcal{G}_k(\mathbf{v}) = c_k, \ k = 1, ..., r\}$, siendo $\mathcal{S}$ un espacio de funciones donde se verifica la propiedad variacional.

Teorema 4.13. *Sea $\mathbf{u}$ un extremo débil de J en el espacio de funciones $\mathcal{S}_c$, y supongamos que existen funciones $\psi_1, ..., \psi_r \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$ tales que la matriz $A = (a_{kl})$ de coeficientes $a_{kl} := \delta_{\mathbf{u}}\mathcal{G}_k(\psi_l)$ tiene rango máximo r.*

Entonces, existen números reales $\lambda_1, ..., \lambda_r$ tales que la funcional dada por

$$J^* := J + \lambda_1\mathcal{G}_1 + ... + \lambda_r\mathcal{G}_r$$

verifica la relación

$$\delta_{\mathbf{u}}J(\varphi) = 0, \ \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$$

Demostración. Consideremos $t = (t_1, ..., t_r)$ y $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$ arbitraria, y definamos

$$\Phi(\epsilon, t) := J(\mathbf{u} + \epsilon\varphi + t_1\varphi_1 + ... + t_r\varphi_r), \ \Psi_k(\epsilon, t) := \mathcal{G}(\mathbf{u} + \epsilon\varphi + t_1\psi_1 + ... + t_r\psi_r)$$

de manera que $\Psi_k, \Phi \in \mathcal{C}^1$, $A = \left(\frac{\partial \Psi_k}{\partial t_l}(0,0)\right)$ y $\Psi(\epsilon, t) \geq \Psi(0,0)$ para $|\epsilon| < \epsilon_0$, $|t| < t_0$ con $\epsilon_0, t_0 > 0$ suficientemente pequeños, y $\Psi_k(\epsilon, t) = c_k$, $1 \leq k \leq r$, con lo que podemos aplicar el teorema de los multiplicadores de Lagrange habitual. Según este, existen reales $\lambda_1, ..., \lambda_r$ tales que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon}(0,0) + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \frac{\partial \Psi_k}{\partial \epsilon}(0,0) = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t_j}(0,0) + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \frac{\partial \Psi_k}{\partial t_j}(0,0) = 0, \ 1 \leq j \leq r$$

De las últimas r ecuaciones se pueden determinar estos multiplicadores, de manera que se prueba su independencia respecto de la elección de φ. Así, la primera ecuación nos da el enunciado del teorema. □

Ejemplo 4.14. ***Problema isoperimétrico clásico.*** *Como aplicación, resolveremos el problema isoperimétrico clásico, cuyo enunciado es el que sigue:*

Enunciado 4.15. De entre todas las curvas de Jordan (cerradas y simples), regulares y de clase $\mathcal{C}^2$, cuya longitud es l, hallar aquella, C, tal que el área de su interior es máxima.

Antes de comenzar el razonamiento, destaquemos que podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que la curva solución C *tiene interior conexo, porque si no lo fuera, se podría construir de manera obvia otra curva de igual longitud con interior conexo y de área mayor.*

Consideremos entonces una curva $f(x) = z, \ a_1 \leq x \leq a_2$ fija que une los puntos $P = (a_1, b_1), \ Q = (a_2, b_2)$ en el plano XZ, y el espacio de funciones, $\mathcal{S}$, formado por las $z = v(x), \ a_1 \leq x \leq a_2$ de clase $\mathcal{C}^1$ verificando las condiciones de frontera $v(a_1) = b_1, \ v(a_2) = b_2$ y que son tales que $f(x) < v(x), \ x \in (a_1, a_2)$.

Notemos que $\mathcal{S}$, definido así, verifica la propiedad variacional. Por otro lado, definamos el área entre las gráficas de las funciones f y v:

$$\mathcal{I}(v) := \int_{a_1}^{a_2} (v(x) - f(x))\, dx$$

Formalicemos a continuación la ligadura motivada por el enunciado del problema como $\mathcal{L}(v) := \int_{a_1}^{a_2} \sqrt{1 + v'^2} dx = c$, donde $c > |P - Q|$ es la longitud de la curva que fija el enunciado, es decir, una constante. Denotemos por $\mathcal{S}_c$ al espacio de funciones que se obtiene de intersecar $\mathcal{S}$ con las funciones v que satisfacen la ligadura anterior.

Con estas hipótesis y notaciones, supongamos que $u \in \mathcal{S}_c$ es un máximo de clase $\mathcal{C}^2$ de la funcional $\mathcal{I}$ en este espacio de funciones. Observemos que como escogimos c estrictamente mayor que $|P - Q|$, se tendrá que u no define una recta. Por ello, existen $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(a_1, a_2)$ de manera que la primera variación de $\mathcal{L}$ en u respecto de la dirección φ es no nula; y aplicando la regla de los multiplicadores de Lagrange expuesta antes, podemos afirmar que existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que u es extremal de $(\mathcal{A} + \lambda\mathcal{L})(u) = \int_{a_1}^{a_2} \left(u + \lambda\sqrt{1 + u'^2}\right) dx$, o de otra manera, solución de la ecuación de Euler asociada:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial(u(x) - f(x))}{\partial p} + \lambda \frac{\partial\left(\sqrt{1 + u'^2}\right)}{\partial p}\right) - \left(\frac{\partial(u(x) - f(x))}{\partial z} + \lambda \frac{\partial\left(\sqrt{1 + u'^2}\right)}{\partial z}\right) = 0$$

Y operando

$$\frac{d}{dx}\left(\lambda\frac{u'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}\right)-1=0\Leftrightarrow\frac{d}{dx}\left(\frac{u'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}\right)=\frac{1}{\lambda}$$

De esta última ecuación, se deduce que la curvatura de u es constante, de manera que se prueba que la solución al problema isoperimétrico clásico es una circunferencia.

