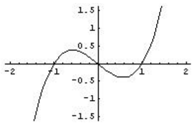
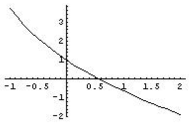
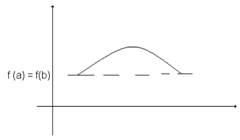
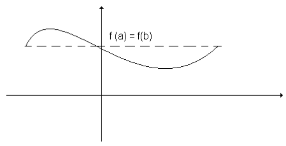
Teorema de Bolzano. Si *f* es una función continua en [a,b] y tal que sign(*f*(a)) ≠ sign(*f*(b)), entonces existe al menos un punto $c \in (a,b)$ tal que *f*(c)=0



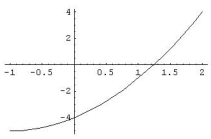


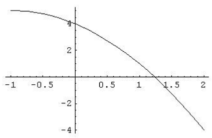
Teorema de Rolle. Si $f \in C^1([a,b])$ y es tal que *f*(a)=*f*(b), entonces existe al menos un punto $c \in (a,b)$ tal que $f'(c)=0$.



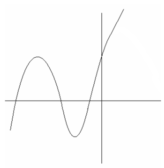


Teorema separación de raíces. Si $f \in C^1([a,b])$ es tal que sign(f(a))≠sign(f(b)) y f' posee signo constante en (a,b), entonces *f*(x) = 0 posee una única raiz $c \in (a,b)$.

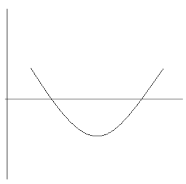


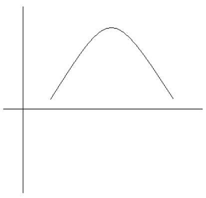


Teorema. Si $f \in C^1([a,b])$ es tal que sign(f(a))≠sign(f(b)) y f' sólo se anula en n puntos del intervalo (a,b), entonces *f* tendrá a lo sumo n+1 raíces.



Teorema. Si $f \in C^1([a,b])$ y es tal que f'' tiene signo constante en [a,b], entonces *f* tiene, a lo sumo, dos raíces reales en [a,b].



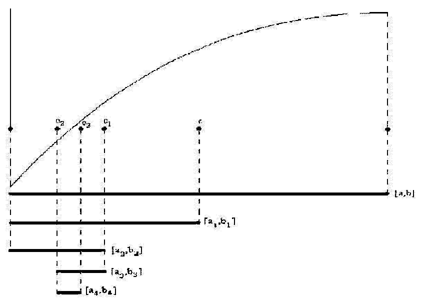


Una vez aisladas las raíces de f(x) = 0 aplicaremos uno de los siguientes métodos para calcularlas

- Método de la Bisección.
- Método de Newton-Raphson.
- Método del Punto Fijo

Introducción
Errores
Aproximación de raíces
Interpolación
Resolución Numérica de EDO's

Cálculo de las raíces
Bisección



Departamento de Matemática Aplicada — Cálculo Numérico

Introducción
Errores
Aproximación de raíces
Interpolación
Resolución Numérica de EDO's

Cálculo de las raíces
Bisección

1. Se calcula el punto medio del intervalo [a,b]: c=((a+b)/2)
   Se estudia el valor de dicho punto medio
   - Si *f* (c)=0 entonces hemos acabado.
   - Si *f* (c)≠0 elegimos de entre [a,c] y [c,b] el intervalo en el que se satisfaga el Teorema de Bolzano y lo denotamos por $[a_1,b_1]$.
2. Se calcula el punto medio del intervalo $[a_1,b_1]$: $c_1=((a_1+b_1)/2)$.Se estudia el valor de dicho punto medio:
   - Si *f* $(c_1)=0$ entonces hemos acabado.
   - Si *f* $(c_1)\neq 0$ elegimos de entre $[a_1,c_1]$ y $[c_1,b_1]$ el intervalo en el que se satisfaga el Teorema de Bolzano y lo denotamos por $[a_2,b_2]$.

Departamento de Matemática Aplicada — Cálculo Numérico

Introducción
Errores
Aproximación de raíces
Interpolación
Resolución Numérica de EDO's

Cálculo de las raíces
Bisección

3. Se calcula el punto medio del intervalo $[a_1,b_1]$: $c_2=((a_2+b_2)/2)$.Se estudia el valor de dicho punto medio:
   - Si *f* $(c_2)=0$ entonces hemos acabado.
   - Si *f* $(c_2)\neq 0$ elegimos de entre $[a_2,c_2]$ y $[c_2,b_2]$ el intervalo en el que se satisfaga el Teorema de Bolzano y lo denotamos por $[a_3,b_3]$.

