Ecuaciones diferenciales ordinarias: EDO's

Una ***ecuación diferencial ordinaria*** de orden k es una relación entre la variable independiente x, la variable dependiente y(x), y las sucesivas derivadas de esta última hasta el orden k, y'(x),y''(x),…,y^k(x).

Se puede escribir : $F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(k}(x)) = 0$ o bien

$$y^{(k} = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(k-1}(x)) \quad y' = f(x,y) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

Una ecuación en ***derivadas parciales*** es una relación del tipo:

$$F = (x, y(x), u(x,y), \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \dots) = 0$$

Definición: Se denomina **solución** de una EDO de primer orden, $y' = f(x,y)$, a toda función $y = s(x)$ tal que satisface la siguiente igualdad: $y' = f(x, s(x))$

Definición: Se denomina **solución general** de una EDO de primer orden, $y' = f(x,y)$, a toda función $y=s(x,C)$, donde $C\in\mathbb{R}$, tal que satisface la siguiente igualdad: $f(x,s(x,C))=y'$ Para cada valor concreto de la constante C se obtendrá una **solución particular** de la EDO.

Definición: Se denomina **sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias** de primer orden a una relación del tipo:

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_m) \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_m) \\ &\dots \\ y_m' &= f_m(x, y_1, y_2, \dots, y_m) \end{aligned}$$

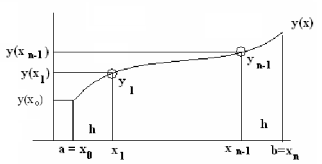
$$\begin{aligned} \bar{y}' &= (y'_1, y'_2, \dots, y'_m) \\ \bar{y} &= (y_1, y_2, \dots, y_m) \\ \bar{f} &= (f_1, f_2, \dots, f_m) : \mathrm{RxR}^m \to \mathrm{R}^m \end{aligned}$$

$$\boxed{\bar{y}' = \bar{f}(x, \bar{y})} \Rightarrow (y'_1, y'_2, \dots, y'_m) =$$
$$= (f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_m), f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_m), \dots f_m(x, y_1, y_2, \dots, y_m))$$

Definición: Se llama **problema de Cauchy** ó problema del valor inicial (PVI) al conjunto formado por una EDO y una condición inicial: $\begin{cases} y' = f(x,y), & x \in [a,b] \\ y_0 = y(x_0) \end{cases}$

- Métodos de paso simple o unipaso: Se calcula $y(x_{i+1})$ a partir de la información proporcionada por $y(x_i)$.
- Métodos de paso múltiple o multipaso: Se calcula $y(x_{i+1})$ a partir de la información proporcionada por los valores $y(x_i)$, …, $y(x_{i-p})$, y del teorema fundamental del cálculo, según el cual: $y(x_i) = y(x_j) + \int_{x_j}^{x_i} f(x,y)dx$

Notación



$x_i = x_0 + hi; \quad 0 \le i \le n$

$h = \dfrac{b-a}{n}$

$y(x_i)$ = valor exacto

y_i= valor aproximado

Error global: en el paso i-ésimo viene dado por $E_i = y(x_i) - y_i$.
Error local: en el paso i-ésimo es $e_i = \hat{y}(x_i) - y_i$, donde $\hat{y}(x_i)$ es la solución exacta del siguiente PVI: $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y_{i-1} = \hat{y}(x_{i-1}) \end{cases}$
(El error cometido en cada paso)

Sistemas acoplados

Definición: Se dice que un sistema está **acoplado** cuando las funciones $f_i = y_i'$ dependen de todas las variables. En otro caso se dice que el sistema está **desacoplado**.

Definición: Se llama **solución** del sistema acoplado a una lista de funciones tales que al sustituirlas en el sistema se obtenga una identidad.

Definición: Dado un sistema de ecuaciones, si todas las condiciones impuestas se refieren al mismo punto tendremos un **problema de valor inicial** o problema de Cauchy:

$$y_1(a)=\eta_1$$
$$\ldots$$
$$y_m(a)=\eta_m$$

Definición: Si las condiciones impuestas se refieren a diferentes puntos el problema se llama **problema de contorno.**

Ecuaciones diferenciales de orden superior

En general una ecuación diferencial de orden superior se transforma en un sistema de ecuaciones de primer orden.