Capítulo 5

Cálculo de variaciones en espacios de jets

Sean X, Y variedades diferenciables de dimensiones n y m, respectivamente, $\mathcal{V} = X \times Y$ y $\Pi : \mathcal{V} \to X$ la proyección natural. Supongamos, además, que X es una variedad orientada por una forma diferencial exterior de grado n, ϑ.

Denotemos por $J^1(\Pi)$ al espacio de 1-jets de secciones locales de Π, y consideremos la proyección natural definida en el capítulo 2,

$$\begin{array}{rccc} \Pi_X : & J^1(\Pi) & \longrightarrow & X \\ & j^1_a s & \longmapsto & a. \end{array}$$

Por otro lado, por simplicidad de notación, denotaremos también por ϑ a la subida de la forma de orientación de X a $J^1(\Pi)$ mediante Π_X, $\Pi_X^*(\vartheta)$.

Un problema variacional de primer orden sobre la proyección regular Π está definido por una función $F \in \mathcal{C}^\infty(J^1(\Pi))$, que recibe el nombre de *función lagrangiana.*

Se denomina *densidad lagrangiana* a la n-forma $F\vartheta$.

En el espacio de secciones locales de Π, $\Gamma(\Pi)$, se puede definir la funcional que asigna a cada sección s la expresión

$$J(s) = \int_{J^1 S} F\vartheta = \int_{\mathrm{Dom}(s)} (j^1 s)^*(F\vartheta),$$

donde $\mathrm{Dom}(s)$ denota el dominio de s, y $J^1 S$, la imagen de $j^1 s$, como definimos en el capítulo 2.

El dominio de definición de la funcional J será el subconjunto de las secciones locales de Π para las que la integral está bien definida.

En este capítulo, dado un problema variacional, expondremos condiciones necesarias sobre las secciones para que la funcional J alcance extremos. Para ello, previamente definiremos las nociones de variación y variación infinitesimal de una sección local de Π, que utilizaremos para este propósito.

5.1. Variaciones y variaciones infinitesimales

Comencemos la sección recordando la noción de automorfismo de Π sobre un automorfismo diferenciable de X que dimos en el capítulo 2.

Definición 5.1. *Sea φ un automorfismo diferenciable de X. Un* ***automorfismo de*** Π ***sobre*** φ *es un difeomorfismo $\Phi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ que hace conmutativo el diagrama*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{V} \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\Pi"] & \mathcal{V} \arrow[d, "\Pi"] \\ X \arrow[r, "\varphi"] & X \end{tikzcd} .$$

Definición 5.2. *Sea s una sección local de Π y Ω un abierto de X de cierre compacto $\overline{\Omega} \subset \mathrm{Dom}(s)$ que sea una subvariedad con borde regular de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos de X.*

Una ***variación de*** s *en* Ω *consiste en:*

- *una familia uniparamétrica $\{\chi_t\}$ de automorfismos de X definida para $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, $\epsilon > 0$, es decir, en un entorno del 0; y*

- *una familia uniparamétrica $\{\tau_t\}$ de automorfismos de Π sobre $\{\chi_t\}$ tal que*

$$\tau_t|_{\Pi^{-1}(\partial\Omega)} = \mathrm{Id}|_{\Pi^{-1}(\partial\Omega)}, \ \forall t \in (-\epsilon, \epsilon).$$

Habitualmente, se entiende por ***variación de*** s *en* Ω *a la familia de secciones $\{(\tau_t)_*(s)\}$.*

A partir de la definición, se deduce directamente que, para cada $t \in (-\epsilon, \epsilon)$,

$$\chi_t|_{\partial\Omega} = \mathrm{Id}|_{\partial\Omega}, \ (\tau_t)_* s|_{\partial\Omega} = s|_{\partial\Omega},$$

donde $(\tau_t)_* s = \tau_t \circ s \circ \chi_t^1$, como definimos en el capítulo 2.

Supondremos, en adelante, que Ω es el dominio de s.

Observación 5.3. *La noción de variación de una sección se comporta bien bajo automorfismos de Π sobre automorfismos diferenciables de X, φ, en el sentido que sigue:*

Si $(\tau_t)_*(s)$ es una variación de una sección s dada, y Φ es un tal automorfismo de Π, se tiene que $\Phi^*(\tau_t)_*(s)$ es una variación de $\Phi^* s$.

Dada una variación $\{(\tau_t)_* s\}$ de la sección s, podemos definir el campo $D_s : \Omega \to T\mathcal{V}$ tangente en $\mathcal{V}$ a lo largo de la sección s, cuyo valor en cada punto $x \in \Omega$ es la derivación que asigna a cada función $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$ el valor

$$(D_s)_x f = \left. \frac{d\left(\left(\tau_t\right)_* s\right)^* f(x)}{dt} \right|_{t=0} .$$

Llamaremos a este campo **variación infinitesimal** inducida por la variación $\{(\tau_t)_* s\}$. Esto motiva la siguiente

Definición 5.4. *Sea $s : \Omega \to \mathcal{V}$ una sección local de Π. Una* ***variación infinitesimal*** *de s es una aplicación diferenciable $D_s : \Omega \to T\mathcal{V}$ que hace conmutativo el diagrama*

$$\begin{tikzcd} & T\mathcal{V} \arrow[d] \\ \Omega \arrow[ur, "D_s"] \arrow[r] & \mathcal{V} \end{tikzcd}.$$

Si ω es una forma diferencial exterior en $\mathcal{V}$ y D_s es una variación infinitesimal de s, podemos definir la derivada de Lie de ω con D_s como $D^L\omega$, donde D es un campo tangente en $\mathcal{V}$ que coincide con D_s a lo largo de la sección s.

