



**VNiVERSiDAD
D SALAMANCA**

CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

TRABAJO FIN DE GRADO

GRADO EN FÍSICA

Estabilidad de órbitas para potenciales gravitacionales modificados

Autor

Roberto del Rey Garrido

Dirigido por

Dario Bettoni

Ivan de Martino

Facultad de Ciencias

Curso académico 2022-23

Enero de 2023

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Física, Facultad de Ciencias, Universidad de Salamanca, enero de 2023

Título: Estabilidad de órbitas para potenciales gravitacionales modificados

Autor: Roberto del Rey Garrido

Dirigido por: Dario Bettoni, Ivan de Martino

Curso académico: 2022/23

Firma del autor:



VNiVERSiDAD
D SALAMANCA

CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Facultad D Ciencias
VNiVERSiDAD
D SALAMANCA



Certificado del/los tutor/es TFG

D./Dña. Dario Bettoni y Ivan de Martino, profesor/a del
Departamento de Física Fundamental de la Universidad de Salamanca,

HACE/N CONSTAR:

Que el trabajo titulado
“ Estabilidad de órbitas para potenciales gravitacionales modificados ”, que se presenta, ha sido
realizado por Roberto del Rey Garrido, con DNI **** 4684R y
constituye la memoria del trabajo realizado para la superación de la asignatura Trabajo
de Fin de Grado en Física en esta Universidad.

Salamanca, 10 de enero de 20 23

Fdo.: _____

Estabilidad de órbitas para potenciales gravitacionales modificados

Roberto del Rey Garrido, Salamanca, enero de 2023

Resumen

El modelo de concordancia Λ CDM recurre a la energía oscura para explicar la expansión acelerada del Universo. A pesar de los éxitos de este modelo, las discrepancias observacionales que presenta en la escala galáctica y subgaláctica y el desconocimiento acerca de la naturaleza de la energía oscura justifican la búsqueda de modelos alternativos como las teorías de gravedad modificada. En este trabajo se han estudiado los efectos que tendría una modificación al potencial gravitacional de Newton en la precesión y los parámetros de la órbita de un sistema astrofísico binario en el límite de campo débil. Para ello se han empleado métodos analíticos y numéricos, obteniendo estos parámetros para un potencial gravitacional genérico utilizando un enfoque cuasi-Newtoniano, y se ha particularizado más tarde para el potencial de Yukawa, corrección que surge naturalmente en modelos de gravedad $f(R)$. Se ha mostrado que bajo ciertas condiciones para el alcance y la intensidad de esta corrección pueden obtenerse órbitas keplerianas con movimientos de precesión. Además, se han podido acotar los valores del parámetro de intensidad de la corrección de Yukawa en un rango de $[1,798; 1,822] \times 10^{-7}$ para un alcance del potencial aproximado de $\lambda = 4500$ AU. Se han aplicado estos valores a nuestra expresión analítica de la precesión para comparar nuestros resultados con los resultados predichos por la Relatividad General.

Palabras clave: materia oscura, modelo Λ CDM, gravedad modificada, gravedad $f(R)$, problema de los dos cuerpos, órbita kepleriana.

Orbital stability for modified gravitational potentials

Roberto del Rey Garrido, Salamanca, January 2023

Abstract

The Λ CDM concordance model relies on dark energy to explain the accelerating expansion of the Universe. Despite the accomplishments of this model, its observational discrepancies on the galactic and subgalactic scales and the unknown nature of dark energy justify the search for alternative models such as the modified gravity theories. In the present project, the effects that a modification on the Newtonian gravitational potential would have on precession and orbit parameters of a binary astrophysical system on the weak field limit have been studied. Therefore, analytical and numerical methods have been employed, obtaining these parameters for a generic gravitational potential using a quasi-Newtonian approach, later particularized for the Yukawa potential, a correction that arises naturally in $f(R)$ -gravity models. It has been shown that under certain conditions on the scale length and strength of this correction, Keplerian orbits with precession motions can be obtained. Furthermore, bounds on the strength of the Yukawa correction have been placed in the range $[1.798; 1.822] \times 10^{-7}$ for an approximated scale length value of $\lambda = 4\,500$ AU. These values have been applied to our analytical expression of the precession to compare our results with the results predicted by General Relativity.

Keywords: dark matter, Λ CDM model, modified gravity, $f(R)$ -gravity, two-body problem, Keplerian orbit.

LISTA DE ACRÓNIMOS

A continuación se presenta la lista de acrónimos y abreviaturas utilizadas en el documento:

AQUAL	:	<i>A QUAdratic Lagrangian (Theory)</i> , (Teoría de) Lagrangiano Cuadrático
ATLAS	:	<i>A Toroidal LHC ApparatuS</i> , Aparato Toroidal del LHC
BEC	:	<i>Bose-Einstein Condensate</i> , Condensado de Bose-Einstein
BTFR	:	<i>Baryonic Tully-Fisher Relation</i> , Relación Bariónica Tully-Fisher
CCP	:	<i>Cups-Core Problem</i> , Problema <i>Cups-Core</i>
CDM	:	<i>Cold Dark Matter</i> , Materia Oscura Fría
CMB	:	<i>Cosmic Microwave Background</i> , Radiación de Fondo de Microondas
CMS	:	<i>Compact Muon Solenoid</i> , Solenoide Compacto de Muones
COBE	:	<i>Cosmic Background Explorer</i> , Explorador del Fondo Cósmico
DM	:	<i>Dark Matter</i> , Materia Oscura
dSph	:	<i>Dwarf Spheroidal (satellite galaxy)</i> , (Galaxia satélite) Enana Esferoidal
FDM	:	<i>Fuzzy Dark Matter</i> , Materia Oscura Difusa
GR	:	<i>General Relativity</i> , Relatividad General
HDM	:	<i>Hot Dark Matter</i> , Materia Oscura Caliente
Λ CDM	:	Λ - <i>Cold Dark Matter</i> , Λ -Materia Oscura Fría
LHC	:	<i>Large Hadrons Collider</i> , Gran Colisionador de Hadrones
LLR	:	<i>Lunar Laser Ranging</i> , Rastreo Láser Lunar
LSS	:	<i>Large Scale Structure</i> , Estructura a Gran Escala
MAGIX	:	<i>MAinz Gas Injection Target EXperiment</i> , Experimento de Inyección de Gas de Maguncia
MDAR	:	<i>Mass Discrepancy Acceleration Relation</i> , Relación de Aceleración de la Discrepancia de Masas
MESA	:	<i>Mainz Energy-recovering Superconducting Accelerator</i> , Acelerador Superconductor de Recuperación de Energía de Maguncia
MOG	:	<i>Modified Gravity</i> , Gravedad Modificada
MOND	:	<i>Modified Newtonian Dynamics</i> , Dinámica Newtoniana Modificada
MSP	:	<i>Missing Satellites Problem</i> , Problema de los Satélites Ausentes
PSP	:	<i>Planes of Satellite Galaxies</i> , Planos de las Galaxias Satélite
QCD	:	<i>Quantum Chromodynamics</i> , Cromodinámica Cuántica
RAR	:	<i>Radial Acceleration Relation</i> , Relación de Aceleración Radial
SH0ES	:	<i>Supernova and H_0 for the Equation of State</i> , Supernova y H_0 para la Ecuación de Estado
SIDM	:	<i>Self-Interacting Dark Matter</i> , Materia Oscura Auto-Interactiva
SLAC	:	<i>Stanford Linear Accelerator Center</i> , Centro del Acelerador Lineal de Stanford
SM	:	<i>Standard Model (of particle physics)</i> , Modelo Estándar (de la física de partículas)
STVG	:	<i>Scalar-Tensor-Vector Gravity</i> , Gravedad Escalar-Tensor-Vector
TBTF	:	<i>Too-Big-To-Fail</i> , Demasiado Grande Para Fracasar
TeV S	:	<i>Tensor-Vector-Scalar (Gravity)</i> , (Gravedad) Tensor-Vector-Escalar
WDM	:	<i>Warm Dark Matter</i> , Materia Oscura Templada
WMAP	:	<i>Wilkinson Microwave Anisotropy Probe</i> , Sonda de Anisotropía de Microondas Wilkinson

Índice general

Resumen	I
Abstract	III
Introducción	1
1. Modelo cosmológico estándar y modelo de materia oscura fría	3
1.1. Visión general del modelo Λ CDM	4
1.2. Materia oscura fría	6
1.3. Alternativas a la materia oscura fría	10
1.4. Conclusiones	15
2. Modelos de gravedad modificada	17
2.1. Restricciones del Sistema Solar a las teorías de gravedad modificada	17
2.2. Potencial de Yukawa	18
2.3. Conclusiones	20
3. Ecuaciones fundamentales del problema de los dos cuerpos	23
3.1. Caso Newtoniano	23
3.2. Caso del potencial genérico	25
3.3. Particularización para el potencial de Yukawa	29
3.4. Conclusiones	30
4. Análisis y discusión de los resultados para el potencial de Yukawa	33
Conclusiones	37
<i>Conclusions</i>	39
Bibliografía	41

Introducción

Las evidencias provenientes de supernovas y otras observaciones del Cosmos apuntan a que el Universo se está expandiendo aceleradamente. A día de hoy, este fenómeno sigue sin una explicación fundamental satisfactoria. El paradigma actual de la cosmología, cimentado en la Relatividad General, explica este fenómeno recurriendo a la energía oscura, que supondría, según las evidencias observacionales, en torno al 68% de la densidad de masa-energía del Universo y tendría un comportamiento equivalente al de un fluido de presión negativa, lo que causaría la expansión acelerada. Del porcentaje restante de masa-energía, alrededor de un 30% correspondería a la materia oscura, causante de la formación de pozos de potencial en los que la materia bariónica (a la que tan solo le correspondería cerca de un 2% de la densidad de masa-energía del Universo) se ha ido acumulando hasta formar las estructuras luminosas observables. Esta componente oscura no emitiría ningún tipo de radiación electromagnética, por lo que los numerosos intentos de su búsqueda se basan en su interacción gravitatoria. Sin embargo, actualmente no existen observaciones directas de esta componente del Universo, por lo que su naturaleza fundamental es aún desconocida.

Ante este problema surgen explicaciones alternativas a la energía oscura, como la extensión de la teoría de la Relatividad General cuyos efectos se extienden, en el límite adecuado, a modificaciones de las leyes gravitacionales de Newton. Una teoría de este tipo supondría la existencia de una nueva fuerza fundamental que actúa de forma universal sobre las partículas llamada quinta fuerza, de manera que la interacción gravitatoria a grandes distancias sería más intensa de lo que indicaba la mecánica clásica. De esta forma podrían explicarse la inflación cósmica del Universo temprano, así como la expansión del Universo actual, sin necesidad de recurrir a las componentes oscuras, sino tratando la Relatividad General como una aproximación válida para curvaturas pequeñas del espacio-tiempo.

El objetivo de este proyecto será el estudio de los efectos de un potencial gravitacional modificado sobre los parámetros de la órbita de un sistema astrofísico binario en el límite de campo débil, así como sobre la precesión de esta órbita, utilizando para ello métodos teóricos y numéricos. En el Capítulo 1 se dará una visión general tanto del modelo cosmológico Λ CDM como de la materia oscura fría (CDM), introduciendo sus pilares fundamentales, las pruebas observacionales que los sustentan y los problemas y discrepancias que presentan. Además, se introducirán modelos de materia oscura alternativos a la CDM, así como modelos de gravedad modificada que eviten recurrir a la materia oscura. En el Capítulo 2 se expondrán más en detalle los modelos de gravedad modificada, presentando las restricciones que las observaciones del Sistema Solar aportan sobre ellos. Se detallará especialmente sobre la gravedad $f(R)$ y el potencial de Yukawa a la que ésta da lugar. Las ecuaciones fundamentales del problema de los dos cuerpos se presentarán en el Capítulo 3, donde se obtendrán los parámetros de la órbita para el caso newtoniano, así como la precesión, para posteriormente abordar el problema para un potencial gravitatorio genérico. A continuación, se particularizará para el potencial de Yukawa, cuyos parámetros podremos acotar mediante el estudio de la precesión de la órbita. Finalmente, en el Capítulo 4 se discutirán los resultados obtenidos y se expondrán las conclusiones finales.

Modelo cosmológico estándar y modelo de materia oscura fría

Los primeros indicios de la existencia de materia oscura llegaron en la década de los treinta del siglo XX. En 1932, a partir del estudio de la dinámica estelar de la Vía Láctea, J. H. Oort encontró una discrepancia de hasta un factor de 2 entre el número de estrellas calculado y el número de estrellas visibles [1]. En 1933, durante el estudio del cúmulo de galaxias de Coma, F. Zwicky encontró una nueva discrepancia, esta vez entre el valor observado de la velocidad de dispersión de ocho galaxias de este cúmulo, de unos 1000 km/s, y la esperada a partir del teorema del virial, de unos 80 km/s [2]. Estas discrepancias suponían la presencia de una gran masa invisible, que en un primer lugar se asoció a estrellas o gases indetectables [3], naciendo así el problema de la materia oscura que dura hasta nuestros días.

No fue hasta la década de los setenta cuando la incógnita de la materia oscura fue ampliamente reconocida como uno de los mayores problemas sin resolver de la astrofísica, cuando V. C. Rubin y W. K. Ford midieron la curvatura de rotación de la galaxia de Andrómeda (M31) de hasta 110 minutos de arco del centro galáctico, estimando una relación masa-luz de $(13 \pm 0.7) M_{\odot}/L_{\odot}$ ¹ en $R = 24$ kpc, lo que corresponde a una masa total de $M = (1.85 \pm 0.1) \times 10^{11} M_{\odot}$ [4]. Al mismo tiempo, el estudio de la línea de emisión de 21 cm del hidrógeno neutro indicaba que las curvas de rotación de las galaxias espirales decaía para radios grandes más lentamente de lo esperado cuando la mayoría de la masa de la galaxia se concentra en la componente ópticamente luminosa [5]. Estos resultados evidenciaron que las densidades de muchas galaxias eran muy uniformes incluso en localizaciones alejadas del bulbo galáctico, en contra de lo esperado, lo que sugería un dominio de la materia oscura en estas galaxias.

En las décadas posteriores los distintos intentos por resolver el misterio de la materia oscura siguieron caminos muy diversos. Una de estas propuestas planteaba que la materia oscura podía tener su origen en partículas aún desconocidas, bariónicas o no bariónicas. La búsqueda de estas partículas sigue su curso a día de hoy, basada en métodos de detección tanto directos como indirectos. Tras una amplia búsqueda teórica se ha postulado la existencia de diversos candidatos a materia oscura, pero ninguno de ellos ha sido detectado de manera directa, y los detectados de manera indirecta han sido muy cuestionados [3]. Alternativamente, la explicación al enigma de la materia oscura podría tener un origen gravitacional. Esto supondría la necesidad de una modificación en la teoría de la gravedad que explicase la extraña fenomenología que hasta ahora se había asociado a la materia oscura. En esta dirección fue propuesta en 1983 la Dinámica Newtoniana Modificada (MOND), que presentaba una modificación de la ley de la gravedad de Newton [6]. Desde entonces distintos modelos gravitatorios han sido propuestos, sin que ninguno de ellos logre explicar satisfactoriamente el marco general de observaciones atribuidas a la materia oscura.

¹Masa solar, $M_{\odot} = (1,988470,00007) \times 10^{30}$ kg, Luminosidad solar, $L_{\odot} = (3,82750,0014) \times 10^{26}$ W.

En 1982, J. Peebles propuso la teoría de la Materia Oscura Fría (CDM), en la que la materia oscura consistía en partículas masivas que interactuaban muy débilmente con la materia ordinaria y que se desacoplaron del plasma primigenio cuando eran no relativistas [7]. Esta teoría ha evolucionado, con la inclusión de la constante cosmológica Λ , hasta el actual modelo Λ -Cold Dark Matter (Λ CDM), muy aceptado por astrónomos y astrofísicos, convirtiéndose en el modelo cosmológico estándar actual.

1.1. VISIÓN GENERAL DEL MODELO Λ CDM

El modelo Λ CDM o modelo de concordancia es el actual modelo cosmológico estándar. Este modelo fue establecido a partir de múltiples pruebas observacionales, principalmente la radiación de fondo de microondas (CMB), las supernovas de tipo Ia y las evidencias de la estructura a gran escala del Universo. [8].