4 …

Obtenemos así una sucesión de intervalos que contienen la raíz α y cuya longitud tiende a cero.

$$|b_n-a_n|=\frac{|b-a|}{2^n} \qquad |\alpha-c_n|\le\frac{|b_n-a_n|}{2}\le\frac{|b-a|}{2^{n+1}}$$

Departamento de Matemática Aplicada — Cálculo Numérico

Introducción
Errores
Aproximación de raíces
Interpolación
Resolución Numérica de EDO's

Cálculo de las raíces
Bisección

Si queremos que el error cometido en el cálculo de la raíz sea inferior ε entonces el número mínimo de iteraciones n que hemos de hacer del anterior algoritmo debe satisfacer la siguiente desigualdad:

$$\text{error}<\frac{b-a}{2^{n+1}}<\varepsilon$$

Teorema: Si $[a, b]$, $[a_1, b_1]$, ..., $[a_n, b_n]$, denotan los intervalos del método de la bisección, entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha \qquad \lim_{n\to\infty} c_n=\alpha \qquad |\alpha-c_n|\le\frac{|b-a|}{2^{n+1}}$$

Departamento de Matemática Aplicada — Cálculo Numérico

Introducción
Errores
Aproximación de raíces
Interpolación
Resolución Numérica de EDO's

Cálculo de las raíces
Newton-Raphson o Tangente

Teorema. Sea y = $f(x)$ una función tal que $f\in C^2([a,b])$, y además:

1. sign (f(a)) ≠ sign ($f(b)$).
2. sign ($f''(x)$) es constante para todo $x\in[a,b]$.

Entonces, si $x_0\in[a,b]$ es un punto cualquiera en el que se verifica que $f(x_0)\cdot f''(x_0)>0$, la sucesión definida por:

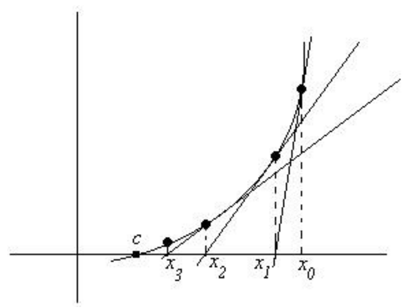
$$x_n=x_{n-1}-\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

converge a un punto c ∈ [a,b] tal que *f* (c)=0.

Departamento de Matemática Aplicada — Cálculo Numérico

Introducción
Errores
Aproximación de raíces
Interpolación
Resolución Numérica de EDO's

Cálculo de las raíces
Newton-Raphson o Tangente



Departamento de Matemática Aplicada — Cálculo Numérico

Introducción
Errores
Aproximación de raíces
Interpolación
Resolución Numérica de EDO's

Cálculo de las raíces
Newton-Raphson o Tangente

Además, en estas condiciones, existen dos constantes m y M tales que $\forall x \in [a,b]$, se verifica:

$$\boxed{m \le |f'(x)|} \ \text{y} \ M \ge |f''(x)|$$

de tal forma que sendas cotas del error cometido al considerar a x_n como solución de la ecuación $f(x)=0$ son, respectivamente

$$\boxed{\varepsilon \le \frac{|f(x_n)|}{m}} \qquad \varepsilon \le \frac{M}{2m}(x_n - x_{n-1})^2$$

Departamento de Matemática Aplicada — Cálculo Numérico

Introducción
Errores
Aproximación de raíces
Interpolación
Resolución Numérica de EDO's

Cálculo de las raíces
Newton-Raphson o Tangente

1. Se demuestra que el signo de $f''(x)$ es constante en [a,b].
2. Se busca un $x_0 \in [a,b]$ tal que $f(x_0)\cdot f''(x_0)>0$.
3. Se calcula la constante m tal que $m \le |f'(x)|$ para todo $x\in[a,b]$.
4. Se van calculando los términos x_n dados por $x_n = x_{n-1} - \dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$ mientras que no se satisfaga la cota del error definida en

$$\varepsilon \le \frac{|f(x_n)|}{m}$$

Departamento de Matemática Aplicada — Cálculo Numérico

Introducción
Errores
Aproximación de raíces
Interpolación
Resolución Numérica de EDO's

Cálculo de las raíces
Newton-Raphson o Tangente

Rapidez en la convergencia del método de Newton-Raphson.

$$e_{n+1} = \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)} e_n^2 \qquad e_{n+1} \approx Ce_n^2$$

Teorema: Sea f'' continua y sea α un cero simple de f. Existe un entorno de α y una constante C tales que si se inicia el método de Newton-Raphson en dicho entorno, la sucesión x_n es convergente a α y:

$$|x_{n+1} - \alpha| \le C\,|x_n - \alpha|^2$$

Teorema: Si f es de clase C², creciente, convexa y tiene un cero, entonces el cero es único y el método de Newton-Raphson es convergente a partir de cualquier punto inicial.