Observemos que la definición no depende del campo D elegido, ya que, por la fórmula de Cartan, se tiene que si un campo D se anula a lo largo de s, entonces $D^L\omega$ se anula en s.

Análogamente, se puede definir la prolongación 1-jet de una variación infinitesimal D_s como $\tilde{D}_s = \tilde{D}$, para un campo tangente D que coincide con D_s a lo largo de s. $\tilde{D}_s$ es una variación infinitesimal de j^1s y, además, se puede comprobar a partir de la proposición 2.10 que los valores que toma a lo largo de j^1s solo dependen de los que toma D a lo largo de s, por lo que está bien definida.

En adelante, cuando intervengan variaciones infinitesimales de una sección s dada, se usarán campos tangentes que coincidan con ellas a lo largo de s.

5.2. Secciones críticas

Dada una función lagrangiana $F \in \mathcal{C}^\infty(J^1(\Pi))$, consideremos la función

$$\Psi(t) := J\left((\tau_t)_*(s)\right) = \int_\Omega \left(j^1\left((\tau_t)_*(s)\right)\right)^* (F\vartheta).$$

Entonces, si s es un extremo de la funcional J, entonces la derivada de $\Psi(t)$ en $t = 0$ es igual a 0. A las s verificando esta última condición necesaria de extremo las llamaremos **secciones críticas**.

Si los automorfismos $\{\tau_t\}$ son verticales, es decir, si las $\{\chi_t\}$ correspondientes son todas ellas la identidad, entonces la variación infinitesimal asociada D_s es un campo vertical.

Si D es un campo tangente vertical en $\mathcal{V}$ que coincide con D_s a lo largo de s, la condición de sección crítica se puede expresar como sigue:

$$\frac{d}{dt}\Psi(t)|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(\int_\Omega \left(j^1\left((\tau_t)_*(s)\right)\right)^* (F\vartheta)\right)\Bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(\int_\Omega (j^1s)^*(j^1\tau_t)^*(F\vartheta)\right)\Bigg|_{t=0} =$$

$$= \int_\Omega (j^1s)^*\left(\tilde{D}^L(F\vartheta)\right) = \int_{J^1S} \tilde{D}^L(F\vartheta) = 0,$$

donde $\tilde{D}$ es el generador infinitesimal de $\{j^1\tau_t\}$.

No obstante, esta expresión es válida para cualquier variación infinitesimal de s, no sólo para las verticales.

En efecto, si D es un campo tangente que coincide con D_s a lo largo de s, se puede descomponer en la suma de un campo vertical, que llamaremos *componente vertical*, y uno tangente a la sección, que llamaremos *componente horizontal*, de la siguiente manera

$$D = \underbrace{D - s_*\Pi_* D}_{D_V} + \underbrace{s_*\Pi_* D}_{D_H} = D_V + D_H.$$

Se puede probar que la prolongación 1-jet del campo, a la que denotaremos por $\tilde{D}$, mantiene esta descomposición, es decir, $\tilde{D} = \tilde{D}_V + \tilde{D}_H$ y, por lo tanto, la condición de sección crítica queda

$$0 = \int_{J^1S} \tilde{D}^L(F\vartheta) = \int_\Omega (j^1s)^* \left(\tilde{D}^L(F\vartheta)\right) = \int_\Omega (j^1s)^* \left(\tilde{D}^L_H(F\vartheta)\right) + \int_\Omega (j^1s)^* \left(\tilde{D}^L_V(F\vartheta)\right).$$

Basta probar que la integral correspondiente a la componente horizontal es igual a cero para justificar lo que queremos. Para ello, necesitamos probar un resultado técnico previo.

Si D es un campo tangente en $\mathcal{V}$ y ω una forma diferencial exterior, el valor de $D^L\omega$ sobre la imagen de s solamente depende de los valores que tome el campo D a lo largo de $S = Ims$. Por lo tanto, podemos definir $D^L\omega$ para campos con soporte en S.

En particular, si $\overline{D}$ es un campo tangente en X, cada sección s define un campo vectorial con soporte en $S = Ims$ como

$$(s_*\overline{D})_{s(\mathbf{x})} = s_{*\mathbf{x}}\overline{D}_{\mathbf{x}},$$

y si ω es una forma diferencial exterior en $\mathcal{V}$, $(s_*\overline{D})^L\omega$ se puede calcular usando cualquier campo que coincida con $s_*\overline{D}$ en S.

Entonces, se tiene el siguiente resultado:

Lema 5.5. *Dadas una sección cualquiera s de Π, ω una forma diferencial de $\mathcal{V}$ y un campo $\overline{D}$ tangente en X, se tiene la igualdad*

$$s^*\left(\left(s_*\overline{D}\right)^L\omega\right) = \overline{D}^L(s^*\omega).$$

Demostración. Desarrollemos ambos miembros por separado.