Este modelo acepta que la expansión acelerada del Universo, que comenzó hace unos cinco mil millones de años, es producida por la constante cosmológica Λ , una contribución de la energía oscura que da lugar a una fracción de densidad de energía de $\Omega_\Lambda = 0.686 \pm 0.020$, expresada en unidades de la densidad crítica $\rho_c = 3H_0^2/8\pi G$ [3]. Es decir, entorno a un 68% de la densidad de energía del Universo presente es atribuida a la energía oscura. Esta constante Λ se asemeja a un fluido con una ecuación de estado $p = -\rho$ (siendo p la presión y ρ la densidad del fluido). Por otro lado, la contribución de la materia a la densidad total de materia-energía del Universo se divide en la densidad de materia oscura y densidad de materia bariónica, siendo la primera de éstas la mayor, con una fracción de $\Omega_{DM} = 0.314 \pm 0.020$ [3]. La materia bariónica (materia ordinaria), representa una densidad de energía de $\Omega_b H_0^2 = 0.02207 \pm 0.00033$, siendo H_0 la constante de Hubble en unidades de $100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ [3]. La densidad de energía total del Universo se puede escribir como $\Omega_{tot} = \Omega_b + \Omega_{DM} + \Omega_\Lambda = 1 - \Omega_k$, donde Ω_k da la curvatura del Universo. Conociendo todas las demás componentes llegamos a $\Omega_k H_0^2 = -0.037^{+0.044}_{-0.042}$ [3], curvatura que hace al Universo espacialmente plano, ya que $\Omega_{tot} \sim 1$. Esta geometría plana ha sido confirmada observacionalmente [8], por lo que el modelo de concordancia fija $\Omega_k = 0$.

Fijado Ω_k , quedan como parámetros libres Ω_b y Ω_{DM} , a los que hay que añadir la constante de Hubble H_0 , que describe la evolución del Universo; la amplitud del espectro de potencias primigenio A_S ; su índice espectral n_S y la profundidad óptica de la recombinación de la dispersión Thomson, τ . El modelo Λ CDM es, por tanto, un modelo de 6 parámetros libres $\{\Omega_b, \Omega_{DM}, H_0, A_S, n_S, \tau\}$ que describen las propiedades globales del Universo y que se ajustan a las observaciones [8]. Otro parámetro que en ocasiones es fijado, debido a la alta precisión con la que ha sido medido, es la temperatura a $z = 0$ del CMB, $T_0 = 2.7260 \pm 0.0013 \text{ K}$ [9].

1.1.1. Pruebas observacionales del modelo Λ CDM

Si el actual modelo cosmológico estándar es conocido como "modelo de concordancia" es, precisamente, por el consenso entre distintas medidas independientes de las observaciones que lo respaldan. El modelo Λ CDM es fruto de la gran cantidad de datos recogidos que, gracias a los avances tecnológicos de las últimas décadas, son más precisos que nunca, obteniendo pruebas observacionales de orígenes muy diversos. A continuación se expondrán las principales pruebas que respaldan este modelo.

- **Radiación de fondo de microondas (CMB):** a día de hoy el CMB es la prueba observacional que más restricciones aporta al modelo Λ CDM. En 1992, el Explorador de Fondo Cósmico (COBE) descubrió las anisotropías del CMB [10], que tienen una amplitud de 10^{-5} con respecto a la temperatura media del CMB. Desde entonces se han diseñado distintos experimentos para medir y caracterizar esas anisotropías, como el satélite *WMAP* de la NASA que observó el cielo completo con una resolución angular de 15 minutos de arco [11] y el satélite *Planck* de la ESA que mejoró esta observación, con una resolución

angular de 5 arcos de minuto y que, además, mejoró el espectro de frecuencias cubierto [12]. En la Figura 1.1 se muestra un mapa de temperaturas multifrecuencial del CMB.

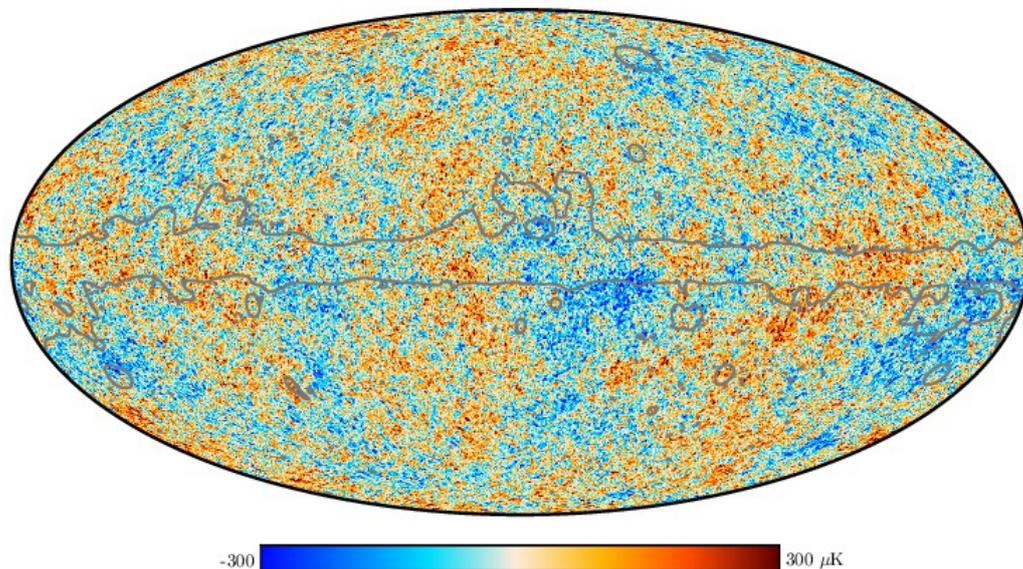


Figura 1.1. Mapa de temperaturas del fondo de microondas obtenida por la observación multifrecuencial del satélite *Planck* de la ESA proyectado a coordenadas galácticas, procesado por el método SMICA. Imagen tomada de [12].

- **Estructura a gran escala del Universo (LSS):** las perturbaciones en la densidad dadas en la etapa de inflación cósmica, que se congelaron en el CMB (unos 400.000 años después del *Big Bang*), evolucionaron hasta nuestros días, dando forma a las distribuciones de masa visibles en el Universo cercano. La distribución espacial tridimensional de la estructura a gran escala del Universo a bajos corrimientos al rojo es muy sensible a la energía oscura. Comparar las mediciones de estos corrimientos al rojo con las mediciones del CMB implica extrapolar las condiciones iniciales del Universo hace 13 mil millones de años a las del Universo presente. Hoy en día los fenómenos observables que más información aportan en esta dirección son la formación y caracterización de cúmulos de galaxias [8].
- **Supernovas tipo Ia:** este tipo de supernovas surgen exclusivamente en sistemas binarios, con la explosión termonuclear de una enana blanca. Aunque no está claro qué tipo de sistemas binarios forman estas supernovas se suele considerar que las que acompañan a la enana blanca son estrellas de la secuencia principal, gigantes rojas o estrellas de helio [13]. Los picos de luminosidad de la banda V de estas supernovas permiten medir con gran precisión la relación luminosidad-distancia. Esta precisión tiene importantes aplicaciones cosmológicas, ya que la relación luminosidad-distancia es sensible a los parámetros de densidad Ω_b , Ω_{DM} y Ω_Λ del modelo Λ CDM, permitiendo también estimar la constante de Hubble H_0 [14].

1.1.2. Problemas del modelo Λ CDM

Como hemos visto hasta ahora, el modelo Λ CDM explica satisfactoriamente las propiedades generales del Universo con el uso de 6 parámetros, ajustándose a las múltiples observaciones y mediciones y siendo ampliamente aceptado. No obstante, el modelo recurre a la existencia de dos entidades, la energía oscura y la materia oscura, a día de hoy desconocidas. Cabe también destacar que otro de los pilares de este modelo, la inflación cósmica, es también un

fenómeno aún rodeado de incógnitas. A continuación se mencionarán algunos de los principales problemas abiertos con los que lidia el modelo cosmológico estándar.

Una de las grandes discrepancias que rodean al modelo Λ CDM tiene que ver con el valor de la constante de Hubble, H_0 . Como hemos visto anteriormente, las supernovas de tipo Ia permiten tomar medidas cosmológicas muy precisas. Uno de los principales programas que trabaja en esta dirección es la colaboración SH0ES. El valor de H_0 del Universo tardío obtenido por este programa es de $H_0 = 74.03 \pm 1.42 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, que supone una discrepancia de 4.3σ con el valor obtenido para el Universo temprano por el satélite *Planck*, de $H_0 = 67.4 \pm 0.5 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ [15], respaldadas por otros programas de estudio de las mediciones del CMB.

Otra de las más importantes discrepancias del modelo es la tensión S_8 . Este parámetro se define como $S_8 \equiv \sigma_8 \sqrt{\Omega_m/0.3}$ y es el parámetro que modula la amplitud de las fluctuaciones de densidad del Universo. Las medidas derivadas de lentes gravitacionales dan para este parámetro un valor de $S_8 = 0.745 \pm 0.039$, que concuerda con distintas observaciones de bajos corrimientos al rojo, pero supondrían una tensión de 2.3σ con los valores observados por el satélite *Planck*, de $S_8 = 0.823 \pm 0.013$ [16], a su vez respaldados por otras observaciones, como las de los telescopios ACT o SPT.

A estas tensiones en el modelo habría que añadir otras como la tasa de crecimiento de las perturbaciones cosmológicas, para la cuál las medidas observacionales de lentes gravitacionales débiles, cúmulos de galaxias y corrimientos al rojo, dan valores menores de los esperados por los parámetros del modelo Λ CDM [17]; el problema del litio, elemento que en estrellas pobres en metales ha sido encontrado en cantidades 4 veces menores de lo esperado por el modelo Λ CDM [18] o las distintas anomalías que presenta la anisotropía del CMB. Todas estas tensiones y anomalías justifican la búsqueda de una nueva física más allá del modelo Λ CDM. Sin embargo, cualquier nuevo modelo debe solventar estas tensiones manteniendo las certezas que aporta el modelo de concordancia y que sí están respaldadas por las evidencias observacionales.

1.2. MATERIA OSCURA FRÍA

Como se explicó al principio de este capítulo, la materia oscura fría fue postulada por J. Peebles en 1982. La materia oscura caliente (HDM), postulada al mismo tiempo de manera independiente y que estaría formada por partículas ultrarrelativistas no bariónicas, no logra explicar satisfactoriamente fenómenos como la formación de galaxias, algo que sí hace la CDM, que tendría velocidades mucho menores a la velocidad de la luz. Por tanto podríamos definir la CDM como partículas masivas no bariónicas con velocidades térmicas despreciables en comparación con el flujo de Hubble ² y con interacciones no gravitatorias de intensidades mucho menores a la interacción débil [19]. Es por estas bajas velocidades por lo que recibe el nombre de materia oscura *fría*.

1.2.1. Pruebas observacionales de la CDM:

- Curvas de rotación de las galaxias:** la curva de rotación o curva de velocidad de una galaxia es la velocidad de rotación de las estrellas y gases de esa galaxia como función de su distancia al centro galáctico. Estas curvas de rotación se obtienen normalmente de la combinación de las observaciones de la línea de 21 cm del hidrógeno con fotometría óptica superficial. Según lo esperado por la mecánica de Newton-Kepler, si las galaxias tienen una distribución de masa acorde con la masa observada (gases y estrellas), estas curvas deberían decaer a largas distancias. Sin embargo, las observaciones muestran un comportamiento plano, manteniendo la curva constante para largas distancias, como se

²El flujo de Hubble describe el desplazamiento de las galaxias debido únicamente a la expansión del Universo.

muestra en la Figura 1.2. Esto es incompatible con la idea de que la masa dominante de la galaxia sea la masa central del material lumínico observable.

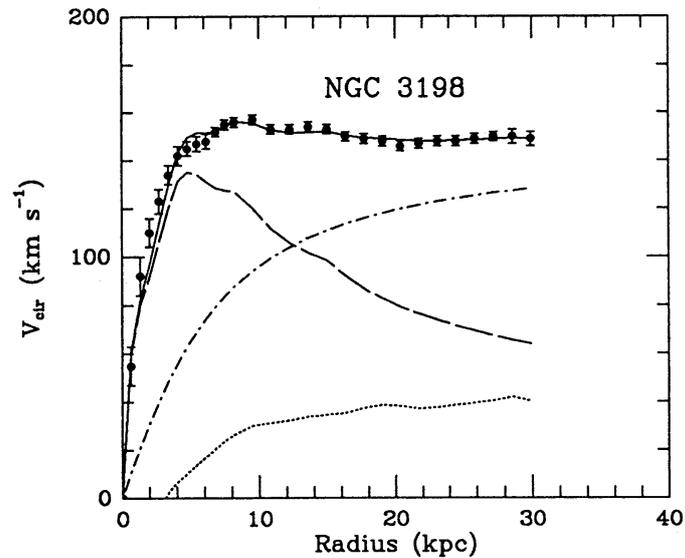


Figura 1.2. Curva de rotación de la galaxia espiral NGC 3198, línea superior. La línea de puntos corresponde a la contribución del gas, la línea de trazos a la contribución del disco y la línea de trazos y puntos a la contribución del halo. Figura tomada de [20].

En la dinámica newtoniana la velocidad circular es $v(r) = \sqrt{GM(r)/r}$. El comportamiento esperado por la mecánica clásica sería una relación $v(r) \propto r^{-1/2}$ en las regiones exteriores, donde la densidad de materia luminosa cae drásticamente. El hecho de que esta velocidad se mantenga constante implica la existencia de una masa con $M(r) \propto r$. La respuesta que da la CDM a esta discrepancia es la existencia de un halo esferoidal de materia oscura en el que la galaxia se encuentra incrustada [20].

- **Cúmulos de galaxias:** como se explicó en la introducción de este capítulo, una de las primeras evidencias de la existencia de materia oscura se obtuvo mediante el estudio del cúmulo de galaxias Coma (F. Zwicky, 1933), donde se encontró una proporción masa-luminosidad (M/L) que excedía en dos órdenes de magnitud al valor esperado [2]. Hoy en día la mayoría de mediciones dinámicas relacionan esta proporción con la contribución material a la densidad de energía como $\Omega_M = (M/L)/1000$, obteniendo un valor de $\Omega_M \sim 0.2 - 0.3$ para escalas de cúmulos galácticos [21]. La masa bariónica puede ser determinada mediante el teorema del virial, mediante lentes gravitacionales débiles o mediante el estudio del espectro de emisiones de rayos X. Cuando se calcula la temperatura del cúmulo para la masa bariónica medida a través de estos métodos se obtiene una discrepancia de 10 keV con respecto a la temperatura medida, sugiriendo la presencia de materia oscura en los cúmulos de galaxias [22].
- **Simulaciones de N-Cuerpos:** la gran cantidad de procesos que intervienen en la formación de estructuras a gran escala del Universo hacen que el estudio de la LSS sea especialmente complejo. El desarrollo de la computación desde la década de los 90 hasta nuestros días ha permitido hacer predicciones y recreaciones muy precisas de la estructura interna de los halos de materia oscura a partir de simulaciones computacionales. A día de hoy estas simulaciones permiten recrear los efectos de procesos astrofísicos complejos como la dinámica de gases o las transferencias de radiación. Las actuales simulaciones de N-Cuerpos señalan en la dirección de la existencia de materia oscura con un perfil ‘universal’, es decir, con la misma forma en cualquier época, sea cual sea su masa y su espectro de potencias [23].

- **Otras evidencias a escala subgaláctica a intergaláctica:** como ya mencionamos anteriormente, la primera evidencia de materia oscura fue la inconsistencia que encontró J. H. Oort entre el número de estrellas visible y el potencial gravitatorio de su distribución, llamada *discrepancia de Oort*. Cabe mencionar también otras evidencias como las lentes gravitacionales débiles de galaxias lejanas, la modulación débil de lentes gravitacionales fuertes en torno a galaxias elípticas masivas o la velocidad de dispersión de galaxias enanas esferoidales.

