Documento de Trabajo 14/05

La valoración de opciones reales dependientes de procesos discontinuos. Aplicación a un caso en la industria de componentes del automóvil.

Susana Alonso Bonis
Valentín Azofra Palenzuela
Gabriel de la Fuente Herrero
Universidad de Valladolid

Documento de Trabajo 14/05

La valoración de opciones reales dependientes de procesos discontinuos. Aplicación a un caso en la industria de componentes del automóvil.

Susana Alonso Bonis
Valentín Azofra Palenzuela
Gabriel de la Fuente Herrero
Universidad de Valladolid

RESUMEN:

El objetivo de este trabajo es evaluar las posibilidades de flexibilización de los modelos tradicionales de opciones reales mediante el empleo de las técnicas de simulación. En concreto, combinamos el método de Monte Carlo y la programación dinámica en un modelo que permite valorar opciones reales de estilo americano cuya variable de estado sigue un proceso mixto browniano-Poisson. El análisis de los errores cometidos por los modelos convencionales en la valoración de este tipo de opciones se aborda a través del estudio de un caso de inversión en el sector de componentes del automóvil. Los resultados de la valoración revelan la existencia de diferencias significativas en el valor de las opciones cuando se incorporan las discontinuidades, incluso cuando el valor esperado de las mismas es nulo. Este efecto es mayor cuanto menor es la volatilidad del movimiento continuo, en cuyo caso la utilización de los modelos tradicionales de opciones reales puede provocar errores importantes en el proceso decisional de la empresa. La omisión de las discontinuidades puede motivar, por ejemplo, el rechazo de proyectos rentables cuando la dispersión del salto es reducida, o también la aceptación de proyectos de VAN ampliado negativo en los casos de volatilidad discreta elevada.

Palabras clave: Valoración, selección de inversiones, opciones reales americanas, simulación de Monte Carlo, procesos estocásticos discontinuos.

Universidad de Valladolid
Dpto. Economía Financiera y Contabilidad
Avenida Valle Esgueva, 6 47011- VALLADOLID
Tel: 983 42 30 00 ext. 4393
Fax: 983 42 38 99
salonso@eco.uva.es
vazofra@eco.uva.es
gfuente@eco.uva.es

1. INTRODUCCIÓN

En la primavera de 2000, Tom E. Copeland auguraba que el enfoque de opciones reales acabaría sustituyendo al modelo del descuento de flujos en menos de 10 años (Copeland, 2000). Este pronóstico puede parecer un plazo inconcebiblemente escaso para tamaña empresa, pero supone un proceso de cambio de más de 30 años de duración, que se inicia en 1977 a propuesta de Stewart C. Myers y se prolonga hasta nuestros días. Estos treinta años debieran ser tiempo suficiente para la adopción mayoritaria de una técnica de valoración teóricamente superior a cualquier otro de los métodos conocidos, máxime cuando otras innovaciones de implantación más costosa han conseguido imponerse en un plazo notoriamente inferior.

Entre las razones esgrimidas para justificar la remisa difusión del enfoque, Newton y Pearson (1994) señalan la elevada complejidad operativa de los modelos, Myers (1996) sugiere la falta de comprensión de la filosofía del enfoque por parte de los directivos y Lander y Pinches (1998) aluden al incumplimiento de algunos de los supuestos requeridos por los modelos matemáticos. A estas dificultades cabe añadir un problema mayor, cual es la paradójica falta de flexibilidad del enfoque de opciones reales, que se manifiesta en la carencia de un modelo general –por compleja que sea su comprensión o utilización– susceptible de aplicación a la valoración, si no ya de la totalidad, al menos de las opciones más frecuentes en la inversión empresarial.

Y es que mientras la fórmula del descuento de flujos es susceptible de aplicación directa a la práctica totalidad de oportunidades de inversión, el modelo de opciones carece de similar formulación general. Por el contrario, el enfoque de opciones reales está conformado por una amalgama de fórmulas analíticas y métodos numéricos de valoración, cada uno de ellos adecuado para la valoración de un derecho de decisión concreto definido sobre un activo subyacente de naturaleza específica. Ni siquiera el método binomial, tal vez el más flexible de los modelos convencionales de valoración de opciones, permite el tratamiento directo de procesos estocásticos diferentes del movimiento continuo browniano, múltiples opciones concatenadas de estilo americano o la pluralidad de fuentes de incertidumbre.

Este trabajo se dirige, precisamente, al análisis de las posibilidades de flexibilización de los modelos de valoración de opciones reales y de las consecuencias derivadas del empleo de técnicas inadecuadas a la naturaleza de la inversión evaluada. En concreto, se estudia el potencial de la combinación del método de simulación de Monte Carlo y la programación dinámica en un modelo que permita la valoración de opciones reales de tipo americano cuya variable de estado evoluciona de acuerdo con un proceso mixto browniano-Poisson.

El objetivo es aprovechar la flexibilidad que ofrece la simulación en cuanto a la consideración de diferentes procesos estocásticos, dependencias en el tiempo y múltiples fuentes de incertidumbre, pero superando las limitaciones que plantea su utilización en la estimación de la política óptima de ejercicio anticipado a través de la programación dinámica. El modelo planteado está inspirado en las propuestas de Grant, Vora y Weeks (1996 y 1997) e Ibáñez y Zapatero (2001) para la valoración de opciones financieras. Sin embargo, la naturaleza específica de las opciones reales exige la adaptación del modelo, tanto en la determinación del valor del subyacente a partir de la variable de estado de la que dependen sus flujos, como en la propia modelización del proceso estocástico seguido por esta variable.

El modelo se evalúa a través del estudio de un caso de inversión emprendido por un importante proveedor de componentes del automóvil y de cuyas opciones reales se da buena cuenta en Azofra *et al.* (2004). Los resultados de la valoración alertan de la relevancia de los errores que pueden cometerse en la aplicación de los modelos tradicionales de valoración de opciones reales, como el utilizado en el mencionado trabajo. Concretamente, estos resultados ponen de manifiesto la existencia de diferencias significativas en el valor de las opciones, de compra y de venta, cuando la evolución prevista de la variable de estado recomienda la consideración de discontinuidades discretas. El sentido y el tamaño del error de los modelos convencionales de opciones reales dependen tanto de la influencia ejercida por el movimiento continuo como de la dispersión del salto, observándose las mayores desviaciones cuando menor es la influencia de la variación continua y más elevada la dispersión del salto. En estos casos, la omisión de las discontinuidades implica la aparición de sesgos en la valoración que pueden ocasionar la adopción de decisiones de inversión ineficientes.

El resto del trabajo se articula como sigue. El siguiente apartado presenta el problema de la valoración de opciones americanas sobre procesos estocásticos discontinuos. Nuestra propuesta de valoración se describe en la sección tercera. El apartado cuarto se ocupa del estudio empírico de los resultados de la valoración de las opciones de ampliación y reducción del mencionado caso de inversión en el sector de componentes del automóvil. Cierra este trabajo la recopilación de las principales conclusiones.

2. OPCIONES REALES AMERICANAS SOBRE PROCESOS DISCONTINUOS

Uno de los retos actuales del enfoque de opciones reales es el desarrollo de un modelo general que permita valorar un amplio abanico de derechos, tanto de compra como de venta, con múltiples fechas de ejercicio y de valor dependiente de la evolución de procesos estocásticos de diferente naturaleza.

La posibilidad del ejercicio de las opciones en más de una fecha futura representa uno de los rasgos probablemente más frecuente en la inversión empresarial. Por ello, los mismos argumentos esgrimidos por los promotores del enfoque de opciones reales al criticar el modelo de descuento (McDonald y Siegel, 1986; Ekern, 1988; Lee, 1988; Pindyck, 1991; Ingersol y Ross, 1992), son ahora aplicables a los modelos de valoración de opciones reales europeas. Resulta tan difícil pensar en una oportunidad de inversión empresarial cuyo ejercicio no pueda aplazarse lo más mínimo, como imaginar una opción de crecimiento o de abandono a ejercer en una única fecha futura.

Por lo que respecta a la evolución estocástica de la variable de estado, la mayoría de los modelos de valoración propuestos asumen procesos del tipo geométrico-browniano. Se trata de procesos que han sido ampliamente empleados para describir la evolución de los precios de activos financieros y materias primas, pero son difíciles de generalizar a otro tipo de variables de estado de las que pueden depender las opciones reales. Variables como la demanda, los beneficios o los precios de productos y factores, pueden ajustarse mejor a procesos mixtos, que combinen el movimiento browniano continuo con saltos aleatorios discontinuos. Se trata de discontinuidades motivadas, según cada variable, por advenimiento de una crisis económica, el cambio en los gustos de los clientes, la quiebra de la empresa o, simplemente, el avance tecnológico.

