

UNIVERSIDAD DE SALAMANCA

MÁSTER UNIVERSITARIO EN MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

Modelos en Espintrónica, scattering de soluciones de tipo kink

AUTORA: Cristina Santa Cruz González

TUTORES: Alberto Alonso Izquierdo

Miguel Ángel González León

Curso 2021-2022



VNiVERSiDAD
D SALAMANCA

CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

UNIVERSIDAD DE SALAMANCA

MÁSTER UNIVERSITARIO EN MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

Modelos en Espintrónica, scattering de soluciones de tipo kink

AUTORA: Cristina Santa Cruz González

TUTORES: Alberto Alonso Izquierdo

Miguel Ángel González León

Curso 2021-2022

D. Alberto Alonso Izquierdo y D. Miguel Ángel González León,
profesores titulares de Matemática Aplicada de la Universidad de
Salamanca e investigadores dentro del Instituto Universitario de
Física Fundamental y Matemáticas

CERTIFICAN:

Que el presente trabajo, “Modelos en Espintrónica, scattering de
soluciones de tipo kink”, ha sido realizado bajo su dirección en el
Departamento de Matemática Aplicada, por Doña Cristina Santa
Cruz González, y constituye su Trabajo Fin de Máster para optar al
título de Máster Universitario en Modelización Matemática.

Que les consta que el trabajo es original e inédito, y que autorizan
su presentación.

Y para que conste a los efectos oportunos, firman la presente en
Salamanca a doce de julio de dos mil veintidós.

Fdo.: Alberto Alonso Izquierdo Miguel Ángel González León

Agradecimientos

“ Me gustaría, en primer lugar, agradecer la gran dedicación y paciencia con la que mis dos tutores, Alberto Alonso Izquierdo y Miguel Ángel González León, me han guiado en la realización de este Trabajo de Fin de Máster. Gracias por la disponibilidad y predisposición que habéis tenido a la hora de resolver todas y cada una de mis dudas así como la orientación que me habéis brindado a la hora de organizar este TFM, que abarca un campo tan amplio de conocimientos tanto de la rama de la Física como de las Matemáticas. ”

“ Además, agradecer al Grupo Interuniversitario de Investigación en Tecnologías Cuánticas así como al Centro de Supercomputación de Castilla y León (SCAYLE) por ofrecerme una beca con la que he podido estudiar este Máster Universitario en Modelización Matemática que se culmina con la presentación de este TFM.”

“ Por último, quiero agradecer a mis padres y hermanos por su incesante apoyo y ánimos que me han impulsado a seguir trabajando incluso en los momentos de mayor dificultad.”

Índice general

Introducción	1
1. Soluciones de tipo defecto topológico en teorías de campos escalares	5
1.1. Introducción	5
1.2. Historia: Solitones en Teoría de Campos	7
1.3. Ecuación de Korteweg-de Vries	11
1.4. Modelos generales con varios campos escalares	13
1.5. Ecuación de Seno-Gordon	18
2. Modelo masivo no lineal \mathbb{S}^2-sigma con aplicaciones a la espintrónica	24
2.1. Construcción del modelo	25
2.2. Cálculo de solitones en el modelo	27
2.3. Aplicaciones a la espintrónica	40
2.4. Conclusiones	44
3. Colisiones de los solitones en el modelo masivo no lineal \mathbb{S}^2-sigma	45
3.1. Scattering de solitones en el modelo Seno-Gordon	46
3.1.1. Modelo de Seno-Gordon en el cono de luz	46

3.1.2. Transformada de Bäcklund	47
3.1.3. Colisión de dos solitones	51
3.2. Scattering de defectos topológicos en el modelo \mathbb{S}^2 -sigma	61
4. Conclusiones	67
Apéndice A: Notación relativista	70
Apéndice B: Código de Mathematica	72
Bibliografía	81

Índice de figuras

1.1. Recreación del solitón visto por Russell	8
1.2. Esquema de la formación de una onda solitaria o solitón	9
1.3. Potencial de la ecuación Seno-Gordon	19
1.4. Visualización de solitones y distintas densidades de energía.	22
1.5. Visualización de un solitón y su antisolitón.	23
2.1. Cambio de sistema de coordenadas a esféricas y potencial del modelo Sigma masivo no lineal en esféricas.	28
2.2. Simulaciones de las soluciones solitónicas K_1/K_1^*	32
2.3. Coordenadas elípticas sobre la esfera	37
2.4. Visualización sobre la esfera \mathbb{S}^2 y sobre el rectángulo elíptico de varias soluciones solitónicas no topológicas.	39
2.5. Visualizaciones espintrónicas de de las soluciones de vacío: polo norte (Φ^N) y polo sur (Φ^S).	41
2.6. Representación espintrónica de la solución topológica K_1 tanto en 3D como en el plano $\phi_2 : \phi_3$	42

2.7. Representación espintrónica de la solución topológica K_2 tanto en 3D como en el plano $\phi_2 : \phi_3$	43
2.8. Representación espintrónica de una solución no topológicas K_γ tanto en 3D como en el plano $\phi_2 : \phi_3$	43
3.1. Diagrama que ilustra el teorema de la conmutatividad de Bianchi.	49
3.2. Simulación de la solución general con la que se describe las colisiones entre dos soluciones solitónicas al variar los parámetros a_1 y a_2	54
3.3. Visualización del proceso de colisión entre dos solitones.	56
3.4. Visualización del proceso de colisión entre un solitón y su antisolitón.	58
3.5. Visualización de un breather estático.	60
3.6. Representación de la colisión entre dos solitones del par K_1/K_1^* dentro del modelo masivo no lineal \mathbb{S}^2 -sigma	63
3.7. Representación de la colisión entre dos antisolitones del par K_1/K_1^* dentro del modelo masivo no lineal \mathbb{S}^2 -sigma	64
3.8. Representación de la colisión entre un solitón de K_1 y su antisolitón de K_1 dentro del modelo masivo no lineal \mathbb{S}^2 -sigma	65
3.9. Representación de breathers dentro del modelo masivo no lineal \mathbb{S}^2 -sigma.	66

Resumen

El objetivo principal de este trabajo es el estudio de unas determinadas ondas solitarias viajeras que son soluciones de ecuaciones diferenciales parciales no lineales, denominadas kinks, defectos topológicos o solitones, que tienen la característica distintiva de que son capaces de recorrer largas distancias a velocidad constante sin perder ni su forma ni su velocidad. Este tipo de soluciones son de enorme interés ya que permiten explicar multitud de fenómenos físicos que no podrían ser explicados desde la perspectiva de las teorías lineales. Dentro de esta área de estudio, es de crucial interés profundizar en las posibles interacciones entre este tipo de estructuras topológicas, analizando los posibles eventos de scattering que puedan producirse. Por todo ello, en este trabajo se realiza una revisión bibliográfica de los avances conseguidos en este campo hasta el momento, así como un estudio detallado, en primer lugar, de cuáles son los diferentes solitones pertenecientes al modelo de Seno-Gordon y cómo colisionan, para posteriormente trasladar los resultados encontrados al modelo masivo no lineal S^2 -sigma, que destaca por su gran relación con la espintrónica.

Abstract

In this work the main focus is on the study of particular solitary waves which are solutions of nonlinear partial differential equations, called topological kink solitons, which have the distinctive feature that they are able to travel long distances at constant speed without losing their shape or their velocity. This type of solutions are of huge interest since they allow us to explain a multitude of physical phenomena that cannot be explained from the perspective of linear theories. Within this area of study, it is of crucial interest to study the possible interactions between this type of topological structures, analysing the possible scattering events that may occur. For all these reasons, in this work a bibliographical review of the advances achieved in this field up to now is carried out, as well as a detailed study, firstly, of which are the different solitons belonging to the Seno-Gordon model and how they collide, and then transferring the found results to the massive non-linear \mathbb{S}^2 -sigma model, which stands out for its great relation with spintronics.

Introducción

El estudio de las soluciones de tipo kink que surgen en las ecuaciones diferenciales parciales no lineales ha sido un área de gran interés para las comunidades de matemáticos y físicos durante las últimas décadas, ya que pueden explicar algunos fenómenos físicos que no se podrían entender utilizando sólo el punto de vista de las teorías lineales. De hecho, en los últimos años, este tipo de soluciones han demostrado ser de gran importancia en el desarrollo de la espintrónica, una tecnología cuántica desarrollada recientemente en la que los electrones son tratados como portadores tanto de espín como de carga eléctrica. Esta disciplina tiene amplias aplicaciones en microelectrónica, en particular con la llegada de materiales similares al grafeno o aislantes innovadores que ofrecerán la posibilidad de controlar el flujo de espines en un material, lo que se espera que provoque una mejora en la capacidad y la miniaturización de los actuales dispositivos electrónicos.

En algunos materiales ferromagnéticos, los fenómenos de intercambio, la anisotropía y las interacciones dipolo-dipolo son responsables de la existencia de varios estados fundamentales no colineales de los espines en estas sustancias magnéticas. Esta situación puede llevar a la aparición de soluciones de tipo kink, que en la práctica describen cadenas de espín cuya orientación cambia en función de la posición de la partícula en el material magnético. El enorme número de átomos que componen estos materiales permite tra-

tarlos como un continuo siendo, de esta forma, modelados por varios autores utilizando diferentes teorías de campo. De entre ellas destaca el modelo masivo no lineal \mathbb{S}^2 -sigma [3] y [4].

Dentro de este campo, es también bastante relevante estudiar las interacciones entre estos tipos de estructuras topológicas y, por tanto, entender los posibles eventos de scattering que pueden cambiar la naturaleza de los fenómenos explicados por este tipo de soluciones no lineales, dando lugar a diferentes transiciones de fase en los materiales ferromagnéticos. Además, el estudio de la dependencia de estos procesos de choque con la velocidad de colisión es un aspecto fundamental de este tipo de investigación, ya que en general las colisiones de dos solitones representan un proceso complejo que da lugar a interacciones internas poco conocidas que dependen críticamente de la velocidad de colisión.

En este contexto se enmarca este Trabajo de Fin de Máster dedicado, por lo tanto, al estudio de soluciones de naturaleza topológica del sistema de ecuaciones en derivadas parciales no lineales

$$\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x_0^2} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x_j^2} = -\frac{\partial U}{\partial \phi_i} \quad i = 1, \dots, N \quad (1)$$

siendo $\vec{\phi} = \vec{\phi}(x_\mu) = (\phi_1(x_\mu), \phi_2(x_\mu), \dots, \phi_N(x_\mu))$ un campo vectorial con componentes escalares $\phi_j : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $U = U(\phi_1, \dots, \phi_N)$ una función cualquiera de dichos campos fijada por el problema a analizar. Cabe señalar que, como es habitual en teoría de campos, se utilizarán índices griegos para iterar por los grados espacio-temporales e índices latinos para los espaciales, es decir, $x_\mu = (x_0, x_j) = (t, x)$ siendo $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Objetivos y metodologías

En este Trabajo Fin de Máster se plantean los siguientes objetivos:

1. Recopilación de la evolución y estado del arte sobre soluciones de tipo defecto topológico o kinks en teorías de campos escalares. El primer capítulo se centrará en este punto realizando una revisión bibliográfica de lo desarrollado en este campo hasta el momento, definiendo una serie de conceptos y terminologías fundamentales en la materia, y haciendo especial hincapié en el ejemplo ilustrativo de las soluciones, tanto de vacío como solitónicas, que aparecen en el modelo de Seno-Gordon.
2. Estudio de las teorías de campos definidas sobre una esfera en las que aparecen soluciones solitónicas. El segundo capítulo de este trabajo se dedicará al estudio del modelo masivo no lineal S^2 -sigma, analizando tanto su estructura como las soluciones solitónicas existentes en el mismo. Este modelo es de especial interés debido a su gran relación con la espintrónica.
3. Análisis detallado de los procesos de scattering entre solitones en modelos de teoría de campos con curvatura. En el tercer capítulo se encuentra desarrollado este análisis centrándose inicialmente en el estudio de una metodología generalista con la que poder construir expresiones analíticas de estos fenómenos de una manera recursiva. Esta se basa en la denominada transformada de Bäcklund. A partir de ella se realiza, en primer lugar, un estudio de las colisiones entre dos soluciones solitónicas dentro del modelo de Seno-Gordon para, a continuación, utilizando los resultados encontrados transferirlos en el análisis del scattering entre defectos topológicos singulares presentes en el modelo masivo no lineal S^2 -sigma.

Las metodologías utilizadas en este TFM son las habituales en el campo de la Física Matemática empezando por una revisión bibliográfica sobre el área de estudio para posteriormente realizar una reelaboración de los cálculos referentes a soluciones solitónicas y colisiones entre este tipo de soluciones. Finalmente, para visualizar los resultados obtenidos analíticamente, se implementan una serie de simulaciones de los distintos fenómenos de scattering tanto en el modelo de Seno-Gordon como en el masivo no lineal \mathbb{S}^2 -sigma. El código completo de dichas simulaciones se encuentra recogido en el archivo, en formato cuaderno, `Simulaciones_Solitones_Scatterings.nb` que se adjunta a este Trabajo de Fin de Máster y el cual se encuentra disponible en el siguiente enlace: [simulaciones](#).

Capítulo 1

Soluciones de tipo defecto topológico en teorías de campos escalares

1.1. Introducción

Este primer capítulo se dedica a la contextualización y explicación de una serie de conceptos fundamentales dentro de la teoría de campos escalares relativistas que servirán como base para posteriormente realizar un estudio detallado de los defectos topológicos que aparecen en el modelo masivo no lineal \mathbb{S}^2 -sigma. Para este cometido, como se suele hacer en la literatura, se utilizará un ejemplo bastante ilustrativo, el solitón del modelo de Seno-Gordon. El estudio de este modelo se realizará tanto desde un punto de vista matemático como físico aunque centrándonos sobre todo en entender las técnicas matemáticas que permiten el cálculo explícito de sus soluciones.

Como se ha mencionado en la introducción, el primer objetivo de este trabajo es identificar soluciones de la ecuación (1), especialmente aquellas cuya densidad de energía permanezca localizada a lo largo de la evolución del sistema, lo que supone que sean

soluciones de naturaleza no dispersiva, y que viajan a velocidad constante. Esto permite interpretar estas soluciones como partículas clásicas en movimiento. Esta propiedad no es en absoluto trivial, ya que por ejemplo en el caso (1+1) dimensional de la ecuación de Klein-Gordon

$$\frac{\partial^2 \phi(x_0, x_1)}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2 \phi(x_0, x_1)}{\partial x_1^2} + m^2 \phi(x_0, x_1) = 0 \quad (1.1)$$

la solución general se compone de una combinación lineal de ondas planas (sinusoidales), las cuales se propagan con distintas velocidades provocando el conocido fenómeno de la dispersión. Por lo tanto, las habituales soluciones no cumplen las características deseadas. Sin embargo, una adición de términos no lineales a (1.1) posibilita una compensación del comportamiento dispersivo de las soluciones de tal forma que surjan las soluciones del tipo deseado, es decir, cuya densidad de energía esté localizada. La literatura se refiere a este tipo de soluciones como ondas solitarias de manera genérica, aunque también está extendida la terminología solitones, kinks o defectos topológicos, sobre todo cuando el estudio se asocia a un sistema físico Lagrangiano con una métrica Minkowskiana de modo que $U(\phi)$ sea un potencial asociado a la teoría física.

Aunque no entraremos en detalles en este trabajo, cabe señalar que con el teorema de Derrick se demuestra que la presencia de ondas solitarias que viajan a velocidad constante sólo tiene lugar en un espacio-tiempo de (1+1) dimensiones [11]. En este caso, las soluciones se suelen denominar kinks. En otras dimensiones superiores, como (2+1) o (3+1) dimensiones, se suelen relajar algunas de las exigencias sobre las ondas solitarias dando lugar a lo que se denominan *ribbons* o *domain walls*. [2]

1.2. Historia: Solitones en Teoría de Campos

En la literatura física y matemática existen numerosas definiciones referentes a lo que es un solitón. Éstas varían según el marco en el que se consideren y de la aplicación específica que se esté analizando. Su origen se remonta a Agosto de 1834 cuando el ingeniero naval y naturalista John Scott Russell visualizó un solitón. Él iba montado en su caballo cuando presenció cómo un barco que viajaba por un canal cercano a Edimburgo, el *Union Canal*, se detuvo repentinamente provocando la creación de una ola solitaria capaz de recorrer grandes distancias manteniendo una velocidad y amplitud constantes. A este fenómeno, que tanto le deslumbró, inicialmente lo denominó “onda de traslación” aunque más tarde se renombró como “onda solitaria” o “solitón”. Esta experiencia Russell la describió, reproduciendo sus propias palabras recogidas en el “Report on Waves” de 1844 [24], de la siguiente manera.

“ I was observing the motion of a boat which was rapidly drawn along a narrow channel by a pair of horses, when the boat suddenly stopped-not so the mass of water in the channel which it had put in motion; it accumulated round the prow of the vessel in a state of violent agitation, then suddenly leaving it behind, rolled forward with great velocity, assuming the form of a large solitary elevation, a rounded, smooth and well-defined heap of water, which continued its course along the channel apparently without change of form or diminution of speed. I followed it on horseback, and overtook it still rolling on at a rate of some eight or nine miles an hour, preserving its original figure some thirty feet long and a foot to a foot and a half in height. Its

height gradually diminished, and after a chase of one or two miles I lost it in the windings of the channel. Such, in the month of August 1834, was my first chance interview with that singular and beautiful phænomenon which I have called the Wave of Translation, a name which it now very generally bears; which I have since found to be an important element in almost every case of fluid resistance, and ascertained to be the type of that great moving elevation of the sea which, with the regularity of a planet, ascends our rivers and rolls along our shores. ”

J. S. Russell, *Report on Waves*, 1844

Este fenómeno se puede visualizar en la Figura 3.1.



Figura 1.1: *Recreación del solitón visto por Russell realizada por un grupo de científicos que participaban en una conferencia sobre ondas no lineales en física y biología, en la Heriot-Watt University. Esta recreación se realizó en el mismo canal, el Union Canal, el miércoles 12 de Julio de 1995. [18]*

A raíz de esta experiencia, Russell decidió construir un estanque en su propia casa donde realizó numerosos experimentos con este tipo de ondas. A partir de ellos, obtuvo la siguiente fórmula

$$c^2 = g(h + \eta) \quad (1.2)$$

con la que se relaciona la velocidad de la onda c con su altura siendo h la profundidad del canal, η la amplitud de la onda y g la aceleración de la gravedad (ver Figura 1.2).

Estas ondas constituían un nuevo tipo general de soluciones hidrodinámicas. En contraposición a la onda de choque, que es singular en el frente de choque, esta onda solitaria es regular en todas partes, es decir, no tiene singularidades. Por consiguiente, la onda solitaria es no dispersiva y estable y, por lo tanto, diferente de un paquete de ondas formado por las soluciones ondulatorias planas habituales.

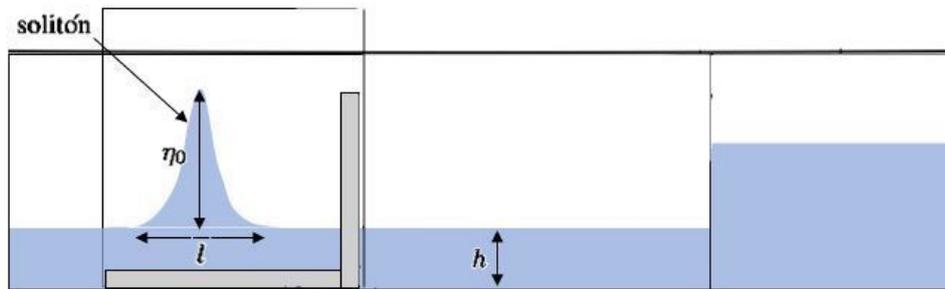


Figura 1.2: Esquema de la formación de una onda solitaria o solitón.

Pese al gran descubrimiento de Russell, inicialmente la comunidad científica fue reacia a su aceptación ya que Airy y Stokes, las mayores autoridades del momento en la materia, supuestamente “demostraron” que una onda de ese tipo tenía que ser obligatoriamente inestable. No fue hasta años más tarde, con Boussinesq (1871) [8], Lord Rayleigh (1876) [23] y finalmente con D.J. Korteweg y G. de Vries (1895) [16] junto a la ecuación que

lleva sus nombres (ecuación Korteweg-de Vries o de KdV) cuando se demostró matemáticamente la existencia de este tipo de soluciones.

Sin embargo, esta teoría queda estancada hasta 1954 cuando se construyó MANIAC I, una computadora que permitió realizar los cálculos necesarios en el diseño de la primera bomba de hidrógeno. Con ella, E. Fermi, J. Pasta, S. Ulam y M. Tsingou realizaron una serie de experimentos, destacando los que llevaron a la resolución del problema conocido como FPUT, el cual estaba basado en el estudio de la distribución de energía de una cadena de osciladores no lineales caracterizada por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales acopladas

$$m\ddot{y}_i = k(y_{i+1} + y_{i-1} - 2y_i) + k\alpha [(y_{i+1} - y_i)^2 - (y_i - y_{i-1})^2] \quad (1.3)$$

donde $y_i = y_i(t)$ con $i = 1, \dots, N - 1$ e $y_0 = y_N = 0$. Los resultados obtenidos en estos experimentos les permitieron concluir que el sistema estudiado exhibía un comportamiento cuasi-periódico que no termalizaba, donde la energía se concentraba en los modos de la cadena. Detalles del planteamiento y cálculos realizados por estos científicos se pueden encontrar en las siguientes referencias [19] y [12]. Años más tarde, en 1965, M. Kruskal y N. Zabusky en [27] demostraron que con un cambio de coordenadas la ecuación de FPUT era equivalente a KdV, y por lo tanto, se dedujo que la solución solitón es también solución de FPUT. Esto implica que los solitones puedan ser interpretados como partículas clásicas.

Finalmente, en 1967, C. Gardner, J. Greene, M. Kruskal y R. Miura, en uno de los artículos más citados en la historia de la Matemáticas, [14], resolvieron completamente

la ecuación KdV inventando para ello el denominado *Método del Scattering Inverso*. Con este método fueron capaces de encontrar todas las soluciones de tipo solitón, demostrando que este problema posee infinitas integrales primeras o cantidades conservadas independientes, y por consiguiente, que es completamente integrable. Cabe señalar que el método inventado, el del Scattering Inverso, que está íntimamente relacionado con la Transformada de Fourier, provocó un cambio completo en las Matemáticas Aplicadas siendo clave en la comprensión de las propiedades de las ecuaciones de los solitones. La base fundamental del método es la asociación entre la ecuación KdV con una ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para un proceso de colisión en la que el potencial sea justamente la solución de KdV. Este paso surgió de manera inmediata al utilizar la transformada de Miura, la cual permite transformar soluciones de la llamada ecuación KdV modificada en soluciones de KdV, probando de esta forma que ambas ecuaciones tienen asociado un número infinito de leyes de conservación, como se ha mencionado anteriormente.

1.3. Ecuación de Korteweg-de Vries

En el artículo [16] “On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves”, Korteweg y de Vries describieron el fundamento teórico completo de lo que hoy en día se conoce como “solución solitón” de la ecuación hidrodinámica no lineal, denominada ecuación de Korteweg-de Vries, que gobierna la evolución de ondas que se propagan por un canal de aguas poco profundas, unidimensionales y de pequeña amplitud.

Dicha ecuación es

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + 6\eta \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0 \quad (1.4)$$

o, equivalentemente,

$$\eta_t + 6\eta \eta_x + \eta_{xxx} = 0. \quad (1.5)$$

Como se muestra en la Figura 1.2, en la ecuación Korteweg-de Vries (1.5), o también conocida como ecuación KdV, $\eta = \eta(x, t)$ describe la elevación del solitón. Por lo tanto, el término η_t hace referencia a la variación de la altura con el tiempo, $\eta \eta_x$ es el término no lineal y η_{xxx} hace referencia a la dispersión que sufre dicha onda.

La solución “onda solitaria” de esta ecuación (1.5) es

$$\eta(x, t) = 2 \kappa \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{\kappa}}{2} (x - 4 \kappa t - x_0) \right), \quad (1.6)$$

siendo κ y x_0 constantes. Ésta es una ecuación con la que se pueden describir solitones. Generalizando esta solución surgen las siguientes definiciones.

Definición 1.1. Una **solución onda solitaria** de una ecuación en derivadas parciales

$$\psi(x, t, \phi, \phi_x, \phi_t, \dots) = 0 \quad (1.7)$$

es una onda viajera de la forma

$$\phi(t, x) = f(x - v t) = f(z) \quad (1.8)$$

donde $x, t \in \mathbb{R}$ se corresponden a las variables espaciales y temporales respectivamente, v a la velocidad, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a una función continua derivable y $\phi : \mathbb{R}^{1,1} \rightarrow \mathbb{R}$ a la variable dependiente que describe una transición desde un estado asintótico constante, cuando $z \rightarrow -\infty$, hasta otro estado asintótico constante cuando $z \rightarrow \infty$.

Definición 1.2. Un **solitón** es una onda solitaria que es capaz de preservar asintóticamente su velocidad y su forma bajo interacciones no lineales con otras ondas solitarias, es decir, es capaz de mantener íntegramente su identidad incluso cuando choca con cualquier otra perturbación localizada arbitraria. [1]

1.4. Modelos generales con varios campos escalares

En teoría de campos, las ecuaciones del movimiento cuando existen varios campos escalares en el espacio (1+1) dimensional se obtienen mediante el principio de mínima acción descrito como

$$\frac{\delta S}{\delta \phi_i} = 0 \quad \text{con } i = 1, \dots, N \quad (1.9)$$

donde $\vec{\phi} \equiv (\phi_1, \dots, \phi_N)$ es un campo vectorial de N componentes escalares, $\phi_i : \mathbb{R}^{1+1} \rightarrow \mathbb{R}$, y la acción S es un funcional dependiente de $\vec{\phi}$ y de sus derivadas definido como

$$S[\vec{\phi}] = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \left\{ \frac{1}{2} \partial^\mu \vec{\phi} \cdot \partial_\mu \vec{\phi} - U(\vec{\phi}) \right\} \quad (1.10)$$

recordando que x_0 hace referencia a la variable temporal y x_1 a la espacial. El parámetro μ toma los valores 0 y 1 utilizando el convenio de sumación de Einstein así como la métrica de Minkowski (1+1) dimensional de la forma

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

Por lo tanto, la densidad Lagrangiana es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \vec{\phi} \cdot \partial_\mu \vec{\phi} - U(\vec{\phi}) \quad (1.12)$$

y $\vec{\phi}$ es una aplicación del espacio $\mathbb{R}^{1,1}$ de Minkowski en \mathbb{R}^N .