Por un lado,

$$\overline{D}^L(s^*\omega) = i_{\overline{D}}d(s^*\omega) + di_{\overline{D}}(s^*\omega) = i_{\overline{D}}s^*d\omega + di_{\overline{D}}s^*\omega;$$

y por otro,

$$s^*\left(\left(s_*\overline{D}\right)^L\omega\right) = s^*i_{s_*\overline{D}}d\omega + s^*di_{s_*\overline{D}}\omega = s^*i_{s_*\overline{D}}d\omega + ds^*i_{s_*\overline{D}}\omega.$$

Por lo tanto, nos bastará probar que para toda forma diferencial ω de $\mathcal{V}$, se tiene que

$$s^*i_{s_*\overline{D}}\omega = i_{\overline{D}}s^*\omega.$$

Supongamos que ω es de grado p, entonces si $\overline{D}_1, ..., \overline{D}_{p-1}$ son campos tangentes en X,

$$\left(s^*\left(i_{s_*\overline{D}}\omega\right)\right)\left(\overline{D}_1, ..., \overline{D}_{p-1}\right) = \left(i_{s_*\overline{D}}\omega\right)\left(s_*\overline{D}_1, ..., s_*\overline{D}_{p-1}\right) =$$

$$= \omega\left(s_*\overline{D}, s_*\overline{D}_1, ..., s_*\overline{D}_{p-1}\right) = s^*\omega\left(\overline{D}, \overline{D}_1, ..., \overline{D}_{p-1}\right) = i_{\overline{D}}s^*\omega\left(\overline{D}_1, ..., \overline{D}_{p-1}\right),$$

como queríamos ver. □

Desarrollemos, entonces, el integrando de $\int_\Omega (j^1 s)^* \left(\tilde{D}_H^L(F\vartheta)\right)$, aplicando en * el lema anterior para $\overline{s} = j^1 s,\ \omega = F\vartheta,\ E = \Pi_{X*}\tilde{D}$.

$$(j^1 s)^* \left(\tilde{D}_H^L(F\vartheta)\right) = (j^1 s)^* \left((j^1 s)_* \Pi_{X*}\tilde{D}\right)^L (F\vartheta) \overset{*}{=}$$

$$\overset{*}{=} \left(\Pi_{X*}\tilde{D}\right)^L (j^1 s)^*(F\vartheta) = \underbrace{i_{\Pi_{X*}\tilde{D}} d(j^1 s)^*(F\vartheta)}_{0} + d i_{\Pi_{X*}\tilde{D}} (j^1 s)^*(F\vartheta),$$

donde el primer sumando es cero porque la densidad lagrangiana es de grado máximo, luego su diferencial es nula. Sustituyendo en la integral:

$$\int_\Omega (j^1 s)^* \left(\tilde{D}_H^L(F\vartheta)\right) = \int_\Omega d i_{\Pi_{X*}\tilde{D}} (j^1 s)^*(F\vartheta) = 0,$$

porque la integral de una forma diferencial exacta con soporte compacto es 0, como consecuencia inmediata del teorema de Stokes.

Estos razonamientos nos motivan, por lo tanto, la siguiente definición de sección crítica.

Definición 5.6. *Consideremos el problema variacional asociado a la funcional $J(s) = \int_{J^1 S} F\vartheta$. Decimos que s es una **sección crítica** de J si para cada campo tangente definido a lo largo de s con soporte compacto se verifica que*

$$\int_{J^1 S} \tilde{D}^L(F\vartheta) = 0.$$

Conviene recordar que los campos tangentes $\tilde{D}$ de la definición, en particular, verifican que $\tilde{D}^L \mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}$, con $\mathcal{P}$ el sistema de contacto de $J^1(\Pi)$, como enunciamos en la proposición 2.10.

Observación 5.7. *Si s es una sección crítica para el problema variacional asociado a la funcional $J(s) = \int_{J^1 S} F\vartheta$, también lo será si sustituimos $F\vartheta$ por $F\vartheta + \sum_i \omega_i \wedge \theta_i$, con ω_i las 1-formas de contacto definidas en (2.3), y θ_i, $(n-1)$- formas cualesquiera.*

En efecto, si D es un campo tangente en $\mathcal{V}$, entonces

$$\tilde{D}^L(\omega_j \wedge \theta_j) = \tilde{D}^L \omega_j \wedge \theta_j + \omega_j \wedge \tilde{D}^L \theta_j,$$

pero, como $\tilde{D}^L$ deja estable el sistema de contacto, entonces $\tilde{D}^L \omega_j$ se anula sobre $J^1 S$ y, por lo tanto,

$$\tilde{D}^L(\omega_j \wedge \theta_j)\Big|_{J^1 S} = 0.$$

5.3. Forma de Poincaré-Cartan

Consideremos la proyección $\Pi_X : J^1(\Pi) \to X$, definida en (2.2), y denotemos $\bigwedge^k(X)$ al $\mathcal{C}^\infty(X)$−módulo de las formas diferenciales exteriores de grado k en X.

Entonces $(\Pi_X)^*(\bigwedge^k(X))$ genera un módulo de formas diferenciales exteriores sobre $\mathcal{C}^\infty(J^1(\Pi))$, a las que llamaremos en adelante **formas horizontales.**

A continuación, probaremos que, bajo ciertas hipótesis, de entre todas las formas $F\vartheta + \sum_j \omega_j \wedge \theta_j$, existe una cuya diferencial está en el ideal de formas diferenciales exteriores generado por el sistema de contacto, que además es única, y que permitirá dar una caracterización de las secciones críticas.

Proposición 5.8. *Existe una única $n-$ forma*

$$\Theta = F\vartheta + \sum_j \omega_j \wedge \theta_j,$$

donde las θ_j son $(n-1)-$formas horizontales, tal que $d\Theta \equiv 0$ módulo el sistema de contacto.

Demostración. Probemos, en primer lugar, la **existencia** de Θ. Para ello, impongamos la condición del enunciado y veamos que hay alguna Θ que lo verifica.

$$d\Theta = d(F\vartheta) + \sum_j d(\omega_j \wedge \theta_j) \equiv 0, \quad \operatorname{mod} \mathcal{P},$$

con $\theta_1, ..., \theta_m$ (n-1)-formas horizontales.