La ocurrencia de saltos aleatorios complica –cuando no imposibilita– la valoración de las opciones americanas a través de las técnicas de solución tradicionales: fórmulas exactas, aproximaciones analíticas y procedimientos numéricos. Merton (1976) deduce la expresión analítica de valoración de la opción europea cuando el valor del subyacente sigue un proceso mixto, compuesto por un movimiento geométrico browniano continuo sujeto a saltos discretos de Poisson. La propuesta de Merton nos sirve para valorar opciones cuyo ejercicio se reduce a la fecha de vencimiento, pero no puede utilizarse en el caso de opciones de estilo americano.

Por su parte, las aproximaciones analíticas y los procedimientos numéricos más habituales –modelo binomial (Cox, Ross y Rubinstein, 1979) y diferencias finitas (Brennan y Schwartz, 1977)– permiten considerar la posibilidad del ejercicio anticipado, pero su implementación informática resulta costosa cuando se contempla la existencia de procesos estocásticos diferentes de la familia del geométrico-browniano y múltiples fuentes de incertidumbre.

En contraposición, los modelos basados en la simulación de Monte Carlo (Boyle, 1977) pueden aplicarse al caso de múltiples variables de estado con independencia del tipo de evolución estocástica al que se ajusten. La mayor flexibilidad de estos métodos se debe a que la valoración se aborda aproximando directamente el proceso del activo subyacente, por lo que no es necesario resolver la ecuación diferencial parcial que describe el comportamiento de la opción. El problema es que la aplicación directa de la simulación de Monte Carlo *no* resulta apropiada para la valoración de opciones de estilo americano. O, al menos, esto es lo que se creía hasta no hace mucho. [1]

La limitación de la valoración por simulación radica en la propia naturaleza de esta técnica. Puesto que el ejercicio de la opción en una fecha concreta impide su ejercicio en un momento posterior, la estrategia que determina el ejercicio óptimo de las opciones americanas depende no sólo del recorrido previo de las variables sino también de sus valores futuros. La consideración de los acontecimientos futuros sólo puede realizarse mediante procedimientos que incluyan *inducción hacia atrás*, tales como la programación dinámica que resuelve los árboles binomiales y trinomiales, o los procedimientos de diferencias finitas que hacen lo propio con las ecuaciones diferenciales parciales. En cambio, el método de Monte Carlo es un procedimiento de *inducción hacia delante*, que genera valores futuros de las variables a partir de su valor previo y, por tanto, representa una técnica apropiada para activos cuyos flujos en un momento determinado no dependen de los acontecimientos posteriores, como es el caso de las opciones europeas (Cortazar, 2001).

Para resolver esta limitación, recientes investigaciones proponen la combinación de la simulación con algún procedimiento de inducción hacia atrás que derive en

---

[1] Un buen ejemplo de esta perspectiva es la 2ª edición del manual de opciones financieras de Hull (1993), referencia fundamental en el estudio de la valoración de derivados, que en su página 334 explicaba que "una de las limitaciones de la aproximación de Monte Carlo es que sólo puede utilizarse para derivados de estilo europeo". En el mismo sentido, Hull y White (1993) plantean que "la simulación de Monte Carlo no puede soportar el ejercicio anticipado ya que no hay forma de saber si éste es óptimo cuando se alcanza un precio particular en un momento determinado".

un modelo de valoración válido tanto para opciones de tipo europeo como americano y cualquiera que sea el número de las variables de estado y la naturaleza de sus procesos estocásticos. El primer intento de aplicación de la simulación en la valoración de opciones de estilo americano lo constituye el trabajo de Tilley (1993)[2], en donde se plantea un modelo para valorar opciones financieras dependientes del valor estocástico de una única variable de estado coincidente con su activo subyacente. Tilley propone ordenar los valores simulados del activo subyacente para cada fecha de ejercicio y agruparlos en "paquetes" para los que se estima un único valor de mantener viva la opción hasta el período siguiente, como el promedio del valor de continuación del conjunto de estas trayectorias.[3]

Al planteamiento de Tilley, le sigue un número creciente de trabajos que proponen distintas combinaciones de la simulación con procedimientos de inducción hacia atrás para la valoración de derivados financieros de naturaleza americana, mediante la aproximación de la función del valor del derivado o la frontera de ejercicio óptima. Dentro de este enfoque, cabe destacar los trabajos de Barranquand y Martineau (1995) y Raymar y Zwecher (1997), que proponen utilizar un algoritmo de particiones sobre el espacio unidimensional de los flujos producidos por la opción, en lugar de la división del espacio multidimensional de los activos subyacentes definida en Tilley (1993). Por su parte, Grant, Vora y Weeks (1996) e Ibáñez y Zapatero (2001) estiman directamente los valores de las variables de estado para los cuales el valor de mantener viva la opción hasta el periodo siguiente se equipara con el valor de su ejercicio inmediato en cada fecha de ejercicio.

De modo alternativo, Broadie y Glasserman (1997a, 1997b) y Broadie Glasserman y Jain (1997) proponen el empleo de árboles simulados no recombinatorios[4] y mallas estocásticas para determinar dos estimadores del valor del derivado, uno sesgado "al alza" y otro sesgado "a la baja", ambos asintóticamente insesgados y convergentes hacia el valor cierto. Finalmente,

---

[2] Algunos autores citan como primera referencia de este enfoque el documento de trabajo de Bossaerts (1989), que analiza el ejercicio anticipado de las opciones americanas mediante simulación.

[3] Este procedimiento presenta algunos inconvenientes importantes, como la necesidad de almacenar todas las trayectorias simuladas –con el consiguiente consumo de tiempo– y la enorme complejidad asociada al proceso de ordenación en caso de considerar múltiples fuentes de incertidumbre.

[4] A diferencia de lo que ocurre en los árboles binomiales, trinomiales, …, los valores que aparecen en cada nudo están colocados en el orden en que se generan y no de acuerdo al valor que tome la variable en dicho nudo.

Longstaff y Schwartz (2001) optan por las regresiones de mínimos cuadrados como método para aproximar el valor esperado de mantener viva la opción en cada punto de decisión.

A la luz de este tipo de propuestas, las finanzas empresariales acogen las primeras aplicaciones del método de Monte Carlo a la valoración de opciones reales. El procedimiento de Barranquand y Martineau (1995) y la ampliación del mismo propuesta por Raymar y Zwecher (1997) han sido utilizados para valorar opciones de estilo americano donde las variables de estado evolucionan según los procesos convencionales de reversión a la media y movimiento geométrico browniano. Es el caso de los trabajos de Cortazar y Schwartz (1998) que resuelven el *timing* óptimo de la explotación de una reserva de petróleo, y Cortazar (2001) que evalúa las operaciones óptimas de una mina de cobre, inicialmente modeladas en Brennan y Schwartz (1985). Otros trabajos aplican el algoritmo de Longstaff y Schwartz (2001) en la valoración de opciones reales vinculadas a patentes y proyectos de investigación y desarrollo (Schwartz, 2004; Schwartz y Miltersen, 2002), licencias (Albertí *et al*., 2004), negocios de en Internet (Schwartz y Moon, 2000; Schwartz y Moon, 2001; Lamothe y Aragón, 2002) y empresas farmacéuticas (León y Piñeiro, 2003). Finalmente, Juan, Olmos, Pérez y Casasús (2002) presentan un modelo que aproxima el valor de opciones multidimensionales mediante la simulación de escenarios y que utilizan en la evaluación de la opción de ampliación de las infraestructuras de un puerto naval.

Siguiendo el camino iniciado estos trabajos, el epígrafe siguiente profundiza en la extensión de las técnicas de simulación a la valoración de opciones reales de naturaleza americana cuya variable de estado sigue un movimiento continuo estocástico sujeto a saltos igualmente aleatorios.

3. FLEXIBILIZANDO LA VALORACIÓN DE LA FLEXIBILIDAD

El modelo que proponemos tiene por objeto la valoración de opciones reales – tanto de crecimiento (compra) como de abandono (venta)– de duración limitada, T^O, que pueden ejercerse en uno o más momentos futuros, $\tau < 2\tau < \ldots < N\tau = T^O$, durante la vida también limitada de la inversión subyacente, T.[5]

[5] La equidistancia (τ) de las fechas de ejercicio, que se desprende de esta formulación, se supone a los solos efectos de claridad de la exposición y no representa condicionante alguno del modelo. Lógicamente $T^O<T$.