Por otro lado, sin pérdida de generalidad, podemos asumir que el potencial $U(\vec{\phi})$ se anula en sus valores mínimos, por lo que es semidefinido positivo. Además, el funcional de energía asociado a la acción (1.10) es

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \varepsilon(\vec{\phi}) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_0} \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial x_0} + \frac{1}{2} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial x_1} + U(\vec{\phi}) \right\}. \quad (1.13)$$

Las soluciones de energía finita más sencillas de las ecuaciones de los campos son, evidentemente, los mínimos absolutos de la energía. Si se estudiara la cuantización de una teoría como la que estamos describiendo, estas soluciones se corresponderían con los valores esperados del operador campo cuántico sobre los estados de vacío o fundamentales de la teoría cuántica correspondiente. Así pues,

Definición 1.3. Se denominan **soluciones triviales o puntos de vacío**, denotadas por $\vec{\phi}_\nu$ o simplemente por $\vec{\nu}$, a las configuraciones de los campos que verifican que

$$E[\vec{\phi}] = 0, \quad (1.14)$$

es decir, aquellos en los que hay un mínimo de energía.

La condición (1.14) implica que los puntos de vacío verifican las siguientes propiedades

$$1. \quad \frac{\partial \phi_{i,\nu}}{\partial x_0} = \frac{\partial \phi_{i,\nu}}{\partial x_1} = 0 \quad (1.15)$$

$$2. \quad U(\vec{\phi}_\nu) = 0. \quad (1.16)$$

Además, dado que hemos dicho que los potenciales $U(\vec{\phi})$ son semidefinidos positivos la Propiedad 2 implica que $\frac{\partial U}{\partial \phi_i}(\vec{\phi}_\nu) = 0$ y, por consiguiente, que $\vec{\phi}_\nu$ sean mínimos absolutos del potencial.

Nos centraremos en las soluciones de energía finita, pues son las que realmente tienen sentido físico. Por tanto, el espacio de configuración de nuestra teoría es:

$$\mathcal{C} = \{ \vec{\phi} \text{ tal que } E[\vec{\phi}] < \infty \} \quad (1.17)$$

por lo que se han de cumplirse las siguientes condiciones asintóticas:

$$1. \quad \lim_{x_1 \rightarrow \pm\infty} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_1} = 0 \quad (1.18)$$

$$2. \quad \lim_{x_1 \rightarrow \pm\infty} U(\vec{\phi}) = 0. \quad (1.19)$$

Esto implica que las configuraciones solitónicas deben converger hacia uno de los ceros del potencial $U(\vec{\phi})$ cuando $|x_1| \rightarrow \infty$.

Por razones de tipo físico [10], nos restringiremos al caso en el que $U(\vec{\phi})$ tiene un conjunto discreto de mínimos, o ceros, no degenerados. De esta manera, surge la siguiente definición.

Definición 1.4. La **variedad de vacío o de ceros** \mathcal{M} es el conjunto de soluciones del espacio de configuración formado por los puntos de vacío, es decir,

$$\mathcal{M} = \{ \vec{\phi}_\nu : \mathbb{R}^{1,1} \rightarrow \mathbb{R}^N \mid U(\vec{\phi}_\nu) = 0 \}. \quad (1.20)$$

La existencia de varios elementos en \mathcal{M} , es decir, de la degeneración del estado fundamental en la teoría cuántica, conduce a la identificación de distintos sectores diferenciados por los vacíos dentro de \mathcal{C} . Estos sectores se identifican según los vacíos que se alcancen asintóticamente, es decir, según los valores $\vec{\phi}_{\nu_1}, \vec{\phi}_{\nu_2} \in \mathcal{M}$ tales que

$$\lim_{x_1 \rightarrow \infty} \vec{\phi}(x_0, x_1) = \vec{\phi}_{\nu_1} \quad (1.21)$$

$$\lim_{x_1 \rightarrow -\infty} \vec{\phi}(x_0, x_1) = \vec{\phi}_{\nu_2}. \quad (1.22)$$

Además, se puede comprobar que si dos configuraciones corresponden a valores asintóticos diferentes éstas estarán separadas por una barrera infinita de potencial, por lo que se descarta completamente la existencia de una evolución temporal, ya sea clásica o cuántica, que permita transformar una configuración en la otra. Para más detalles sobre este aspecto se puede consultar la referencia [13]. Por consiguiente, tenemos que

$$\mathcal{C} = \bigsqcup_{i,j=1}^n \mathcal{C}^{(i,j)} \quad (1.23)$$

siendo $\mathcal{C}^{(i,j)} : \partial\mathbb{R} = \{-\infty, +\infty\} \rightarrow \mathcal{M}$ cada uno de los sectores topológicos disconexos donde los superíndices denotan los vacíos que se alcanzan asintóticamente.

Dentro de este marco, como se ha mencionado anteriormente, surgen soluciones con dependencia espacial que conectan asintóticamente diferentes vacíos. Para describir este tipo de soluciones está la siguiente definición, introducida en [22].

Definición 1.5. Se denomina **kink** u **onda solitaria** a las soluciones no singulares de un sistema de ecuaciones no lineales, cuya densidad de energía está localizada y se mueve con velocidad constante, es decir, puede ser descrita por

$$\varepsilon(x_0, x_1) = \varepsilon(x_1 - vx_0) \quad (1.24)$$

o equivalentemente por

$$\varepsilon(t, x) = \varepsilon(x - vt) \quad (1.25)$$

donde v es el vector velocidad.

Cabe señalar que, habitualmente en la literatura, existe una ambigüedad al utilizar indistintamente los conceptos de solitones y kinks. En nuestro trabajo, sin embargo, identificaremos a los solitones como soluciones tales que la densidad de energía está localizada, que viajan a velocidad constante sin perder su forma y que cuando se produce un scattering entre varios las ondas mantienen íntegramente su identidad, es decir, que el choque entre este tipo de soluciones es elástico. Por otro lado están los kinks los cuales presentan densidades de energía localizadas que viajan a velocidad constante sin perder su forma, lo mismo que antes, pero que al producirse choques entre varios pueden sufrir modificaciones, es decir, los choques no tienen porque ser elásticos. Por lo tanto, podría decirse que los solitones son kinks con scatterings elásticos. Esta apreciación está claramente relacionada con la integrabilidad de los sistemas origen de los cuales surgen este tipo de soluciones. Mientras los solitones surgen de sistemas completamente integrables, como el de Seno Gordon que veremos más adelante, los kinks pueden aparecer en sistemas no completamente integrables, como por ejemplo el modelo ϕ^4 .

De la expresión (1.24), presente en la definición de kink, se deduce que las soluciones generales de tipo kink pueden obtenerse a partir de soluciones estáticas mediante transformaciones de Lorentz (para más detalles sobre este tipo de transformaciones ver [Apéndice A](#)). De esta manera toda solución kink, ϕ_K , cumple los siguientes requisitos:

1. $\phi_K = \phi_K(x)$, es decir, $\frac{\partial \phi_K}{\partial x_0} = 0$ (Condición de estaticidad).
2. Este tipo de soluciones se corresponden con los puntos críticos del funcional de energía

$$E[\vec{\phi}] = \int dx \left\{ \frac{1}{2} \nabla \vec{\phi} \cdot \nabla \vec{\phi} + U(\vec{\phi}) \right\} \quad (1.26)$$

por lo que cumplen que

$$\frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x_1^2} = \frac{\partial U}{\partial \phi_i} \quad i = 1, \dots, N \quad (1.27)$$

3. Como nos estamos ciñendo al espacio de configuración de energías finitas, y sabemos que los dos sumando de la ecuación (1.26) son semidefinidos positivos, se deben cumplir que

$$\lim_{|x_1| \rightarrow \infty} \phi_{K,i}(x) \in \mathcal{M} \quad (1.28)$$

$$\lim_{|x_1| \rightarrow \infty} \frac{\partial \phi_{K,i}(x)}{\partial x_1} = 0. \quad (1.29)$$

Por lo tanto, en la definición de \mathcal{C} dada en (1.23) se incluyen tanto las soluciones triviales o de vacío como las soluciones de tipo kink. En particular, las soluciones triviales $\vec{\phi}_{\nu_i}$ así como las de tipo kink que van a parar al mismo vacío asintóticamente (cuando $x_1 \rightarrow \pm\infty$) pertenecen a los sectores $\mathcal{C}^{(i,i)}$. Sin embargo, aquellas soluciones que aúnan asintóticamente vacíos diferentes, como $\vec{\phi}_{\nu_i}$ y $\vec{\phi}_{\nu_j}$, pertenecerán a $\mathcal{C}^{(i,j)}$. Tradicionalmente, se denominan soluciones **no topológicas** a las primeras y **topológicas** a las segundas.

1.5. Ecuación de Seno-Gordon

Como se ha mencionado en la introducción, el modelo Seno-Gordon, junto al modelo ϕ^4 , es uno de los más estudiados en la literatura en lo que respecta a teorías con un solo campo escalar real. La peculiaridad que tiene este modelo frente al de ϕ^4 es que este es posible resolverlo completamente de manera exacta, es decir, es completamente integrable.

La ecuación Seno-Gordon, o también denominada ecuación SG, apareció por primera vez a mediados del siglo XIX, en el marco del estudio de las superficies de curvatura Gaussiana constante negativa en \mathbb{R}^2 , es decir, en las superficies pseudoesféricas o “pseudoesferas”. Esta famosa ecuación es

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} + \sin(\phi) = 0 \quad (1.30)$$

o, equivalentemente,

$$\frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial x^2} + \sin(\phi(x, t)) = 0 \quad (1.31)$$

que puede verse como la ecuación de la teoría de campos (1.12) utilizando como potencial del campo escalar $\phi = \phi(x, t)$

$$\begin{aligned} U(\phi) : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \phi &\longrightarrow 1 - \cos(\phi). \end{aligned} \quad (1.32)$$

Este potencial es semidefinido positivo, pues $U(\phi) \geq 0 \quad \forall \phi \in \mathbb{R}$, y presenta un número infinito discreto de ceros ($\phi_{\nu_n} = 2\pi n$ con $n \in \mathbb{Z}$). Estos ceros, además, son todos mínimos del potencial ya que $U''(\phi_{\nu_n}) = 1 \quad \forall n$. Por lo tanto, como se vio en la sección anterior, las soluciones triviales o puntos de vacío de la ecuación de Seno-Gordon (1.30) son justamente

estos estados constantes, los mínimos (ceros) del potencial.

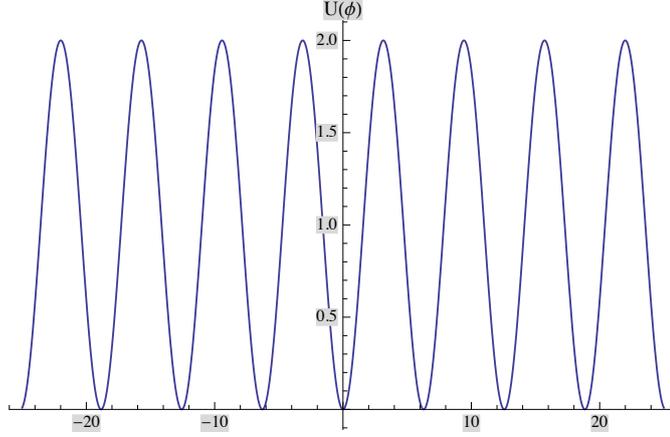


Figura 1.3: Forma del potencial de la ecuación Seno-Gordon (1.32).

Por otra parte, como ya se ha explicado, nos interesa encontrar las soluciones estáticas, es decir constantes en el tiempo $\phi = \phi(x)$, puesto que teniendo en cuenta que el funcional de acción S (1.10) es invariante frente transformaciones de Lorentz sabemos que si encontramos dichas soluciones también tendremos las soluciones que viajan a velocidad constante, es decir, $\phi\left(\frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2}}\right)$ aplicando simplemente un boost de Lorentz.

Proposición 1.1. Una solución de la ecuación de SG (1.30) es la función

$$\phi(t, x) = 4 \arctan\left(e^{\gamma(x-vt)}\right) + 2\pi k \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (1.33)$$

donde la velocidad $v \in (-1, 1)$ es constante y

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}. \quad (1.34)$$

Demostración. En primer lugar, hay que tener en cuenta que $v \in (-1, 1)$ ya que las velocidades las estamos considerando todas normalizadas por la velocidad de la luz (se toma $c = 1$ siendo c la velocidad de la luz). Dicho esto, la demostración se puede plantear de dos formas diferentes, cada una de ellas con interés.

Opción 1. De forma directa: Se calculan las derivadas parciales segundas de (1.33) respecto de x y t , es decir,

$$\begin{aligned}\phi_{xx} &= \frac{4\gamma (\gamma e^{\gamma(x-vt)} - \gamma e^{3\gamma(x-vt)})}{(e^{2\gamma(x-vt)} + 1)^2} \\ \phi_{tt} &= \frac{-4\gamma v (\gamma v e^{3\gamma(x-vt)} - \gamma v e^{\gamma(x-vt)})}{(e^{2\gamma(x-vt)} + 1)^2}\end{aligned}$$

y el tercer término de (1.30) usando (1.33)

$$\sin(\phi) = \sin(4 \arctan(e^{\gamma(x-vt)}) + 2\pi k) = \sin(4 \arctan(e^{\gamma(x-vt)})) \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Si ahora hacemos uso del teorema de Pitágoras y definimos

$$z = e^{\gamma(x-vt)} \quad \text{y} \quad y = \arctan(z)$$

llegamos a que

$$\sin(y) = \frac{z}{\sqrt{z^2 + 1}} \quad \text{y} \quad \cos(y) = \frac{1}{\sqrt{z^2 + 1}}$$

Finalmente, usando las fórmulas del ángulo doble podemos escribir

$$\sin(\phi) = \sin(4y) = \frac{8z}{(z^2 + 1)^2} - \frac{4z}{z^2 + 1} = \frac{4z - 4z^3}{(z^2 + 1)^2} = \frac{4(e^{\gamma(x-vt)} - e^{3\gamma(x-vt)})}{(e^{2\gamma(x-vt)} + 1)^2}.$$

Luego sustituyendo los tres términos en (1.30) encontramos la igualdad, por lo tanto, queda probado que (1.33) es solución de la ecuación de SG.

Opción 2: Como estamos buscando soluciones constantes en el tiempo se tiene $\phi_t = 0$ y, por lo tanto, también $\phi_{tt} = 0$. Luego la ecuación de SG (1.30) se reduce a

$$\phi_{xx} = \sin(\phi).$$

Por otra parte, si se tiene en cuenta que el mínimo del funcional de energía, el cual se puede reescribir como

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{1}{2} (\phi_t^2 + \phi_x^2) + U(\phi) \right] = \tag{1.35}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \phi_x \pm \sqrt{U(\phi)} \right]^2 \mp \int_{-\infty}^{\infty} dx \sqrt{2U(\phi)} \phi_x \geq 0, \quad (1.36)$$

se alcanza cuando

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 = U(\phi), \quad (1.37)$$

entonces se deduce que

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \sqrt{2(1 - \cos(\phi))} = \pm 2 \sin \frac{\phi}{2} \implies \phi(x) = 4 \arctan e^{x-x_0} + 2\pi k \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

siendo esta una ecuación equivalente a (1.33) realizando un boost de Lorentz. \square

Las soluciones de Seno-Gordon encontradas en la proposición anterior

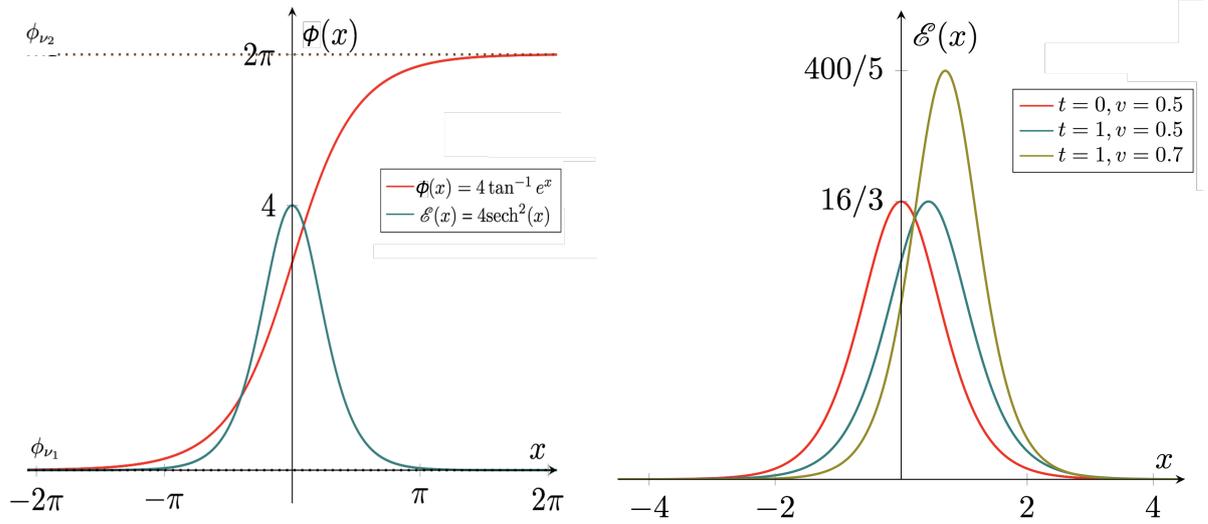
$$\phi_K(t, x) = 4 \arctan (e^{\gamma(x-vt)}) + 2\pi k \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad (1.38)$$

son las denominadas soluciones solitónicas, o directamente solitones, que corresponden a las transiciones entre dos puntos de vacío vecinos y cuyas distribuciones de la densidad de energía son ondas localizadas (ver Figura 1.4). La expresión de estas distribuciones se obtiene utilizando (1.35) e imponiendo que la variación temporal es nula, es decir que $\phi_t = 0$, así como la ecuación (1.37). Por lo tanto, se llega a que

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{2} (\phi_t^2 + \phi_x^2) + U(\phi) = \phi_x^2. \quad (1.39)$$

Si ahora sustituimos ϕ por la solución general (1.33) encontrada anteriormente se obtiene que

$$\varepsilon(t, x) = \frac{4\gamma}{\cosh^2(\gamma(x-vt))}. \quad (1.40)$$



(a) Solución estática solitónica junto a su correspondiente densidad de energía.

(b) Densidad de energía de soluciones solitónicas en función de la velocidad y el tiempo.

Figura 1.4: Visualización del solitón solución de la ecuación de SG (1.33) junto a su densidad de energía (1.40) con $k = 0$ para tiempo igual a cero (Gráfica 1.4a) y comparativa de densidades de energía (1.40) de la solución solitónica de la ecuación de SG (1.30) en función del tiempo y la velocidad (Gráfica 1.4b).

Por otra parte, es conveniente matizar la diferencia entre lo que se denomina solitón de un antisolitón. Supongamos que $\phi_{\nu_1}, \phi_{\nu_2}$ son dos soluciones de vacío tales que $\phi_{\nu_1} < \phi_{\nu_2}$. Entonces se dice que una solución es un solitón, como (1.33), cuando

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(t, x) = \phi_{\nu_1}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \phi(t, x) = \phi_{\nu_2}. \quad (1.41)$$

De forma análoga, una solución es un antisolitón si

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(t, x) = \phi_{\nu_2}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \phi(t, x) = \phi_{\nu_1}. \quad (1.42)$$

De hecho, de forma general tenemos la siguiente proposición.

Proposición 1.2. Sea $\phi_K : \mathbb{R}^{1,1} \rightarrow \mathbb{R}$ un solitón de (1) entonces la aplicación $\phi_{\bar{K}} : \mathbb{R}^{1,1} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\phi_{\bar{K}}(t, x) = \phi_K(t, -x) \quad (1.43)$$

es el antisolitón de (1).

Demostración. Partiendo de (1.43) y fijando t se cumple que

$$\phi_{\bar{K}tt}(t, x) = \phi_{Ktt}(t, -x).$$

Si ahora definimos $y = -x$ entonces $\frac{dy}{dx} = -1$ y, por lo tanto,

$$\begin{aligned}\phi_{\bar{K}x}(t, x) &= \frac{\partial \phi_{\bar{K}}(t, x)}{\partial x} = \frac{\partial \phi_K(t, y)}{\partial y} \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial \phi_K(t, y)}{\partial y} \\ \phi_{\bar{K}xx}(t, x) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \phi_K(t, y)}{\partial y} \right) \frac{dy}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi_K(t, y)}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi_K(t, -x)}{\partial x} \right) = \phi_{Kxx}(t, -x)\end{aligned}$$

de esta forma, la ecuación (1) se convierte en

$$\phi_{Ktt}(t, -x) - \phi_{Kxx}(t, -x) + U'(\phi) = 0.$$

□

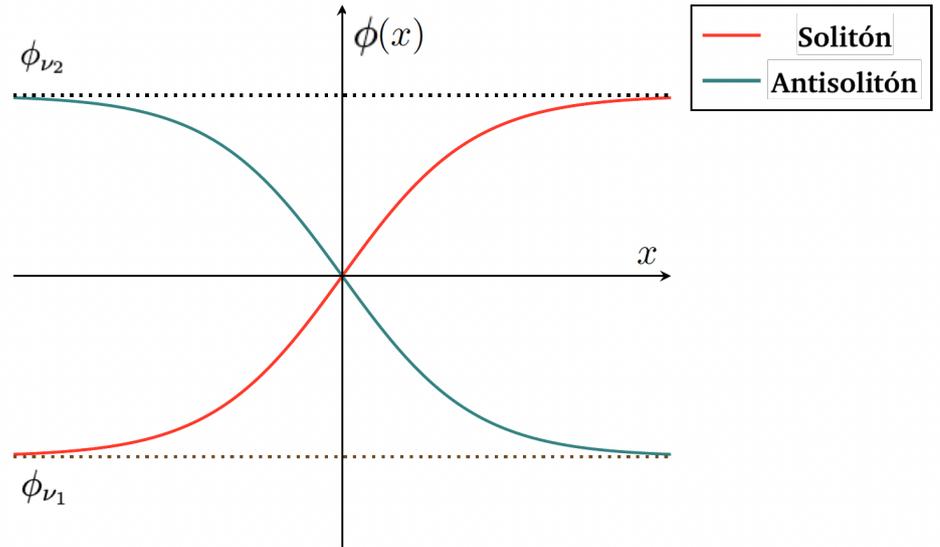


Figura 1.5: Visualización de un solitón y su antisolitón.

Evidentemente todo depende de cómo se considera la orientación en la coordenada espacial x , es decir, en la Figura 1.5 el sentido del eje x . Si avanzas por la coordenada espacial (eje x) y tomas como referencia un solitón (curva roja) entonces su antisolitón será el correspondiente que se consigue retrocediendo espacialmente (curva azul).

Para más detalles de este modelo se puede consultar el capítulo 1 de la referencia [25].

Capítulo 2

Modelo masivo no lineal S^2 -sigma con aplicaciones a la espintrónica

En este capítulo estudiaremos el denominado modelo masivo no lineal S^2 -sigma en el espacio $(1+1)$ dimensional $\mathbb{R}^{1,1}$ de Minkowski utilizando varias de las nociones aprendidas en el capítulo anterior. Es de destacar que este modelo se puede interpretar como el movimiento de una partícula en \mathbb{R}^3 bajo la influencia de una función potencial, al que se le añade una ligadura con la que se restringe el movimiento a una esfera de radio R .

El capítulo está dividido en cuatro partes, la primera está dedicada a explicar cómo se construye el modelo. La segunda al cálculo de las soluciones solitónicas presentes en este modelo, tanto topológicas como no topológicas. En la tercera parte se explica la relación que existe entre este modelo y la espintrónica. Por último, se añade un último apartado, a modo de resumen, con los resultados más relevantes que se irán encontrando a lo largo del capítulo.

2.1. Construcción del modelo

El modelo masivo no lineal \mathbb{S}^2 -sigma describe la evolución de 3 campos escalares ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 , o lo que es lo mismo, de un campo vectorial $\vec{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$. De este modo, el funcional de acción (1.10) que gobierna la dinámica será

$$S[\phi_1, \phi_2, \phi_3] = \int dt dx \left\{ \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \phi_i}{\partial x_\mu} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_\nu} - U \right\} \quad (2.1)$$

donde $U = U(\phi_1(t, x), \phi_2(t, x), \phi_3(t, x))$ es el potencial y, usando la misma notación que en el capítulo anterior, $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1)$ y $x_\mu = (x_0, x_1) = (t, x)$. Además, en este caso se impondrá la siguiente condición sobre los campos escalares

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = R^2. \quad (2.2)$$

Esto supone que los $\phi_i = \phi_i(t, x)$ sean aplicaciones desde el espacio (1+1)-dimensional de Minkowski a la esfera \mathbb{S}^2 de radio R , es decir, $\phi_i : \mathbb{R}^{1,1} \longrightarrow \mathbb{S}^2$. En consecuencia, los campos de la teoría definen, para cada $(t, x) \in \mathbb{R}^{1,1}$, un punto de la esfera \mathbb{S}^2 , y por tanto, el espacio interno (*target manifold*) de la teoría es la esfera 2-dimensional.

El modelo más sencillo que a priori podríamos considerar en este contexto, sería el caso $U \equiv 0$, es decir, evolución libre de los campos en \mathbb{S}^2 (modelo no lineal \mathbb{S}^2 -sigma). Sin embargo, el interés de este modelo desde un punto de vista físico es muy limitado pues producirá una teoría cuántica de campos con bosones no masivos, algo que está prohibido físicamente, ver [9] para más detalles.