Teorema de existencia y unicidad de Picard

Enunciado: Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$ y f: (a,b) × $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación diferenciable.

Dado un punto $y_0 \in U$, para cada $x_0 \in (a,b)$ y para todo $\varepsilon > 0$, suficientemente pequeño, existe una única función h : $[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon] \to B(y_0,r)$ solución del problema de valor inicial (P.V.I.) cuyo sistema es:

$$y' = f(x,y)$$
$$y(x_0)=y_0$$

Definición: Un **método numérico** es una ecuación en diferencias que contiene un cierto número de aproximaciones sucesivas y consecutivas y_{n+j} que permiten calcular secuencialmente la sucesión y_n.

Clasificación: Si llamamos $f_n = f(x_n, y_n)$ y tenemos y_n, y_{n+1}, y_{n+2}, …, y_{n+k}, llamamos k al número de paso del método numérico.

- Si k=1, es un método de **paso simple** o unipaso. Si k>1, se llama método de **paso múltiple** o multipaso
- Si se puede calcular explícitamente el término más alto **Método explícito**, sino **Método implícito.**

Definición: Un método numérico se dice que es **lineal** cuando aparecen únicamente combinaciones lineales de y_i, los coeficientes de éstas son números y no funciones

$$\sum_{j=0,k} \alpha_j y_{n+j} = h\phi_f\left(y_{n+k}, y_{n+k-1}, \ldots, y_n, x_n, h\right)$$

1. Si $f \equiv 0 \Rightarrow \phi_f = 0$.
2. $\left\|\phi_f\left(y_{n+k}, y_{n+k-1}, \ldots, y_n, x_n, h\right) - \phi_f\left(y^*_{n+k}, y^*_{n+k-1}, \ldots, y^*_n, x_n, h\right)\right\| \leq$ $\leq M \sum_{j=0,k} \left\|y_{n+j} - y^*_{n+j}\right\|$

Teorema de DAHLQUIST (1956): La condición necesaria y suficiente para que un método numérico sea convergente es que sea consistente y sea cero-estable.

$$y_n \xrightarrow{h\to 0} y(x_n)$$

Definición: Un método numérico es **cero-estable** (estable) cuando pequeñas perturbaciones de las condiciones iniciales del problema, producen pequeñas perturbaciones de la solución.

Cero-estabilidad

Definición: Se llama **polinomio característico** del método numérico al polinomio cuyos coeficientes son los α_j: $p(x) = \sum_{j=0,k} \alpha_j x^j$

Definición: La **ecuación característica** del método será:

$$p(x) = \sum_{j=0,k} \alpha_j x^j = 0$$

Teorema: La condición necesaria y suficiente para que un método numérico sea cero-estable es que todas las raíces del polinomio característico sean de módulo ≤ que 1, y las de módulo 1 deben ser simples (i.e., no pueden ser raíces de la derivada).

Consistencia

$$\sum_{j=0,k} \alpha_j y_{n+j} = h\phi_f\left(y_{n+k}, y_{n+k-1}, \ldots, y_n, x_n, h\right) \qquad y_n \xrightarrow{h \to 0} y(x_n)$$

$$\sum_{j=0,k} \alpha_j y(x_{n+j}) - h\phi_f\left(y(x_{n+k}), y(x_{n+k-1}), \ldots, y(x_n), x_n, h\right) = R_{n+k}$$

Error de truncamiento local

Definición: Un método numérico es **consistente** si:

$$\lim_{h\to 0} \frac{R_{n+k}}{h} = 0 \qquad \begin{cases} p(1) = 0 \\ y'(x_n) = \dfrac{\phi_f\left(y(x_n), y(x_n), \ldots y(x_n), x_n, 0\right)}{p'(1)} \end{cases}$$

Métodos de paso simple

Se calcula $y(x_{i+1})$ a partir de la información proporcionada por $y(x_i)$.