De esta inversión se espera una corriente de flujos de tesorería dependientes de una única variable exógena, S_t, cuya evolución en el tiempo suponemos se ajusta a un proceso mixto, compuesto por un movimiento continuo del tipo geométrico-Browniano sujeto a la ocurrencia de saltos discretos aleatorios distribuidos según una variable de Poisson. Es decir, la variación infinitesimal de la variable de estado dS_t responde a la siguiente ecuación

$$dS_t = (\alpha - \lambda k)S_t dt + \sigma S_t dz + (\pi - 1)S_t dq \qquad (1)$$

donde α *y* σ simbolizan, respectivamente, la tasa de variación esperada y volatilidad del movimiento continuo; λ es la frecuencia media de los saltos discretos por unidad de tiempo; (π-*1*) y k son, respectivamente, la variable aleatoria que mide el tamaño del salto proporcional en el precio del activo y su valor medio[6]; y dz_t y dq_t representan sendos procesos estocásticos de Wiener y de saltos que suponemos independientes y caracterizados por sus expresiones habituales:

$$dz = \xi \cdot \sqrt{dt}, \quad \xi \to N(0,1) \qquad (2)$$

$$dq = \begin{cases} 0 & \text{prob} = 1 - \lambda \cdot dt \\ 1 & \text{prob} = \lambda \cdot dt \end{cases}, \quad q \to Poisson[\lambda] \qquad (3)$$

En cuanto a la amplitud de la variación discreta, suponemos que el tamaño de cada salto es independiente y que *log(*π*)* sigue una distribución normal con media μ_π y desviación σ_π, de modo que:

$$k = E[\pi - 1] = \exp\left(\mu_\pi + \frac{\sigma_\pi^2}{2}\right) - 1 \qquad (4)$$

Las discontinuidades discretas se asocian con el acaecimiento de eventos "raros" e importantes, que dan lugar a variaciones ascendentes o descendentes en la variable incierta, mientras que el proceso continuo –el movimiento geométrico browniano– se asocia a la idea de eventos "normales". Siguiendo la práctica usual, suponemos que se desconoce a priori el sentido del salto y por tanto que el efecto del salto en el término de tendencia es nulo, es decir, $\mu_\pi = -\sigma_\pi^2/2$ y $k = 0$.

[6] Por tanto, la tasa de crecimiento medio provocada por los saltos discretos es λk.

El método que proponemos para valorar este tipo de opciones reales[7] se basa en la determinación, en cada momento en que se permite el ejercicio anticipado de la opción, $\tau < 2\tau < \ldots < N\tau = T^O$, de los sucesivos valores "críticos" de la variable exógena, S_τ^*, $S_{2\tau}^*$, ..., $S_{N\tau}^*$, para los que el valor resultante del ejercicio de la opción se equipara al valor de mantenerla viva hasta el periodo siguiente. Estos valores críticos sirven para estimar los valores derivados de la política de ejercicio óptima de una serie de trayectorias simuladas, a partir de los cuales se determina el valor actual ampliado del proyecto. La resolución del problema de valoración se desarrolla, por tanto, en dos etapas: i) una primera que consiste en la estimación de los sucesivos valores "críticos" a través de la combinación del método de Monte Carlo y la programación dinámica; y ii) otra que estriba en la determinación del valor de la opción a partir de los valores críticos anteriores y que requiere únicamente el empleo de las técnicas de simulación.

3.1. Primera etapa: Estimación de la frontera de valores críticos

Suponiendo la existencia de mercados completos, y aplicando la valoración *risk neutral*, la expresión que representa el valor futuro de equilibrio del activo financiero "gemelo" de la variable de estado es la siguiente:

$$S_t = S_0 \exp\left[\left(r - \delta - 0.5\sigma^2\right)\Delta t + \sigma z_0 \sqrt{\Delta t} + \sum_{i=1}^{q}\left(\sigma_\pi z_i - \sigma_\pi^2 / 2\right)\right] \qquad (5)$$

donde r y δ simbolizan, respectivamente, el tipo de interés libre de riesgo continuo y la tasa de dividendo o tasa de utilidad[8], z_0 representa la variable normal unitaria asociada al proceso continuo de difusión; z_i son las variables normales unitarias independientes que determinan el tamaño de cada salto; y q refleja, como ya se ha señalado, el número de saltos discretos determinados por una distribución Poisson con frecuencia λ.[9]

[7] El método es aplicable a opciones tanto de compra como de venta y de estilo tanto europeo como americano.

[8] Siguiendo a Merton (1976) suponemos que el riesgo asociado al salto discontinuo de la variable de estado es diversificable. La simulación neutral al riesgo presenta entonces una tendencia continua modificada r-δ, en lugar de la tendencia α inicial. Esto es equivalente a deducir de la tendencia continua la prima por el riesgo de mercado del activo correspondiente (Trigeorgis, 1996: 102).

[9] La simulación del número de saltos discretos en un intervalo de tiempo, Δt, se obtiene de la aplicación del método de Monte Carlo a la la función de probabilidad acumulada, $P[q \leq X]$.

Cada uno de los valores simulados de la variable de estado determina un par de valores del proyecto subyacente contingentes al ejercicio de la opción, $V^i_{t,ejercicio}\left(S^i_t\right)$ y $V^i_{t,no}\left(S^i_t\right)$, donde el superíndice i indica el número de simulaciones realizadas. El valor del proyecto de inversión si se ejercita la opción en t (con $t \leq T^O$) se corresponde con la suma del flujo obtenido en ese momento, $F^i_{t,ejercicio}$, y el valor esperado del proyecto en el periodo siguiente, $E\left[V^i_{t+\tau,ejercicio}\right]$, considerando además el precio de ejercicio, X, cobrado o pagado por la venta o la compra del proyecto, según se trate, respectivamente de una opción de venta o de compra:

$$V^i_{t,ejercicio}\left(S^i_t\right) = \pm X + F^i_{t,ejercicio} + E\left[V^i_{t+\tau,ejercicio}\right]\exp(-r\tau) \qquad (6)$$

Para determinar el valor del proyecto subyacente en el caso en que la opción no se ejercita es preciso distinguir entre la fecha de vencimiento de la opción, y los restantes momentos en que se permite el ejercicio anticipado. Así, si $t = T^O$, el valor del subyacente se corresponde con el valor actual de la corriente de flujos derivada de la expiración sin ejercicio de la opción generadas desde el vencimiento de la opción al término del proyecto, (T^O, T),

$$V^i_{T^O,no}\left(S^i_{T^O}\right) = F^i_{T^O,no} + E\left[V^i_{T^O+\tau,no}\right]\exp(-r\tau) \qquad (7)$$

Por el contrario, si la opción no se ejerce en un momento t anterior al vencimiento (es decir, $t < T^O$), el valor del proyecto se determina considerando la posibilidad de adoptar una nueva decisión contingente en un momento posterior. Es decir, el valor del subyacente se calcularía a partir del valor esperado del proyecto en el período siguiente –que recoge las decisiones óptimas adoptadas hasta el vencimiento de la opción– y el flujo generado en ese momento.

$$V^i_{t,no}\left(S^i_t\right) = F^i_{t,no} + E\left[V^i_{t+\tau}\right]\exp(-r\tau) \qquad (8)$$

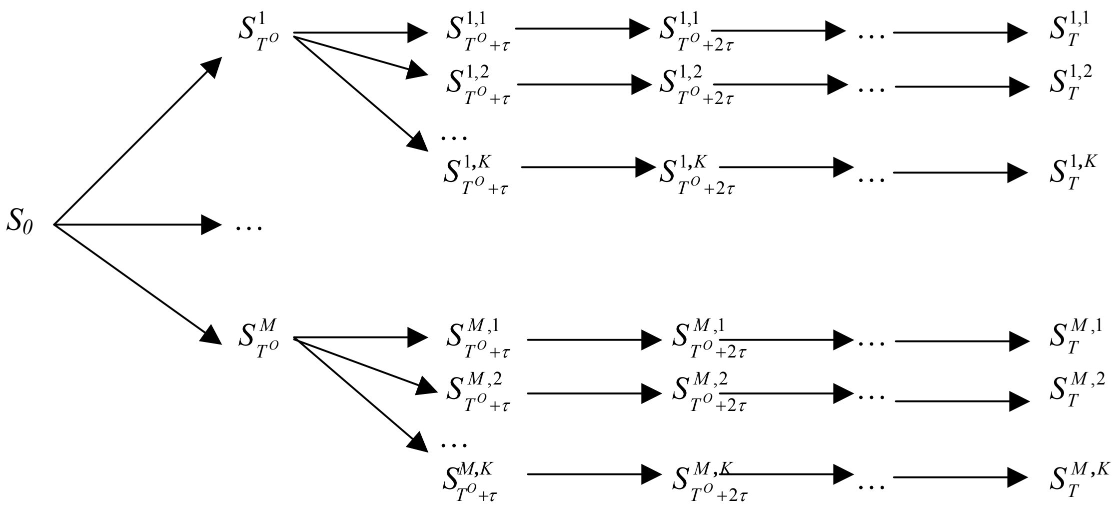
donde r es el tipo de interés libre de riesgo y τ es el intervalo temporal en que se ha dividido la duración de la opción.