Por tanto, tendremos que considerar como modelo más sencillo con interés físico, el determinado por la función potencial

$$U(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = \frac{1}{2} (\alpha_1^2 \phi_1^2 + \alpha_2^2 \phi_2^2 + \alpha_3^2 \phi_3^2) \quad (2.3)$$

con $\alpha_1^2 > \alpha_2^2 > \alpha_3^2 \geq 0$, en consecuencia el modelo masivo no lineal \mathbb{S}^2 -sigma. Si utilizamos la ligadura (2.2) obtenemos

$$\begin{aligned} U(\phi_1, \phi_2, \phi_3) &= \frac{1}{2} \left((\alpha_1^2 - \phi_3^2)\phi_1^2 + (\alpha_2^2 - \phi_3^2)\phi_2^2 + \alpha_3^2 R^2 \right) \\ &\simeq \frac{\lambda^2}{2} \phi_1^2(t, x) + \frac{\gamma^2}{2} \phi_2^2(t, x) \end{aligned} \quad (2.4)$$

siendo $\lambda^2 = (\alpha_1^2 - \alpha_3^2)$, $\gamma^2 = (\alpha_2^2 - \alpha_3^2)$ con $\lambda^2 \geq \gamma^2 > 0$. Si además definimos las coordenadas espacio-temporales y parámetros no dimensionales de la siguiente manera

$$x^\mu \rightarrow \frac{x^\mu}{\lambda} \quad (2.5)$$

$$\sigma^2 = \frac{\alpha_2^2 - \alpha_3^2}{\alpha_1^2 - \alpha_3^2} = \frac{\gamma^2}{\lambda^2} \quad \text{con} \quad 0 < \sigma^2 \leq 1, \quad (2.6)$$

el potencial se puede escribir como

$$U(\phi_1, \phi_2) = \frac{1}{2} \left(\phi_1^2(t, x) + \sigma^2 \cdot \phi_2^2(t, x) \right). \quad (2.7)$$

De la misma forma, el funcional de acción se puede escribir como

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int dt dx \left\{ \partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \phi_1 + \partial_\mu \phi_2 \partial^\mu \phi_2 - \phi_1^2(t, x) - \sigma^2 \cdot \phi_2^2(t, x) \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\phi_1 \partial_\mu \phi_1 + \phi_2 \partial_\mu \phi_2)(\phi_1 \partial^\mu \phi_1 + \phi_2 \partial^\mu \phi_2)}{R^2 - \phi_1^2 - \phi_2^2} \right\}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Por otro lado, se puede calcular la energía (1.13) para este modelo, imponiendo la condición (2.2), llegando a la expresión

$$\begin{aligned} E &= \frac{\lambda}{2} \int dx \left\{ (\partial_t \phi_1)^2 + (\partial_t \phi_2)^2 + (\partial_x \phi_1)^2 + (\partial_x \phi_2)^2 + \phi_1^2(t, x) + \sigma^2 \cdot \phi_2^2(t, x) \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\phi_1 \partial_t \phi_1 + \phi_2 \partial_t \phi_2)^2 + (\phi_1 \partial_x \phi_1 + \phi_2 \partial_x \phi_2)^2}{R^2 - \phi_1^2 - \phi_2^2} \right\}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Los parámetros γ y λ tienen un significado físico muy concreto en la teoría cuántica subyacente, pues representan las masas de las partículas tras el proceso de cuantización.

Por este motivo, nos referiremos a los parámetros con el término masas.

2.2. Cálculo de solitones en el modelo

En este apartado trataremos de encontrar las soluciones: puntos de vacío y solitones, del modelo masivo no lineal \mathbb{S}^2 -sigma siguiendo un razonamiento análogo al visto en el capítulo anterior.

Puntos de vacío

En primer lugar, analizando el potencial de este modelo, (2.7), se observa claramente que solo existen dos ceros del potencial y, por lo tanto, dos puntos de vacío. Estos son $\Phi^N = (0, 0, R)$ y $\Phi^S = (0, 0, -R)$, puntos que se corresponden con el polo norte y sur, respectivamente, de una esfera de radio R . De esta forma la simetría discreta de la acción (1.10), generada por $\phi_i \rightarrow -\phi_i$ con $i = 1, 2, 3$ en $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ se rompe espontáneamente en el espacio $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ (sólo se conserva la simetría $\phi_i \rightarrow -\phi_i$ con $i = 1, 2$). Además, en el caso de que las dos masas sean iguales esta simetría se corresponde con el grupo de Lie $SO(2)$, es decir, con el grupo de rotaciones del plano euclídeo. Por consiguiente, el espacio de configuración (1.23) en este modelo está formado por la unión de 4 sectores desconexos

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}^{(N,N)} \cup \mathcal{C}^{(S,S)} \cup \mathcal{C}^{(N,S)} \cup \mathcal{C}^{(S,N)} \quad (2.10)$$

en base a los puntos de vacío que se alcancen asintóticamente.

Soluciones solitónicas

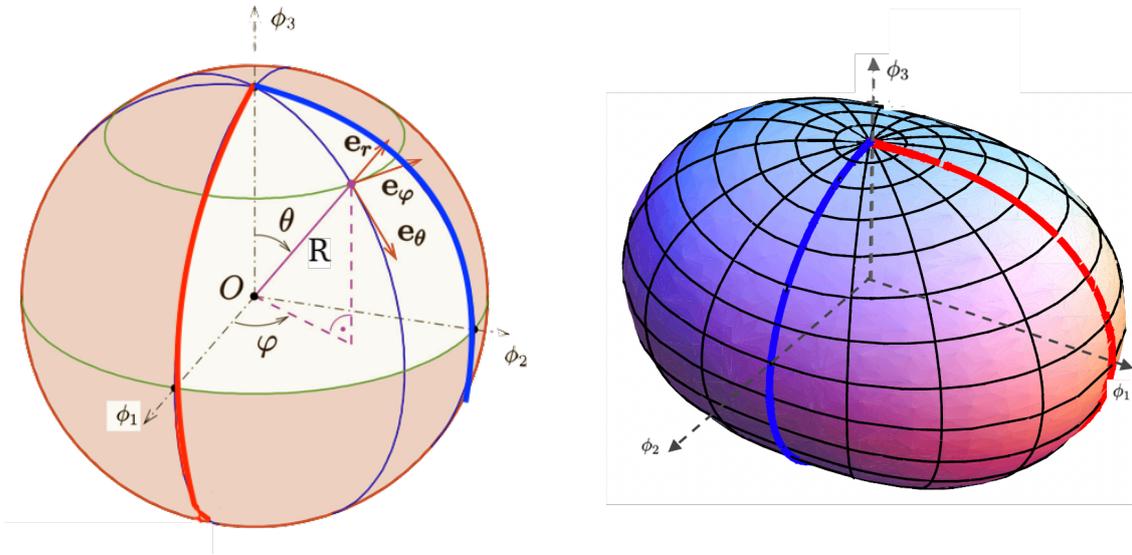
Para el cálculo de las soluciones solitónicas diferenciaremos entre las topológicas, es decir las que pertenecen a los sectores $\mathcal{C}^{(N,S)}$ o $\mathcal{C}^{(S,N)}$, de las no topológicas, es decir las que pertenecen a los sectores $\mathcal{C}^{(N,N)}$ o $\mathcal{C}^{(S,S)}$, haciendo especial hincapié en las topológicas singulares las cuales haremos colisionar en el siguiente capítulo.

I) Soluciones topológicas

La forma más sencilla de encontrar las soluciones topológicas existentes en este modelo es realizando el siguiente cambio de coordenadas a esféricas

$$\begin{cases} \phi_1(t, x) = R \sin \theta(t, x) \cos \varphi(t, x) \\ \phi_2(t, x) = R \sin \theta(t, x) \sin \varphi(t, x) \\ \phi_3(t, x) = R \cos \theta(t, x) \end{cases} \quad (2.11)$$

con $\theta : \mathbb{R}^{1,1} \rightarrow [0, \pi]$ y $\varphi : \mathbb{R}^{1,1} \rightarrow [0, 2\pi)$. Este cambio de coordenadas se puede visualizar en la Figura 2.1a.



(a) Visualización de las coordenadas esféricas $\{R, \theta, \varphi\}$ a partir de las coordenadas originales $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$.

(b) Visualización del potencial $U(\theta, \phi)$ sobre \mathbb{S}^2 . En azul se muestra el meridiano de mínimo potencial y en rojo el de máximo potencial.

Figura 2.1: Visualización del cambio de sistema de coordenadas desde el compuesto por los tres potenciales escalares $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$ a esféricas $\{R, \theta, \varphi\}$ así como la deformación del potencial $U(\theta, \phi)$ en este sistema de coordenadas sobre la esfera \mathbb{S}^2 .

De esta manera, el potencial (2.7) se escribe de la forma

$$U(\theta, \varphi) = \frac{R^2}{2} \sin^2 \theta (\sigma^2 + \bar{\sigma}^2 \cos^2 \varphi) \quad (2.12)$$

donde $\bar{\sigma} = \sqrt{1 - \sigma^2}$ y el funcional de acción (2.8) como

$$S = \int dt dx \left\{ \frac{R^2}{2} [\partial_\mu \theta \partial^\mu \theta + \sin^2 \theta \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi] - \frac{R^2}{2} \sin^2 \theta (\sigma^2 + \bar{\sigma}^2 \cos^2 \varphi) \right\}. \quad (2.13)$$

Por lo tanto, la densidad Lagrangiana en este sistema es

$$\mathcal{L} = \frac{R^2}{2} [\partial_\mu \theta \partial^\mu \theta + \sin^2 \theta \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi] - \frac{R^2}{2} \sin^2 \theta (\sigma^2 + \bar{\sigma}^2 \cos^2 \varphi) \quad (2.14)$$

y, por consiguiente, si calculamos las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad \text{for } i = 1, 2 \quad (2.15)$$

donde q_i son las coordenadas esféricas, es decir, $q_1 = \theta(t, x)$ y $q_2 = \varphi(t, x)$, se llega al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales con el que se describe la dinámica del modelo

$$\left\{ \begin{array}{l} \square(\theta) - \frac{1}{2} \sin 2\theta (\partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi - \cos^2 \varphi - \sigma^2 \sin^2 \varphi) = 0 \end{array} \right. \quad (2.16a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial^\mu (\sin^2 \theta \partial_\mu \varphi) - \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2 \sin^2 \theta \sin 2\varphi = 0 \end{array} \right. \quad (2.16b)$$

siendo $\square(\cdot)$ el operador d'Alembertiano ($\square = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) = \partial_\mu \partial^\mu = g^{\mu\nu} \partial_{\mu\nu}^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$).

De esta manera se pueden extraer más fácilmente las soluciones de energía finita que se mueven a una velocidad v constante (solitones) donde recordemos que la dependencia espacio-temporal es de la forma

$$\theta(t, x) = \theta \left(\frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}} \right), \varphi(t, x) = \varphi \left(\frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}} \right), \quad (2.17)$$

Como vimos en el capítulo anterior, basta con analizar las configuraciones estáticas ($\theta(t, x) = \theta(x)$ y $\varphi(t, x) = \varphi(x)$) para obtener estas soluciones. De esta forma el sistema

(2.16) se reduce a

$$\begin{cases} \frac{d^2\theta}{dx^2} - \frac{1}{2} \sin 2\theta \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 = \frac{1}{2} \sin 2\theta (\cos^2 \varphi + \sigma^2 \sin^2 \varphi) & (2.18a) \\ \frac{d}{dx} \left(\sin^2 \theta \frac{d\varphi}{dx} \right) = \frac{1}{2} (1 - \sigma^2) \sin^2 \theta \sin 2\varphi . & (2.18b) \end{cases}$$

que es un SEDO de segundo orden no lineal y acoplado.

Antes de entrar en detalle sobre las soluciones solitónicas del modelo cabe señalar que el funcional de la energía (2.9) en el sistema de coordenadas esféricas queda de la siguiente manera

$$\begin{aligned} E[\theta, \phi] &= \lambda \int dx \mathcal{E}(\theta'(x), \varphi'(x), \theta(x), \varphi(x)) \\ &= \lambda \int dx \left\{ \frac{\lambda R^2}{2} \left((\theta')^2 + \sin^2 \theta (\varphi')^2 + \sin^2 \theta (\sigma^2 + \bar{\sigma}^2 \cos^2 \varphi) \right) \right\} . \end{aligned} \quad (2.19)$$

Volviendo al sistema (2.18), para encontrar las soluciones deseadas aplicaremos en una primera instancia el denominado método de la órbita de prueba de Rajaraman [21]. En primer lugar, buscaremos solitones donde φ sea constante, es decir, soluciones sobre algún meridiano de la esfera, pues así garantizamos la verificación de las condiciones asintóticas (1.18) y (1.19). Aquí se produce una clara distinción entre el caso más general, y más habitual, que se da cuando σ^2 es menor que 1, es decir cuando las dos masas son distintas ($\lambda \neq \gamma$ en (2.7)), del caso particular que ocurre cuando las masas son iguales ($\sigma^2 = 1$).

I.I) Caso $\sigma^2 < 1$

En el caso de que $\sigma^2 < 1$, observando el sistema (2.18), en concreto la ecuación (2.18b), se deduce que las únicas posibles soluciones con φ constante se corresponden con $\varphi = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$. De hecho, dichas soluciones se pueden agrupar en dos pares, cada uno

de los cuales reduce la ecuación (2.18a) a una ecuación de Seno-Gordon diferente

$$I) \quad \frac{d^2\theta}{dx^2} - \frac{\sigma^2}{2} \sin 2\theta = 0 \quad \text{si } \varphi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \quad (2.20a)$$

$$II) \quad \frac{d^2\theta}{dx^2} - \frac{1}{2} \sin 2\theta = 0 \quad \text{si } \varphi = 0, \pi. \quad (2.20b)$$

Por lo tanto, en el modelo sigma masivo no lineal aparece integrado el modelo de Seno-Gordon en dos meridianos ortogonales.

A) Solitones K_1/K_1^*

Se denotará por K_1/K_1^* al par de soluciones solitón/antisolitón del modelo SG (2.20a) correspondientes a $\varphi_{K_1} = \frac{\pi}{2}$ y $\varphi_{K_1^*} = \frac{3\pi}{2}$. Dichas soluciones, que se pueden obtener siguiendo el mismo procedimiento visto en la Sección 1.5, son

$$I) \quad K_1: \quad \begin{cases} \varphi_{K_1} = \frac{\pi}{2} \\ \theta_{K_1}(x) = 2 \arctan e^{\pm\sigma(x-x_0)} \end{cases} \quad (2.21a)$$

$$(2.21b)$$

$$II) \quad K_1^*: \quad \begin{cases} \varphi_{K_1^*} = \frac{3\pi}{2} \\ \theta_{K_1^*}(x) = 2 \arctan e^{\pm\sigma(x-x_0)} \end{cases} \quad (2.22a)$$

$$(2.22b)$$

Éstas se corresponden a las dos mitades del meridiano con $\phi_1 = 0$. En la Figura 2.1a se puede apreciar en color azul dicho meridiano.

Además, podemos calcular la energía finita de estos solitones, utilizando (2.19), obteniendo

$$\begin{aligned} E_{K_1}^C &= E_{K_1^*}^C = \frac{\lambda R^2}{2} \int dx \left[(\theta'_{K_1})^2 + \sigma^2 \sin^2 \theta_{K_1} \right] = \\ &= \lambda R^2 \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\cosh^2 \sigma x} = 2\lambda R^2 \sigma \end{aligned} \quad (2.23)$$

Cabe señalar que estos solitones pertenecen a los sectores del espacio de configuración $\mathcal{C}^{(N,S)}$ y $\mathcal{C}^{(S,N)}$, según tomemos la solución solitón o antisolitón respectivamente. Una representación de estas soluciones se muestra en la Figura 2.2 donde a partir de un pequeño script en Mathematica se consigue visualizar como las soluciones varían en función del valor que tome el parámetro σ .

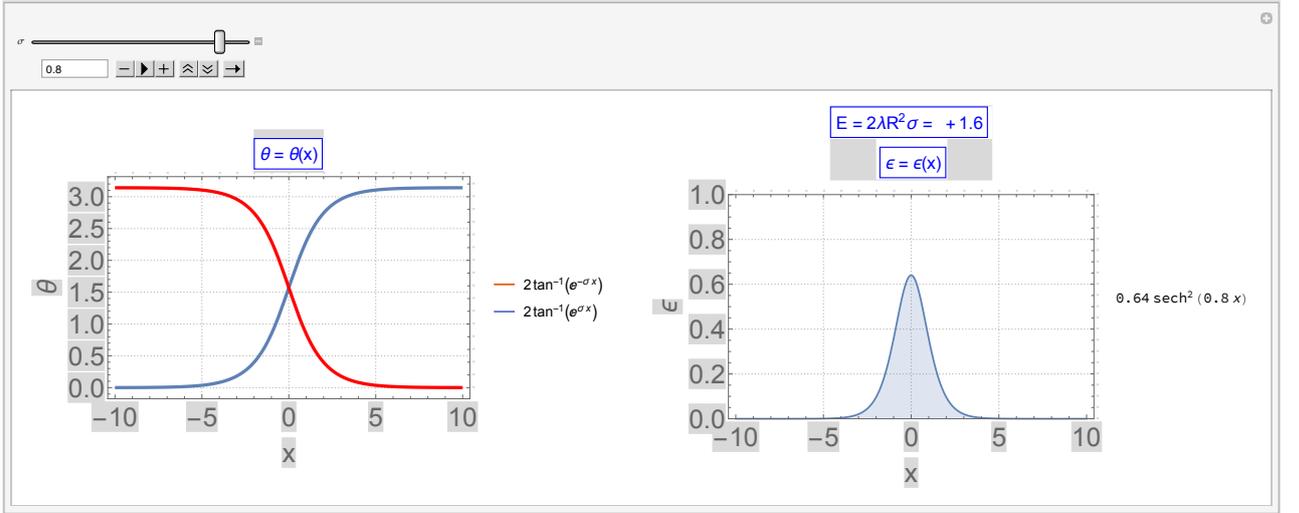


Figura 2.2: Simulaciones conseguidas mediante Mathematica de las soluciones solitónicas K_1/K_1^* (y por consiguiente también de K_2/K_2^* si se impone un valor de $\sigma^2 = 1$). A la izquierda se representa la variación de la coordenada θ en función de x viendo que su valor varía entre 0 y π recorriendo el meridiano desde el polo sur al norte o viceversa dependiendo del signo de σ . A la derecha se observa la distribución de la densidad de energía de los solitones. (Para el cálculo de la energía total se ha tomado $R = 1$ y $\lambda = 1$).

Si queremos obtener estas soluciones en el sistema de coordenadas original debemos deshacer el cambio de variable (2.11) llegando así a

$$\Phi^{K_1}(x) = \left(0, \frac{R}{\cosh[\sigma(x - x_0)]}, \pm R \tanh[\sigma(x - x_0)] \right) \quad (2.24)$$

$$\Phi^{K_1^*}(x) = \left(0, -\frac{R}{\cosh[\sigma(x - x_0)]}, \pm R \tanh[\sigma(x - x_0)] \right) \quad (2.25)$$

Una visualización de estas soluciones, mediante una cadena de espines, se encuentra en la Figura 2.6 que se comentará en la siguiente sección de este capítulo.

Por último, es de destacar que este par de soluciones son estables ya que no existe ninguna fluctuación, independientemente de la dirección que se elija, que presente autovalores negativos en el espectro del correspondiente operador Hessiano. Este resultado se encuentra demostrado en la sección IV de [4]. Esto quiere decir que frente a pequeñas perturbaciones en cualquier dirección de una órbita solución K_1 (o K_1^*) el sistema volverá al cabo de un tiempo finito a ser la misma órbita inicial K_1 (o K_1^*), ya que es ahí donde se encuentra el mínimo de energía.

B) Solitones K_2/K_2^*

Se denotará por K_2/K_2^* ahora al par de soluciones solitón/antisolitón del modelo SG (2.20b) correspondientes a $\varphi_{K_2} = 0$ y $\varphi_{K_2^*} = \pi$. Dichas soluciones, que se pueden obtener siguiendo el mismo procedimiento visto en la Sección 1.5, son

$$\text{I) } K_2: \quad \begin{cases} \varphi_{K_2} = 0 & (2.26a) \\ \theta_{K_2}(x) = 2 \arctan e^{\pm(x-x_0)} & (2.26b) \end{cases}$$

$$\text{II) } K_2^*: \quad \begin{cases} \varphi_{K_2^*} = \pi & (2.27a) \\ \theta_{K_2^*}(x) = 2 \arctan e^{\pm(x-x_0)} & (2.27b) \end{cases}$$

Éstas se corresponden a las dos mitades del meridiano con $\phi_2 = 0$. En la Figura 2.1a se puede apreciar en color rojo dicho meridiano.

Al igual que en el caso anterior, se puede calcular la energía finita de estos solitones de la siguiente manera

$$\begin{aligned} E_{K_2}^C &= E_{K_2^*}^C = \frac{\lambda R^2}{2} \int dx \left[(\theta'_{K_2})^2 + \sigma^2 \sin^2 \theta_{K_2} \right] = \\ &= \lambda R^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\cosh^2 \sigma x} = 2\lambda R^2. \end{aligned} \quad (2.28)$$

En este caso, teniendo en cuenta que $-1 \leq \sigma \leq 1$, la energía obtenida es mayor que la que se obtuvo con el par K_1/K_1^* .

Por otra parte, estos solitones también pertenecen a los sectores del espacio de configuración $\mathcal{C}^{(N,S)}$ y $\mathcal{C}^{(S,N)}$ y una representación de (2.26b) se puede obtener con la simulación de la Figura 2.2 al imponer $\sigma^2 = 1$ (con lo que la ecuación de SG (2.20a) se convierte en (2.20b)).

Este par de soluciones en el sistema de coordenadas original son

$$\Phi^{K_2}(x) = \left(\frac{R}{\cosh(x - x_0)}, 0, \pm R \tanh(x - x_0) \right) \quad (2.29)$$

$$\Phi^{K_2}(x) = \left(-\frac{R}{\cosh(x - x_0)}, 0, \pm R \tanh(x - x_0) \right) \quad (2.30)$$

Una visualización de estas soluciones, mediante una cadena de espines, se encuentra en la Figura 2.7 que se comentará en la siguiente sección de este capítulo.

Por último, respecto a la estabilidad de este par de soluciones, se sabe que son inestables ya que el espectro del operador de fluctuaciones de segundo orden presenta autovalores negativos, como queda demostrado en la sección IV de [4]. Esto quiere decir que frente a pequeñas perturbaciones de una órbita solución K_2 (o K_2^*) el sistema evolucionará sin regresar nunca a dicha órbita inicial K_2 (o K_2^*). De hecho, esta órbita se acabará convirtiendo en una del par K_1/K_1^* .

I.II) Caso $\sigma^2 = 1$

El caso límite $\sigma^2 = 1$ es un caso muy peculiar en el que aparece una familia uniparamétrica de ondas solitarias, soluciones del modelo sigma, la cual recorre todos los meridianos de la esfera. Es decir, las soluciones para este caso límite son todos los medios

meridianos ($\varphi_{K_\varphi}(x) = \varphi \in [0, 2\pi)$). No entraremos en detalle sobre este tipo de soluciones ya que, pese a su interés matemático, desde un punto de vista físico no tienen relevancia como ya se ha comentado. En este caso, la ecuación (2.18b) se puede reducir, del mismo modo que en el caso $\sigma^2 < 1$, a una ecuación de Seno-Gordon, encontrando así la siguiente familia de soluciones K_φ :

$$\begin{cases} \varphi_{K_\varphi} = \varphi \in [0, 2\pi] & (2.31a) \\ \theta_{K_\varphi}(x) = 2 \arctan e^{\pm(x-x_0)} & (2.31b) \end{cases}$$

o en el sistema de coordenadas original

$$\Phi^{K_\varphi}(x) = \left(\frac{\cos \varphi}{\cosh(x-x_0)}, \frac{\sin \varphi}{\cosh(x-x_0)}, \pm \tanh(x-x_0) \right) \quad (2.32)$$

La energía en este caso límite está degenerada valiendo

$$E_{K_\varphi} = 2R^2, \quad \forall \varphi. \quad (2.33)$$

II) Soluciones no topológicas

A parte de las soluciones topológicas anteriormente vistas, este modelo también presenta soluciones no topológicas, o dicho de otro modo soluciones solitónicas que asintóticamente van a parar al mismo punto de vacío en $x \rightarrow \pm\infty$.

La clave para encontrar estas soluciones es utilizar el método de la analogía mecánica. De este modo, las ecuaciones (2.18), reinterpretadas como ecuaciones de Newton, se corresponden con un sistema mecánico separable en coordenadas elípticas y en consecuencia completamente integrable.

El cambio de coordenadas propuesto parte de fijar dos puntos de la esfera: $F_1 \equiv (\theta_f, \pi)$ y $F_2 \equiv (\theta_f, 0)$ con $\theta_f \in [0, \frac{\pi}{2})$ donde la distancia ortodrómica entre ambos puntos se denota por

$$d = 2f = 2R\theta_f < \pi R. \quad (2.34)$$

Si consideramos que $r_1 \in [0, \pi R]$ y $r_2 \in [0, \pi R]$ son las distancias desde un punto cualquiera $P \in \mathbb{S}^2$ a estos puntos fijos, F_1 y F_2 respectivamente, se puede definir el cambio de coordenadas a elípticas $\{u, v\}$ como $P \equiv (u = \frac{r_1+r_2}{2}, v = \frac{r_1-r_2}{2})$ y por lo tanto, finalmente se consigue

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_1(t, x) = \frac{R}{\sin \theta_f} \sin \left(\frac{u(t, x)}{R} \right) \sin \left(\frac{v(t, x)}{R} \right) \\ \phi_2(t, x) = \frac{R}{\cos \theta_f} \cos \left(\frac{u(t, x)}{R} \right) \cos \left(\frac{v(t, x)}{R} \right) \\ \phi_3(t, x) = \pm R \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \left(\frac{u(t, x)}{R} \right) \sin^2 \left(\frac{v(t, x)}{R} \right)}{\sin^2 \theta_f} - \frac{\cos^2 \left(\frac{u(t, x)}{R} \right) \cos^2 \left(\frac{v(t, x)}{R} \right)}{\cos^2 \theta_f}} \end{array} \right. \quad (2.35)$$

Para entender mejor este cambio de variables se puede observar la Figura 2.3.