1.2.2. Problemas de la CDM

A pesar de su éxito a escala cosmológica, el modelo CDM encuentra problemas a escala galáctica. Estas dificultades están relacionadas, principalmente, con la distribución de materia oscura en los halos galácticos y con las propiedades de las galaxias enanas. Mencionaremos a continuación algunos de los principales problemas que presenta el modelo.

- **Curvas de rotación de galaxias de disco:** como ya hemos mencionado, las curvas de rotación de las galaxias son una de las más importantes evidencias observacionales en las que se sostiene la CDM. Un análisis detallado de una muestra de más de dos mil galaxias de disco cuantifica la correlación entre materia luminosa y oscura, y propone la existencia de una curva de rotación universal [24]. Además, otras evidencias (BTFR, MDAR y RAR) cuantifican la discrepancia entre la cantidad de masa estimada por la emisión electromagnética de la galaxia y la masa que debería tener para describir su cinemática, mostrando una estrecha correlación entre las cantidades cinemáticas de la galaxia y sus cantidades asociadas a su componente bariónica [3]. En el modelo CDM las estructuras cósmicas se forman jerárquicamente mediante fusiones estocásticas, por lo que cabría esperar una gran dispersión. Sin embargo, la dispersión intrínseca que resulta de estas observaciones es muy pequeña. Esta baja dispersión implica que el halo de materia oscura, que representaría entorno a un 90% de la masa de la galaxia, ajusta sus propiedades dinámicas a las del disco luminoso, que tan solo supone un 10% de la masa de la galaxia. Esta fuerte correlación entre la materia luminosa de la galaxia y su dinámica desafía el paradigma de la CDM.
- **Problema *cusp-core* (CCP):** las simulaciones de N-Cuerpos sin colisiones del modelo CDM muestran que los halos de materia oscura tienen un perfil de densidad divergente, siguiendo una ley de potencias abrupta (comportamiento de tipo *cusp*). Para radios pequeños, las simulaciones indican que esta densidad seguiría una relación $\rho \sim r^{-1}$ [23], con un pico para regiones centrales (radios pequeños) y un decaimiento para regiones alejadas (radios grandes). Sin embargo, esta predicción de las simulaciones parece no coincidir con las observaciones de galaxias enanas, uno de los tipos de galaxia que tendría una mayor fracción de materia oscura con respecto a su materia bariónica. Las múltiples observaciones señalan que estas galaxias deben tener un perfil de densidad con un decaimiento mucho más suave en sus zonas centrales (comportamiento de tipo *core*). Este comportamiento es difícilmente explicable en el contexto de la CDM sin recurrir a efectos de marea o a la retroalimentación bariónica [25].
- **Problema de los satélites ausentes (MSP):** la función de masa estelar derivada para galaxias del Grupo Local (entre las que se encuentra la Vía Láctea) es significativamente menos abrupta para masas pequeñas que la esperada para los halos de materia oscura en el modelo CDM. En diferentes simulaciones sin colisiones de la Vía Láctea dentro del modelo CDM se predicen, dentro de los halos de materia oscura, miles de subhalos con masas suficientemente grandes ($M \gtrsim 10^7 M_\odot$) como para albergar galaxias [3]. No obstante, esta cifra es unas veinte veces superior al número de satélites observados en las proximidades de la Vía Láctea y Andrómeda (M31). Aunque a día de hoy se siguen

descubriendo galaxias satélite en el entorno de la Vía Láctea y previsiblemente se seguirán descubriendo, es muy improbable que se lleguen a encontrar los miles de satélites que predicen las simulaciones. Algunas posibles explicaciones al MSP sugieren que los satélites ausentes podrían identificarse con las Nubes de Alta Velocidad observadas en el Grupo Local o que algún proceso físico, como el viento de partículas generado por algunas supernovas, pudo tener algún papel en la etapa temprana de la formación de galaxias [26].

- **Problema *too-big-to-fail* (TBTF):** las simulaciones de halos de materia oscura de la Vía Láctea muestran una discrepancia con las velocidades circulares estimadas, que ponen de manifiesto el hecho de que los subhalos más masivos de la galaxia son demasiado densos como para albergar las galaxias satélite dSph más brillantes ($L_V > 10^{15} L_\odot$), galaxias gobernadas por materia oscura [3]. Este resultado supondría que los subhalos más masivos y densos son oscuros, mientras que la materia más brillante se encuentra en halos mucho menos masivos. Sin embargo, esta explicación traería consigo nuevas contradicciones, ya que se espera que los subhalos más grandes sean capaces de retener gases y formar estrellas. Es decir, estos subhalos son *demasiado grandes para fracasar* en la formación de estrellas, por lo que deberían albergar enanas observables que no han sido encontradas, lo que hace que esta explicación tampoco resulte satisfactoria. A diferencia del MSP, el problema TBTF no tiene que ver con la cantidad de satélites no observados sino con su distribución de masa, por lo que es un problema independiente de la relación entre la masa del halo y la masa estelar. Aunque originalmente fue un problema de la Vía Láctea, el estudio de otros subhalos muestra que el problema aparece también en la galaxia M31, e incluso en galaxias más allá del Grupo Local [27, 28]. Si considerásemos que la masa del halo de materia oscura de la Vía Láctea valiese el doble de lo estimado, las discrepancias del TBTF se dispararían. Sin embargo, no existen errores sistemáticos en las medidas de materia oscura que justifiquen esta duplicación. Además, esto solo solucionaría el problema TBTF en la Vía Láctea, pero no en M31 ni el resto de galaxias en los que se ha detectado. Otra solución pasarían por los efectos de marea del disco bariónico de la galaxia principal, aunque la solución más viable a día de hoy sería recurrir a la física bariónica.
- **Problema de los planos de las galaxias satélite (PSP):** las órbitas de las galaxias satélite de la Vía Láctea, M31 y Centaurus A (NGC 5128), cuyas medidas son muy precisas, tienden a estar alineadas en una disposición muy plana, guardando además cierta correlación entre sus magnitudes cinéticas. Sin embargo, las simulaciones del modelo CDM muestran que esta distribución plana y correlación cinética son altamente inusuales. A diferencia de algunos de los problemas comentados hasta ahora, el problema PSP no puede ser solventado mediante la incorporación de la retroalimentación bariónica, ya que estas galaxias satélite están a distancias muy grandes en comparación al disco bariónico de la galaxia principal [3]. Aunque han sido propuestas diferentes soluciones, ninguna de ellas ha generado consenso, ya que o no reproducían fielmente las observaciones o se basaban en premisas poco sólidas.

1.2.3. Búsqueda de CDM en aceleradores de partículas

A día de hoy son muchas las dificultades a las que se enfrenta la búsqueda de materia oscura en aceleradores de partículas. Aún se desconoce si la CDM interactúa con la suficiente intensidad con la materia ordinaria como para ser producida mediante la colisión de partículas del Modelo Estándar (SM). Al no ser conocida la masa de las partículas buscadas tampoco es posible saber si la energía de centro de masas de la que se dispone en los aceleradores actualmente sería suficiente para que estos procesos estuviesen permitidos cinéticamente en

caso de que fuese posible producir estas partículas.

A pesar de estas dificultades, se han desarrollado desde hace décadas experimentos en los distintos aceleradores de partículas en búsqueda de DM. El amplio conocimiento del SM y de sus distribuciones diferenciales permiten detectar con precisión cualquier mínima alteración en el espectro de la energía perdida, restringiendo las predicciones que se puedan hacer de los diferentes modelos de CDM. Cualquier experimento diseñado para detectar estas partículas tendría que basarse en la búsqueda de una partícula estable neutra con propiedades compatibles con las observaciones cosmológicas, como la densidad de materia oscura Ω_{DM} . Por la naturaleza de la CDM, las partículas generadas no dejarían ninguna evidencia observable de su aparición, por lo que la única manera de detectarlas sería mediante una ligera alteración en el momento transversal total (llamado normalmente ‘energía perdida’). Estos estados finales son los llamados estados *monojet*. Las partículas de DM buscadas también podrían producirse en asociación con un bosón electrodébil (bosón W y bosón Z), corrientes llamadas *mono-V* [29].

Desde que el LHC entrase en funcionamiento en 2008, experimentos como el CMS o el ATLAS han buscado nuevas partículas basándose en las corrientes *monojet* y *mono-V*. Distintas reacciones con ciertos desequilibrios en las transferencias de momentos han sido analizadas en búsqueda de materia oscura creada por estos canales, como las reacciones de la forma $pp \rightarrow \chi\bar{\chi} + x$, en la que x es una corriente hadrónica, un fotón, un bosón W o un bosón Z con decaimiento leptónico. Aunque se espera que futuros experimentos sean más aclaratorios, algunos de los resultados obtenidos hasta ahora son consistentes con el SM y permiten estimar ciertos límites en la sección eficaz para una masa dada, obteniendo valores de ~ 5 GeV para reacciones dependientes de espín y de unos cientos de GeV para reacciones independientes de espín [30]. El Acelerador Lineal de Stanford (SLAC), también ha llevado a cabo diferentes experimentos en búsqueda de materia oscura, como el experimento de volcados de haz de electrones mQ , que busca partículas milicargadas que podrían tener relación con la DM o con alguna de sus anomalías. A partir de este programa se concluyó que estas partículas con cargas muy pequeñas podrían existir en la naturaleza y que serían muy sensibles a las corrientes secundarias de DM que pudieran producirse [31].

No obstante, actualmente no existen evidencias experimentales de la interacción entre materia oscura y partículas del SM. En los próximos años se llevarán a cabo nuevas búsquedas que podrían resultar más esclarecedoras, como el futuro experimento MAGIX del acelerador MESA del Instituto de Física Nuclear de la Universidad de Maguncia, actualmente en construcción.

1.3. ALTERNATIVAS A LA MATERIA OSCURA FRÍA

Como se explicó en la sección 1.2.2, aunque el modelo CDM cuenta con numerosas evidencias observacionales que lo sostienen y acierta en muchas de las predicciones hechas, especialmente a escala cosmológica, en la escala galáctica encuentra una serie de contradicciones que aún hoy no han sido solventadas. Algunas de las soluciones planteadas para estas cuestiones son difícilmente compatibles con el modelo CDM, dando pie a la búsqueda de nuevos modelos que respondan a las mismas incógnitas que éste intentaba aclarar. Surgen así distintas alternativas que señalan que la materia oscura buscada tendría una naturaleza distinta a la postulada hasta ahora. Otras alternativas sugieren una ruptura con las leyes de gravedad newtoniana. De esta manera, las anomalías observadas en la cinemática de la materia visible se explicarían mediante una modificación en la ley de la gravedad, evitando así recurrir a la existencia de la materia oscura. A continuación se introducirán algunas de las alternativas con más recorrido que buscan nuevos modelos para las partículas que conforman la materia oscura, así como modelos de gravedad modificada que intentan dar explicación a las anomalías que aparecen en la escala galáctica.

1.3.1. Otros modelos de materia oscura

- Materia oscura templada (WDM):** este modelo postula, al igual que los modelos HDM y CDM, materia oscura de contenido no bariónico pero, en lugar de partículas ultrarrelativistas (HDM) y no relativistas (CDM), estas partículas tendrían velocidades relativistas. Tendrían por tanto propiedades intermedias a los dos modelos anteriores, jugando un papel similar a la CDM en la escala cosmológica y en la formación del Universo, pero permitiendo solventar algunos de los problemas que surgían en este modelo en la escala galáctica. Estas partículas se habrían desacoplado del plasma primigenio cuando aún eran relativistas, eliminando así las fluctuaciones primitivas en la escala subgaláctica y provocando un corte en el espectro de potencias primigenio [3].

Una de las herramientas más poderosas para el estudio de este espectro de frecuencias es el bosque de Lyman- α , que es el conjunto de líneas de absorción del espectro del hidrógeno neutro que aparecen entre la transición Lyman- α y su desplazamiento al rojo en el espectro de objetos de estudio lejanos, como galaxias o cuásares. El estudio de estas líneas de absorción, junto al uso de otras herramientas como cuásares que actúan como lentes gravitacionales, han permitido dar una cota inferior a la masa de las partículas de WDM de $m_{WDM} > 3 - 5$ keV [3], variando según el historial térmico del medio intergaláctico que se asuma, basado en los estudios del bosque de Lyman- α . El principal candidato de WDM es el neutrino estéril, un hipotético tipo de neutrino que no interactuaría mediante ninguna de las interacciones fundamentales del SM salvo la interacción gravitatoria, pero sí que tomaría parte en la oscilación de neutrinos. La no observación de la línea de rayos-X del decaimiento de neutrinos estériles en el Universo temprano permite dar una cota superior a la masa de estas hipotéticas partículas, basándose en las tasas de producción actuales y no en la asunción de que toda la materia oscura esté formada por neutrinos estériles.

Este modelo aportaría soluciones a muchos de los problemas del modelo CDM mencionados anteriormente. La supresión en las perturbaciones de la densidad permitiría que la función de masa de los subhalos concordase con la cuenta del número de galaxias satélite, resolviendo así el MSP. Por otra parte, el colapso gravitacional traería consigo un comportamiento de tipo *cusp* del perfil de los halos, pero con una concentración en las regiones centrales menor a la del modelo CDM. Además, la distribución de la velocidad térmica de las partículas de WDM podría convertir este comportamiento *cusp* en uno de tipo *core*, solucionando el CCP, aunque solo parcialmente, ya que este comportamiento *core* seguiría siendo menor al necesario para explicar las observaciones. Además, una partícula de WDM con una masa en el rango de 1.5 – 2 keV reduciría la masa y la densidad de los subhalos que albergarían los halos de materia oscura de galaxias del tamaño de la Vía Láctea, lo que podría solventar el problema TBTF. Estas posibles soluciones convierten al modelo WDM en una vía de investigación interesante en la búsqueda de una explicación para la materia oscura, sin embargo, es un modelo que aún cuenta con muchas dificultades que parecen lejos de resolverse.

- Materia oscura auto-interactiva (SIDM):** la SIDM propone una materia oscura que interactúa de manera fuerte, a diferencia de lo que proponía la materia oscura fría, con una sección eficaz grande para la auto-interacción. Este tipo de modelos tienen potencial para explicar las observaciones de la estructura del Universo a pequeña escala que suponen un problema para el modelo CDM, manteniendo los éxitos de este modelo a escalas mayores. La parametrización habitual de los modelos SIDM se basa en la sección eficaz por unidad de masa σ/m , que será función o bien de la velocidad relativa v_{rel} de las partículas de materia oscura, o bien de la masa total del halo M_{Halo} , variables que están a su vez relacionadas entre sí.

Las simulaciones de halos de SIDM sin retroalimentación bariónica predicen núcleos de densidad constante en las galaxias (comportamiento *core*), resultado que no lograba recrear el modelo CDM y que dio lugar al problema *cusp-core* que, junto al MSP, fue una de las motivaciones de este nuevo modelo. Estas simulaciones indican que la SIDM solucionaría el CCP para valores de $\sigma/m > 0.1 \text{cm}^2/\text{g}$ y $M_{\text{Halo}} \sim 10^{11} M_{\odot}$ [3].