La estimación de la sucesión de valores críticos se inicia mediante la simulación de M valores de la variable de estado en la fecha de vencimiento del derecho, $S^{i=1,2,\ldots,M}_{T^O}$, a partir de su valor inicial, S_0, y según el proceso estocástico supuesto.[10]

[10] La simulación puede iniciarse a partir de cualquier momento y valor de la variable (Grant, Vora y Weeks, 1996), pero al tratarse de una opción de tipo americano, cuyo ejercicio óptimo depende en cada momento de las expectativas futuras, el primer valor crítico a determinar ha de ser el correspondiente al vencimiento.

Por definición, el valor crítico en la fecha de vencimiento de la opción, $S^{*}_{T^{o}}$, es aquel para el cual el valor del proyecto subyacente supuesto el ejercicio inmediato de la opción, $V_{T^{O},ejercicio}\left(S^{*}_{T^{O}}\right)$ coincide con el valor derivado del no ejercicio, $V_{T^{O},no}\left(S^{*}_{T^{O}}\right)$.

La estimación de estos valores críticos requiere simular a su vez *K* trayectorias de la variable exógena hasta el vencimiento del proyecto subyacente, *T*, $S^{i,j}_{T^{O}+\tau}$, $S^{i,j}_{T^{O}+2\tau}$, … , $S^{i,j}_{T}$ para i=1, 2, …, *M* y j=1, 2, …, *K*, esto es:



Cada una de estas trayectorias permite estimar sendas corrientes de flujos derivadas del ejercicio y expiración sin ejercicio de la opción generadas desde el vencimiento de la opción al término del proyecto, (T^{O}, *T*). Lógicamente, el descuento de cada una de estas corrientes de flujos a la fecha de vencimiento de la opción, T^{O}, proporciona el correspondiente valor contingente de la inversión, $V_{T^{O},decision}\left(S^{i}_{T^{O}}\right)$, y la comparación de estos *M* pares permite identificar el valor crítico buscado, $S^{*}_{T^{O}}$.

Estimado el valor crítico de la variable de estado en la fecha de vencimiento de la opción, retrocedemos en el tiempo hasta el momento inmediatamente anterior de ejercicio de la opción, T^{O}-τ, para el que se repite la rutina de aproximación del valor de la variable de estado, $S^{*}_{T^{O}-\tau}$, en que convergen los valores del proyecto derivados del ejercicio y no ejercicio de la opción en esta fecha, $V_{T^{O}-\tau,ejercicio}\left(S^{*}_{T^{O}-\tau}\right) = V_{T^{O}-\tau,no}\left(S^{*}_{T^{O}-\tau}\right)$.

De nuevo, el procedimiento para determinar $S^{*}_{T^{O}-\tau}$ requiere generar un conjunto de *M* nuevos valores de la variable de estado, $S^{i=1,\dots,M}_{T^{O}-\tau}$, a partir de los cuales se simulan otras K trayectorias hasta el término del proyecto –valores de $S^{i,j}_{T^O}$, $S^{i,j}_{T^O+\tau}$, $S^{i,j}_{T^O+2\tau}$, … , $S^{i,j}_{T}$ para i=1, 2, …, M y j=1, 2, …, K. Estas trayectorias sirven a su vez para determinar las corrientes de flujos generadas por el proyecto desde esta fecha y en sendos casos de ejercicio y no ejercicio del derecho.

En este caso, la forma de operar requiere considerar no sólo si se ejerce o no la opción en T^O-τ, sino también la posibilidad de ejercer la opción en un momento posterior, lo cual influye principalmente en la determinación del valor esperado del proyecto en el período siguiente. Si la opción se ejerce en T^O-τ, el valor esperado del proyecto en el periodo siguiente, $E\left[V^i_{T^O,ejercicio}\right]$, debe calcularse teniendo en cuenta el ejercicio que ya ha tenido lugar, que a su vez impide la adopción de nuevas decisiones de ejercicio en fechas posteriores. Pero, si la opción no se ejerce en T^O-τ, la obtención del valor esperado del proyecto en esta fecha requiere considerar la posibilidad de adoptar una nueva decisión contingente en el período siguiente, comparando el valor simulado de la variable $S^{i,j}_{T^O}$ con el valor crítico obtenido en el paso anterior, $S^*_{T^O}$.

Como resultado, para algunos valores $S^{i,j}_{T^O}$ la opción se ejercerá en T^O, mientras que para otros la opción expirará sin ejercicio. Así, el valor esperado del proyecto en T^O, $E\left[V^i_{T^O}\right]$ –sin subíndice que indique ejercicio o no ejercicio– se calcula promediando los j valores obtenidos, ya sea con ejercicio o sin ejercicio de la opción. Una vez estimado el valor esperado del proyecto supuesto el no ejercicio de la opción en T^O-τ, $E\left[V^i_{T^O}\right]$, la determinación del valor del proyecto, $V^i_{T^O-\tau,no}$, tan sólo requiere añadir el flujo generado en esta fecha. Resta, por último, comparar el valor derivado del ejercicio de la opción, $V^i_{T^O-\tau,ejercicio}$, con el valor del mantenerla viva hasta el período siguiente, $V^i_{T^O-\tau,no}$, al objeto de identificar el valor crítico en T^O-τ, $S^*_{T^O-\tau}$, para cada $S^i_{T^O-\tau}$.

El procedimiento utilizado para determinar $S^*_{T^O-\tau}$, se repite para cada una de las fechas previas de ejercicio posible hasta encontrar el resto de valores que constituyen la frontera óptima de ejercicio. Obviamente, a medida que nos aproximamos al momento inicial y aunque la lógica de la estimación es siempre la misma, la complejidad y el número de las operaciones implicadas en la determinación de los valores críticos se multiplica.

3.2. Segunda etapa: la estimación del valor actual de la opción

Una vez determinados los valores críticos de la variable de estado en los distintos momentos en que se permite el ejercicio de la opción, S^*_{τ}, $S^*_{2\tau}$, ..., $S^*_{T^o-\tau}$, $S^*_{T^o}$, la estimación del valor de la opción americana puede obtenerse utilizando la simulación tradicional como si de una opción europea se tratase.

En este caso, la simulación supone la estimación de un número suficiente de trayectorias de la variable de estado y se determina de acuerdo con la frontera de ejercicio óptima cuál es el momento en que resulta óptimo el ejercicio de opción. El valor actual de la opción se aproxima entonces a través del promedio de la muestra de observaciones simuladas.

4. LA EVIDENCIA DE UN CASO DE INVERSIÓN EN EL SECTOR DE COMPONENTES DEL AUTOMÓVIL

Con el fin de evaluar el modelo de simulación propuesto y, con ello, el interés de la flexibilización de la valoración de las opciones reales, analizamos los resultados de su aplicación al caso de una inversión empresarial, cuya valoración mediante el enfoque tradicional de opciones reales se documenta en Azofra *et al.* (2004). La inversión consiste en la implantación directa de capacidad productiva en Brasil por parte de un proveedor de componentes del automóvil de primer nivel. Tal y como se indica en Azofra *et al.* (2004), el proyecto pertenece a esa clase de oportunidades que aun presentando VAN negativo son emprendidas a cuenta y razón de su valor estratégico, es decir, de sus opciones reales.

De resultas de este compromiso, la empresa inversora pretendía atender la demanda de componentes de tres de las cuatro empresas ensambladoras con capacidad productiva en Brasil y, al mismo tiempo, posicionarse adecuadamente en el negocio sudamericano de componentes para acceder a futuras oportunidades de crecimiento. El desembolso inicial de 38 millones de dólares permitía satisfacer las ventas previstas para los cinco años siguientes, que suponían el aprovisionamiento de componentes del interior del automóvil a unos 500.000 vehículos durante el primer año de operaciones y cerca de 850.000 unidades en cada uno de los cuatro siguientes.

La tabla 1 muestra los flujos de tesorería que se esperaba obtener en estos cinco años. El consiguiente VAN oscilaba entre el saldo negativo de 7 millones de dólares, en el caso de duración igual a cinco años y coste de capital del 13’66%, y el valor también negativo de 21 millones de dólares, en el supuesto de duración perpetua y coste de capital del 28’4%. En cualquier caso, los resultados del modelo de descuento de flujos aconsejaban el rechazo de la inversión.