Con este cambio de coordenadas el funcional de acción queda como

$$S = \int dt dx \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{\text{su}^2 - \text{sv}^2}{\text{su}^2 - \text{sf}^2} \partial_\mu u \partial^\mu u + \frac{\text{su}^2 - \text{sv}^2}{\text{sf}^2 - \text{sv}^2} \partial_\mu v \partial^\mu v \right] - V(u(t, x), v(t, x)) \right\} \quad (2.36)$$

con

$$V(u, v) = \frac{R^2}{2(\text{su}^2 - \text{sv}^2)} [\text{su}^2 (\text{su}^2 - \text{sf}^2) + \text{sv}^2 (\text{sf}^2 - \text{sv}^2)] \quad (2.37)$$

donde se ha utilizado la notación compacta

$$\begin{aligned} \text{su} &= \sin \frac{u(t, x)}{R}, \text{sv} = \sin \frac{v(t, x)}{R}, \text{sf} = \sin \theta_f \\ \text{cu} &= \cos \frac{u(t, x)}{R}, \text{cv} = \cos \frac{v(t, x)}{R}, \text{cf} = \cos \theta_f, \dots \end{aligned} \quad (2.38)$$

Si además se toma $cf^2 = \sigma^2$ entonces la densidad de energía se puede expresar como

$$\mathcal{E}[u, v] = \frac{1}{2} \left[\frac{su^2 - sv^2}{su^2 - sf^2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \frac{su^2 - sv^2}{sf^2 - sv^2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right] - \frac{f(u) + g(v)}{su^2 - sv^2} \quad (2.39)$$

siendo $f(u(x)) = \frac{R^2}{2} su^2 (su^2 - sf^2)$ y $g(v(x)) = \frac{R^2}{2} sv^2 (sf^2 - sv^2)$.

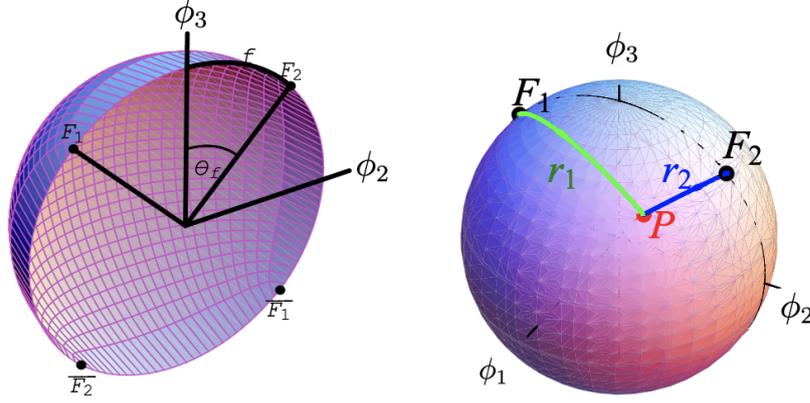


Figura 2.3: Visualización de las relaciones entre distintas variables con las que conseguir relacionar las coordenadas originales $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$ con las elípticas deseadas $\{R, u, v\}$. [4]

Se puede comprobar fácilmente que (2.39) encaja dentro de un sistema mecánico integrable de Liouville de tipo I sobre la esfera. Esto implica que el sistema dinámico es Hamilton-Jacobi separable en coordenadas elípticas. Para más detalles sobre este proceso se pueden consultar [4]. Simplemente resaltar que se pueden encontrar analíticamente los siguientes dos pares de familias de soluciones solitónicas no topológicas, cada uno basado en $(u_N, v_N) = (R\theta_f, 0)$ y $(u_S, v_S) = (R(\pi - \theta_f), 0)$ respectivamente,

$$\left\{ \begin{array}{l} \tan \frac{u_{K\gamma}(x, \gamma_1, \gamma_2)}{2R} = \frac{\pm \sqrt{2} \sqrt{1+e_1} e_2 t \frac{f}{2}}{\sqrt{e_1+e_2^2+t_2^4+e_1 e_2^2 t \frac{f^4}{2}} - \sqrt{(e_1+e_2^2+t_2^4+e_1 e_2^2 t \frac{f^4}{2})^2 - 4(1+e_1)^2 e_2^2 t \frac{f^4}{2}}} \\ \tan \frac{v_{K\gamma}(x, \gamma_1, \gamma_2)}{2R} = \frac{\pm \sqrt{e_1+e_2^2+t_2^4+e_1 e_2^2 t \frac{f^4}{2}} - \sqrt{(e_1+e_2^2+t_2^4+e_1 e_2^2 t \frac{f^4}{2})^2 - 4(1+e_1)^2 e_2^2 t \frac{f^4}{2}}}{\sqrt{2} \sqrt{1+e_1} t \frac{f}{2}} \end{array} \right. \quad (2.40)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tan \frac{u_{K\gamma^*}(x, \gamma_1, \gamma_2)}{2R} = \frac{\pm \sqrt{e_1 + e_2^2 + t_2^4 + e_1 e_2^2 t_2^4} + \sqrt{(e_1 + e_2^2 + t_2^4 + e_1 e_2^2 t_2^4)^2 - 4(1 + e_1)^2 e_2^2 t_2^4}}{\sqrt{2}\sqrt{1 + e_1} t_2^{\frac{f}{2}}} \\ \tan \frac{v_{K\gamma^*}(x, \gamma_1, \gamma_2)}{2R} = \frac{\pm \sqrt{e_1 + e_2^2 + t_2^4 + e_1 e_2^2 t_2^4} + \sqrt{(e_1 + e_2^2 + t_2^4 + e_1 e_2^2 t_2^4)^2 - 4(1 + e_1)^2 e_2^2 t_2^4}}{\sqrt{2}\sqrt{1 + e_1} e_2 t_2^{\frac{f}{2}}} \end{array} \right. \quad (2.41)$$

donde $e_1 = e^{2(x+\gamma_1)cf}$, $e_2 = e^{x+\gamma_1-R^2\gamma_2sf^2}$, $t_2^{\frac{f}{2}} = \tan \frac{f}{2R}$. Estas expresiones se deducen al integrar las dos fórmulas de cuadratura

$$e^{R^2\gamma_2sf^2} = \left[\frac{|\tan \frac{u-f}{2R} \tan \frac{u+f}{2R}|^{\frac{1}{2cf}}}{|\tan \frac{u}{2R}|} \right]^{\text{sg}(p_u)} \cdot \left[\frac{|\tan \frac{v}{2R}|}{|\tan \frac{v-f}{2R} \tan \frac{v+f}{2R}|^{\frac{1}{2cf}}} \right]^{\text{sg}(p_v)} \quad (2.42)$$

$$e^{2(x+\gamma_1)cf} = \frac{|\tan \frac{u(x)-f}{2R} \tan \frac{u(x)+f}{2R}|^{\text{sg}(p_u)}}{|\tan \frac{v(x)-f}{2R} \tan \frac{v(x)+f}{2R}|^{\text{sg}(p_v)}}, \quad (2.43)$$

las cuales se encuentran siguiendo el marco de Hamilton-Jacobi e imponiendo como origen y fin el polo norte o el polo sur. Cabe mencionar que en las expresiones anteriores se ha utilizado la notación $\text{sg}()$ para describir la función signo.

En la Figura 2.4 se pueden observar algunas soluciones de este tipo. Éstas se han conseguido utilizando (2.42) y variando la constante de integración γ_2 . Es de destacar que las soluciones de este tipo, solitónicas no topológicas, se pueden agrupar, por lo tanto, en dos pares de familias de la siguiente manera:

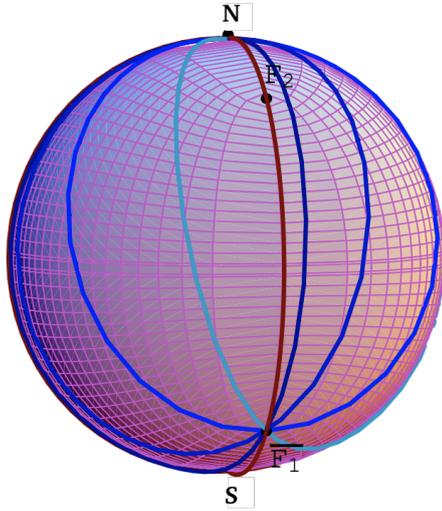
1. Soluciones cuyas órbitas comienzan y terminan en el polo norte distinguiendo una familia en la que todas las órbitas pasan por el antifoco \bar{F}_1 y otra en la que todas pasan por el antifoco \bar{F}_2 .
2. Soluciones cuyas órbitas comienzan y terminan en el polo sur distinguiendo una familia en la que todas las órbitas pasan por el foco F_1 y otra en la que sus órbitas pasan por el foco F_2 .

Por último, es necesario mencionar dos características importantes de estas soluciones no topológicas. La primera es que la energía de todas ellas es la misma y satisface lo que se

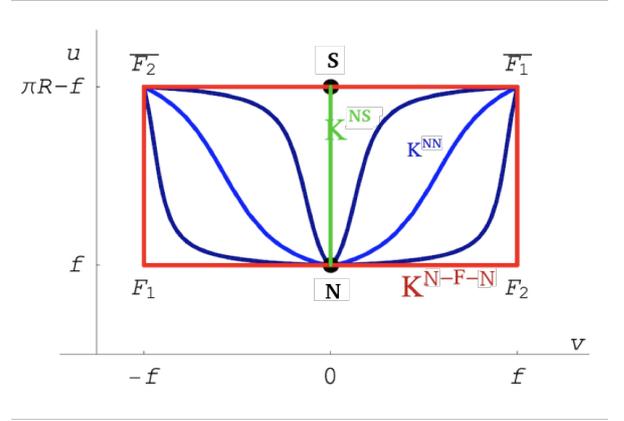
denomina “regla de la suma de masas de los solitones”. Esta regla afirma que

$$E_{K^\gamma(\gamma_2)} = 2R^2(1 + \sigma) = E_{K_2} + E_{K_1} \quad (2.44)$$

siendo K_1 y K_2 las soluciones topológicas singulares que se alcanzan en el límite de $\gamma_2 \rightarrow |\infty|$. La otra propiedad de estas soluciones hace referencia a la estabilidad de las mismas. Por el teorema del índice de Morse se concluye que este tipo de soluciones son inestables [4].



(a) Visualización sobre la esfera \mathbb{S}^2



(b) Visualización sobre el rectángulo elíptico resultante de aplicar (2.35).

Figura 2.4: Representación sobre la esfera \mathbb{S}^2 y sobre el rectángulo elíptico de varias soluciones solitónicas no topológicas de una misma familia: la perteneciente a $\mathcal{C}^{(N,N)}$ cuyas órbitas se cortan en el antifoco \bar{F}_1 .

Cabe señalar que estas soluciones no topológicas solo existen cuando $\sigma^2 < 1$. El caso límite de $\sigma^2 = 1$ provocaría que el punto de corte entre todas las órbitas fuera o el polo norte o el polo sur (el opuesto al sector no topológico de las soluciones) lo que conllevaría a estar ante las soluciones topológicas Φ^{K_φ} y $\Phi^{K_\varphi^*}$ pertenecientes a $\mathcal{C}^{(N,S)}$ o $\mathcal{C}^{(S,N)}$ vistas anteriormente. Por lo tanto, el caso límite hace que todas las soluciones no topológicas se conviertan en el caso topológico particular de una familia uniparamétrica de ondas solución.

2.3. Aplicaciones a la espintrónica

Para finalizar este capítulo ahora veremos una de las aplicaciones principales que tiene el estudio del modelo masivo no lineal \mathbb{S}^2 -sigma: la espintrónica. La conexión entre el modelo cuántico sigma no lineal y el límite semiclásico del modelo de Heisenberg (*high-spin*) está detalladamente explicada en [4] y [15]. Ésta se basa en combinar las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_a}{\partial t}(t, x) &= \sum_{b=1}^3 \left(\frac{\delta A_b}{\delta \phi_a}(t, x) - \frac{\delta A_a}{\delta \phi_b}(t, x) \right) \cdot \frac{\partial \phi_b}{\partial t}(t, x) \\ &= \sum_{b=1}^3 \sum_{c=1}^3 \varepsilon_{abc} B_c[\Phi(t, x)] \cdot \frac{\partial \phi_b}{\partial t}(t, x), \end{aligned} \quad (2.45)$$

siendo ε_{abc} el tensor de Levi-Civita, $B_c[\Phi(t, x)] = \frac{\phi_c(t, x)}{R^3}$ un campo magnético monopolo y, por tanto, $A_\alpha[\Phi(t, x)]$ un potencial vector dado por

$$A_\alpha[\Phi(t, x)] = - \sum_{\beta=1}^2 \varepsilon_{\alpha\beta} \frac{\phi_\beta(t, x)}{2R(\phi_3(t, x) \pm R)} \quad \alpha = 1, 2, \quad (2.46)$$

con el funcional $S + S_{WZ}$ siendo S el funcional de acción del modelo sigma no lineal (2.8) y S_{WZ} el funcional de acción Wess-Zumino definido por

$$S_{WZ} = R^2 \int dt dx \sum_{a=1}^3 A_a[\Phi(t, x)] \frac{\partial \phi_a}{\partial t}(t, x). \quad (2.47)$$

Esta combinación resulta en el siguiente sistema de ecuaciones

$$\frac{1}{R} \sum_{b=1}^3 \sum_{c=1}^3 \varepsilon_{abc} \phi_c(t, x) \frac{\partial \phi_b}{\partial t}(t, x) + \square \phi_a(t, x) + \frac{\delta V}{\delta \phi_a}(t, x) = 0, \quad a = 1, 2, 3 \quad (2.48)$$

que se puede convertir en las ecuaciones de Landau-Lifhsitz de ferromagnetismo en el límite de largas longitudes de onda, es decir, cuando $\omega \ll \frac{1}{R}$, obteniendo la siguiente relación de dispersión

$$\omega^2(k) = R^2 (k^2 + 1) (k^2 + \sigma^2). \quad (2.49)$$

De este modo nuestros solitones, que son soluciones estáticas de energía finita de (2.48), son también ondas de espín solitarias teniendo en cuenta un régimen cuántico ferromagnético de bajas energías.

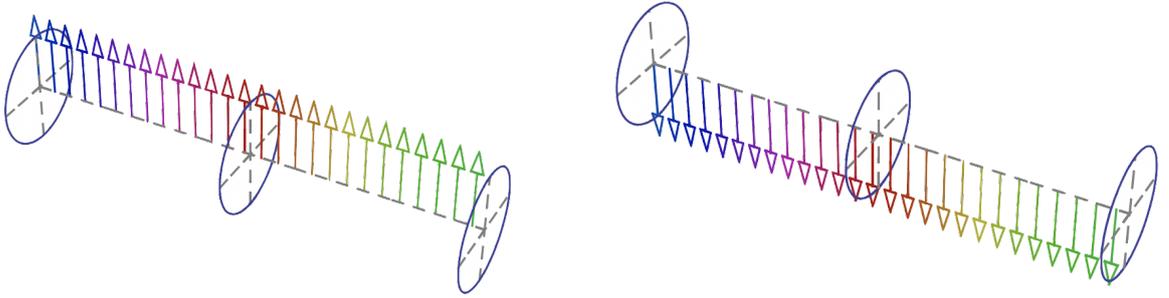
Veamos ahora cómo son desde el punto de vista de la espintrónica las distintas soluciones encontradas del modelo sigma no lineal (Sección 2.2). En primer lugar, si imponemos la condición (2.2) sobre (2.48) se obtiene el siguiente sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha\beta} \frac{\text{sg}(\phi_3)}{R} \left(\sqrt{R^2 - \sum_{\gamma} \phi_{\gamma} \phi_{\gamma}} \cdot \frac{\partial \phi_{\alpha}}{\partial t} + \phi_{\alpha} \frac{\sum_{\gamma} \phi_{\gamma} \partial_t \phi_{\gamma}}{\sqrt{R^2 - \sum_{\gamma} \phi_{\gamma} \phi_{\gamma}}} \right) + \square \phi_{\beta} + m_{\beta}^2 \phi_{\beta} \\
 & + \frac{\phi_{\beta}}{R^2 - \sum_{\gamma} \phi_{\gamma} \phi_{\gamma}} \left[\frac{\sum_{\gamma} \phi_{\gamma} \partial^{\mu} \phi_{\gamma} + \sum_{\delta} \phi_{\delta} \partial_{\mu} \phi_{\delta}}{R^2 - \sum_{\gamma} \phi_{\gamma} \phi_{\gamma}} - \sum_{\gamma} (\partial^{\mu} \phi_{\gamma} \partial_{\mu} \phi_{\gamma} + \phi_{\gamma} \square \phi_{\gamma}) \right] = 0
 \end{aligned} \tag{2.50}$$

con $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2$, $m_1^2 = 1$ y $m_2^2 = \sigma^2$.

Soluciones de vacío:

Analizando los estados básicos, es decir las soluciones homogéneas triviales del sistema (2.50) nos encontramos con los puntos de vacío Φ^N y Φ^S . Una visualización de estas configuraciones se muestra en la Figura 2.5 donde se han dibujado las cadenas de espines de tal forma que el plano $\phi_2 : \phi_3$ sea el plano perpendicular al eje espacial x , el cual además se ha alineado con el eje ϕ_1 .



(a) Solución de vacío Φ^N donde todos los espines están alineados apuntando al polo norte.

(b) Solución de vacío Φ^S donde todos los espines están alineados apuntando al polo sur.

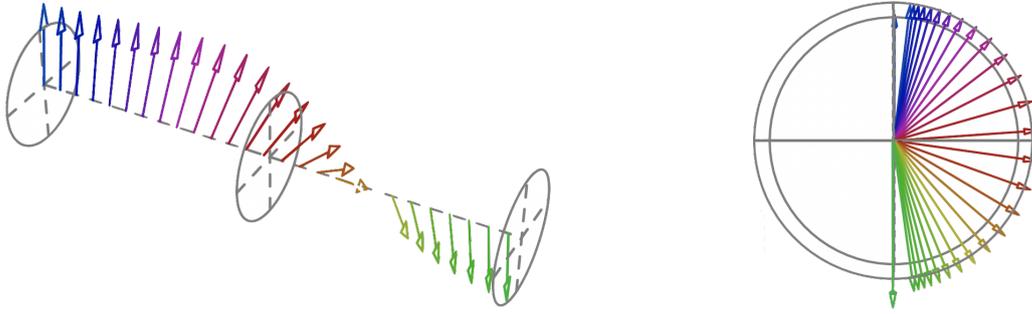
Figura 2.5: Visualizaciones espintrónicas de las soluciones triviales o de vacío Φ^N (apuntando al polo norte) y Φ^S (apuntando al polo sur).

Soluciones topológicas K_1/K_1^* :

Se puede comprobar que las soluciones topológicas (2.24) son también soluciones de (2.50), el cual se reduce al imponer $\phi_1 = 0$ a

$$\frac{d^2\phi_2}{dx^2} = \frac{-\phi_2}{R^2 - \phi_2^2} \left[\frac{(\phi_2 \frac{d\phi_2}{dx})^2}{R^2 - \phi_2^2} + \left(\frac{d\phi_2}{dx} \right)^2 + \phi_2 \frac{d^2\phi_2}{dx^2} \right] + \sigma^2 \phi_2. \quad (2.51)$$

Una representación de estas soluciones, vistas como ondas solitarias de espines, se muestra en la Figura 2.6 donde se ha utilizado el mismo sistema de coordenadas que se usó y comentó para representar las soluciones de vacío.



(a) Representación en 3D de la solución solitónica K_1 mediante una cadena de espines. (b) Proyección sobre el plano $\phi_2 : \phi_3$ del giro de la cadena de espines del solitón K_1 .

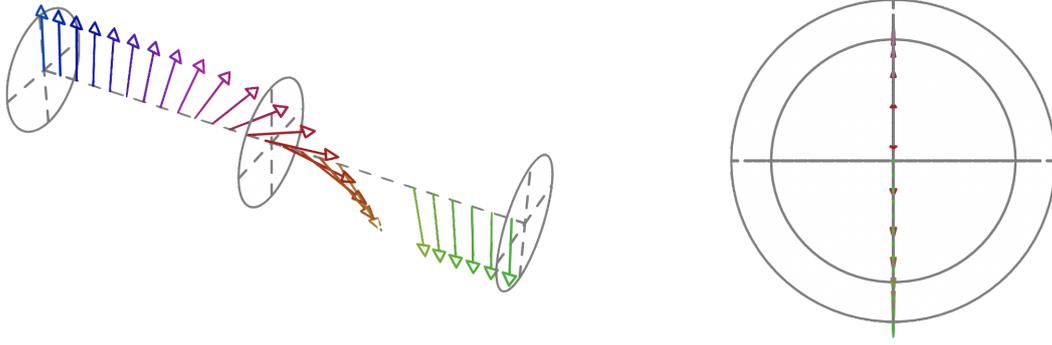
Figura 2.6: Representación espintrónica de la solución topológica K_1 tanto en 3D como en forma de proyección sobre la frontera de S^2 en el plano $\phi_2 : \phi_3$. Con estas gráficas se muestra cómo se produce un giro del espín, mediante una rotación de ángulo π , alrededor del eje ϕ_1 .

Soluciones topológicas K_2/K_2^* :

Del mismo modo que con el par de soluciones K_1/K_1^* , se puede comprobar que las soluciones topológicas (2.29) son también soluciones de (2.50), el cual se reduce al imponer $\phi_2 = 0$ a

$$\frac{d^2\phi_1}{dx^2} = \frac{-\phi_1}{R^2 - \phi_1^2} \left[\frac{(\phi_1 \frac{d\phi_1}{dx})^2}{R^2 - \phi_1^2} + \left(\frac{d\phi_1}{dx} \right)^2 + \phi_1 \frac{d^2\phi_1}{dx^2} \right] + \phi_1. \quad (2.52)$$

Una representación de estas soluciones, vistas como ondas solitarias de espines, se muestra en la Figura 2.7 donde se ha utilizado el mismo sistema de coordenadas que se usó y comentó para representar las soluciones de vacío.



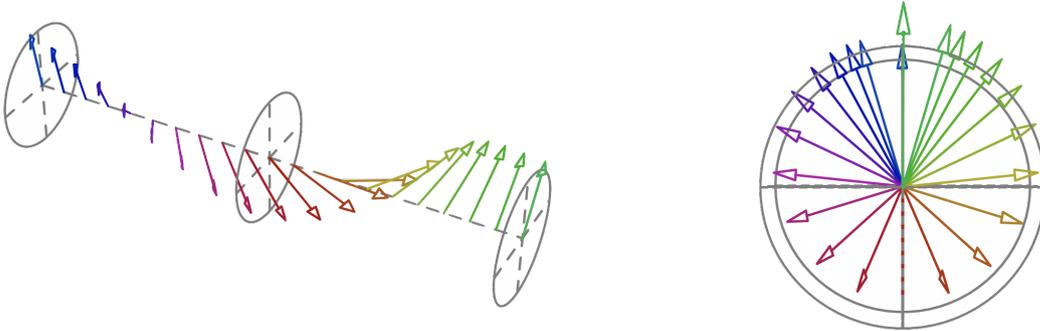
(a) Representación en 3D de la solución solitónica K_2 mediante una cadena de espines.

(b) Proyección sobre el plano $\phi_2 : \phi_3$ del giro de la cadena de espines del solitón K_2 .

Figura 2.7: Representación espintrónica de la solución topológica K_2 tanto en 3D como en forma de proyección sobre la frontera de \mathbb{S}^2 en el plano $\phi_2 : \phi_3$. Con estas gráficas se muestra cómo se produce un giro de espín, mediante una rotación de ángulo π , pero esta vez alrededor del eje ϕ_2 .

Soluciones no topológicas:

Utilizando un razonamiento análogo a los anteriores también se deduce que las soluciones no topológicas (2.40) son ondas solitarias de espines. Una representación de éstas se muestra en la Figura 2.8, utilizando el mismo sistema de coordenadas que en las representaciones de espines anteriores.



(a) Representación en 3D de la solución solitónica K_γ mediante una cadena de espines.

(b) Proyección sobre el plano $\phi_2 : \phi_3$ del giro de la cadena de espines de un solitón K_γ .

Figura 2.8: Representación espintrónica de una solución no topológica K_γ tanto en 3D como en forma de proyección sobre la frontera de \mathbb{S}^2 en el plano $\phi_2 : \phi_3$. Con estas gráficas se muestra cómo la familia de soluciones $\{K_\gamma\}_\gamma$ realizan un giro de espín, mediante una rotación de ángulo 2π , alrededor del eje ϕ_1 . [4]

En resumen, en el marco de ondas solitarias de espín si tenemos en cuenta lo que se explica en [26] y [7], los solitones K_1/K_1^* son paredes de Bloch mientras que los solitones K_2/K_2^* son paredes de Ising que describen interfaces entre dominios ferromagnéticos. Por lo tanto, en este modelo hemos encontrado así un espacio de moduli de ondas solitarias con una estructura muy similar a la del espacio de ondas solitarias del modelo XY descrito en [26] y [6]. Hay paredes de Bloch e Ising y una familia uniparamétrica de soluciones solitónicas no topológicas que no son más que superposiciones no lineales de una pared de Bloch y otra de Ising con separación arbitraria entre sus centros.