Por otro lado, a pesar de ser una de las principales motivaciones de la postulación de la SIDM, ésta no es capaz dar respuesta al MSP. Para ello, los valores típicos de $\sigma/m \sim 0.5 \text{cm}^2/\text{g}$ deberían ser superiores, valores que están muy probablemente descartados por la elipticidad medida de los halos de materia oscura, aunque este conflicto podría verse significativamente mitigado teniendo en cuenta la interacción de la SIDM con la materia bariónica. Los efectos de la materia bariónica son complicados de estudiar, ya que las simulaciones que tienen en cuenta este efecto dentro del paradigma SIDM resultan excesivamente caras. Para ello se utiliza un método de aproximación semianalítico llamado método *Jean*, que determina el perfil de densidad interno del halo suponiendo que éste es isoterma y que está en equilibrio hidrostático con la materia bariónica [32]. Los resultados de este método manifiestan la necesidad de ciertas correcciones en los modelos de SIDM debido a las discrepancias que se dan entre sus resultados y las formas de los halos que se han observado [3]. Además, la auto-interacción de estas partículas también mitigaría el problema TBTF ya que, aunque el efecto de la SIDM en la masa total de los subhalos es pequeño, sí que hace decrecer significativamente la densidad en las regiones centrales de los subhalos mas masivos

- **Materia oscura difusa (FDM):** la materia oscura difusa consistiría en bosones ultraligeros, con masas en el rango de los $10^{-23} - 10^{-20}$ eV y con longitudes de onda de De Broglie λ_{DB} del orden de unos pocos kiloparsecs. De esta forma, las estructuras y fenómenos físicos de escalas superiores a λ_{DB} se comportarían igual que lo hacían para la CDM, y sería a escalas menores que λ_{DB} donde encontraríamos diferencias. Especialmente, para una partícula de FDM de $\sim 10^{-22}$ eV de masa tendríamos halos con una masa mínima de $M_{\text{Halo}} \sim 10^7 M_{\odot}$. La FDM se considera un campo escalar real ϕ con una masa m_{ϕ} acoplada a la métrica de forma mínima. Este campo no sería masivo hasta que el Universo se enfría hasta una temperatura crítica, adquiriendo masa mediante la oscilación entorno a un mínimo de un potencial generado no perturbativamente [3].

Simulaciones a N-Cuerpos de alta resolución mostraron los núcleos de materia oscura con comportamientos cuánticos que albergaban estos halos en sus regiones internas sostenidos por la presión, con perfiles de densidad planos en sus regiones externas, lo que daría respuesta al CCP. Estos núcleos, llamados solitones, estaban rodeados por patrones de interferencia que daban lugar a fluctuaciones en las velocidades y densidades de estas partículas. Además, muestran un corte en la densidad del halo para $M_{\text{Halo}} \leq 10^{10} M_{\odot}$, lo que podría explicar el MSP. A pesar de la alta resolución de estas simulaciones, ésta no es suficiente para estudiar los efectos de la presión cuántica en la formación de estructuras de larga escala.

La viabilidad de esta alternativa está aún en duda, existiendo diversas formas de probar este modelo. Estudios del bosque de Lyman- α , de las propiedades de agrupamiento de gases calientes a grandes corrimientos al rojo, así como nuevas simulaciones hidrodinámicas pueden aportar restricciones a las propiedades de la FDM, a su espectro de potencias o a la masa del bosn del campo escalar.

- **Axiones QCD:** los axiones QCD son partículas elementales hipotéticas que fueron postuladas por la teoría Peccei-Quinn en 1977 [33] como solución al problema de la violación de CP (conjugación de carga-paridad) por parte de la interacción fuerte dentro de la cromodinámica cuántica (QCD), proponiendo la existencia de un nuevo bosón

pseudoescalar que tendría carga eléctrica nula y masa muy pequeña. Poco después de ser postulados se convirtieron en potenciales candidatos a materia oscura, ya que su densidad de energía se comportaba como la de la CDM y, además, podían haberse producido de manera abundante en el Universo temprano por mecanismos térmicos y, en su mayoría, no térmicos, como el realineamiento del vacío o el decaimiento de cuerdas axiónicas. Por otra parte, si los axiones QCD sufriesen termalización y formasen condensados de Bose-Einstein (axiones BEC), podrían explicar la discrepancia entre la distribución de momento angular observada en galaxias enanas y la predicción de la CDM, en lo que se conoce como *problema de del momento angular galáctico*. Estos axiones BEC causarían agotamiento en la densidad de materia oscura de las regiones céntricas galácticas, lo que explicaría por qué las curvas de rotación internas solo pueden reconstruirse a partir de la contribución bariónica.

Diferentes experimentos cosmológicos, astrofísicos y terrestres han restringido la masa del axión QCD, que tiene una cota inferior de $m_a \gtrsim 6 \times 10^{-6} \text{eV}$ [3]. El axión QCD tendría secciones eficaces muy pequeñas para las interacciones fuerte y débil y, por tener carga neutra, tampoco participaría en la interacción electromagnética, por lo que la interacción con la materia ordinaria sería mínima. Sin embargo, los axiones podrían autointeractuar entre sí gravitatoriamente: cuando a pequeñas escalas la presión cuántica se equilibra con la atracción gravitatoria los axiones podrían formar objetos ligados gravitatoriamente, como las estrellas de axiones.

Uno de los problemas con los que se encuentra este modelo de materia oscura es que los axiones QCD, desde el punto de vista teórico, son tratados como campos clásicos. Sin embargo, la termalización de estos axiones es un fenómeno cuántico. Además, a día de hoy aún se necesitan nuevas investigaciones que constaten si los axiones pueden solucionar los problemas de la CDM a escala galáctica.

1.3.2. Modelos de gravedad modificada

- Dinámica Newtoniana Modificada (MOND):** ante el misterio que suponían las distintas discrepancias encontradas en el Cosmos hasta la fecha, M. Milgrom propuso en 1983 una solución alternativa basada en una modificación en la ley de la gravedad [6]. Esta propuesta se basa en la hipótesis de que existe una escala de aceleración universal $a_0 \approx 1.2 \times 10^{-10} \text{m/s}^2$ por debajo de la cuál se violaría la dinámica newtoniana y por encima de la cuál las leyes de gravedad de Newton se mantendrían [3]. Según esta hipótesis, la aceleración a que sufriría una partícula de prueba en un campo gravitatorio sería $a = \nu(a_N/a_0) a_N$, donde a_N es la aceleración gravitatoria que estima la dinámica newtoniana y que estaría originada únicamente por la distribución de materia bariónica, ya que en este modelo no existiría la materia oscura; y ν es una función de interpolación que tiende a 1 cuando $a_N \gg a_0$. Esta misma modificación podría también interpretarse, no como una modificación de la ley de gravedad newtoniana, sino como una modificación de la segunda ley de Newton $F = ma$ en la que la masa inercial difiere de la masa gravitacional cuando $a_N \ll a_0$.

Un importante inconveniente de la teoría MOND es el hecho de que, en Relatividad General (GR), la aceleración está relacionada con la conexión afín $\Gamma_{\mu\nu}^\gamma$, que no es un tensor, por lo que MOND tiene dificultades para ser formulada de forma covariante. Algunos de los intentos por lograr esta formulación covariante son teorías como AQUAL, TeVeS o la teoría MOND bimétrica, que se reducen a MOND en el límite no relativista.

La dificultad en la formulación covariante de MOND no permite construir un modelo cosmológico, que es uno de los principales éxitos del modelo Λ CDM, ni cuantificar la fenomenología de las lentes gravitacionales, que es una importante prueba observacional

de la distribución de masa a gran escala. Además, aunque MOND reduciría notablemente la necesidad de recurrir a la materia oscura, no explicaría en su totalidad las discrepancias en las masas a escalas de cúmulos de galaxias y escalas superiores. Alguna de las propuestas para solucionar estos inconvenientes pasarían por un modelo híbrido, en el que se aceptase la teoría MOND a pequeñas escalas y se complementase con la presencia de materia oscura que explicase la estructura a gran escala. Sin embargo, hasta la fecha estas propuestas tampoco resuelven algunas de las más importantes discrepancias.

- **Gravedad modificada (MOG):** también denominada STVG, esta teoría de gravedad modificada se basa en un principio de acción, añadiendo a la acción de Einstein-Hilbert un escalar, un tensor y un vector masivo. Este modelo añade al término de gravedad newtoniano una corrección de tipo Yukawa en el límite de campo débil, que supone una fuerza gravitatoria repulsiva que en pequeñas escalas (escala galáctica e inferiores) se estabiliza con el término atractivo, mientras que a grandes escalas se recupera el comportamiento newtoniano, obteniendo una constante gravitatoria mayor a la conocida.

MOG ha sido testada en fenómenos de diferentes escalas. A escala cosmológica explicaría fenómenos como las lentes gravitacionales, la expansión acelerada del espacio-tiempo o el espectro de emisiones de los cúmulos de galaxias. Este modelo explicaría las observaciones de las curvas de rotación de numerosas galaxias del catálogo THINGS, así como de la Vía Láctea, replicando satisfactoriamente las observaciones. Sin embargo, MOG fallaría en la reproducción de la dinámica de sistemas soportados por la presión, lo que no permitiría resolver el problema CCP, ya que no explicaría algunos comportamientos de tipo *core*. Además, a escalas cosmológicas, en las que MOG debería comportarse igual que el modelo Λ CDM, la tasa de crecimiento de las perturbaciones no se correspondería con la observada por el satélite *Planck*. A día de hoy, la falta de simulaciones a N-Cuerpos del modelo MOG no permite abordar otros problemas, como el MSP o el PSP.

- **Gravedad $f(R)$:** se trata de una familia de teorías gravitatorias en la que el escalar de curvatura de Ricci R de la acción de Einstein-Hilbert de la Relatividad General es sustituido por una función $f(R)$ [34]. Esta función estará definida de manera distinta en cada una de estas teorías, como por ejemplo R^2 , $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ o $R^{\mu\nu\alpha\beta}R_{\mu\nu\alpha\beta}$, que incluyen invariantes de orden superior en el Lagrangiano, o funciones que añaden términos de acoplamiento entre los campos escalares y la geometría, como $\phi^2 R$. De esta manera, las teorías $f(R)$ dan lugar a distintas extensiones de la Relatividad General, habiendo mostrado muchas de ellas ser compatibles con las observaciones del Sistema Solar, así como con las restricciones del Principio de Equivalencia [35]. Estas teorías pueden ser clasificadas como *Teorías Tensor-Escalar* si la geometría está acoplada no mínimamente a algún campo escalar o como *Teorías de Orden Superior* si en la acción aparecen derivadas de las componentes de la métrica de orden superior a dos. Aunque normalmente se recurre a las teorías $f(R)$ para reemplazar el Lagrangiano de Einstein-Hilbert con una constante cosmológica o un modelo de materia oscura, estas teorías de gravedad pueden eliminar, al menos parcialmente, la necesidad de materia oscura. De hecho, ya en 1977 K.S. Stelle señaló que en el límite de campo débil una teoría con $f(R) = R^2$ daba lugar de forma natural a una corrección de tipo Yukawa al potencial gravitatorio de Newton [36], corrección que podría explicar las curvas de rotación de muchas galaxias espirales. Además, estas curvas de rotación dentro de modelos $f(R)$ favorecerían comportamientos de tipo *cusp* en los perfiles de densidad, dando explicación al CCP, y teorías de tipo R^n pueden también describir la cinemática de estrellas en galaxias espirales sin necesidad de recurrir a la materia oscura. Simulaciones a N-Cuerpos de modelos $f(R)$ así como de modelos híbridos que combinan la gravedad $f(R)$ con la presencia de materia oscura (como neutrinos masivos o partículas de WDM) muestran una degeneración entre estos

modelos y el paradigma estándar de Λ CDM. Por otra parte, el cambio en el Lagrangiano tendría consecuencias también a escala galáctica siendo necesarios estudios de las teorías de gravedad $f(R)$ a bajas energías, que a día de hoy aún no han dado resultados que generen consenso. La gravedad $f(R)$ supone, por tanto, una importante alternativa a la materia oscura que, además, podría dar explicación a la expansión acelerada del Universo.

1.4. CONCLUSIONES

En este capítulo se han tratado los pilares fundamentales de la materia oscura fría y, particularmente, del modelo cosmológico estándar Λ CDM, repasando las numerosas evidencias observacionales que los sostienen. El amplio consenso en las distintas medidas independientes de estas observaciones convierten al Λ CDM en un modelo de concordancia, siendo el modelo más simple que explica satisfactoriamente la evolución cosmológica del Universo, su expansión acelerada, la radiación del CMB y la LSS. Los 6 parámetros libres con los que el Λ CDM describe las propiedades del Universo han sido medidos con gran precisión, al igual que otras magnitudes cosmológicas que se ajustan fielmente a las observaciones.

A pesar de sus éxitos, este modelo se basa en la existencia de materia oscura, que supondría en torno a un 85% de la densidad de materia del Universo y cuya naturaleza fundamental es a día de hoy desconocida. Se han postulado diferentes candidatos a CDM para cuya búsqueda han sido puestos en marcha numerosos experimentos en distintos aceleradores de partículas, y se espera que en los próximos años se obtengan resultados más esclarecedores. Sin embargo, el desconocimiento entorno a la hipotética interacción ente partículas de materia oscura y partículas del SM dificulta la búsqueda, y a día de hoy ninguna de estas interacciones ha sido detectada.

Además, la falta de detección directa de materia oscura no es el único problema que encuentra el modelo Λ CDM ya que, aunque son muchas las observaciones que lo sostienen a grandes escalas, en la escala galáctica y subgaláctica aparecen una serie de discrepancias entre las predicciones del modelo y las observaciones que difícilmente se podrían solventar dentro del paradigma Λ CDM. Es lógico, por tanto, que surjan alternativas a este modelo. Algunos modelos de materia oscura alternativos al CDM son la WDM, SIDM, FDM o los axiones QCD. Otra vía de investigación son los modelos de gravedad modificada, que romperían con las leyes de gravedad newtonianas para evitar recurrir a la materia oscura como explicación de la fenomenología que ésta intentaba resolver, como las teorías MOND, MOG y la gravedad $f(R)$. Tanto los nuevos modelos de materia oscura como las teorías de gravedad modificada dan solución a algunos de los problemas con los que se encontraba el modelo Λ CDM, pero a día de hoy ninguna de ellas ha logrado solucionar todas estas discrepancias.

El objeto de estudio de este trabajo serán los modelos de gravedad modificada como alternativas a la materia oscura, estudiando los efectos de estos modelos sobre los parámetros de la órbita y su precesión en el problema de dos cuerpos, centrándonos en su estudio en el límite de campo débil. En el próximo capítulo se presentarán en más detalle los modelos de gravedad modificada y las restricciones que aportan a estos las observaciones a escalas del Sistema Solar.

Modelos de gravedad modificada

Como ya se introdujo en el capítulo anterior, desde la década de los ochenta del siglo pasado han sido propuestas distintas modificaciones a la gravedad newtoniana que daban una explicación alternativa a las anomalías observacionales que dieron pie a la postulación de la materia oscura. Estas teorías podrían explicar satisfactoriamente tanto la aceleración cósmica como la estructura a gran escala del Universo rompiendo, no solo con la gravedad newtoniana, sino con la teoría de Relatividad General de Einstein a escalas astrofísicas y cosmológicas. La gravedad de GR cuenta con algunos problemas a la hora de dar explicación a la dinámica de galaxias y cúmulos, así como a algunas observaciones del Cosmos, pero ha sido comprobada satisfactoriamente a escalas del Sistema Solar, por lo que cualquier nueva teoría que pretenda dar una mejor explicación a los fenómenos a grandes escalas y a la expansión acelerada del Universo debe reproducir los resultados de GR a escalas del Sistema Solar y modificarlos para escalas mayores. Sin embargo, los modelos de gravedad modificada predicen efectos a escalas menores a la escala galáctica que podrían no ser despreciables, por lo que algunas observaciones del Sistema Solar ofrecen la posibilidad de acotar los parámetros de estos modelos.

2.1. RESTRICCIONES DEL SISTEMA SOLAR A LAS TEORÍAS DE GRAVEDAD MODIFICADA

Una de las restricciones que aportan las observaciones del Sistema Solar a las teorías de gravedad modificada es la órbita de Mercurio, una de los primeros éxitos que tuvo la GR, al dar una explicación no newtoniana satisfactoria a la precesión anómala de esta órbita. La predicción actual de esta precesión es de $\omega = 43.03$ arcosegundos por siglo, que concuerda con las observaciones con una precisión de 0.05 arcosegundos por siglo [37], por lo que una nueva teoría debe dar una precesión al menos igual de precisa con los resultados observacionales. Otras restricciones importantes son la precesión de la órbita de Icarus (asteroide que orbita alrededor del Sol) o la variación de la constante de Kepler $K_p = GM_\odot$ para Marte, Júpiter, Urano y Neptuno, todas ellas del orden de $\Delta K_p/K_p \sim 10^{-6} - 10^{-9}$. Estos valores implican que la quinta fuerza a la que dé lugar la hipotética modificación de la gravedad debe seguir una ley de cuadrado inverso [37], al menos dentro de la órbita de Neptuno, más allá de posibles correcciones post-newtonianas ¹. Una transición entre una fuerza proporcional a $1/r^2$ en el interior del Sistema Solar y una fuerza de atracción anómala a escalas mucho mayores requeriría que en las regiones externas del Sistema Solar ya existiese una desviación de la ley de cuadrado inverso, como ya indicaron las sondas *Pioneer* para distancias superiores a los 20 AU. Además, del estudio de la órbita Luna-Tierra a partir de los datos del experimento LLR se puede concluir que esta quinta fuerza debe ser más pequeña que la fuerza de Einstein-Newton por un orden de magnitud de 10^{-4} para evitar así sistemas de referencia privilegiados [37].