Desarrollemos primero el primer sumando. Como ϑ es una forma diferencial cerrada, se tiene que $d(F\vartheta) = dF \wedge \vartheta$, luego:

$$dF \wedge \vartheta = \left(\sum_{i=1}^{n} \partial_i F dx_i + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial z_j} \omega_j + \sum_{i,j} \frac{\partial F}{\partial p_{ji}} dp_{ji} \right) \wedge \vartheta,$$

donde hemos usado la notación de derivada total que definimos en (2.4).

Como se tienen las identidades $dx_i \wedge \vartheta = 0$, $dz_j \wedge \vartheta = \omega_j \wedge \vartheta$, y $dp_{ji} \wedge \vartheta = \left(i_{\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)} d\omega_j \right) \wedge \vartheta$, que se pueden comprobar fácilmente, sustituyendo, obtenemos

$$d(F\vartheta) = \sum_{i,j} \left(\frac{\partial F}{\partial z_j} \omega_j + \frac{\partial F}{\partial p_{ji}} \left(i_{\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)} d\omega_j \right) \right) \wedge \vartheta,$$

que módulo el sistema de contacto es congruente con la expresión siguiente:

$$d(F\vartheta) \equiv \sum_{i,j} \frac{\partial F}{\partial p_{ji}} \left(i_{\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)} d\omega_j \right) \wedge \vartheta = \sum_j \left(i_{D_j} d\omega_j \right) \wedge \vartheta,$$

donde el campo D_j denota $D_j := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_{ji}} \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Además, $d\omega_j \wedge \vartheta = 0$, luego $\left(i_{D_j} d\omega_j \right) \wedge \vartheta = -d\omega_j \wedge i_{D_j}\vartheta$, de manera que se tiene la siguiente congruencia módulo el sistema de contacto:

$$d(F\vartheta) \equiv -\sum_{j=1}^{m} d\omega_j \wedge i_{D_j}\vartheta \equiv -\sum_{j=1}^{m} d\left(\omega_j \wedge i_{D_j}\vartheta \right).$$

Del cálculo anterior se deduce que $d\Theta \equiv \sum_{j=1}^{m} d(\omega_j \wedge \theta_j - \omega_j \wedge i_{D_j}\vartheta) \mod \mathcal{P}$. Por lo tanto, si

$$\theta_j = i_{D_j}\vartheta,$$

tendremos que $d\Theta \equiv 0 \mod \mathcal{P}$, como queríamos. En consecuencia, hemos probado la existencia.

Veamos ahora la **unicidad** de Θ.

Denotemos $\eta_i = i_{\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)}\vartheta$. Si θ_j es una $(n-1)$-forma horizontal, se puede escribir como

$$\theta_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ji}\eta_i, \ \lambda_{ji} \in \mathcal{C}^\infty(J^1(\Pi)).$$

Para demostrar la unicidad de Θ, hay que probar que si $d\left(\sum_{j=1}^{m} \omega_j \wedge \theta_j\right) \equiv 0 \mod \mathcal{P}$, entonces $\sum_{j=1}^{m} \omega_j \wedge \theta_j = 0$.

En efecto,

$$d\left(\sum_{j=1}^{m} \omega_j \wedge \theta_j\right) = d\sum_{i,j} (\lambda_{ji}\omega_j \wedge \eta_i) \equiv \sum_{i,j} \lambda_{ji} d\omega_j \wedge \eta_i, \ \mod \mathcal{P},$$

pero $d\omega_j = -\sum_{h=1}^{n} dp_{jh} \wedge dx_h$, luego $d\omega_j \wedge \eta_i = -dp_{ji} \wedge \vartheta$ y, por tanto,

$$d\left(\sum_{j=1}^{m} \omega_j \wedge \theta_j\right) \equiv -\sum_{i,j} \lambda_{ji} dp_{ji} \wedge \vartheta, \ \mod \mathcal{P}.$$

Esta expresión es nula si lo son las λ_{ji}, y por lo tanto, también lo son las θ_j, de donde se tiene lo que queríamos. □

Definición 5.9. *Dado el problema variacional asociado a la funcional* $J(s) = \int_{J^1 S} F\vartheta$, *llamamos* ***n-forma de Poincaré-Cartan*** *a la única* $n-$ *forma*

$$\Theta = F\vartheta + \sum_i \omega_i \wedge \theta_i$$

dada por la proposición anterior.

En coordenadas, la $n-$ forma de Poincaré-Cartan se expresa como

$$\Theta = F\vartheta + \sum_j \omega_j \wedge i_{\left(\sum_i \frac{\partial F}{\partial p_{ji}} \frac{\partial}{\partial x_i}\right)}\vartheta.$$

Observemos que del enunciado de la proposición se tiene que existirán $n-$ formas γ_j tales que $d\Theta = \sum_j \omega_j \wedge \gamma_j$. De los cálculos realizados en la demostración, podemos obtener la expresión en coordenadas de estas γ_j como sigue:

$$d\Theta = \sum_j \frac{\partial F}{\partial z_j}\omega_j \wedge \vartheta - \sum_j \omega_j \wedge d\, i_{D_j}\vartheta = \sum_j \omega_j \wedge \left(\frac{\partial F}{\partial z_j}\vartheta - d\, i_{D_j}\vartheta\right),$$

de manera que

$$\gamma_j = \frac{\partial F}{\partial z_j}\vartheta - d\, i_{D_j}\vartheta = \frac{\partial F}{\partial z_j}\vartheta - {D_j}^L\vartheta, \tag{5.1}$$

con $D_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_{ji}}\frac{\partial}{\partial x_i}$.

Presentemos, a continuación, una condición necesaria de extremo para una funcional dada a partir de esta nueva noción.