2.4. Conclusiones

Para finalizar este capítulo se incluye este apartado en el que se agrupan los resultados más significativos que se han encontrado sobre las soluciones solitónicas del modelo (1+1)-dimensional masivo no lineal \mathbb{S}^2 -sigma. Estos resultados son:

1. Si las masas son iguales estamos ante el caso $\sigma^2 = 1$ donde existe una familia de solitones topológicos degenerados en energía que viven en todos los semimeridianos de la \mathbb{S}^2 -esfera. Cuando las masas difieren, caso $\sigma^2 < 1$, sólo sobreviven dos pares de solitones topológicos, cada par de solitones con una energía distinta. Estos son los pares K_1/K_1^* y K_2/K_2^* .
2. Incluso si las masas son diferentes, se puede demostrar, utilizando coordenadas elípticas en la \mathbb{S}^2 -esfera, que existen cuatro familias uniparamétricas de solitones no topológicos degenerados en energía.
3. También se ha comentado que existe una curiosa regla de suma de masas de solitones entre los solitones no topológicos y los topológicos (2.44) y que sólo uno de los pares de solitones topológicos, el K_1/K_1^* , está formado por solitones estables.
4. Por último, hemos observado, añadiendo un término de Wess-Zumino a la acción, que nuestros solitones son ondas de espín solitarias en el límite de longitudes de onda larga (bajas energías) de los materiales ferromagnéticos.

Capítulo 3

Colisiones de los solitones en el modelo masivo no lineal \mathbb{S}^2 -sigma

Como se ha mencionado en capítulos anteriores, una de las características principales de los solitones es que al producirse una colisión de paquetes de este tipo de ondas estos son capaces de preservar tanto la forma (o identidad) como la velocidad. Esto se puede describir de la siguiente forma. Tomamos dos paquetes de onda: $f_1(x - ct)$, $f_2(x + ct)$ y denotemos por $f_3(x, t)$ la superposición de ambos, la cual también es una solución solitónica. Entonces tendremos que a tiempos negativos lo suficientemente grandes ($t \rightarrow -\infty$) $f_3(x, t)$ estará conformado por los dos paquetes de onda separados por una cierta distancia. A medida que pasa el tiempo estos paquetes de ondas se van acercando entre sí sin llegar a distorsionarse en ningún momento. En un instante de tiempo t finito colisionarán y tras esto, a tiempos lo suficientemente grandes ($t \rightarrow \infty$) se volverán a escindir en dos paquetes de onda con la misma forma y velocidad que los paquetes originales. El mismo argumento se puede trasladar a la colisión de un mayor número de paquetes de ondas solitónicas.

En este capítulo se estudiará este fenómeno de colisión de solitones o también denominado scattering de solitones. En primer lugar, veremos la teoría general con la que describir analíticamente estos fenómenos, mediante la transformada de Bäcklund, para luego aplicarla en el modelo de Seno-Gordon llegando finalmente a traspasar los resultados encontrados al modelo masivo no lineal \mathbb{S}^2 -sigma estudiado en el capítulo anterior.

3.1. Scattering de solitones en el modelo Seno-Gordon

Como vimos en el primer capítulo (Sección 1.5), la ecuación de Seno-Gordon (1.30) es una ecuación en derivadas parciales hiperbólica no lineal, por lo que, a diferencia de la ecuación de Klein-Gordon (1.1), una combinación lineal de dos soluciones de la primera ecuación no es una solución. Sin embargo, gracias a la simetrías presentes en el modelo de SG, se consiguió encontrar un elegante método para construir todas sus soluciones de forma recursiva. Este método se basa en el trabajo de Bianchi (1879) y Bäcklund (1880s) [5] y permite generar una serie de nuevas soluciones de la ecuación de SG a partir de una solución particular conocida, incluso si ésta es la trivial. Esta metodología es conocida como la transformada de Bäcklund.

3.1.1. Modelo de Seno-Gordon en el cono de luz

Antes de definir esta transformada de Bäcklund y cómo se puede aplicar para conseguir las distintas soluciones del modelo de Seno-Gordon, es necesario realizar un cambio de coordenadas sobre la ecuación de Seno-Gordon con el fin de conseguir una expresión más compacta y de mayor utilidad para nuestro estudio. El cambio de coordenadas mencionado viene dado por

$$\begin{cases} X = \frac{x+t}{2} \\ T = \frac{x-t}{2}. \end{cases} \quad (3.1)$$

De esta forma, el operador de d'Alembert se reduce a

$$\square = \partial_t^2 - \partial_x^2 = -\partial_X \partial_T \quad (3.2)$$

y la ecuación de Seno-Gordon (1.30) queda como

$$u_{XT} = \sin u \quad (3.3)$$

siendo $u(X, T) = \phi(x, t)$. Estas nuevas coordenadas (X, T) son conocidas en Física como coordenadas de cono de luz o coordenadas de Dirac.

3.1.2. Transformada de Bäcklund

Ahora veamos cómo se define la transformada de Bäcklund.

Definición 3.1. Sea $u(X, T)$ una solución de la ecuación (3.3) y $a \in \mathbb{C}$ un número complejo no nulo. Entonces la **transformación de Bäcklund** de u se define como la solución $U(X, T)$ del sistema

$$\begin{cases} \partial_T U = \partial_T u + 2a \sin\left(\frac{U+u}{2}\right) & (3.4a) \\ \partial_X U = -\partial_X u + \frac{2}{a} \sin\left(\frac{U-u}{2}\right) & (3.4b) \end{cases}$$

siendo a un parámetro de la propia transformación.

A continuación se demuestra que la transformada $U(X, T)$ definida por (3.4) es otra solución de la ecuación de SG (3.3).

Teorema 3.1. *Sea u una solución de la ecuación (3.3) y sea U la transformación de Bäcklund de u . Entonces U es también una solución de la ecuación (3.3).*

Demostración. Derivando respecto de T (3.4b) se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial T \partial X} &= -\frac{\partial^2 u}{\partial T \partial X} + \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{2}{a} \sin\left(\frac{U-u}{2}\right) \right) \\ &= -\sin u + \frac{2}{a} \cos\left(\frac{U-u}{2}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{U-u}{2} \right) \\ &= -\sin u + \frac{2}{a} \cos\left(\frac{U-u}{2}\right) \cdot a \sin\left(\frac{U+u}{2}\right) \\ &= -\sin u + 2 \cos\left(\frac{U-u}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{U+u}{2}\right) \end{aligned}$$

donde usando la fórmula de prostaféresis:

$$2 \cos(b) \sin(a) = \sin(a+b) + \sin(a-b)$$

se llega a

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial T} &= -\sin u + \sin\left(\frac{U+u}{2} + \frac{U-u}{2}\right) + \sin\left(\frac{U+u}{2} - \frac{U-u}{2}\right) \\ &= -\sin u + \sin U + \sin u = \sin U. \end{aligned}$$

Por lo tanto, queda probado que U es también solución de la ecuación de SG. \square

A partir del teorema anterior ya tenemos una forma de encontrar una solución no trivial de la ecuación de SG partiendo de la solución trivial $u \equiv 0$. En primer lugar, reemplazamos $u \equiv 0$ en el sistema (3.4) obteniendo

$$\partial_T U = 2a \sin\left(\frac{U}{2}\right) \quad (3.5)$$

$$\partial_X U = \frac{2}{a} \sin\left(\frac{U}{2}\right). \quad (3.6)$$

Si tomamos $V = \frac{U}{2}$ tendremos por (3.5) que $\partial_T V = a \sin V$. Esta ecuación se puede resolver de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin V} dV &= \int a dT \implies \ln\left(\tan\left(\frac{V}{2}\right)\right) = aT + C(x) \\ &\implies \tan\left(\frac{V}{2}\right) = e^{aT+C(x)} \\ &\implies V = 2 \arctan(e^{aT+C(x)}) \\ &\implies U = 4 \arctan(e^{aT+C(x)}) \end{aligned}$$

siendo $C(x)$ la constante de integración. Si ahora usamos (3.6) tenemos que

$$\begin{aligned} 4 \frac{e^{aT+C(x)} C'(x)}{1 + e^{2(aT+C(x))}} &= \frac{2}{a} \sin(2 \arctan(e^{aT+C(x)})) \\ &= \frac{4}{a} \sin(\arctan(e^{aT+C(x)})) \cos(\arctan(e^{aT+C(x)})) \\ &= \frac{4}{a} \frac{e^{aT+C(x)}}{1 + e^{2(aT+C(x))}} \end{aligned}$$

llegando, por lo tanto, a

$$C(X) = \frac{1}{a} X + C'$$

siendo C' la constante de integración (independiente de X y T). Por lo tanto, hemos encontrado la solución no trivial de la ecuación de SG

$$U(X, T) = 4 \arctan\left(e^{aT + \frac{1}{a}X + C'}\right) \quad (3.7)$$

o reescrita con las coordenadas originales (x, t) , deshaciendo (3.1),

$$U(x, t) = 4 \arctan\left(e^{\frac{a^2+1}{2a}x + \frac{1-a^2}{2a}t + C'}\right). \quad (3.8)$$

Si comparamos la solución obtenida (3.8) con la que teníamos del capítulo 1 (1.33) se deduce que

$$\gamma(x - vt) = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}} \equiv \frac{a^2 + 1}{2a}x + \frac{1 - a^2}{2a}t \quad (3.9)$$

lo que implica que

$$v = \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1} \quad \text{y} \quad a = \pm \sqrt{\frac{1 + v}{1 - v}}. \quad (3.10)$$

Por lo tanto, hemos llegado a que el parámetro a de la transformada de Bäcklund está relacionada directamente con la velocidad v de los solitones.

Ahora veremos un teorema que hace posible crear nuevas soluciones sin tener que resolver más ecuaciones diferenciales.

Teorema 3.2. (Commutatividad de Bianchi) Sean a_1, a_2 números complejos distintos y no nulos y sea u una solución de la ecuación (3.3). Además, definamos u_1 y u_2 como las transformaciones de Bäcklund de u con parámetro a_1 y a_2 respectivamente. Denotemos con U_1 a la transformada de Bäcklund de u_1 con parámetro a_2 , y con U_2 a la transformada de Bäcklund de u_2 con parámetro a_1 . Entonces $U_1 = U_2$, y además se cumple que

$$\tan\left(\frac{U_1 - u}{4}\right) = \frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2} \tan\left(\frac{u_1 - u_2}{4}\right) \quad (3.11)$$

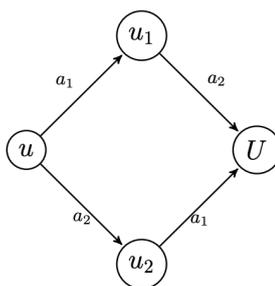


Figura 3.1: Diagrama que ilustra el teorema de la commutatividad de Bianchi.

Demostración. Sea u una solución de la ecuación (3.3). Supongamos que u_1 y u_2 son la transformación Bäcklund de u con el parámetro a_1 y a_2 , respectivamente. Resolviendo la ecuación (3.11) para U_1 , vemos que

$$U_1 = 4 \arctan\left(\frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2} \tan\left(\frac{u_1 - u_2}{4}\right)\right) + u + 4k\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}.$$

Ahora veamos que U_1 satisface el sistema (3.4) usando $u = u_1$, $a = a_2$ y, por lo tanto, que es la transformada de Bäcklund de u_1 usando el parámetro a_2 . Primero analicemos (3.4a) por partes. Desarrollando la parte izquierda de la ecuación obtenemos

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial T} \left[\frac{U_1 - u_1}{2} \right] &= \frac{\partial}{\partial T} \left[2 \arctan \left(\frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2} \tan \left(\frac{u_1 - u_2}{4} \right) \right) \right] + \frac{\partial}{\partial T} \left[\frac{u - u_1}{2} \right] \\
 &= \frac{\frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2}}{\left(\frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2} \tan \left(\frac{u_1 - u_2}{4} \right) \right)^2 + 1} \frac{1}{\cos \left(\frac{u_1 - u_2}{4} \right)^2} \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{u_1 - u_2}{4} \right) - a_1 \sin \left(\frac{u_1 + u}{2} \right) \\
 &= \frac{(a_1^2 - a_2^2) \left(a_1 \sin \left(\frac{u_1 + u}{2} \right) - a_2 \sin \left(\frac{u_2 + u}{2} \right) \right) - a_1 \sin \left(\frac{u_1 + u}{2} \right) [a_1^2 - 2a_1 a_2 \cos \left(\frac{u_1 - u_2}{2} \right) + a_2^2]}{a_1^2 - 2a_1 a_2 \cos \left(\frac{u_1 - u_2}{2} \right) + a_2^2} \\
 &= \frac{-a_1^2 a_2 \sin \left(\frac{u_2 + u}{2} \right) - 2a_2^2 a_1 \sin \left(\frac{u_1 + u}{2} \right) + a_2^3 \sin \left(\frac{u_2 + u}{2} \right) + 2a_1^2 a_2 \sin \left(\frac{u_1 + u}{2} \right) \cos \left(\frac{u_1 - u_2}{2} \right)}{a_1^2 - 2a_1 a_2 \cos \left(\frac{u_1 - u_2}{2} \right) + a_2^2}.
 \end{aligned}$$

Haciendo lo mismo con la parte derecha se llega a

$$\begin{aligned}
 a_2 \sin \left(\frac{U_1 + u_1}{2} \right) &= a_2 \sin \left(2 \arctan \left(\frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2} \tan \left(\frac{u_1 - u_2}{4} \right) \right) + \frac{u + u_1}{2} + 2k\pi \right) \\
 &= a_2 \sin \left(2 \arctan \left(\frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2} \tan \left(\frac{u_1 - u_2}{4} \right) \right) \right) \cos \left(\frac{u + u_1}{2} \right) \\
 &\quad + a_2 \cos \left(2 \arctan \left(\frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2} \tan \left(\frac{u_1 - u_2}{4} \right) \right) \right) \sin \left(\frac{u + u_1}{2} \right) \\
 &= a_2 \frac{\frac{2(a_1 + a_2)}{a_1 - a_2} \tan \left(\frac{u_1 - u_2}{4} \right)}{\left(\frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2} \tan \left(\frac{u_1 - u_2}{4} \right) \right)^2 + 1} \cos \left(\frac{u + u_1}{2} \right) \\
 &\quad + a_2 \sin \left(\frac{u + u_1}{2} \right) \frac{1 - \left(\frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2} \tan \left(\frac{u_1 - u_2}{4} \right) \right)^2}{1 + \left(\frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2} \tan \left(\frac{u_1 - u_2}{4} \right) \right)^2} \\
 &= \frac{a_2 a_1^2 \left(\sin \left(\frac{u_1 - u_2}{2} \right) \cos \left(\frac{u_1 + u}{2} \right) + \sin \left(\frac{u_1 + u}{2} \right) \cos \left(\frac{u_1 - u_2}{2} \right) \right)}{a_1^2 - 2a_1 a_2 \cos \left(\frac{u_1 - u_2}{2} \right) + a_2^2} \\
 &\quad - \frac{2a_1 a_2^2 \sin \left(\frac{u_1 + u}{2} \right) + a_2^3 \sin \left(\frac{u + u_2}{2} \right)}{a_1^2 - 2a_1 a_2 \cos \left(\frac{u_1 - u_2}{2} \right) + a_2^2}
 \end{aligned}$$

donde se ha usado que $\sin(\arctan(x)) = \frac{2x}{1+x^2}$ y $\cos(\arctan(x)) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$. Juntando ambos resultados se obtiene que verdaderamente U_1 satisface (3.4a).

De la misma manera se puede comprobar que U_1 también satisface (3.4b). Además, si intercambias a_1, a_2, u_1 y u_2 en la ecuación (3.11) se llega a la conclusión de que ambas transformaciones de Bäcklund, U_1 y U_2 , conmutan. \square

Por lo tanto, con el teorema anterior hemos encontrado una relación algebraica con la que generar recursivamente nuevas soluciones, de un grado superior en cada paso, del

modelo de Seno-Gordon. Esto quiere decir que partiendo de la configuración trivial se puede conseguir una solución no trivial con configuración de 1 solitón, la cual depende de 2 parámetros (a y C' en (3.8)). A partir de ésta se puede conseguir una solución conformada por 2 solitones, la cual dependerá de 4 parámetros ($a_1, a_2, x_0^{(1)}$ y $x_0^{(2)}$) que físicamente están relacionados con la posición, carga topológica y velocidad de las soluciones, y así sucesivamente. De esta manera recursiva se pueden ir construyendo soluciones compuestas cada vez con un mayor número de solitones, las cuales también requerirán un mayor número de parámetros, siendo precisamente estas expresiones las que describen las colisiones entre solitones.

3.1.3. Colisión de dos solitones

En esta sección veremos cómo se pueden describir las colisiones entre dos solitones. Para ello, en primer lugar, trataremos de encontrar una expresión genérica con la que describir cualquier tipo de colisión de solitones. Una vez encontrada analizaremos unos casos posibles de colisiones entre dos soluciones solitónicas: colisión entre dos solitones iguales (colisión solitón-solitón), colisión de un solitón con su antisolitón (colisión solitón-antisolitón) y los breathers.

Expresión general

Para conseguir la expresión general con la que describir la colisión entre dos solitones usaremos el teorema de la conmutatividad de Bianchi (Teorema 3.2) tomando $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ y $u \equiv 0$. Partiendo de las siguientes dos soluciones solitónicas (3.8):

$$u_1 = 4 \arctan \left(e^{\tilde{a}_1 x + \tilde{a}_1 t} \right) \quad \text{y} \quad u_2 = 4 \arctan \left(e^{\tilde{a}_2 x + \tilde{a}_2 t} \right), \quad (3.12)$$

donde para simplificar la notación se ha utilizado $\tilde{a}_1 := \frac{a_1^2 + 1}{2a_1}$ y $\tilde{a}_2 := \frac{1 - a_2^2}{2a_2}$ y lo mismo con a_2 , si aplicamos (3.11) se llega a

$$\begin{aligned} U &= 4 \arctan \left(\frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2} \tan \frac{u_1 - u_2}{4} \right) \\ &= 4 \arctan \left(\frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2} \tan \left(\arctan e^{\tilde{a}_1 x + \tilde{a}_1 t} - \arctan e^{\tilde{a}_2 x + \tilde{a}_2 t} \right) \right) \\ &= 4 \arctan \left(\frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2} \cdot \frac{e^{\tilde{a}_1 x + \tilde{a}_1 t} - e^{\tilde{a}_2 x + \tilde{a}_2 t}}{1 + e^{(\tilde{a}_1 + \tilde{a}_2)x + (\tilde{a}_1 + \tilde{a}_2)t}} \right) \end{aligned} \quad (3.13)$$

donde es importante recordar, usando (3.10), que ahora tenemos

$$v_1 = \frac{a_1^2 - 1}{a_1^2 + 1} \quad ; \quad a_1 = \pm \sqrt{\frac{1+v_1}{1-v_1}} \quad (3.14)$$

$$v_2 = \frac{a_2^2 - 1}{a_2^2 + 1} \quad ; \quad a_2 = \pm \sqrt{\frac{1+v_2}{1-v_2}} \quad (3.15)$$

y, por lo tanto,

$$\tilde{a}_1 = \frac{a_1^2 + 1}{2a_1} = \frac{\frac{1+v_1}{1-v_1} + 1}{\pm 2\sqrt{\frac{1+v_1}{1-v_1}}} = \pm \frac{1}{\sqrt{1-v_1^2}} \quad ; \quad \tilde{a}_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{1-v_2^2}}, \quad (3.16)$$

$$\tilde{\tilde{a}}_1 = \frac{1 - a_1^2}{2a_1} = \frac{1 - \frac{1+v_1}{1-v_1}}{\pm 2\sqrt{\frac{1+v_1}{1-v_1}}} = \pm \frac{v_1}{\sqrt{1-v_1^2}} \quad ; \quad \tilde{\tilde{a}}_2 = \pm \frac{v_2}{\sqrt{1-v_2^2}}. \quad (3.17)$$

Hay que tener en cuenta que los valores de los parámetros a_1 y a_2 influyen directamente en el tipo de soluciones solitónicas que se van a chocar. Primero analicemos la influencia de a_1 en u_1 , utilizando para ello la expresión (3.8). Como existen cuatro posibilidades de soluciones solitónicas las analizaremos una por una.

1. Solitón que se desplaza en el sentido positivo del eje espacial x a medida que avanza el tiempo t . Para tener esta solución se debe cumplir que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a_1^2 + 1}{2a_1} > 0 \\ \frac{1 - a_1^2}{2a_1} < 0 \end{array} \right\} \iff a_1 > 0 \quad \Bigg\| \quad \iff a_1 > 1$$

2. Solitón que se desplaza en el sentido negativo del eje espacial x a medida que avanza el tiempo t . Para tener esta solución se debe cumplir que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a_1^2 + 1}{2a_1} > 0 \\ \frac{1 - a_1^2}{2a_1} > 0 \end{array} \right\} \iff a_1 > 0 \quad \Bigg\| \quad \iff 0 < a_1 < 1$$

3. Antisolitón que se desplaza en el sentido negativo del eje espacial x a medida que avanza el tiempo t . Para tener esta solución se debe cumplir que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a_1^2 + 1}{2a_1} < 0 \\ \frac{1 - a_1^2}{2a_1} < 0 \end{array} \right\} \iff a_1 < 0 \quad \Bigg\| \quad \iff -1 < a_1 < 0.$$

4. Antisolitón que se desplaza en el sentido positivo del eje espacial x a medida que avanza el tiempo t . Para tener esta solución se debe cumplir que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a_1^2 + 1}{2a_1} < 0 \iff a_1 < 0 \\ \frac{1 - a_1^2}{2a_1} > 0 \end{array} \right\} \iff a_1 < -1$$

Ahora veamos como influye a_2 en u_2 . Podríamos pensar erróneamente que ocurre lo mismo que a_1 con u_1 . Sin embargo, si nos fijamos en la transformada de Bäcklund vemos que la interacción entre los solitones se incluye como $u_1 - u_2$, o lo que es lo mismo como $u_1 + (-u_2)$. De esta forma el valor de a_2 influye en verdad en la expresión $-u_2 = -4 \arctan \left(e^{\tilde{a}_2 x + \tilde{a}_2 t} \right) = 4 \arctan \left(-e^{\tilde{a}_2 x + \tilde{a}_2 t} \right)$ y por lo tanto, el criterio de tipo de solución solitónica de $-u_2$ cambia de la siguiente manera:

1. Solitón que se desplaza en el sentido positivo del eje espacial x a medida que avanza el tiempo t . Para tener esta solución se debe cumplir que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a_2^2 + 1}{2a_2} < 0 \iff a_2 < 0 \\ \frac{1 - a_2^2}{2a_2} > 0 \end{array} \right\} \iff a_2 < -1$$

2. Solitón que se desplaza en el sentido negativo del eje espacial x a medida que avanza el tiempo t . Para tener esta solución se debe cumplir que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a_2^2 + 1}{2a_2} < 0 \iff a_2 < 0 \\ \frac{1 - a_2^2}{2a_2} < 0 \end{array} \right\} \iff -1 < a_2 < 0.$$

3. Antisolitón que se desplaza en el sentido negativo del eje espacial x a medida que avanza el tiempo t . Para tener esta solución se debe cumplir que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a_2^2 + 1}{2a_2} > 0 \iff a_2 > 0 \\ \frac{1 - a_2^2}{2a_2} > 0 \end{array} \right\} \iff 0 < a_2 < 1$$

4. Antisolitón que se desplaza en el sentido positivo del eje espacial x a medida que

avanza el tiempo t . Para tener esta solución se debe cumplir que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a_2^2 + 1}{2a_2} > 0 \\ \frac{1 - a_2^2}{2a_2} < 0 \end{array} \right\} \iff a_2 > 0 \quad \Bigg\| \iff a_2 > 1$$

Una visualización de la simulación, que se puede conseguir mediante un pequeño script en Mathematica, de las distintas colisiones que se producen entre dos soluciones solitónicas, u_1 y u_2 , dependiendo de los valores que se impongan en los parámetros a_1 y a_2 en la ecuación (3.13) se encuentra en la Figura 3.2. En ella se muestra tanto una representación en 3D como un contourplot en el que se representa la variación de U mediante un mapa de color con el que se marcan distintas isolíneas.

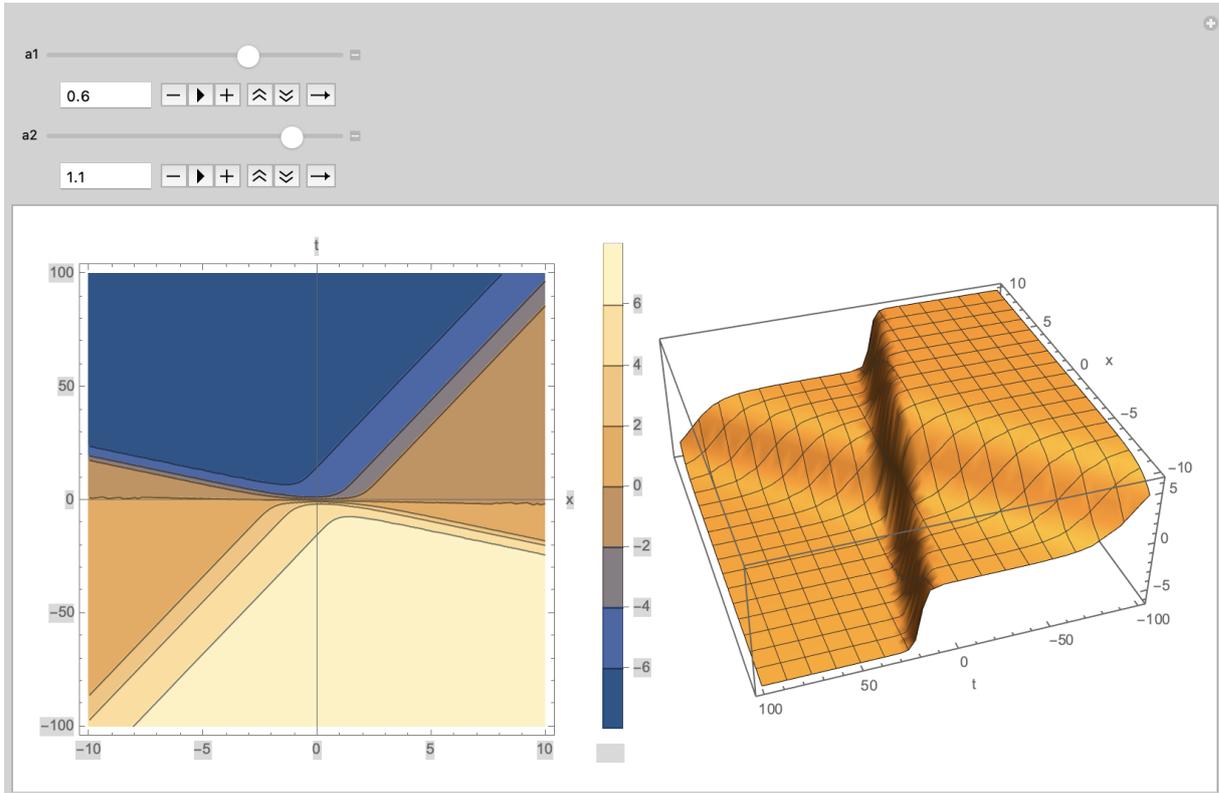


Figura 3.2: Representación mediante un contourplot (izquierda) y un gráfico en 3D (derecha) de una simulación, conseguida mediante un pequeño script en Mathematica, de la solución general (3.13), con la que se describe las colisiones entre dos soluciones solitónicas al variar los parámetros a_1 y a_2 .