Métodos de Taylor

Métodos de Runge-Kutta

Métodos de Taylor

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2!} y''(x_i) + \ldots + \frac{h^n}{n!} y^n(x_i) + R_n; \quad h = x_{i+1} - x_i$$

$$y(x_{i+1}) = y_i + hf(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2!} f'(x_i, y_i) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^{n-1}(x_i, y_i); \quad h = x_{i+1} - x_i$$

Método de Euler: $y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$

Cota del error local: $|e_i| \le \dfrac{h^2 M}{2}; \quad M = \sup_{\xi \in (x_{i-1}, x_i)} |y''(\xi)|$

Definición: Se define el **método general de Runge-Kutta** de s etapas para el problema de valor inicial

$$\left.\begin{matrix} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{matrix}\right\} \quad f : RxR^m \to R^m$$

por la expresión: $y_{n+1} = y_n + h\sum_{i=1,s} b_i k_i$

donde $k_i = f\left(x_n + c_i h, y_n + h\sum_{j=1,s} a_{ij} k_j\right) \quad i = 1, \ldots, s$

Llamamos $c_i = \sum_{j=1,s} a_{ij} \quad i = 1, \ldots, s$

Diagrama o Esquema de Butcher

$$\begin{array}{c|cccc} c_1 & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1s} \\ c_2 & a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2s} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_s & a_{s1} & a_{s2} & \ldots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & b_2 & \ldots & b_s \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ c_2 & a_{21} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_s & a_{s1} & a_{s2} & \ldots & 0 \\ \hline & b_1 & b_2 & \ldots & b_s \end{array}$$

métodos explícitos o clásicos de Runge Kutta.

Teorema. La condición necesaria y suficiente para que un método de Runge-Kutta de s etapas sea convergente es que $b_0 + b_1 + \ldots + b_s = 1$

Definición: Se llama **error de truncamiento local**, y se representa por T_{n+1} a la siguiente expresión:

$T_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1}$, suponiendo que $y_n = y(x_n)$, es decir que es exacto en la etapa anterior.

Método general de Runge-Kutta

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{j=1,s} b_i k_i \qquad k_i = f\left(x_n + c_i h, y_n + h \sum_{j=1,s} a_{ij} k_j \right)$$

Método de Runge Kutta de 1 etapa: ($s = 1$) $\quad b_1 = 1$

$$y_{n+1} = y_n + hf$$

Métodos de Runge Kutta de 2 etapas: ($s = 2$)

$$b_1 + b_2 = 1 \qquad b_2 c_2 = \frac{1}{2}$$

Métodos de Runge Kutta de 2 etapas:

Método modificado de Euler

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array} \qquad y_{n+1} = y_n + hk_2 \qquad \begin{cases} k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} k_1 \right) \end{cases}$$

Método mejorado de Euler

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \qquad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \begin{cases} k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + h, y_n + hk_1) \end{cases}$$

Métodos de Runge Kutta de 3 etapas:

$$b_1 + b_2 + b_3 = 1$$

$$b_2 c_2 + b_3 c_3 = \frac{1}{2}$$

$$b_2 c_2^2 + b_3 c_3^2 = \frac{1}{3}$$

$$a_{32} b_3 c_2 = \frac{1}{6}$$

Método de Kutta de tercer orden

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \hline & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{array}$$

Método de Heun de tercer orden

Ejercicio: Resolved mediante un método de Runge Kutta de orden 3, el siguiente P.V.I, comparando el resultado con los obtenidos antes:

$$y' = \frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} - y^2 \qquad 1 \le x \le 2$$

$$y(1) = -1$$

Métodos de Runge Kutta de orden 4:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \qquad 0 \le i \le n-1$$

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} k_1 \right)$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} k_2 \right)$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3)$$

- Métodos de paso simple o unipaso: Se calcula $y(x_{i+1})$ a partir de la información proporcionada por $y(x_i)$.
- Métodos de paso múltiple o **multipaso**: Se calcula $y(x_{i+1})$ a partir de la información proporcionada por los valores $y(x_i)$, …, $y(x_{i-p})$, y del teorema fundamental del cálculo, según el cual:

$$y(x_i) = y(x_j) + \int_{x_j}^{x_i} f(x,y)dx$$

$$[x_{p-k}, x_{p+1}] \qquad y(x_{p+1}) = y(x_{p-k}) + \int_{x_{p-k}}^{x_{p+1}} f(x,y)dx$$

Se sustituye $f(x, y)$ por un polinomio de interpolación.