¹Las expansiones post-newtonianas son perturbaciones utilizadas para obtener soluciones aproximadas a las ecuaciones de campo Einstein. Estas expansiones se escriben en potencias de $1/c$ que expresan a qué orden esta solución se desvía de las leyes de Newton.

Por otra parte, el *formalismo post-newtoniano parametrizado* (formalismo PPN) cuantifica las desviaciones de una teoría de gravedad general con respecto a la GR. Dentro de este formalismo, el parámetro γ mide la curvatura del espacio producida por la unidad de masa en reposo, lo que lo convierte en un buen parámetro para probar una teoría de gravedad a escalas del Sistema Solar. Este valor es de $\gamma = 1$ para GR, mientras que su valor observacional es de $\gamma = 1 + (2.1 \pm 2.3) \times 10^{-5}$ [38], por lo que cualquier teoría de gravedad queda restringida a un valor dentro de este pequeño margen. Otra prueba para una teoría gravitatoria es el ángulo de deflexión que sufre la luz de las estrellas debido a la masa del Sol. Las observaciones dan para este ángulo un valor de $\theta = (0.99992 \pm 0.00023) \times 1.75''$ [39], siendo $1.75''$ la predicción de GR. Otro fenómeno predicho por GR es la dilatación temporal debida al efecto del campo gravitacional solar. Las mediciones del satélite *Cassini* dan un valor de $\Delta t = (1.00001 \pm 0.00001)\Delta t_{GR}$ [39].

Estos valores suponen restricciones muy rigurosas sobre cualquier variación de GR a partir de observaciones dentro del Sistema Solar. De hecho, una de las principales dificultades con las que cuentan las teorías de gravedad modificada es que, al encontrar restricciones tan estrictas dentro del Sistema Solar, si se aplican estas restricciones a los parámetros que describen el modelo alternativo apenas queda lugar para modificaciones de GR a escalas cosmológicas. Para solventar este inconveniente sin violar el principio de equivalencia surge el mecanismo de *screening* o apantallamiento, que suprimiría la modificación de la gravedad a escalas del Sistema Solar basándose en la no linealidad de la densidad a lo largo del Universo, lo que supone la no linealidad del campo escalar que representa el grado de libertad adicional de la teoría de gravedad modificada.

2.2. POTENCIAL DE YUKAWA

Una corrección típica de las leyes gravitatorias que surgen de manera natural en algunos modelos de gravedad modificada es la parametrización mediante un potencial de Yukawa. Este tipo de potencial, también denominado potencial de Coulomb apantallado, tienen la siguiente forma:

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{r} \left(1 + \alpha e^{-r/\lambda} \right), \quad (2.1)$$

donde M es la masa que actúa como fuente del campo gravitatorio, G es la constante de gravitación universal de Newton, α es un parámetro adimensional que determina la magnitud de la corrección de Yukawa y λ hace referencia al alcance del término de corrección de Yukawa.

En lo que respecta al potencial de Yukawa, las distintas observaciones también aportan restricciones sobre sus parámetros. Se muestra en la figura 2.1, donde se evidencia la existencia de una región a considerar en la que la corrección de Yukawa a la ley de potencia inversa de la GR puede ser válida. Actualmente estas restricciones abarcan desde los micrómetros hasta las unidades astronómicas: las menores escalas comprobadas en laboratorio son de $|\alpha| \leq 10^6$ para $\lambda \sim 10^{-5}$ m y de $|\alpha| \leq 10^{-2}$ para $\lambda \sim 10^{-3}$ m, mientras que a escalas planetarias se han obtenido $|\alpha| \leq 10^{-6}$ para $\lambda \sim 10^6$ m (equivalente a la distancia Tierra-Luna) y $|\alpha| \leq 10^{-8}$ para $\lambda \sim 10^{11}$ m (equivalente a una órbita planetaria) [41]. Más allá de estas distancias, las limitaciones observacionales impiden obtener buenas restricciones.

2.2.1. Potencial de Yukawa como solución de modelos de gravedad $f(R)$

Como se introdujo en el capítulo 1, una de las teorías de gravedad modificada que daban lugar de manera natural a correcciones de tipo Yukawa eran teorías de gravedad $f(R)$, una familia de teorías que daba respuesta a algunas de las grandes discrepancias del modelo Λ CDM. El número de correcciones de tipo Yukawa al potencial gravitatorio que aparecen dependen del grado diferencial de las ecuaciones de campo de Einstein: por ejemplo, una teoría a cuarto

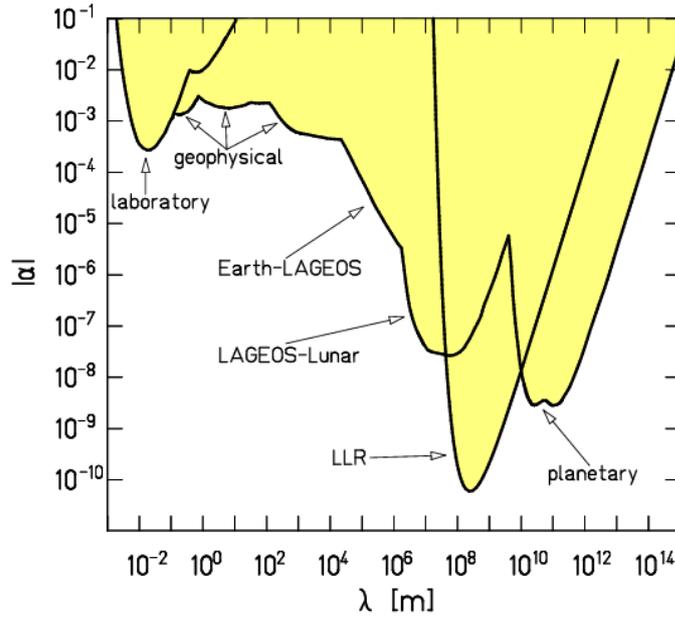


Figura 2.1. Restricciones sobre los parámetros α y λ del potencial de Yukawa con un 95% de nivel de confianza para $\lambda > 1$ cm. La región amarilla muestra los valores prohibidos por las evidencias experimentales. Figura tomada de [40].

orden da lugar a una corrección de tipo Yukawa, mientras que una teoría a sexto orden da lugar a una doble corrección de este tipo [35]. Para que la gravedad $f(R)$ supere algunas de las pruebas observacionales a pequeñas escalas es necesario recurrir a mecanismos de *screening* como el mecanismo *chameleon*, que modifica la gravedad en presencia de materia, de manera que en zonas de alta densidad como la Tierra o el Sol las desviaciones con respecto a GR serían suprimidas mientras que a escalas cosmológicas, donde la densidad es baja, se mantendrían. Es este mecanismo el que permite que modelos analíticos de gravedad $f(R)$ sean propuestas viables también a pequeñas escalas, ya que en el límite newtoniano las correcciones de tipo Yukawa pueden llegar a ser despreciables.

Como se explicó también en el capítulo 1, en las teorías de gravedad $f(R)$ se sustituye el escalar de curvatura de Ricci R de la acción de Einstein-Hilbert de la Relatividad General por una función de éste, $f(R)$. Realizando este cambio, la acción resultante será:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(f(R) + \frac{8\pi G}{c^2} \mathcal{L}_m \right), \quad (2.2)$$

donde \mathcal{L}_m es el Lagrangiano de materia. Siguiendo el principio variacional $\delta S = 0$ obtenemos las ecuaciones de campo para $f(R)$:

$$F R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f(R) g_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu F + g_{\mu\nu} \square F = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (2.3)$$

donde $F \equiv \partial f(R)/\partial R$ y $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-impulso de materia.

Para desarrollar el límite newtoniano partimos de la hipótesis de que la función del escalar de curvatura de Ricci $f(R)$ que describe la teoría puede ser desarrollado en una serie de Taylor [3]:

$$f(R) = \sum_n \frac{f^n(R_0)}{n!} (R - R_0)^n \approx f_0 + f'_0 R + f''_0 R^2 + \dots, \quad (2.4)$$

de manera que los parámetros de Yukawa están relacionados con los coeficientes de la serie de Taylor de la siguiente forma:

$$\alpha = f'_0 - 1, \quad \lambda = \sqrt{-\frac{6f''_0}{f'_0}}. \quad (2.5)$$

Consideramos además una métrica perturbada, de manera que podemos escribir las componentes de la métrica como:

$$\begin{aligned} g_{tt}(t, r) &\simeq 1 + g_{tt}^{(2)}(t, r) + g_{tt}^{(4)}(t, r), & g_{rr}(t, r) &\simeq -1 + g_{rr}^{(2)}(t, r), \\ g_{\theta\theta}(t, r) &= -r^2, & g_{\phi\phi}(t, r) &= -r^2 \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Para encontrar soluciones en el límite de campo débil, introducimos en las ecuaciones de campo de $f(R)$ 2.3 las expresiones 2.4 y 2.6. De esta manera podemos llegar a dar la expresión del potencial gravitatorio en este límite, para el cual obtendríamos [35]:

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{f'_0 r} - \frac{\delta_1(t) e^{-r\sqrt{-\xi}}}{6\xi r}, \quad (2.7)$$

donde f'_0 es el segundo coeficiente de la expansión de Taylor 2.4 y la función $\delta_1(t)$ es una función del tiempo arbitraria con unidades de $longitud^{-1}$. El parámetro ξ , que se define como $\xi = f'_0/6f''_0$, puede ser reinterpretado como una longitud efectiva $\lambda^2 = -\xi^{-1}$. Podemos reescribir este potencial como:

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{(1+\delta)r} \left(1 + \delta e^{-r/\lambda}\right), \quad (2.8)$$

donde el primer término equivale a un potencial newtoniano generado por una partícula de masa $M/(1+\delta)$, y el segundo término es el que supone una modificación al potencial gravitatorio, con un alcance λ . Es trivial comprobar que para $\delta = 0$ se recuperaría el potencial de Newton. Cabe resaltar que, dado que este potencial de Yukawa no es igual al presentado anteriormente en la expresión 2.1, los parámetros δ y λ tampoco lo son, por lo que las restricciones observacionales presentadas anteriormente no son válidas para el potencial 2.8.

2.3. CONCLUSIONES

En este capítulo se ha profundizado en los modelos de gravedad modificada. Se han presentado las principales restricciones que las observaciones a escala del Sistema Solar aportan sobre los parámetros que describen estas teorías. Además, se ha hecho especial énfasis en el potencial de Yukawa y sus restricciones a estas escalas, obteniendo la forma que una corrección de este tipo tendría como solución para la gravedad $f(R)$ y justificando la importancia de trabajar en el límite de campo débil.

Unos de los sistemas más idóneos a la hora de probar teorías gravitatorias son los sistemas binarios compuestos por estrellas compactas coalescentes, como estrellas de neutrones, enanas blancas o agujeros negros [3]. Además será importante el estudio de órbitas estables, que permitirán analizar variaciones en la interacción gravitatoria en el límite de campo débil. Por ello, dedicaremos el siguiente capítulo a estudiar cómo pueden afectar las correcciones a la gravedad newtoniana a los parámetros de la órbita de un sistema de dos masas puntuales que se orbitan mutuamente a través de un potencial gravitatorio genérico en el límite de campo débil, en el que se cumplirá $r/\lambda \ll 1$. Realizaremos un estudio semi-clásico por el que recuperaremos órbitas keplerianas para comprobar las posibles variaciones en la excentricidad y el *latus rectum* de éstas, y mediante un planteamiento perturbativo obtendremos la precesión causada en la

órbita por dichas correcciones. Por último particularizaremos estos resultados para el potencial gravitatorio de Yukawa. Comparando los resultados de la precesión para este caso con las observaciones de los planetas del Sistema Solar podremos además obtener ciertas restricciones para los parámetros de Yukawa.

Ecuaciones fundamentales del problema de los dos cuerpos

A continuación estudiaremos el problema de los dos cuerpos, en el que se determinará el movimiento de dos masas, tratadas como partículas puntuales, que solo interactúan gravitatoriamente entre sí. A partir de un potencial gravitatorio dado se llegará a las ecuaciones del movimiento y a la energía total, de donde derivaremos las expresiones de la excentricidad y el *latus rectum* de la órbita, lo que nos permitirá también dar una expresión de la precesión orbital. Como estamos interesados en el estudio de un potencial genérico, será interesante primero repasar el caso newtoniano, para luego extender nuestro análisis al caso general.

3.1. CASO NEWTONIANO

Consideramos una partícula de prueba de masa m que se mueve en el potencial gravitatorio newtoniano generado por una partícula de masa M , que tendrá la forma:

$$V(r) = -\frac{GMm}{r}, \quad (3.1)$$

donde G es la constante de gravitación universal de Newton. En coordenadas polares, las ecuaciones de movimiento de esta partícula con respecto al centro de masas se expresarán:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla \left(\frac{V(r)}{m} \right), \quad (3.2)$$

$$\frac{d}{dt} (r^2 \dot{\phi}) = 0. \quad (3.3)$$

La energía total del sistema será:

$$E_{tot} = \frac{1}{2}\mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) - \frac{GMm}{r}, \quad (3.4)$$

donde hemos utilizado la masa reducida del sistema, que se define como $\mu = \frac{mM}{m+M}$.

A partir de la ecuación 3.3 podemos definir el momento angular $L = \mu r^2 \dot{\phi}$, que será una cantidad conservada del movimiento. De esta forma podemos escribir $\dot{\phi} = L/\mu r^2$. Reescribiendo la expresión de la energía con este nuevo término se obtiene:

$$E_{tot} = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{GMm}{r}. \quad (3.5)$$

De esta expresión podemos despejar la componente radial de la velocidad \dot{r} :

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu} \left(E_{tot} + \frac{GMm}{r} \right) - \frac{L^2}{\mu^2 r^2}}. \quad (3.6)$$

Para obtener la ecuación de la órbita en términos del ángulo ϕ podemos escribir:

$$d\phi = \frac{d\phi}{dt} \frac{dt}{dr} dr = \frac{\dot{\phi}}{\dot{r}} dr, \quad (3.7)$$

donde sustituyendo la definición que ya teníamos para $\dot{\phi}$ y la expresión 3.6 llegamos a la siguiente integral [42]:

$$\phi(r) = \int \frac{\pm (l/r^2) dr}{\sqrt{2\mu \left(E - \frac{GMm}{r} - \frac{L^2}{2\mu r^2} \right)}}. \quad (3.8)$$

Esta integral puede resolverse mediante el cambio de variable $x \equiv l/r$. Definiendo el origen del ángulo ϕ de manera que r sea mínimo para $\phi = 0$ llegamos a [42]:

$$\cos \phi = \left(-\frac{L^2}{2\mu GMm} \frac{1}{r} - 1 \right) \left[\frac{2E_{tot}L^2}{\mu (GMm)^2} + 1 \right]^{-1/2}. \quad (3.9)$$

Podemos ahora definir dos cantidades constantes que nos permitirán simplificar esta expresión:

$$l = \frac{L^2}{\mu GMm}, \quad (3.10)$$

$$\epsilon = \sqrt{\frac{2E_{tot}L^2}{\mu (GMm)^2} + 1}. \quad (3.11)$$

La primera de ellas es el *latus rectum*, que se trata de la distancia perpendicular al eje mayor de la órbita que pasa por su foco; y la segunda es la excentricidad de la órbita, que mide cuánto se desvía la elipse de ser una circunferencia perfecta. A partir de estas definiciones podemos reescribir la ecuación de la órbita 3.9 como:

$$\frac{l}{r} = 1 + \epsilon \cos \phi, \quad (3.12)$$

que es la ecuación de una sección cónica con un foco en el origen. Estamos interesados en el estudio de órbitas elípticas cerradas, por lo que solo consideraremos configuraciones de energía E_{tot} negativa y $0 < \epsilon < 1$. Las ápsides de esta órbita, que miden la menor y la mayor distancia de la órbita a su centro de atracción serán:

$$\begin{cases} r_{min} = a(1 - \epsilon) \\ r_{max} = a(1 + \epsilon) \end{cases}, \quad (3.13)$$

donde a hace referencia al semieje mayor de la órbita.