Por último, señalar que dado que la ecuación de SG no es lineal, es de esperar que las colisiones afecten a los solitones de forma no lineal.

Colisión solitón-solitón

Ahora veamos cómo es la colisión entre dos solitones iguales que se desplazan en sentidos opuestos, es decir, vamos a analizar el caso particular de colisión solitón-solitón simétrico y además centrado en el origen de coordenadas. Como queremos dos solitones, recordando el criterio de valores sobre a_1 y a_2 comentado anteriormente, se debe cumplir que $a_1 > 1$ y $-1 < a_2 < 0$ o que $0 < a_1 < 1$ y $a_2 < -1$. (En el caso de choque de dos antisolitones sería $-1 < a_1 < 0$ y $a_2 > 1$ o $a_1 < -1$ y $0 < a_2 < 1$). Independientemente del caso, a_1 y a_2 deben tener signos opuestos. Además, también impongamos la condición de que ambos solitones se desplacen con una velocidad igual en módulo pero opuesta en signo, es decir, que $v_1 = -v_2 = v$. (Esta condición se podría generalizar a cualquier relación entre las velocidades de los solitones aplicando un cierto desplazamiento en el sistema de referencia). Para que se cumpla esto es necesario que $a_2 = -\frac{1}{a_1}$ ya que usando (3.14) y (3.15) tenemos que

$$v_1 = -v_2 \iff \frac{a_1^2 - 1}{a_1^2 + 1} = -\frac{a_2^2 - 1}{a_2^2 + 1} \iff 2a_1^2 a_2^2 = 2 \iff a_1 = \pm \frac{1}{a_2} \quad (3.18)$$

y como hemos dicho anteriormente se debe cumplir que a_1 y a_2 sean de signo contrario, por lo que se concluye que la condición necesaria es que $a_2 = -\frac{1}{a_1}$.

Imponiendo la condición $a_2 = -\frac{1}{a_1}$ en (3.16) y (3.17) se tiene que $\tilde{a}_2 = -\tilde{a}_1$ y que $\tilde{\tilde{a}}_2 = \tilde{\tilde{a}}_1$ y, por lo tanto, aplicando todas estas condiciones en (3.13) se llega a la siguiente expresión

$$\begin{aligned} U_{SS} = u(x, t) &= 4 \arctan \left(\frac{a_1 - \frac{1}{a_1}}{a_1 + \frac{1}{a_1}} \cdot \frac{e^{\tilde{a}_1 x + \tilde{a}_1 t} - e^{-\tilde{a}_1 x + \tilde{a}_1 t}}{1 + e^{(\tilde{a}_1 - \tilde{a}_1)x + (\tilde{\tilde{a}}_1 + \tilde{\tilde{a}}_1)t}} \right) \\ &= 4 \arctan \left(\frac{a_1^2 - 1}{a_1^2 + 1} \cdot \frac{e^{\tilde{a}_1 t} \sinh(\tilde{a}_1 x)}{1 + e^{2\tilde{\tilde{a}}_1 t}} \right) \\ &= 4 \arctan \left(\frac{a_1^2 - 1}{a_1^2 + 1} \cdot \frac{\sinh(\tilde{a}_1 x)}{\cosh(\tilde{\tilde{a}}_1 t)} \right) \\ &= 4 \arctan \left(\frac{v \sinh(\gamma x)}{\cosh(\gamma vt)} \right) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Una representación de esta colisión se muestra en la Figura 3.3. Desde un punto de vista energético la colisión se puede entender como que al acercarse los solitones entre sí aparece una fuerza cada vez más repulsiva (negativa) provocando finalmente, cuando los solitones están lo suficientemente próximos, que vuelvan hacia atrás (se muevan en sentido opuesto

al inicial). Esta fuerza puede ser calculada usando la solución estática como se hace en [20] o encontrando la tasa de cambio del momento como en [17] (pág.115) obteniendo así la expresión $F = -32e^{-R}$. Por lo tanto, la energía de interacción entre los dos solitones viene dada por

$$E_{int} = \int F dR = 32e^{-R} \quad (3.20)$$

donde R es la distancia de separación entre los dos solitones.

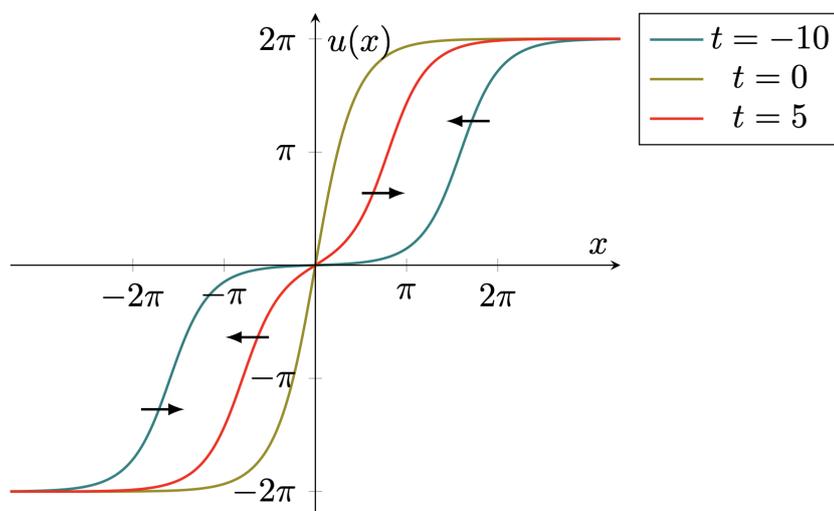


Figura 3.3: Visualización del proceso de colisión entre dos solitones que se propagan inicialmente en direcciones opuestas con una velocidad $v = \pm 1/2$ a tiempo $t = -10$ colisionando en el origen a tiempo $t = 0$. Después de la colisión, se puede observar como ambos solitones se repelen y acaban viajando en la dirección opuesta a la inicial ($v = \mp 1/2$) mostrada en $t = 5$, volviendo finalmente a sus posiciones iniciales de partida.

Colisión solitón-antisolitón

Ahora veamos cómo es la colisión entre un solitón con su antisolitón cuando estos se desplazan en sentidos opuestos y tomando como origen de coordenadas el centro de masas. Como queremos que haya un solitón y su antisolitón, recordando el criterio de valores sobre a_1 y a_2 comentado anteriormente y considerando que u_1 es el solitón y u_2 el antisolitón, se debe cumplir que $a_1 > 1$ y $0 < a_2 < 1$ o que $0 < a_1 < 1$ y $a_2 > 1$. Si se quiere que u_1 sea el antisolitón y que u_2 el solitón entonces se debe cumplir que $a_1 < -1$ y $-1 < a_2 < 0$ o que $-1 < a_1 < 0$ y $a_2 < -1$. Independientemente del caso, a_1 y a_2 deben ser del mismo signo. Por otra parte, se impone también la condición de que ambas

soluciones solitónicas se desplacen con una velocidad igual en módulo pero opuesta en signo, es decir, que $v_1 = -v_2 = v$. Para que se cumpla esto es necesario que $a_2 = +\frac{1}{a_1}$ lo cual se deduce utilizando (3.18) y teniendo en cuenta que a_1 y a_2 sean del mismo signo, como se ha dicho anteriormente.

Imponiendo la condición $a_2 = +\frac{1}{a_1}$ en (3.16) y (3.17) se tiene que $\tilde{a}_1 = \tilde{a}_2$ y que $\tilde{\tilde{a}}_1 = -\tilde{\tilde{a}}_2$ y, por lo tanto, aplicando todas las condiciones anteriormente mencionadas en (3.13) se llega a la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
 U_{SA} = u(x, t) &= 4 \arctan \left(\frac{a_1 + \frac{1}{a_1}}{a_1 - \frac{1}{a_1}} \cdot \frac{e^{\tilde{a}_1 x + \tilde{\tilde{a}}_1 t} - e^{-\tilde{a}_1 x - \tilde{\tilde{a}}_1 t}}{1 + e^{(\tilde{a}_1 + \tilde{\tilde{a}}_1)x + (\tilde{\tilde{a}}_1 - \tilde{a}_1)t}} \right) \\
 &= 4 \arctan \left(\frac{a_1^2 + 1}{a_1^2 - 1} \cdot \frac{e^{\tilde{a}_1 x} \sinh(\tilde{\tilde{a}}_1 t)}{1 + e^{2\tilde{a}_1 x}} \right) \\
 &= 4 \arctan \left(\frac{a_1^2 + 1}{a_1^2 - 1} \cdot \frac{\sinh(\tilde{\tilde{a}}_1 t)}{\cosh(\tilde{a}_1 t)} \right) \\
 &= 4 \arctan \left(\frac{1}{v} \cdot \frac{\sinh(v\gamma t)}{\cosh(\gamma x)} \right)
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

En este caso, a diferencia del anterior, se obtiene que la configuración inicial difiere de la final en únicamente un cambio de fase. Esto se puede demostrar analizando la expresión (3.21) asintóticamente. En el límite asintótico de tiempos negativos ($t \rightarrow -\infty$) la expansión de los exponentes nos indica una configuración inicial igual a

$$\phi_{SA} = 4 \arctan \left[\frac{e^{\gamma vt - \ln v} - e^{-\gamma vt - \ln v}}{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}} \right] \approx \phi_S \left[x + v \left(t + \frac{\delta t}{2} \right) \gamma \right] + \phi_A \left[x - v \left(t - \frac{\delta t}{2} \right) \gamma \right] \tag{3.22}$$

siendo ϕ_S y ϕ_A la solución del solitón y del antisolitón respectivamente. Si analizamos la configuración final ($t \rightarrow \infty$) se obtiene

$$\phi_{SA} \approx \phi_S \left[x + v \left(t - \frac{\delta t}{2} \right) \gamma \right] + \phi_A \left[x - v \left(t + \frac{\delta t}{2} \right) \gamma \right]. \tag{3.23}$$

En las expresiones obtenida el parámetro $\delta t = 2\frac{\ln v}{\gamma v}$ es el que define el cambio en la posición del solitón y el antisolitón al producirse la colisión, siendo en verdad un retardo que experimenta el solitón debido a la interacción con el antisolitón.

Una representación de esta colisión se muestra en la Figura 3.4. Desde un punto de vista energético la colisión se puede entender como que al acercarse los solitones entre sí aparece una fuerza cada vez más atractiva (positiva) provocando finalmente, cuando las soluciones están lo suficientemente próximos, que se produzca un cambio de fase en las soluciones. Esta fuerza puede ser calculada, razonando de manera análoga a la colisión solitón-solitón, obteniendo así la expresión $F = 32e^{-R}$. Por lo tanto, la energía de interacción entre el solitón y su antisolitón viene dada por

$$E_{int} = \int F dR = -32e^{-R}, \quad (3.24)$$

recordando que R es la distancia de separación entre las dos ondas solución. Aquí es importante recalcar que la colisión es de tipo elástica ya que la energía se conserva siendo la misma antes y después de la colisión. Este aspecto es muy interesante pues se podría llegar a pensar erróneamente que se podría producir una aniquilación total del solitón al interactuar con su antisolitón, como suele ocurrir al hacer colisionar una partícula con su antipartícula. Una posible interpretación es que esta aniquilación sí se produce, pero a tiempo posterior, debido a las propiedades de conservación de estas ondas, ambas soluciones reaparecen con un cierto desfase temporal.

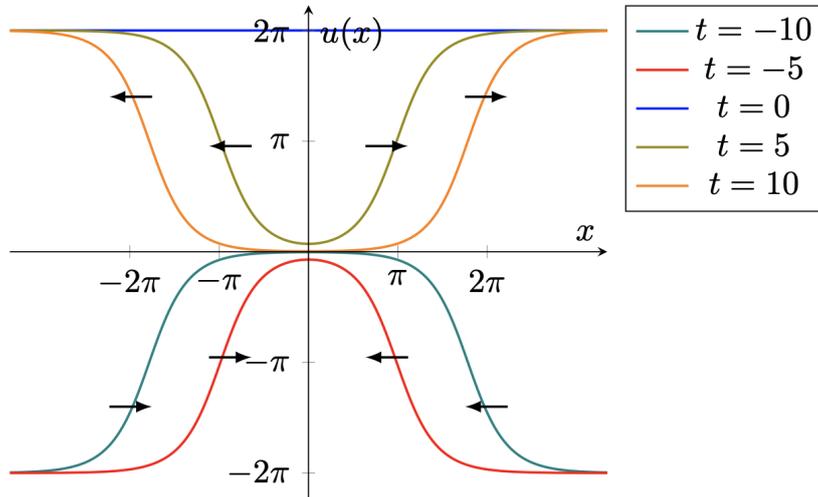


Figura 3.4: Visualización del proceso de colisión entre un solitón y su antisolitón los cuales se propagan inicialmente en direcciones opuestas con una velocidad $v = \pm 1/2$ a tiempo $t = -10$ colisionando en el origen a tiempo $t = 0$ aniquilándose. Después de la colisión, se puede observar como ambas soluciones reaparecen viajando a la velocidad original pero en sentido contrario $v = \mp 1/2$ a tiempo $t = 10$ con un cierto desfase temporal.

Breathers

Por último, veamos un caso especial que se puede producir cuando el choque entre un solitón y su antisolitón cumple una determinada condición provocando la creación de un estado acoplado entre ambas soluciones. Este tipo de colisión se conoce como breather. El concepto general es que esta solución breather es el punto donde en una colisión solitón-antisolitón las dos ondas solitónicas se han atraído mutuamente, como se esperaba, pero ni el solitón ni el antisolitón tienen suficiente energía para separarse de nuevo en sus componentes originales resultando en un acoplamiento de las dos soluciones de manera que se crea una onda localizada espacialmente que es periódica en el tiempo.

Para obtener analíticamente la expresión de un breather hay que imponer la siguiente condición sobre la velocidad: $v = \frac{i\omega}{\sqrt{1-\omega^2}}$ siendo $\omega \in [-1, 1]$ la frecuencia constante del breather. Por lo tanto, si se sustituye esta condición en (3.21) se consigue

$$\begin{aligned} U_{\omega E} = u(x, t) &= 4 \arctan \left(\frac{\sqrt{1-\omega^2}}{i\omega} \frac{\sinh \left(\frac{i\omega}{\sqrt{1-\omega^2}} \sqrt{1-\omega^2} t \right)}{\cosh \left(x\sqrt{1-\omega^2} \right)} \right) \\ &= 4 \arctan \left(\frac{\sqrt{1-\omega^2}}{\omega} \frac{\sin(\omega t)}{\cosh \left(x\sqrt{1-\omega^2} \right)} \right) \end{aligned} \quad (3.25)$$

donde se ha utilizado que $\sin(z) = -i \sinh(iz)$. Además de oscilar periódicamente con un período $T = 2\pi/\omega$, se sabe que esta solución, para una frecuencia ω fijada, alcanza una amplitud máxima igual a $4 \arctan(\sqrt{1-\omega^2}/\omega)$.

Una representación de esta colisión se muestra en la Figura 3.5 donde se observa cómo se obtiene una solución que oscilan periódicamente “atascada” en un estado ligado.

Evidentemente esta solución puede ser impulsada mediante la transformada de Lorentz ($x \rightarrow \frac{x-ct}{\sqrt{1-c^2}}$; $t \rightarrow \frac{t-cx}{\sqrt{1-c^2}}$), con una velocidad $|c| < 1$, consiguiendo en vez de un breather centrado en un punto fijo, como (3.25), uno que se traslada globalmente a velocidad constante, cuya expresión viene dada por

$$U_{\omega D} = u(x, t) = 4 \arctan \left(\frac{\sqrt{1-\omega^2}}{\omega} \frac{\sin(\omega\gamma(t-cx))}{\cosh(\sqrt{1-\omega^2}\gamma(x-ct))} \right) \quad (3.26)$$

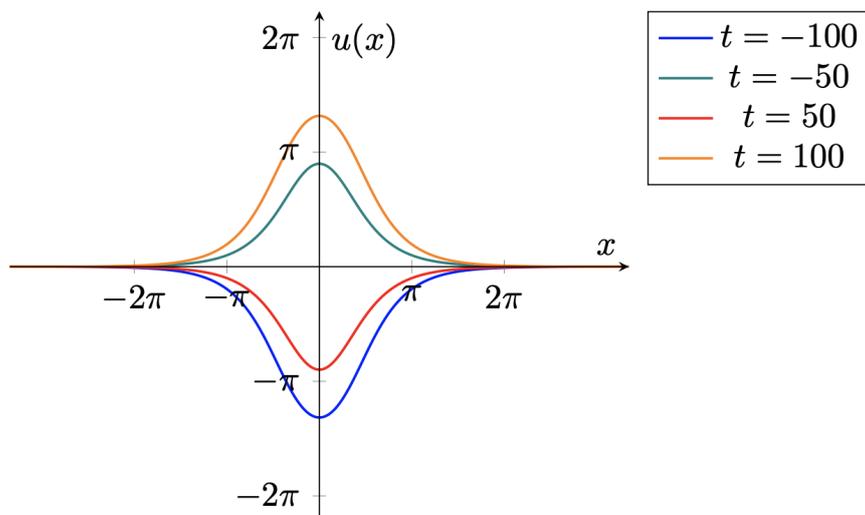


Figura 3.5: Visualización del proceso de colisión entre un solitón y un antisolitón que conlleva la creación de un breather. En la gráfica se muestra la solución en distintos momentos para una frecuencia fijada $\omega = 0.2$ viendo como la solución es un estado ligado entre un solitón y su antisolitón.

Desde un punto de vista energético, sustituyendo (3.25) en la fórmula general de la energía (1.13) se consigue saber que la energía total del breather viene dada por

$$E_\omega = 16\sqrt{1 - \omega^2}, \quad (3.27)$$

siendo ésta menor que la energía que se pueda tener con un par solitón-antisolitón para cualquier valor de ω distinto de cero, ya que esta última, que se puede obtener introduciendo (3.21) en (1.13), es igual a

$$E = \frac{8}{\sqrt{1 - v_1^2}} + \frac{8}{\sqrt{1 - v_2^2}} \quad (3.28)$$

con $|v_1| < 1$ y $|v_2| < 1$.

3.2. Scattering de defectos topológicos en el modelo masivo no lineal \mathbb{S}^2 -sigma

En la sección anterior hemos visto cómo es el scattering de solitones dentro del modelo de Seno-Gordon centrándonos sobre todo en las colisiones entre dos soluciones solitónicas. Ahora veremos cómo trasladar esta información en el estudio del scattering de las soluciones topológicas singulares presentes en el modelo masivo no lineal \mathbb{S}^2 -sigma, las cuales fueron cuidadosamente estudiadas en el capítulo 2 de este trabajo (Sección 2.2).

Como sabemos, los dos pares de soluciones topológicas singulares, es decir, las que pertenecen a los sectores de configuración $\mathcal{C}^{(N,S)}$ y $\mathcal{C}^{(S,N)}$, en el modelo masivo no lineal \mathbb{S}^2 -sigma vienen definidas por (2.21), (2.22), (2.26) y (2.27) donde aplicando la transformación de Lorentz obtenemos

$$\begin{cases} \varphi_{K_1} = \frac{\pi}{2} & ; & \varphi_{K_1^*} = \frac{3\pi}{2} & (3.29a) \\ \theta_{K_1}(x) = \theta_{K_1^*}(x) = 2 \arctan e^{\pm\sigma\gamma(x-vt)} & & & (3.29b) \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} \varphi_{K_2} = 0 & ; & \varphi_{K_2^*} = \pi & (3.30a) \\ \theta_{K_2}(x) = \theta_{K_2^*}(x) = 2 \arctan e^{\pm\gamma(x-vt)} & & & (3.30b) \end{cases}$$

tomando $x_0 = 0$.

Éstas se deducían al resolver el sistema de ecuaciones (2.18) donde, al ver que las únicas posibilidades de solución de (2.18b) eran $\varphi = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$, la ecuación (2.18a) quedaba reducida a una ecuación de Seno-Gordon

$$I) \quad \frac{d^2\theta}{dx^2} - \frac{\sigma^2}{2} \sin 2\theta = 0 \quad \text{si } \varphi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \quad (3.31a)$$

$$II) \quad \frac{d^2\theta}{dx^2} - \frac{1}{2} \sin 2\theta = 0 \quad \text{si } \varphi = 0, \pi \quad (3.31b)$$

concluyendo, por lo tanto, que en el modelo sigma masivo no lineal aparece integrado el modelo de Seno-Gordon en dos meridianos ortogonales.

3.2. SCATTERING DE DEFECTOS TOPOLÓGICOS EN EL MODELO \mathbb{S}^2 -SIGMA

Sin embargo, ambos modelos (el de Seno-Gordon y el sigma) presentan varias diferencias. La principal está en que mientras en el modelo de Seno-Gordon la variable θ se mueve desde $-\infty$ a ∞ en el modelo sigma al asociarse θ con la coordenada esférica polar, o de colatitud, dicha variable sólo toma valores entre 0 y π , de ahí que las soluciones (3.29b) y (3.30b) tengan un 2 como factor multiplicador en vez de un 4 como en (1.33) y que en ellas no aparezca el término $2k\pi \forall k \in \mathbb{Z}$. Otra diferencia viene dada por la existencia del parámetro σ en la solución del par K_1/K_1^* ($-1 < \sigma < 1$). Éste lo único que provoca es una suavización en el cambio con el que se conectan dos puntos de vacío a través de dichas soluciones topológicas. Por último, hay que señalar que el par de soluciones K_2/K_2^* es inestable mientras que el par K_1/K_1^* es estable. Veamos ahora como se reflejan estas diferencias en el proceso de scattering de los defectos topológicos del modelo sigma.

Antes de nada es necesario remarcar cuales son las soluciones que denominamos solitones y cuales los antisolitones. Siguiendo el mismo criterio comentado al final de la Sección 1.5, diremos que los solitones son las soluciones topológicas que van desde el polo norte ($\theta = 0$) hasta el polo sur ($\theta = \pi$) y, por consiguiente, los antisolitones son aquellas soluciones topológicas que van del polo sur al polo norte.

Dentro del modelo masivo no lineal \mathbb{S}^2 -sigma existen las siguientes posibilidades de colisiones de soluciones topológicas singulares:

1. Un solitón de K_1 moviéndose a velocidad v_1 colisiona con un solitón análogo de K_1^* (definido con el mismo σ) que se mueve a velocidad $v_2 = -v_1 = -v$. Dicho proceso queda definido con la expresión

$$U_{SS} = u(x, t) = 2 \arctan \left(\frac{a_1^2 - 1}{a_1^2 + 1} \cdot \frac{\sinh(\tilde{a}_1 x)}{\cosh(\tilde{a}_1 t)} \right) \quad (3.32)$$

la cual se deduce utilizando un razonamiento análogo al visto en la sección anterior usando la transformada de Bäcklund (3.19). Sin embargo, ahora, debido al parámetro σ presente en las soluciones, se tienen las siguientes relaciones entre la velocidad

v los parámetros a , \tilde{a} y $\tilde{\tilde{a}}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma\gamma = \tilde{a} = \frac{a^2 + 1}{2a} \\ \sigma\gamma v = \tilde{\tilde{a}} = \frac{a^2 - 1}{2a} \end{array} \right\} \Rightarrow v = \frac{\sqrt{(1 + a^2)^2 - 4\sigma^2 a^2}}{1 + a^2} \quad (3.33)$$

Por lo tanto, usando (3.33) en (3.32) se llega a

$$U_{SS} = u(x, t) = 2 \arctan \left(\frac{v \sinh(\sigma\gamma x)}{\cosh(\sigma\gamma vt)} \right) \quad (3.34)$$

cuya representación se puede observar en el gráfico en 3D de la Figura 3.6.

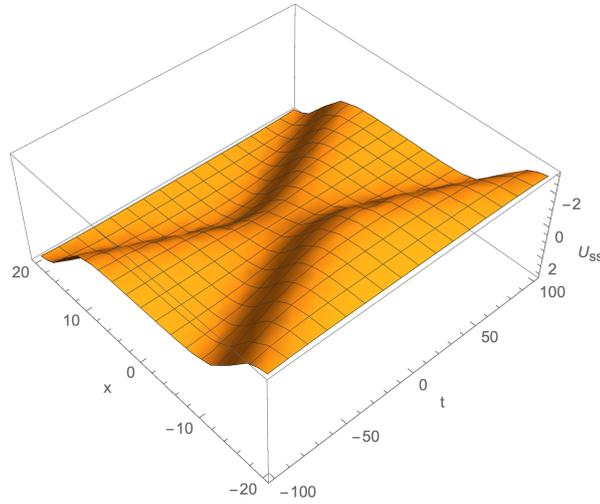


Figura 3.6: Representación de la colisión entre dos solitones del par K_1/K_1^* dentro del modelo masivo no lineal S^2 -sigma imponiendo $\sigma = 0.5$. Una simulación dinámica de este fenómeno, creada con Mathematica, se puede encontrar en el siguiente enlace: [simulación solitón-solitón](#).