La consideración de las opciones de crecimiento y flexibilidad ofrecía un VAN ampliado bien distinto. En concreto, Azofra *et al.* (*op. cit.*) valoran las opciones europeas de crecimiento, de redistribución de los activos y capacidades hacia usos más rentables, de reducción de los recursos asignados y de liquidación prematura del negocio –esta última de estilo americano–. La estimación se obtiene de la aplicación de un modelo numérico log-binomial, en el que la incertidumbre del proyecto se sintetiza en la producción de automóviles en Brasil, única variable de estado, que se supone sigue un proceso geométrico browniano. Los resultados confirmaban la significatividad de estas opciones en los diferentes supuestos de evolución futura de la variable de estado, proporcionando evidencia empírica favorable a la relevancia de las opciones reales en la explicación de las decisiones de inversión adoptadas por las empresas en la práctica.

Tabla 1. Dimensión financiera del proyecto (valores en dólares)

	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4	Año 5
Cobros	31.009.744	64.419.802	64.024.381	64.042.568	64.061.301
Pagos por gastos de materia prima	18.084.198	37.115.877	38.229.353	39.376.234	40.557.521
Pagos por gastos de personal	3.254.573	4.080.048	4.202.450	4.328.523	4.458.379
Pagos por otros gastos operativos	705.894	1.243.175	1.280.470	1.318.884	1.358.451
Pagos por gastos generales	4.565.585	6.031.865	6.212.821	6.399.206	6.591.182
Impuestos	815.300	3.378.460	3.345.600	4.102.066	3.970.547
Total Pagos	27.425.549	51.849.425	53.270.694	55.524.913	56.936.080
Flujo neto de tesorería	3.584.195	12.570.376	10.753.687	8.517.655	7.125.221

Fuente: Azofra *et al.* (2004)

Tomando como punto de referencia la información contenida en este caso, evaluamos las consecuencias de la aplicación de los modelos tradicionales de valoración de opciones reales en lugar de modelos más flexibles, como el propuesto, apropiados para considerar diferentes fechas de ejercicio y procesos estocásticos. Nuestro análisis se centra en la valoración de las opciones de ampliación y reducción de la dimensión inicial del proyecto. La fecha de vencimiento de estas opciones coincide con el término del cuarto año de operaciones y pueden ser ejercitadas en tres fechas diferentes, al término de los intervalos anuales segundo, tercero y cuarto.

La opción de ampliar el tamaño inicial de la inversión se asimila a una opción de compra con precio de ejercicio igual al coste de los activos necesarios para la ampliación. El ejercicio de la opción implica el incremento del 50% de la cuota de mercado y capacidad productiva máxima y exige un desembolso del 40% de la inversión inicial[11]. Por su parte, la opción de reducción se equipara a una opción de venta con precio de ejercicio igual al valor contable del inmovilizado afectado. El ejercicio de la opción conlleva la venta de los elementos asignados al 50% de la capacidad productiva máxima.

Los valores de estas opciones son estimados supuestos sendos procesos estocásticos de la producción de automóviles: el geométrico browniano puro, por un lado, y el proceso mixto que combina el browniano anterior y saltos discontinuos asociados a un movimiento del tipo Poisson, por otro. Los valores de los parámetros empleados en la valoración son: i) para el proceso geométrico browniano puro, ensayamos con volatilidades alternativas del 7%, 13% y 20% y tasas de crecimiento anual medio del 0%, 7% y 15%; y ii) para la parte discontinua del proceso mixto, los valores de la volatilidad del salto considerados son el 25%, 50%, 200%, 400% y 500% que son combinados con un único valor del número esperado de variaciones previstas igual a 0'2 (λ = 0,2).[12]

Adicionalmente, se asume que los saltos discontinuos pertenecen a la categoría de riesgo propio o no sistemático y, siguiendo a Azofra *et al.* (2004), que el valor inicial de la variable de estado asciende a 1.629.000 vehículos, que existe un valor máximo que actúa de barrera absorbente en los 4.000.000 de unidades, que la capacidad máxima inicial del proyecto es de 1.200.000 vehículos y, finalmente, que la rentabilidad libre de riesgo, la prima del mercado y la beta de la variable de estado son, respectivamente, del 6'59%, 6'85%, y 1'035 para el período evaluado.

---

[11] Con el fin de simplificar el análisis hemos supuesto que el ejercicio de la opción de ampliación conlleva el incremento tanto de la cuota de mercado como de la capacidad productiva del proyecto. Sin embargo, el dominio de poder de empresas montadoras de automóviles limita el alcance del ejercicio de estas opciones de crecimiento. Al respecto, véase Azofra *et al*. (2004).

[12] El parámetro λ = 0,2 implica que, por término medio, únicamente se va a producir un salto discreto a lo largo de la vida del proyecto de inversión subyacente. Hemos preferido presentar los resultados de la valoración supuesto un proceso de saltos aleatorios de elevada volatilidad y baja frecuencia, frente a múltiples saltos de menor tamaño difícilmente distinguibles de la propia evolución continua. Sobre la elección de los parámetros véase http://www.puc-rio.br/marco.ind/stoch-a.html#jump-dif.

La simulación se realiza por subintervalos anuales, evaluándose la posibilidad de ejercicio anticipado de la opción en cada una de las tres fechas de ejercicio consideradas. El número de trayectorias simuladas para obtener el valor actual de cada opción asciende a 400.000, que resulta de 200.000 aproximaciones directas más otras 200.000 estimaciones utilizando la técnica de las "variables antitéticas"[13] y valores de los parámetros M y K del modelo iguales a 250.

4.1. Valoración de la opción de ampliación

La tabla 2 muestra los valores estimados de la opción de ampliación para los distintos supuestos de los parámetros del proceso geométrico browniano puro y del proceso mixto[14]. Estos resultados muestran la existencia de diferencias significativas en el valor de la opción y, por tanto, la relevancia de los errores cometidos por los modelos convencionales de opciones reales, en especial cuando la influencia del movimiento continuo es menor. Así, por ejemplo, en el escenario de menor volatilidad y variación continua ($\alpha = 0\%$ y $\sigma = 7\%$), el valor de la opción de ampliación se multiplica por diez cuando se introduce un salto con una dispersión del 50%, y se reduce en casi un 63% cuando la dispersión del salto alcanza el 500%.

Tabla 2. Valor Actual de la Opción de Ampliación. (valores en dólares)

VALOR DE LA OPCIÓN DE AMPLIACIÓN							
		Volatilidad del salto					
Crecimiento = 0%		**0%**	**25%**	**50%**	**200%**	**400%**	**500%**
Vol. Continua	**7%**	312.873	3.407.674	3.437.741	3.176.893	858.289	1.161
	13%	2.929.654	3.324.563	3.262.759	3.081.872	506.825	55.089
	20%	2.982.518	3.133.025	3.082.541	3.069.448	1.320.619	135.523
Crecimiento = 7%							
Vol. Continua	**7%**	5.540.529	6.267.291	6.269.846	6.205.984	1.282.933	234.399
	13%	6.049.640	6.057.937	6.187.022	6.076.662	6.013.014	297.031
	20%	5.711.136	5.798.847	5.765.695	5.754.646	5.376.632	450.163
Crecimiento = 15%							
Vol. Continua	**7%**	10.407.635	10.514.035	10.483.700	10.458.744	2.991.413	2.410.859
	13%	9.875.194	10.044.934	10.016.151	10.022.054	10.035.878	2.312.445
	20%	9.390.971	9.331.241	9.263.664	9.424.308	9.147.263	5.315.770

[13] La técnica de las variables antitéticas consiste en la generación de dos observaciones simétricas en cero por cada una de las simulaciones aleatorias de la distribución normal acumulada con las que se obtienen sendos valores del derivado.

[14] Nótese que el nivel de volatilidad del salto discreto del 0% corresponde al proceso geométrico browniano puro

Los resultados de la valoración evidencian que el signo de la relación entre el valor de la opción y la volatilidad del salto dependen del nivel de esta última. Así, el valor de la opción aumenta en los escenarios de menor dispersión del salto, fruto del incremento de la volatilidad total a la que está sometida la variable. Estas diferencias son más significativas en el supuesto de menor volatilidad continua (σ = 7%), ya que en este caso el incremento que experimenta la volatilidad total ante un salto de igual dispersión, es mucho mayor, en términos relativos, que en niveles de volatilidad continua elevada. Así, por ejemplo, una dispersión del salto igual al 100% implica una volatilidad total del proceso del 53’9% ó del 50’5% según la desviación típica del movimiento continua sea respectivamente del 20 ó 7%.[15]

A medida que aumenta la volatilidad del salto, esta relación se invierte y se acentúa en los niveles superiores de volatilidad continua. Este resultado se mantendrá en la medida en que el tamaño medio de los saltos, *k*, sea nulo y no afecte al término de tendencia del proceso seguido por la demanda. Este supuesto implica que la media que toma la distribución del logaritmo del salto depende inversamente del valor asignado a la volatilidad del salto ($\mu_\pi = -\sigma_\pi^2/2$) y, por tanto, un incremento de ésta para valores superiores al 100% reduce dicha media y con ello el valor del subyacente. Adicionalmente, la limitación al alza de los flujos impuesta por la capacidad de producción máxima intensifica la relación inversa entre valor de la opción de ampliación y volatilidad del salto.

