ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (EDO'S)

Ejercicio 1. Escribid la siguiente ecuación diferencial ordinaria de tercer orden $x''' - sen(x'') + e^t x' + 2t\cos x = 25$ como un sistema de ecuaciones de primer orden.

Ejercicio 2. Estudiad la consistencia y la estabilidad de los siguientes métodos numéricos, indicando si son convergentes:

a. $y_{n+2} - y_{n+1} = \frac{h}{3}\left(3f_{n+1} - 2f_n\right)$

b. $y_{n+3} - y_{n+2} + 2y_{n+1} = \frac{h}{2}\left(f_{n+3} + 5f_{n+2} - 2f_n\right)$

Ejercicio 3. Probad que los métodos numéricos dados, en la notación usual, por la expresión $y_{n+2} - (1+\alpha)y_{n+1} + \alpha y_n = \frac{h}{2}\left(f_{n+2} + (1+\alpha)f_{n+1} - \alpha f_n\right)$ son consistentes para todo α real distinto de 1.

Ejercicio 4. Aproximad la solución del siguiente PVI para h = 0.5:

$$y'(x) = \frac{1}{x}(y^2 + y); \quad 1 \le x \le 3$$
$$y(1) = -2$$

Ejercicio 5. Resolved aproximadamente el siguiente PVI tomando h = 0.2:

$$y'(x) = \cos(y); \quad 0 \le x \le 1$$
$$y(0) = 0$$

Comprobad las soluciones aproximadas obtenidas con la solución exacta.

Ejercicio 6. Dado el PVI $\begin{cases} y' = \frac{2}{t}y + t^2 e^t; \quad 1 \le t \le 2 \\ y(1) = 0 \end{cases}$, cuya solución exacta es $y(t)=t^2(e^t-e)$,

a. Calculad una solución aproximada (con h = 0.1) y comparadla.
b. Utilizad el apartado a. y los conocimientos de interpolación lineal para aproximar los valores de y en los puntos 1.052, 1.555, 1.978, y comparadlos con los valores reales.

Ejercicio 7. Resolved los siguientes PVI:

a. $\left\{\begin{array}{l} y'(x) = x^2 - 3y; \quad 0 \le x \le 0.4 \\ y(0) = 1 \end{array}\right\}$, con h = 0.1.

b. $\left\{\begin{array}{l} y'(x) = \frac{2}{x}y + x^2 e^x; \quad 1 \le x \le 2 \\ y(1) = 0 \end{array}\right\}$, con h = 0.2.

c. $\left\{\begin{array}{l} y'(x) = sen(y) + x; \quad 0 \le x \le 1 \\ y(0) = 1 \end{array}\right\}$, con h = 0.25.

d. $\left\{\begin{array}{l} y'(x) = x^2 y - y; \quad 0 \le x \le 2 \\ y(0) = 1 \end{array}\right\}$, con h = 0.25.

e. $\left\{\begin{array}{l} y'(x) = \dfrac{1}{y(1+e^x)}; \quad 0 \le x \le 2 \\ y(0) = 1 \end{array}\right\}$, con h = 0.2.

f. $\left\{\begin{array}{l} x'(t) = \dfrac{tx - x^2}{t^2}; \quad 1 \le t \le 3 \\ x(1) = 2 \end{array}\right\}$, con h = 0.2.

Ejercicio 8. La ley de enfriamiento de Newton establece que $\dfrac{dT}{dt} = -k(T - T_0)$, donde $T(t)$ es la temperatura de un objeto en el instante t y T_0 es la temperatura ambiente. Una taza de café tiene una temperatura de 80ºC y se encuentra en una habitación con una temperatura ambiente de 20ºC. En este caso, k = 0.080. Obtened una tabla de temperaturas del café en los siguientes 10 minutos, a intervalos de 30 segundos.

Ejercicio 9. En un circuito eléctrico se dispone de un condensador con capacidad constante de C = 1.1 faradios y una resistencia constante de R = 2.1 ohmios. Se le aplica un voltaje $E(t) = e^{-0'06\,\pi\, t}$ sen $(2t - \pi)$. Sabiendo que la intensidad en el instante inicial es $I(0) = 1$ amperio, obtened el valor aproximado de la intensidad cada décima de segundo durante los dos primeros segundos, comparando las aproximaciones obtenidas por los distintos métodos. (Observación: la ecuación diferencial que rige el comportamiento de un circuito eléctrico es $R\dfrac{dI}{dt} + \dfrac{I}{C} = \dfrac{dE}{dt}$).

Ejercicio 10. Un proyectil de masa m = 0.11 Kg se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial $v(0)$ = 8 m/s y se va frenando debido a la fuerza de la gravedad $F_g = -\,m\,g$ y a la resistencia del aire $F_r = -\,k\,v^2$, donde g = 9.8 m/s^2 y k = 0.002 kg/m. La ecuación diferencial para la velocidad está dada por $m\,v' = -\,m\,g - k\,v^2$. Obtened la velocidad y determinad con un error inferior a una décima de segundo el instante en que el proyectil alcanza su altura máxima y empieza a caer.