- Un antisolitón de K_1 moviéndose a velocidad v_1 colisiona con un antisolitón análogo de K_1^* (definido con el mismo σ) que se mueve a velocidad $v_2 = -v_1 = -v$. Este proceso viene definido por la misma expresión encontrada en el caso anterior (3.34). De hecho como el parámetro $\sigma \in [-1, 1]$ se sabe que si σ es positivo tenemos dos solitones y si se pone negativo tenemos dos antisolitones. Una representación de la colisión entre dos antisolitones se muestra en la Figura 3.7

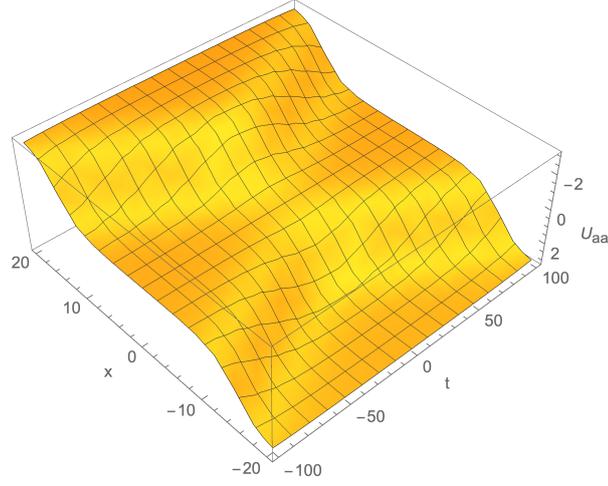


Figura 3.7: Representación de la colisión entre dos antisolitones del par K_1/K_1^* dentro del modelo masivo no lineal S^2 -sigma imponiendo $\sigma = -0.5$.

3. Un solitón de K_1 (o K_1^*) moviéndose a velocidad v_1 colisiona con su antisolitón de K_1 (o K_1^*), definido con el mismo σ , que se mueve a velocidad $v_2 = -v_1 = v$. Este proceso viene definido, de forma análoga a (3.21), por la expresión

$$U_{SA} = u(x, t) = 2 \arctan \left(\frac{a_1^2 + 1}{a_1^2 - 1} \cdot \frac{\sinh(\tilde{a}_1 t)}{\cosh(\tilde{a}_1 x)} \right) \quad (3.35)$$

donde al utilizar (3.33) se consigue

$$U_{SA} = u(x, t) = 2 \arctan \left(\frac{\sinh(\sigma \gamma v t)}{\cosh(\sigma \gamma x)} \right). \quad (3.36)$$

Una visualización de este fenómeno se muestra en la Figura 3.8.

4. Un antisolitón de K_1 (o K_1^*) moviéndose a velocidad v_1 colisiona con un solitón de K_1 (o K_1^*), definido con el mismo σ , que se mueve a velocidad $v_2 = -v_1 = v$. Este caso es análogo al anterior obteniendo la misma fórmula.

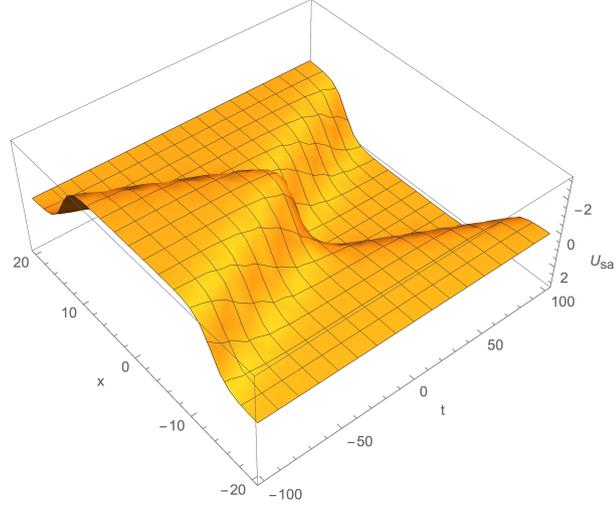


Figura 3.8: Representación de la colisión entre un solitón de K_1 y un antisolitón de K_1 dentro del modelo masivo no lineal S^2 -sigma imponiendo $\sigma = 0.75$. Una simulación dinámica de este fenómeno, creada con Mathematica, se puede encontrar en el siguiente enlace: [simulación solitón-antisolitón](#)

5. Breathers. Al igual que ocurría en el modelo de Seno-Gordon si se dan las condiciones necesarias ($v = \frac{i\omega}{\sqrt{1-\omega^2}}$) pueden surgir breathers al colisionar un solitón de K_1 con su antisolitón de K_1 o un antisolitón de K_1 con su solitón de K_1 . Lo mismo en K_1^* . La expresión con la que se describe estos fenómenos es

$$U_{\omega E} = u(x, t) = 2 \arctan \left(\frac{\sqrt{1-\omega^2}}{\omega} \frac{\sin(\sigma\omega t)}{\cosh(\sigma x \sqrt{1-\omega^2})} \right) \quad (3.37)$$

en el caso estático y

$$U_{\omega D} = u(x, t) = 2 \arctan \left(\frac{\sqrt{1-\omega^2}}{\omega} \frac{\sin(\sigma\omega\gamma(t-cx))}{\cosh(\sigma\sqrt{1-\omega^2}\gamma(x-ct))} \right) \quad (3.38)$$

en el caso dinámico, siendo c la velocidad con la que se desplaza el breather ($|c| < 1$).

Unas visualizaciones de estos fenómeno se muestran en la Figura 3.9.

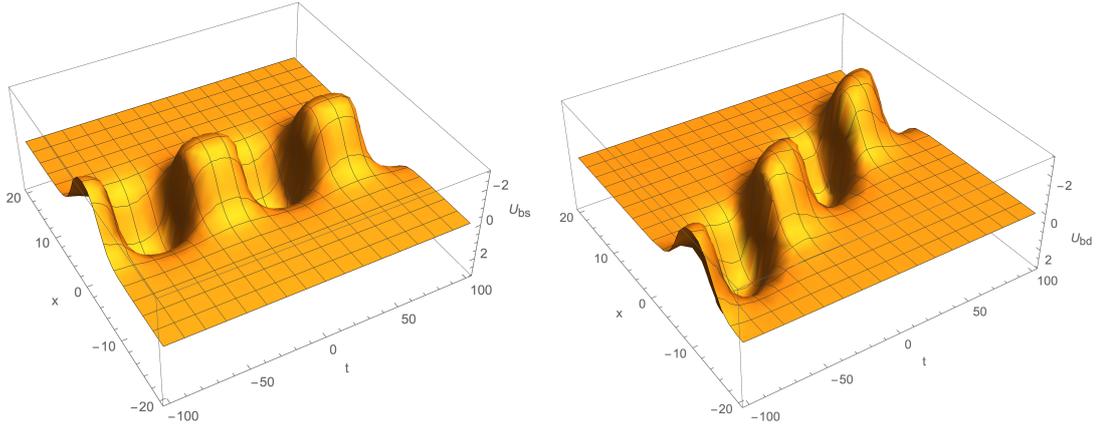


Figura 3.9: Representación de breathers tanto estático (izquierda) como dinámico con $c = 0.1$ (derecha) dentro del modelo masivo no lineal S^2 -sigma imponiendo $\sigma = 0.75$ y una frecuencia $w = 0.1$. Unas simulaciones dinámicas de estos fenómenos, creadas con Mathematica, se pueden encontrar en los siguientes enlaces: [simulación breather estático](#) y [simulación breather dinámico](#).

El resto de colisiones que se podrían pensar teóricamente dentro del par K_1/K_1^* no tienen cabida dentro de nuestro modelo ya que, por ejemplo, la colisión entre un solitón de K_1 y su antisolitón análogo de K_1^* es inviable puesto que nunca podrían juntarse dos de estas soluciones de manera continua (recordar que $\theta \in [0, \pi]$). Lo mismo ocurriría con la colisión de un solitón de K_1^* con su antisolitón análogo de K_1 .

Si nos fijamos en las soluciones del par K_2/K_2^* los resultados serán iguales a todos los obtenidos anteriormente simplemente imponiendo un valor de 1 al parámetro σ . Sin embargo, estos fenómenos no son de mucho interés ya que seguramente decaerían antes de que se produjera el scattering debido al carácter inestable de estas soluciones, de lo cual ya se habló en las Sección 2.2.

De la misma manera ocurre con las posibles colisiones entre soluciones del par K_1/K_1^* con K_2/K_2^* . En cuanto se produzca cualquier tipo perturbación sobre las soluciones del par K_2/K_2^* estas decaerán convirtiéndose en algún tipo de solución del par K_1/K_1^* , dando lugar a algún caso de los vistos con anterioridad.

Capítulo 4

Conclusiones

El estudio de soluciones solitónicas, como el realizado en este TFM, es de gran utilidad debido a que este tipo de soluciones aparecen en multitud de fenómenos pertenecientes a diversas áreas de la física como en microelectrónica, en cosmología o en física de la materia condensada. A pesar de que no hayan sido estudiadas con profundidad hasta apenas unos años, bien inicialmente por el desconocimiento de su mera existencia pues se pensaba que era imposible que existieran soluciones no dispersivas, o bien posteriormente por la falta de una formalización matemática con la que poder calcular analíticamente este tipo de soluciones, hoy en día su estudio es un campo de gran interés científico.

En el primer capítulo de este trabajo, a través de la evolución científica desarrollada a lo largo de los dos últimos siglos, se detalla cómo se ha ido construyendo un formalismo teórico alrededor de estas soluciones de tipo defecto topológico en teorías de campos escalares. En él, a parte de introducir multitud de conceptos, se remarca una gran diferencia entre lo que se denominan, dentro de una teoría de campos, ondas solitarias tipo kink de solitones. La clave de esta diferencia de terminología está en el comportamiento de las ondas frente a colisiones, destinando el concepto de solitón a aquellas ondas solitarias que presentan choques elásticos. Por otra parte, en el capítulo se dan las herramientas necesarias para saber qué son y cómo se pueden calcular los puntos de vacío, las soluciones solitónicas topológicas y las no topológicas dentro de un modelo físico descrito mediante un sistema de ecuaciones en derivadas parciales no lineales de la forma (1). Finalmente, se particulariza lo aprendido al estudio del modelo de Seno-Gordon, el cual sirve de base

para el estudio de los siguientes capítulos, puesto que éste se encuentra integrado dentro del modelo masivo no lineal \mathbb{S}^2 -sigma, en el que está centrado este trabajo.

En el segundo capítulo se estudia el modelo (1+1)-dimensional masivo no lineal \mathbb{S}^2 -sigma basándose en un marco puramente bosónico (de hecho se considera el modelo masivo no lineal más simple posible al elegir el potencial). En él, en primer lugar, se describe cómo se construye este modelo, el cual se puede asemejar al movimiento de una partícula en \mathbb{R}^3 bajo la influencia de una función potencial, al que se le añade una ligadura con la que se restringe su movimiento a una esfera de radio R . A continuación se analizan las distintas soluciones existentes tanto cuando las dos masas de los bosones son diferentes, distinguiendo los puntos de vacío de las dos soluciones solitónicas topológicas singulares K_1/K_1^* y K_2/K_2^* como de las soluciones solitónicas no topológicas, como cuando las dos masas son iguales, lo que provoca una degeneración de todas las soluciones solitónicas pasando a existir una única familia topológica uniparamétrica de soluciones que viven en los distintos semimeridianos de la esfera con una energía igual a $2R^2$. También en este capítulo se afirma que el modelo no sólo es completamente integrable sino que también es separable por Hamilton-Jacobi (HJ), lo cual se deduce mediante una transformación a coordenadas elípticas en la esfera, permitiendo encontrar, siempre y cuando las masas de los bosones sean distintas, cuatro familias de trayectorias homoclínicas de solitones no topológicos que comienzan y terminan en uno de los polos, siendo estas soluciones inestables del sistema mecánico.

Por otra parte, en este segundo capítulo, también se resalta una importante aplicación del modelo no lineal sigma: la espintrónica, ya que este modelo puede ser interpretado como el paso al continuo de un conjunto de núcleos situados unos muy próximos a los otros con sus respectivos espines orientados siguiendo la influencia de campo magnético. Formalmente esto se obtiene calculando el límite de largas longitudes de onda (bajas energías) de las ecuaciones de campo estáticas de este modelo sigma llegando a obtener las ecuaciones estáticas de Landau-Lifshitz, que gobiernan el límite de alto espín en los materiales ferromagnéticos en una dimensión. Desde esta perspectiva, los solitones son ondas de espín solitarias. Es más, las soluciones topológicas singulares K_1/K_1^* y K_2/K_2^*

son paredes de Bloch e Ising respectivamente, las cuales forman interfaces entre dominios ferromagnéticos. Análogamente, los solitones no topológicos son superposiciones no lineales de una pared básica de Bloch y una pared básica de Ising a diferentes distancias.

Finalmente, en el tercer capítulo se realiza un estudio detallado del fenómeno de scattering de solitones. En primer lugar, se muestra el formalismo de la transformada de Bäcklund a través del cual se pueden calcular, de una manera recursiva, todas las soluciones presentes en el modelo de Seno-Gordon, consiguiendo con cada transformación configuraciones cada vez más complejas (con un mayor número de solitones) siendo precisamente estas soluciones las expresiones con las que se pueden describir los fenómenos de scattering. A partir de este formalismo se analizan choques entre dos soluciones solitónicas dentro del modelo de Seno-Gordon, resaltando las colisiones solitón-solitón, solitón-antisolitón y los breathers. Posteriormente, la información extraída es transferida al estudio del scattering entre defectos topológicos dentro del modelo masivo no lineal S^2 -sigma. Esta transferencia es posible ya que el modelo Seno-Gordon se encuentra integrado dentro del modelo sigma. Este último estudio no sólo se realiza analíticamente sino que para completarlo se desarrollan, mediante scripts en Mathematica, distintas simulaciones con las que poder visualizar estos particulares fenómenos, los cuales se encuentran profundamente relacionados con la espintrónica.

En resumen, el estudio sobre las soluciones solitónicas realizado en este trabajo es de gran valor debido a sus multitud de aplicaciones, pese a que en éste sólo se han analizado algunas soluciones unidimensionales posibles. Esta teoría, sin embargo, podría extenderse a vórtices y lumps en 2 dimensiones, monopolos y Skyrmions en 3 dimensiones o incluso en instantones en 4 dimensiones.

Apéndice A: Notación relativista

En primer lugar, cabe señalar que con el fin de simplificar la notación, en todo el trabajo se normalizan las velocidades asumiendo que la velocidad de la luz vale 1.

Las transformaciones de Lorentz se definen como aquellas que dejan invariante al producto escalar en el espacio de Minkowski definido como

$$x \cdot x = x^2 = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = x_0^2 - \sum_i x^i x^i = x^{0^2} - \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \quad (\text{A.1})$$

donde $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ son los grados espacio-temporales, $i = 1, 2, 3$ son los grados espaciales y asumiendo la suma sobre índices repetidos (criterio de Einstein) y que la métrica de Minkowski se define como

$$\{g_{\mu\nu}\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

siendo $\{g_{\mu\nu}\}$ la forma matricial del tensor $g_{\mu\nu}$.

De esta manera, el producto de dos cuadvectores se define como

$$x \cdot y = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = x^0 y^0 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \quad (\text{A.3})$$

y el inverso de esta métrica como $\{g^{\mu\nu}\} \equiv \{g_{\mu\nu}\}^{-1} = \{g_{\mu\nu}\}$ donde $g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta_\nu^\mu$.

Por consiguiente, si queremos que se cumpla que el producto escalar en el espacio de Minkowski, definido por $g_{\mu\nu}$, sea invariante bajo transformaciones de Lorentz

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \quad (\text{A.4})$$

debemos tener en cuenta, en primer lugar, que la invariancia del producto escalar en (A.3)

implica que

$$\begin{aligned}
 x \cdot y &\rightarrow x' \cdot y' = g_{\mu\nu} x'^{\mu} y'^{\nu} \\
 &= g_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\alpha} x^{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\beta} y^{\beta} \\
 &= \Lambda^{\mu}_{\alpha} g_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}_{\beta} x^{\alpha} y^{\beta}.
 \end{aligned} \tag{A.5}$$

y por lo tanto se hace necesario que

$$\Lambda^{\mu}_{\alpha} g_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}_{\beta} x^{\alpha} y^{\beta} = g_{\alpha\beta} x^{\alpha} y^{\beta}. \tag{A.6}$$

Esto supone que

$$g_{\alpha\beta} = \Lambda^{\mu}_{\alpha} g_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}_{\beta}, \tag{A.7}$$

o, reorganizando los índices mudos

$$g_{\mu\nu} = (\Lambda^T)_{\mu}^{\alpha} g_{\alpha\beta} \Lambda^{\beta}_{\nu} \quad \text{o} \quad \{g_{\mu\nu}\} = \{\Lambda_{\mu}^{\alpha}\}^T \{g_{\alpha\beta}\} \{\Lambda^{\beta}_{\nu}\}. \tag{A.8}$$

Si escribimos esto en notación matricial tenemos

$$g = \Lambda^T g \Lambda, \tag{A.9}$$

lo cual define al conjunto de matrices Λ que forma el Grupo de Lorentz $SO(1, 3)$.

Como un ejemplo clásico de transformación de Lorentz se puede considerar el cambio de un sistema en reposo a un sistema inercial con velocidad v constante a lo largo del eje x , esto sería

$$\begin{aligned}
 \{x^{\mu}\} = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t + vx}{\sqrt{1 - v^2}} \\ \frac{x + vt}{\sqrt{1 - v^2}} \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & v\gamma & 0 & 0 \\ v\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cosh \xi & \sinh \xi & 0 & 0 \\ \sinh \xi & \cosh \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \{\Lambda^{\mu}_{\nu}\} \{x^{\nu}\}, \tag{A.10}
 \end{aligned}$$

donde $\cosh \xi = \gamma$, $\sinh \xi = v\gamma$ y $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}$.

Apéndice B: Código de Mathematica

Para complementar el estudio del scattering entre soluciones solitónicas realizado en el tercer capítulo, se ha decidido implementar una serie de simulaciones en Mathematica. En ellas se muestran cómo se producen estos fenómenos de colisión entre soluciones solitónicas pertenecientes al modelo Seno-Gordon así como entre defectos topológicos dentro del modelo masivo no lineal S^2 -sigma. Todos los scripts creados para realizar estas simulaciones se encuentran recogidos en el archivo `Simulaciones_Solitones_Scatterings.nb`, que se adjunta a este trabajo y se encuentra disponible en [enlace](#). Una parte de este código, referente al scattering de defectos topológicos del modelo masivo no lineal S^2 -sigma, se muestra a continuación.

```
* Código necesario para realizar las animaciones:

In[*]:= drawPendula[f_, range_, n_, rad_] := Module[{lines, balls, ypos, pos},
  lines = {}; balls = {};
  For[i = 1, i <= n, i++,
    ypos = range[[1]] +  $\frac{i-1}{n-1}$  (range[[2]] - range[[1]]);
    pos = {Sin[f[ypos]], ypos, -Cos[f[ypos]]};
    AppendTo[lines, Line[{{0, ypos, 0}, pos}]];
    AppendTo[balls, Sphere[pos, rad]];
  Graphics3D[Join[lines, {Blue, balls}], Boxed -> False, PlotRange -> {{-1.1, 1.1}, range, {-1.1, 1.1}}, ImageSize -> Small]

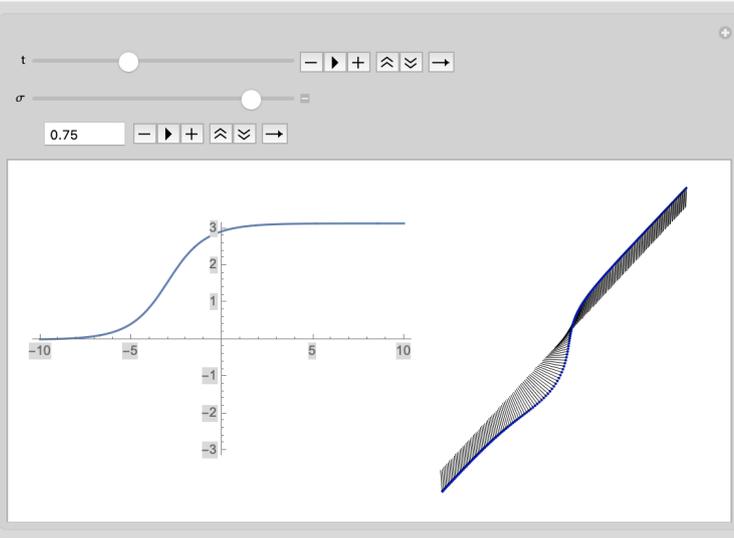
In[*]:= sineGordonAnimate2[sol_, xrange_, trange_, orange_, n_, rad_] :=
  Manipulate[
  Row[{Plot[sol[x, t,  $\sigma$ ], {x, xrange[[1]], xrange[[2]]}, PlotRange -> {- $\pi$ ,  $\pi$ }, ImageSize -> Small],
  drawPendula[sol[#, t,  $\sigma$ ] &, xrange, n, rad]}],
  {{t, trange[[1]], trange[[1]], trange[[2]], AnimationRate -> 20, ControlType -> Animator, Appearance -> "Open"},
  {{ $\sigma$ , 0.75}, orange[[1]], orange[[2]], Appearance -> "Open"}, AutorunSequencing -> All]
```

Figura 1: Funciones auxiliares necesarias para la creación de las simulaciones de scatterings dentro del modelo masivo no lineal S^2 -sigma donde se pueden asociar los solitones con ondas de espines. Estos espines están representados mediante péndulos unidos a una barra que se toma como eje de rotación frente a perturbaciones.

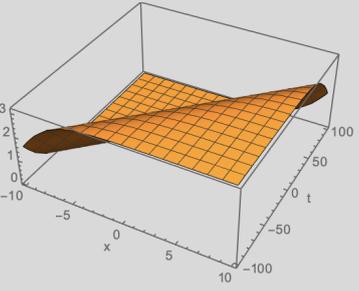
▼ a) Solitón

In[]:= $\phi k[v_-, x_-, t_-, \sigma_-] := 2 \text{ArcTan}\left[e^{\frac{\sigma (x-v t)}{\sqrt{1-v^2}}}\right]$
[arco tangente]

sineGordonAnimate2[$\phi k[0.1, \#1, \#2, \#3]$ &, {-10, 10}, {-100, 100}, {-1, 1}, 200, 0.05]

Out[]:= 

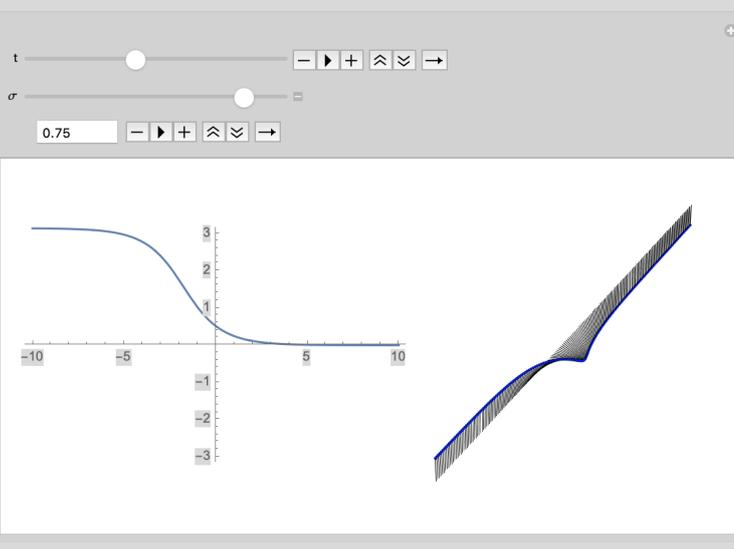
In[]:= $\text{Plot3D}[\phi k[0.1, x, t, 0.5], \{x, 10, -10\}, \{t, -100, 100\}, \text{AxesLabel} \rightarrow \{ "x", "t" \}]$
[representación gráfica 3D] [etiqueta de ejes]

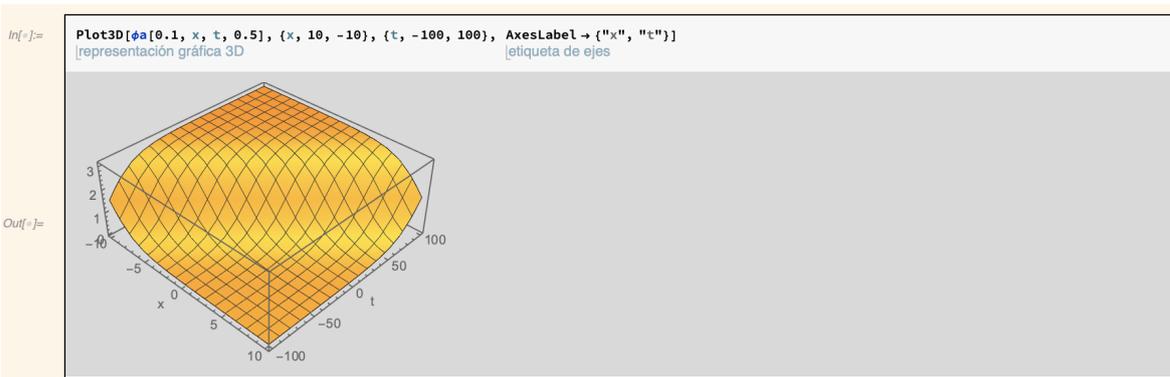
Out[]:= 

▼ b) Antisolitón

In[]:= $\phi a[v_-, x_-, t_-, \sigma_-] := 2 \text{ArcTan}\left[e^{-\frac{\sigma (x-v t)}{\sqrt{1-v^2}}}\right]$
[arco tangente]