Con relación a la evolución continua de la variable de estado, se confirma la relación positiva esperada entre la tasa de crecimiento y el valor de la opción para los distintos niveles de volatilidad y procesos estocásticos considerados. Lógicamente, cuánto más favorable es el escenario previsto respecto al crecimiento de la producción de automóviles más probable y rentable resulta la ampliación de la inversión inicialmente prevista.

No ocurre lo mismo con la volatilidad continua de la variable de estado, que exhibe una relación negativa con el valor de la opción de ampliación contraria a la relación *ceteris paribus* que establece la teoría de opciones financieras. Sin embargo, este resultado es coherente tanto con la naturaleza del proyecto de inversión como con el método de discretización de la variable de estado empleado. Por un lado, la capacidad máxima del proyecto motiva un efecto asimétrico de la volatilidad sobre la distribución de probabilidad de los flujos netos de tesorería. Mayor volatilidad implica mayor dispersión de los valores

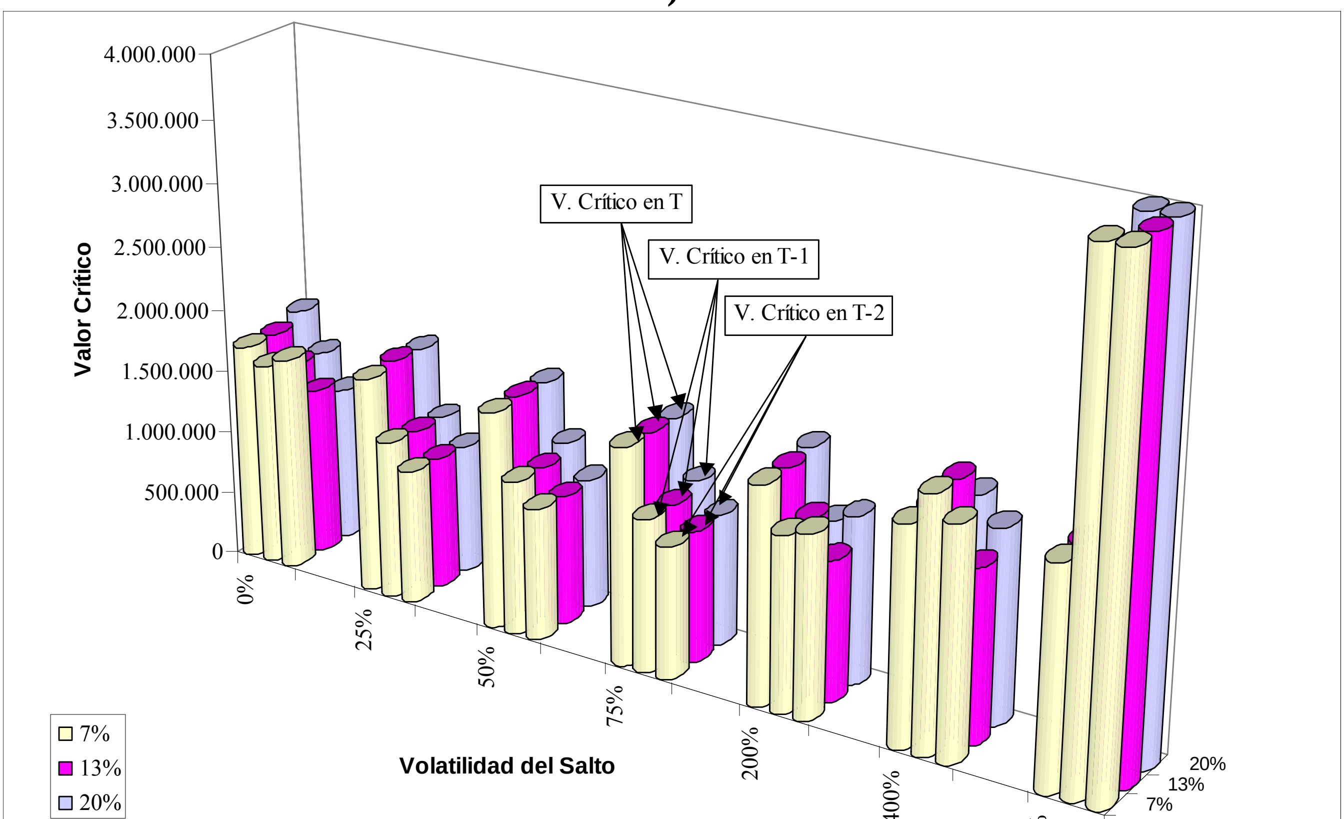
[15] El cálculo de la volatilidad total de la variable incierta para el proceso mixto considerado se ha efectuado a partir de la expresión obtenida en Navas (2004), que corrige la obtenida inicialmente en Merton (1976).

inferiores, mientras que los valores superiores permanecen acotados por dicha capacidad máxima y, en consecuencia, el incremento de la volatilidad reducirá el valor de la ampliación, especialmente en los niveles más elevados de crecimiento de la variable exógena[16].

Por otro lado, la hipótesis de que la variable de estado evolucione en el campo continuo según un proceso de difusión lognormal, motiva que su variación relativa se distribuye normalmente con una tendencia aminorada en 0,5 veces la varianza del proceso. En consecuencia, el parámetro de la volatilidad no sólo afecta a la desviación de los valores futuros, sino también al propio valor esperado empleado en la simulación. De ahí que, el aumento de la volatilidad no solo incremente el espectro de posibles valores futuros del subyacente, sino también reduzca su valor simulado medio y, por ende, las posibilidades de ejercicio óptimo de la opción de ampliación.

Finalmente, el gráfico 1 muestra el comportamiento de los valores críticos en las tres fechas de ejercicio en función de los parámetros del proceso estocástico de la variable de estado. Lógicamente, estos valores reflejan la relación entre el valor de la opción y las características del movimiento de la variable de estado antes descritas. Adicionalmente, el gráfico confirma la tendencia creciente esperada de los valores críticos a la vez que su menor dispersión a medida que se aproxima la fecha de ejercicio[17]. Dicha tendencia creciente deja de verificarse en los niveles de mayor dispersión del salto, ya que el incremento de la volatilidad conjunta que experimenta el proceso de la variable de estado retrasa el ejercicio óptimo de la opción.

Gráfico 1. Valores Críticos para la opción de ampliación
Tasa de crecimiento de la variable exógena = 7 % (valor en unidades físicas)



4.2. Valoración de la opción de reducción

Los resultados de la valoración de la opción de reducción se presentan en la tabla 3. De nuevo, se consideran diferentes supuestos respecto a los valores de los parámetros del proceso geométrico browniano puro y del proceso mixto. La incorporación de los saltos discontinuos afecta al valor de la opción, aunque la variación relativa que experimenta el derecho es notoriamente inferior a la que se percibe en la opción de ampliación. La menor influencia relativa sobre la opción de reducción responde a las propias características del proceso estocástico considerado. Concretamente, los niveles positivos de crecimiento de la variable exógena hacen que la probabilidad de ejercicio de la opción apenas se modifique ante el incremento de la volatilidad discreta y ello a pesar de la disminución experimentada por el valor de su subyacente.