Teorema 5.10. *Con las hipótesis y notaciones anteriores, una sección $s \in \Gamma(\Omega, \mathcal{V})$ es crítica para la funcional $J(s) = \int_{J^1S} F\vartheta$ si y solo si para cada campo tangente D definidp a lo largo de s con soporte compacto se verifica que*

$$\int_{J^1s} \tilde{D}^L\Theta = 0.$$

Demostración. Por la observación 5.7, como la forma de Poincaré-Cartan se define como $\Theta = F\vartheta + \sum_i \omega_j \wedge \theta_i$, con los θ_i de antes, entonces

$$\tilde{D}^L(\Theta)\Big|_{J^1S} = \tilde{D}^L(F\vartheta)\Big|_{J^1S},$$

de donde se deduce el enunciado directamente. □

5.4. Ecuaciones de Euler-Lagrange

En esta sección, probaremos un teorema de equivalencia entre distintas condiciones necesarias de extremo de una funcional dada, de entre las que destaca una de ellas como análoga a las ecuaciones de Euler-Lagrange que estudiamos en el capítulo 3.

No obstante, es necesario presentar previamente un resultado análogo al lema fundamental del cálculo de variaciones, así como un corolario del teorema de Stokes que se aplicará en la demostración del teorema, y cuya demostración puede consultarse en [4].

Lema 5.11. ***(fundamental del cálculo de variaciones en variedades)***
Dada una variedad orientada X y γ una $n-$forma hemisimétrica, si $\int_X \eta\gamma = 0$ para toda función continua y no negativa η de soporte compacto, entonces $\gamma = 0$.

Demostración. Sea $x \in X$, U un entorno de x coordenado por funciones $x_1, ..., x_n$ en U, y $\gamma = f dx_1 \wedge ... \wedge dx_n$. Veamos, por reducción al absurdo, que $f(x) = 0$.

Supongamos que $f(x) = a > 0$, entonces existe un entorno V de x contenido en U donde $f \geq \frac{a}{2}$. Tomemos una función continua no negativa η con soporte compacto contenido en V y que sea igual a 1 en un entorno $K \subset X$ de x compacto. Así,

$$0 = \int_U \eta\, f\, dx_1...dx_n \geq \int_K \eta\, f\, dx_1...dx_n \geq \frac{a}{2}m[K] > 0,$$

donde la primera igualdad se tiene por hipótesis y $m[K]$ denota el volumen de K, de manera que llegamos a la contradicción esperada. □

Por otra parte, del teorema de Stokes se deduce inmediatamente el siguiente

Lema 5.12. *Dada una variedad orientable X $n-$dimensional, toda $n-$forma exacta tiene integral igual a cero en cualquiera de los siguientes casos:*

- *la variedad es compacta,*
- *la $n-$ forma es de soporte compacto.*

Teorema 5.13. ***(de condiciones necesarias de extremo de una funcional)*** *Con las hipótesis y condiciones anteriores, los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) *s es una sección crítica para la funcional $J(s) = \int_{J^1S} F\vartheta$,*

(2) *s satisface las* **ecuaciones de Euler-Lagrange:**

$$\gamma_j|_{J^1S} = \left.\left(\frac{\partial F}{\partial z_j}\vartheta - \left(\sum_i \frac{\partial F}{\partial p_{ji}}\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^L \vartheta\right)\right|_{J^1S} = 0,$$

(3) *para todo campo tangente D definido a lo largo de s con soporte compacto,*

$$i_{\tilde{D}} d\Theta|_{J^1S} = 0.$$

Demostración. $\boxed{\mathbf{(1)} \Rightarrow \mathbf{(2)}}$ Por el teorema 5.10, **(1)** es equivalente al enunciado siguiente:

Para cada campo tangente D definido a lo largo de s con soporte compacto se verifica que

$$\int_{J^1S} \tilde{D}^L\Theta = 0.$$

Sea, pues, D un campo en las condiciones anteriores. Entonces, $J^1S \cap \mathrm{Sop}(\tilde{D})$ es compacto, puesto que $\Pi_X : J^1(X) \to X$ establece un homeomorfismo en este conjunto y $\Pi_X(\mathrm{Sop}D)$.

Por lo tanto, la forma $i_{\tilde{D}}\Theta|_{J^1S}$ tiene soporte compacto y, como J^1S es orientada, por el lema 5.12 y el enunciado **(1)**, se tiene que

$$0 = \int_{J^1S} \tilde{D}^L\Theta = \int_{J^1S} di_{\tilde{D}}\Theta + \int_{J^1S} i_{\tilde{D}}d\Theta = \int_{J^1S} i_{\tilde{D}}d\Theta =$$

$$= \int_{J^1S} i_{\tilde{D}}\left(\sum_{j=1}^m \omega_j \wedge \underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial z_j}\omega_j - di_{D_j}\vartheta\right)}_{\gamma_j}\right) = \sum_{j=1}^m \int_{J^1S} \omega_j(\tilde{D})\gamma_j.$$

Sea, en particular, $D = \rho(x)\frac{\partial}{\partial z_j}$, donde $\rho \geq 0$ es una función de soporte compacto contenido en Ω, entonces

$$\tilde{D} = \rho(x)\frac{\partial}{\partial z_j} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \rho}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial p_{ji}}.$$

Aplicando la igualdad anterior,

$$\sum_{j=1}^{m} \int_{J^1S} \omega_j(\tilde{D})\gamma_j = 0;$$

y como $\omega_j(\tilde{D}) = \tilde{D}(z_j) = \rho\delta_{ij}$, aplicando el lema 5.11, fundamental del cálculo de variaciones, podemos concluir que

$$\int_{J^1S} \rho\gamma_i = 0 \Rightarrow \gamma_i|_{J^1S} = 0,$$

como queríamos.