Departamento de Matemática Aplicada — Cálculo Numérico

Introducción
Errores
Aproximación de raíces
Interpolación
Resolución Numérica de EDO's

Cálculo de las raíces
Newton-Raphson o Tangente

Resumiendo el método de Newton-Raphson:

- No siempre converge a un cero de f y acaso lo haga pero no al cero que buscábamos. Su éxito está sólo garantizado partiendo de una aproximación inicial cercana al cero buscado.
- Cuando converge, lo hace mucho más rápidamente que el método de la bisección (convergencia cuadrática).
- Requiere que la función f sea de clase C^2.
- Requiere valores de la derivada.

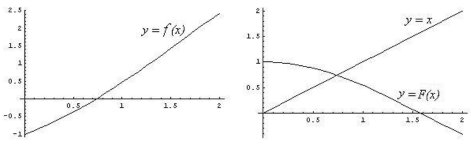
Departamento de Matemática Aplicada — Cálculo Numérico

Introducción
Errores
Aproximación de raíces
Interpolación
Resolución Numérica de EDO's

Cálculo de las raíces
Método del Punto Fijo

El método del punto fijo

Sea f(x)=0 una ecuación tal que posee una única raiz $\alpha\in[a,b]$. Este método se basa en encontrar una función y=F(x) tal que, entre otras condiciones de carácter técnico, verifique que: $f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow F(\alpha) = \alpha$



Departamento de Matemática Aplicada — Cálculo Numérico

Introducción
Errores
Aproximación de raíces
Interpolación
Resolución Numérica de EDO's

Cálculo de las raíces
Método del Punto Fijo

Definición: Se dice que x_0 es un **punto fijo** de la función y=F(x) si $F(x_0)=x_0$.

Definición: Una **iteración funcional** es el algoritmo definido por la expresión $x_{n+1} = F(x_n)$ para una cierta función $F(x_n)$

Definición: Una aplicación F: [a, b] → R se llama **contractiva** si existe un $k\in R$ con $0<k<1$, de modo que

$$\| F(x) - F(y) \| \le k\cdot\| x - y \|$$

A la constante k se la denomina **constante de contractividad.**

Departamento de Matemática Aplicada — Cálculo Numérico

Proposición. Si F es una función derivable en (a,b) y existe k ∈ R, con 0<k<1 tal que || F′(x)|| ≤ k para todo x ∈[a,b], entonces F es contractiva en [a,b].

Lema de la contracción

Si (X, || ||) es un espacio de Banach con la norma euclídea y F es una función continua contractiva de X en X, existe un único punto fijo α de F.

¿Qué relación existe entre continuidad y contractividad?

Errores en el proceso de iteración funcional.

$$\frac{e_{n+1}}{e_n^q} = \frac{1}{q!} F^q(\xi_n) \qquad \lim_{x\to\infty}\left|\frac{e_{n+1}}{e_n^q}\right| = \frac{1}{q!}\left|F^q(\alpha)\right| \neq 0$$

Teorema del punto fijo de Banach.

Sea F: [a,b]→R una función contractiva de constante k∈(0,1), tal que F([a,b]) ⊂ [a,b]. Entonces F posee un único punto fijo en [a,b], esto es, existe un único c ∈[a,b] tal que F(c)=c. Además, se verifica que c es el límite de la sucesión dada por x_n ∈[a,b], x_n arbitrario, $x_n = F(x_{n-1})$, {n ∈ N}

y se tiene la siguiente estimación del error:

$$\boxed{e_n = \|x_n - c\| \le \frac{k^n}{1-k}\|x_1 - x_0\|, \quad n\in N} \qquad e_n = \|x_n - c\| \le \frac{k}{1-k}\|x_n - x_{n-1}\|, \quad n\in N$$

El algoritmo del punto fijo para calcular la solución de f(x)=0 en [a,b] puede resumirse como sigue:

1. Se busca una función y=F(x) contractiva (|| F′(x) || < 1) con k<<1 y tal que F([a,b]) ⊂ [a,b] de modo que calcular la solución de f(x)=0 sea equivalente a calcular el punto fijo de y=F(x) en [a,b].
2. Se elige un x_0∈[a,b] y se calcula $x_1 = F(x_0)$.
3. A partir de la cota del error dada por $e_n \le \frac{k^n}{1-k}\|x_1 - x_0\|$ se calcula el número de iteraciones n necesarias.
4. Se calcula $F^n(x_0) \simeq c$.