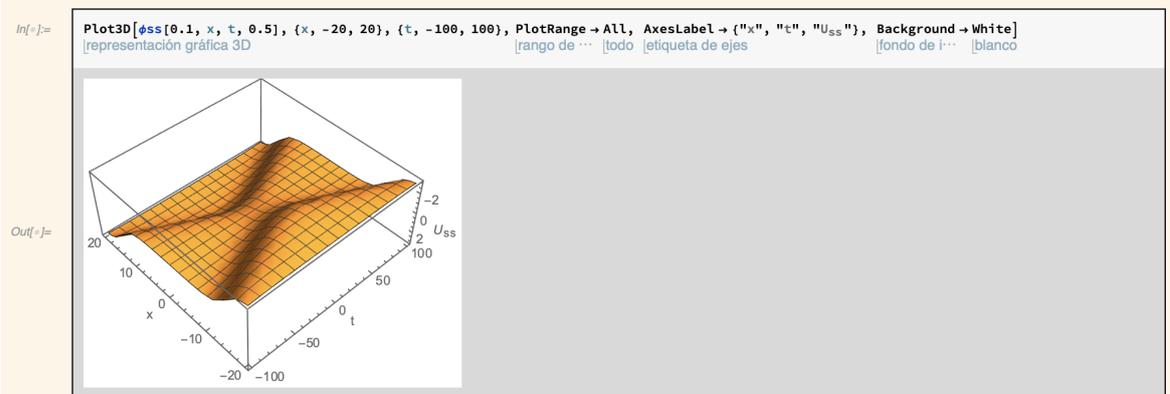
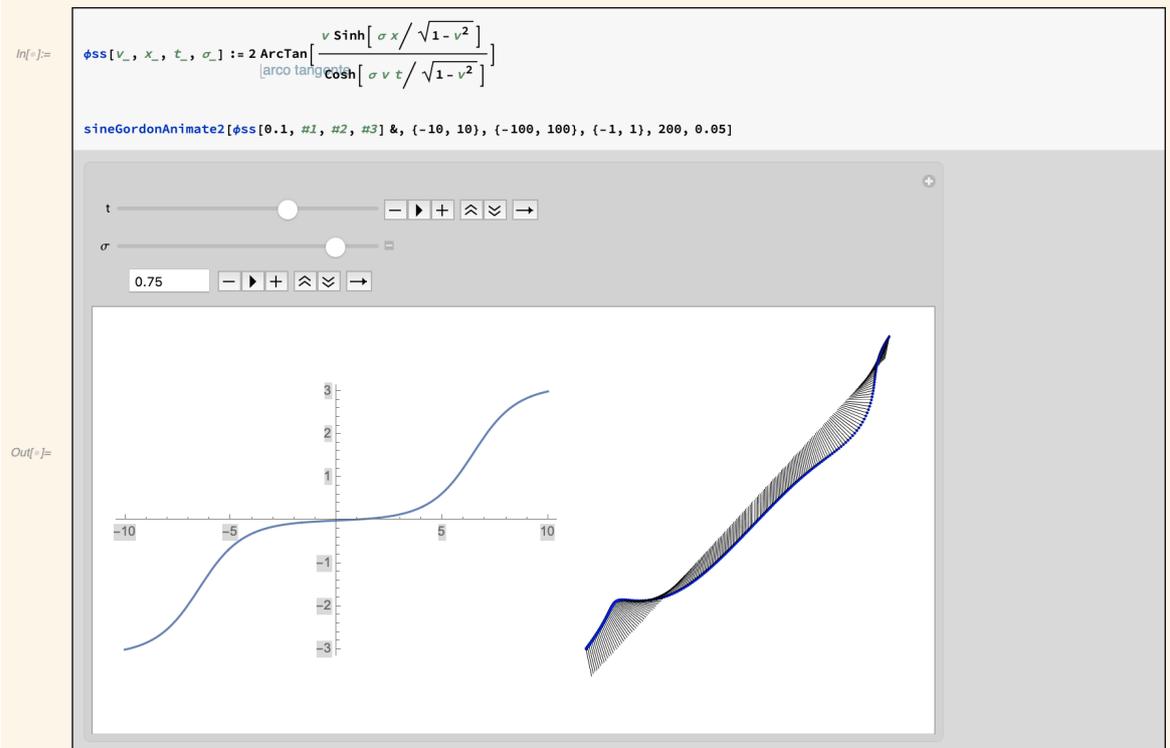
sineGordonAnimate2[$\phi a[0.1, \#1, \#2, \#3]$ &, {-10, 10}, {-100, 100}, {-1, 1}, 200, 0.05]

Out[]:= 



∨ I) Scattering de 2 soluciones

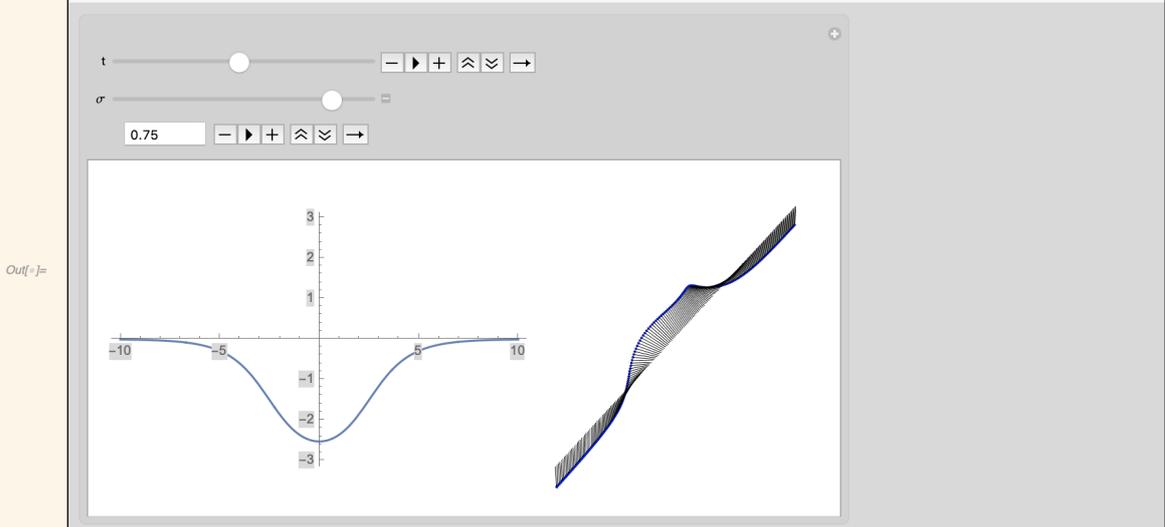
∨ a) Solitón - Solitón // Antisolitón-antisolitón



▼ b) Solitón - Antisolitón

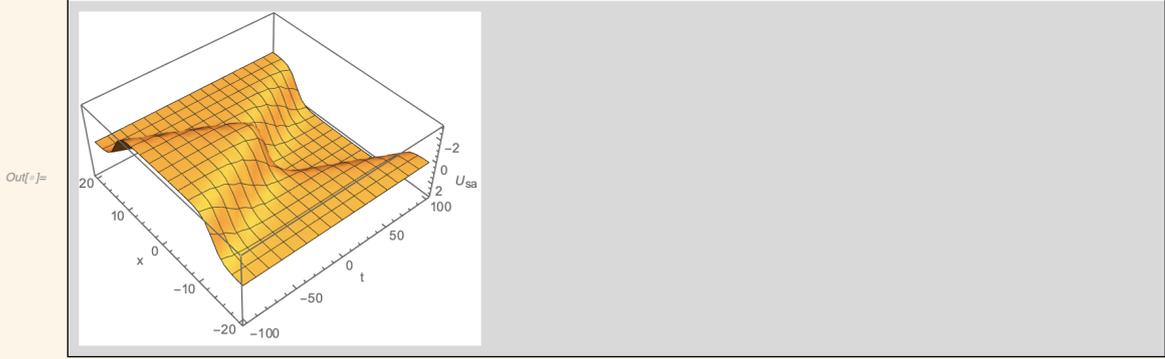
In[]:=
$$\phi_{ka}[v_-, x_-, t_-, \sigma_-] := 2 \operatorname{ArcTan} \left[\frac{\sinh[\sigma v t / \sqrt{1-v^2}]}{\cosh[\sigma x / \sqrt{1-v^2}]} \right]$$

sineGordonAnimate2[$\phi_{ka}[0.1, \#1, \#2, \#3]$ &, {-10, 10}, {-100, 100}, {-1, 1}, 200, 0.05]



In[]:= Plot3D[$\phi_{ka}[0.1, x, t, 0.75]$, {x, -20, 20}, {t, -100, 100}, PlotRange -> All, AxesLabel -> {"x", "t", "U_{sa}"}, Background -> White]

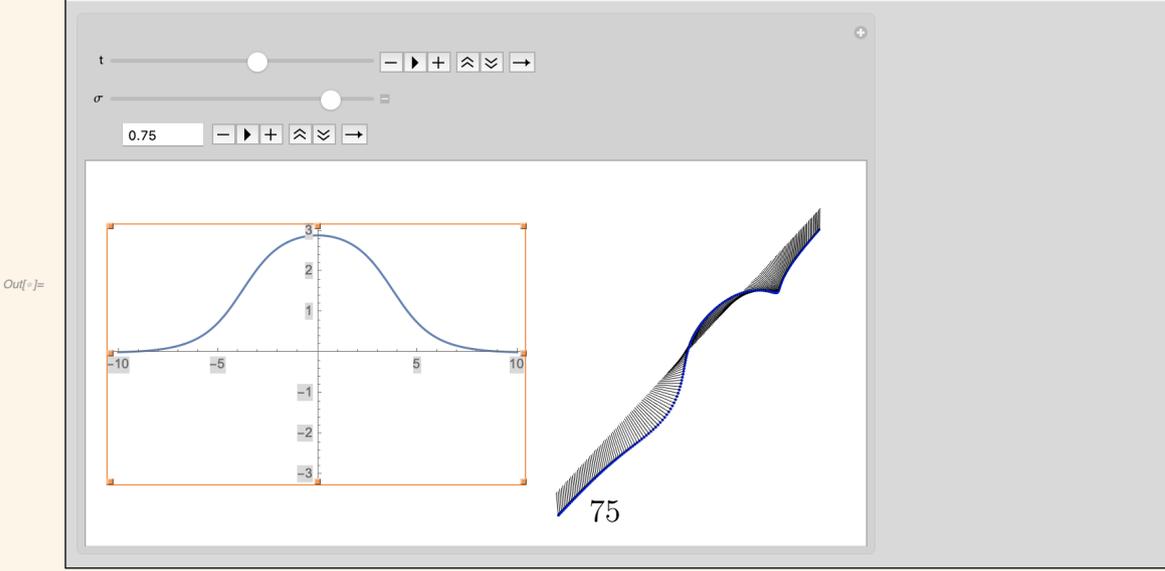
[representación gráfica 3D] [rango de ...] [todo] [etiqueta de ejes] [fondo de i...] [blanco]

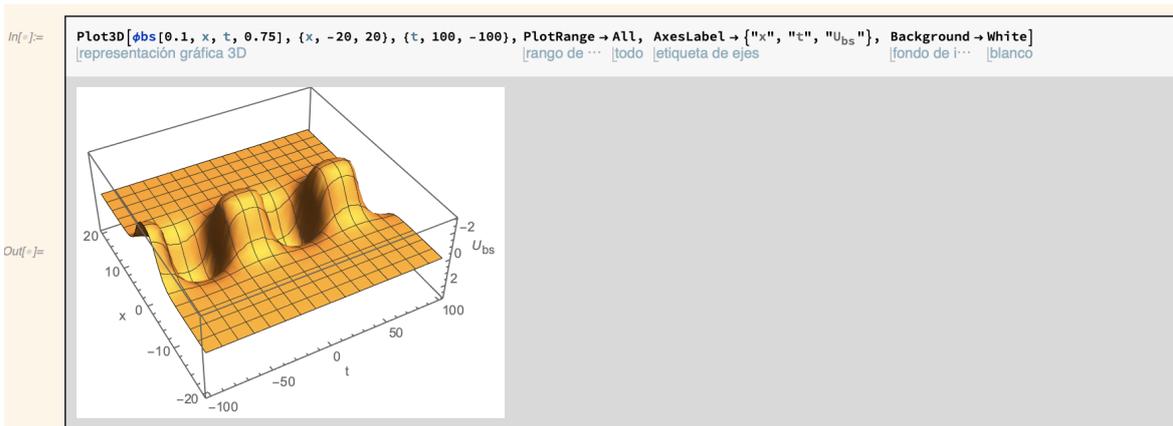


▼ c) Breather estático

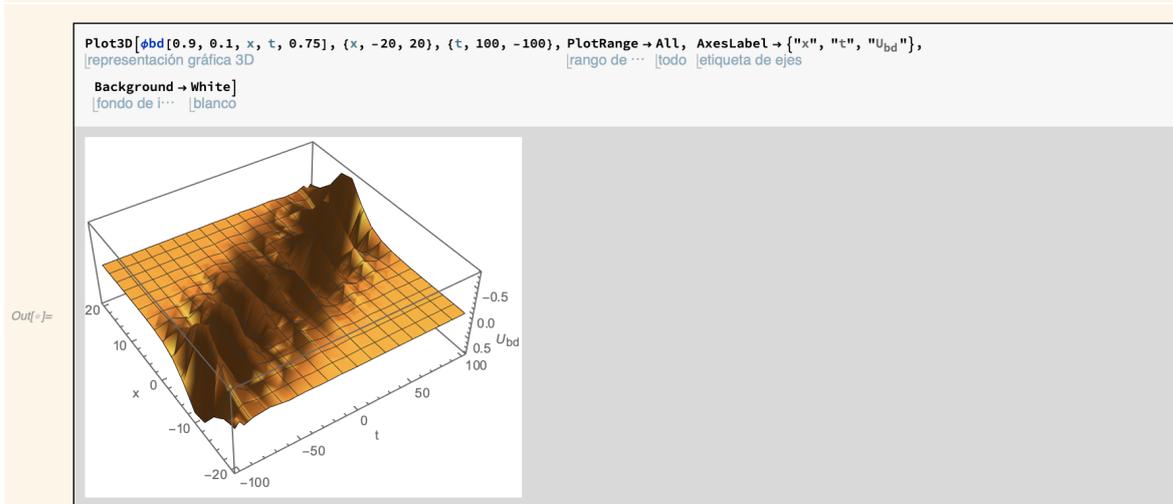
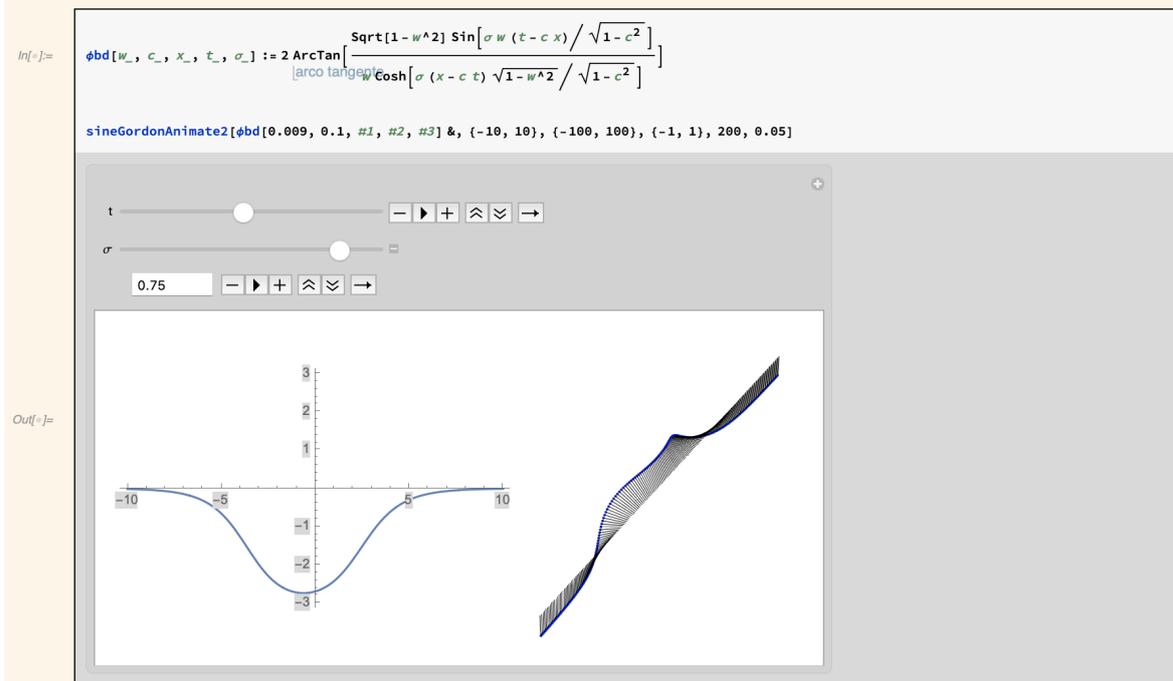
In[]:=
$$\phi_{bs}[w_-, x_-, t_-, \sigma_-] := 2 \operatorname{ArcTan} \left[\frac{\operatorname{Sqrt}[1-w^2] \operatorname{Sin}[\sigma w t]}{\cosh[\sigma x \sqrt{1-w^2}]} \right]$$

sineGordonAnimate2[$\phi_{bs}[0.1, \#1, \#2, \#3]$ &, {-10, 10}, {-100, 100}, {-1, 1}, 200, 0.05]





▼ d) Breather dinámico con gran amplitud



General

In[]:= (*Puedes poner cualquier valor de a1 y 2*)

$$\text{Collision}[x_, t_, a1_, a2_] := 2 \text{ArcTan} \left[\frac{(a1 + a2) \left(e^{\frac{(1-a1^2)t + (1+a1^2)x}{2a1}} - e^{\frac{(1-a2^2)t + (1+a2^2)x}{2a2}} \right)}{(a1 - a2) \left(1 + e^{\left(\frac{1-a1^2}{2a1} + \frac{1-a2^2}{2a2} \right) t + \left(\frac{1+a1^2}{2a1} + \frac{1+a2^2}{2a2} \right) x} \right)} \right]$$

sineGordonAnimate2[Collision[#1, #2, a1, a2] &, {-10, 10}, {-100, 100}, {-1, 1}, 200, 0.05] /. {a1 -> 1.5, a2 -> -0.75}

Out[]:=

The screenshot shows a Mathematica notebook interface. The input cell contains a definition for a collision function and an animation function. The output cell displays two plots: a 2D plot of the collision function and a 3D surface plot of the same function. The 2D plot shows a curve that starts at approximately -3 for x = -10, passes through the origin, and levels off at approximately 3 for x = 10. The 3D plot shows a surface that follows the same curve, with a shaded area representing the surface's depth.

Bibliografía

- [1] M. A. Ablowitz y P. A. Clarkson. *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering*. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, 1991. DOI: [10.1017/CB09780511623998](https://doi.org/10.1017/CB09780511623998).
- [2] A. Alonso Izquierdo. «Kinks con dos componentes: de su relación con sistemas dinámicos integrables y modelos supersimétricos». Tesis doct. Universidad de Salamanca, 2001. DOI: [10.14201/gredos.146443](https://doi.org/10.14201/gredos.146443). URL: <https://campus.usal.es/~mpg/General/TesisAlberto.pdf>.
- [3] A. Alonso Izquierdo, M. A. Gonzalez Leon y J. Mateos Guilarte. «Kinks in a Non-linear Massive Sigma Model». En: *Physical Review Letters* 101.13 (sep. de 2008). DOI: [10.1103/physrevlett.101.131602](https://doi.org/10.1103/physrevlett.101.131602). URL: <https://doi.org/10.1103%5C%2Fphysrevlett.101.131602>.
- [4] A. Alonso Izquierdo, M. A. Gonzalez Leon y J. Mateos Guilarte. «BPS and non-BPS kinks in a massive nonlinear S^2 -sigma model». En: *Physical Review D* 79 (jun. de 2009), pág. 125003. DOI: [10.1103/PhysRevD.79.125003](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.79.125003). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.79.125003>.
- [5] A. V. Bäcklund. «Zur Theorie der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung». En: *Mathematische Annalen* 17.3 (1880), págs. 285-328. DOI: [10.1007/BF01446229](https://doi.org/10.1007/BF01446229). URL: <https://doi.org/10.1007/BF01446229>.
- [6] I. V. Barashenkov y S. R. Woodford. «Interactions of parametrically driven dark solitons. II. Néel-Bloch interactions». En: *Physical Review Letter Rev. E* 75 (2 feb. de 2007), pág. 026605. DOI: [10.1103/PhysRevE.75.026605](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.75.026605). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.75.026605>.

-
- [7] I. V. Barashenkov, S. R. Woodford y E. V. Zemlyanaya. «Parametrically Driven Dark Solitons». En: *Physical Review Letter* 90 (5 feb. de 2003), pág. 054103. DOI: [10.1103/PhysRevLett.90.054103](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.90.054103). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.90.054103>.
- [8] J. Boussinesq. «Théorie de l'intumescence Liquid, Appleteonde Solitaire au de Translation, se Propageantdansun Canal Rectangulaire». En: *Les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris* 72 (1871), págs. 755-759.
- [9] S. Coleman. *There are no Goldstone bosons in two dimensions*. Vol. 31. 4. 1973, págs. 259-264. DOI: [10.1007/BF01646487](https://doi.org/10.1007/BF01646487). URL: <https://doi.org/10.1007/BF01646487>.
- [10] S. Coleman. *Aspects of Symmetry: Selected Erice Lectures*. Cambridge University Press, 1985. DOI: [10.1017/CB09780511565045](https://doi.org/10.1017/CB09780511565045).
- [11] G. H. Derrick. «Comments on Nonlinear Wave Equations as Models for Elementary Particles». En: *Journal of Mathematical Physics, Volume 5, Issue 9* (1964). DOI: [10.1063/1.1704233](https://doi.org/10.1063/1.1704233). URL: <https://aip.scitation.org/doi/pdf/10.1063/1.1704233>.
- [12] E. Fermi y col. «Studies of the nonlinear problems». En: *Los Alamos National Lab. (LANL), Los Alamos, NM* (mayo de 1955). DOI: [10.2172/4376203](https://www.osti.gov/biblio/4376203). URL: <https://www.osti.gov/biblio/4376203>.
- [13] W. García Fuertes. «Defectos Topológicos en Teoría de Campos. De kinks, Vórtices y Monopolos en Modelos Escalares y Teorías Gauge». Tesis doct. Universidad de Oviedo, 1998. URL: <https://campus.usal.es/~mpg/General/TesisWifredo.pdf>.
- [14] C. S. Gardner y col. «Method for Solving the Korteweg-deVries Equation». En: *Physical Review Letter* 19 (19 nov. de 1967), págs. 1095-1097. DOI: [10.1103/PhysRevLett.19.1095](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.19.1095). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.19.1095>.
- [15] F. D. M. Haldane. «Nonlinear Field Theory of Large-Spin Heisenberg Antiferromagnets: Semiclassically Quantized Solitons of the One-Dimensional Easy-Axis Néel State». En: *Physical Review Letter* 50 (15 abr. de 1983), págs. 1153-1156. DOI:

- 10.1103/PhysRevLett.50.1153. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.50.1153>.
- [16] D. J. Korteweg y G. De Vries. «XLI. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves». En: *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 39.240 (1895), págs. 422-443. DOI: [10.1080/14786449508620739](https://doi.org/10.1080/14786449508620739). URL: <https://doi.org/10.1080/14786449508620739>.
- [17] N. S. Manton y P. M. Sutcliffe. «Topological Solitons». En: Cambridge Monographs on Mathematical Physics (2004). DOI: [10.1017/CB09780511617034](https://doi.org/10.1017/CB09780511617034). URL: <http://www.lmpt.univ-tours.fr/~volkov/Manton-Sutcliffe.pdf>.
- [18] J. E. Nápoles Valde y A. González Thomas. «Solitones, una no-linealidad no tan solitaria». En: *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet* 7.1 (feb. de 2015). DOI: [10.18845/rdmei.v7i1.2122](https://doi.org/10.18845/rdmei.v7i1.2122). URL: <https://revistas.tec.ac.cr/index.php/matematica/article/view/2122>.
- [19] R. S. Palais. «The Symmetries of Solitons». En: *Bulletin of the American Mathematical Society* 34 (sep. de 1997). DOI: [10.1090/S0273-0979-97-00732-5](https://doi.org/10.1090/S0273-0979-97-00732-5). URL: <https://doi.org/10.1090/S0273-0979-97-00732-5>.
- [20] R. Rajaraman. «Intersoliton forces in weak-coupling quantum field theories». En: *Physical Review D* 15 (10 mayo de 1977), págs. 2866-2874. DOI: [10.1103/PhysRevD.15.2866](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.15.2866). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.15.2866>.
- [21] R. Rajaraman. «Solitons of Coupled Scalar Field Theories in Two Dimensions». En: *Physical Review Letter* 42 (4 ene. de 1979), págs. 200-204. DOI: [10.1103/PhysRevLett.42.200](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.42.200). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.42.200>.
- [22] R. Rajaraman. *Solitons and Instantons: An Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory*. North-Holland Publishing Company, 1982. ISBN: 9780444862297. URL: <https://books.google.es/books?id=1XucQgAACAAJ>.

-
- [23] L Rayleigh. «On waves». En: *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 1 (1876), págs. 257-259. DOI: [10.1080/14786447608639037](https://doi.org/10.1080/14786447608639037). URL: <https://doi.org/10.1080/14786447608639037>.
- [24] J.S. Russell. «Report on Waves». En: *Report of the 14th Meeting of the British Association for the Advancement of Science* (1845), págs. 311-390. URL: <https://www.biodiversitylibrary.org/item/47344>.
- [25] Y. M. Shnir. *Topological and Non-Topological Solitons in Scalar Field Theories*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2018. ISBN: 9781108429917. DOI: [10.1017/9781108555623](https://doi.org/10.1017/9781108555623).
- [26] S R Woodford e I V Barashenkov. «Stability of the Bloch wall via the Bogomolnyi decomposition in elliptic coordinates». En: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 41.18 (abr. de 2008), pág. 185203. DOI: [10.1088/1751-8113/41/18/185203](https://doi.org/10.1088/1751-8113/41/18/185203). URL: <https://doi.org/10.1088/1751-8113/41/18/185203>.
- [27] N. J. Zabusky y M. D. Kruskal. «Interaction of “Solitons” in a Collisionless Plasma and the Recurrence of Initial States». En: *Physical Review Letter* 15 (6 ago. de 1965), págs. 240-243. DOI: [10.1103/PhysRevLett.15.240](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.15.240). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.15.240>.