Tabla 3. Valor Actual de la Opción de Reducción.
(valores en dólares)

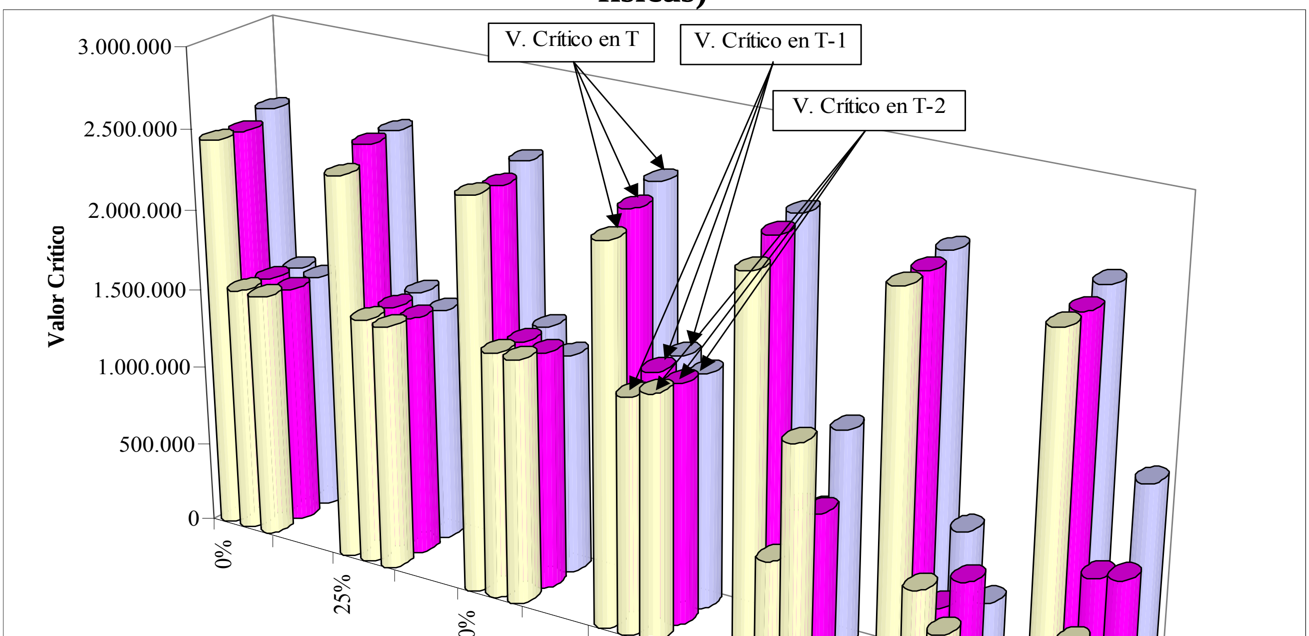
VALOR DE LA OPCIÓN DE REDUCCIÓN							
		Volatilidad del salto					
Crecimiento = 0%		0%	25%	50%	200%	400%	500%
Vol. Continua	7%	7.452.355	7.485.042	7.518.699	7.451.866	7.520.563	6.547.175
	13%	7.327.731	7.207.169	7.301.422	7.273.813	6.704.014	6.466.436
	20%	7.104.753	7.086.805	7.004.114	6.898.377	6.907.277	6.057.615
Crecimiento = 7%							
Vol. Continua	7%	4.122.866	4.083.164	4.099.236	4.040.439	4.257.156	4.000.611
	13%	4.166.675	4.184.722	3.905.423	4.066.786	4.135.143	3.835.338
	20%	4.365.836	4.263.876	4.352.069	4.312.322	4.228.643	4.056.904
Crecimiento = 15%							
	7%	213.862	286.000	255.159	333.049	266.642	242.147

7%	213.862	286.000	255.159	333.049	266.642	242.147
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Puede observarse que cuanto mayor es la influencia del componente continuo (valores elevados de α y σ) menor es la influencia del salto en el valor del derecho. Por el contrario, cuando el efecto del movimiento continuo es apenas relevante, el incremento de la dispersión del salto reduce visiblemente el valor de la opción. Este resultado responde a la propia naturaleza de la variable exógena, cuyo límite inferior se encuentra acotado en cero de modo que la dispersión del salto ejerce un efecto asimétrico sobre la distribución de probabilidad de los flujos de tesorería. La mayor volatilidad que conllevan las discontinuidades implica mayor dispersión de los valores superiores, mientras que los valores inferiores permanecen acotados y, con ello, las posibilidades de disminuir óptimamente la dimensión del proyecto.

Por otra parte, los resultados permiten confirmar la relación negativa prevista entre la tasa de crecimiento y el valor de la opción para los distintos niveles de volatilidad y procesos estocásticos considerados. Cuánto más desfavorable es el escenario previsto respecto a la variable de estado, más valiosa resulta cualquier acción destinada a reducir las dimensiones del proyecto inicial. Lo mismo ocurre con la volatilidad continua de la variable de estado, que exhibe una relación positiva con el valor de la opción de reducción, fruto no sólo del esperado aumento asimétrico de las posibilidades de ganancias de la opción, sino también de la reducción "implícita" del valor medio simulado del subyacente, ya comentada para la opción de ampliación. Únicamente, cuando la variable de estado presenta una tendencia plana, (α = 0%), el incremento de la volatilidad favorece al valor del activo subyacente sin llegar a modificar la probabilidad de ejercicio, de nuevo, debido al límite inferior con que cuenta la producción de automóviles.

Gráfico 2. Valores Críticos para la opción de reducción.
Tasa de crecimiento de la variable exógena = 7 %. (valor en unidades físicas)



Finalmente, el gráfico 2 muestra el comportamiento de los valores críticos en las tres fechas de ejercicio en función de los parámetros del proceso estocástico de la variable de estado. El gráfico permite corroborar la tendencia creciente esperada[18] de la frontera de ejercicio óptima y la menor dispersión en los valores críticos próximos al vencimiento del derecho. Únicamente, cuando la dispersión del salto es muy elevada, y por ende la volatilidad del proceso conjunto, se observa una reducción en los valores críticos correspondientes a los momentos previos al vencimiento que indican el aplazamiento en el ejercicio del derecho.

5. CONCLUSIÓN

La simulación de Monte Carlo reúne una serie de características que la convierten en una valiosa herramienta para la valoración de derivados. En primer lugar, representa un procedimiento intuitivo, al aproximar directamente el proceso estocástico de la variable incierta. Además, se trata de una técnica flexible fruto de la generalidad de activos a los que puede aplicarse y la facilidad para incluir dependencias en el tiempo. Por último, simplifica la incorporación de múltiples fuentes de incertidumbre, debido a que la convergencia del proceso de aproximación depende linealmente del número de variables de estado.

A pesar de estas ventajas, no puede decirse que hayamos llegado a explotar todo el potencial de la simulación en la valoración de opciones. La razón de este aparente retraso se halla en la propia naturaleza de los modelos tradicionales de simulación que impide identificar la política óptima de ejercicio. El método de Monte Carlo es un procedimiento de inducción "hacia delante", que genera valores futuros de la variable a partir de su valor previo y, por tanto, no resulta apropiado para valorar activos cuyos flujos dependen de los acontecimientos

[18] Dada la vida limitada de la inversión, a medida que se aproxima el vencimiento del derecho menor es la reducción que experimenta el subyacente y, consecuentemente, el ejercicio de la opción va a ser aconsejable en un mayor número de ocasiones.

futuros, como es el caso de las opciones americanas. Recientes trabajos proponen superar esta limitación mediante la conjunción de la simulación con alguna técnica de inducción "hacia atrás" que permita su aplicación a la valoración de opciones americanas.

Acorde con este planteamiento, el presente trabajo estudia las posibilidades de flexibilización de los modelos de valoración de opciones reales mediante la combinación del método de Monte Carlo y la programación dinámica. Concretamente, proponemos un modelo que permite valorar opciones reales de estilo americano, tanto de crecimiento (compra) como de abandono (venta), cualquiera que sea el tipo de proceso estocástico de la variable de estado. Con el fin de analizar los beneficios de este enfoque, nos hemos centrado en la valoración de opciones americanas cuya variable de estado evoluciona de acuerdo con un proceso mixto que combina el recorrido aleatorio continuo con saltos discretos igualmente aleatorios. La presencia de discontinuidades aleatorias complica la valoración de las opciones americanas a través de las técnicas numéricas habitualmente empleadas –árboles binomiales y diferencias finitas– y hacen de la simulación la única técnica aplicable con cierto grado de sencillez y generalidad.

El modelo propuesto se ha aplicado a un caso de inversión real cuya valoración por los métodos tradicionales de opciones reales se documenta en Azofra *et al.* (2004). En nuestro análisis se evalúan los errores cometidos cuando suponemos que la variable de estado evoluciona según un proceso continuo, del tipo geométrico browniano, y se omite la posibilidad de ocurrencia simultánea de saltos aleatorios, que reflejan la discontinuidad natural que caracteriza el devenir de los acontecimientos económicos.

En términos generales, hemos observado que la discontinuidad aleatoria con valor medio nulo de la variable de estado modifica el valor de las opciones de ampliación y reducción, especialmente cuando la influencia de la variación continua es menor y la dispersión del salto es elevada. Además, el efecto combinado del salto y de la existencia de restricciones reales motivadas por la capacidad productiva máxima de la inversión o la propia naturaleza de la variable de estado multiplican las diferencias detectadas en las estimaciones.