3.2. CASO DEL POTENCIAL GENÉRICO

Una vez estudiado el caso newtoniano pasamos a trabajar con un potencial genérico que definimos de la siguiente forma:

$$V(r) = -\frac{h(r/\lambda)}{r}, \quad (3.14)$$

donde $h(r/\lambda)$ será la función que determine el potencial concreto del que se trata, y λ será un parámetro que modula el alcance del potencial. Trabajaremos en escalas tales que $r/\lambda \ll 1$, por lo que para obtener tanto los parámetros de la órbita como la precesión utilizaremos el desarrollo en serie de este potencial. De forma genérica este desarrollo se escribiría:

$$V(r) \approx -\frac{h(0)}{r} - h'(0) - \frac{1}{2}h''(0)r, \quad (3.15)$$

donde más tarde distinguiremos entre desarrollos hasta segundo o hasta tercer orden.

3.2.1. Ecuaciones de la órbita

Consideramos una partícula puntual de masa m que se mueve en el potencial gravitacional generado por una partícula de masa M . En este caso, utilizando de nuevo las ecuaciones de movimiento 3.2 y 3.3 y la definición del potencial genérico 3.14, la energía total del sistema queda:

$$E_{tot} = \frac{1}{2}\mu \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \right) - \frac{h(r/\lambda)}{r}. \quad (3.16)$$

a. Orden $O(r/\lambda)^2$

En caso de tomar el desarrollo en serie del potencial hasta segundo orden, éste sería:

$$V(r) \approx -\frac{h(0)}{r} - h'(0), \quad (3.17)$$

por lo que la energía total tomaría la siguiente forma:

$$E_{tot} = \frac{1}{2}\mu \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \right) - \frac{h(0)}{r} - h'(0). \quad (3.18)$$

Podemos observar que el término $h(0)$ supone una modificación en el término newtoniano del potencial, mientras que el término $h'(0)$ es una constante que modifica la energía total. Como ya hicimos para el caso newtoniano, a partir de la ecuación 3.3 podemos definir el momento angular L . En este caso, además de reescribir la componente angular de la velocidad en términos del momento angular, podemos hacer lo mismo con la componente radial:

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{d\phi}{dt} \frac{dr}{d\phi} = \frac{L}{\mu r^2} \frac{dr}{d\phi} = -\frac{L}{\mu} \frac{d}{d\phi} \left(\frac{1}{r} \right).$$

Sustituyendo \dot{r} y $\dot{\phi}$ en la expresión de la energía llegamos a:

$$E_{tot} = \frac{L^2}{2\mu} \left(\frac{d}{d\phi} \frac{1}{r} \right)^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{h(0)}{r} - h'(0). \quad (3.19)$$

Podemos definir ahora la función $u \equiv 1/r$, cuya derivada escribiremos como $u' = du/d\phi$, que al sustituir en la expresión de la energía dará lugar a la siguiente ecuación diferencial:

$$u'^2 + u^2 = \frac{2\mu}{L^2} [E_{tot} + h(0)u + h'(0)]. \quad (3.20)$$

Derivando esta ecuación obtenemos una segunda ecuación diferencial:

$$u' \left(u'' + u - \frac{\mu}{L^2} h(0) \right) = 0. \quad (3.21)$$

Como buscamos una órbita kepleriana, una solución estimada a estas ecuaciones diferenciales para este tipo de órbitas tendrá la siguiente forma [42], que es la que obtuvimos para el caso de Newton:

$$u \equiv \frac{1}{r} = \frac{1}{l} (1 + \epsilon \cos \phi). \quad (3.22)$$

Sustituyendo esta solución estimada en la ecuación 3.21 llegamos a la expresión del *latus rectum*:

$$l = \frac{L^2}{\mu h(0)}. \quad (3.23)$$

De la misma manera, si sustituimos la expresión 3.22 en la ecuación diferencial 3.20 llegamos a la excentricidad:

$$\epsilon^2 = 1 + \frac{2L^2 E_{tot}}{\mu} \frac{1}{h(0)^2} + \frac{2L^2 h'(0)}{\mu h(0)^2}. \quad (3.24)$$

Podemos comprobar fácilmente que, sustituyendo $h(r/\lambda) = GMm$, caso en el que recuperaríamos el potencial de Newton, las expresiones del *latus rectum* y la excentricidad serían las mismas que obtuvimos en 3.10 y 3.11.

b. Orden $\mathcal{O}(r/\lambda)^3$

En este caso el desarrollo en serie del potencial gravitacional genérico sería:

$$V(r) \approx -\frac{h(0)}{r} - h'(0) - \frac{1}{2} h''(0)r, \quad (3.25)$$

por lo que, siguiendo los mismos pasos que para el caso $\mathcal{O}(r/\lambda)^2$, la energía total tomaría la siguiente forma:

$$E_{tot} = \frac{L^2}{2\mu} \left(\frac{d}{d\phi} \frac{1}{r} \right)^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{h(0)}{r} - h'(0) - \frac{1}{2} h''(0)r. \quad (3.26)$$

En este caso, a los términos que ya teníamos en el caso $\mathcal{O}(r/\lambda)^2$, se ha añadido un término con $h''(0)$ lineal con r que no aparecía en el caso newtoniano. Sustituyendo por u llegamos de nuevo a dos ecuaciones diferenciales:

$$u'^2 + u^2 = \frac{2\mu}{L^2} \left(h(0)u + E_{tot} + h'(0) + \frac{1}{2u} h''(0) \right). \quad (3.27)$$

$$u' \left(u'' + u + \frac{\mu}{2L^2} h''(0) \frac{1}{u^2} - \frac{\mu}{L^2} h(0) \right) = 0. \quad (3.28)$$

Como hicimos para el caso $\mathcal{O}(r/\lambda)^2$, sustituimos la solución estimada 3.22 en estas ecuaciones diferenciales. Sustituyendo en 3.28 y evaluando la expresión resultante en $\phi = 0$ y $\phi = \pi$, que corresponden a la distancia entre masas mínima y máxima respectivamente, obtenemos:

$$2\epsilon (1 + \epsilon)^2 (L^2 - l\mu h(0)) + l^3 \epsilon \mu h''(0) = 0, \quad (3.29)$$

$$2\epsilon (1 - \epsilon)^2 (L^2 - l\mu h(0)) + l^3 \epsilon \mu h''(0) = 0. \quad (3.30)$$

Restando estas dos expresiones llegamos al *latus rectum*, para el que obtenemos la misma expresión 3.23 del caso $O(r/\lambda)^2$:

$$l = \frac{L^2}{\mu h(0)}. \quad (3.31)$$

Ahora sustituimos 3.22 en la ecuación diferencial 3.27 y evaluamos de nuevo en $\phi = 0$ y $\phi = \pi$:

$$2(\epsilon + 1) \left[E_{tot}l + (\epsilon + 1)h(0) + lh'(0) \right] + l^2 h''(0) = \frac{L^2 (\epsilon + 1)^3}{l\mu}, \quad (3.32)$$

$$2(\epsilon - 1) \left[E_{tot}l - (\epsilon - 1)h(0) - lh'(0) \right] + l^2 h''(0) = \frac{L^2 (\epsilon - 1)^3}{l\mu}. \quad (3.33)$$

De nuevo restamos estas dos expresiones, llegando así a la excentricidad, donde además hemos sustituido el valor del *latus rectum* obtenido en 3.31:

$$\epsilon^2 = 1 + \frac{2E_{tot}L^2}{\mu h(0)^2} + \frac{2L^2 h'(0)}{\mu h(0)^2} + \frac{L^4 h''(0)}{\mu^2 h(0)^3}. \quad (3.34)$$

3.2.2. Precesión

Las observaciones acerca de la precesión orbital de distintos planetas pueden ser de gran utilidad para establecer ciertos límites a los parámetros que describen una teoría. Aunque para el caso newtoniano se prevé que esta precesión sea nula, una modificación del potencial de Newton puede dar lugar a movimientos de precesión orbital. Para llegar a una solución analítica de este movimiento estudiaremos pequeñas perturbaciones sobre la órbita elíptica.

a. Orden $O(r/\lambda)^2$

Para llegar a la expresión analítica de la precesión impondremos una órbita cerrada donde las ápsides de ésta tomarán los valores del caso newtoniano $r_{min} = a(1 - \epsilon)$ en $\phi = 0$ y $r_{max} = a(1 + \epsilon)$ en $\phi = \pi$. Como estamos utilizando la variable u , al sustituir estos valores obtendremos $u_0 = 1/r_{min}$ y $u_1 = 1/r_{max}$ respectivamente, e impondremos a sus derivadas la condición $u'|_{u=u_0} = u'|_{u=u_1} = 0$. Evaluando la ecuación diferencial 3.20 en estos dos puntos llegamos a las siguientes dos ecuaciones:

$$E_{tot} + u_0 h(0) + h'(0) = \frac{L^2 u_0^2}{2\mu}, \quad (3.35)$$

$$E_{tot} + u_1 h(0) + h'(0) = \frac{L^2 u_1^2}{2\mu}. \quad (3.36)$$

De este sistema de ecuaciones podemos despejar el momento angular L y la energía del sistema E_{tot} , de manera que los podemos escribir en términos de u_0 y u_1 :

$$L = \sqrt{\frac{2\mu h(0)}{u_0 + u_1}}, \quad (3.37)$$

$$E_{tot} = -\frac{u_0 u_1 h(0) + u_0 h'(0) + u_1 h'(0)}{u_0 + u_1}. \quad (3.38)$$

Llevando estas nuevas definiciones del momento angular y la energía a la ecuación diferencial 3.20 llegamos a la siguiente expresión para u' que renombramos, por simplicidad, mediante la función $G(u_0, u_1, u)$:

$$u'(\phi) = \frac{du(\phi)}{d\phi} = \sqrt{(u_0 - u(\phi))(u(\phi) - u_1)} \equiv \sqrt{G(u_0, u_1, u)}. \quad (3.39)$$

Integrando esta expresión podemos hallar $\Delta\phi$, que nos dará el ángulo necesario para que la órbita pase del punto r_{min} al punto r_{max} :

$$\Delta\phi = \phi(r_{max}) - \phi(r_{min}) = \int_{u_0}^{u_1} G(u_0, u_1, u)^{-1/2} du. \quad (3.40)$$

Una vez conocida esta cantidad podremos obtener la precesión por revolución mediante la expresión $\dot{\omega} = 2\Delta\phi - 2\pi$. Sea cual sea la función $h(r/\lambda)$ y, por tanto, sea cual sea el potencial, obtenemos como resultado:

$$\Delta\phi = \pi, \quad (3.41)$$

y por tanto una precesión $\dot{\omega} = 0$, que es el mismo resultado que obtendríamos para un potencial newtoniano. Esto se debe a que la única modificación que el potencial expandido hasta orden $\mathcal{O}(r/\lambda)^2$ hace sobre el potencial newtoniano es el término $-h'(0)$, que al tratarse de un término constante será irrelevante para las ecuaciones del movimiento.

b. Orden $\mathcal{O}(r/\lambda)^3$

Por simplicidad, reescribiremos la ecuación 3.27 como:

$$u'^2 + u^2 = \frac{2\mu}{L^2} (E_{tot} + h'(0)) - \frac{g(u)}{L^2}, \quad (3.42)$$

donde hemos definido $g(u) \equiv -2\mu h(0)u - \mu h''(0)/u$. Como hicimos en el caso anterior, evaluamos esta ecuación en $u = u_0$ y $u = u_1$, obteniendo:

$$u_0^2 = \frac{2\mu}{L^2} (E_{tot} + h'(0)) - \frac{g(u_0)}{L^2}, \quad (3.43)$$

$$u_1^2 = \frac{2\mu}{L^2} (E_{tot} + h'(0)) - \frac{g(u_1)}{L^2}. \quad (3.44)$$

De donde podemos despejar el momento angular L y la energía E_{tot} en términos de u_0 , u_1 y la función $g(u)$:

$$L = \sqrt{\frac{g(u_1) - g(u_0)}{u_0^2 - u_1^2}}, \quad (3.45)$$

$$E_{tot} = \frac{2\mu h'(0)(u_1^2 - u_0^2) + u_0^2 g(u_1) - u_1^2 g(u_0)}{2\mu(u_0^2 + u_1^2)}. \quad (3.46)$$

Igual que hicimos anteriormente, aplicando estas dos cantidades a la ecuación diferencial 3.42 llegamos a la siguiente expresión para u' :

$$u'(\phi) = \frac{du(\phi)}{d\phi} = \sqrt{\frac{g(u)(u_0^2 - u_1^2) + g(u_0)(u_1^2 - u^2) + g(u_1)(u^2 - u_0^2)}{g(u_0) - g(u_1)}} \equiv \sqrt{G(u_0, u_1, u)}, \quad (3.47)$$

por lo que la integral a resolver tomaría la misma forma que en 3.41, aunque, en este caso, la función $G(u_0, u_1, u)$ sí depende del potencial a través de la función $g(u)$. Para resolver esta integral, por tanto, será necesario manipular la función $G(u_0, u_1, u)$, realizando el siguiente cambio de variables:

$$u_1 = u_0 + \eta, \quad u = u_0 + \eta v, \quad (3.48)$$

donde $0 < v < 1$, con el que obtendremos $G(u_0, \eta, v)$:

$$G(u_0, \eta, v) = -\frac{\eta^2 v(v-1)[2u_0(u_0 + \eta)(u_0 + \eta v)h(0) - (3u_0 + \eta + \eta v)h''(0)]}{(u_0 + \eta v)[2u_0(u_0 + \eta)h(0) - h''(0)]}. \quad (3.49)$$

Ahora podemos definir la función $F(u_0, \eta, v)$ como:

$$F(u_0, \eta, v) = \frac{1}{\sqrt{G(u_0, \eta, v)}}, \quad (3.50)$$

con lo que la integral a resolver, que en un principio tenía la misma forma que en 3.40, ahora será:

$$\Delta\phi = \phi(r_{max}) - \phi(r_{min}) = \eta \int_0^1 F(u_0, \eta, v) dv. \quad (3.51)$$

Obtenemos así el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} \Delta\phi = & \pi \sqrt{\frac{2u_0^2 h(0) - h''(0)}{2u_0^2 h(0) - 3h''(0)}} - 2\pi \sqrt{\frac{2u_0^2 h(0) - 3h''(0)}{2u_0^2 h(0) - h''(0)}} \frac{u_0 h(0) h''(0)}{(2u_0^2 h(0) - 3h''(0))^2} \eta \\ & + \frac{\pi}{16} \sqrt{\frac{2u_0^2 h(0) - h''(0)}{2u_0^2 h(0) - 3h''(0)}} \frac{(4u_0^2 h(0) - 3h''(0)) (36u_0^2 h(0)^2 - 4u_0^2 h(0) h''(0) + h''(0)^2)}{(4u_0^5 h(0)^2 - 8u_0^3 h(0) h''(0) + 3u_0 h''(0)^2)^2} \eta^2, \end{aligned} \quad (3.52)$$

que nos permitirá calcular la precesión $\dot{\omega} = 2 \Delta\phi - 2\pi$.