$\boxed{\textbf{(2)} \Rightarrow \textbf{(3)}}$ Por la proposición 5.8, sabemos que $d\Theta = \sum_i \omega_i \wedge \gamma_i$ y, por lo tanto, para cada campo D admisible,

$$i_{\tilde{D}} d\Theta = \sum_i \omega_i(\tilde{D})\gamma_i - \sum_i \omega_i \wedge i_{\tilde{D}}\gamma_i.$$

Además, como por hipótesis $\gamma_i|_{J^1S} = 0$, se deduce que

$$i_{\tilde{D}} d\Theta|_{J^1S} = 0.$$

$\boxed{\textbf{(3)} \Rightarrow \textbf{(1)}}$ Consideremos un campo tangente D definido a lo largo de s de soporte compacto

Por hipótesis, $i_{\tilde{D}} d\Theta|_{J^1S} = 0$. Por lo tanto, por el lema 5.12, $\int_{J^1S} d\ i_{\tilde{D}}\Theta = 0$. En consecuencia,

$$\int_{J^1S} \tilde{D}^L\Theta = \int_{J^1S} i_{\tilde{D}} d\Theta + \int_{J^1S} d\ i_{\tilde{D}}\Theta = 0,$$

puesto que el primer sumando es nulo por hipótesis y el segundo también, por el lema 5.12. $\square$

Resaltemos la expresión en coordenadas de las ecuaciones de Euler-Lagrange del teorema, para $\omega = f dx_1 \wedge ... \wedge dx_n$ la forma de volumen.

$$\frac{\partial F}{\partial z_j} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial p_{ji}} \frac{\partial(\log f)}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 F}{\partial p_{ji}\partial x_i} \right), \quad 1 \le j \le m. \tag{5.2}$$

En particular, en el caso en que $f = 1$, las ecuaciones quedan

$$\frac{\partial F}{\partial z_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} \frac{\partial F}{\partial p_{ji}}, \quad 1 \le j \le m$$

que coinciden con las que presentamos en el capítulo 3.

5.5. Invariantes de Noether

Como corolario inmediato del teorema que presentamos en la sección anterior, se enuncia un resultado sobre la existencia de formas que se mantienen constantes en un problema variacional.

A continuación, enunciaremos este resultado y desarrollaremos el problema de la cuerda vibrante como ejemplo al que aplicarlo.

Teorema 5.14. ***(Invariantes de Noether)***

Dada una funcional $J(s) = \int_{J^1S} F\vartheta$, consideremos su problema variacional asociado, y sea s una sección crítica.

Si un campo tangente D definido a lo largo de s con soporte compacto verifica que $\tilde{D}^L\Theta = 0$, entonces

$$d\, i_{\tilde{D}}\Theta|_{J^1S} = 0.$$

Demostración. Por la fórmula de Cartan, $\tilde{D}^L\Theta = d\, i_{\tilde{D}}\Theta + i_{\tilde{D}}d\Theta = 0$. Además, aplicando el teorema 5.13, $i_{\tilde{D}}d\Theta|_{J^1S} = 0$ porque s es una sección crítica por hipótesis.

En consecuencia, $d\, i_{\tilde{D}}\Theta|_{J^1S} = 0$, como queríamos. □

A las funciones que se obtienen de integrar la identidad del teorema se les conoce como **invariantes de Noether** del problema variacional.

Ejemplo 5.15. ***El problema de la cuerda vibrante.***

Sea una cuerda flexible y uniforme con densidad de masa ρ, de longitud L y fija por sus extremos, sobre la que se ejerce una tensión constante de módulo T que la mantiene estirada; y cuyas vibraciones se efectúan sobre un plano coordenado por (x, y).

Supongamos que los extremos de la cuerda son $(0,0)$ y $(L,0)$. Para cada $t \in \mathbb{R}$, denotemos con $y = y(t,x)$ la función cuya gráfica representa la forma de la cuerda en el instante t. En este caso, t, x, son las variables independientes, mientras que y es la variable dependiente. Así, las coordenadas locales en el espacio de 1-jets serán t, x, y, p_1, p_2

Consideremos el problema variacional asociado a la lagrangiana dada por la diferencia entre las energías potencial y cinética del sistema, como es habitual en física y, a partir de él, busquemos mediante las técnicas del cálculo de variaciones en espacios de jets, un invariante de Noether del sistema.

La energía cinética del sistema es $\frac{\rho}{2}p_1^2$, mientras que la energía potencial se puede calcular como $\frac{T}{2}p_2^2$, cuya justificación se puede consultar en [4]. Por lo tanto, la lagrangiana considerada será

$$F(t, x, y, p_1, p_2) := \frac{\rho}{2}p_1^2 - \frac{T}{2}p_2^2,$$

con $s := (t, x, y(t,x))$ la sección asociada a la función $y(t,x)$.

Las ecuaciones de la subvariedad J^1S son $\{y = y(t,x),\ p_1 = \frac{\partial y}{\partial t},\ p_2 = \frac{\partial y}{\partial x}\}$. Por otro lado, la forma de volumen del problema variacional será $\omega = dt \wedge dx$.

En adelante, por simplificar, utilizaremos la notación de subíndice para indicar las derivadas parciales, de manera que, por ejemplo, $f_t = \frac{\partial f}{\partial t}$, y así sucesivamente.

Calculemos la forma de Poincaré-Cartan asociada a este problema variacional.