Comoquiera que la influencia de los saltos aleatorios no es cuantificada en la valoración obtenida a partir de las técnicas numéricas tradicionales, la estimación del VAN ampliado o extendido puede conducir a errores similares a los cometidos en la utilización del tan criticado modelo de descuento de flujos. Los errores más acusados son cometidos en la valoración de la opción de ampliación para los mencionados niveles de variación continua. En estos casos, la omisión de las discontinuidades en la valoración implica la aparición de sesgos –a la baja cuando la dispersión del salto es reducida y al alza en caso contrario– que pueden conducir a la adopción de decisiones ineficientes de inversión.

En niveles reducidos de volatilidad discreta, la infravaloración de la opción de ampliación puede llevar al aplazamiento sub-óptimo del ejercicio del derecho e incluso al rechazo de proyectos rentables. Por su parte, la sobrevaloración a la que conducen los modelos tradicionales de opciones reales en el caso elevada dispersión del salto puede llegar a justificar la aceptación de proyectos de VAN ampliado negativo. Finalmente, la probabilidad de ejercicio anticipado no óptimo de la opción de reducción se incrementa con la influencia relativa de la volatilidad discreta, pudiendo implicar la renuncia de posteriores flujos de tesorería positivos, excepto en el caso en que el derecho se revele ineficaz por mor de la positiva evolución esperada del subyacente.

Aunque en este trabajo hemos analizado únicamente la influenza de saltos aleatorios de valor medio nulo, de los resultados comentados se desprende que la influencia de las discontinuidades sobre el valor de las opciones será aún más acentuada y, por tanto, los errores a los que conducirán los modelos convencionales de opciones reales más pronunciados. En suma, las diferencias observadas permiten justificar el esfuerzo que requiere la flexibilización de los modelos de valoración de opciones reales cuando las características de las oportunidades de inversión a disposición de la empresa recomienden la consideración del ejercicio en más de una fecha futura y la incorporación de procesos estocásticos distintos del geométrico browniano puro.

Referencias bibliográficas

Alberti, M, A. León y G. Llobet (2004): "Evaluation of a Taxi Sector Reform: A Real Options Approach", *3rd Portuguese Finance Network*, Julio, Lisboa.

Azofra, V.; G. Fuente y J. M. Fortuna (2004): "Las Opciones Reales en la Industria de Componentes del Automóvil: Una Aplicación a la Valoración de una Inversión Directa en el Exterior", *Cuadernos de Economía y Dirección de Empresas*, 18, pp. 97-120.

Barranquand, J. y D. Martineau. (1995): "Numerical Valuation of High Dimensional Multivariate American Securities", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 30:3, pp. 383-405.

Bossaerts, P. (1989): "Simulation Estimators of Optimal Early Exercise", *Documento de trabajo de la Universidad Carnegie Mellon*.

Boyle, P. P. (1977): "Options: A Monte Carlo Approach", *Journal of Financial Economics*, 4, pp. 323-338.

Broadie, M. y P. Glasserman (1997a) "Pricing American-Style Securities Using Simulation", *Journal of Economic Dynamics and Control*, 21:8-9, pp. 1323-1352.

Broadie, M. y P. Glasserman (2004): "A Stochastic Mesh Method for Pricing High-Dimensional American Options", *Journal of Computional Finance,* 7:4.

Broadie, M.; P. Glasserman y G. Jain (1997): "Enhanced Monte Carlo Estimates for American Options Prices", *Journal of Derivatives*, 5, pp. 25-44.

Brennan, M. y E. S. Schwartz (1978): "Finite Difference Methods and Jump Processes Arising in the Pricing of Contingent Claims: A Synthesis", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 13, pp. 461-474.

Brennan, M. y E. S. Schwartz (1985): "Evaluating Natural Resource Investments", *Journal of Business*, 58, pp. 135-157.

Copeland, T. E. (2000): "New developments in valuation", *en L. KEULENEER; D. SWAGERMAN y W. VERHOOG (eds.): Strategic Finance in the 21st Century (15 experts opinions)*, nº 8.

Cortazar, G. (2001): "Simulation and Numerical Methods in Real Options Valuation", en E. S. SCHWARTZ and L. TRIGEORGIS (eds.): *Real Options and Investment Under Uncertainty: Classical Readings and Recent Contributions*, MIT Press.

Cortazar, G. y E. S. Schwartz (1998): "Monte Carlo Evaluation Model of an Undeveloped Oil Field", *Journal of Energy Finance & Development*, 3, pp. 73-84

Cox, J. C.; S. A. Ross y M. Rubinstein (1979): "Option Pricing: A Simplified Approach", *Journal of Financial Economics*, 7, pp. 229-263.

Ekern S. (1988): "An Option Pricing Approach to Evaluating Petroleum Projects", *Energy Economics*, 10:2, pp. 91-99.

Grant, D.; G. Vora y D. Weeks (1996): "Simulation and the Early-Exercise Option Problem", *Journal of Financial Engineering*, 5:3, pp. 211-227.

Grant, D., G. Vora y D. Weeks (1997): "Path-Dependent Options: Extending the Monte Carlo Simulation Approach", *Management Science*, 43:11, pp. 1589-1602.

Hull, J. (1993): *Options, Futures, and other Derivative Securities*, 2/e, Prentice Hall.

Hull, J. y A. White (1993): "Efficient Procedures for Valuing European and American Path-Dpendent Options", *Journal of Derivatives*, 1, pp. 21-23.

Ibañez, A.y F. Zapatero (2001): "Monte Carlo Valuation of American Options Through Computation of the Optimal Exercise Frontier", *Documento de trabajo del Instituto Tecnológico Autónomo de México & Universidad South California*.

Ingersoll, J. y S. Ross (1992): "Waiting to Invest: Investment and Uncertainty", *Journal of Business*, 65:1, pp. 1-29.

Juan, C.; F. Olmos; J.C. Pérez y T. Casasus (2001): "Optimal Investment Management of Harbour Infrastructures. A Real Option Viewpoint", *6th International Conference on Real Options*, Julio, Chipre.

Lamothe, P. y R. Aragón (2002): "Valoración Racional de Acciones de Internet: El Caso Europeo", *X Foro de Finanzas*, Noviembre, Sevilla.

León, A. y D. Piñeiro (2003): "Pharmamar: Una Aplicación de la Teoría de Opciones Reales a la Valoración de Empresas Farmacéuticas", *XI Foro de Finanzas*, Noviembre, Alicante.

Lander, D. y G. Pinches (1998): "Challenges to the Practical Implementation of Modeling and Valuing Real Options", *Quarterly Review of Economics and Finance*, 38, pp. 537-567.

Lee, C. J. (1988): "Capital Budgeting Under Uncertainty: The Issue of Optimal Timing". *Journal of Business Finance and Accounting*, 15:2, pp. 155-168.

Longstaff, F. A. y E. S. Schwartz (2001): "Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach", *Review of Financial Studies*, 14:1, pp. 113-147.

McDonald y Siegel (1986): "The Value of Waiting to Invest", *Quarterly Journal of Economics*, 101:4, pp. 707-727.

Merton, R. C. (1976): "Option Pricing When Underlying Stock Returns Are Discontinuous", *Journal of Financial Economics*, 3, pp. 125-144.

Myers, S. C. (1977): "Determinants of Corporate Borrowing", *Journal of Financial Economics*, 5, pp. 147-175.

Myers, S. C. (1996): "Fischer Black´s Contributions to Corporate Finance", *Financial Management*, 25:4, pp. 95-103.

Navas, J. F. (2004): "A Note on Jump-Diffusion Model for Asset Returns", *Journal of Derivatives*, próxima publicación.

Newton, D. P. y A. W. Pearson (1994): "Application of OPT to R&D", *R&D Management*, 24:1, pp. 83-89.

Pindyck, R. (1991): "Irreversibility, uncertainty and investment", *Journal of Economic Literature*, 39, pp. 1110-1148.

Raymar, S. y M. Zwecher (1997): "Monte Carlo Estimation of American Call Options on the Maximum of Several Stocks", *Journal of Derivaties*, 5:1, pp. 7-23.

Schwartz, E. S. (2004): "Patents and R&D as Real Options", *Economics Notes*, 33:1, pp. 23-54.

Schwartz, E. S. y M. Moon (2000): "Rational Pricing of Internet Companies", *Financial Analyst Journal*, 56:3, pp. 62-75.

Schwartz, E. S. y M. Moon (2001): "Rational Pricing of Internet Companies Revisited", *Financial Review*, 36, pp. 7-26.

Schwartz, E. S. y K.R. Miltersen (2002): "R&D investments with competitive interactions". *NBER Documento de trabajo,* núm.W10258

Tilley, J.A. (1993): "Valuing American Options in a Path Simulation Model", *Transactions of the Society of Actuaries*, 45, pp. 83-104.

Trigeorgis, L. (1996). *Real options. Managerial flexibility and strategy in resource allocation*, MIT Press.