3.3. PARTICULARIZACIÓN PARA EL POTENCIAL DE YUKAWA

Como se explicó en el capítulo 2, una corrección típica a la gravedad newtoniana es la corrección de tipo Yukawa, que surge de manera natural en teorías de gravedad $f(R)$. Si tomamos un potencial de Yukawa como el que se introdujo en la sección 2.2.1:

$$V(r) = -\frac{GMm}{(1+\delta)r} \left(1 + \delta e^{-r/\lambda}\right), \quad (3.53)$$

donde λ representa el alcance de la fuerza de Yukawa y δ la magnitud de esta corrección; la función utilizada en el desarrollo para un potencial genérico sería:

$$h(r/\lambda) = \frac{GMm}{1+\delta} \left(1 + \delta e^{-r/\lambda}\right). \quad (3.54)$$

a. Orden $O(r/\lambda)^2$

En este caso, la energía del sistema tomaría la siguiente forma:

$$E_{tot} = \frac{GMm\delta}{\lambda(1+\delta)} + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{GMm}{r} + \frac{L^2 r'^2}{2\mu r^4}. \quad (3.55)$$

Los valores del *latus rectum* y la excentricidad que obtenemos para este potencial son:

$$l = \frac{L^2}{\mu GMm}, \quad (3.56)$$

$$\epsilon^2 = 1 + \frac{2L^2 E_{tot}}{\mu(GMm)^2} - \frac{2L^2 \delta}{\lambda \mu GMm(1 + \delta)}, \quad (3.57)$$

mientras que la precesión, como ya hemos visto que sucede para cualquier potencial desarrollado hasta orden $O(r/\lambda)^2$, es nula.

b. Orden $O(r/\lambda)^3$

Ahora la energía será:

$$E_{tot} = \frac{GMm\delta}{\lambda(1 + \delta)} + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{GMm}{r} + \frac{L^2 r'^2}{2\mu r^4} - \frac{GMm\delta}{2\lambda^2(1 + \delta)} r, \quad (3.58)$$

mientras que el *latus rectum* y la excentricidad:

$$l = \frac{L^2}{\mu GMm}, \quad (3.59)$$

$$\epsilon^2 = 1 + \frac{2L^2 E_{tot}}{\mu(GMm)^2} - \frac{2L^2 \delta}{\lambda \mu GMm(1 + \delta)} + \frac{L^4 \delta}{\lambda^2 \mu^2 (GMm)^2 (1 + \delta)}. \quad (3.60)$$

Es inmediato comprobar que si tomamos $\delta = 0$ recuperamos las expresiones del caso newtoniano. Aplicando la función $h(r/\lambda)$ del potencial de Yukawa 3.54 en la expresión para la precesión 3.52 llegamos a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \Delta\phi = \pi \sqrt{\frac{\delta - 2u_0^2 \xi}{3\delta - 2u_0^2 \xi}} - 2\pi \left(\frac{\delta - 2u_0^2 \xi}{3\delta - 2u_0^2 \xi} \right)^{3/2} \frac{u_0 \delta \xi}{(\delta - 2u_0^2 \xi)^2} \eta \\ - \frac{\pi}{16} \left(\frac{3\delta - 2u_0^2 \xi}{\delta - 2u_0^2 \xi} \right)^{3/2} \frac{(3\delta - 4u_0^2 \xi)(\delta^2 - 4u_0^2 \delta \xi + 36u_0^4 \xi^2)}{u_0^2 (3\delta - 2u_0^2 \xi)^4} \eta^2, \end{aligned} \quad (3.61)$$

donde hemos utilizado la variable auxiliar $\xi = (1 + \delta)\lambda^2$. Igual que sucede con la excentricidad, podemos comprobar de manera sencilla que para $\delta \rightarrow 0$ recuperaríamos el valor newtoniano $\Delta\phi = \pi$, que nos devolvería una precesión $\dot{\omega} = 0$, como esperábamos.

3.4. CONCLUSIONES

En este capítulo se han calculado los valores de la excentricidad y el *latus rectum* de la órbita kepleriana para un potencial genérico y para el potencial de Yukawa. Hemos trabajado en escalas tales que $r/\lambda \ll 1$, por lo que se ha utilizado un desarrollo en serie del potencial, donde hemos distinguido entre desarrollo a segundo y a tercer orden.

Para un desarrollo a segundo orden obtenemos un término newtoniano y un término constante que supone una modificación en la energía total del sistema, mientras que para un desarrollo hasta tercer orden a estos dos términos se les suma uno nuevo lineal en r que no aparecía en el potencial de Newton. Se ha comprobado que para el parámetro del *latus rectum* no se obtiene diferencia entre los dos órdenes de desarrollo, y para un potencial de Yukawa se recupera el valor del potencial de Newton. En cuanto a la excentricidad, un desarrollo hasta orden $O(r/\lambda)^2$ añade, con respecto al valor newtoniano, un nuevo término proporcional

al momento angular L , mientras que para el desarrollo a orden $O(r/\lambda)^3$ aparece además un término proporcional a L^2 . También se han obtenido expresiones analíticas para la precesión. Hemos comprobado de esta manera que, para un potencial cualquiera, la precesión será nula, como sucedía para el potencial de Newton, al menos hasta un desarrollo de segundo orden. Para el desarrollo a tercer orden sí aparece un valor no nulo de la precesión orbital.

A continuación analizaremos en mayor profundidad los resultados del caso del potencial de Yukawa, donde estudiaremos los efectos de los parámetros de Yukawa en los resultados para los parámetros orbitales, comparando los dos órdenes de expansión con los que hemos trabajado y veremos las desviaciones que surgen con respecto al potencial de Newton. Además, utilizaremos medidas observacionales de los distintos planetas del Sistema Solar que nos permitirán acotar los posibles valores de estos parámetros, además de valorar la calidad de nuestros resultados.

Análisis y discusión de los resultados para el potencial de Yukawa

Escribiendo la inversa de la ecuación 3.22 obtenemos la expresión para la ecuación de la órbita:

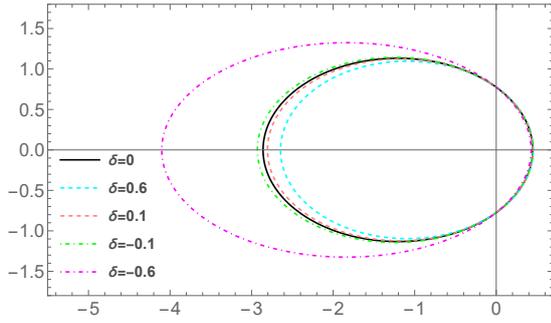
$$r(\phi) = l(1 + \epsilon \cos \phi)^{-1}. \quad (4.1)$$

En la figura 4.1 se muestran la órbita obtenida según esta ecuación para el caso $O(r/\lambda)^2$, con los valores derivados de 3.56 y 3.57, así como la diferencia relativa entre esta órbita y la órbita newtoniana. La expresión obtenida para la excentricidad es dependiente de la energía, lo que dificulta la comprobación observacional del resultado dado que, aunque podemos determinar los parámetros de la órbita, la energía se trata de un parámetro dependiente de la teoría. No obstante, dados una energía y un momento angular fijos, obtendremos una órbita determinada cuyos parámetros dependerán de la intensidad de la corrección de Yukawa δ , como muestran las dos figuras. La excentricidad será menor cuanto más intensa sea la corrección de Yukawa para $\delta > 0$, y será mayor cuanto más grande sea $|\delta|$ para $\delta < 0$. En la figura 4.2 se presentan las mismas representaciones para el caso $O(r/\lambda)^3$, donde los valores utilizados han sido los derivados de las expresiones 3.59 y 3.60. Las figuras muestran resultados similares a los del caso $O(r/\lambda)^2$, sin embargo, las diferencias no son despreciables. Para el caso $O(r/\lambda)^3$ se obtienen valores mayores de la excentricidad y el *latus rectum* a los del caso anterior para $\delta < 0$, y valores más pequeños para $\delta > 0$, lo que supone una corrección mayor con respecto al caso newtoniano $\delta = 0$, como evidencia la figura 4.2b.

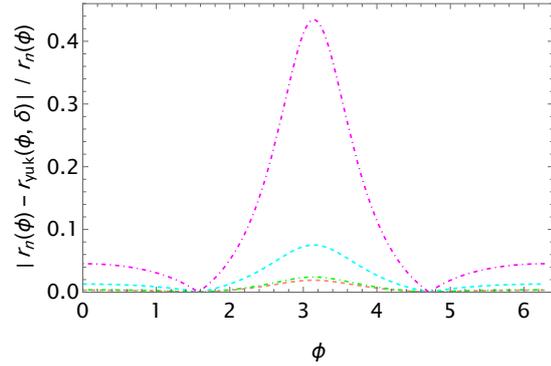
Planeta	a (AU)	ϵ	P (años)	$\dot{\omega}_{obs}$ ("/>		
Mercurio	0.39	0.206	0.24	43.1000 ± 0.5000	43.5	$[9.134; 9.350] \times 10^{-3}$
Venus	0.72	0.007	0.62	8.0000 ± 5.0000	8.62	$[4.357; 19.810] \times 10^{-4}$
Tierra	1.00	0.017	1.00	5.0000 ± 1.0000	3.87	$[2.946; 4.513] \times 10^{-4}$
Marte	1.52	0.093	1.88	1.3624 ± 0.0005	1.36	$[8.847; 8.853] \times 10^{-5}$
Júpiter	5.20	0.048	11.86	0.0700 ± 0.0040	0.0628	$[2.199; 2.467] \times 10^{-6}$
Saturno	9.54	0.056	29.46	0.0140 ± 0.0020	0.0138	$[1.798; 1.822] \times 10^{-7}$

Tabla 4.1: Esta tabla muestra, para seis planetas del Sistema Solar, los valores observados de: el semieje mayor de la órbita (a), su excentricidad (ϵ), el periodo (P) y el valor observado de la precesión de esta órbita ($\dot{\omega}_{obs}$) en las columnas 2-5 respectivamente. En la sexta columna se da el valor de la precesión que predice la Relatividad General ($\dot{\omega}_{GR}$). Por último, en la séptima columna se dan los rangos del parámetro δ obtenidos por la expresión 3.61 que son compatibles con las observaciones. La tabla ha sido adaptada a partir de [43].

A partir de la expresión para la precesión en términos del parámetro δ de Yukawa derivada de 3.61 podemos establecer ciertos límites para este parámetro basándonos en las órbitas de

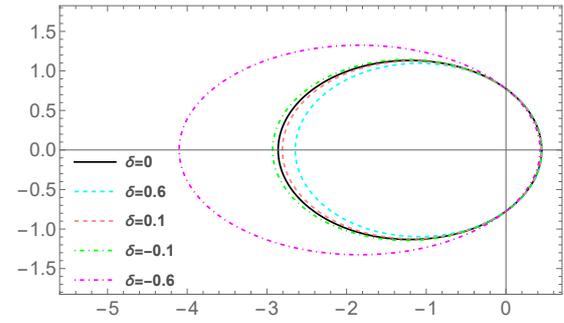


(a)

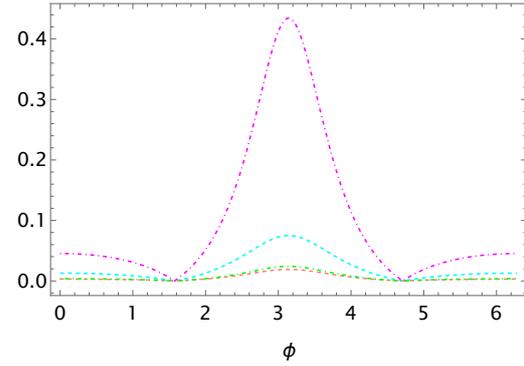


(b)

Figura 4.1. Desarrollo hasta orden $O(r/\lambda)^2$ para la corrección de Yukawa. **(a)** Órbita $r(\phi)$ representada en coordenadas polares para distintos valores del parámetro δ , manteniendo L y E_{tot} constantes. **(b)** Diferencia relativa entre el caso de corrección de Yukawa y el caso newtoniano para distintos valores de δ



(a)



(b)

Figura 4.2. Las figuras son análogas a las de las de la Figura 4.1 para la corrección de Yukawa con desarrollo hasta orden $O(r/\lambda)^3$

distintos planetas del Sistema Solar. En la tabla 4.1 se dan los parámetros de la órbita que han sido utilizados para acotar los valores de δ , así como las cotas obtenidas. Para ello hemos utilizado medidas de la precesión orbital de Mercurio, Venus, La Tierra, Marte, Júpiter y Saturno [44], identificando qué valores de δ son compatibles con las medidas observacionales, como se muestra en la figura 4.3. Ha sido fijado el alcance al valor de confianza $\lambda = 4500$ AU [45]. Podemos comprobar que las funciones de la precesión para los distintos planetas pasan por el origen, siendo positivas para $\delta > 0$ y negativas para $\delta < 0$. Esto implica que la precesión tiene dirección opuesta a la observada para δ negativo y valores en acorde a las observaciones para δ positivos, por lo que nos quedaremos únicamente con este último caso. Este resultado confirma los resultados obtenidos para gravedad R^n ¹ a partir de las estrellas de tipo S que orbitan alrededor del Centro Galáctico [46, 47]. En cuanto a los límites dados para el parámetro δ , las restricciones más estrictas las aporta Saturno, que acota este parámetro entre 1.798×10^{-7} y 1.822×10^{-7} . Para estas restricciones de δ calculamos la precesión de Urano, Neptuno y Plutón, para los cuales obtenemos valores entre 1 y 3 órdenes de magnitud superiores a los que prevé GR, indicando que, para concordar con las restricciones de la Relatividad General, la intensidad δ de la corrección de Yukawa debe ser aún menor a la obtenida para Saturno, de un

¹El modelo de gravedad R^n es un teoría gravitatoria dentro del modelo $f(R)$ en el que el escalar de Ricci R es sustituido por una potencia genérica R^n . Este modelo ha mostrado ser un buen candidato para describir la evolución y estructura del Universo actual.

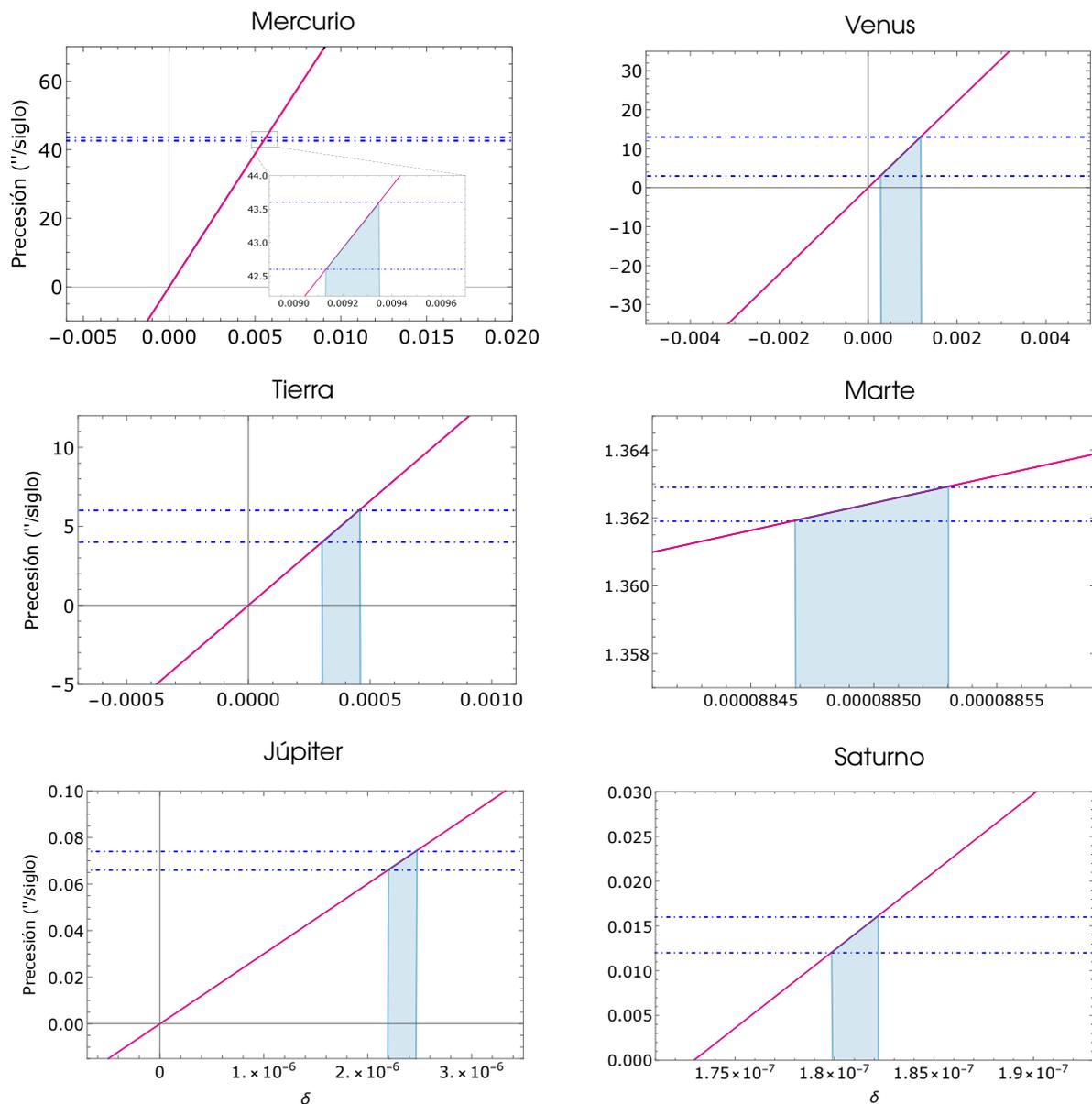


Figura 4.3. Precesión planetaria para un potencial gravitacional de Yukawa en función de la fuerza δ de la corrección. Las líneas púrpura dan la predicción teórica de la precesión derivada de la ecuación 3.61. Las líneas discontinuas azules muestran las medidas observacionales de la precesión con un 99% de nivel de confianza. Las zonas azules sombreadas delimitan las regiones permitidas para el parámetro δ .

orden de magnitud de 10^{-7} . Se muestran los resultados en la tabla 4.2.