En este caso, el sistema de contacto en $J^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ está generado por una única forma,

$$\omega_1 = dy - p_1 dt - p_2 dx,$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned}\Theta &= F\vartheta + \omega_1 \wedge i_{\left(\frac{\partial F}{\partial p_1}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial p_2}\frac{\partial}{\partial x}\right)}\vartheta = \\ &= -F\vartheta + \rho p_1 dy \wedge dx + T p_2 dy \wedge dt.\end{aligned}$$

Observemos que $d\Theta = \vartheta \wedge \gamma$, donde $\gamma = T dt \wedge dp_2 + \rho dx \wedge dp_1$, luego la condición para que la sección s definida por la función $y = y(t,x)$ sea crítica es

$$\gamma|_{J^1S} \equiv 0 \Rightarrow (T y_{xx} - \rho y_{tt})\, dt \wedge dx = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T y_{xx} - \rho y_{tt} = 0. \tag{5.3}$$

Tomemos el campo $D = -\frac{\partial}{\partial t}$, entonces $\tilde{D} = -\frac{\partial}{\partial t}$. Tenemos que $\tilde{D}^L \Theta(f) = 0$, puesto que los coeficientes de Θ no dependen de t. Operando, obtenemos

$$i_{\tilde{D}}\Theta = F dx + T p_2 dy,$$

y al restringir a J^1S, nos queda

$$i_{\tilde{D}}\Theta|_{J^1S} = \left(\frac{\rho}{2} y_t^2 - \frac{T}{2} y_x^2\right) dx + T y_x \left(y_t dt + y_x dx\right) =$$

$$= T y_x y_t dt + \left(\frac{\rho}{2} y_t^2 + \frac{T}{2} y_x^2\right) dx.$$

Finalmente, aplicando la diferencial,

$$d i_{\tilde{D}}\Theta|_{J^1S} = \left(\left(\frac{\rho}{2} y_t^2 + \frac{T}{2} y_x^2\right)_t - \left(T y_t y_x\right)_x\right) dt \wedge dx \overset{*}{=} 0,$$

*donde la igualdad * se tiene por la ecuación (5.3)*

Suponiendo que $y(t,x)$ es de soporte compacto en cada punto e integrando la ecuación, tratemos de encontrar un invariante de Noether de este problema. Tenemos que

$$\int \left(\frac{\rho}{2} \left(y_t\right)^2 + \frac{T}{2} \left(y_x\right)^2\right)_t dx = \int T \left(y_t\right) \left(y_x\right)_x dt = 0. \tag{5.4}$$

Así que si definimos la función energía del sistema en el tiempo t como es habitual en física, es decir,

$$E(t) = \int \left(\frac{\rho}{2} \left(y_t\right)^2 + \frac{T}{2} \left(y_x\right)^2\right) dx,$$

entonces la ecuación (5.4) es simplemente $\frac{d}{dt}E(t) = 0$, de manera que la energía es el invariante de Noether del sistema obtenido.

Bibliografía

[1] P. Blanchard and E. Brüning, *Mathematical methods in physics.*, second ed., Progress in Mathematical Physics, vol. 69, ch. 34-35, Birkhäuser, 2015, `https://doi.org/10.1007/978-3-319-14045-2_34`.

[2] A. Cañada, *Cálculo de variaciones. programa de posgrado fisymat.*, 2009, `http://www.ugr.es/~dpto_am/OLD/docencia/Apuntes/Calculo_Variaciones_Canada.pdf`.

[3] D. Cohn, *Measure theory.*, second ed., ch. Appendix E., Birkhäuser, 2013.

[4] R. Faro, *Apuntes de ecuaciones diferenciales. volumen 1. capítulo 7.12: Cálculo de variaciones en jets.*, 2018, `http://matematicas.unex.es/~ricarfr/LibroEDLat.pdf`.

[5] J. García Falset, *Análisis funcional no lineal, curso 2006/07.*, Departament d'Anàlisi Matemàtica, Universitat de València (UV)., 2006, `https://www.uv.es/garciaf/apuntes/analv.PDF`.

[6] P. L. García Pérez, *The Poincaré-Cartan invariant in the calculus of variations.*, Symposia Mathematica **14** (1974), 219–246.

[7] I.M. Gelfand and S.V. Fomin, *Calculus of variations.*, ch. 1-4, Prentice-Hall, Inc., 1963.

[8] M. Giaquinta and S. Hildebrandt, *Calculus of variations I.*, second ed., A Series of Comprehensive Studies in Mathematics., vol. 310, ch. 1-2, Springer, 2004.

[9] J. Jost and X. Li-Jost, *Calculus of variations.*, ch. 1-2 (Part one), 2 (Part two)., Cambridge University Press., 1998.

[10] R. Klötzler, *Mehrdimensionale variationsrechnung.*, pp. 72–78, Springer, 1970.

[11] S. Lang, *Fundamentals of differential geometry.*, ch. 17-18, Springer., 2001.

[12] L. Mangiarotti and M. Modugno, *Some results on the calculus of variations on jet spaces.*, Annales de l'Institute Henri Poincaré, Section A: Physique théorique. **39** (1983), no. 1, 29–43.

[13] J. E. Marsden, Ratiu, and R. T., Abraham, *Manifolds, tensor analysis, and applications.*, third ed., ch. 3, Springer-Verlag, 2001.

[14] P.J. Olver, *Applications of lie groups to differential equations*, Graduate texts in mathematics ; 107, Springer, 1986.

[15] D. J. Saunders, *The geometry of jet bundles*, 1st ed ed., London Mathematical Society lecture note series ; 142, Cambridge University Press, 1989.

[16] D. S. Shafer, *The brachistochrone: Historical gateway to the calculus of variations. materials matemàtics.*, Revista Electrònica de Divulgació Matemàtica Editada pel Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona., 2007, https://mat.uab.cat/web/matmat/wp-content/uploads/sites/23/2020/05/v2007n05.pdf.