Métodos de Adams-Bashford

Corresponden al caso en el que $k = 0$

$$y(x_{p+1}) = y(x_p) + \int_{x_p}^{x_{p+1}} P_q(x)dx$$

$$y(x_{p+1}) = y(x_p) + h(A_0 f_p + A_1 f_{p-1} \ldots + A_q f_{p-q}) \quad 0 \le p \le n\text{-}1$$

1. Orden 2: $q = 1$

$$y(x_{p+1}) = y(x_p) + \int_{x_p}^{x_{p+1}} P_1(x)dx \qquad y_{p+1} = y_p + \frac{h}{2}\left(3f_p - f_{p-1}\right)$$

1. Orden 4: $q = 3$ $\quad y(x_{p+1}) = y(x_p) + \int_{x_p}^{x_{p+1}} P_3(x)dx$

$$y_{p+1} = y_p + \frac{h}{24}\left(55f_p - 59f_{p-1} + 37f_{p-2} - 9f_{p-3}\right)$$

Métodos de predicción-corrección

Utilizan de modo combinado dos métodos multipaso.

$$y(x_{p+1}) = y(x_{p-k}) + \int_{x_{p-k}}^{x_{p+1}} f(x,y)dx$$

Es un método implícito, se necesita $f_{p+1} = f(x_{p+1}, y_{p+1})$ para calcular y_{p+1}.

Métodos de predicción-corrección

Este obstáculo se salva de la siguiente manera:

1. Se calcula por algún método explícito una primera estimación $\overline{y}_{p+1}$ de y_{p+1}, (valor predicho de y_{p+1}). La fórmula que lo proporciona se denomina **fórmula predictora**.
2. Dada una estimación $\overline{y}_{p+1}$, se calcula $\overline{f}_{p+1} = f(x_{p+1}, \overline{y}_{p+1})$, y una nueva estimación para $\tilde{y}_{p+1}$. La fórmula que lo proporciona se denomina **fórmula correctora**

Método de predicción-corrección de orden 2.

En este método la **fórmula predictora** que se utiliza es la fórmula de Adams-Bashford de orden 2:

$$\overline{y}_{p+1} = y_p + \frac{h}{2}\left(3f_p - f_{p-1}\right)$$

La **fórmula correctora** que se usa viene dada por la siguiente expresión:

$$\tilde{y}_{p+1} = y_p + \frac{h}{2}\left(\overline{f}_{p+1} - f_p\right)$$

Métodos de Adams- Moulton de orden 4:

$$y_p = y_{p-1} + \int_{x_{p-1}}^{x_p} f(x,y)dx$$

La **fórmula predictora** es la de Adams-Bashford de orden 4

$$\overline{y}_{p+1} = y_p + \frac{h}{24}\left(55f_p - 59f_{p-1} + 37f_{p-2} - 9f_{p-3}\right)$$

La **fórmula correctora** es:

$$\tilde{y}_{p+1} = y_p + \frac{h}{24}\left(9\overline{f}_{p+1} + 19f_p - 5f_{p-1} + f_{p-2}\right)$$

Métodos de Milne de orden 4

La **fórmula predictora** es la dada por un método multipaso de orden 4 con p=3

$$\overline{y}_{p+1} = y_{p-3} + \frac{4h}{3}\left(2f_p - f_{p-1} + 27f_{p-2}\right)$$

La **fórmula correctora** utiliza un método multipaso con p=1 y r = 2:

$$\tilde{y}_{p+1} = y_{p-1} + \frac{h}{3}\left(\overline{f}_{p+1} + 4f_p + f_{p-1}\right)$$

Observaciones:

1. Existen otros métodos multipaso derivados de la integración numérica:
   - Método de Nyström
   - Método de Milne-Simpson generalizado
2. Existen métodos multipaso sustituyendo f (x, y) por otro tipo de polinomios, especialmente para enfrentarse a ecuaciones diferenciales cuya solución tiene componentes altamente oscilatorios, como polinomios trigonométricos, es decir, aproximando f(x,y(t)) por funciones exponenciales convenientes

Observaciones:

Existen también métodos basados en derivación numérica, sustituyendo y(x) por un polinomio de interpolación y derivándolo en $y'(x) = f(x, y(x))$