Como se explicó en el capítulo 2, las teorías de gravedad $f(R)$ recurren normalmente a mecanismos de *screening* que les permiten ceñirse a las restricciones impuestas por las observaciones a escalas pequeñas. Para teorías con geometría acoplada no mínimamente al campo escalar (presentadas también en el capítulo 2), deben ser impuestas fuertes restricciones o bien a la masa efectiva del campo escalar, dependiente de la curvatura espacio-temporal, o bien al perfil de distribución de densidad de materia, por lo que el campo escalar puede tener un corto alcance a escalas del Sistema Solar pero un largo alcance a escalas cosmológicas, donde puede propagarse libremente dando lugar a la expansión acelerada, así como a otras dinámicas cosmológicas [43]. Una posible interpretación de los resultados expuestos en las tablas 4.1 y 4.2 es el hecho de que una hipotética corrección de Yukawa al potencial de Newton esté apantallada a escalas tan pequeñas como las del Sistema Solar: dado que la gravedad newtoniana tendría

Planeta	a (AU)	ϵ	P (años)	$\dot{\omega}_{GR}$ ("/> / siglo)	$[\dot{\omega}_{min}; \dot{\omega}_{max}]$ ("/> / siglo)
Urano	19.2	0.046	84.10	0.0024	[0.0141; 0.0143]
Neptuno	30.1	0.009	164.80	0.00078	[0.0178; 0.0180]
Plutón	39.4	0.250	247.70	0.00042	[0.113; 0.115]

Tabla 4.2: Esta tabla muestra, para Urano, Neptuno y Plutón, los valores observados del semieje mayor de la órbita (a), su excentricidad (ϵ) y su periodo (P) en las columnas 2-4 respectivamente. En la quinta columna se da el valor de la precesión que predice la Relatividad General ($\dot{\omega}_{GR}$). En la sexta columna se dan los valores teóricos de la precesión orbital derivados de la ecuación 3.61, utilizando los valores acotados del parámetro δ obtenidos para Saturno (Tabla 4.1). La tabla ha sido adaptada a partir de [43].

$\delta = 0$, los resultados obtenidos se desvían de este valor por órdenes de magnitud menores a 10^{-7} , lo que daría lugar a valores de los parámetros λ y δ de Yukawa altamente degenerados. Esta degeneración actuaría como mecanismo de *screening*.

Conclusiones

En este trabajo se ha repasado el paradigma actual del modelo de concordancia Λ CDM, la Materia Oscura Fría (CDM) y otros potenciales modelos de materia oscura. Se ha hecho especial énfasis en los modelos de gravedad modificada como alternativa a la materia oscura, particularmente en el modelo $f(R)$.

Además, se ha escrito un código que resuelve tanto los parámetros de excentricidad y *latus rectum* como la precesión de la órbita para un potencial gravitacional modificado arbitrario, lo que permite extender el análisis a otros potenciales de manera sencilla. Posteriormente se han particularizado estos resultados para el potencial de Yukawa, caso para el cual hemos distinguido entre expansión a primer y segundo orden. Correcciones de tipo Yukawa al potencial gravitacional de Newton surgen de forma natural en el límite de campo débil de modelos de gravedad $f(R)$, lo que ha permitido emplear un enfoque semi-clásico.

El resultado analítico de la precesión ha sido comparado con observaciones de 6 planetas del Sistema Solar que han permitido acotar la intensidad de la corrección de Yukawa, donde hemos obtenido valores de entre 1.798×10^{-7} y 1.822×10^{-7} para un alcance dado de $\lambda = 4500$ AU. De esta manera ha sido también posible comprobar el cambio de dirección en la precesión con el cambio de signo de este parámetro de corrección de Yukawa, confirmando resultados previos [46, 47]. Aplicando los anteriores resultados de δ se han obtenido valores para la precesión de otros tres astros, que comparados con las predicciones de la Relatividad General indican que este parámetro debe ser menor al obtenido en algún orden de magnitud.

Una posible interpretación de estos resultados consistiría en el efecto de apantallamiento que una corrección de Yukawa al potencial de Newton sufriría a escalas pequeñas como la del Sistema Solar, dando lugar a una degeneración de los parámetros de Yukawa y limitando el alcance de la corrección en el límite de campo débil, lo que explicaría la discrepancia entre estos cálculos y las evidencias observacionales.

Conclusions

In this project the current paradigm of the Λ CDM concordance model, Cold Dark Matter (CDM) and other potential dark matter models have been reviewed. Special emphasis has been placed on modified gravity models as an alternative to dark matter, particularly on the $f(R)$ -gravity model.

Furthermore, a code has been written that solves both the eccentricity and *latus rectum* parameters and the orbit precession for an arbitrary modified gravitational potential, which makes it possible to extend the analysis to other potentials in a simple way. Subsequently, these results have been particularized for the Yukawa potential, for which first and second order expansion have been treated separately. Yukawa-like corrections to the Newtonian gravitational potential arise naturally in the weak field limit for $f(R)$ -gravity models, allowing a semi-classical approach.

Analytical result for the orbital precession has been compared to the values for 6 Solar System's planets, bounding the strength of the Yukawa correction and obtaining a range between 1.798×10^{-7} and 1.822×10^{-7} for a fixed characteristic scale length of $\lambda = 4\,500$ AU. Thus, it has been possible to find the change of the orbital precession direction with the sign of the Yukawa strength parameter, confirming previous results [46, 47]. By applying these results for δ , precessions for three other celestial objects have been obtained, which, compared with General Relativity predicted values, state that this parameter must be smaller by some order of magnitude.

These results could be interpreted as the screening mechanism that a Yukawa correction to the Newtonian potential would suffer at small scales, such as the Solar System, causing a degeneracy of the Yukawa parameters and constraining the scope of this correction in the weak field limit, which would explain the discrepancies between these calculations and the observational evidences.

Bibliografía

- [1] Jan H Oort. The force exerted by the stellar system in the direction perpendicular to the galactic plane and some related problems. *Bulletin of the Astronomical Institutes of the Netherlands*, 6:249, 1932.
- [2] F. Zwicky. Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln. *Helvetica Physica Acta*, 6:110–127, January 1933.
- [3] Ivan de Martino, Sankha S. Chakrabarty, Valentina Cesare, Arianna Gallo, Luisa Ostorero, and Antonaldo Diaferio. Dark Matters on the Scale of Galaxies. *Universe*, 6(8):107, August 2020.
- [4] VC Rubin and WK Ford Jr. Rotation of the andromeda nebula from a spectroscopic survey of emission regions <https://doi.org/10.1086/150317> *astrophys*, 1970.
- [5] Kenneth C Freeman. On the disks of spiral and s0 galaxies. *The Astrophysical Journal*, 160:811, 1970.
- [6] M. Milgrom. A modification of the Newtonian dynamics as a possible alternative to the hidden mass hypothesis. , 270:365–370, July 1983.
- [7] P. J. E. Peebles. Large-scale background temperature and mass fluctuations due to scale-invariant primeval perturbations. , 263:L1–L5, December 1982.
- [8] The establishment of the standard cosmological model through observations. chapter 11.
- [9] DJ Fixsen. The temperature of the cosmic microwave background. *The Astrophysical Journal*, 707(2):916, 2009.
- [10] George F Smoot, Charles L Bennett, A Kogut, EL Wright, J Aymon, NW Boggess, ES Cheng, G De Amici, S Gulkis, MG Hauser, et al. Structure in the coBE differential microwave radiometer first-year maps. *The Astrophysical Journal*, 396:L1–L5, 1992.
- [11] C. L. Bennett, D. Larson, J. L. Weiland, N. Jarosik, G. Hinshaw, N. Odegard, K. M. Smith, R. S. Hill, B. Gold, M. Halpern, E. Komatsu, M. R. Nolta, L. Page, D. N. Spergel, E. Wollack, J. Dunkley, A. Kogut, M. Limon, S. S. Meyer, G. S. Tucker, and E. L. Wright. Nine-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations: Final maps and results. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 208(2):20, sep 2013.
- [12] Nabila Aghanim, Yashar Akrami, Frederico Arroja, Mark Ashdown, J Aumont, Carlo Baccigalupi, M Ballardini, Anthony J Banday, RB Barreiro, Nicola Bartolo, et al. Planck 2018 results-i. overview and the cosmological legacy of planck. *Astronomy & Astrophysics*, 641:A1, 2020.
- [13] S-C Yoon and N Langer. Presupernova evolution of accreting white dwarfs with rotation. *Astronomy & Astrophysics*, 419(2):623–644, 2004.
- [14] Allan Sandage and GA Tammann. Steps toward the hubble constant. viii-the global value. *The Astrophysical Journal*, 256:339–345, 1982.

- [15] Adam G Riess, Stefano Casertano, Wenlong Yuan, Lucas M Macri, and Dan Scolnic. Large magellanic cloud cepheid standards provide a 1% foundation for the determination of the hubble constant and stronger evidence for physics beyond λ cdm. *The Astrophysical Journal*, 876(1):85, 2019.
- [16] H Hildebrandt, M Viola, C Heymans, S Joudaki, K Kuijken, C Blake, T Erben, B Joachimi, D Klaes, L t Miller, et al. Kids-450: Cosmological parameter constraints from tomographic weak gravitational lensing. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 465(2):1454–1498, 2017.
- [17] Leandros Perivolaropoulos and Foteini Skara. Challenges for λ cdm: An update. *New Astronomy Reviews*, page 101659, 2022.
- [18] Nachiketa Chakraborty, Brian D Fields, and Keith A Olive. Resonant destruction as a possible solution to the cosmological lithium problem. *Physical Review D*, 83(6):063006, 2011.
- [19] George R Blumenthal, SM Faber, Joel R Primack, and Martin J Rees. Formation of galaxies and large-scale structure with cold dark matter. *Nature*, 311(5986):517–525, 1984.
- [20] KG Begeman, AH Broeils, and RH Sanders. Extended rotation curves of spiral galaxies: Dark haloes and modified dynamics. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 249(3):523–537, 1991.
- [21] Neta A Bahcall and Xiaohui Fan. The most massive distant clusters: Determining Ω and σ_8 . *The Astrophysical Journal*, 504(1):1, 1998.
- [22] Bertone Gianfranco, H Dan, and S Joseph. Particle dark matter: Evidence, candidates and constraints phys, 2005.
- [23] Julio F. Navarro, Carlos S. Frenk, and Simon D. M. White. The structure of cold dark matter halos. *The Astrophysical Journal*, 462:563, may 1996.
- [24] James Binney and Scott Tremaine. *Galactic dynamics*, volume 13. Princeton university press, 2011.
- [25] Antonino Del Popolo and Morgan Le Delliou. Small scale problems of the λ cdm model: a short review. *Galaxies*, 5(1):17, 2017.
- [26] Anatoly Klypin, Andrey V Kravtsov, Octavio Valenzuela, and Francisco Prada. Where are the missing galactic satellites? *The Astrophysical Journal*, 522(1):82, 1999.
- [27] Erik J Tollerud, Michael Boylan-Kolchin, and James S Bullock. M31 satellite masses compared to λ cdm subhaloes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 440(4):3511–3519, 2014.
- [28] Emmanouil Papastergis, Riccardo Giovanelli, Martha P Haynes, and Francesco Shankar. Is there a “too big to fail” problem in the field? *Astronomy & Astrophysics*, 574:A113, 2015.
- [29] Felix Kahlhoefer. Review of lhc dark matter searches. *International Journal of Modern Physics A*, 32(13):1730006, 2017.
- [30] Teresa Marrodan Undagoitia and Ludwig Rauch. Dark matter direct-detection experiments. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 43(1):013001, 2015.
- [31] M Diamond and Philip Schuster. Searching for light dark matter with the slac millicharge experiment. *Physical Review Letters*, 111(22):221803, 2013.
- [32] Miguel Rocha, Annika H. G. Peter, James S. Bullock, Manoj Kaplinghat, Shea Garrison-Kimmel, Jose Oñ orbe, and Leonidas A. Moustakas. Cosmological simulations with self-interacting dark matter – i. constant-density cores and substructure. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 430(1):81–104, jan 2013.

- [33] R. D. Peccei and Helen R. Quinn. CP conservation in the presence of pseudoparticles. , 38(25):1440–1443, June 1977.
- [34] Thomas P Sotiriou and Valerio Faraoni. $f(r)$ theories of gravity. *Reviews of Modern Physics*, 82(1):451, 2010.
- [35] Salvatore Capozziello and Mariafelicia De Laurentis. The dark matter problem from $f(r)$ gravity viewpoint. *Annalen der Physik*, 524(9-10):545–578, 2012.
- [36] K. S. Stelle. Renormalization of higher-derivative quantum gravity. *Phys. Rev. D*, 16:953–969, Aug 1977.
- [37] RH Sanders. Solar system constraints on multifield theories of modified dynamics. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 370(3):1519–1528, 2006.
- [38] Bruno Bertotti, Luciano Iess, and Paolo Tortora. A test of general relativity using radio links with the cassini spacecraft. *Nature*, 425(6956):374–376, 2003.
- [39] Kazuya Koyama. Cosmological tests of modified gravity. *Reports on Progress in Physics*, 79(4):046902, 2016.
- [40] Joel Bergé. The inverse square law and newtonian dynamics space explorer (island). *arXiv preprint arXiv:1809.00698*, 2018.
- [41] Luca Amendola, Dario Bettoni, Ana Marta Pinho, and Santiago Casas. Measuring gravity at cosmological scales. *Universe*, 6(2):20, 2020.
- [42] Stephen T Thornton and Jerry B Marion. *Classical dynamics of particles and systems*. Cengage Learning, 2021.
- [43] Ivan De Martino, Ruth Lazkoz, and Mariafelicia De Laurentis. Analysis of the yukawa gravitational potential in $f(r)$ gravity. i. semiclassical periastron advance. *Physical Review D*, 97(10):104067, 2018.
- [44] GG Nyambuya. Azimuthally symmetric theory of gravitation–i. on the perihelion precession of planetary orbits. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 403(3):1381–1391, 2010.
- [45] A. F. Zakharov, Dusko Borka, Vesna Borka Jovanović, and Predrag Jovanović. Constraints on R^n gravity from precession of orbits of S2-like stars: a case of a bulk distribution of mass. *Adv. Space Res.*, 54:1108–1112, 2014.
- [46] Duško Borka, Predrag Jovanović, V Borka Jovanović, and Alexander F Zakharov. Constraints on r^n gravity from precession of orbits of s2-like stars. *Physical Review D*, 85(12):124004, 2012.
- [47] Duško Borka, Predrag Jovanović, V Borka Jovanović, and Alexander F Zakharov. Constraining the range of yukawa gravity interaction from s2 star orbits. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2013(11):050, 2013.